

Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas



Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en contextos de formulación de problemas

Memoria para optar al grado de doctor
presentada por:

Juan Pedro Martín Díaz

Fecha de lectura: 11 de julio de 2022

Bajo la dirección del doctor:

Miguel Ángel Montes Navarro

Huelva, 2022



Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas



Conocimiento especializado del profesor de
matemáticas en contextos de formulación de problemas

Tesis Doctoral

Juan Pedro Martín Díaz

Dirigida por

Miguel Ángel Montes Navarro

Huelva, 2022

Esta investigación ha sido desarrollada en el marco de los proyectos *Caracterización del conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas* (EDU2013-44047-P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España y *Conocimiento Especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado (MTSK-TE)* (RTI2018-096547-B-I00), financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Tecnología.

Además, esta investigación ha sido desarrollada en el marco del grupo de investigación DESYM (HUM 0168), del Plan Andaluz de Investigación, en el centro de investigación COIDESO y en la Red MTSK, auspiciada por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Finalmente, esta investigación ha contado con la colaboración del Proyecto de Investigación Colaborativa titulado “Resolución y formulación de problemas en el aula de Matemáticas” (PIV-033/17), convocado en virtud de la Orden de 14 de enero de 2009 (BOJA núm. 21 de 2 de febrero 2009).

In memoriam

Pepe Carrillo

Agradecimientos

En este camino que ha durado 4 años de mi vida, he tenido la suerte de estar acompañado por personas maravillosas que han aportado cada día un poco de luz al largo túnel que ha supuesto la escritura de la tesis doctoral.

A mi director y compañero, Miguel Ángel. No tengo palabras para agradecer la dedicación y paciencia que me ha brindado. Siempre al pie del cañón, con consejos, ayudas y motivándome a continuar el camino. No exagero al decir que, en estos últimos meses, me ha visitado todos los días para preguntar sobre el estado de la tesis, para discutir, debatir o facilitarme lecturas. Su perspectiva, saberes y finura con la que percibe la investigación son admirables. He sido un afortunado al contar con él, porque pocos pueden presumir de haber tenido un director tan involucrado en el proceso.

A mis compañeros del Área de Didáctica de las Matemáticas a Nuria, Luis Carlos, Isabel Pascual, Myriam, Ángeles, Lorenzo, Isabel Oliveros y Mercedes. Gracias por vuestra amabilidad, vuestro criterio y comentarios en las discusiones de la tesis. Gracias también por los momentos extracurriculares. También quiero dar las gracias a mis compañeros del departamento de Didácticas Integradas y a sus famosísimos “cafés de las 11”. Gracias por las conversaciones de desconexión y el descanso del trabajo cada mañana.

A todos los compañeros que han pertenecido en algún momento al PIC, pero en especial a Inma, Rocío y Alice, fieles seguidoras del proceso de creación de la investigación y también críticas en los análisis y discusiones que realizábamos en el grupo. Sin el PIC, este trabajo no habría sido posible por ello: gracias, gracias, y gracias.

A mis amigos. A Rubén y Paxi, juntos desde que me alcanza la memoria. Creo que podría escribir un libro donde recogiera todas las vivencias, risas y buenos momentos que hemos compartido. A Manu y José Mari, mis otros dos pilares y compañeros de aventuras. En especial a Manu, por su ayuda desinteresada con la tesis en tardes de verano, en las que apetecía ir a la playa, pero me apoyaba en la transcripción y escritura. Gracias. Una parte de este trabajo también lleva tu sello.

A Antonio e Isabel, por su amabilidad, disposición y por tratarme como a un hijo más. Por los momentos familiares y por siempre tender siempre una mano cuando ha sido necesaria. A

Antonio y Encarni y, por supuesto, a mi pequeño terremoto, Alejandro. Gracias a los tres por los días y planes de desconexión y gracias a Alejandro por sus bromas, risas y juegos.

A mis padres, por ser uno de mis principales soportes. Por cuidarme y educarme durante tantos años. Gracias a los valores que me han sabido transmitir hoy puedo decir orgulloso que, por ellos, soy la persona que soy. Gracias por vuestras preguntas: ¿cómo lo llevas?, ¿falta mucho para presentarla? Para mí han supuesto pequeños empujones que me han recordado el camino que transitaba. A mi hermano, gracias por pensar siempre las cosas desde todos los ángulos posibles, por el espíritu competitivo y la afinidad que compartimos. A Nerea, por cuidar de mi hermano y por tener siempre esa sonrisa tan característica.

Por supuesto, a mi complemento perfecto, a mi compañera de aventuras, confidente, a mi otra mitad, a mi futura esposa, a Ana. Gracias por ser cómo eres, por cómo me tratas y por el apoyo incondicional que me has brindado a lo largo de este camino. Gracias por el equipo que hacemos, por las aventuras, los viajes, por todos los momentos compartidos y que nos quedan por compartir. Gracias por ser Inefable.

Para terminar, he de decir que este camino ha sido más duro que lo que habitualmente puede suponerse. Lo empecé con la mejor compañía posible y lo he terminado un poco huérfano. Terminar esto sin ti, Pepe, no ha sido fácil. Gracias por sembrar en mí el interés en la investigación, gracias por animarme siempre a continuar y a no dejar que bajara los brazos. Gracias por los momentos extracurriculares, por las tardes de bici y las mañanas de fútbol. Gracias por tu carisma, tu saber estar, tus consejos y tu humildad. Allá donde estés, te llevo siempre en mi corazón.

Índice

1	Estructura de la memoria.....	1
2	Introducción a la temática	5
3	Justificación.....	9
3.1	¿Qué es un problema?	10
3.2	¿Qué es la formulación de problemas?	12
3.3	¿Quién formula problemas?.....	13
3.3.1	El profesor como formulador de problemas.....	13
3.3.2	Estudiantes para maestro	15
3.3.3	Los alumnos	16
3.4	¿Qué relevancia tiene la formulación de problemas?	17
3.4.1	Importancia curricular de la formulación de problemas	17
3.4.2	Importancia para el aprendizaje de la formulación de problemas.....	20
3.4.3	Dificultades del profesorado asociadas a la formulación de problemas	22
3.5	CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (MTSK)	24
3.5.1	El dominio de Conocimiento Matemático (MK)	25
3.5.1.1	Conocimiento de los temas (KoT).....	25
3.5.1.2	Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM).....	26
3.5.1.3	Conocimiento de la práctica matemática (KPM).....	27
3.5.2	El dominio de Conocimiento didáctico del contenido (PCK).....	28
3.5.2.1	Conocimiento de enseñanza de las matemáticas (KMT).....	28
3.5.2.2	Conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática (KFLM).....	29
3.5.2.3	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS).....	30
3.6	Nexo de unión de las investigaciones	31
4	Aspectos metodológicos.	35
5	Resultados.....	39
5.1	Breve descripción del contenido de los artículos.....	40
5.1.1	Artículo 1.....	40
5.1.2	Artículo 2.....	40
5.1.3	Artículo 3.....	40
5.2	Artículo 1: Caracterización de problemas multiplicativos de números enteros formulados por estudiantes para maestro	41
5.3	Artículo 2: Characterisers of Teaching in a Mathematics Problem Posing Lesson in Preschool Education.....	61
5.4	Artículo 3: Conocimiento especializado para la enseñanza a través de la formulación de problemas en educación infantil	81
6	Análisis y discusión de resultados.....	101
6.1	Resultados artículo 1.....	102
6.1.1	¿Qué conocimiento matemático, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?	102
6.2	Resultados artículo 2.....	104
6.2.1	¿Qué conocimiento matemático, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?	104
6.2.2	¿Qué conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?	106
6.3	Resultados artículo 3.....	109

6.3.1	¿Qué conocimiento matemático, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?	109
6.3.2	¿Qué conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?	110
7	<i>Conclusiones y limitaciones del estudio</i>	<i>113</i>
7.1	¿Qué conocimiento especializado específico sobre formulación de problemas se pone en juego en diferentes momentos de tareas de formulación?	114
7.1.1	Conocimiento de los temas (KoT):	114
7.1.2	Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	116
7.1.3	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	117
7.1.4	Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	117
7.1.5	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	118
7.2	Reflexiones finales y limitaciones del estudio	119
7.2.1	Conclusiones respecto a los objetivos de la investigación	119
7.2.2	Limitaciones y líneas de investigación futuras	121
8	<i>Informe con el factor de impacto de las publicaciones presentadas</i>	<i>125</i>
8.1	Educação e pesquisa.....	126
8.2	Sustainability	127
8.3	Uniciencia.....	127
9	<i>Bibliografía</i>	<i>129</i>

1 Estructura de la memoria

La presente tesis doctoral ha sido realizada bajo la modalidad de compendio de artículos. En este primer apartado de Introducción expondremos la estructura que va a seguir esta memoria, con la intención de mostrar una panorámica completa de los apartados en los que se va a dividir el trabajo.

En primer lugar, con idea de situar al lector, desarrollaremos un apartado en el que se introducirá la temática de la investigación, así como la justificación del interés que nos ha motivado y llevado a realizar las investigaciones teniendo como objeto de estudio este contenido. En él desarrollaremos los elementos relacionados con la formulación de problemas desde el punto de vista escolar, así como la justificación del interés atendiendo tanto a aspectos curriculares que podemos encontrar en la normativa, como a aspectos relevantes de la propia práctica escolar de formular problemas.

Posteriormente, nos centraremos en exponer los referentes teóricos que conforman los pilares en los que se ha sustentado la investigación. En este apartado se tratará de responder a cuestiones como qué es un problema, así como qué vamos a entender por formulación de problemas. Asimismo, en relación con la formulación de problemas, vamos a exponer la importancia que tiene esta práctica matemática, así como los beneficios que puede desarrollar en el alumnado.

A continuación, el siguiente apartado a desarrollar consistirá en justificar el nexo común de las tres investigaciones que se presentan en modalidad de artículos. Para ello, expondremos un resumen de cada una de las investigaciones presentadas, mencionando qué aporta cada una para, finalmente, pasar a mencionar algunos de los resultados que las tres investigaciones han arrojado.

Una vez expuesto cómo van a relacionarse las tres investigaciones en formato artículo que se presentan en la memoria, se comentarán los aspectos metodológicos que caracterizan el enfoque general de esta investigación.

Tal y como se exige en el reglamento de los estudios de doctorado de la Universidad de Huelva, Aprobado en Consejo de Gobierno de 23 de abril de 2012 y Modificado el 19 de diciembre de 2012, 18 de julio de 2014 y 30 de octubre de 2018, el siguiente apartado estará constituido por las tres investigaciones completas que conforman la tesis doctoral.

Más adelante, se mostrará un apartado de análisis y discusión de resultados. Estos resultados se mostrarán con el objetivo de cohesionar las tres investigaciones. Para ello, utilizaremos el modelo de conocimiento matemático especializado MTSK como herramienta que nos permitirá ver elementos del conocimiento sobre formulación de problemas desde la perspectiva de cada investigación con el fin de conocer qué conocimiento se manifiesta en diferentes tareas de formulación de problemas en maestros.

Por último, mostraremos un apartado de conclusiones en el que desgranaremos y clasificaremos el conocimiento especializado identificado en las tres investigaciones siguiendo los subdominios del modelo MTSK. Seguidamente, se establecerán conclusiones en relación con los objetivos de la investigación, así como las limitaciones y posibles líneas de investigación futuras vinculadas a la relación entre formulación de problemas y profesor.

2 Introducción a la temática

La investigación desarrollada tiene como foco común la formulación de problemas matemáticos en contextos escolares. Esta práctica matemática se considera, tanto por diversos autores (e.g. Silver, 1994; Kilpatrick 1987; Stoyanova y Ellerton, 1996; Cai et al., 2015), como desde organismos oficiales como el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 1989, 1991, 2000) o the National Research Council (NRC, 2005), una actividad con un enorme potencial desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Getzels (1979) hizo una comparación hace 30 años en la que mencionaba que la resolución de problemas tenía mucha más relevancia y atención desde las investigaciones (Cai et al., 2015). Es en estos últimos años cuando la formulación de problemas está teniendo más atención por parte de los investigadores. Sin embargo, a pesar de esta importancia, Cai y Hwang (2020) señalan que las investigaciones en este campo son aún escasas. Autores como Brown y Walter (1993), Kilpatrick (1987), Silver (1994), y Cai y Hwang (2020) también afirman que la formulación de problemas es una línea de investigación incipiente y que está ganando más protagonismo en los últimos años.

Ante la importancia de esta línea de investigación y la escasez de trabajos sobre la misma, resulta una oportunidad y un campo de investigación interesante para desarrollar trabajos que aporten nuevos horizontes a la línea. Es por esto que nos planteamos diversas cuestiones acerca de la formulación de problemas en contextos escolares. Las cuestiones planteadas son: ¿Qué características tienen los problemas propuestos por maestros?; ¿en qué aspectos fija su atención un maestro para planificar y gestionar una tarea de formulación de problemas?; y, ¿qué conocimiento matemático especializado se movilizará en una sesión sobre formulación de problemas?

Estas cuestiones nos han llevado a dedicar a cada una de ellas, un trabajo de investigación específico, en el seno de la pregunta general: ¿Qué conocimiento especializado, desde la perspectiva de MTSK, movilizan los maestros en relación con la formulación de problemas, así como con la planificación y gestión de lecciones basadas en esta práctica matemática?

Cada uno de estos trabajos presentados se han convertido, posteriormente, en los tres artículos de investigación de los que se compone esta tesis por compendio de publicaciones.

Las investigaciones desarrolladas se encuentran vinculadas con la formulación de problemas en relación con los aspectos tanto didácticos como matemáticos que pueden desarrollar maestros durante su práctica docente. Abordamos esta práctica matemática teniendo en

consideración, en primer lugar, el nivel de la formación de maestros. A través de una tarea en la que se propone que formulen problemas de números enteros, tratamos de conocer cómo son los problemas formulados por estudiantes para maestros y qué elementos tienen en cuenta los estudiantes a la hora de formularlos en relación con un contenido determinado.

Habiendo estudiado los aspectos que los EPM consideran en una tarea de formulación, nos preguntamos cómo se gestiona una tarea de formulación de problemas, así como qué elementos caracterizan una sesión basada en la formulación de problemas. Esta idea nos llevó a comenzamos a plantearnos cuestiones sobre cómo se podría estructurar una sesión sobre formulación de problemas. Así pues, la segunda de las investigaciones aportadas se centra en estudiar qué caracterizadores podemos encontrar en una sesión sobre formulación de problemas.

Esto nos llevó, finalmente, a plantearnos la idea de que, al impartir una sesión teniendo como eje vertebral la formulación de problemas, se necesitaría en primer lugar conocimiento del contenido a impartir y, además, conocimiento sobre la formulación de problemas como práctica matemática, tanto desde el punto de vista matemático, como desde el punto de vista didáctico del contenido. De esta manera, la última cuestión que nos realizamos fue acerca de este conocimiento. Por tanto, en la tercera investigación abordamos qué conocimiento matemático especializado, desde la perspectiva del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018), moviliza una maestra en una sesión sobre formulación de problemas en la etapa de educación infantil.

Cada una de las tres investigaciones realizadas aborda la formulación de problemas desde un punto de vista diferente. Por un lado, en la primera investigación, se encuentra la formulación de problemas como proceso que gestiona el docente para generar un producto, el problema, para que alumnos lo resuelva. Por otro lado, se encuentra la formulación de problemas como proceso a través del cual se puede diseñar y gestionar una sesión, en la segunda y tercera investigación.

El acercarnos a dos facetas distintas de la formulación, hace que cada una de las investigaciones pueda aportar elementos relacionados con el conocimiento concreto relacionado con la práctica de formular, con la práctica de gestionar y diseñar y con la propia práctica de aula. Así, a través del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) realizamos un análisis de cada una de las investigaciones desarrolladas, con el objetivo de caracterizar el conocimiento especializado

Introducción a la temática

para la formulación de problemas que movilizan maestros (en formación inicial o continua) en distintas tareas relacionadas con su práctica docente.

3 Justificación

La relevancia de la temática del trabajo radica en la importancia que se le atribuye a la formulación de problemas tanto desde la investigación, como desde el punto de vista curricular, tanto a nivel escolar como a nivel de formación de docentes. Esta importancia debería tener un reflejo en el trabajo en las aulas, así como en dinámicas de actualización y desarrollo profesional por parte de los docentes que les permita desempeñar su práctica docente de forma vinculada a la formulación de problemas, tanto proponiendo tareas de formulación de problemas a sus estudiantes, como siendo ellos competentes en la formulación de problemas para su trabajo en el aula.

A lo largo de este apartado tratamos de dar respuesta, por un lado, a qué vamos a entender por formulación de problemas en las tres investigaciones, así como la importancia y beneficios que la literatura de investigación concede a la misma tanto desde un punto de vista académico como de un punto de vista curricular. Por otro lado, profundizaremos en qué se puede encontrar en la literatura de investigación sobre la relación entre profesorado-formulación, es decir, qué encontramos en la literatura que ligue las dos temáticas.

Posteriormente, presentaremos el modelo MTSK, que será la herramienta analítica que nos permitirá profundizar en qué conocimiento especializado del profesor de matemáticas se evidencia en tareas de formulación, así como de diseño y gestión y puesta en práctica de tareas sobre formulación de problemas.

Para finalizar, uniremos y justificaremos los nexos que unen las tres investigaciones que presentamos en esta memoria.

3.1 ¿Qué es un problema?

Para comenzar este apartado y dado que la investigación versa sobre la formulación de problemas consideramos necesario, en primer lugar, plantear algunas definiciones de problema, así como algunas aproximaciones a este concepto que nos ayudan a sustentar las bases de nuestro posicionamiento en la investigación.

Puede parecer que el concepto de problema tenga una definición única y consensuada por la comunidad científica, o al menos, una asumida generalmente. Sin embargo, del mismo modo que la definición de polígono puede darse como línea poligonal cerrada o bien como una región del plano delimitada por n segmentos, entre otras, la definición de problema también tiene diversas interpretaciones. Una de las primeras definiciones de problema que aparecen en la

literatura la encontramos en Brookes (1976). Este autor definió problema afirmando que un problema se considera como tal, cuando la persona que resuelve lo consideraba realmente un reto.

Algunos años más tarde, Kilpatrick (1985) definió problema como “una situación en la que se requiere llegar a una meta, pero que la ruta directa a la meta se encuentra obstaculizada”. Siguiendo con esta definición de problema, podemos añadir elementos que otros autores consideran relevantes que la definición debe contener. Por ejemplo, Kantowski (1981) habla en su definición de problema acerca de una situación en la que no se tiene un procedimiento claro con el que se alcance una solución. Por tanto, para este autor es necesario que el resolutor, a través de su conocimiento, genere estrategias que le permitan llegar a la solución sin aplicar un algoritmo previamente conocido.

Asimismo, para Blum y Niss (1991) un problema es una situación demandante para el resolutor en el sentido de que no está en posesión de procedimientos, métodos o algoritmos inmediatos que den respuesta al problema. Estos autores también enfatizaron el carácter relativo de un problema. Por ejemplo, para un alumno de segundo de primaria puede ser un problema el cómo repartir 26 elementos en 3 grupos mientras que, para un alumno de quinto de primaria deja de serlo.

Estas definiciones de problema tienen como elemento común la necesidad de alcanzar una meta que lo resuelva. Sin embargo, no todas las definiciones de problema son de esta naturaleza. Algunos autores hablan de problema como una tarea en la que se atiende a cuestiones con las que lidiar no es fácil (Mervis, 1978) o a una situación en la que un individuo o grupo no tiene un algoritmo claro que lleve a un método concreto para dar respuesta (Lester, 1980).

Por otra parte más recientemente, Cai y Lester (2010), más allá de definir qué es un problema, enunciaron una serie de criterios con los que un buen problema debe contar. El primero de ellos guarda relación con las matemáticas que están involucradas en el problema. Estas deben ser útiles para el alumnado. El segundo está relacionado con el nivel de pensamiento que el problema requiere y se especifica que debe ser un alto nivel para ser considerado un buen problema. El tercero atiende a la necesidad de influir en el desarrollo conceptual por parte de los alumnos y, el cuarto, servir a los maestros para conocer qué y cómo están aprendiendo los alumnos, así como posibles dificultades de aprendizaje que puedan tener con los contenidos involucrados.

Por su parte, Malaspina (2013), describe los elementos que un problema debe contener. Estos son: información, requerimiento, contexto y entorno matemático. Aunque Malaspina no explicita qué se entiende por información y requerimiento, nosotros entenderemos por información a todo aquel elemento del problema que resulte de interés de cara a su resolución, tanto por ser útil como por resultar irrelevante y sea necesario desecharlo para la resolución del problema. Por su parte, el requerimiento entendemos que se refiere a la pregunta o a qué demanda el problema. Atendiendo al contexto del problema, Malaspina considera que este puede ser intramatemático (cuando se refiere a situaciones exclusivamente matemáticas) o extramatemáticos (cuando se contextualiza en situaciones realistas). Por último, el entorno matemático del problema, se refiere al contenido o conceptos matemáticos involucrados en la resolución del problema. Estos pueden ser más o menos explícitos en tanto en cuanto que un problema puede ser resuelto por varios procedimientos y, cada procedimiento, puede involucrar conceptos matemáticos diferentes.

3.2 ¿Qué es la formulación de problemas?

Habiendo revisado las definiciones de problema que la literatura arroja, consideramos necesario definir qué es la formulación de problemas o qué vamos a entender durante esta memoria cuando se utilice el término.

Existen varias definiciones referidas a qué es la formulación de problemas. La mayoría de trabajos centrados en esta actividad matemática tienen como nexo común la producción de Silver (1994) en la que expone que la formulación de problemas implica la creación de nuevos problemas para investigar una situación dada, así como la reformulación de un problema durante su proceso de resolución. También menciona que la formulación de problemas se refiere tanto a la generación de nuevos problemas como a la reformulación de problemas dados. Asimismo, Silver (1994) describió tres momentos en los que la formulación de problemas podía ocurrir: antes (a partir de un objeto, imagen, historia...); durante (“Al resolver un problema no trivial, un resolutor se involucra en esta forma de plantear el problema al simplificar un problema dado para hacerlo más accesible para la solución” p.19) o después de resolver un problema (ampliando el problema o utilizando el conocimiento adquirido para otros problemas). Por su parte, Stoyanova y Ellerton (1996) añaden tres posibles contextualizaciones sobre las que se puede formular: Libre (sin condiciones adicionales), situaciones semiestructuradas (hay datos y condiciones que se deben cumplir, pero otras pueden ser

modificadas o creadas); y situación estructurada (las condiciones y datos deben ser los proporcionados para su formulación).

Existen también otros autores que modifican o añaden información a las definiciones anteriores, como son Christou et al. (2005), que proponen cinco categorías para la formulación de problemas: (1) Problemas generales (libres); (2) problemas con respuesta específica; (3) problemas con información definida; (4) preguntas para situaciones y (5) problemas ligados a cálculos específicos. A pesar de que existen numerosos autores que proponen categorías para la formulación, en esta investigación nos centraremos en las categorías que proponen tanto Silver (1994), como Stoyanova y Ellerton (1996) ya que son las que mejor caracterizan las prácticas que encontramos en las investigaciones realizadas.

3.3 ¿Quién formula problemas?

Según Kilpatrick (1987), los estudiantes y maestros consideran que los problemas siempre han estado ahí, es decir, piensan que los problemas no han sido generados, sino que los libros de texto los contienen sin pensar en qué fuente original ha podido generar el problema. Evidentemente, los problemas no han estado siempre presentes y son varios agentes los que pueden, según el objetivo propuesto, diseñar problemas matemáticos.

Los primeros agentes formuladores de problemas matemáticos son, precisamente los matemáticos. Estos utilizan la formulación de problemas como elemento para abordar nuevas cuestiones matemáticas y profundizar en la teorización de las matemáticas a través de la emergencia de nuevos teoremas, hipótesis e incluso problemas que aún no han sido resueltos. Tal y como menciona Leung (2013), los matemáticos comparten discusiones centradas en cómo ellos encuentran problemas, cómo formulan problemas nuevos y cómo reformulan problemas a partir de problemas ya dados.

Siendo los matemáticos los primeros profesionales que formulan problemas matemáticos y dada la naturaleza de la investigación que se presenta, los agentes sobre los que vamos a profundizar en formulación de problemas van a ser aquellos relacionados con el contexto educativo: profesores, estudiantes para maestro y alumnos.

3.3.1 El profesor como formulador de problemas

En lo que se refiere a profesores que formulan problemas para ofrecer a sus alumnos tareas de resolución de problemas, encontramos investigaciones en las que se estudian las concepciones

de los profesores sobre la formulación de problemas. En Klinshtern et al. (2015) los profesores dicen ser los formuladores de problemas para sus alumnos, algo que, según estos autores, no se encuentra en línea con la literatura de investigación. Además, este trabajo mostró que los profesores focalizaban la formulación de problemas desde un punto de vista resultadista y no en lo que a procesos de formulación se refiere.

También encontramos investigaciones donde los maestros son objeto de estudio para caracterizar la formulación de problemas. Por ejemplo, Koichu et al. (2012) analizaron problemas formulados por profesores que pudiesen dar respuesta a una operación concreta ($4/5$ dividido por $2/3$). Otra investigación relacionada con la investigación sobre formulación a partir de maestros estudió las transformaciones que estos realizaban a problemas de geometría para, posteriormente, proponérselos a sus alumnos (Leikin y Grossman, 2013).

La formulación de problemas no solo aparece como medio para identificar características propias de los maestros en relación con el contenido. Existen investigaciones en las que los maestros utilizan la formulación como herramienta educativa y de diagnóstico para con sus estudiantes (Tichá y Hošpesová, 2013).

Asimismo, identificamos trabajos donde los que formulan problemas son los profesores para que sus alumnos actúen como resolutores de estos (Reyes et al., 2016). Sin embargo, la mayoría de maestros trabajan la formulación de problemas desde un punto de vista simplista. Cazden (1986) observó que los docentes tenían el impulso de eliminar en las tareas de resolución de problemas el componente problemático. Es decir, los problemas propuestos por los maestros suelen tener una baja demanda cognitiva debido a que los maestros prefieren que la tarea se resuelva fácilmente. En la misma línea, Stein y Lane (1996) analizaron cómo los maestros gestionan tareas de resolución y concluyeron que, en vez de mantener el aspecto demandante, solían dar demasiadas ayudas a los alumnos con lo que los problemas previamente formulados se convertían en problemas resueltos por los mismos maestros. Ante esta tendencia, los maestros suelen crear problemas sencillos para que así sus alumnos sean capaces de resolverlos sin ayuda.

Otros estudios hablan de diferentes fases por las que los maestros atraviesan en la gestión de una tarea de resolución (Stein et al., 2008; Van de Walle, 2004). A pesar de ser una tarea de resolución (para los alumnos) se convierte en una tarea de formulación previa para los maestros ya que tienen que formular un problema que debe ser resuelto por sus estudiantes. En un primer

momento, los maestros muestran su problema formulado a los estudiantes. Posteriormente, en un segundo momento, los maestros permiten a sus alumnos trabajar en el problema de manera individual o colectiva. Y, por último, es necesario al finalizar el problema que el maestro haga una reflexión grupal para tomar conciencia y hacer explícitas las ideas matemáticas que se supone que deben aprender a través de la actividad.

Otra línea de investigación de maestros formulando tareas de resolución de problemas la encontramos en las formas para generar estas tareas de resolución. En ese sentido, encontramos investigaciones en las que los maestros formulan tareas de resolución a través de sus propias ideas o modificando tareas ya existentes (Cai y Lester, 2010).

3.3.2 Estudiantes para maestro

En el caso de los estudiantes para maestro (EPM), la formulación de problemas ha sido utilizada desde varios puntos de vista. Existen investigaciones como la de Brown y Walter (1993, 2005) en la que trataban de evidenciar habilidades de resolución, formulación y comunicación matemáticas de los estudiantes para maestro. Por su parte, Chapman (2011) estudió la forma en la que estudiantes para maestro dan sentido a la formulación de problemas matemáticos. Estas investigaciones se focalizan en el EPM como formulador de problemas y sobre qué habilidades desarrollan durante su proceso de resolución.

Gonzales (1998) describió actividades para desarrollar las habilidades de formulación en estudiantes para maestro. Las actividades consistían en un proceso que abarcaba desde la escritura de todos los procesos cognitivos que los estudiantes experimentaban durante la formulación hasta la resolución de los problemas expuestos con posibles modificaciones al finalizar y analizar cómo se solucionaba.

También encontramos investigaciones que tienen la formulación de problemas como elemento detonador de dificultades de aprendizaje. Meyerson (1993) propuso a sus estudiantes abordar un error evidenciado por una falta de comprensión por parte del alumnado. Es decir, trató de que sus estudiantes formularan un problema basado en un error.

Más recientemente, Akay y Boz (2009) desarrollaron una investigación en la que muestra dificultades de estudiantes para maestro relacionadas con la falta de conocimiento matemático, la formulación de problemas como un enfoque distinto y poco abordado, falta de creatividad y confianza y la naturaleza de la formulación de problemas. Esta investigación muestra la

importancia y la necesidad de trabajar la formulación de problemas tanto en la etapa de formación de maestros como en etapas anteriores que habitúen a los estudiantes para maestro en tareas de formulación.

También existen investigaciones longitudinales en las que la formulación de problemas es objeto de estudio en estudiantes para maestro. Brown y Walter (1993) y Brown (1993) dirigieron investigaciones en las que se pretendía explorar las matemáticas a través de la formulación de problemas. Trataban de resolverlos, proporcionar estructura a problemas, reflexionar sobre los procesos seguidos y analizar la actividad de formulación de los estudiantes para maestro.

El foco de la mayoría de trabajos de la literatura (Crespo 2003; Crespo y Sinclair, 2008; Gonzales, 1998; Hošpesová y Tichá, 2015) se basa en la formulación de problemas desde la perspectiva de la actividad matemática y no desde la perspectiva de la didáctica de esta. Es decir, encontramos investigaciones centradas en qué formulan, cómo formulan o qué características tienen los problemas formulados por estudiantes para maestro, pero no encontramos investigaciones donde el foco se centre en diseñar tareas de formulación o en tareas donde el profesor o estudiante para maestro actúe como instructor y sus hipotéticos alumnos actúen como formuladores de problemas.

3.3.3 Los alumnos

En el caso de los alumnos de educación primaria encontramos investigaciones relacionadas con cómo la formulación de problemas beneficia el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, Nicolau y Philippou (2007) investigaron las relaciones entre la habilidad de formular problemas y las habilidades matemáticas en general de estudiantes de educación primaria.

Asimismo, también encontramos investigaciones donde el alumno formula problemas para dar respuestas a preguntas de investigación. En una investigación desarrollada en colegios suecos, alumnos de 4 y 5 grado formularon problemas con el objetivo de identificar las características de estos en relación con la instrucción que habían recibido previamente (Gade y Blomqvist, 2015). No solo se encuentran trabajos relacionados con características de la formulación de los alumnos, sino que, además, encontramos estudios en los que el objetivo es ver cómo formulan los estudiantes, qué opinión tienen acerca de este contenido o cómo la formulación de problemas incide en sus habilidades matemáticas (Van y Presmeg, 2015; Chen et al., 2015)

En otras investigaciones identificamos que la formulación de problemas se utiliza como un medio sobre el que los alumnos construyen otros contenidos. Por ejemplo, Klaassen y Doorman (2015) utilizan la formulación no como una actividad transversal sino como una actividad matemática que debe integrarse de manera natural en el aprendizaje de los estudiantes. Asimismo, English y Watson (2015) utilizaron la formulación de problemas como medio para construir con los alumnos alfabetización en el contenido de la estadística.

Encontramos también trabajos en los que la formulación de problemas actúa como elemento evaluador del proceso de enseñanza y aprendizaje de los alumnos. En su investigación, Lin y Leng (2008) pusieron el foco en la formulación como metodología para examinar los procesos de pensamiento, la comprensión y las competencias de los estudiantes.

Cabe destacar que la formulación de problemas se encuentra en diferentes niveles de la educación tales como primaria, secundaria y universidad. Asimismo, encontramos investigaciones donde los formuladores de problemas son niños de la etapa de educación infantil (Codes et al, 2020).

3.4 ¿Qué relevancia tiene la formulación de problemas?

La formulación de problemas tiene importancia tanto desde el punto de vista curricular como desde el punto de vista de los beneficios que aporta al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Algunos autores importantes tales como Freudenthal (1973) y Polya (1954; 1985), exponen que es un aspecto fundamental de la educación matemática.

3.4.1 Importancia curricular de la formulación de problemas

Desde este punto de vista, encontramos que muchos autores consideran esta práctica como el corazón de la actividad matemática (Brown y Walter, 1993; Kilpatrick, 1987; Moses, et al., 1990; Silver, 1994; Silver y Mamona, 1989). Además, desde el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989, 2020) consideran que la formulación de problemas debe ser una actividad que se promueva en las aulas debido a los beneficios que aporta a los estudiantes.

Asimismo, el NCTM (2000) y el National Research Council (NCR, 2005) consideran que, además de ser una necesidad el agregar la formulación de problemas y dotarla de importancia en el currículo, es necesario también que esa incorporación no solamente sea a nivel de currículo oficial, sino sea una incorporación real en las aulas, en el currículo efectivo (Calvo et al., 2021).

Esta importancia de la que informan tanto el NCTM como los autores ya mencionados, debería tener un reflejo importante en el currículo en lo que respecta al área de matemáticas. Sin embargo, la atención prestada en el currículo dista mucho del protagonismo que la práctica de la formulación debería tener.

El panorama curricular en España se sustenta en el *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. En dicho Real Decreto se menciona la formulación de problemas como parte de una alfabetización matemática (“es decir, la adquisición de los conocimientos, las destrezas y actitudes, así como los instrumentos necesarios para aplicar la perspectiva y el razonamiento matemáticos en la formulación de una situación-problema, seleccionar las herramientas adecuadas para su resolución, interpretar las soluciones en el contexto y tomar decisiones estratégicas” (p.92)). Por tanto, desde el diseño del currículo escolar se espera que los maestros sean capaces de diseñar situaciones en las que los estudiantes deban formular problemas matemáticos. Asimismo, en relación con la resolución de problemas del alumnado, el currículo especifica que:

Los contextos en la resolución de problemas proporcionan un amplio abanico de posibilidades para la integración de las distintas experiencias y aprendizajes del alumnado, así como de las diferentes competencias [...] estos contextos deberán ser variados e incluir, al menos, el personal, el escolar, el social, el científico y el humanístico (Real Decreto 157/2022, p. 94).

De este fragmento extraemos la necesidad de que los maestros conozcan cómo formular problemas para ser resueltos por sus estudiantes, así como las características asociadas a estas situaciones problemáticas.

Por otra parte, los maestros deben también poder formular problemas para que los alumnos atiendan a las estrategias que se especifican en la competencia 2 del Real Decreto (“diferentes estrategias para obtener las posibles soluciones: analogía, ensayo y error, resolución inversa, tanteo, descomposición en problemas más sencillos...” (p.94)).

Además, en la competencia 3, aparece la formulación de problemas como habilidad que los estudiantes deben desarrollar (“Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones basadas en la vida cotidiana, de forma guiada, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para contrastar su validez, adquirir

e integrar nuevo conocimiento” (p.94)). En estas actividades de formulación para el alumnado también es necesario conocimiento por parte de los maestros, así como saber gestionar tareas de esta índole.

En cuanto al currículo en Andalucía, siguiendo la Orden de 15 de enero de 2021, *por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía*, encontramos que el primer objetivo de área en la asignatura de matemáticas es:

O.MAT.1. Plantear y resolver de manera individual o en grupo problemas extraídos de la vida cotidiana, de otras ciencias o de las propias matemáticas, eligiendo y utilizando diferentes estrategias, justificando el proceso de resolución, interpretando resultados y aplicándolos a nuevas situaciones para poder actuar de manera más eficiente en el medio social” (Orden de 15 de enero, 2021, p. 86).

Llama especialmente la atención que, el primer objetivo que se marca para el área, sea referido a formular o plantear problemas cuando la realidad en las aulas dista de lo que el objetivo propone (Ellerton, 2013).

Además, si hacemos una búsqueda en la Orden de 15 de enero de 2021, observamos que en primer ciclo no se hace mención a formulación de problemas. En el segundo ciclo se hace alusión en el bloque 1: procesos, métodos y actitudes en matemáticas en el criterio de evaluación:

MAT.02.01. Identificar, plantear y resolver problemas relacionados con el entorno que exijan cierta planificación, aplicando dos operaciones con números naturales como máximo, utilizando diferentes estrategias y procedimientos de resolución, expresando verbalmente y por escrito, de forma razonada, el proceso realizado” (Orden de 15 de enero, 2021, p. 94).

Además, aparece en el estándar “MAT.02.02 Se plantea nuevos problemas a partir de problemas” (p. 94). Por último, en el tercer ciclo aparece la formulación de problemas en el bloque 5: estadística y probabilidad. “MAT. 03.02.03. Se plantea nuevos problemas a partir de uno resuelto: variando los datos, proponiendo nuevas preguntas, conectándolo con la realidad, buscando otros contextos, etc.” (p.100).

Como se puede apreciar en la búsqueda realizada en el currículo de España en lo que respecta a la asignatura de matemáticas, la formulación de problemas aparece de manera puntual. No solo eso, sino que, tal y como afirman Jamieson-Proctor y Byrne (2008), los maestros de matemáticas tienen cierta dependencia del libro de texto a la hora de impartir la asignatura, hecho que hace más complicado el utilizar y diseñar actividades basadas en la formulación de problemas para impartir contenido matemático. Además, Silver (1994), señala que la formulación de problemas no ha recibido demasiada atención por parte de la comunidad educativa.

3.4.2 Importancia para el aprendizaje de la formulación de problemas

Por otro lado, desde el punto de vista de los beneficios que tiene la formulación de problemas como actividad matemática para el aprendizaje, encontramos algunos autores que comentan aspectos positivos cuando se trabaja a través de esta actividad. Según Lee et al. (2018) la formulación de problemas puede ser una herramienta matemática potente para mejorar el conocimiento matemático de los alumnos. Durante la formulación, los alumnos tienen la posibilidad de acceder a la complejidad de determinados conceptos matemáticos (Priest, 2009). Asimismo, la formulación de problemas permite la transmisión de la comprensión subjetiva de un concepto matemático (Bernardo, 2001) y aplicar este concepto en la formulación de problemas (Mestre, 2002).

Esto supone un beneficio que pueden explotar los maestros para con el aprendizaje de sus estudiantes. A través de la formulación de problemas, los maestros pueden percibir un paisaje de la comprensión de determinados contenidos matemáticos cuando se pide a los alumnos formular un problema (Silver, 1994; Simon, 1993). Por ejemplo, si se pide a un estudiante que formule un problema sobre fracciones, es posible que, por la falta de conocimiento del estudiante, no lo logre en su totalidad. Esto supone una herramienta interesante para el profesorado, que permite conocer el nivel de comprensión que tienen los estudiantes en un determinado contenido matemático, así como conocer posibles dificultades de aprendizaje que los alumnos puedan tener.

Este beneficio también lo enfatizan Cai y Hwang (2019) debido a la potencialidad que tiene el conocer cómo los alumnos interactúan con el contenido. En su investigación, Xu et al. (2019) mostraron cómo estudiantes de diferentes niveles formulaban problemas adecuados a su nivel e incluso de un nivel más avanzado a los que los maestros esperaban de ellos.

Por su parte, Van Harpen y Presmeg (2013) indican que este desarrollo que la formulación de problemas promueve está relacionado y puede influir en que los estudiantes obtengan un mayor rendimiento académico en el área de matemáticas. Por este motivo, no solo el NCTM (2000) sino también el NRC (2005) consideran relevante incorporar al currículo académico esta práctica matemática.

Numerosos autores exponen que tanto la formulación como la resolución de problemas están relacionados con la mejora de habilidades matemáticas, así como actitudes como la motivación o confianza personal (Cai y Cifarelli, 2005; Chen et al., 2015; Cifarelli y Sevim, 2015; Silver, 1994; Silver y Cai, 1996; Singer y Moscovici, 2008).

En relación con la idea anterior de la confianza en uno mismo, Haghverdi (2015) menciona que la formulación de problemas puede ayudar a reducir la dependencia que tienen los alumnos en sus maestros y en el libro de texto, proporcionando un sentimiento de acercamiento a las matemáticas. Esta mejora de la confianza también la mencionan autores como Silver y Cai (1996), Cifarelli y Sevim (2015) o English (2020). Además, en relación con la resolución de problemas, estos autores mencionan que la formulación puede mejorar las habilidades de resolución de los estudiantes.

Por su parte, otros autores afirman que la formulación de problemas promueve el desarrollo de la autonomía y aptitud matemática (Kilpatrick, 1987; Mamona-Downs y Downs, 2005). Además, puede fomentar el trabajo colaborativo entre estudiantes cuando se encuentran formulando problemas.

Esto contribuye también a que los estudiantes mejoren la relación con los compañeros, hecho que supone que la componente de aprendizaje entre iguales emerja (English, 2003). Los estudiantes pueden discutir y evaluar los problemas formulados por sus compañeros fomentando también una mirada crítica (Kwon y Capraro, 2021).

Para los estudiantes de más corta edad, puede suponer una herramienta especialmente potente (Kwon y Capraro, 2021). Esto es debido a que suelen ser más sensibles al contexto en el que se presentan los contenidos matemáticos y tienen una mirada más crítica que estudiantes de más edad (Chapman, 2006). El uso de la formulación de problemas en alumnos pequeños promueve la relación de entornos reales con la matemática desde edades tempranas (Quintero, 2004).

La formulación de problemas también se encuentra relacionada con la creatividad de los estudiantes y con la posesión y desarrollo de talento excepcional. El hecho de tener la capacidad de encontrar preguntas clave ha sido relacionada con un talento matemático excepcional (Hadamard, 1945). Debido a esta asociación de creatividad y talento, la capacidad de formular de problemas se ha relacionado tradicionalmente con estudiantes sobresalientes (Silver 1994).

Desde el punto de vista de la enseñanza, Collins (1986) identificó tres potencialidades que la formulación de problema puede tener en el proceso de enseñanza-aprendizaje:

- Ayuda a fomentar la construcción de reglas, principios o teorías ya conocidas por los estudiantes.
- Ayuda a construir a los estudiantes nuevas reglas a través de la indagación.
- Ayuda a los estudiantes a resolver problemas con técnicas como el formularse preguntas, autorregulación y habilidades cognitivas.

Por tanto, habiendo expuesto la relevancia que la formulación de problemas tiene atendiendo al proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, así como la potencialidad que tiene para desarrollar habilidades en los alumnos, se considera necesario estudiar qué aspectos de la formulación de problemas son relevantes para los maestros

3.4.3 Dificultades del profesorado asociadas a la formulación de problemas

Teniendo en cuenta las investigaciones realizadas sobre formulación de problemas hasta la fecha, sigue siendo un reto desde el punto de vista del aprendizaje, tanto para maestros como para estudiantes (English y Watson, 2015; Kontorovich et al., 2012).

Otro de los factores que contribuye a que la formulación de problemas no sea una actividad matemática que se trabaje con frecuencia en las aulas es la falta de conocimiento que los docentes tienen en relación con esta práctica. Autores como Lee et al. (2018) encontraron en sus investigaciones que los maestros tienen dificultades enseñando formulación de problemas en sus clases. Por ejemplo, identificaron que los maestros no conocían la diferencia entre los tipos de formulación y los tipos de problema, tenían dificultades para formular un problema alejándose de un problema modelo presentado con anterioridad y, otro aspecto interesante, es que los maestros solían pensar que para resolver un problema se necesita haber impartido previamente un contenido y no al contrario, es decir, generar una necesidad para hacer que el contenido a impartir se requiera para resolver el problema. Por su parte, Barlow y Cates (2006)

afirmaron que esa falta de conocimiento puede afectar al desempeño que los maestros tienen cuando desarrollan una actividad de formulación en el aula.

Esta falta de conocimiento no solo se percibe desde la aplicación o diseño de actividades de formulación de problemas, sino que, además, también se percibe desde el conocimiento sobre los estudiantes. En una investigación realizada por Xu et al. (2019), los resultados mostraron que los problemas que los maestros esperaban que los estudiantes formularan iban a ser de menor nivel. Sin embargo, los estudiantes sorprendieron a los maestros formulando problemas que resultaron ser de un nivel más elevado que el que los maestros previeron. Esto puede plantear la cuestión de qué profundidad tiene el conocimiento sobre el pensamiento y la interacción de los estudiantes de los maestros sobre la formulación de problemas.

Por este motivo, se considera de especial relevancia el acercamiento de la formulación de problemas a la formación inicial de maestros y continua. Según Cai et al. (2015) un objetivo de la educación sería preparar a los niños para atender a este tipo de pensamiento. Así, para atender a esta demanda, es necesario que los estudiantes para maestros sepan cómo tratar la formulación de problemas en sus aulas, para poder dar respuesta a este tipo de necesidades de los alumnos.

En ese sentido, la formulación de problemas forma parte del trabajo del profesorado en las aulas, tanto desde el punto de vista de ellos poder formular problemas para sus alumnos, como para poder ayudar a sus alumnos a convertirse en buenos formuladores de problemas matemáticos (Crespo, 2003; Olson y Knott, 2013).

Algunos autores enfatizan la importancia y la falta de investigaciones en la formulación de problemas, así como un marco para la enseñanza (English, 2020). Esta importancia se destaca también en la conciencia de los maestros sobre el conocimiento para formular problemas matemáticos y para planificar, gestionar y diseñar tareas de formulación.

Por tanto, se puede concluir que el qué tener en cuenta para formular, diseñar y gestionar una sesión sobre formulación de problemas es un punto clave de la actividad docente, pero que no ha tenido protagonismo en las investigaciones.

3.5 CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (MTSK)

Para analizar y describir el conocimiento especializado que identificamos en las tres investigaciones, utilizaremos el modelo MTSK (Figura 1) como instrumento de análisis.

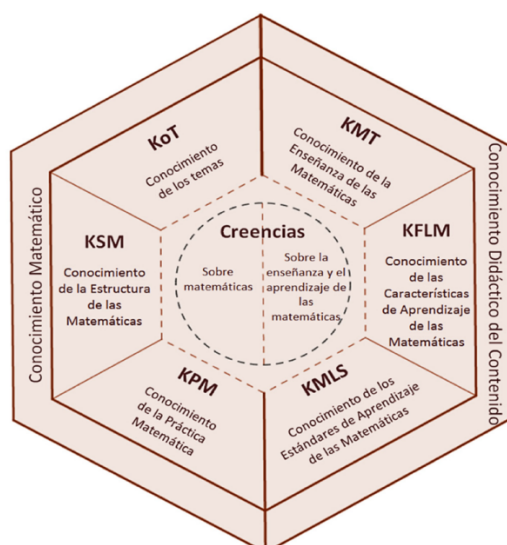


Figura 1: Estructura del conocimiento especializado según el modelo MTSK

El modelo MTSK nace como una herramienta de análisis con el objetivo de indagar en el conocimiento del profesor de matemáticas ligado a los diferentes niveles en los que se imparte la asignatura de matemáticas. Se crea como una respuesta a varios modelos de conocimiento cuya característica más diferencial es la especialización de ese conocimiento (Carrillo et al, 2018).

Este modelo está basado en las investigaciones realizadas por Shulman (1986) y Ball, Thames y Phelps (2008), asumiendo una perspectiva intrínseca de la noción de especialización del conocimiento (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo, y Pino-Fan, 2019) y, al igual que estas investigaciones, el modelo MTSK considera dos grandes dominios de conocimiento: Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Asimismo, el modelo se divide en diferentes subdominios que ayudan a precisar el estudio del conocimiento del profesor. Por otro lado, como elemento que condiciona el conocimiento que el profesor moviliza, se encuentran las creencias.

Además, y como aporte al conocimiento especializado del profesor, este modelo tiene en cuenta las creencias y concepciones del docente como un tercer dominio de conocimiento. Este conocimiento puede verse como, por ejemplo, la manera en la que un profesor de matemáticas

piensa que es la más adecuada de impartir un determinado contenido. Asimismo, esta idea de concepción y creencia permea en toda la estructura del modelo MTSK, siendo un aspecto que condiciona, en mayor o menor medida, las acciones de los docentes en función de su conocimiento. Estas creencias, a pesar de formar parte del modelo MTSK, no van a ser objeto de estudio en esta investigación.

Cada uno de los dominios mencionados anteriormente se desglosa a su vez en subdominios con el objetivo de caracterizar y precisar el conocimiento de los docentes. A continuación, se detallan los dominios, subdominios y categorías del modelo acompañadas de ejemplos para facilitar la comprensión del mismo.

3.5.1 El dominio de Conocimiento Matemático (MK)

En este dominio se consideran los siguientes subdominios: *Conocimiento de los temas (KoT)*, que atiende a la profundidad con la que se conocen los contenidos; *conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)*, que atiende a las diferentes relaciones que se dan entre los contenidos; y el *Conocimiento de la práctica matemática (KPM)*, que atiende cómo se producen las matemáticas y al conocimiento sobre los quehaceres matemáticos.

3.5.1.1 Conocimiento de los temas (KoT)

Este subdominio trata de describir qué y cómo conoce el profesor los temas que imparte en sus sesiones. No solo se trata de conocer los contenidos al mismo nivel que los alumnos, sino que se trata también de un conocimiento profundo de los contenidos que facilite la enseñanza de estos. Por ejemplo, un alumno puede saber cómo resolver un problema de estructura multiplicativa, sin embargo, el maestro debe conocer qué tipos de estructuras multiplicativas existen para poder generar tareas que involucren distintos significados, así como diferentes contextos en los que tiene sentido construir un problema de estructura multiplicativa.

Para caracterizar con más precisión este subdominio, explicamos a continuación las cuatro categorías en las que se divide: *procedimientos*; *definiciones*, *propiedades y fundamentos*; *registros de representación*; y *fenomenología*.

La primera categoría (*procedimientos*), se refiere a los saberes sobre los diferentes algoritmos que se emplean en las matemáticas. Contiene no solo saber cuál es el procedimiento para realizar una multiplicación, sino también realizar otros procesos algorítmicos diferentes como puede ser la colocación de todos los productos parciales. Esta categoría no solo atiende a qué

se hace sino también al *cómo* puede hacerse y *cuándo* es conveniente hacerlo. El conocimiento recogido en esta categoría también implica ser consciente de algunas características que puede tener el resultado de un procedimiento, como, por ejemplo, saber que al multiplicar dos números naturales de dos cifras el resultado debe mostrar, como mínimo, un número de tres cifras.

Por su parte, la categoría *definiciones, propiedades y sus fundamentos* contiene aquellos saberes que se relacionan con las definiciones de un objeto matemático. En ese sentido, en esta categoría se encuentra, además de conocer la definición formal, los elementos que conforman esa definición. Esto permite al profesor generar varias definiciones de un objeto matemático en función del elemento que quiera resaltar dado un determinado nivel del alumnado, constituyendo así definiciones escolares.

La siguiente categoría del *KoT* se refiere al conocimiento sobre *registros de representación*. Esto engloba todo aquel conocimiento relacionado con cómo se puede representar un determinado objeto matemático Duval (1995), a saber, como registro gráfico, modelos manipulativos, lenguaje simbólico o lenguaje verbal, entre otros. Este conocimiento permite al profesor exponer un mismo contenido matemático a través de diferentes registros para, por ejemplo, realizar comparaciones entre ellos o resaltar características determinados que un registro pueda potenciar más que otro.

Finalmente, el *conocimiento de los temas* contiene la categoría de *fenomenología y aplicaciones*. Este conocimiento atiende a aquellos contextos que dan sentido a un determinado contenido matemático y que permite al profesor desarrollar contenidos en el aula a través, por ejemplo, de contextos reales que faciliten la comprensión del contenido por parte del alumnado. Un ejemplo de esto podría ser que, para medir la longitud de la circunferencia de una rueda, basta con medir en el suelo la huella que deja dando una sola vuelta.

3.5.1.2 Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)

El subdominio de *KSM* comprende aquellos saberes sobre las conexiones que se dan entre los diferentes contenidos matemáticos, entendiendo las matemáticas como una red de conocimientos interconectados entre sí.

Para los profesores, poseer un conocimiento de la estructura matemática robusto puede contribuir a ver las matemáticas complejas desde un punto de vista más elemental y viceversa

(Montes et al., 2013), pudiéndose entender la materia como una conexión de elementos matemáticos. En el modelo MTSK, se pueden diferenciar conexiones *intraconceptuales* o *interconceptuales* entre los contenidos matemáticos. Las relaciones intraconceptuales se refieren a aquellas conexiones que se dan dentro de un mismo contenido. Por ello, en el modelo MTSK este tipo de conexiones se recogen dentro del *conocimiento de los temas (KoT)*.

Las conexiones que se recogen en el conocimiento de la estructura de las matemáticas son las interconceptuales, que son aquellas que atienden a relaciones que se dan entre diferentes contenidos matemáticos. Estas pueden ser de *simplificación* o de *complejización*. Las *conexiones de simplificación* son aquellas que se dan cuando un contenido más complejo se explica basándose en un contenido más elemental. Por el contrario, las *conexiones de complejización* se evidencian cuando un profesor conecta contenidos que se están impartiendo con contenidos que son más complejos que serán vistos en etapas posteriores.

Además de estos dos tipos de conexiones este subdominio contempla *conexiones auxiliares* que aparecen para facilitar el desarrollo de un contenido matemático a partir de otro, y, por último, *conexiones transversales* que se dan cuando se manifiesta conocimiento sobre un objeto matemático que subyace a varios objetos que se encuentran en diferentes bloques de contenido, como la proporcionalidad, el infinito, o la noción de igualdad.

3.5.1.3 Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

El tercer subdominio del conocimiento matemático es el *conocimiento de la práctica matemática (KPM)*. Este subdominio atiende a aquellos saberes relacionados con los quehaceres que se dan, de manera específica, en el área matemática. En este subdominio podemos encontrar conocimiento sobre prácticas como demostrar, ejemplificar, justificar o definir.

La naturaleza inherente a este subdominio es compartida con la perspectiva que Schwab (1978) de otorga al *conocimiento sintáctico*, en el sentido del conocimiento que permite generar nuevo conocimiento matemático. Por tanto, también contiene conocimiento relacionado con la resolución y formulación de problemas como generadores de conocimiento matemático.

A pesar de que el conocimiento de la práctica matemática se encuentra definido, actualmente no existen unas categorías propias de este al mismo nivel que en el resto de subdominios. Sin embargo, existen indicadores que ayudan a identificar aspectos del conocimiento relacionados

con este subdominio. Entre ellos se encuentran: *jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos; formas de validación y demostración; papel de los símbolos y uso del lenguaje formal; procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas; prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación); condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones* (Carrillo et al., 2018).

3.5.2 El dominio de Conocimiento didáctico del contenido (PCK)

Shulman (1986) hizo una distinción entre el conocimiento del contenido y el conocimiento de índole didáctica que se requiere para impartir el contenido. En el modelo MTSK tiene una importancia clave el conocimiento didáctico del contenido. Sin embargo, para que sea considerado por el modelo, debe estar ligado a las matemáticas y no ser de naturaleza pedagógica general. De esta manera, MTSK hace una distinción entre un conocimiento didáctico general como puede ser el uso de un determinado agrupamiento de los estudiantes para realizar una actividad, y un conocimiento didáctico específico del contenido como puede ser el uso de un agrupamiento de estudiantes de tres en tres para realizar un reparto de una división cuyo divisor es tres a través de un juego de roles.

A su vez, este dominio contiene otros tres subdominios. Dos de ellos atienden a conocimiento relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas*; refiriéndose al conocimiento sobre elementos curriculares, así como conocimiento sobre diferentes niveles que pueden desempeñar los alumnos en función de su periodo de madurez o nivel cognitivo en el que se encuentre.

3.5.2.1 Conocimiento de enseñanza de las matemáticas (KMT)

Este subdominio se caracteriza por englobar todo aquel conocimiento referido a facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje por parte del profesorado. Así, en este se recoge conocimiento sobre, por ejemplo, recursos y estrategias que hagan más accesible un contenido al alumnado. Para ayudar a identificar y clasificar el conocimiento relativo a este subdominio, el modelo propone las siguientes categorías: *recursos materiales y virtuales, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos y teorías sobre la enseñanza de la matemática*.

La primera categoría, *recursos materiales y virtuales*, contiene aquellos saberes relacionados con recursos que permitan facilitar el aprendizaje de contenidos matemáticos del alumnado.

Entre ellos podemos encontrar materiales u objetos que el profesor utilice con potencial matemático en el aula. Un ejemplo de este conocimiento puede ser el conocer, por parte del maestro, las limitaciones que puede tener un recurso como el geoplano, para la representación de un triángulo equilátero, debido a la disposición ortogonal de los nodos.

Por su parte, la categoría de *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* abarca el conocimiento sobre la idoneidad de las diferentes actividades que se presenten en clase, estrategias que puedan ser utilizadas para la transmisión de un contenido y estrategias que faciliten esa transmisión, así como las limitaciones que puedan tener. En el caso de los ejemplos, para presentar un contenido o aclarar una duda determinada, es necesario que los docentes conozcan una diversidad de ejemplos que les permita atender a cuestiones concretas del contenido, además de tener en cuenta posibles ejemplos que no sean buenos. Por ejemplo, para aprender a sumar y/o multiplicar, el resultado de $2+2$ es el mismo que 2×2 , por lo que puede ser un mal ejemplo y provocar que el alumnado concluya que $+$ es igual a $\times$.

La tercera categoría del *KMT* se denomina *teorías sobre la enseñanza de la matemática*. Algunas de estas teorías pueden haber sido conocidas a través de, por ejemplo, la literatura de investigación o a través del libro de texto. Estas teorías se consideran formales, debido a que han sido contrastadas y tienen un rigor científico. Por otro lado, también existen *teorías personales*, que guardan relación con la experiencia adquirida a lo largo de la etapa educativa y puede haber sido conocida tanto en la etapa del estudiante como de la etapa de maestro.

3.5.2.2 Conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática (KFLM)

El segundo subdominio del *PCK* engloba aquellos saberes relacionados con cómo actúan, cómo y qué piensan y qué procesos siguen los estudiantes cuando se enfrentan a un contenido. El conocimiento que se encuentra en este subdominio se centra en prever las acciones, decisiones y pensamientos de los alumnos.

En este subdominio se encuentran cuatro categorías: *teorías sobre el aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con un contenido matemático y aspectos emocionales del aprendizaje de la matemática*.

La categoría de *teorías sobre el aprendizaje*, del mismo modo que ocurre en el *KMT*, engloba tanto teorías de carácter formal como personal. De esta manera, un profesor puede conocer los niveles de Van Hiele por los que el alumnado transcurre en el aprendizaje de la geometría como

teorías formales y también tener conocimiento sobre teorías personales adquiridas a través de los años tanto de docencia como de formación.

Por su parte, la categoría de *fortalezas y dificultades* atiende al conocimiento sobre los puntos fuertes y débiles que pueden tener los alumnos en relación con un contenido determinado. El conocimiento sobre dificultades de aprendizaje puede ayudar al profesor a prevenir un error que un alumno pueda tener o, por el contrario, puede provocarlo para invitar a su alumnado a reflexionar y construir el aprendizaje a través del error.

La siguiente categoría, *formas de interacción con un contenido matemático*, atiende al conocimiento sobre cómo los alumnos interactúan con un contenido determinado. Entre los aspectos que se contemplan en la categoría se encuentran procesos, estrategias, vocabulario y representaciones que los alumnos pueden utilizar durante el desarrollo de contenidos. Un ejemplo puede ser, atendiendo a la representación de figuras geométricas, que los alumnos suelen, de manera general, representarlos apoyados sobre uno de sus lados.

Para finalizar este subdominio se encuentra la categoría de *aspectos emocionales del aprendizaje de la matemática* que contempla el conocimiento del profesor sobre variables de carácter emocional vinculadas al aprendizaje de la matemática. Este conocimiento puede ser útil al profesor para identificar si las dificultades de aprendizaje de los alumnos tienen sus raíces en experiencias anteriores con las matemáticas que hayan podido resultar negativas.

3.5.2.3 Conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS)

El último aspecto que el modelo MTSK contempla en relación con el conocimiento didáctico del contenido es aquel que se refiere a temas curriculares en lo que a la asignatura de matemáticas se refiere. Este conocimiento puede también haber sido adquirido tanto de manera formal a través del currículo como a través de la experiencia a lo largo de la trayectoria del docente. Así, este subdominio encierra aquellos saberes sobre el nivel de desempeño de los alumnos, tanto a nivel conceptual como procedimental que puedan darse en un determinado curso de la formación.

El conocimiento sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas tiene, a su vez, tres categorías diferentes. La primera categoría, *expectativas de aprendizaje*, se relaciona con el conocimiento sobre lo que un alumno puede alcanzar en un determinado nivel. Por ejemplo,

en educación infantil, que un alumno pueda aprender ciertas propiedades de los números pares como reconocerlos a través del número situado en la cifra de las unidades.

La segunda categoría del *KMLS* es el *nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado*. Esta categoría se refiere a la profundidad con la que un conocimiento puede ser presentado atendiendo al curso y nivel de desarrollo de los estudiantes. Por ejemplo, en educación infantil, no es esperable que un alumno aprenda cómo realizar el algoritmo de la suma, pero sí que pueda sumar números como agrupamiento de dos cantidades de objetos.

Por último, se encuentra la categoría de la *secuenciación con temas anteriores y posteriores*. Esta categoría, a diferencia del *KSM*, contiene conocimiento sobre el orden en el que se presentan los diferentes contenidos matemáticos en determinados niveles de la educación. No solo puede atender a qué contenido va antes o después en un mismo curso, sino también contempla secuenciación de contenidos con cursos posteriores, así como con anteriores, es decir, el conocimiento del profesor sobre qué contenidos necesita conocer un estudiante para que habilite la comprensión de un contenido posterior también se encontraría en esta categoría.

3.6 Nexos de unión de las investigaciones

Tal y como se ha mostrado en este primer apartado de la tesis, la formulación de problemas es una herramienta potente, capaz de fomentar el desarrollo habilidades matemáticas tanto en niños como en maestros, y capaz de contribuir también al desarrollo de las habilidades de resolución de problemas y mejorar aspectos como la creatividad.

Sin embargo, la falta de investigaciones en el campo hace que la formulación de problemas sea un objeto de estudio con mucho potencial pero que posiblemente aún no ha tenido el protagonismo suficiente en investigaciones que permitan dar entidad a esta aproximación a la enseñanza del contenido y hacerlo accesible y conocido por los profesionales de la educación.

Esta falta de investigaciones se relaciona, de manera específica, con el conocimiento del profesorado sobre la formulación de problemas en primer lugar; en segundo lugar, sobre cómo podría gestionarse o qué se debe tener en cuenta al implementar una sesión cuyo eje vertebrador sea la formulación de problemas; y, en tercer lugar, sobre qué conocimiento especializado podría ser necesario para tratar una sesión desde la perspectiva de formulación de problemas.

Estas ideas sustentan las tres investigaciones que presentamos en la tesis para su defensa bajo el formato de compendio de artículos. Cada una de estas investigaciones se encuentra

respaldada por algunas de las cuestiones que distintos investigadores consideran relevantes y que pueden ayudar a vislumbrar nuevos intereses en lo que a la formulación de problemas respecta.

La primera investigación que presentamos tiene que ver con la formación que deben recibir los maestros en su etapa inicial para poder atender a las necesidades educativas que los alumnos de primaria puedan tener en el aula. En ella, nos centramos en analizar cómo estudiantes para maestros formulan problemas matemáticos en relación con un contenido determinado, números enteros. Esto nos permite caracterizar los problemas formulados, con la intención de indagar en qué aspectos se centran para poder formular, así como qué aspectos consideran relevantes de cara a la formulación. Asimismo, nos permite conocer las aptitudes de los estudiantes para maestro de cara a la formulación de problemas.

La segunda de las investigaciones trata de dar respuesta al cómo impartir una sesión sobre formulación de problemas. Tal y como se ha mostrado en el capítulo 1, las dificultades mostradas en el profesorado hacen que las investigaciones sobre formulación de problemas en este campo resulten interesantes y novedosas. En este caso, el trabajo realizado puso en el foco de estudio a una maestra en ejercicio para conocer cómo gestionaba y qué caracterizaba la gestión de una sesión de formulación de problemas. Esto nos permite conocer características y momentos relevantes del proceso de gestión de la tarea de formulación, que podrían servir de referencia a futuros maestros, para así fomentar el trabajo a través de la formulación de problemas teniendo referencias que ayuden a su puesta en práctica.

Por último, la tercera de las investigaciones trata de dar respuesta a qué conocimiento moviliza un maestro cuando imparte una sesión basada en formulación de problemas. Si la anterior investigación se centraba en la gestión, esta investigación se centra en el conocimiento que se moviliza. Dar respuesta a esta cuestión puede ayudar a mejorar las prácticas sobre formulación de problemas debido a que se puede conocer qué se debe saber previamente a impartirla. También puede ser útil de cara a la formación tanto inicial como continua del profesorado.

Las tres investigaciones tienen como conexión tanto la formulación de problemas como el foco en el profesorado de educación infantil y primaria. Tratamos de profundizar en la formulación de problemas desde distintas perspectivas y conocer algunas claves para, posteriormente, hacer que tanto en programas de formación tanto inicial como continua se tenga en cuenta. Por tanto, a través de esta investigación trataremos de indagar en el conocimiento sobre la formulación

de problemas tanto para potenciar la formación de maestros, como la implementación posterior en cursos de formación.

Así, como elemento que cohesiona de las tres investigaciones, pretendemos profundizar en la relación del docente con la formulación de problemas desde el punto de vista del conocimiento especializado ya sea como gestor de dinámicas basadas en esta práctica matemática, o como formulador de problemas para su posterior resolución por parte de alumnos. El hecho de tener tres investigaciones que focalizan diferentes puntos de vista de la formulación de problemas ayuda a caracterizar este conocimiento especializado en lo que a los maestros se refiere, a modo de triangulación intercontextual.

4 Aspectos metodológicos.

Asumiendo que la formulación de problemas es una herramienta potente, que puede aportar muchos beneficios al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las aulas, pero que aún es una línea investigación hasta cierto punto emergente, se hace necesario profundizar en la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre formulación de problemas. De esta manera, la presente tesis doctoral tiene como objetivo identificar y caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre formulación de problemas. Para ello, atenderemos a la siguiente pregunta de investigación general:

¿Qué conocimiento especializado, desde la perspectiva de MTSK, movilizan los maestros en relación con la formulación de problemas, así como con la planificación y gestión de lecciones basadas en esta práctica matemática?

El dar respuesta a esta cuestión podrá ayudar a clarificar aspectos relevantes que los docentes deban saber y dominar para impartir sesiones a través de esta práctica y para formular problemas para sus alumnos. Además, permitirá también modificar y añadir a los planes de formación estos elementos para trabajar con los maestros desde las etapas de formación inicial.

Si bien la pregunta de investigación principal pudiera parecer que atiende solo a un conocimiento relacionado con la formulación de problemas de manera general, en las investigaciones que presentamos el maestro toma dos papeles diferentes. Por un lado, se encuentra el maestro como formulador de problemas para ser resueltos por sus estudiantes y, por otro lado, se encuentra el maestro como gestor de tareas basadas en la formulación de problemas por parte de sus estudiantes.

La doble naturaleza que puede desempeñar el maestro en relación con la formulación de problemas puede poner de manifiesto aspectos del conocimiento de distinta índole, dependiendo del papel que ejerza en cada momento. Así, nos acercamos al maestro como formulador de problemas en la primera investigación, al maestro como diseñador y gestor de sesiones de formulación de problemas en la segunda y, en la tercera investigación, analizamos el conocimiento matemático especializado que se moviliza en una sesión en la que los alumnos deben formular problemas.

Por otro lado, con objeto de caracterizar la investigación desde el punto de vista metodológico, se hace necesario describir el paradigma sobre el que se sustenta. Así, atendiendo a la definición

de Bassey (1999), entendemos la noción de paradigma como un modo de ver y percibir una realidad concreta con el objetivo de examinarla y sacar conclusiones de ella.

Según Lincoln y Guba (1985), existen tres dimensiones que caracterizan un paradigma. En primer lugar, existe una dimensión ontológica del paradigma que atiende a la forma y naturaleza de la realidad observada. En esta investigación nos apoyamos en un paradigma constructivista que, atendiendo a la dimensión ontológica, supone entender la realidad no como algo dado o completo en sí mismo, sino como un producto social procedente de interrelaciones entre diferentes individuos (Gergen, 1992). Teniendo como base esta perspectiva, la comprensión de la realidad se realiza atendiendo a las relaciones que se dan entre los individuos.

La segunda dimensión que caracteriza un paradigma es la epistemológica. Esta dimensión atiende a cómo nos acercamos a la realidad estudiada, teniendo en cuenta las relaciones que se dan entre los individuos y los objetos que se investigan. La elección de la dimensión ontológica condiciona la elección de la epistemológica. En ese sentido, en la investigación, las relaciones entre los investigadores y el foco de investigación se dan de tal forma que el conocimiento sobre el foco de investigación se extrae durante la investigación (Latorre et al., 1997).

Por último, en relación con la dimensión metodológica, también se encuentra condicionada por las dos elecciones anteriores. En este caso, esta dimensión atiende a los procedimientos que se utilizarán para comprender la realidad a estudiar. Por tanto, habiéndonos posicionado en las dimensiones ontológica y epistemológica, resulta necesario utilizar procedimientos que permitan dar respuesta metodológica de corte cualitativo (Grbich, 2013), puesto que tratamos de acercarnos al objeto de estudio con la intención de comprender en profundidad diferentes situaciones reales a través de la investigación.

Para identificar el conocimiento que se moviliza en cada una de las investigaciones, se realizará un análisis de contenido (Krippendorff, 2013) de las tres investigaciones presentadas, y especialmente de sus resultados, con el modelo MTSK (Carrillo et. al, 2018) como herramienta de análisis. Pretendemos, a través del uso de MTSK describir elementos del conocimiento de los maestros que se movilizan en los distintos papeles que pueden tomar los maestros en tareas de formulación mencionados con anterioridad.

La descripción del conocimiento la vamos a realizar en relación con tres sub-preguntas de investigación, teniendo como referencia, en la primera pregunta de investigación, el

conocimiento matemático y, en la segunda, el conocimiento didáctico-matemático. Esta disección del conocimiento nos permitirá conocer qué conocimiento matemático se moviliza en función a su correspondencia con MK o PCK. La tercera cuestión que abordamos, perseguirá seleccionar los extractos del conocimiento relacionados específicamente con la formulación de problemas, para, posteriormente, vincularlos a los distintos subdominios del modelo MTSK:

1. ¿Qué conocimiento matemático, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?
2. ¿Qué conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?
3. ¿Qué conocimiento especializado específico sobre formulación de problemas se pone en juego en diferentes momentos de tareas de formulación?

5 Resultados

5.1 Breve descripción del contenido de los artículos

En esta primera sección de resultados, presentamos los artículos desarrollados como parte de esta tesis. En el siguiente apartado, se mostrará una discusión de resultados en un primer momento de cada artículo de manera individual, en un segundo momento, un análisis de los resultados relacionados con el MK y el PCK desde la perspectiva de MTSK y, por último, un tercer momento en el que se relacionarán los aspectos del conocimiento identificados en las tres investigaciones en términos de MTSK.

5.1.1 Artículo 1

En el primer artículo perseguíamos el objetivo de comprender y caracterizar los problemas formulados por estudiantes para maestro del grado de educación primaria de la Universidad de Huelva. La comprensión de estos problemas nos permitiría conocer en qué aspectos de la formulación se centraban los estudiantes, así como conocer cómo interactuaban con el contenido a través del análisis de los problemas formulados. Por otro lado, nos ayudará a conocer qué nivel muestran los estudiantes para maestro formulando problemas, así como algunas dificultades que pueden tener para formular.

5.1.2 Artículo 2

Si en la investigación anterior focalizamos la atención en la formulación de problemas desde el punto de vista de maestros formuladores de problemas, en este segundo artículo que presentamos dirigimos el foco a la gestión de una clase de formulación de problemas. En este, tratamos de encontrar elementos que caractericen una sesión sobre formulación de problemas. Esta investigación aporta información relevante sobre el conocimiento especializado sobre formulación de problemas desde la perspectiva de la didáctica del contenido.

5.1.3 Artículo 3

Finalmente, en el artículo 3 mostramos el conocimiento matemático especializado que se moviliza durante una sesión de formulación de problemas. El objetivo es conocer y caracterizar este conocimiento para diseñar y gestionar una sesión sobre formulación de problemas. Esto nos permitirá tener una visión más amplia sobre qué debe conocer un maestro que pretende acercar la formulación de problemas al aula, así como aspectos claves que los maestros en formación deben conocer para poder ser competentes en una tarea sobre formulación de problemas matemáticos.

5.2 Artículo 1: Caracterización de problemas multiplicativos de números enteros formulados por estudiantes para maestro

Montes, M. A., Pascual, M. I., Carrillo, J. y Martín-Díaz, J. P. (2022). Caracterización de problemas multiplicativos de números enteros propuestos por futuros maestros. *Educação e Pesquisa*, 48. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248238551esp>

Caracterización de problemas multiplicativos de números enteros propuestos por futuros maestros¹

Miguel Montes²

ORCID: 0000-0003-3181-0797

Maria Isabel Pascual²

ORCID: 0000-0002-6429-2968

José Carrillo²

ORCID: 0000-0001-7906-416X

Juan Pedro Martín-Díaz²

ORCID: 0000-0001-6522-824X

Resumen

Asumiendo que los profesores deben ser capaces de formular problemas escolares, se aborda en este estudio el planteamiento de problemas multiplicativos de números enteros. Así, este artículo se centra en la caracterización de problemas multiplicativos de números enteros planteados por futuros profesores españoles de Educación Primaria. Para ello, se analizan problemas formulados por 121 estudiantes del grado de Educación Primaria -estudiantes para maestro- de la Universidad de Huelva, a los que se pidió que plantearan problemas en cuya resolución hubiera que realizar la operación $8x(-2)$. Para profundizar en las características, se hizo un análisis de contenido de cada uno de los problemas planteados, alrededor de cuatro aspectos: categoría semántica a la que pertenecen, coordinación de los términos usados en la formulación con los demandados, contexto en el que se ambienta, y resolubilidad del problema. Los resultados del estudio muestran que los estudiantes para maestro proponen indistintamente problemas de estructuras basadas en isomorfismos de medida y de relación escalar, a la vez que experimentan dificultades para formular el requerimiento del problema de tal manera que la solución conserve su naturaleza negativa de forma explícita. Estos resultados tienen potenciales implicaciones en la formación de maestros, que debería fomentar, desde las propuestas curriculares de la misma, la capacidad de los futuros maestros para plantear problemas matemáticos.

1- Esta investigación fue financiada por el centro de investigación COIDESO de la Universidad de Huelva, por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, del Gobierno de España (Proyecto: RTI2018-096547-B-I00), y por el grupo de investigación DESYM (HUM168) del Plan Andaluz de Investigación.

2- Universidad de Huelva, Huelva, España. Contactos: miguel.montes@ddcc.uhu.es; isabel.pascual@ddcc.uhu.es; carrillo@uhu.es; juan.martin@ddcc.uhu.es



<https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248238551esp>
This content is licensed under a Creative Commons attribution-type BY-NC.

Palabras clave

Formulación de problemas – Problemas multiplicativos – Números enteros – Estudiante para maestro.

Characterization of multiplicative integer problems posed by future teachers

Abstract

Assuming that teachers must be able to formulate school problems, this study deals with the approach of multiplicative problems of integers. Thus, this article focuses on the characterization of multiplicative problems of integers posed by future Spanish elementary teachers. To do this, we have analyzed problems formulated by 121 students of the Primary Education Degree - prospective teachers - at the University of Huelva, who were asked to pose problems in whose resolution the operation $8x(-2)$ had to be carried out. To delve into the characteristics, a content analysis was made of each of the problems, covering four aspects: the semantic category they belong to, coordination of the terms used in the formulation with the demanded, context it is set within, and problem solvability. The results of the study show that prospective teachers indistinctly propose problems of structures based on isomorphisms of measure and scalar relation, while experiencing difficulties in formulating the requirement of the problem in such a way that the solution explicitly maintains its negative nature. These results have potential implications for teacher training, which should promote, based on its curricular proposals, the capacity of future teachers to pose mathematical problems.

Keywords

Problem posing – Multiplicative problems – Integers – Prospective teachers.

Introducción

La formulación de problemas ha sido objeto de atención desde la investigación en educación matemática durante varias décadas (PÓLYA, 1945; KILPATRICK, 1987; CRESPO, 2003; SINGER; ELLERTON; CAI, 2015; FELMER; PEHKONEN; KILPATRICK, 2016). La formulación de problemas abarca también la formulación de situaciones problemáticas, o la reformulación de las mismas (SILVER, 1994), ya sea por el profesor como parte de su labor profesional, o por los estudiantes como parte de tareas propuestas. En este estudio nos centramos en los profesores como formuladores de problemas, en particular en los estudiantes para maestro (EPM).

Las habilidades de formulación de problemas por parte de los profesores constituyen uno de los elementos centrales de las competencias didácticas ligadas al contenido (TICHÁ; HOSPESOVÁ, 2013). En particular, la formulación o adaptación de problemas para su posterior uso en la práctica docente supone una herramienta poderosa para contribuir a la formación de profesores (CRESPÓ, 2003; BALL; FORZANI, 2009; NICOL; BRAGG, 2009; GRUNDMEIER, 2015), dado que implica la articulación de múltiples aspectos de conocimiento, tanto didácticos del contenido como del propio contenido.

En particular, en este estudio focalizamos nuestro interés en cómo los EPM proponen problemas multiplicativos de números enteros, contenido abordado en los últimos cursos de Educación Primaria en España. Las estructuras multiplicativas han sido objeto de estudio, tanto desde la perspectiva del aprendizaje de los alumnos (MULLIGAN; MITCHELMORE, 1997; IVARS; FERNÁNDEZ, 2016), como desde la comprensión del profesorado (ZAZKIS; CAMPBELL, 1996). Asimismo, los problemas multiplicativos han sido caracterizados y organizados según diferentes categorías (VERGNAUD, 1983; GREER, 1992; NESHER, 1992). Si bien se han identificado antecedentes ligados a las características de problemas multiplicativos de fracciones (AYDOGDU-ISKENDEROGU, 2018), los problemas multiplicativos de números enteros han recibido menor atención, como en general la enseñanza de los números enteros, debido a las dificultades de relación con contextos significativos para los alumnos de Primaria³ (GONZÁLEZ *et al.*, 1990; SHUTLER, 2017).

Aunando el interés que generan los estudios sobre formulación de problemas, los relativos a las estructuras multiplicativas, y los ligados a números enteros, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Qué características tienen los problemas multiplicativos que proponen los estudiantes para maestro, en cuya resolución intervenga la operación $8 \times (-2)$? Para ello, se analizarán las propuestas de 121 estudiantes del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Huelva (España), con el objetivo de caracterizarlos en función de cuatro aspectos: su categoría semántica, la coordinación de los términos usados en la formulación con los demandados, contexto, y resolubilidad.

Para ello, presentaremos en este artículo los distintos referentes teóricos ligados a la formulación de problemas, así como a los contenidos matemáticos involucrados en los problemas demandados, para después describir la metodología seguida. Posteriormente, mostramos los resultados obtenidos, finalizando con conclusiones relativas al objeto de estudio, así como algunas cuestiones abiertas identificadas durante la investigación.

Referentes teóricos

Resolver y proponer problemas son elementos centrales de la actividad matemática (BROWN; WALTER, 1990). La formulación de problemas, en particular, puede entenderse de dos formas complementarias, por un lado, como un tipo de enfoque de la actividad del aula, en la que se invita a los alumnos a construir problemas matemáticos desde situaciones, imágenes, o contextos familiares, tanto matemáticos como no matemáticos (NCTM, 2000); por otro lado, la formulación de problemas se liga a la formulación o

3- La Educación Primaria abarca en España 6 niveles: de los 6 a los 11 años de edad. Los maestros, o profesores de primaria, son generalistas, debiendo impartir varias asignaturas (Matemáticas, Lengua Castellana y Literatura, Ciencias naturales, Ciencias sociales, y Educación artística).

adaptación, por parte del profesor, de tareas problemáticas con una intencionalidad educativa (CRESPO, 2003; KLINSHTERN; KOICHU; BERMAN, 2015). En esta investigación adoptamos esta segunda perspectiva, asumiendo que el profesor debe ser competente en la formulación de problemas, o, al menos, en la articulación lingüística para adaptar un enunciado matemático a un contexto educativo (SINGER; VOICA, 2013). La formulación de problemas obliga a articular múltiples elementos, tanto matemáticos, como didácticos, de cara a generar enunciados que tengan sentido para ser propuestos en un contexto escolar. En esta investigación nos interesan, de cara a describir los problemas formulados por los estudiantes para maestro, tres tipos de elementos: los ligados a la naturaleza multiplicativa del problema, los ligados a la naturaleza entera de los factores implicados en la operación, y los ligados a la resolubilidad del problema. Este último ha sido anteriormente abordado en la investigación sobre resolución y formulación de problemas (LEUNG, 1997; CARRILLO; CRUZ, 2016), analizando diferentes grados de resolubilidad, en función de la suficiencia o no de condiciones que permitan que el problema tenga solución única, de la naturaleza abierta o no del problema, y la dificultad del problema creado (CAI; HWANG, 2003). En este estudio, se consideran resolubles los problemas si existen una o varias resoluciones plausibles, mientras que se consideran no resolubles en caso de que no exista una resolución desarrollable desde el enunciado planteado.

Los problemas, en general, tienen cuatro elementos fundamentales: *Información, Requerimiento, Contexto, y Entorno matemático* (MALASPINA, 2013). Entendemos por información los datos que se aportan al resolutor, de forma explícita o implícita en el enunciado, para que este desarrolle una articulación matemática de los mismos, hasta llegar a la solución. El requerimiento, que suele formularse en forma de pregunta, es aquello que el resolutor debe hallar, examinar, o concluir, que puede ser de naturaleza numérica o no, teniendo un carácter cualitativo o cuantitativo. El contexto puede ser intrínsecamente matemático o extramatemático, pudiendo tener el segundo distintos grados de acercamiento a la realidad. Finalmente, Malaspina (2013) define el entorno matemático como “[...] los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver un problema” (p. 143).

En este estudio, se exigió a los estudiantes para maestro que construyeran problemas de naturaleza multiplicativa. Diversos autores -Puig y Cerdán (1996) o Ivars y Fernández (2016)- ofrecen una síntesis de estas caracterizaciones, identificando tres grupos de problemas de estructura multiplicativa: (i) los isomorfismos de medida, en los que se establece una relación de proporcionalidad entre dos espacios de medida; (ii) problemas de relación escalar, denominados también de comparación multiplicativa (NESHER, 1992), en los que sólo interviene un espacio de medida, donde se establece una relación entre dos cantidades de dicho espacio, y una cantidad que los relaciona, un escalar, que tiende a designarse a través del término veces; y (iii) problemas de producto de medidas, también denominado producto cartesiano, que implican el producto cartesiano de dos espacios de medida, generando un tercer espacio, resultado de dicho producto.

En relación con la tipología de los problemas que se resuelven a través de multiplicaciones, es interesante observar la terminología que habitualmente se usa para estructurar sus enunciados. Así, en los isomorfismos de medida, se suele ofrecer la relación

de la unidad de uno de los espacios con el segundo espacio como multiplicando (o de un divisor del multiplicador), para demandar el elemento del segundo espacio asociado al valor en el primer espacio del multiplicador, como por ejemplo *Si cada persona come 2 caramelos, ¿cuántos se comerán 7 personas?*. En este tipo de problemas, la forma de denominar la asociación entre la unidad de un espacio de medida y su elemento asociado suele venir dada por el término *cada*, o equivalente. En el caso de los problemas de relación escalar, se relaciona el multiplicando, que es un elemento del espacio de medida, con el resultado del producto, a través de un escalar dado. Este tipo de problemas suele venir denotado por el término *veces*, o equivalente, por ejemplo, *Juan tiene tres euros, y Luis tiene dos veces más, ¿cuánto tiene Luis?*. En tercer lugar, en los problemas de producto de medidas, cada elemento multiplicado denota a un subconjunto de un espacio de medida diferente, siendo el resultado un conjunto que denota el cardinal del espacio producto de ambos subconjuntos. Este es el único caso en el que la elección de multiplicando y multiplicador en la realización de la multiplicación puede ser arbitraria. En estos problemas, el producto cartesiano suele venir denotado por un término que refleje el establecimiento de parejas de elementos de cada uno de los espacios (e.g. combinación, pares), por ejemplo: *¿De cuántas formas diferentes podré combinar mis tres pantalones y mis cuatro camisas?*. Se incluyen en este tipo los problemas en los que intervienen magnitudes continuas y se solicita un resultado sobre otra magnitud, por ejemplo: *Calcular el volumen de un prisma cuadrangular cuya área de la base es 25 cm^2 y su altura es 10 cm* . Este tipo de problema resulta imposible de construir con números negativos, dada la naturaleza siempre positiva de las cantidades de medida que deben estar involucradas.

Las investigaciones sobre números negativos se centran en cómo introducirlos, mientras que son muy escasos los trabajos donde se estudien los números negativos desde la perspectiva de cómo se puede dotar de sentido a las diferentes estructuras operativas, y en particular las multiplicativas. Así, los números negativos han sido abordados en múltiples trabajos desde su comprensión y enseñabilidad (GONZÁLEZ *et al.*, 1990; STACEY; HELME; STEINLE, 2001; ALMEIDA; BRUNO, 2014). Los obstáculos epistemológicos asociados a los números negativos se suelen ligar a la naturaleza abstracta de los mismos, y la consiguiente dificultad de encontrar contextos en los que tengan sentido (ALMEIDA; BRUNO, 2014; GONZÁLEZ *et al.*, 1990). En cuanto a los obstáculos epistemológicos para el desarrollo de la comprensión de los números enteros, en particular en contextos multiplicativos, existe una tendencia a la búsqueda de un modelo unificador, no existente, de número entero que permita comprenderlo tanto en situaciones aditivas como multiplicativas (GLAESER, 1981). Para abordar su enseñanza, González y otros autores (1990) proponen hacer una aproximación descontextualizada de la realidad, dada la escasez de contextos reales que dan sentido a los negativos, mientras que otros autores proponen estructurar metáforas (basadas en el uso de espejos sobre rectas numéricas) que permitan establecer paralelismos en los comportamientos de naturales y enteros (e.g. STACEY; HELME; STEINLE, 2001). En ciertas propuestas se describen situaciones en las que los negativos pueden tener sentido en un contexto de Educación Primaria. Bruno (1997), al estudiar el uso de números negativos en problemas aditivos, identifica los seis contextos más utilizados en libros de texto: “[...] deber-tener, cronología, temperatura, nivel del mar, carretera y ascensor” (p. 12), al

que Nieto y otros autores (1994) añaden contextos de variación de peso, y resultados en deportes (golf, fútbol).

Así, la coordinación de las estructuras multiplicativas de problemas aritméticos con la naturaleza entera de los números demandados en los problemas en este estudio, y sus contextos asociados, supone un campo que requiere de profunda exploración.

Metodología

Este estudio se desarrolló desde un paradigma interpretativo (BRYMAN, 2013). La elección de dicho paradigma se debe a que el objetivo fundamental del mismo se centraba en la comprensión y caracterización del objeto de estudio, en este caso de los problemas formulados por 121 EPM (alrededor del 50% del total de la población de estudiantes) que habían cursado la asignatura del segundo curso del Grado de Educación Primaria relativa a números, operaciones y su didáctica, en la Universidad de Huelva (España)⁴, en tres grupos de clase diferentes. Dicha asignatura está enfocada a la construcción de conocimiento, tanto matemático como didáctico, sobre elementos numéricos y operaciones aritméticas, con foco en la resolución y formulación de problemas. A los estudiantes se les propuso una tarea que focalizaba en la formulación de tareas (Figura 1), para la que dispusieron de 2 horas de tiempo, sin posibilidad de plantear preguntas.

Figura 1- Tarea propuesta

"En una sesión donde se trabaja la multiplicación de números enteros, un alumno dice:

'Maestra, ¿qué sentido tiene trabajar esto?, quiero decir: ¿para qué me enseñas que $8 \times (-2) = -16$? No encuentro ningún caso en el que pueda aplicarlo a un contexto real'

Formula y resuelve un problema de estructura multiplicativa donde intervengan números enteros (preferiblemente, que se resuelva usando los que indica el alumno)".

Fuente: Elaborado por los autores.

En una primera fase, las 121 producciones fueron analizadas para determinar si las respuestas se adecuaban a lo demandado, descartándose 6 de ellas por ser ininteligibles, no formular situaciones problemáticas, o estar en blanco. Para analizar las 115 producciones restantes, se usó el análisis de contenido (KRIPPENDORF, 2013), analizando diferentes variables que nos permitieran caracterizar los problemas formulados. Dichas producciones fueron codificadas como Ti-n, donde Ti indica el grupo de clase al que pertenece el alumno que lo propuso, y n viene dado por la ordenación alfabética de los estudiantes en dicho grupo.

La primera de las variables que se analizó fue la categoría semántica a la que pertenece el problema, atendiendo a los tres tipos de problema propuestos por Ivars y Fernández (2016): Isomorfismo de medida, relación escalar, y producto cartesiano o de medida. En segundo lugar, se estudió la coordinación de los términos usados para formular

4- La formación de profesores en España dura cuatro años, donde tienen al menos 180 horas de formación teórico-prácticas de asignaturas de contenido didáctico-matemático.

el problema con la naturaleza de cada uno de los elementos matemáticos involucrados: 8, -2, el producto, y el resultado de la operación. En particular, se puso especial atención en la naturaleza negativa de -2, así como a la de -16, en relación con los términos usados para dotar de sentido a dichas cantidades negativas. Para este análisis, los investigadores discutieron las posibles interpretaciones de cada término en la resolución, codificándolas como coordinada, no coordinada, o implícita. Se codificó como coordinada cuando la forma de verbalizar la referencia al elemento matemático permitía, en la resolución del problema, usar la cantidad negativa de forma explícita. Se codificó como implícita en caso de que existiese una posible interpretación del enunciado que, si bien no llevase a usar las cantidades en forma explícitamente negativa, pero con una posible interpretación de las cantidades desde su significado o contexto que aportase un matiz de negatividad. Finalmente, se codificó como no coordinada cuando no hubiera coordinación ni posible relación con significado o contexto negativo.

Para el análisis del contexto de los problemas formulados, se usaron los contextos identificados por Bruno (1997), añadiendo los dos adicionales propuestos por Nieto y otros autores (1994): deber-tener, cronología, temperatura, nivel del mar, carretera, ascensor, peso, deportes. Se asumió la posibilidad de que apareciera algún contexto no previsto, añadiendo una categoría de *otros*. Para estudiar la resolubilidad de los problemas formulados, se estudió si dichos problemas poseían solución o no, si la resolución del problema era coherente con la demanda (es decir, que implicara la operación $8 \times (-2)$), y la cantidad de etapas de las resoluciones del problema (entendida como la cantidad de operaciones involucradas).

Estas variables consideran los cuatro elementos que poseen los problemas, según la estructura propuesta por Malaspina (2013). La estructura semántica atiende al entorno matemático, a la vez que explora la información que lleva a definir el producto como operación que resuelve el problema. La coordinación de términos, referida a 8, -2, y el producto, profundiza en la información, mientras que dicha coordinación, referida a la forma de plantear la pregunta (que determina la naturaleza del resultado), profundiza en el requerimiento. El análisis de la resolubilidad profundiza de nuevo en el entorno matemático del problema. Finalmente, exploramos, a través de las categorías anteriormente indicadas, al contexto extramatemático de los problemas, no habiéndose planteado problemas con contexto intramatemático.

El análisis de la información se realizó por parte de dos de los investigadores de forma independiente, y posteriormente se discutió en el equipo de investigación, asegurando la triangulación por terceros (FLICK, 2007).

Análisis y resultados

Organizaremos esta sección en tres bloques. Primero, mostraremos la información sobre las estructuras semánticas de los problemas formulados por los EPM, con algunos ejemplos, poniendo énfasis en los términos que se usan para verbalizar cada una de las estructuras multiplicativas, y describiendo los contextos en los que se sitúan los problemas formulados. Posteriormente, profundizaremos en la coordinación entre los términos usados

para referir a los elementos numéricos del problema, mostrando ejemplos. Seguiremos con el análisis de la resolubilidad, identificando los diferentes tipos de problemas que se detectan, según la forma de resolverlos, y finalizaremos con el análisis de cuántos de los problemas son resolubles, y cuántos se ajustan completamente a lo demandado, poniéndolo en relación con las estructuras semánticas de problemas multiplicativos. Si bien el estudio es cualitativo, mostraremos también las cantidades totales de cada dimensión, para ofrecer una panorámica de las predominancias en las características de los problemas formulados por los EPM.

En la tabla 1, mostramos un resumen de las estructuras semánticas de los problemas formulados por los EPM. Cabe destacar que sólo aparecen en ella los 108 problemas resolubles a través de estructuras multiplicativas, de los 115 problemas totales analizados.

Tabla 1- Estructuras semánticas y palabras clave usadas

Estructura	Frecuencia	Palabras clave	Frecuencia
Isomorfismo de medidas	63	cada	63
Relación escalar	44	veces	27
		doble	17
Producto cartesiano	1	combinaciones	1

Fuente: Elaborado por los autores.

Los EPM construyen sus problemas alrededor de dos estructuras semánticas fundamentalmente, el isomorfismo de medidas, y la relación escalar. Sólo un estudiante lo plantea como producto de medidas: “En mi armario tengo ocho camisas, pero mis dos pantalones están sucios y no me los puedo poner. ¿Cuántas opciones y combinaciones de ponérmelos tendré?” (T1-46). Todos los problemas de isomorfismo están planteados usando la palabra *cada*: “Antonio tiene ahora mismo 0€, pero ayer se fue de fiesta y les pidió a 8 amigos suyos que le prestasen 2€ cada uno, que más adelante se lo devolvería. ¿Cuál es el balance de Antonio entre lo que tiene y lo que debe?” (T2-3). Por otro lado, podemos ver que en los problemas de relación escalar hay dos palabras clave distintas de las que se hace uso, *veces*, y *doble*, siendo más usada la primera:

Hoy, el hombre del tiempo ha dicho que va a hacer -2°C, pero ha avisado de que viene una racha de frío extremo a partir de la semana que viene, diciendo que el lunes hará 8 veces más frío. ¿Cuántos grados hará el lunes que viene? (T1-29).

María tiene en su hucha 8€, pero se ha acordado de debe a su hermana el doble de dinero de lo que tiene. ¿Cuánto le debe a su hermana? (T1-39).

Cabe destacar que el término *veces* se suele formular en algunas ocasiones acompañado de *menos*, hecho que abordaremos más adelante, al discutir la coordinación entre la verbalización usada y el objeto matemático al que se pretende referir. Un detalle

remarcable es que veinte de los problemas planteados son de dos etapas, doce de ellos de relación escalar, y ocho de isomorfismos de medida, cuando se exigía sólo una operación.

Centrándonos ahora en los contextos en los que los problemas son planteados, existe una amplia variedad (Tabla 2).

Tabla 2- Contextos usados en los problemas formulados

Contexto	Frecuencia
Deber/tener (económico)	55
Temperatura	26
Deber/tener (objetos)	19
Ascensor	9
Nivel del mar	3
Deportes	1
Estatura	1
Otro	1

Fuente: Elaborado por los autores.

En los 115 problemas formulados por los EPM, destaca sobre el resto el contexto deber/tener, del que identificamos dos subtipos: el contexto que alude a una situación económica, en la que habitualmente se descuenta una cantidad; y la situación en la que se prestan, sustraen, o deben objetos. Tienen relevancia, además de los contextos de deber/tener, el de temperatura, que se suele formular en términos de la repetición de -2°C ocho veces, o el de ascensor, donde se tiende a aludir a bajar dos plantas también ocho veces.

En cuanto a la coordinación de la terminología usada para referir a cada uno de los elementos del problema, obtenemos los resultados reflejados en la Tabla 3.

Tabla 3- Coordinación de la terminología usada con los elementos matemáticos

Elemento	Coordinada	No coordinada	Implícita
8	108	7	0
-2	93	5	17
Producto	104	7	4
Resultado	52	12	51

Fuente: Elaborado por los autores.

Puede observarse que no hay muchos casos en los que se demuestren dificultades a la hora de referir al 8 como un elemento positivo. En los siete casos donde no hay coordinación entre lo demandado y lo escrito en el problema, en cuanto al 8, se observa

que el EPM dota de naturaleza negativa al 8, y de positiva al 2, como en el siguiente ejemplo: “Tengo 0€ en la cuenta bancaria, y llevo atrasados dos pagos de 8€ cada uno. Si el banco me cobra los pagos que debo, ¿cuánto tendré?” (T1-16).

En cuanto al -2, hay 22 casos donde la redacción del problema no permite interpretar dicha cantidad como negativa de forma directa, ya sea por no existir coordinación entre la negatividad de -2 y lo planteado en el problema, o por estar implícito en el contexto o en aspectos gramaticales. Un ejemplo del primer caso es el siguiente: “Dos obreros excavan un pozo. El primer obrero excava 8 metros de profundidad, encontrándose a -8 metros sobre el nivel del suelo. El segundo, excava lo mismo, ¿A qué profundidad se encontrará?” (T1-13). Aquí vemos que el estudiante para maestro invierte la negatividad de los elementos involucrados.

En los otros 17 casos, se observa que hay un intento de dotar de naturaleza negativa al dos, añadiendo elementos contextuales que evocan elementos negativos: “Si tengo 8 lápices, pero a mi amigo Raúl le debo el doble de estos 8. ¿Cuántos lápices le debo a mi amigo Raúl?” (T1-9), o, “Un equipo de fútbol juega 8 partidos en una competición, y en cada partido pierde por 2-0. ¿por cuántos goles han perdido en todo el campeonato?” (T1-18). En estos dos ejemplos, vemos que los futuros maestros añaden términos como *debo*, y *pierde*, asociados habitualmente a contextos interpretables como números negativos, pero que en sus propuestas no llegan a adquirir dicho sentido negativo. Por otro lado, algunos estudiantes proponen problemas donde parecen pretender referirse al -2 a través de la verbalización *dos veces*, seguido de un adverbio comparativo (más, menos): “En Andalucía hoy hace 8 grados, pero en el País Vasco hace dos veces menos. ¿Cuántos grados hace en el País Vasco?” (T1-57), o, “Hoy Finlandia amaneció con 8 grados de temperatura. Debido a los fuertes vientos y a la inestabilidad atmosférica de la época, el hombre del tiempo anuncia que en unas horas la temperatura será dos veces más fría. ¿Qué temperatura hará entonces?” (T2-6). En estos dos problemas, se usan estrategias equivalentes para intentar, sin éxito, dotar de naturaleza negativa al 2. En ambos casos, al referir a una temperatura inferior, ya sea hablando de veces menos, o de *veces más frío*, se usa una estrategia basada en tratar de explotar el contexto. Otro ejemplo de uso del contexto es el problema anteriormente mostrado, planteado por el estudiante T1-16, donde se refiere al dos como cantidad de pagos atrasados, evocando dicho atraso a la negatividad pretendida. Cabe destacar aquí la ambigüedad de la expresión *veces menos*, que puede llevar tanto a restar el doble de la cantidad de referencia, como a dividir dicha cantidad entre dos, dentro de un uso relajado del lenguaje. Finalmente, hay casos donde se usa una doble referencia a la naturaleza negativa del -2, probablemente para reforzar el hecho de que el -2 ha de ser considerado como negativo: “Mi padre, cuando nos portamos mal mis 7 hermanos y yo, nos quita 2€ menos de la paga semanal. Si esta semana nos hemos portado mal, ¿cuánto dinero hemos perdido en total los 8?” (T1-54). Es interesante ver cómo en este caso, desde una interpretación estricta de la lengua española, la referencia a “quitar 2€ menos” implica que existía una cantidad *quitada* anterior, y que dicha cantidad se reduce en 2€. Sin embargo, teniendo en cuenta el contexto del problema, asumimos que el EPM pretende reforzar la negatividad del -2, sin ser consciente del problema gramatical que puede generar.

En general, casi todos los estudiantes son capaces de verbalizar la relación entre cantidades para que sea de producto entre las mismas, usando habitualmente los términos *veces*, y *cada*: “Cada año la temperatura de la Tierra, debido a la contaminación, baja 2°. Actualmente vivimos en el Polo Norte, y hoy la temperatura es de 0°. ¿Cuál será la temperatura dentro de 8 años?” (T2-39). Sólo en 7 casos observamos dificultades a la hora de estructurar la alusión al producto, respondiendo en general a problemas aditivos: “Si sabemos que en el Polo Norte hace -2°, y en el Polo Sur hace ocho grados menos. ¿Cuántos grados hace en el Polo Sur?” (T2-7). En estos casos intervienen tanto el 8 como el -2, pero no se articulan a través de ningún significado del producto. En los otros 4 casos, la propuesta es parecida a la de T1-57, usando la expresión *veces menos*, que puede referir, en un uso poco riguroso del lenguaje matemático, tanto al producto (y posterior resta) como a la división.

En cuanto a la coordinación entre la forma de plantear el requerimiento y la naturaleza negativa de la solución del problema, en 52 casos existe coordinación, y en 63 o es implícita o no parece existir. Esto suele responder a casos en los que el EPM propone problemas demandando una cantidad de la misma naturaleza que el -2: “Manolo necesita ir a la Universidad durante 8 días en autobús, puesto que se le ha averiado el coche. Para ello, retira de la cartera de su padre 2€ cada día. ¿Cuánto dinero ha retirado Manolo en total de la cartera de su padre?” (T1-50). Vemos que en este problema el EPM estructura un requerimiento que tiene en cuenta la repetición reiterada de una retirada de dinero, dotando así de naturaleza (potencialmente) negativa al 2. Sin embargo, al formular la pregunta en términos de cuánto ha sido retirado en total, obvia la naturaleza pretendidamente negativa del 2, debiendo ser el resultado positivo, aunque poseyendo un significado asociable, por el contexto, a la negatividad. Es interesante, en este sentido, y en relación con el contexto, que 42 de los 55 problemas formulados en contextos económicos (ver Tabla 2) plantean requerimientos que responden a esta casuística, planteando, por ejemplo, una situación de deuda acumulada, y demandando en la pregunta el total al que asciende la deuda. Sólo en 13 propuestas se demanda una cantidad relativa al balance final como, por ejemplo: “María tiene su cuenta a cero, y no va a ingresar dinero en ella durante los próximos ocho meses. Si cada mes le descuentan la factura de la luz y son 2€, ¿cuánto dinero tiene en la cuenta María pasados esos 8 meses?” (T1-30). En este caso, un problema de dos etapas ($0+8 \times (-2)$), al preguntar por el dinero final, contrapone la naturaleza de lo descontado, frente a lo habido, permitiendo que el resultado sea negativo. Este problema pone de relieve también que, en ciertos casos, el uso del contexto es un tanto forzado, siendo poco realista el hecho de que la factura de la luz ascienda a dos euros.

Como veremos más adelante, el hecho de que 52 de las soluciones se consideren coordinadas en término de la negatividad no necesariamente implica que los elementos multiplicados o incluso la propia multiplicación esté coordinada. Sólo 25 problemas están plenamente coordinados.

En cuanto a la resolubilidad, el análisis muestra que 109 de los problemas formulados tienen solución, frente a 6 problemas irresolubles. Sin embargo, en estos 109 problemas, las soluciones tienen una amplia variabilidad (Tabla 4).

Tabla 4- Soluciones de los problemas propuestos

Solución	Frecuencia	Solución	Frecuencia
-24	1	0	1
-16	36	4	1
-10	1	8	1
-8	9	16	55
-4	1	24	1
-0.25	1	32	1

Fuente: Elaborado por los autores.

Resulta interesante observar que, del total de problemas formulados, 36 tienen la solución esperada (-16), mientras que 55 tienen como solución 16. Asimismo, en 9 casos, la solución es -8. Dentro de los problemas que tienen estas tres cantidades por solución, resulta interesante apreciar cómo estos suelen responder a diferentes casuísticas en la estructuración de los mismos. Así, los problemas cuya solución es -16, derivan de tres tipos diferentes: i) problemas que se resuelven a través de la operación $(-8) \times 2$: “Dos obreros excavan un pozo. El primer obrero excava 8 metros de profundidad, encontrándose a -8 metros sobre el nivel del suelo. El segundo, excava lo mismo, ¿A qué profundidad se encontrará?” (T1-13); ii) problemas que se resuelven a través de la operación $8 \times (-2)$: “Actualmente poseo 0 €. Durante 8 días me han descontado 2 € cada día, ¿cuánto dinero tendré en el banco al finalizar el octavo día?” (T1-40); iii) problemas que se resuelven a través de la operación $-(8 \times 2)$: “Tengo que comprar 8 libros, cada uno vale 2€. ¿Cuánto dinero me restará del dinero que me ha dado mi madre?” (T1-3). En el primer tipo de problemas, el estudiante para maestro no atiende a la demanda de que la operación mediante la que se resuelva el problema sea explícitamente $8 \times (-2)$, sino que invierte los signos, llevando ambos al mismo resultado. El segundo tipo de problema atiende a lo demandado en el enunciado de la tarea, y deriva de considerar la naturaleza negativa del -2, mientras que en el tercero, el problema completo es estructurado teniendo en cuenta 8 y 2 positivos, obligando, con la forma de estructurar la cuestión, a que se cambie la naturaleza del resultado a negativo.

Los problemas cuya solución es 16, en general, se caracterizan por el hecho de que la forma de demandar la solución hace que esta deba expresarse como un número positivo con un significado negativo, por ejemplo, de deuda: “Un niño está jugando a las canicas con sus 8 amigos. Cuando acaba el juego, le debe 2 canicas a cada uno. ¿Cuántas canicas debe en total?” (T2-16). Este problema es representativo de los problemas cuya solución es 16, en los que la forma de estructurar la cuestión lleva a que se considere -2 en valor absoluto, resolviéndose a través de la operación 8×2 , ya que se pide, como en este caso, el total de canicas adeudadas. Otro ejemplo representativo es el siguiente: “Tengo una caja con arañas, si se me escapan 2 de ellas, ¿cuántas patas menos tendré en la caja?” (T2-5). En este caso, de nuevo el problema se resuelve a través de la operación 8×2 . Sin embargo, se menciona explícitamente el término *menos* en el requerimiento, intentando contemplar

la naturaleza negativa del -2 . Ahora bien, al preguntar cuántas patas menos hay en la caja, obvia la naturaleza negativa del resultado buscado.

En cuanto a los problemas cuya solución es -8 , suelen responder a problemas de dos etapas, por ejemplo: “Tengo 8€, pero le debo dinero a 2 amigos míos. A ambos les debo 8€. Si devolviera todo lo que debo, ¿con cuánto dinero me quedaría?” (T2-24). Este problema responde a una solución a través de la expresión $8+(-8)\times 2$, que se hace equivaler de forma inmediata a $8-8\times 2$. Otro ejemplo lo tenemos en el siguiente problema: “Estoy en la planta 8, y mi coche se encuentra aparcado el doble de plantas para abajo. ¿En qué planta está mi coche?” (T2-1). En este segundo problema, de nuevo de dos etapas, la verbalización es confusa, respecto del significado de “el doble para abajo”, aunque entendemos que supone un esfuerzo por dotar de naturaleza negativa a la diferencia entre plantas, ligándola al descenso. Esto llevaría a una solución del tipo: $8-8\times 2$.

Los ejemplos que llevan al resto de soluciones se caracterizan por el hecho de no articular correctamente las operaciones demandadas. Por ejemplo, el siguiente problema: “Durante 8 días ha hecho -2 grados cada día. Si dicen que al noveno día van a bajar el doble, ¿cuántos grados va a hacer?” (T1-23). En este caso, el estudiante no articula la relación entre 8 y -2 como multiplicativa, sino que la reduce el 8 a un elemento contextual del problema. En otros casos, el estudiante articula la relación entre los elementos sin conseguir que 2 tenga una naturaleza negativa, y generando un problema de dos etapas: “Un niño tiene 8 caramelos, y su madre le compra el doble de lo que tiene, pero al salir de la tienda los pierde. ¿Cuánto podría haber tenido?” (T2-43). Vemos como en este problema, hay elementos contextuales que evocan la pérdida o disminución de una cantidad de objetos, pero tanto el propio contexto, en el que es imposible tener una cantidad negativa de objetos, como la pregunta, que pide una proyección de la suma de las cantidades, hacen que el problema no cumpla los requerimientos.

Para finalizar el análisis, es interesante observar, en relación con cada una de las estructuras semánticas, y de las palabras clave, cuántos problemas se resuelven usando la operación $8\times(-2)$ como parte de la resolución (Tabla 5).

Tabla 5- Problemas resolubles y que requieren la operación $8\times(-2)$ para resolverse, según estructura semántica

Estructura	Frec.	Palabra clave	Frecuencia	Resolución $8\times(-2)$
Isomorfismo de medidas	63	cada	63	13
Relación escalar	44	veces	27	12
		doble	17	0
Producto de medidas	1	combinaciones	1	0

Fuente: Elaborado por los autores.

Observamos que sólo un total de 25 estudiantes plantean problemas que se adaptan a la resolución pretendida. Esto sólo ocurre cuando los términos que se usan para referir a cada uno de los elementos matemáticos están coordinados con cada uno de los elementos matemáticos demandados, además de poseer un contexto para el que tenga sentido la situación problemática. En particular, desde el punto de vista de la estructura semántica de relación escalar, encontramos que ninguno de los problemas formulados por los EPM en el que se involucre la palabra clave “doble” se resuelve usando la operación $8 \times (-2)$, hecho matemáticamente esperable. Porcentualmente, sólo el 20,6% de los problemas ligados a isomorfismos de medida se adaptan a lo demandado, mientras que el porcentaje asciende al 30% en el caso de los estructurados como una relación escalar.

Síntesis de resultados

Del análisis anterior, se desprende que los problemas formulados por los EPM, bajo la demanda de que se resuelvan usando la operación $8 \times (-2)$, se organizan alrededor de las estructuras semánticas de isomorfismo de medidas y de relación escalar, indistintamente. Pasamos ahora a comentar algunos de los aspectos más significativos derivados del análisis, que pueden explicar este bajo porcentaje.

Los EPM, en general, muestran saber coordinar la redacción del problema con el hecho de que los términos multiplicados sean 8 y -2 (Tabla 3). Merece especial atención el -2, donde se usan tanto estrategias basadas en la explotación de contextos asociados a cantidades negativas, habitualmente asociadas a problemas de isomorfismos de medida, como a contextos de duplicación, en los que se intenta dotar a dicha duplicación de una naturaleza negativa, a través del contexto, o a través del uso de la expresión *veces menos*. Es interesante observar que en los casos en los que el problema se refiere al 8 como cantidad negativa, y al 2 como cantidad positiva, existe una estrategia de compensación de signos para que el resultado sea equivalente. En cuanto al producto, en general sólo se evidencian dos tipos de dificultades; las primeras están derivadas del uso de la expresión *veces menos*, que genera ciertos problemas de significado, ya que dependiendo de lo relajado del uso del lenguaje se puede entender como producto de número negativo o se asocia a la división; y las otras están ligadas a la estructuración del problema como problema aditivo. Si centramos la atención en la demanda implícita de que el resultado sea -16, encontramos que supone un reto mayor para los EPM. Alrededor de la mitad de los problemas formulados plantean el requerimiento del problema demandando una cantidad de naturaleza negativa, de tal manera que el resultado lleva al valor absoluto de la misma. Esto es especialmente relevante en el contexto deber/tener asociado a cuestiones económicas, donde es habitual preguntar por la cuantía de una deuda, llevando a una respuesta positiva.

Es sorprendente la amplísima variabilidad que existe en las soluciones de los problemas formulados por los EPM, con doce valores diferentes. Destacan sobre el resto los problemas cuya solución es 16, habitualmente ligados al hecho de formular una pregunta que lleva al valor absoluto, por la negatividad implícita asociada al significado o contexto del resultado.

Conclusiones

La formulación de problemas es una competencia profesional que implica al profesor como un gestor en la creación y proposición del contenido a abordar. En este estudio nos hemos centrado en explorar las características de los problemas formulados por los EPM a la demanda de generar problemas que involucraran la operación $8 \times (-2)$, en relación con la información, el requerimiento, y el contexto, asumiendo que el entorno matemático venía dado por las estructuras multiplicativas aplicadas a números enteros.

Proponer problemas, especialmente problemas multiplicativos que impliquen números negativos, no es trivial. En esta tarea se involucran diversos factores que deben ser articulados para llegar a un problema que responda a las condiciones matemáticas pretendidas en la resolución del mismo. Hemos mostrado que, en particular, resulta especialmente conflictivo para los EPM articular el requerimiento del problema con el signo de la solución pretendida. Entendemos que esto puede deberse a la tendencia de los estudiantes a asumir que los problemas aditivos y multiplicativos tienen una estructura unificada (GLAESER, 1981), no teniendo en cuenta la problemática del cambio de signo, así como a la habitual tendencia, en problemas aditivos, a no sentir la necesidad de usar números negativos en el resultado (BRUNO; ESPINEL; MARTINÓN, 1997). En este sentido, es crucial la articulación precisa de los términos que finalmente constituyan el enunciado del problema, ya que estos determinan tanto el signo de las cantidades involucradas, como la estructura semántica del problema.

En lo relativo al signo de las cantidades, el contexto demuestra jugar un rol importante, ya que ciertos contextos han demostrado ser útiles para referir a cantidades negativas, trascendiendo lo ya estudiado para contextos aditivos (BRUNO, 1997; NIETO *et al.*, 1994), dando sentido también a problemas multiplicativos.

Cabe destacar la necesidad, de cara a la formación de estos estudiantes, de invitarlos a discernir entre la presencia explícita o implícita de los elementos matemáticos demandados, de cara a que desarrollen procesos reflexivos sobre aquellos problemas que, como futuros profesores, planteen a sus estudiantes, de manera que el trabajo matemático de los mismos no implique una complejidad mayor de la pretendida.

En futuros desarrollos, creemos que sería interesante explorar otras variables de la formulación de problemas, más allá de las puramente matemáticas, como pueden ser el potencial didáctico, o la efectividad didáctica (WILHELM; GODINO; LACASTA, 2007), que caractericen la formulación de problemas desde la óptica de los aspectos intrínsecamente ligados a la profesión docente.

Es asumido que los maestros en formación deberían poseer un cuerpo de conocimientos mínimos (CASTRO *et al.*, 2014), entre los que deberían estar incluidos los que les permitan abordar la resolución de problemas multiplicativos de números enteros. Sin embargo, la formulación de problemas como competencia profesional ha recibido una atención insuficiente. Creemos que, de cara a futuros desarrollos de esta investigación, debería analizarse qué conocimiento profesional se necesita para ser competente en la formulación de problemas aditivos de números enteros, complementando así los estudios que profundizan en el conocimiento profesional necesario tanto para resolver problemas

como para gestionar la resolución de problemas en el aula (TARDIF, 2002; PIÑEIRO; CASTRO-RODRÍGUEZ, CASTRO, 2019; CARRILLO *et al.*, 2019). En este sentido, y de cara al necesario proceso de transferencia de los resultados de investigación (GARCÍA; MAAS; WAKE, 2010), son necesarias investigaciones que caractericen la competencia profesional en formulación de problemas de forma profunda, para así poder comenzar a explorar la posibilidad de introducirla en la formación inicial.

Referencias

ALMEIDA, Rut; BRUNO, Alicia. Strategies of pre-service primary school teachers for solving addition problems with negative numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, United Kingdom, v. 45, n. 5, p. 719-737, 2014.

AYDOGDU-ISKENDEROGU, Tuba. Fraction multiplication and division word problems posed by different years of pre-service elementary Mathematics teachers. **European Journal of Educational Research**, Netherland, v. 7, n. 2, p. 373-385, 2018.

BALL, Debora; FORZANI, Francesca. The work of teaching and the challenge for teacher education. **Journal of Teacher Education**, E.E.U.U., v. 60, n. 5, p. 497-511, 2009.

BROWN, Stiphen; WALTER, Marion. **The art of problem posing**. 2. ed. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1990.

BRUNO, Alicia. La Enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. **Números**, Tenerife, v. 29, p. 5-18, 1997.

BRUNO, Alicia; ESPINEL, María Candelaria; MARTINÓN, Antonio. Prospective teachers solve additive problems with negative numbers. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, Framingham, v. 19, n. 4, p. 36-55, 1997.

BRYMAN, Alan. **Social research methods**. Oxford: Oxford University Press, 2013.

CAI, Jinfa; HWANG, Stephen. A perspective for examining the link between problem solving and problem posing. *In*: PATERMAN, Neil; DOUGHERTY, Barbara; ZILLIOX, Joseph (ed.). **PME CONFERENCE**, 27., 2003, Honolulu. 27 PME... v. 3. Honolulu: PME, 2003. p. 103-110.

CARRILLO, José; CRUZ, Jorge. Problem-posing and questioning: two tools to help solve problems. *In*: FELMER, Patricio; PEHKONEN, Erkki; KILPATRICK, Jeremy (ed.). **Posing and solving mathematical problems**. Cham: Springer, 2016. p. 23-36.

CARRILLO, José *et al.* Mathematics Teachers' specialised knowledge in managing problem-solving classroom tasks. *In*: FEIMER, Patricio; LILIEDAHL, Peter; KOICHU, Boris (ed.). **Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development**. Cham: Springer, 2019. p. 297-316.

CASTRO, Angela *et al.* Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. *In*: GONZÁLEZ, María Teresa (ed.). **Investigación en educación matemática XVIII**. Salamanca: Seiem, 2014. p. 227-236.

CRESCO, Sandra. Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. **Educational Studies in Mathematics**, Netherland, v. 52, n. 3, p. 243-270, 2003.

FELMER, Patricio; PEHKONEN, Erkki; KILPATRICK, Jeremy. **Posing and solving mathematical problems**. Cham: Springer, 2016.

FLICK, Uwe. **Introducción a la investigación cualitativa**. Madrid: Morata, 2007.

GARCÍA, Francisco Javier; MAAS, Katja; WAKE, Geoff. Theory meets practice: working pragmatically within different cultures and traditions. In: LESH, Richard *et al.* (ed.). **Modeling students' mathematical modeling competencies**. London: Springer, 2010. p. 445-457.

GLAESER, George. Epistemologie des nombres relatifs. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 2, n. 3, p. 303-346, 1981.

GONZÁLEZ, José Luis *et al.* **Números enteros**. Madrid: Síntesis, 1990.

GREER, Brian. Multiplication and division as models of situations. In: GROWS, Douglas (ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, 1992. p. 276-295.

GRUNDMEIER, Todd. Developing problem-posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. In: SINGER, Florence; ELLERTON, Nerida; CAI, Jinfa (ed.). **Mathematical problem posing**. Cham: Springer, 2015. p. 411-433.

IVARS, Pere; FERNÁNDEZ, Ceneida. Problemas de estructura multiplicativa: evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. **Educación Matemática**, México, DC., v. 28, n. 6, p. 9-38, 2016.

KILPATRICK, Jeremy. Problem formulating: where do good problems come from? In: SCHOENFELD, Alan H. (ed.). **Cognitive science and mathematics education**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1987. p. 123-147.

KLINSHTERN, Michal; KOICHU, Boris; BERMAN, Avi. What do high school teachers mean by saying "I pose my own problems"? In: SINGER, Mihaela; ELLERTON, Nerida; CAI, Jinfa (ed.). **Mathematical problem posing**. Cham: Springer, 2015. p. 449-467.

KRIPPENDORF, Klaus. **Content analysis: an introduction to its methodology**. Thousand Oaks: Sage, 2013.

LEUNG, Shuk-kwan. On the role of creative thinking in problem posing. **ZDM**, Cham, v. 97, n. 3, p. 81-85, 1997.

MALASPINA, Uldarico. Variaciones de un problema: el caso de un problema de R. Douady. **Union**, Andújar, n. 34, p. 141-49, 2013.

MULLIGAN, Joanne. Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. **Mathematics Education Research Journal**, Cham, v. 4, n. 1, p. 24-41, 1992.

MULLIGAN, Joanne; MITCHELMORE, Michael. Young children's intuitive models of multiplication and division. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 28, p. 309-331, 1997.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

NESHER, Pearla. Solving multiplication word problems. *In*: LEINHARDT, Gaea; PUTNAM, Ralph; HATTRUP, Rosemary (ed.). **Analysis of arithmetic for mathematics teaching**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1992. p. 189-219.

NICOL, Cynthia; BRAGG, Leicha. Designing problems: What kind of open-ended problems do preservice teachers pose? *In*: TZEKAKI, Marianna; KALDRIMIDOU, Maria; SAKONIDIS, Haralambos (ed.). **PME CONFERENCE**, 33., 2009, Thesaloniki. 33 PME... v. 4. Thesaloniki: PME, 2009. p. 225-232.

NIETO, Pedro *et al.* **Números**: manual de matemáticas. Primer ciclo de ESO. Barcelona: Octaedro, 1994.

PIÑEIRO, Juan Luis; CASTRO-RODRÍGUEZ, Elena; CASTRO, Enrique. Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. **PNA**, Granada, v. 13, n. 2, p. 104-129, 2019.

PÓLYA, George. **How to solve it**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

PUIG, Luis; CERDÁN, Fernando. **Problemas aritméticos escolares**. Madrid: Síntesis, 1996.

SHUTLER, Paul. A symbolical approach to negative numbers. **The Mathematics Enthusiast**, Montana, v. 14, n. 1, p. 207-240, 2017.

SILVER, Edward. On mathematical problem posing. **For the Learning of Mathematics**, Vancouver, v. 14, n. 1, p. 19-28, 1994.

SINGER, Florence; ELLERTON, Nerida; CAI, Jinfa. **Mathematical problem posing**. Cham: Springer, 2015.

SINGER, Florence; VOICA, Cristian. A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. **Educational Studies in Mathematics**, Netherland, v. 83, n. 1, p. 9-26, 2013.

STACEY, Kaye; HELME, Sue; STEINLE, Vicki. Confusions between decimals, fractions and negative numbers: a consequence of the mirror as a conceptual metaphor in three different ways. *In*: HEUVEL-PANHUIZEN, Marja (ed.). **PME CONFERENCE**, 25., 2001, Utrecht. 25 PME... v. 4. Utrecht: PME, 2001. p. 217-224.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

TICHÁ, Marie; HOSPESOVÁ, Alena. Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. **Educational Studies in Mathematics**, Netherland, v. 83, n. 1, p. 133-143, 2013.

VERGNAUD, Gerard. Multiplicative structures. *In*: LESH, Richard; LANDAU, Marsha; BELLIN, Harry (ed.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 127-174.

WILHELMI, Miguel; GODINO, Juan Díaz; LACASTA, Eduardo. Didactic effectiveness of mathematical definitions: the case of the absolute value. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, Eastbourne, v. 2, n. 2, p. 72-90, 2007.

ZAZKIS, Rina; CAMPBELL, Stephen. Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: preservice teachers' understanding. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 27, n. 5, p. 540-563, 1996.

Recibido en: 23.05.2020

Revisado en: 01.09.2020

Aprobado en: 12.11.2020

Miguel Montes es doctor por la Universidad de Huelva. Profesor ayudante doctor en la Universidad de Huelva en el área de didáctica de la matemática. Miembro del Centro de Investigación en Pensamiento Contemporáneo e Innovación para el Desarrollo Social de la Universidad de Huelva (COIDESO) y del grupo de investigación Didáctica de Experimentales, Sociales y de la Matemática (DESYM)

Maria Isabel Pascual es profesora sustituta interina en la Universidad de Huelva en el área de didáctica de la matemática. Miembro del Centro de Investigación COIDESO y del grupo DESYM.

José Carrillo es doctor por la Universidad de Sevilla. Catedrático de universidad en la Universidad de Huelva en el área de didáctica de la matemática. Miembro del Centro de Investigación COIDESO y del grupo DESYM.

Juan Pedro Martín-Díaz es profesor sustituto interino en la Universidad de Huelva en el área de didáctica de la matemática. Miembro del Centro de Investigación COIDESO y del grupo DESYM.

5.3 Artículo 2: Characterisers of Teaching in a Mathematics Problem Posing Lesson in Preschool Education

Martín-Díaz, J.P., Montes, M., Codes, M. y Carrillo, J. (2020). Characterisers of Teaching in a Mathematics Problem Posing Lesson in Preschool Education. *Sustainability*, 12(15), 6148. <https://doi.org/10.3390/su12156148>

Article

Characterisers of Teaching in a Mathematics Problem Posing Lesson in Preschool Education

Juan Pedro Martín-Díaz , Miguel Montes , Myriam Codes  and José Carrillo 

Facultad de Educación, Psicología y Ciencias del Deporte, Universidad de Huelva, 21071 Huelva, Spain; miguel.montes@ddcc.uhu.es (M.M.); myriam.codes@ddi.uhu.es (M.C.); carrillo@uhu.es (J.C.)

* Correspondence: juan.martin@ddcc.uhu.es

Received: 29 June 2020; Accepted: 28 July 2020; Published: 30 July 2020



Abstract: Problem posing is rarely seen in Spanish classrooms, least of all in preschool education. The lack of research, coupled with a lack of guidance, has resulted in teachers simply not considering the approach as something that could enrich their work. This study examines a problem-posing lesson given by a preschool teacher to a class of four-year-olds. It focuses in particular on the organisational principles and the factors to be taken into consideration in applying the strategy. Through the application of a bottom-up analysis, seven characterisers are identified, four associated with task design and planning: Characteristics of the resources, type of problem, expression of problem formulation, and type of problem formulation; and three associated with lesson management: Stages in task execution, degree of liberty, and role of the pupils' drawings of the problem.

Keywords: problem posing; preschool education; *bottom-up* approach; mathematics teacher

1. Introduction

The traditional approach to mathematics teaching is for learners to be presented with tasks and problems that have been selected beforehand. Responsibility for providing these usually falls to the teacher, who either devises his or her own problems, or draws on textbooks and other sources for problems that can be used directly or adapted if necessary. The result is that pupils have a passive role to play in the creation of problems. Nevertheless, there is considerable evidence that giving students a more active role in the creation of problems not only develops mathematical thinking, but also enhances creative abilities [1–3]. Indeed, problem posing is a genuinely mathematical activity, facilitating thorough understanding of the various elements involved in the process [4]. Following Stoyanova and Ellerton, we understand problem posing to be “the process by which, on the basis of mathematical experience, students construct personal interpretations of concrete situations and formulate them as meaningful mathematical problems” [5] (p. 519).

In addition to their potential for developing creativity and constructing mathematical knowledge, problem posing tasks can provide a valuable means of formative assessment [6], as well as foregrounding a variety of cognitive styles [7]. Silver and Cai identify three criteria for teachers to bear in mind when doing problem posing with their pupils: Fluency, which refers to the number of solvable problems generated which meet the parameters of the problem; originality, which concerns the mathematical creativity demonstrated; and complexity, which considers the sophistication of the mathematical relationships invoked, the degree of difficulty, the cognitive demands, and aspects relating to the complexity of the expression of the problem [8].

In general, there are four fundamental parts to a problem, which need to be coherently articulated by the person formulating it: The context, the mathematical environment, information, and requirement [9]. There are different approaches to setting students to formulate problems, among which two stand out: Basing the problem on one which has already been given or basing it on a situation [2]. Both

approaches involve adding or modifying elements of an established problem so as to create a new problem, which is validated when the other students, with the application of some degree of reflection, are able to find the solution. In the case that concerns us here, in which the students are given the context, three kinds of problem posing tasks are considered [5,10]: Free, in which no restrictions are placed on how to formulate the problem; semi-structured, in which students formulate their own problems based on ones they have been given; and structured, in which the students pose problems by reformulating ones they have already solved, or by making minor variations to the information or requirements given in the problem.

Although it is understood in educational research that problem posing is a useful strategy for promoting children's imagination in preschool education, and encouraging them to develop metaphors to link content areas with their out-of-class experience [11], there is very little research into mathematics education with this age group. One of the few studies available is the research by Pálmer and van Bommel into how three groups of preschool children (27 six-year-olds in total) in the Swedish education system posed new problems similar to one they had recently attempted, which involved calculating the number of cubes required to build a simple three-dimensional structure from a two-dimensional drawing in which some of the blocks were obscured by others, and were hence 'hidden' [12]. Because of the pupils' young age, no assumptions were made about their reading and writing abilities, and the task was planned so as not to require any writing on their part. Nevertheless, most of the pupils managed to pose problems that recognised the mathematical nature of the task, requiring some kind of counting of blocks in a construction. For his part, Lowrie, also working with six-year-olds, describes a framework for analysing the open-ended problems they generate. Although the study recognises that the one-to-one learning environment enjoyed by the researcher might be difficult to replicate, it foregrounds the importance of the teacher's role in guiding the pupils to produce increasingly sophisticated problems within a short space of time [13].

Young children are especially sensitive to the context in which mathematical notions are presented to them, especially in the earlier stages of primary education compared with the later stages [14]. The importance of context is captured very well in the incident described by Baroody of a young boy who was incapable of carrying out simple operations such as ' $66 + 4$ ' or ' $30 - 8$ ' when these were presented as decontextualized additions or subtractions, but who had no problem in providing the correct answers when the same sums were connected to a real-life situation the boy could recognise [15]. The role of context, then, is essential for providing the meaning of the operation in question, as in the example, or more generally, of whatever mathematical notion is being invoked in the activity being carried out [16,17].

Another aspect of preschool education that teachers need to take into account is the children's tacit informal mathematical knowledge [15,18,19]. This is the kind of knowledge they acquire through playing games at home and at school, and is strongly linked practical, concrete experiences. Thus, in the incident described by Baroody above, the young boy's informal knowledge of basic arithmetic is another factor, which, connected to the context of the situation, accounts for his correct answer [15]. One way in which play can be usefully introduced into the classroom is when the teacher is able to make everyday routines an opportunity to develop mathematical skills, such as taking the register, which combines establishing a bijection with enumeration, along with all the subtasks this implicitly involves [20], or arranging the tables and chairs, which requires spatial awareness and the ability to estimate distances. This is one of the aspects of this stage that marks out the particular expertise of infant teachers in comparison with those in primary school [18,19,21].

Given how important it is for pupils (including those in preschool education) to pose mathematical problems, and aware of the limited research in the area, this study focuses on the teacher, and aims to identify characterisers for teaching practices that promote problem posing among their students.

2. Materials and Methods

Given that the aim of this study was to identify and understand the elements that lead to successful implementation of problem posing, the research paradigm it took was interpretative [22], and the methodological approach was that of an instrumental case-study [23], specifically the classroom practices of a preschool teacher. By this means, it was hoped to establish a series of categories for interpreting the rationale of the teacher's everyday practices when planning and carrying out problem posing with her pupils. The teacher, who will be referred to by the pseudonym Rosa, was chosen for her long experience in preschool education, as well as for her willingness and availability to collaborate. In fact, Rosa was a frequent participant in collaborative group projects with researchers and colleagues and was thus very familiar with the dynamics of qualitative research requiring a high degree of verbalisation [24], which brought a welcome degree of fluency to the research process. Rosa's linguistic and cultural background is similar to their students' context, implying that she is familiar with their day to day experiences.

The study was based on a transcribed video recording of a session with a group of 4-year-olds to which Rosa was tutor. Rosa's aim in the session was for the children to learn how to pose problems.

Rosa routinely asks her pupils questions in order to get them to articulate what they are doing while they are carrying out activities, and, as is typical in preschool education, she gets them to represent the outcome of any activity through the medium of a drawing. Because of the size of the classroom in which she works, Rosa usually divides the 24 pupils into three equal groups. For the session in question, she prepared four different scenarios and gave one to each group, keeping the fourth for the group which was first to finish. By this means, she was able to rotate the scenarios so that each group posed a problem in each scenario with very little time lost between scenarios. She also decided that each pupil should work individually within their group in order to ensure that all of them posed a mathematical problem.

In addition to the data supplied by the video-recording and the corresponding transcription, an audio recording was also made, and duly transcribed, of a semi-structured follow-up interview. This allowed the researchers to clarify various questions that could not be answered from viewing the recording, and to complete information deriving from the video-recording. In this respect, the interview was particularly useful for obtaining information relating to the planning stage of the task.

The process of data analysis followed a bottom-up approach [25] using the constant comparison method [26,27], which involves the continuous assignation of data items to conceptual categories created for the purpose. By means of this procedure, the transcriptions were divided into units of meaning, which were then assigned to categories [28]. The categories were under constant revision, bearing in mind the need for them to be disjoint and self-contained, and were given a provisional name pending alterations. The process was considered to have finalised when sufficient theoretical coverage had been achieved [27]. At this point, 7 categories had been established (which we called characterisers), which subsequent analysis suggested could be grouped into two broad organisational groups according to their role in the session: Planning or delivery.

3. Results

3.1. Task Design

In order to achieve her objective of getting the pupils to notice the key features of a problem and then pose similar ones, Rosa considered various aspects of the activity she intended to use in class. In the first instance, the mode she chose for carrying out the activity was that of presenting the pupils with different scenarios featuring items from their everyday experience that they could manipulate, and which would inspire them to pose a problem. The choice of items also took into account the kind of problems that the pupils would be able to formulate from them. The four scenarios she prepared were as follows:

- Dolls and sweets. This scenario featured two dolls and six sweets (Figure 1).
- Transport. This scenario featured a selection of three modes of transport, each a single colour (yellow, green, or red): Car, lorry, and plane. There was no correspondence between colour and type of transport, such that one mode might be represented in two or even three different colours (Figure 2).
- Variegated balls. This scenario featured balls of different sizes, colours, and textures. In this instance, no two balls had more than one characteristic in common (Figure 3).
- Geometric solids. This scenario featured a large range of geometric solids, each in a single bright colour: Prisms, cylinders, cones, and pyramids. The prisms were of two types, those with a rectangular base and those with a square base. As with the types of transport, each solid was available in at least two different colours (Figure 4).



Figure 1. Scenario featuring two dolls and six sweets.



Figure 2. Scenario featuring different kinds of transport.



Figure 3. Scenario featuring balls of different textures, sizes, and colours.

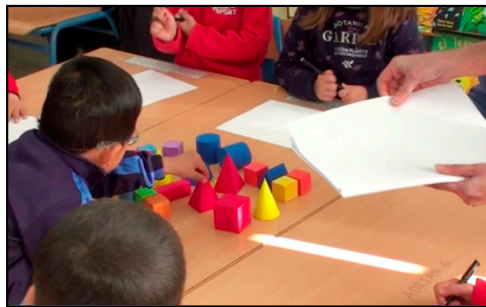


Figure 4. Scenario featuring geometric solids.

As mentioned above, in addition to ensuring that the objects were familiar to the children and small enough for them to grasp and change position by sliding them, flipping them over, or performing some other movement with them, Rosa had considered the kind of problem that each scenario might generate, this being an essential criterion in her choice:

Interviewer: Did you expect a certain kind of problem in each of the scenarios?

Rose: Yes, I wanted there to be different kinds of problems.

In the scenario featuring dolls and sweets, Rosa expected the children to pose problems involving arithmetic of some description, such as addition, subtraction or sharing out.

R: Well, in this one [the scenario featuring the dolls] what I was aiming for was for them to do adding or subtracting ... or that they would share them out equally or not equally.

I: Did you expect just sharing?

R: No, [also] the adding and subtracting, along the lines of “they eat this many”, or “one has four and the other has two”. I saw this one [scenario] as generating numerical problems.

The other scenarios were chosen to vary the kinds of problems and avoid the repetition of numerical problems. In the case of the scenario featuring types of transport, Rosa was nudging the children to pose classification problems:

I: In this one (scenario), were you expecting the pupils to pose classification problems and arithmetic problems, addition ... ?

R: Classification, either by colour or say, “this one goes in the sky and this one ... ” or say, “this one has got two wheels and this one four”. Otherwise they would all have been numerical problems.

Rosa also targeted classification problems in the scenario featuring geometric solids, in terms of their shape and/or colour, or according to the different heights of the shapes. Finally, in the scenario featuring different kinds of ball, she was hoping that, in addition to problems involving sequencing, the pupils would devise problems of classification, not only in terms of the different sizes and colours, but also the different textures of the material from which they were made:

I: Did you think they could have classified them for other characteristics?

R: Yes. This one and this one are plastic, the tennis ball is more ... harder even, while the other is softer ... I was hoping that they might classify them according to texture, say, or some other characteristic of the balls.

I: Yes, so that would lead to ...

R: Right, that they could do ... whatever came to mind.

Nevertheless, despite her intentions in this scenario (to foster problem posing related to the geometrical elements she included), in the follow-up interview, she recognised that the likelihood of the pupils devising a problem of classification or sequencing was possibly hindered by there being three variables (colour, size, and texture) on which to focus. By contrast, all the problems posed in this scenario involved numbers, principally counting in order to compare different numbers of balls.

R: That's what I was aiming for. I thought they'd be able to do it ... (...) Perhaps, had I found some balls that were the same, just different sizes, then putting them in order of size would have been a viable problem. (...) And then perhaps you could say "well, this one has stripes, this one has ... that way they could do ... [different problems]".

In this extract, Rosa is of the opinion that had she given her pupils balls that were identical in colour but different in size, they would have been more likely to have come up with problems involving ordering items. However, this would have drained a degree of richness from her intended plan, which, as it was, allowed for a greater variety of problem types, not only ordering problems, but also a range of classification problems involving different criteria for making the sets of balls.

Hence, analysis of the aspects that Rosa considers while planning a problem posing task indicates how, first of all, she designs each scenario to take into account the kind of problem that can be formulated from it.

It can also be noted that it is not by chance that Rosa uses a given scenario. Her decisions with regard to the scenarios are a key element for ensuring that her pupils manage to formulate a problem and identify the elements of which it is composed. This aspect is essential given that the age of the pupils restricts the kind of resources that she can use and requires her to provide all the contextual information pertaining to each scenario.

Also worthy of note with respect to resources is that Rosa used materials that had two specific characteristics. On the one hand, they involved items familiar to the pupils and hence the problems were based on contexts that the pupils understood well, and on the other hand, they could be manipulated by the pupils, who could thus interact with them.

Finally, because of her awareness of the limitations of this age group, which meant that they could not present their problems in written form, Rosa decided to ask the pupils to draw a picture of their problem. She thus planned the activity in such a way that her pupils had to express the problems they posed in a pictorial representation.

In summary, Rosa took various factors into account in the planning phase, directed at helping the pupils to recognise the component elements of a problem, and to pose their own problems, from which it can be observed that four characterisers emerge:

- Type of formulation, in terms of Silver's classification according to which a problem is posed based on a previously given problem, or based on given scenarios, contexts, or experiences [2].
- Characteristics of the materials employed in the scenarios, regarding the familiarity for the pupils and the manipulability.
- The kind of problem in which the material is used in each scenario prompt, with regard to the kind of task required: Ordering, classifying, counting, and so on.
- Characteristics of the pupils with respect to the educational stage, which conditions the mode in which the pupils can formulate their problems, which could be verbal, pictorial, or written.

3.2. Task Management

Once the task for learning how to pose problems has been planned, the implementation of it was of special interest to the study as it provided data on how Rosa managed the task in class. The observation of emergent characteristics in the management of the problem posing activity allowed us to gain awareness of the characterisers that underpinned Rosa's session during the management of the task.

After giving each group the items comprising their scenario, Rosa gave a presentation of the activity for each of them according to the respective scenario. In so doing, she intended that her pupils understood what was involved in each scenario. This presentation consisted of a detailed description of the scenario. For example, in the scenario featuring the dolls and sweets, she said:

R: Look: one and two children. They're dolls but let's imagine they're real. And here there are one, two, three, four, five, six sweets. We're going to draw this problem. Think what problem we might have here.

Or in the scenario featuring the balls:

R: Look, here I've got five balls. Invent a problem.

If any pupils failed to understand the scenario initially, she would ask him or her questions to guide them, such as "Let's see. What are these?" (referring to the different-sized balls) until she had made sure they had understood her.

Once she had presented the activity and described the scenarios to each group, Rosa began to establish conversations with her pupils in order to learn at what point in the formulation they found themselves. In these conversations, Rosa put the emphasis of her questions on understanding which elements of the scenario were going to take the role of elements in the problem (data and context). To do this, she used questions that directed the pupils to identify the number of elements (data) that there were in the scenario, with the intention of establishing a relationship between these elements and a specific context. Hence, she asked questions such as, "How many balls are there?" or "How many [sweets] are there?" with the aim that her pupils should identify the number of items in each scenario and so focus their attention on understanding the items as data in the problem and making connections between them.

After this, Rosa endeavoured to get the pupils to use the data and context she had just identified and to make connections and conditions between them. This moment is related to the time she allows the pupils to think about how to articulate the problem taking into account the elements mentioned above. She guides them with suggestions such as "think about what you want to do, what problem do you want to set?" when she encourages one of her pupils, who had managed to identify the data and context of the problem, to make a problem based on these. In another instance, Rosa asks a pupil who had identified the data but had not managed to articulate a problem with them, "What can we do with these sweets?" leading him to establish connections that would enable him to continue the process of problem posing. In the exchange below, a pupil (P1) briefly describes a situation, but without a question. Rosa encourages him to formulate a question for the problem:

Pupil 1: A man has to collect some money.

R: And what does he want to do with the money?

After spending some time encouraging the pupils to think about the different elements of the problem, the next stage that Rosa aimed for her pupils to tackle was that of articulating it. This marked the close of the problem formulation stage in which the teacher helps the pupils to go over the problem and check that it contains all the necessary elements to be considered as such. In this way, Rosa makes sure that all the problems posed by her pupils include data, contexts, and questions. Although the pupils managed to articulate a statement concerning the data comprising the problem, many of them failed to actually pose a question about an unknown element, the formulation of the problem thus remaining incomplete. In these cases, Rosa intervened to rectify the situation, following the pattern exemplified in the case of the scenario of the dolls and sweets which lacked a question: "First is 'There are two children and six sweets'. And now the question is 'How many ... ?'".

In the example below, deriving from the same scenario, another child (P2) takes the problem statement as completed without realising that he has to formulate a question. The episode begins when the pupil, assuming the problem posing to have been completed, mentions that the two children in the scenario are going to eat all the sweets:

R: Who is going to eat them all?

Pupil 2: Him and him.

R: They're going to eat all six sweets between the two of them?

P2: Yes.

R: OK. So what can we ask?

After assuring herself that the pupil distinguishes the data from the context, Rosa interacts with him so as to lead him to pose a question. She thus shows her interest for getting the pupils to formulate problems containing all the required elements, including a question. It was not always the question that was lacking in the incomplete formulations; Rosa also intervened when other elements had been omitted, such as the question statement, which caused her to say, "Come on, let's invent the story [of this one]."

In this kind of intervention, Rosa checks the extent to which both the aim of the problem posing is achieved, and the elements of the problem are identified. It also illustrates another aspect of the organisation of the task—the need to go back over things to check that the formulation contains all the elements of the problem, even when it appears to be well formulated.

The final step that Rosa incorporated into the process of problem posing was that of making sure the problem was a plausible one. In order to do this, once the pupils had formulated their problems, they attempted to solve them to see whether they were coherent in terms of structure, data, conditions, and question. Once again, Rosa's interventions take the form of questions about the scenario on which the problem is based. For example, in the scenario featuring the dolls and sweets, Rosa asks one of the pupils whether the operation employed for solving the problem was sharing them out: "So what happened? Did you share them out?" She also asks about the final outcome of the problem, trying to get the pupils to check whether their problem has a plausible solution, as in the case of the scenario featuring five balls: "And how many were left? If there were five . . ." Another example occurs again in the scenario featuring the dolls and sweets, in which the following exchange takes place between Rosa and a pupil (P3):

R: How many has this one got?

Pupil 3: Three.

R: And how many has this other one got?

P3: Three.

R: Very good, three and three.

To round off the session, once the three groups of children had posed a problem for each of the three scenarios, Rosa led a closure session in which she asked them what they had learned from the activity.

R: What have we learned?

Some Ps: ;To do problems!

Other Ps: ;Mathematics!

R: Have you learned to do problems, P1?

P1: (nods) (up and down)

P2: Me, too.

R: What else have we learned?

P3: I know what I've learned, I know what problems are for.

R: You know what problems are for?

P3: The children who know problems show them to others and then the other one knows.

R: Ah, look. ;Did you hear what he said? Say it again, what are problems for?

P3: So that the children who know—and the children who don't know—show it to the those who don't know so that the ones that didn't know, now they know.

R: Very good.

The pupils who are first to respond to Rosa's question say in unison that what they have learned is to do problems. The verb they use—*do*—should not be confused with other forms of referring to the task, such as *solve*. The lesson focused on problem posing and for the children this problem posing is what they *did*. It would seem, then, that most of the pupils achieved Rosa's aim of learning to pose (do) problems.

At the same time, Rosa takes advantage of P3's contribution to have him explain to his classmates what he had learned from the activity. Although the actual phrasing might appear convoluted, Rosa recognises that his reflection encapsulates a notion that is well worth underlining to the rest of the class. Problem solving, as the pupil points out, is not simply an activity to be learnt, but also a means of showing things to others that he might know which they do not. Essentially, his intervention affirms that problem posing enables pupils to provide their classmates with new knowledge.

Up to this point, we have focused on the four steps Rosa employs to guide her pupils towards posing problems, based on identifying the composite elements:

- Understanding the nature of the objects making up the different scenarios that provide the context to the problem to be formulated.
- Making explicit the problem data and the question to be answered.
- Articulating the problem and all its elements (context, conditions, data, question).
- Checking the plausibility of the problem by attempting to solve it.

In the section below, we focus our attention on a particular aspect of Rosa's task management, which she brings into play in the course of the problem posing activity. This concerns the way she restricted her pupils' responses to the scenarios, not allowing any changes to the parameters, so that their problems were in alignment with those she had originally projected for each scenario.

At various points in the lesson, Rosa became aware of pupils using data or elements that were not strictly part of the scenarios she had set up. If we focus on the elements that Rosa introduces into the scenarios from which the pupils were to formulate their problems, we can see that the pupils could focus their attention on both the nature of the objects (balls, dolls, sweets, vehicles, and geometric bodies), and the data (number of balls, dolls, sweets, and vehicles; characteristics of the balls, vehicles, and geometric bodies, and so on). From here, the pupils could pose their problems using or not the context of the objects and their qualities.

Nevertheless, in this particular activity, Rosa intended the problem to be formulated using only the scenario and the data provided, as long as the result did not deviate too much from the kind of problem envisaged for each scenario. For example, at one point, she noticed that a pupil had drawn more balls on his paper than had originally been specified, and urged him to use the same number as in the scenario, the datum she expected:

R: Why are you drawing so many balls? How many balls are there?

Rosa encouraged her pupil in this way to pose his problem using only the scenario and data provided.

On another occasion, in the scenario featuring the dolls and sweets, Rosa noticed that a pupil had used seven sweets in her formulation rather than six. She approached the girl and asked her the following:

R: This is a sweet, isn't it?

Pupil 4: Yes.

R: And how many sweets were there?

A: Six.

R: Fine, it's OK. If you want you can cross this one out.

Here, Rosa intends to underline the need to use only the information available from the given scenario. The correction comes about as a result of Rosa's original framing of the problem, which was to involve sharing the sweets equally, hence the two dolls and even number of sweets. Rosa feared that a change in the starting data would undermine the formulation of a problem on the basis of sharing things equally [*if that girl was going to share things out it was going to be far easier with six sweets than with seven, as she wouldn't have one left over*], which is why she suggested crossing out the extra sweet, so as to leave open the possibility of posing a problem about sharing.

However, not in all cases does Rosa suggest the pupils reconsider the data they propose that is not explicit in the scenarios. This happens in the scenario featuring the different plastic toys representing different types of transport when a pupil (P5) draws more yellow cars than there actually are in the scenario.

In the drawing illustrated in Figure 5, it can be seen that Rosa has written the colour of each car next to the corresponding picture following the pupil's instructions. In total, there are five cars labelled as yellow in the drawing, despite there only being four yellow vehicles in the set of toys comprising the original scenario, two cars and two aeroplanes. In the follow-up interview, Rosa explained the apparent inconsistency of allowing this pupil to continue formulating his problem after she had previously disallowed the alteration of data:

R: I guessed they were going to do a classification problem, and hence that boy was doing a problem of classifying according to colours, so it really didn't matter if there were two or three yellow ones. What I clearly saw was that he had intuited was that it was a classification problem.

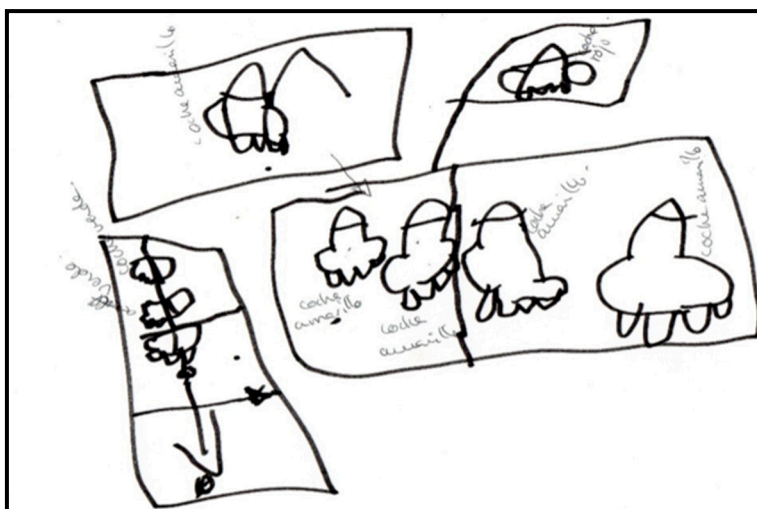


Figure 5. Drawing of different modes of transport (P5).

What distinguishes this response to the situation from her previous ones is Rosa's perception of what might bring about a change in the kind of problem that can be posed. If, in her estimation, an alteration in the original data given in the scenario might place a limitation on the kind of problem that can then be formulated, she redirects the pupil back to the original context in order to retain the potential it was designed to offer.

Rosa's vigilance of the scenarios is not limited to ensuring that the elements involved are properly deployed, she also makes sure that her pupils pose their problems adequately. Being aware that the majority of her pupils have not yet learned to read and write, she gives each child individual attention to ensure that the problem is properly formed, which proves to be especially valuable in this activity. Rosa summarises the procedure thus:

R: The children had to draw a picture of the solution to their problem, and to do so, they had to formulate the problem in their mind and try to capture this in their picture. What is important to note is that their drawings represent the end point.

In order to correctly interpret what is being represented, Rosa needs to ask each child about their drawing to explore the thought processes that lie behind it, and to discover the kind of problem each child was aiming to pose. For example, in the scenario featuring the balls, one pupil (P6) drew the balls in order of size. To make the drawing, the pupil drew circles representing each of the balls, doing his best to draw each subsequent circle smaller than the previous (Figure 6).

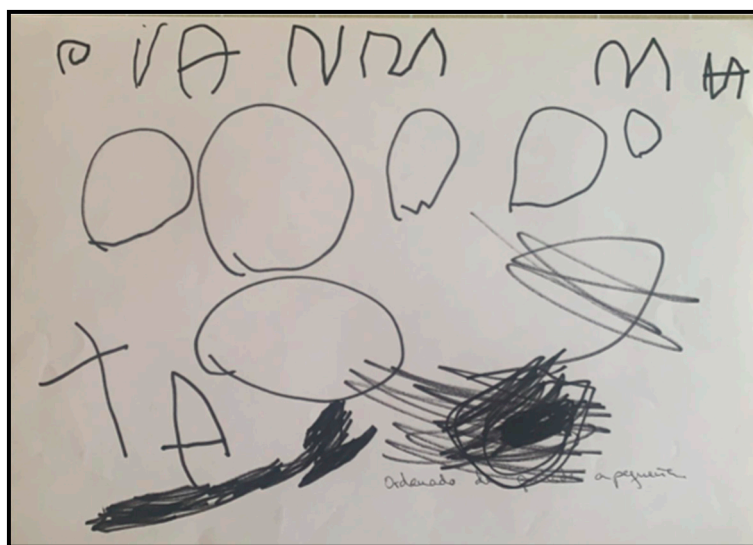


Figure 6. Problem for the scenario featuring various balls: Put them in order from large to small (P6).

However, although the pupil's intention was to draw the balls in order of size, it can be seen above that some of the circles are slightly smaller or slightly larger than he intended, with the result that the picture does not fully represent what he wanted. This was likely due to the fact that the children were still at a stage where their fine motor skills were developing. Realising that this was the case, Rosa questioned him to find out his thinking in drawing the picture that way, and the kind of problem it was intended to represent.

R: Have you put the balls in order? How have you done it?

Pupil 6: Yes.

R: Why?

P6: Because another ball goes here (pointing to a space next to the smallest circle).

R: And you've put them in order, first you've put the big one and at the end you've put the small one?

P6: (nods) (up and down)

In this brief exchange, Rosa gains confirmation of the procedure the pupil has followed to arrive at his representation of the solution to the problem of putting the balls in order that he came up with for this scenario, and is able to dismiss the possibility that the drawing was unrelated to the formulation of the problem. This provides her with implicit information about the problem posed in the pupils' drawing of the solution. At the same time, as well as learning whether he had managed to come up with a problem, Rosa wanted to know the kind of problem the pupil had posed. In this instance, through her questioning, she is able to establish that it is a sequencing problem.

Another example of how Rosa questions her pupils so as to find out information about the problem they have posed and the kind of problem they intended can be seen in the scenario featuring the different modes of transport. In this instance, Rosa questions the pupil (P5) who drew the picture represented in Figure 5.

First of all, she asks the following questions to find out the kind of problem the pupil has posed: “So how have you put them together? All the yellow ones together and all the green ones together?” and also, “What have you done and why?” She followed these questions up with another about the pupil’s thought processes when going about his drawing.

It would appear that, at first glance, Rosa took the drawing to represent a classification problem, and so expected the answer to her question to confirm that it consisted of two vehicles of the same colour in each of the squares. However, further inquiry revealed that the pupil had drawn another yellow car separate from the others, and so she asked him to explain why he had done so:

R: The yellow ones are here, aren’t they? Why have you put this one over here? (pointing to another item which the pupil says is a yellow car)

Pupil 5: Because it has to smash that rock.

R: What do you want, to break this rock so that this yellow car can be with the other yellow cars?

P5: Yes.

In sum, the pupil explains that in his problem, there is a yellow car that is separate from the group of yellow cars, and that needs to join them. What initially to Rosa appeared to be a classification problem, turned out, after a little careful probing, to be an addition problem (“There are four yellow cars in one place, and another yellow car in another place. If the yellow car which is by itself joined the others, how many cars would there be in total?”), albeit disguised as a classification problem in its pictorial representation.

Although with a little digging Rosa uncovers an additive structure to the problem, she continues to suspect that the pupil’s drawing started life as a picture of a classification problem under the heading “group the cars according to colour”. The reason for this, she said, was that the pupil in question was “a fidgety child who lived in his own world.” In her opinion “he tried to do a problem of classification by colour,” but, being this particular pupil, he used more yellow cars than there were in the scenario, and when he realised this as a result of the teacher’s questions, “he rectified his error by saying ‘this one is going over there.’”

Returning to the lesson, and continuing with the individualised monitoring of the pupils’ progress, Rosa questions them in order to check whether they have achieved the learning objective; that is, whether they have managed to articulate problem statements that include all the required elements (story: Data, conditions, and context; and question). This is exemplified by the problem of one pupil (P7), represented in Figure 7:

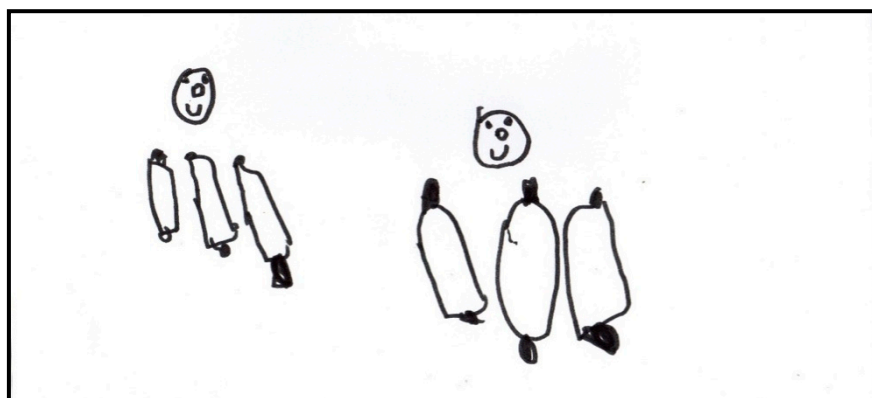


Figure 7. Problem for the scenario featuring the dolls and the sweets.

For her picture of the problem, the pupil drew two faces representing the dolls, and underneath each one drew three sweets. Rosa interpreted this configuration as representing the following problem: *There are two children and six sweets. How many sweets are there to eat [for each child]? (P7)*. Although in this instance the formulation of the problem would seem to be amply evident from the drawing of the solution, Rosa wanted to check whether the pupil was able to articulate it for herself and include all the required elements, and so asked her some questions, the resultant exchange of which is reproduced below:

R: So, what happened? You've shared them out, haven't you?

Pupil 7: Yes

R: Come on, what is your story? The story is ... there are two children, aren't there? What else is there?

P7: Three sweets. Three sweets for one child and three sweets for the other child.

R: But that's the end. The first thing is, there are two children and six sweets. And now we need the question ... What will that be? How many ...

P7: ... sweets are there?

R: ¿Are there to ... ?

P7: ... to eat.

This exchange illustrates Rosa's concern to find out whether her pupil has taken into consideration all the elements making up the problem, there being various perceivable elements.

The first element that Rosa sets out to check has been included is that of the story. As the pupil refers to just one item of information (the two children), she asks what else [what other information] there is in the problem, aiming to find out whether the pupil's problem has more information or not. To this, the pupil replied that there were three sweets for one child and three for the other, demonstrating that she had also considered children as part of the information for the problem, although she stated them in the form of the solution. Having obtained a new item of information and being aware that the solution to the problem has also been prematurely provided, Rosa guides the pupil to supply, in addition to the context and data, the formulation of the question. She does this by asking the pupil further questions to redirect her and get her to finally formulate a problem containing all the elements. Further, although the pupil does not explicitly state who will eat the sweets, Rosa takes it as understood, given the pupil's previous comments (*Three sweets. Three sweets for one child and three sweets for the other child*) and her drawing (Figure 7), that when the pupil formulates the question as "how many sweets are there to eat?" she is referring to the number for each child to eat.

Finally, another aspect which Rosa checks is whether the pupils have really understood their own formulations, to which she asks about the results, such as in the exchange below:

Pupil 8: There were five [balls] and the woman wants two and two.

R: And how many left? If there were five ...

P8: Zero.

In this instance, Rosa realised that the problem the pupil had come up with was not coherent, and so questioned her to find out her thinking behind the formulation. In the above exchange, she asks the pupil to give her the solution to the problem she had posed. From the result, Rosa is able to check whether or not the pupil's problem makes sense. Her doubt about this pupil might derive from the use the pupil makes of the number "four" as "two and two". For this reason, so as to check that the pupil has understood the problem, she asks how many balls are left in the end. However, although the correct answer to the question would be "one" (the result of the operation 5-4), the pupil answers "zero", thus confirming Rosa's doubt and allowing her to redirect the pupil's formulation of the problem.

The description of the activity, together with the actions carried out by the teacher, illustrate different aspects that we can take into consideration and that will allow us to generate the characterisers on which the management of the activity was based.

As we have seen, the pupils' responses to the activity were governed by the way it was presented and how they were allowed to interact with the scenarios. In this respect, it is possible to identify a degree of liberty in terms of the freedom granted by the teacher to the pupils with respect to the data, the context, and the type of problem in each of the starting scenarios. Hence, the problem to be formulated has a greater or lesser degree of similarity with the scenario according to the leeway permitted by Rosa. This leeway varies depending on whether she regards the pupil as being capable of identifying the data and context of their scenario, along with the kind of problem implicit in each situation. Where she considers that the pupil is not capable of doing so, she prevents them from straying from the original configuration.

Analysis of the complete implementation of the problem posing task shows Rosa's lesson to be structured according to different stages, which emerge from observing the way in which she manages the task over the course of different types of interaction with the pupils. We have identified five such stages: *Understanding the situation*, the aim of which is to ensure that the pupils understand the underlying situation of each scenario; *Identifying the elements of the problem*, directed at getting the pupils to identify the information pertaining to each situation; *Designing the problem*, whereby the pupils are given a time limit to find appropriate connections between the information and the context which will enable them to construct a problem; *Articulating the problem*, by which the pupils, once they have constructed their problem, become aware of whether it contains all the required elements; and *Checking the problem*, aimed at solving the problem so as to check its coherence and plausibility. Furthermore, although the ultimate goal of working through each of these stages is the formulation of a problem, the progression does not have to be linear, and pupils can cycle back through previous stages when necessary.

At the same time, with respect to the pupils' use of the scenarios, the teacher guides them towards a strict reproduction of the original parameters described by the scenario. There is, however, a *Degree of liberty* that varies with the teacher's intentions and objectives. In this case, she consistently directed her pupils to use the information derived from the scenario, and only allowed pupils to vary elements when they had no influence over the kind of problem that could be formulated. In this regard, it could be considered a degree of *conditional* liberty.

The final characteriser that emerges from the problem posing task is that of the *Role of the pupils' drawings*. According to the teacher, these drawings illustrate the solution to the problem the pupil is trying to formulate. The teacher's intervention regarding these drawings is crucial, directed on the one hand at finding out the *Type of problem* each pupil has posed for a given scenario, and on the other hand at identifying the *Elements of the problem* that have been taken into account in its formulation. Both characterisers are connected with the teacher's previous intentions. The *Type of problem* (classification, ordering, sharing out, addition and subtraction, and comparison) is linked to the configuration of each scenario, while for its part the *Elements of the problem* (context, data, conditions, question, and result) is linked to the aim of teaching the pupils what a problem consists of.

In summary, the implementation of Rosa's lesson provided the following three emergent characterisers:

- Stages of task development: These are the five stages into which the teacher structures the problem posing activity.
- Degree of liberty: This refers to the leeway offered (or denied) by the teacher for pupils to use information outside that included in the original configuration of the scenarios.

- Role of the drawings: This concerns the importance of the pupils' drawings in determining the kind of problem pupils pose, and the elements of the problem used in its formulation.

4. Discussion

We have approached problem posing from the perspective of the role of the teacher in planning and executing a lesson on how to formulate problems.

From careful observation of the teacher's practice, we have identified a series of characterisers that provide structure to the process of formulating the problem. Some of these patterns are contingent upon the peculiarities of the educational stage in which the children find themselves: The pupils are just beginning to develop important cognitive and fine motor skills, their knowledge is mainly the one they have built through play and in their families, and they have yet to master reading and writing. We have shown the influence of these peculiarities on the management of a problem posing class, and the way the task is carried out, such as problem statements implicitly encoded in a drawing illustrating the solution, and the need for the teacher to constantly probe different elements of the formulation through asking key questions.

In our approach to understanding various elements characterising the teacher's work (encouraging problem posing among her pupils), we have considered two organisers: The planning or design of the problem-posing task, and the classroom execution of this. The process of analysing the planning and carrying out of this lesson, along with a follow-up interview with the teacher, led us to identify four characterisers in the planning phase, and three in the execution phase. In turn, these characterisers, render their own sub-characterisers (Table 1).

It is useful at this point to distinguish the nature or orientation of the characterisers we have identified. Those associated with the task design correspond to what the teacher takes into account with respect to resources (the teaching materials used) [2,5,10], the mathematical content in play (the type of problem), the medium used to communicate the formulation of the problem (the form of expression), and the configuration of the starting conditions on which the problem is to be based (type of problem formulation) [18,19,21]. Conversely, the characterisers associated with the lesson management are associated with the teacher's aim for the pupils to learn to pose problems consistent with the demands of the starting situation (stages in task execution), as well as its limitations (degree of liberty), and the role conferred on the pupils' drawings (role of the pupils' drawings) so as to obtain information about the mathematical content of the problem (problem type, as in task design), and the elements constituting the problem statement (elements of the problem) [9]. With respect to these elements, contemplated by Malaspina [9], it is worth underlining that Rosa places considerable importance on checking the result as, in some instances, it enables her to learn whether the pupil's formulation of the problem is plausible or not. In terms of the mathematical environment, it can be seen that Rosa prepares different scenarios in anticipation of the kind of problem the pupils might devise in each. Consequently, the mathematical environment is associated with the kind of problem the teacher expects her pupils to mathematical environment formulate in each of the scenarios. Likewise, it can be noted that the scenarios are based on semi-structured situations, which present the pupils with a context that they then have to associate with previously acquired mathematical elements in order to pose a problem based on the given situation [5,10].

Table 1. Summary of characterisers.

Organisers	Characterisers	Sub-Characterisers
Task design and planning	Characteristics of the resource	Familiarity Manipulability
	Type of problem amenable to the resource	Classification Ordering Sharing out Comparison Addition and subtraction
	Form of expression of problem formulation	Pictorial Spoken Written
	Type of problem formulation	Structured Semi-structured Free
Lesson management	Stages in task execution	Understanding the situation Identification of the elements of the problem Problem design Articulation of the problem Checking
	Degree of liberty	Strict (information must be exactly as stated in the scenario) Conditional (some information can be changed if appropriate) Free (external information can be used alongside information provided in the scenario)
	Role of the pupils' drawings	Problem type Ordering Classification Comparison Sharing out
		Addition or subtraction Elements of the problem Data Context Conditions Question Result

5. Conclusions

This study has explored some of the features to be taken into account when planning and delivering problem posing tasks with preschool children. The adaptations that Rosa makes to the problem-posing methodology typically used in later educational stages are closely bound up with the age group she is working with. Among these can be found, for example, the need to use semi-structured situations so that the pupils can begin to formulate their own problems based on a given situation. One remarkable issue is that, even though the main aim of Rosa is to develop the knowledge of the pupils about problems' parts, the students mobilize knowledge about addition and division, which is related to children's potential to face mathematical situations [15]. Another aspect that Rosa takes into consideration in her planning is the involvement of the pupils with the various scenarios they are presented with. This aspect proved to be essential in encouraging the pupils to pose their own problems by providing them with familiar scenarios which, in addition, were highly tangible and could easily be manipulated by them. For her part, throughout the lesson, Rosa restricted the information on which to base the problems to that given in the scenario. Only in very specific cases did she allow certain pupils to modify this information in any way. Her strictness in this regard can again be accounted for by the age and cognitive development of her charges. It cannot be concluded that these considerations

are exclusive to the preschool stage, but it is very likely that at subsequent stages, where the children are more developed, these methodological restrictions can be relaxed. In future developments of this research, it could be interesting to explore how Rosa's noticing and aims have implications in her decisions about the information given to her students.

Unsurprisingly, working on problem posing with preschool children might be considered a priori a tall order, given their cognitive level. Nevertheless, this study demonstrates that not only is it possible, but that different organisational aspects can be taken into account both in the planning and delivery phases of the lesson so as to maximise the pupils' engagement and learning. This study contributes to the work of previous research by providing a perspective that focuses on elements that are not purely mathematical but rather didactic-mathematical. It thus foregrounds the need to broaden the scope of research into problem posing so as to go beyond the predominant focus by which teachers at all educational stages are considered solely as subject specialists for teaching content.

We hold the view that problem posing is a valuable approach at all levels of schooling. It merits not just a place on the curriculum, but specialised training to help teachers incorporate the problem posing dynamic into their lessons. In this regard, the analysis and categorisation of the organisers relating to problem posing tasks could be a useful tool to include in training programmes for preschool education. The characterisers presented in this paper represent an initial cluster of elements on which to focus in the training of prospective preschool teachers, providing them with tools for the planning and management of this kind of lesson, and enabling them to bring cognitively demanding work into their classrooms. This, in turn, would help to lay the foundations in terms of knowledge and creativity for the pupils to face mathematical tasks at future stages. Parallel to relating this research to teacher education, this paper opens a research line into characterising teachers practices on problem posing in preschool, that can be approached, for example, through future elaborations and refinements of the characterisers here developed.

In connection with this study, and a broader-based research project, we are currently studying the kind of knowledge that is mobilised when teachers take a problem-posing approach in their classes. Research into this knowledge (including beliefs and conceptions) is fundamental to understanding the complexity of teaching, and to ensuring that teacher training (initial and in-service) remains relevant and beneficial, not only to the prospective teachers, but also to their future pupils.

Author Contributions: J.P.M.-D. leaded the paper, gathered the data and did the analysis with M.M., M.C. and J.C. conceptualised the approach and reviewed the analysis. All authors discussed the characterisers and wrote the paper. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This research was financed by the COIDESO research centre at the University of Huelva, and by the Ministry of Science, Innovation and Universities of the Government of Spain (Project: RTI2018-096547-B-I00).

Acknowledgments: The authors would like to express their gratitude to Rosa, whose willingness and disposition to participate made it possible for us to carry out this study.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

References

1. Kilpatrick, J. Problem formulating: Where do good problems come from? In *Cognitive Science and Mathematics Education*; Schoenfeld, A.H., Ed.; Lawrence Erlbaum: Hillsdale, NJ, USA, 1987; pp. 123–147.
2. Silver, E.A. On mathematical problem posing. *Learn. Math.* **1994**, *14*, 19–28.
3. Singer, M.F.; Ellerton, N.; Cai, J. Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educ. Stud. Math.* **2013**, *83*, 1–7. [[CrossRef](#)]
4. Brown, S.I.; Walter, M.I. *The Art of Problem Posing*; Lawrence Erlbaum: Hillsdale, NJ, USA, 2005.
5. Stoyanova, E.; Ellerton, N.F. A framework for research into students' problem posing. In *Technology in Mathematics Education*; Clarkson, P., Ed.; Mathematics Education Research Group of Australasia: Melbourne, FL, USA, 1996; pp. 518–525.
6. Kwek, M.L. Using Problem Posing as a Formative Assesment Tool. In *Mathematical Problem Posing*; Singer, M., Ellerton, N., Cai, J., Eds.; Springer: New York, NY, USA, 2016; pp. 273–292.

7. Singer, F.M.; Voica, C.; Pelczer, I. Cognitive styles in posing geometry problems: Implications for assessment of mathematical creativity. *Int. J. Math. Educ.* **2017**, *49*, 37–52. [[CrossRef](#)]
8. Silver, E.A.; Cai, J. Assessing students' mathematical problem posing. *Teach. Child. Math.* **2005**, *12*, 129–135.
9. Malaspina, U. Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady. *Unionrevista Iberoam. Educ. Matemática* **2013**, *34*, 141–149.
10. Bonotto, C.; Dal Santo, L. On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in Primary School. In *Mathematical Problem Posing*; Singer, M., Ellerton, N., Cai, J., Eds.; Springer: New York, NY, USA, 2016; pp. 103–124.
11. Quintero, E. *Problem Posing with Multicultural Children's Literature*; Lang: New York, NY, USA, 2004.
12. Palmer, H.; van Bommel, J. Young students posing problem-solving tasks: What does posing a similar task imply to students. *Int. J. Math. Educ.* **2020**, *52*, 743–752.
13. Lowrie, T. Designing a Framework for Problem Posing: Young children generating open-ended tasks. *Contemp. Issues Early Child.* **2002**, *3*, 354–364. [[CrossRef](#)]
14. Chapman, O. Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educ. Stud. Math.* **2006**, *62*, 211–230. [[CrossRef](#)]
15. Baroody, A.J. *El Pensamiento Matemático de los Niños*; Visor: Madrid, Spain, 1994.
16. Bonotto, C. Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educ. Stud. Math.* **2013**, *83*, 37–55. [[CrossRef](#)]
17. Burk, D.; Snider, A. *Posing and Solving Problems with Story Boxes, 1st & 2nd Grade*; The Math Learning Center: Salem, OR, USA, 1994.
18. Lee, J.E. Preschool Teachers' Pedagogical Content Knowledge in Mathematics. *IJEC* **2017**, *49*, 229–243. [[CrossRef](#)]
19. Gasteiger, H.; Benz, C. Enhancing and analyzing kindergarten teachers' professional knowledge for early mathematics education. *J. Math. Behav.* **2018**, *51*, 109–117. [[CrossRef](#)]
20. Ruiz, L. La actividad lógica en la Escuela Infantil. In *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil*; Chamorro, M.C., Ed.; Pearson Educación: Madrid, Spain, 2005; pp. 101–140.
21. Gasteiger, H.; Bruns, J.; Benz, C.; Brunner, E.; Sprenger, P. Mathematical pedagogical content knowledge of early childhood teachers: A standardized situation-related measurement approach. *Int. J. Math. Educ.* **2020**, *52*, 193–205. [[CrossRef](#)]
22. Bassey, M. *Case Study Research in Educational Settings*; Open University Press: Buckingham, UK, 1999.
23. Stake, R.E. Case Studies. In *Strategies of Qualitative Inquiry*, 2nd ed.; Denzin, N.K., Lincoln, Y., Eds.; Sage: London, UK, 2003; pp. 134–164.
24. Flick, U. *Introducción a la Investigación Cualitativa*; Morata: Madrid, Spain, 2007.
25. Grbich, C. *Qualitative Data Analysis: An Introduction*, 2nd ed.; Sage: London, UK, 2013.
26. Strauss, A.; Corbin, J. Grounded Theory Methodology: An overview. In *Handbook of Qualitative Research*; Denzin, N., Lincoln, Y., Eds.; Sage: Thousand Oaks, CA, USA, 1994; pp. 273–285.
27. Bryman, A. *Social Research Methods*; Oxford University Press: New York, NY, USA, 2001.
28. Kvale, S. *Interviews: An Introduction to Qualitative Research Interviewing*; Sage: London, UK, 1996.



© 2020 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

5.4 Artículo 3: Conocimiento especializado para la enseñanza a través de la formulación de problemas en educación infantil¹

Martín-Díaz, J. P. y Montes, M. A. (en prensa). Conocimiento especializado para la enseñanza a través de la formulación de problemas en educación infantil. *Uniciencia*

¹ Al tratarse de un artículo aceptado, pero no publicado, el formato que se muestra del artículo puede no corresponderse con el formato final de la revista.

Conocimiento especializado para la enseñanza a través de la formulación de problemas en educación infantil

Specialized knowledge for teaching through problem posing in pre-school education

Juan Pedro Martín-Díaz ¹, juan.martin@ddcc.uhu.es Orcid ID: <https://orcid.org/0000-0001-6522-824X>

Miguel Montes ^{1,*}, miguel.montes@ddcc.uhu.es, Orcid ID: <https://orcid.org/0000-0003-3181-0797>

Resumen

La formulación de problemas como actividad genuinamente matemática es una fuente inagotable de alternativas en el aula. Son muchos los autores que indican la importancia de esta práctica matemática, así como instituciones como el National Council of Teaching of Mathematics. **[Objetivo]** Pretendemos, a través de un estudio de caso, evidenciar las características del conocimiento movilizado por una maestra al implementar una sesión de este tipo en 4 años de educación infantil, con énfasis en el conocimiento que usa para la planificación y puesta en práctica de la sesión. **[Metodología]** Para ello, utilizamos fragmentos de la grabación de la sesión de aula, acompañado de una entrevista posterior a la informante, con el objetivo de corroborar la información identificada durante el análisis de los datos extraídos de la sesión. El carácter específico matemático de esta actividad nos lleva a utilizar el modelo MTSK (Mathematics Teaching Specialized Knowledge) como referente para analizar el conocimiento especializado que una maestra de educación infantil moviliza durante una práctica de aula. Esta práctica se compone de dos tareas, ambas creadas y diseñadas por la maestra informante. **[Resultados y conclusiones]** Los resultados muestran aspectos del conocimiento relacionados con el MK (Mathematical Knowledge), pero, sobre todo, un predominio del PCK (Pedagogical Content Knowledge) evidenciándose la importancia de este conocimiento en la etapa de educación infantil para implementar una sesión de formulación de problemas.

Palabras Clave: Conocimiento profesional; formulación de problemas; educación infantil; MTSK.

Abstract

Problem posing as a genuinely mathematical activity is an inexhaustible source of alternatives in the classroom. There are many authors who indicate the importance of this mathematical practice, as well as institutions such as the National Council of Teaching of Mathematics. **[Objective]** We intend, through a case study, to demonstrate the characteristics of the knowledge mobilized by a teacher when implementing a session of this type in 4 years of early childhood education, with an emphasis on the knowledge used for planning and putting into practice the session. **[Methodology]** To do this, we used fragments of the recording of the session, accompanied by a subsequent interview with the informant, in order to corroborate the information identified during the data analysis. The specific mathematical nature of this activity leads us to use the MTSK model (Mathematics Teaching Specialized Knowledge) as a reference to analyze the specialized knowledge that a childhood teacher mobilizes during a classroom practice. This practice is made up of two tasks, both created and designed by the reporting teacher. **[Results and conclusions]** The results show aspects of knowledge related to MK (Mathematical Knowledge), but, above all, a predominance of PCK (Pedagogical Content Knowledge), evidencing the importance of this knowledge in the early childhood education stage to implement a problem formulation session.

Keywords: Professional knowledge; problem posing; childhood education; MTSK.

Introducción

La formulación de problemas ha sido objeto de atención desde la investigación en educación matemática durante varias décadas (Polya, 1954; Kilpatrick, 1987; Singer, Ellerton, Cai, 2015; Felmer, Pehkonen, Kilpatrick, 2016). Esta actividad matemática es una práctica estrechamente ligada a la construcción de las matemáticas como ciencia, así como al aprendizaje de la disciplina, formando parte del currículo en algunos países del mundo (Cai, Hwang, Jiang, y Silber, 2015) y con potencial para mejorar las habilidades de resolución de problemas, proporcionando una mayor confianza o mejorar el desarrollo del pensamiento matemático del formulador (Cai y Cifarelli, 2005; English, 1998; Silver, 1994, 1997). Sin embargo, no se suele trabajar en las clases de la asignatura de matemáticas en educación primaria (Cai y Hwang, 2021). Esto se acentúa en educación infantil, una etapa donde el alumnado aún se encuentra en edades comprendidas entre los 3 y los 5 años, hecho que puede suponer que los docentes tiendan a pensar que la formulación de problemas no se encuentra entre las actividades matemáticas que puedan ser asumibles por niños de esta edad, dada su complejidad.

El hecho de que el profesorado no encuentre la formulación de problemas como una actividad adecuada para niños de educación infantil puede deberse a múltiples aspectos relacionados con el conocimiento para impartir sesiones basadas en la formulación. Cankoy y Darbaz (2010) identificaron en sus investigaciones que los maestros tenían estas dificultades. Por su parte, Barlow y Cates (2006) identificaron que la falta de conocimiento podría afectar a los profesores a la hora de impartir una sesión a través de la formulación de problemas.

Desde el punto de vista de la investigación en educación infantil, Björklund, Heuvel-Panhuizen y Kullberg (2020), en una revisión bibliográfica extensa, indica que las investigaciones que refieren al alumno se centran tanto en su conocimiento como en la conceptualización y desarrollo de posibles trayectorias de aprendizaje para diversos conceptos. Sin embargo, cuando la mirada se fija en el maestro, las investigaciones se centran de manera general en qué oportunidades ofrece a los alumnos para mejorar la calidad del aprendizaje. No se mencionan, en dicha revisión, investigaciones relacionadas con el conocimiento del profesor de matemáticas, o con la formulación de problemas en el aula.

Sin embargo, estos dos temas no carecen de interés en educación infantil. Por ejemplo, Muñoz-Catalán, Liñán y Ribeiro (2017) profundizan en el riesgo que corren los docentes de esta etapa de caer en prácticas y actividades de tipo memorísticas si no se reflexiona en profundidad sobre las tareas a ser implementadas, antes de ser llevarlas al aula. En particular, la formulación de problemas supone una alternativa a estas prácticas tradicionales, que potencia habilidades del alumno como la creatividad (Singer, Ellerton y Cai, 2013). Además, numerosos autores consideran la formulación de problemas como una parte necesaria en el aprendizaje de las matemáticas, el corazón de las matemáticas (Sengul y Katranci, 2012), e incluso Kojima, Miwa y Matsui (2015) la califican como el corazón de la actividad matemática, al proporcionar habilidades para la resolución de problemas.

En este trabajo asumimos que la formulación de problemas podría centrar el trabajo matemático en un aula de educación infantil (Martín-Díaz, Montes, Codes, y Carrillo, 2020), y, desde esa postura, nos preguntamos: ¿qué conocimiento moviliza el docente en una sesión de formulación de problemas?, con el objetivo de identificar

elementos que puedan ayudar a fomentar el trabajo basado en la formulación de problemas en las aulas. Para identificar dichos elementos, utilizaremos el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas -en adelante MTSK- (Carrillo, et al., 2018).

Así, describiremos en primer lugar los referentes teóricos relacionados con la formulación de problemas. A continuación, presentaremos el modelo MTSK con el que analizaremos el conocimiento especializado de una maestra de educación infantil. Posteriormente, tras analizar los datos extraídos de una sesión de aula y de una entrevista, mostraremos los resultados obtenidos de la investigación para finalizar presentando las conclusiones, centrándonos en el potencial de la formulación de problemas, y en cómo ésta puede ser tenida en cuenta a la hora de organizar los programas de formación de profesorado de infantil.

Marco teórico

Esta investigación se sustenta en dos grandes pilares teóricos, la formulación de problemas, y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Así, nos centramos primero en la formulación de problemas como actividad matemática y dinámica de aprendizaje del contenido matemático. Posteriormente, profundizaremos en el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), que constituye la herramienta teórico-analítica que nos permite profundizar en las distintas naturalezas del conocimiento matemático involucrado en la gestión de tareas de formulación de problemas.

Formulación de problemas

En este estudio, la formulación de problemas en matemáticas es entendida en el sentido de Cai y Hwang (2021), como la actividad matemática donde un alumno o maestro expresa un problema matemático basado en un contexto particular. La formulación de estos problemas puede estar basada, según Silver (1994), en reformular otros problemas o en formular problemas a partir de una situación dada.

Siguiendo a Einstein e Infeld (1938), una de las potencialidades de asignaturas como ciencias o matemáticas radica en llegar a formular problemas. Esto se basa en que el avance científico se ha producido de forma habitual a través de la formulación de problemas que permitían responder a preguntas cada vez más complejas (frente a otras como historia o literatura, por ejemplo). Sin embargo, históricamente, la resolución de problemas ha tenido mucho más protagonismo en las aulas que la formulación de los mismos, en contradicción con lo expresado en documentos curriculares tales como el NCTM (2000), donde se remarca su importancia.

Desde el National Council of Teachers of Mathematics (2000), así como distintos currículos nacionales (e.g. Italia, China, EEUU) se indica que el aprendizaje de las matemáticas debe vehicularse a través de la resolución de problemas, introduciendo una serie de habilidades que los alumnos deben desarrollar. Entre ellas se encuentran, por ejemplo: construir nuevo conocimiento a través de la formulación, resolver problemas en diferentes contextos, aplicar y adaptar diferentes estrategias de resolución y monitorear el proceso de resolución (NCTM, 2000). Si bien esta serie de habilidades están relacionadas con la resolución, también pueden ser objetivos de aprendizaje aplicados a la formulación de problemas. Así, a pesar de ser una actividad considerada importante

desde hace varias décadas (Polya, 1954; Kilpatrick, 1987), la formulación de problemas continúa abordándose con poca frecuencia debido, entre otras cuestiones, a las dificultades que acarrea tanto para profesores como para estudiantes su puesta en práctica (Singer, Ellerton, y Cai, 2015).

Desde el punto de vista del valor que tiene la formulación de problemas para el profesorado de matemáticas, destaca su potencial para valorar qué nivel de desempeño pueden llegar a alcanzar sus estudiantes (Barlow y Cates, 2006). Extrapolado al nivel de educación infantil esto supone una herramienta potente, dado que los alumnos de esta etapa cuentan con un rango de respuestas mayor a alumnos con edad más avanzada, debido al amplio uso de conocimiento de índole informal en esta etapa para dar respuesta a los problemas que se le presentan en el aula (Baroody, 1994; Gasteiger y Benz, 2018).

Por su parte, Buschman (2003) indica que los maestros saben que tienen una gran variedad de materiales disponibles en el aula que pueden ser fácilmente adaptados para provocar un aprendizaje. Sin embargo, son pocos los docentes que se embarcan en esta adaptación del material fomentando en sus alumnos el aprendizaje a través de la formulación de problemas. Desde el NCTM (2000) se indica que los docentes deberían ser competentes para formular problemas, de cara a utilizarlos en el aula con sus alumnos, así como para preparar y gestionar tareas de formulación de problemas. El simple hecho de trabajar a través de la formulación de problemas en el aula puede resultar útil, para el profesor, de cara a comprender el conocimiento y aprendizaje de su alumnado (Cai & Howson, 2013; Silver, 1994). En ese sentido, Chang (2007) plantea que trabajar la resolución o formulación de problemas en edades tempranas es un desafío a abordar.

Por otro lado, desde el punto de vista del valor para el alumnado, la formulación de problemas es una tarea que supone una desviación sobre las actividades que habitualmente se realizan en el aula. Esta actividad está considerada como una “tarea abierta”, cuya demanda cognitiva asociada es alta (Silver, 1994) y que supone por tanto un reto para los alumnos, pudiendo implicar múltiples soluciones y permitiendo desarrollar habilidades matemáticas tales como la creatividad, la flexibilidad y el razonamiento lógico y/o asociado al contenido tratado (Leikin y Elgrably, 2019). Además, la formulación de problemas puede ayudar al alumnado a adquirir, comprender y/o promover nuevas ideas matemáticas (Brown y Walter 2004; Van Harpen y Presmeg 2013).

Conocimiento especializado

En este trabajo utilizaremos el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) como herramienta para analizar y describir el conocimiento del profesor (Carrillo et al., 2018). Este modelo, inspirado en los trabajos de Shulman (1986) y Ball et al. (2008), asume una visión intrínseca de la idea de especialización del conocimiento del profesor, y se desarrolla como una herramienta analítica que permite explorar con detalle el conocimiento que un profesor de matemáticas moviliza al desarrollar cualquier actividad profesional ligada a la enseñanza de esta disciplina, como pudiera ser la preparación de clases o la gestión de tareas durante la clase, entre otros.

El modelo MTSK conserva la distinción entre los dominios de Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) propuesta por Shulman (1986). Estos a su vez se descomponen en subdominios para caracterizar y operativizar con precisión el análisis del conocimiento especializado de los docentes.

Asimismo, se consideran las creencias como elementos que condicionan y permean el conocimiento, si bien no serán objeto de análisis en este trabajo.

Desde la perspectiva del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el conocimiento profesional constituye una red estructurada de conocimiento que sigue sus propias reglas (Carrillo et al., 2018). El conocimiento matemático abarca tanto lo relativo al conocimiento de definiciones y propiedades como la comprensión de las reglas y características de las matemáticas, y puede dotar al profesor de matemáticas de herramientas para planificar e implementar sesiones centradas en este contenido, así como reflexionar posteriormente sobre las mismas, o gestionar situaciones de contingencia que se produzcan. Así, el primero de los dominios, relativo al conocimiento matemático, contempla tres subdominios: conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura de las matemáticas y conocimiento de la práctica matemática. Cada uno de estos subdominios, a su vez, incluye distintas categorías de análisis o indicadores.

En primer lugar, el Conocimiento de los Temas (KoT) abarca qué conoce y con qué profundidad conoce los contenidos matemáticos útiles para enseñar (Carrillo et al., 2018). Este subdominio contempla no solo conocimiento de las matemáticas formales, sino también de las escolares como, por ejemplo, las distintas características estructurales de problemas de estructura multiplicativa.

Este subdominio contempla cuatro categorías: Procedimientos, que incluye el conocimiento sobre las rutinas, o algoritmos matemáticos; Definiciones propiedades y fundamentos que incluye aspectos como, por ejemplo, conocer los elementos que conforman la definición de un objeto matemático concreto, así como diferentes resultados matemáticos asociados a un concepto; Registros de representación que se refiere a los saberes del profesor sobre las diferentes formas en las que se puede representar un tópico; y Fenomenología que incluye los conocimientos vinculados a dar sentido a un determinado contenido en un contexto concreto y que permiten al docente generar situaciones donde dicho contenido se relacione, por ejemplo, con la experiencias cercanas al alumno.

Por otro lado, el subdominio del Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) engloba aquellos saberes sobre las conexiones y relaciones que existen entre diferentes objetos o elementos matemáticos. Este conocimiento permite a los docentes comprender conceptos matemáticos avanzados desde una perspectiva elemental y viceversa, promoviendo la comprensión de distintos contenidos no como elementos sin relación, sino como objetos matemáticos profunda y coherentemente interrelacionados. Estas conexiones pueden ser de Simplificación cuando se relacionan contenidos con otros anteriores o de Complejización cuando un profesor relaciona contenidos que está enseñando con contenidos curricularmente posteriores (Montes, Carrillo, Contreras, 2013). También pertenecen a este subdominio las Conexiones auxiliares, que se dan, por ejemplo, cuando el profesor instrumentaliza un concepto para ayudar en la comprensión de otro. Por último, un docente puede conocer y usar Conexiones transversales, aquellas derivadas del uso de objetos matemáticos subyacentes a varios contenidos en distintos bloques curriculares, como la proporcionalidad o el infinito.

Por último, dentro del MK se encuentra el subdominio del Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) que incluye el conocimiento sobre las características de la actividad matemática. Por ejemplo, incluye saber qué es demostrar, definir, justificar o ejemplificar, como herramientas sintácticas de la matemática (Schwab, 1978), así como

una comprensión de los fundamentos lógico-matemáticos que sustentan todas estas prácticas. Este subdominio contiene también conocimiento acerca de los procesos propios de la resolución y formulación de problemas, como estrategias y heurísticos. Este subdominio, tiene un grado de consolidación teórica menor al resto, pero se han desarrollado indicadores que permiten aproximarse a su comprensión: Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos; Formas de validación y demostración; papel de los símbolos y uso del lenguaje formal; Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas; Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación); Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones (Carrillo et al., 2018).

El modelo MTSK también contempla el dominio de conocimiento didáctico del contenido (PCK). El conocimiento didáctico del contenido es, desde Shulman (1986), el conocimiento más cercano y ligado a la práctica de aula. En el modelo MTSK también se reconoce la importancia de ese conocimiento didáctico. Sin embargo, se exige que exista cierta relación con el contenido matemático para ser contemplado dentro del modelo de acuerdo con la visión intrínseca de la especialización usada.

Dentro del modelo MTSK, el PCK se organiza tres subdominios también, uno centrado en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, otro en el conocimiento de las características del aprendizaje, y un tercero, el conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática, que se refiere tanto al conocimiento sobre aspectos curriculares como al conocimiento sobre qué debe aprender el estudiante.

El subdominio del Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) engloba aquellas teorías, recursos, estrategias, etc. relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que el profesor pueda conocer y usar para organizar la enseñanza de un determinado contenido. Este subdominio contiene tres categorías: la categoría Recursos materiales y virtuales, que abarca el conocimiento sobre el potencial de instrumentos, objetos o juegos, entre otros, que un profesor emplea para facilitar el aprendizaje matemático de su alumnado; la categoría Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos engloba conocimientos sobre la selección de métodos, ejemplos o tareas, útiles para la enseñanza de determinados conceptos; y, por último, la categoría que engloba Teorías sobre la enseñanza de la matemática, que pueden ser formales o informales.

En segundo lugar, el subdominio denominado Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) contiene aquellos elementos de conocimiento del profesor acerca del pensamiento, forma de actuar y procesos de comprensión de los estudiantes. Este es el conocimiento dedicado a anticipar respuestas de los alumnos ante un determinado constructo o situación matemática. En este subdominio se definen cuatro categorías: Teorías sobre el aprendizaje que pueden ser adquiridas a partir de la experiencia del profesor o mediante, por ejemplo, la literatura de investigación; Fortalezas y dificultades que se refiere al conocimiento de los puntos fuertes y débiles de los alumnos al interactuar con un contenido matemático; Formas de interacción con un contenido matemático, que engloba saberes tanto sobre los procesos y estrategias, como sobre el vocabulario, representaciones o gestos que pueden utilizar los alumnos al trabajar con un contenido particular; y, por último, la categoría de Aspectos emocionales del aprendizaje de la matemática, vinculada al saber del profesor sobre los distintos aspectos afectivos que median en los procesos de aprendizaje de la matemática

Por último, el subdominio del Conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS) abarca el conocimiento referido a aspectos curriculares de la enseñanza de las matemáticas, ya sean aquellos contemplados en el currículo oficial como en los diversos elementos que organizan qué se debe aprender, cómo, y en qué orden. Este subdominio se organiza tres categorías diferentes: Expectativas de aprendizaje que es aquel conocimiento sobre lo que se espera que el alumno puede aprender en un determinado nivel; el Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado que se refiere al conocimiento sobre la profundidad en la que un contenido debe ser presentado en un determinado nivel; y Secuenciación con temas anteriores y posteriores que es aquel conocimiento referido a la organización temporal del contenido.

Metodología

Esta investigación, que forma parte de un proyecto más amplio, se ha desarrollado siguiendo el paradigma interpretativo (Bassey, 1999), debido a que nos acercamos al foco de estudio tratando de comprenderlo desde la pretensión de entender y dar sentido desde la investigación a una situación real. Así, nos acercamos a la comprensión de los datos a través de un enfoque cualitativo, basado en un estudio de caso instrumental (Stake, 2006).

Participantes y contexto

Se ha seleccionado a Rosa como informante de la investigación por su pertenencia a un proyecto de investigación colaborativa (en adelante PIC), compuesto por un grupo de personas con varios perfiles dedicados a distintos niveles de la educación: maestros de educación infantil y educación primaria, profesores de secundaria, profesores universitarios formadores de maestros y estudiantes de Máster y doctorado. No solo tienen un interés común en la mejora de la educación, sino que, además, todos muestran una preocupación por conocer, analizar y perfeccionar su docencia en cuanto a la educación matemática se refiere.

De los miembros del PIC, se seleccionó a Rosa por su constante voluntad de actualizar sus conocimientos, así como por ser una maestra que trabaja la formulación de problemas en su aula. Rosa es una maestra preocupada por sus alumnos, así como por realizar actividades no rutinarias, que fomentan el razonamiento y reflexión de su alumnado. Tiene formación (inconclusa) en la licenciatura de matemáticas y es diplomada en educación primaria. Sin embargo, ante la posibilidad de trabajar en educación infantil, decidió ejercer su docencia en esta etapa.

La pertenencia al PIC de Rosa hace que esté en contexto que fomenta una evolución profesional constante, lo que le permite poner en práctica actividades y contenidos que, según ella declara, si no estuviera en el grupo, no se animaría a realizar. Para ella, la formulación de problemas, además de ser una actividad novedosa aplicada a cualquier nivel educativo, le parecía inicialmente un reto, de cara a su aplicación a un aula de educación infantil.

En este sentido, el PIC propuso dedicar un año del proyecto a indagar sobre la formulación de problemas para que posteriormente Rosa diseñase una sesión para llevar a su aula, y posteriormente reflexionar sobre la implementación. Tanto Rosa como otros integrantes del grupo realizaron lecturas relacionadas con la formulación de problemas, pero encontraron dificultades para encontrar documentos que se relacionasen directamente con la etapa de educación infantil. La novedad que suponía tanto para ella

como para el resto de miembros del PIC el diseñar una sesión de estas características supuso un añadido de motivación para Rosa.

En cuanto al nivel seleccionado para implementar la sesión de formulación, se seleccionó un grupo de 20 alumnos de 4 años de educación infantil dirigido por la maestra mencionada anteriormente, del colegio público en el que la maestra desempeña su actividad laboral. Esta elección supuso un reto añadido para el PIC debido a que, habitualmente, no se suele trabajar la formulación de problemas en el aula y mucho menos se suele trabajar en edades tan tempranas. Sin embargo, de cara a la investigación, resulta interesante conocer aspectos del conocimiento que también puedan resultar especialmente idiosincráticos al contexto de educación infantil.

Una vez Rosa diseñó la sesión sobre formulación de problemas y la presentó al grupo, se realizó una simulación de la primera parte de la sesión con el objetivo de realizar una previsión de cómo reaccionarían los alumnos y qué necesitaba conocer Rosa para dar respuesta a sus inquietudes. Posteriormente, la sesión fue llevada al aula para su puesta en práctica.

Métodos

En este estudio nos centraremos en analizar el conocimiento especializado que Rosa movilizó, por un lado, en la sesión de aula y, por otro lado, el conocimiento especializado empleado en el diseño de las tareas. Para ello, la implementación de la sesión fue audiograbada y transcrita para, posteriormente, ser analizadas usando las categorías del modelo MTSK (Carrillo, Climent et al., 2018; Carrillo, Climent, Contreras y Montes, 2019). Asimismo, con el objetivo extraer conocimiento del diseño de las actividades, realizamos una entrevista a la informante, que fue audiograbada.

Para la codificación de los datos, utilizaremos (A) para referirnos a los alumnos, independientemente del alumno que intervenga, dado que no es el foco de estudio en este trabajo, ni aporta información adicional, (R) para referirnos a Rosa y (E) para referirnos al entrevistador. El análisis se desarrolla a través de un análisis de contenido (Krippendorff, 2018), que fue validado a través de la triangulación por expertos (Flick, 2007).

Análisis

Este apartado de análisis se presenta siguiendo la línea temporal de la sesión implementada. Dicha sesión tiene dos partes diferenciadas por dos tareas diferentes, por lo que separaremos el análisis en dos.

Antes de comenzar con el análisis de los dos momentos de la sesión, pasamos a describir en qué consisten cada una de ellos. En el primero, Rosa distribuye a sus alumnos en asamblea para, mediante la ayuda de un mural (Figura 2), tratar de que sus alumnos formulen un problema matemático (R: vamos a pensar en problemas que pueda haber aquí). Este mural se compone de varios elementos familiares para el alumnado para así contribuir a que alcancen el objetivo de la formulación.

Durante el segundo momento de la sesión, los alumnos se enfrentan de nuevo al reto de formular un problema, pero, en esta ocasión, deberán hacerlo a través de diferentes contextos creados por Rosa (Figura 2).



Figura 2. Mural y escenarios diseñados

Análisis de la primera tarea

Un aspecto que se repite con frecuencia en la sesión es el afán de Rosa por conseguir que sus alumnos se familiaricen con determinados elementos de vocabulario matemático, así como de utilizar términos precisos a la hora de, por ejemplo, describir el mural. Un ejemplo de esto se puede observar cuando Rosa le preguntó a un alumno dónde se hallaba un objeto:

R: Venga, ¿tú qué ves, Ángel?

A: Yo veo un bombero... con una escalera.

R: ¿Dónde está el bombero?

A: Ahí.

R: Ahí, no (no lo considera una respuesta válida), ¿dónde está?: en la derecha o en la izquierda, arriba o abajo

A: Abajo.

R: Abajo, ¿en la derecha o en la izquierda?

A: En la izquierda.

R: En la izquierda [señalando un lugar con su puntero que no corresponde con el mencionado]

A: No, ahí, ¡ahí!

R: ¿Un poquito dónde?

A: Más arriba

R: Un poquito más arriba... vale

A través de este diálogo se puede evidenciar que Rosa conoce que sus alumnos simplemente señalan con el dedo cuando se les pregunta sobre la ubicación de un elemento o un objeto (KFLM: formas de interacción). Además, se puede apreciar cómo Rosa moviliza conocimiento sobre la dificultad de sus estudiantes para describir la posición de un objeto y cómo utilizando la estrategia (KMT: estrategias, técnicas tareas y ejemplos (ETTE)) de situar su puntero en una posición que no se corresponde con la posición del objeto, hace que el niño necesite precisar el lenguaje utilizando palabras que le permitan identificar la posición (izquierda, derecha, arriba o abajo). Además, la intención de Rosa de promover el uso de este lenguaje, hace que también se evidencie conocimiento de los temas (KoT) al buscar el uso términos matemáticos precisos a través de términos de registros.

Posteriormente, Rosa trató de que sus alumnos realizasen una observación del mural desde el punto de vista de la geometría. Esto se puede evidenciar en preguntas sobre formas (cómo es esa señal de tráfico, o qué forma tiene ese elemento). Esto no solo muestra un conocimiento de los temas sobre geometría (KoT: formas y representaciones

de formas geométricas) sino que también pone de manifiesto que Rosa piensa que sus alumnos pueden llegar a identificar las formas y, además, formular problemas relacionados con la geometría (KMLS: nivel esperado).

A continuación, Rosa manifestó conocimiento sobre una conexión de contenidos matemáticos. Se encontraba describiendo el mural, cuando un alumno hizo alusión a unos conos que aparecían. En este momento, Rosa percibe que su alumno describe el cono como objeto cotidiano y no como objeto matemático. Por ello, le pregunta a su alumno acerca de la forma que tiene el cono:

R: Una señal de peligro ¿Dónde?

A: Ahí

R: ¿Ahí dónde es?

A: Ahí donde están los conos

R: ¿Y los conos dónde están?

A: Ahí.

R: Ah. Y, esto entonces, ¿es un cono?

A: Sí

R: Y, ¿por qué es un cono esto?

A: Porque... para no pasar

R: Y, ¿qué forma tiene el cono?

A: Como un triángulo

R: Se dibuja como un triángulo. Pero es verdad, es así como un cucurucho, ¿verdad?

De esta manera, alumno identifica un cono con una forma triangular en vez de como un objeto matemático en sí mismo. La maestra es conocedora de esta dificultad (KFLM: fortalezas y dificultades) y utiliza un ejemplo que le permite al alumno ser consciente de qué forma tiene el cono realizando una comparación con otro objeto que resulte familiar para el niño, en este caso, un cucurucho de un helado (KMT: ETTE). Todo ello es producto de su conocimiento de conexiones matemáticas (KSM: conexión auxiliar). En este caso, Rosa conoce una de las secciones planas del cono y, sabiendo que su alumno puede no tener conocimiento sobre ello, utiliza la estrategia antes mencionada para realizar la explicación.

Posteriormente, Rosa parece intentar que sus alumnos formulen un problema centrado en la identificación de un recorrido. Esto puede evidenciarse en el siguiente fragmento de la transcripción:

R: Que ves, ¿ves un coche?

A: Amarillo

R: Dónde esta

A: Al lado del policía. Le está diciendo que no se puede pasar

R: ¿Quién le está diciendo que no se puede pasar?

A: ¡El policía!

R: Y ¿por dónde quiere ir?, ¿a qué sitio quiere ir?

A: Quiere ir a comprar

R: Y entonces, ¿ahora qué hace? ¿qué pasa? ¿por dónde tiene que coger?

A: Por aquí

R: Pero por aquí vienen los coches que vienen por aquí. Pues este coche tiene un problema

Así, Rosa busca que sus alumnos, a partir de las preguntas que realiza a estos, puedan plantearse problemas matemáticos relacionados con la posición y el trayecto a seguir del coche. Esto pone de manifiesto, en primer lugar, un conocimiento de la maestra sobre el tipo de problema que puede llegar a formular su alumnado, en este caso, sobre itinerarios y orientación espacial (KMLS: nivel esperado). Y, por otro lado, Rosa, formula preguntas como estrategia que permite orientar a los niños hacia el contenido del problema a formular (KMT: ETTE).

Ante las dificultades que atraviesan los alumnos para formular problemas y habiendo emergido problemas que no se consideran matemáticos, Rosa propone a sus alumnos buscar “historias” y “preguntas” que puedan hacerse:

R: Tú tienes que contar una historia y tienes que pensar una pregunta para responderte. Venga, esta persona va con un perro, la pregunta cual es

A: Quiere llegar a casa...

R: Y, ¿tú crees que la mujer no sabe cuál es el camino para llegar a su casa?

A: No, el perro...

R: Ah, vale. Y la pregunta cual es: ¿Por dónde...? Cómo, Juanma

A: ¿Por qué camino tiene que ir?

Este dialogo muestra, por un lado, una adaptación que Rosa realiza del lenguaje para que sus alumnos entiendan conceptos matemáticos. Así, utiliza la palabra historia para referirse al enunciado del problema sin que sus alumnos pierdan esa comprensión y suponiendo una estrategia por parte de la docente (KMT: ETTE). Además, la maestra parece conocer que sus alumnos tienen dificultades al verbalizar todos los elementos del problema. En este caso, el alumno parece no formular la pregunta del mismo y Rosa, en varias ocasiones, hace alusión a la pregunta del problema (KFLM: fortalezas y dificultades). Esto muestra también, de manera transversal, un conocimiento teórico de Rosa sobre los elementos que debe contener un problema (KoT: Definiciones, propiedades y fundamentos). Por último, muestra lo expuesto en la unidad de información anterior, es decir, su afán por tratar de que sus alumnos formulen un problema centrado en la identificación de un recorrido.

Por otro lado, otro aspecto relacionado con el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (estrategias) que la maestra moviliza tiene que ver con el uso de la expresión “¿y si...?”. Esta expresión la utiliza como estrategia que permite a los alumnos extender un problema y formular problemas a partir de uno dado (KMT: ETTE). Además, puede entenderse como parte del conocimiento de la práctica matemática al guardar relación con procesos relacionados a la formulación de problemas (KPM: procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas).

A continuación, y con el objetivo de mejorar y facilitar la formulación de problemas por parte de sus alumnos, Rosa comenzó a utilizar diferentes estrategias que le permitieran solucionar la dificultad de sus estudiantes para determinar elementos que puedan ser el contexto del problema, así como los datos del mismo (KFLM: dificultades y obstáculos). En primer lugar, focalizó la atención de sus alumnos en una mujer que se encontraba en el mural debido a que la propia Rosa identifica tres posibles situaciones a partir de las cuales formular un problema matemático:

A: Seguro que es esa mujer, porque lleva una bolsa de todas las cosas

R: Venga pues invéntate una historia de esta mujer

A: Quiere ir a un sitio, pero el policía no le deja pasar

R: Esta mujer quiere ir a todos los sitios, pero el policía no le deja pasar. Ven, fíjate bien, a ver si es que quiere ir o que ya ha ido. Vamos a inventarnos un problema con esta mujer. ¿Empiezo yo? Una mujer va a comprar pan... y, ¿qué pasa? Imagínate que esta mujer es tu mamá y va a comprar pan. Y, ¿qué pasa?

A: Que está cortada la carretera y no se puede pasar.

R: Y, ¿cuál es tu pregunta?

A: ¿Cuántos coches hay?

R: Yo creo que tú has mezclado unos cuantos problemas: uno va a comprar el pan, no puede pasar, cuantos coches hay. Ha sido una mezcla. Vamos a ayudarle con la primera parte. ¿A alguien se le ocurre algo? La mujer va a comprar el pan y qué le pasa al comprar el pan. A ver Nadia, la mujer va a comprar el pan. Y qué le pasa en la tienda del pan.

Esta focalización permite a los alumnos no desviar la atención de un elemento que puede resultar interesante de cara a la formulación de problemas matemáticos (KMT: ETTE). Además, Rosa pretende que la situación sea lo más cercana posible a los estudiantes y, por este motivo, les pide a estos que imaginen que la mujer del mural es su madre (KFLM: formas de interacción). A partir de esta situación que la maestra propone a sus alumnos, surge la formulación de un problema:

A: Que la señora ha comprado dos panes y quería comprar 3 porque en la tienda no había.

R: Porque en la tienda no había, ¿qué?

A: Muchos panes

R: ¿Y la pregunta cuál es? Ha comprado dos y ella quería tres y ¿la pregunta cuál es?

A: ¿Cuántos quedarán en la tienda? 0

R: Pues 0. Porque quería llevarse tres y como nada más que ha comprado dos, entonces la tienda se quedará con 0. Muy bien.

Nuevamente se aprecia la dificultad de su alumnado para completar los elementos del problema, en este caso la pregunta. Por ello, Rosa vuelve a animar a su alumno a formularla. Además, se aprecia que tiene conocimiento sobre cómo interactúan sus alumnos con el contenido. En este caso, Rosa conoce que sus alumnos realizan restas en la que el minuendo es menor que el sustraendo ($2-3=0$) debido a que sus alumnos trabajan aún con números naturales (KFLM: formas de interacción).

Otras estrategias que utilizó y que permitió focalizar la atención de su alumnado en un contexto fue el uso de una palabra determinada, rodear una de las partes del mural y utilizar un elemento matemático como condición en el problema. En este caso, utilizó la palabra “dentro” para tratar de facilitar la formulación de sus estudiantes (“¿Y si digo yo la palabra dentro y os inventáis un problema?”) (KMT: ETTE); rodeó una parte del mural en la que se encontraba un hombre talando un árbol; y sugirió a sus alumnos el uso del cuadrado como elemento indispensable para la formulación (Tienes que pensar un problema donde digas la palabra cuadrado. ¿Se te ocurre algo?).

Al identificar que sus alumnos siguen con problemas para confeccionar el enunciado del problema, Rosa comienza un enunciado diciendo: “Voy a empezar una

historia y vosotros continuáis. Esta mamá, le quiere comprar a su hijo...” (KMT: ETTE). Uno de los alumnos dice:

A: Solo hay una naranja, una pera, una uva y una manzana. Y el niño solo quiere una de cada caja

R: Una de cada caja. Y, ¿cuál es la pregunta?

A: ¿Cuántas peras hay?

R: ¿Cuántas peras hay?

A: 0.

R: ¿Por qué?

A: Porque el niño quiere las cuatro que quedan

R: Vamos a representarlas [las representa en la pizarra]. Una uva, una pera, una manzana y una naranja. Y, ¿cuál es la pregunta?

A: ¿Cuántas frutas hay? 0 (dando respuesta a su propia pregunta)

R: Pero, ¿cuántas frutas hay donde: en la tienda o aquí?

A: Hay 4 de cada sitio que hay una cosa de fruta.

R: Entonces el niño quiere una de cada una. Entonces sería: ¿cuántos tipos de fruta quiere el niño? O, ¿cuántas se come el niño? $1+1+1+1$ Cuántos son? Es igual a 4. ¿Os acordáis que se ponía así? (+) ¿Y si hubiera, por ejemplo, dos manzanas? Cuantos habría aquí ... Pero, quiero escribirlo poquito a poco, ¿aquí cuántas hay?

A: Dos

R: Más [dibuja el símbolo (+) en la pizarra], ¿cuántas peras hay?

A: Una (Apoyándose en representación)

Se aprecia que la maestra conoce que sus alumnos pueden interactuar de esta manera con el contenido debido a que, en múltiples ocasiones, parecen decir incoherencias y, por ello, Rosa trata de reorientarlos para tratar de llegar a un problema coherente (KFLM: formas de interacción). Conociendo esto, Rosa utiliza una pizarra para representar gráficamente el problema y así fomentar que sus estudiantes lo visualizaran (KMT: recursos).

Por último, mientras se encontraban formulando un problema sobre prendas de vestir y su coste, se pone de manifiesto que sus alumnos tienen dificultades al trabajar con el sistema monetario. En ese sentido un alumno, al Rosa decirle que tiene un billete de 10€ y que las prendas cuestan 10€, le dice que no puede comprarlo todo porque solo tiene “1 dinero”. Rosa identifica esta dificultad de comprensión y vuelve a utilizar la pizarra para explicar la equivalencia (KFLM: fortalezas y dificultades).

Análisis de la segunda tarea

Dada la naturaleza de esta segunda sesión, analizaremos el conocimiento de Rosa sobre la base de la entrevista centrada en el diseño de las actividades planteadas. La maestra diseñó 4 escenarios a través de los cuales los alumnos debían formular un problema matemático. El hecho de que se basase en escenarios determinados denota un conocimiento sobre teorías de aprendizaje (KMT) ya que, según Silver (1994), la formulación de problemas puede llevarse a cabo a través de situaciones u objetos dados.

La familiaridad que los escenarios puedan tener para los alumnos resulta clave a la hora de diseñar un escenario por parte de la maestra. De esta manera, se puede observar cómo los cuatro escenarios se basan en objetos conocidos y cercanos a los alumnos, así como tener un carácter manipulador que permita a los alumnos cogerlos, moverlos de

posición y realizar otras acciones que faciliten el proceso de construcción de la formulación de un problema.

A continuación, para describir el tipo de problema que la maestra espera que sus alumnos formulen a través de cada uno de los escenarios, es necesario hacerlo en función de cada uno de ellos puesto que, a través de cada escenario planteado, la maestra esperaba que sus alumnos formularan un tipo diferente de problema:

E: ¿En cada uno de los escenarios se esperaba un tipo de problema concreto?

R: Claro, para tener diferentes tipos de problema.

El primer escenario diseñado consistió en dos muñecos de juguete acompañados de 6 caramelos. En este escenario Rosa pretendía que sus alumnos llegasen a formular problemas aritméticos entre los que se encontraban divisiones, restas o sumas (Bueno, yo con este lo que pretendía era que sumaran, restaran o que lo repartieran en partes iguales). Esto guarda relación con su conocimiento, en primer lugar, sobre cómo deben ser los recursos aplicables a educación infantil. Rosa utiliza un escenario que para los niños resulta muy natural, y aprovecha esto para crear un escenario que represente una situación real (KFLM: intereses y expectativas). Asimismo, los contenidos para los que habilita el escenario también forman parte del conocimiento de Rocío, en primer lugar, en lo referente al KoT desde el punto de vista de la fenomenología y, por otro lado, desde el punto de vista del PCK en cuanto a contenido abordable por el alumnado de educación infantil (KMLS).

Para confirmar que, efectivamente, la maestra tenía la intencionalidad de que sus alumnos generasen no solo problemas de reparto, le volvimos a preguntar sobre esto. De esta manera confirmamos lo expuesto en el párrafo anterior y la intencionalidad de Rosa de que sus alumnos formulen problemas numéricos a través de este escenario:

E: ¿Esperabas siempre [problemas de] reparto?

R: No, y (también) los de sumas y restas del tipo: se comen tantos. O: una amiga tiene 4 y otra tiene 2, ¿cuántas tienen entre las dos? Yo vi ese (escenario) para que surgieran problemas numéricos.

El segundo escenario empleado por Rosa consistía en cuerpos geométricos de gomaespuma de diferentes colores entre los que se encontraban pirámides, conos, esferas, cubos y prismas. En este caso, Rosa esperaba que sus alumnos formularan problemas relacionados con contenidos geométricos, así como problemas de clasificación o de comparación de magnitudes (longitud) de cada pieza o conjunto de piezas (Esperaba problemas de clasificación, (en función de su forma y/o colores) y magnitudes con las diferentes alturas). La maestra denota conocimiento sobre el nivel esperable de su alumnado (KMLS) debido a que diseña el escenario pensando que sus alumnos podrán formular problemas sobre el contenido propuesto. Asimismo, también se puede apreciar conocimiento sobre las características de aprendizaje de sus alumnos (KFLM) desde el punto de vista de las interacciones con el material. Así, Rosa espera que sus alumnos utilicen las figuras de manera que las solaparan unas sobre otras para poder crear otras construcciones a partir de las figuras individuales.

El tercer escenario mostraba cinco pelotas de diferentes tamaños, colores y texturas. La intención de Rosa al diseñar este escenario fue que sus alumnos formularan problemas relacionados con la ordenación, clasificación o secuenciación de las pelotas, por ejemplo, de menor a mayor. Así, basa este escenario en un contenido diferente a los

pretendidos en los anteriores, mostrándose de nuevo conocimiento sobre qué espera que sus alumnos puedan llegar a realizar. Al igual que en el primer escenario, trata de acercar una situación que puede darse en la vida cotidiana al aula de matemáticas de educación infantil. Esto muestra conocimiento sobre la fenomenología del contenido de ordenación (KoT), así como un conocimiento sobre cómo Rocío espera que sus alumnos van a interactuar con el escenario (KFLM):

E: ¿Tú pensabas que pudiese haber clasificación por diferentes características?

R: Sí. Esta y esta son de plástico, la de tenis es más... incluso dura, la otra es más blanda... Texturas y con diferentes características.

E: Sí, para que diera pie...

R: Claro, que ellos pudieran hacer... lo que se les ocurriera.

Por último, el cuarto escenario contaba con vehículos de diferentes colores: aviones, coches, camiones... Con este escenario Rosa pretendía que sus alumnos formularan problemas de clasificación, ya sea por colores o por tipo de vehículo, así como problemas que pudieran estar involucradas las operaciones aritméticas. Según la docente, el diseño de este escenario se justifica en que, si no se diseñan los escenarios para trabajar diferentes tipos de problema, lo más inmediato en los alumnos es formular problemas de carácter numérico [E: en este (escenario) se espera que el alumnado formule problemas de clasificación y problemas aritméticos o numéricos de suma... R: Clasificación, bien por colores o bien “este va por el cielo y este...” O por: “este tiene dos ruedas y este tiene cuatro”. Porque, si no, siempre habrían salido problemas de tipo numérico]. Así, mediante esta intervención identificamos conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) referido a cómo piensa que van a interactuar sus alumnos con el escenario. Rosa piensa que, si no se les fuerza, los alumnos van a tener tendencia a formular problemas de tipo numérico.

No se puede evidenciar conocimiento de los temas (KoT) de Rosa, aunque se puede inferir teniendo en cuenta los contenidos para los que habilita el escenario. Asimismo, se aprecia que, si bien Rosa pretende que sus alumnos formulen problemas sobre estos contenidos, muestra conocimiento sobre KMLS ya que conoce que sus alumnos pueden llegar a formular problemas sobre clasificación y operaciones aritméticas. Además, su conocimiento sobre las características de aprendizaje de su alumnado le permite diseñar este escenario. Concretamente, Rosa conoce que, mediante la diversidad de formas y colores en los objetos proporcionados, sus alumnos podrán formular un problema matemático.

Consideraciones finales

La formulación de problemas es una práctica matemática con potencial como para ser protagonista en todos los niveles de la educación (Kilpatrick, 1987; Singer et al., 2015). Puede ser utilizada para trabajar diversos contenidos matemáticos además de tratarse de una actividad matemática genuina. Además, a pesar de la poca edad de los alumnos, se ha evidenciado que es posible trabajar a través de ella también desde la educación infantil. Sin embargo, el diseñar y gestionar una actividad de este tipo en un aula de educación infantil no es una tarea trivial (Baroody, 1994; Martín-Díaz et al., 2020). A través del análisis tanto de la gestión de la tarea que propone Rosa, como de la entrevista sobre su planificación, se ha evidenciado que el conocimiento del maestro

resulta clave para la implementación de actividades desde este enfoque en la etapa de educación infantil, no solo para gestionar la sesión en el aula sino en el diseño de la tarea implementada (Martín-Díaz et al., 2020).

Por un lado, atendiendo al conocimiento matemático, los maestros de educación infantil deben estar dotados de una sólida base matemática (Muñoz-Catalán et al., 2017). Conocimientos como el reparto igualitario, la seriación o la clasificación son considerados de gran valor en esta etapa y precursores de contenidos que se imparten en la posterior etapa de primaria. Por ello, una base de conocimiento habilita para poder diseñar tareas de formulación de problemas como la que propone Rosa.

Por otro lado, en relación con el conocimiento didáctico del contenido, se aprecia la importancia de contar con herramientas adecuadas, estrategias y conocimiento que permitan adaptar una matemática que puede resultar a priori lejana, a niños de educación infantil. No solo eso, sino que también se evidencia que es necesario conocer cómo puede reaccionar un alumno a determinadas situaciones teniendo en cuenta qué es lo que puede resultar natural para él como, por ejemplo, el reparto en partes iguales desde el punto de vista de la justicia.

La investigación relativa al conocimiento profesional útil y necesario para gestionar y diseñar tareas de formulación de problemas supone un desafío que es necesario abordar (Cai y Hwang, 2021) y más concretamente en la etapa de educación infantil, en la que la investigación sobre conocimiento profesional es aún incipiente (Muñoz-Catalán, et al., 2017). En este sentido, y dada la naturaleza inhabitual de las dinámicas de formulación de problemas en educación infantil, es necesario que los maestros tomen conciencia de la importancia de las competencias que fomenta la formulación de problemas en sus estudiantes, no solo en etapas tardías del aprendizaje, sino también en etapas tempranas donde los alumnos suelen demostrar sorprendentes habilidades de razonamiento y formular problemas sin un esquema previo (Doerr y English, 2003; Carpenter & Romberg, 2004; English, 1998).

Para ello, investigaciones como la que aquí se presenta, y futuros desarrollos en la misma línea deberían conducir a una caracterización profunda y extensa del conocimiento necesario para gestionar tareas de formulación de problemas en Educación Infantil. Estos resultados deberían ser considerados por gestores del currículo de la formación de maestros de esta etapa para fomentar la construcción de dicho conocimiento en la formación inicial.

Por último, en relación con las limitaciones del estudio observamos que, al ser un estudio de caso, resulta un punto de partida al estudio sobre el conocimiento especializado para la formulación de problemas, asumiendo la imposibilidad de generalizar dadas las características propias del tipo de diseño desarrollado. Asimismo, resultaría interesante conocer cómo responderían a una actividad de esta índole en otros cursos de la educación infantil.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto: “Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado” (RTI2018-096547-B-I00, del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, España), y ha sido apoyado por el grupo de investigación DESYM (HUM-168), el centro de investigación COIDESO y el Proyecto de Investigación Colaborativa (PIC). Asimismo, está vinculado

a la Red MTSK, auspiciada por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP). Agradecemos a Rosa su implicación en este trabajo.

La investigación reflejada en este artículo se desarrolló parcialmente bajo la supervisión de nuestro compañero, mentor, y amigo José (Pepe) Carrillo, que en paz descansa. Gracias por tanto.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener algún conflicto de interés.

Declaración de la contribución de los autores

Todos los autores afirmamos que se leyó y aprobó la versión final de este artículo.

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: J.P.M. 50%, M.A.M., 50%

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente [J.P.M], previa solicitud razonable.

Referencias

- Ball, D., Thames, M.H. y G. Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barlow, A. T. y Cates, J. M. (2006). The impact of problem posing on elementary teachers' beliefs about mathematics and mathematics teaching. *School Science and Mathematics*, 106(2), 64-73. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18136.x>
- Baroody, A.J. (1994). *El Pensamiento Matemático de los niños*. Visor: Madrid.
- Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open University Press: Buckingham.
- Björklund, C., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Kullberg, A. (2020). Research on early childhood mathematics teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, 52, 607-619. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01177-3>
- Brown, S. I. y Walter, I. M. (2004). *The art of problem posing (3rd edition)*. London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Buschman, J. E. (2003). *Dismantling the public sphere: situating and sustaining librarianship in the age of the new public philosophy*. Westport, CT: Libraries Unlimited.
- Cai, J. y Cifarelli, V. (2005). Exploring mathematical exploration: how do two college students formulate and solve their own mathematical problems? *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 27(3), 43-72.
- Cai, J. y Howson, A. G. (2013). Toward an international mathematics curriculum. In M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & K. S. F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education research* (pp. 949-974). Springer: Nueva York.
- Cai, J. y Hwang, S. (2021). Teachers as redesigners of curriculum to teach mathematics through problem posing: conceptualization and initial findings of a

- problem-posing project. *ZDM Mathematics Education*.
<https://doi.org/10.1007/s11858-021-01252-3>
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3–34). Springer.
- Cankoy, O. y Darbaz, S. (2010). Effect of a problem posing based problem solving instruction on understanding problem. *Hacettepe University Journal Of Education*, 38, 11-24.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. A. (2019). Mathematics Teachers' Specialised Knowledge in Managing Problem-Solving Classroom Tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl, y B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 297-316). Springer: Nueva York.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236-253. DOI 10.1080/14794802.2018.1479981.
- Carpenter, T. P., & Romberg, T. A. (2004). *Powerful practices in mathematics & science: Research-based practices for teaching and learning*. Madison: University of Wisconsin.
- Chang, N. (2007). Responsibilities of a Teacher in a Harmonic Cycle of Problem Solving and Problem Posing. *Early Childhood Education Journal* 34(4), 265–271.
<https://doi.org/10.1007/s10643-006-0117-8>
- Doerr, H. M., y English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110-136.
- Einstein, A., y Infeld, L. (1938). *The evolution of physics*. New York, NY: Simon & Schuster.
- English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83–106.
- Felmer, P., Pehkonen, E. y Kilpatrick, J. (2016). *Posing and solving mathematical problems*. Suiza: Springer.
- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Morata.
- Gasteiger, H. y Benz, C. (2018). Enhancing and analyzing kindergarten teachers' professional knowledge for early mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 51, 109-117.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kojima, K., Miwa, K. y Matsui, T. (2015). Experimental study of learning support through examples mathematical problem posing. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*. doi: 10.1007/s41039-015-0001-5.
- Krippendorff, K. (2018). *Content analysis: An introduction to its methodology*. Sage.

- Leikin, R. y Elgrably, H. (2019). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, 101424. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.002>
- Martín-Díaz, J. P., Montes, M., Codes, M. y Carrillo, J. (2020). Characterisers of Teaching in a Mathematics Problem Posing Lesson in Preschool Education. *Sustainability*, 12(15), 6148. doi:10.3390/su12156148
- Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (403-410). Bilbao: SEIEM.
- Muñoz-Catalán, M. C., Liñán, M. M. y Ribeiro, M. (2017). Conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. *Cadernos de Pesquisa*, 24, 4-19. 10.18764/2178-2229.v24nespecialp4-19.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y estándares para la educación. Matemática*. Reston: VA.
- Pólya, G. (1954). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Sengul, S. y Katranci, Y. (2012). Problem solving and problem posing skills of prospective mathematics teachers about the sets subject. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 69, 1650-1655.
- Schwab, J. J. (1978). *Science, curriculum and liberal education*. Chicago: University of Chicago Press.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 29(3), 75-80.
- Singer, F.M., Ellerton, N.F. y Cai, J. (2013). Problem posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics: An International Journal*, 82(3).
- Singer, F.M., Ellerton, N.F. y Cai, J. (2015). *Mathematical Problem Posing*. Suiza: Springer.
- Stake, R. E. (2006). *Multiple case study analysis*. Nueva York: The Guilford Press.
- Van Harpen, X. Y. y Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 117-132.

6 Análisis y discusión de resultados

En este apartado de análisis y discusión de resultados, presentamos el análisis de manera individual de cada investigación en términos del modelo MTSK. Para ello, nos apoyamos en las preguntas de investigación propuestas anteriormente y que se relacionan con los subdominios del modelo. Así, trataremos de responder, acerca de cada investigación a las siguientes preguntas: ¿Qué conocimiento matemático, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?; y, ¿Qué conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?

6.1 Resultados artículo 1

6.1.1 ¿Qué conocimiento matemático, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?

En relación con el primer artículo, al ser una tarea de evaluación en la que se pide al alumnado formular un problema matemático, sin connotación didáctica alguna, nos proporciona información que se vincula fundamentalmente al conocimiento matemático respecta, por lo que no profundizaremos en el PCK.

Primero nos vamos a centrar en las categorías de estructura multiplicativa de enunciado expuestas en la investigación. De esta manera y dados los resultados obtenidos en el trabajo, identificamos mediante el análisis de los problemas planteados por los EPM, que estos muestran en su formulación los tres tipos de estructura multiplicativa, si bien el producto de medida aparece de forma marginal. Así, se formulan, de manera general, problemas basados en isomorfismos de medida y relación escalar. No podemos afirmar que los estudiantes muestren conocer que existen los tres tipos de estructura, pero sí podemos afirmar que las estructuras que predominan en su formulación son las dos mencionadas con anterioridad.

En lo que al KoT se refiere, podemos decir que los estudiantes para maestro parece que conocen la estructura que debe tener un problema en lo que a los elementos mostrados por Malaspina respecta (información, requerimiento, contexto e incógnita), dado que todos los problemas formulados contienen estos elementos. Asimismo, se evidencia que los problemas formulados por los estudiantes para maestro siguen, de manera general, una estructura del problema basada en *enunciado + pregunta = solución*, situando la incógnita o el *requerimiento* al final del enunciado del problema.

Siguiendo con la estructura de los problemas formulados, los estudiantes para maestro muestran saber cómo formular o qué estructura debe tomar, un problema matemático (*KoT, procedimientos: características del resultado*). Sin embargo, a pesar de saber cómo formular un problema matemático y la estructura que debe tener, no tienen en cuenta las características que puede tener el resultado. Esto se evidencia en los resultados obtenidos de la investigación debido a la baja cantidad de formulaciones correctas, tanto desde el punto de vista del resultado como desde el punto de vista de la coherencia que deben tener los elementos que se muestran en el enunciado.

Pasando a comentar la forma en la que los datos pueden mostrarse en el enunciado del problema, identificamos que los estudiantes para maestro suelen mostrar los datos de una manera explícita. Sin embargo, identificamos también algunos estudiantes que utilizan términos como “el doble menos” o “dos veces menos” para hacer alusión a elementos matemáticos como “multiplicado por menos dos (doble menos)” o “elemento negativo multiplicado por dos (dos veces menos)”. Encontramos aquí un indicio de conocimiento de los temas (*KoT*) referido a la forma en la que pueden exponerse los datos, en particular en lo relativo al registro verbal.

Del mismo modo, atendiendo a los datos utilizados en el problema, se identificó que, en los problemas formulados por los estudiantes para maestro, solo aparecían aquellos datos que se necesitaban para la resolución del problema, es decir, no existían datos irrelevantes ni sobreabundantes en los enunciados analizados. Así, asociamos esta tendencia con el *KoT* de los estudiantes sobre propiedades de los enunciados de los problemas, con un indicio que indica que los estudiantes para maestro parece que saben que los problemas deben contener solo datos necesarios que deben ser utilizados en la resolución del problema.

Otro aspecto del *KoT* identificado en las formulaciones de los estudiantes está relacionado con los contextos sobre los que formulan los problemas de números enteros. En esta investigación se registraron problemas relacionados con 8 contextos diferentes: económico (dinero), objetos, temperatura (basados en grados), nivel del mar (relacionado con la profundidad), deportes, ascensor (relacionado con las plantas de edificios), estatura, otro. A pesar de haberse encontrado 8 diferentes, existió una predominancia de los contextos de temperatura, económico y objetos. Esto indica que los estudiantes para maestro identifican, de manera general, que los contextos asociados a los números enteros son fundamentalmente 3, lo que se podría relacionar con la categoría de fenomenología (Carrillo et al., 2018).

6.2 Resultados artículo 2

6.2.1 ¿Qué conocimiento matemático, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?

Pasamos a comentar a continuación el conocimiento matemático identificado a través de las categorías emergentes en la segunda investigación. Para exponer estos resultados, vamos a tratar de relacionar cada categoría identificada y expuestas en la tabla 1 con un aspecto del conocimiento, en este caso, matemático, desde la perspectiva de MTSK.

Organizadores	Caracterizadores	Subcaracterizadores
Diseño de la tarea	Características del material empleado	Familiaridad Manipulabilidad
	Tipo de problema que facilita el material	Clasificación Ordenación Reparto Comparación Suma y resta
	Expresión de la formulación	Pictórica Oral Escrita
	Tipo de formulación	Estructurada Semi estructurada Libre
Gestión de la sesión	Fases de la tarea	Comprensión de la situación Identificación de elementos del problema Diseño del problema Enunciación del problema Comprobación
	Grado de libertad	Estricto (atendiendo solo a la información proporcionada por el escenario) Condicionado (permitiendo alejarse del escenario si se considera oportuno) Libre (utilizando información del escenario e información externa)
	Papel de las representaciones de los alumnos	Tipo de problema Ordenación Clasificación Comparación Reparto Aritmético de suma o resta
		Elementos del problema
		Datos Contexto Condiciones Pregunta Resultado

Tabla 1. Categorías emergentes de la segunda investigación

En primer lugar, en relación con el organizador de la gestión de la tarea, apreciamos que existen dos categorías que se relacionan directamente con el conocimiento matemático especializado de la maestra: el tipo de problema y el tipo de formulación que propicia el escenario diseñado.

En relación con el tipo de problema o el contenido que el escenario promueve para formular está basado en el KoT de la maestra. De esta manera, la maestra sabe cómo diseñar un escenario para que pueda extraerse un problema relacionado con un contenido matemático determinado. Asimismo, la maestra tiene conocimiento sobre cómo vincular una determinada fenomenología (KoT) a cada escenario para conseguir que cada escenario promueva el aprendizaje de ciertos contenidos, por ejemplo, a la clasificación le atribuye colores y formas (escenario de coches y aviones), a ordenación le atribuye las pelotas de diferentes tamaños, etc.

Además, atendiendo a la formulación de problemas como contenido en sí mismo, la maestra evidencia conocimiento sobre cómo diseñar escenarios de formulación en los que se puedan extraer diferentes tipos de problemas. Es decir, conoce que a través de una misma situación problemática se pueden formular problemas basados en diferentes contenidos matemáticos.

Por otro lado, en lo referido al caracterizador del tipo de formulación en la que se basa el escenario, la maestra parece conocer las diferentes posibilidades que puede ofrecer una situación de formulación de problemas (estructurada, semi-estructurada, libre). Esto se encontraría relacionado con el KPM que la maestra posee y sería un KPM que es específico de la formulación de problemas.

Si pasamos a comentar los caracterizadores identificados en la gestión de la tarea, apreciamos indicios de conocimiento (Flores et al., 2013) que la maestra puede tener. En este caso, en lo relativo al KoT sobre formulación de problemas, vemos que la maestra trata de conducir a sus alumnos por la tarea de formulación a través de las fases que arroja el análisis de la sesión de formulación. Si bien estas fases no son verbalizadas por la maestra, parece asegurarse de que sus alumnos se encuentren superándolas atendiendo a las preguntas que les realiza.

Asimismo, también identificamos un indicio de conocimiento (Flores et al., 2013) en lo relativo al grado de libertad concedido a los estudiantes como características o propiedades que pueden tener los escenarios de formulación de problemas. En este caso, asumimos que existe conocimiento sobre qué se puede proponer a los alumnos hacer sobre el escenario, en relación con si es posible introducir datos externos, si es necesario utilizar los datos del problema o si el escenario solo sirve como contexto entre otras posibilidades.

6.2.2 ¿Qué conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?

Para describir el conocimiento didáctico del contenido identificado en la segunda investigación vamos a realizarlo siguiendo la línea utilizada en el conocimiento matemático, es decir, vamos a tratar de relacionar a cada caracterizador y subcaracterizador elementos del conocimiento identificados y que tienen vinculación con subdominio didáctico del modelo MTSK, uno o varios aspectos del conocimiento matemático especializado asociado a este.

El primer caracterizador en el que identificamos conocimiento didáctico del contenido en relación con el organizador de *diseño de la tarea* son las *características del material empleado*. La maestra, Rosa, basó su diseño de escenarios en situaciones que tuvieran que ver con la cercanía del alumno al material, es decir, con su *familiaridad* con él. Esto guarda relación con el conocimiento de la maestra sobre los intereses y expectativas de su alumnado, es decir, sobre las características de aprendizaje de los alumnos (KFLM). La maestra sabe que, si las situaciones de formulación son familiares para los alumnos, estos van a ser capaces de generar un enunciado matemático, o al menos, tendrán menos dificultad.

La segunda característica (sub-caracterizador) que la maestra pretende que el material contenga es la *manipulabilidad*. Esto se basa también en su conocimiento sobre las características de aprendizaje de sus alumnos en relación con cómo interactúan los estudiantes con un contenido determinado (KFLM). El hecho de que los escenarios diseñados por la maestra sean manipulativos es debido a que piensa que, para que los alumnos formulen problemas, necesitan ver la situación (contexto) y los datos para poderlos asociar entre ellos y, a través de la manipulación de los objetos del escenario, puedan hacerse preguntas que desemboquen en la formulación de un problema.

Este sub-caracterizador (*características del material empleado*) también se relaciona con el KMT sobre el que Rosa se apoya para poder diseñar el material. Para la maestra es importante que los escenarios mostrados contengan ciertas características que ayuden al alumnado a formular problemas matemáticos. Por ello, el *recurso* (KMT) que muestra, y por tanto conoce, para desarrollar esta actividad son los escenarios de formulación y es el producto final de diferentes características basadas en su KFLM.

El segundo caracterizador en el que se aprecia conocimiento didáctico del contenido en relación con el diseño de la tarea es la *expresión de la formulación*. En su diseño, la maestra pretendió

que sus alumnos formularan problemas y que los expresaran pictóricamente u oralmente. Esto se debe a que la maestra conoce que, en esta etapa, sus alumnos no saben leer ni escribir, por lo que promueve que sus alumnos se expresen oralmente y dibujen el problema formulado. Si bien el conocimiento sobre estas limitaciones de lectoescritura es general y no se relaciona con la matemática, el facilitar la expresión de la formulación mediante un dibujo sí que forma parte del conocimiento que la maestra usa, siendo una *estrategia* que permite a los alumnos expresar su problema (KMT). Además, también se puede apreciar conocimiento sobre cómo los estudiantes pueden expresar la formulación de un problema, lo que se relaciona con cómo interactúan dichos estudiantes con la práctica de formular problemas (KFLM).

En relación con el caracterizador de *tipos de formulación* que la maestra propicia a través de los escenarios y el mural, podemos decir que, si bien era un indicio de KoT el conocer los tres tipos, el basar su actividad de formulación de problemas en una de ellas formaría parte de su conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, es decir, sobre su KMT en relación con las características del recurso que proporciona a sus alumnos. Este KMT se encuentra basado en KMLS (expectativas de aprendizaje), debido a que, atendiendo a las características de los alumnos, sabe que la situación semi-estructurada puede resultar adecuada para que terminen formulando un problema matemático.

Pasando a comentar los caracterizadores relacionados con el organizador de *gestión de la tarea*, comenzamos con el conocimiento didáctico del contenido que identificamos en el caracterizador de las *fases de la tarea*. Al igual que sucede con el caracterizador de los *tipos de formulación*, el conocimiento de estas fases forma parte del KoT de la maestra. Por otro lado, la maestra muestra conocimiento didáctico del contenido asociado a estas fases. Este conocimiento se identifica en las preguntas que la maestra asocia a cada una de las fases. Por ejemplo, en la fase de comprensión, la maestra lanza preguntas tales como: “A ver, ¿esto qué son?” o “¿qué veis aquí?; para la fase de identificación de elementos: “¿Cuántas pelotas hay?” o “¿cuántos (caramelos) hay?”. El realizar estas preguntas se relaciona con el KFLM en lo referido al conocimiento sobre dificultades de aprendizaje del alumnado, debido a que la maestra parece considerar que los alumnos van a tener dificultad para identificar los elementos de la información del problema. Al conocer esta tendencia, la maestra realiza preguntas a modo de estrategia (KMT) que ayude a sus alumnos a encaminar la tarea de formulación.

En lo referido al *grado de libertad* que la maestra otorga a la actividad, se aprecia que la maestra permite, en algunos casos, que los estudiantes introduzcan elementos externos al escenario

proporcionado. Esto parece estar basado en su conocimiento sobre los estándares de aprendizaje (KMLS), en relación con el nivel que cada alumno puede desempeñar, dado que, en algunos casos, permite que los alumnos inventen y utilicen datos externos y, en otros casos donde el nivel del alumnado es menor, los reconduce a los datos iniciales. Por ejemplo, una alumna da una respuesta de cero siendo la pregunta “¿cuántas pelotas quedan?” ante la siguiente formulación: “Había cinco (pelotas) y la mujer quiere dos y dos” siendo la operación errónea $5-4=0$. La maestra, al percibir que la alumna parece no haber construido un problema plausible, anima a su alumna a revisar su formulación y le propone comenzar de nuevo.

Otro momento en el que se aprecia el *grado de libertad* de la maestra que la maestra permite, aparece cuando identifica que un alumno ha dibujado siete caramelos en vez de seis. Ante esto, la maestra le realiza cuestiones (“¿cuántos caramelos había?”) que permiten al niño identificar los datos del problema correctamente. En esta ocasión parece que la maestra moviliza conocimiento sobre dificultades de aprendizaje (KFLM) debido a que, en un primer momento, diseña el escenario con la intención de que el reparto resulte equitativo para así evitar posibles dificultades con el resto en caso de no ser una división exacta. La aparición en la representación del alumno de un caramelo más hace que la maestra perciba que el reparto deja de ser equitativo y que se ajusta a un nivel más elevado para su formulación mostrando también conocimiento sobre el nivel que espera en sus alumnos (KMLS).

Por último, en lo referido al caracterizador de *Papel de las representaciones*, el conocimiento que subyace a este caracterizador se relaciona, por un lado, con cómo los alumnos interactúan con el contenido (KFLM). La maestra conoce que sus alumnos van a representar las soluciones a los problemas que ellos mismos formulan y no la formulación del problema en sí misma. A través de esta representación y apoyándose en el tipo de problema y en los elementos que conforman el problema comentado en el MK, la maestra, mediante la realización de preguntas, trata de identificar cuál ha sido el problema que el alumno ha formulado a través de la solución representada. Por tanto, es posible considerar las preguntas que realiza como estrategias (KMT) que le permiten identificar los problemas formulados por los alumnos.

6.3 Resultados artículo 3

6.3.1 ¿Qué conocimiento matemático, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?

Los resultados del tercer artículo muestran que, para poder gestionar una sesión de formulación de problemas en las aulas, no solamente es necesario tener conocimiento sobre la propia formulación de problemas en sí (MK), sino que, además, se moviliza, por ejemplo, conocimiento didáctico del contenido en relación con potencialidades del material que promuevan a la formulación (KMT) o conocer cómo interactúan los alumnos con la formulación de problemas (KFLM).

Entre los aspectos del conocimiento matemático (MK) relacionados con la formulación de problemas encontramos conocimiento teórico de la maestra sobre los elementos que debe contener un problema (KoT). También encontramos conocimiento relacionado con el MK en el uso de la expresión “¿y si...?”. La utilización de esta expresión puede entenderse como parte del conocimiento de la práctica matemática al guardar relación con procesos relacionados a la formulación de problemas (Lavy y Bershadsky, 2003) (KPM: procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas).

Por otra parte, también en relación con el KoT de la maestra, identificamos que recurre a dirigir ciertas cuestiones hacia sus alumnos (cómo es esa señal de tráfico, o qué forma tiene ese elemento) que permiten inferir conocimiento sobre contenidos matemáticos, en este caso sobre geometría. Este conocimiento es propio de educación infantil, por lo que la presencia de la matemática es sutil, ya que, en la identificación de la forma de una señal de tráfico, puede considerarse que no existe un saber profundo de la geometría, pero sí que resulta relevante de cara al fomento de habilidades de formulación de problemas.

A pesar de identificar aspectos del conocimiento relacionados con el KoT y el KPM, en el KSM de la maestra, no identificamos demasiadas evidencias que nos permitan describirlo, pero sí identificamos un momento en el que la maestra lo moviliza. En este caso, la maestra hace una relación entre la perspectiva plana del cono y su imagen en tres dimensiones.

Por tanto, se evidencia que una tarea basada en la formulación de problemas matemáticos moviliza todos los subdominios de conocimiento matemático. Si bien algunos de ellos aparecen

de forma sutil, esto resulta relevante, puesto que es en este conocimiento en el que se basan algunas intervenciones de la maestra que permite potenciar la tarea de formulación.

En el conocimiento descrito vinculado al MK, solo hablamos de aspectos relacionados con contenido que la tarea de formulación fomenta trabajar. Sin embargo, el conocimiento manifestado por la maestra informante no solo guarda relación con el contenido que la formulación de problemas promueve, sino que también se relaciona con conocimiento sobre la formulación de problemas y resolución de problemas en si. En este caso, se identifica conocimiento sobre los elementos que componen un enunciado matemático (KoT, características del enunciado del problema). Esto se aprecia en momentos en los que pregunta a los niños sobre “la historia” (contexto), datos (“¿qué tiene; cuántos euros tiene?”) y pregunta (“¿Cuántas...?” o bien realizando una pregunta directa ¿Cuál es la pregunta?).

De esta manera, se evidencia que el conocimiento movilizado durante una tarea sobre formulación de problemas tiene un carácter complejo debido a la implicación tanto de la formulación de problemas como actividad matemática como de los contenidos que la formulación pretende movilizar.

6.3.2 ¿Qué conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva de MTSK, evidencian maestros durante una tarea de formulación de problemas?

En lo relativo al PCK movilizado en la sesión referente a contenidos matemáticos, observamos una predominancia del KMT y del KFLM. Asimismo, también observamos una correspondencia entre los dos subdominios en el sentido de que un aspecto del conocimiento relacionado con el KMT sirve para, por ejemplo, atajar un conocimiento sobre una dificultad perteneciente al KFLM.

Un ejemplo de lo anterior lo encontramos cuando la maestra demuestra que conoce que sus alumnos tienen dificultades para determinar una posición específica en el plano (mural), cuando simplemente señalan con el dedo una posición (KFLM). Para ello, se apoya en una estrategia (KMT) basada en situar un puntero en una posición significativamente distinta a la que el alumno está señalando, acompañado de una intervención que ayuda a precisar a su alumnado la posición, siendo una relación con la geometría proyectiva en educación infantil (arriba o abajo; izquierda o derecha).

Otro ejemplo asociado al KFLM aparece cuando un alumno identifica un cono con una forma triangular en vez de como una figura tridimensional. La maestra demuestra conocimiento de la existencia de esta dificultad que pueden presentar los alumnos. Esto se aprecia debido a que la maestra realiza preguntas al alumno dirigidas a reflexionar sobre ese error detectado (M: Y, ¿qué forma tiene el cono? A: Como un triángulo). Ante esto, la maestra utiliza un ejemplo (KMT) que le permite desligar la idea del alumno asociada a las dos dimensiones (M: Se dibuja como un triángulo. Pero es verdad, es así como un cucurucho, ¿verdad?).

También apreciamos aspectos del conocimiento relacionados con el KMLS. La evidencia la encontramos cuando la maestra presenta el mural y trata de hacer emerger problemas relacionados con la geometría (M: ¿qué forma tiene ese elemento?). Ante esto, la maestra espera que sus alumnos puedan dar una descripción, por ejemplo, de la señal de tráfico que aparece en el mural. Este conocimiento se encuentra relacionado con el KMLS, en lo que al nivel que la maestra espera respecta.

Al igual que ocurre con el MK, a través de la implementación de una tarea basada en la formulación de problemas también identificamos aspectos del conocimiento relacionados con el PCK. Este conocimiento, en un primer momento, se relaciona con conocimiento sobre contenidos matemáticos tales como geometría.

Sin embargo, también encontramos trazas de conocimiento relacionados directamente con la formulación de problemas. Un ejemplo de esto se evidencia con el uso por parte de la maestra de expresiones tales como “¿y si...?”. El uso que hace la maestra de esta expresión supone una estrategia (KMT) que permite a los alumnos realizar suposiciones diferentes ante un contexto determinado. Esto se encontraría relacionado con una extensión del problema.

Asimismo, también en relación con la formulación de problemas y el KMT, encontramos que la maestra utiliza una palabra (dentro) como dato que debe contener un enunciado matemático. El uso de la palabra “dentro” evidencia una estrategia (KMT) que la maestra utiliza para promover la formulación de problemas durante la actividad.

En lo relativo al KMLS, apreciamos que la maestra diseña el escenario teniendo en cuenta el nivel esperado por el alumno. Por tanto, conociendo que sus alumnos no tienen aún adquirida la habilidad de la lectura y que las características de la edad permiten aprender a través de materiales manipulativos, la maestra diseña estos escenarios (KMT) basados en contenidos

específicos tales como el reparto, clasificación u operaciones, sabiendo que sus alumnos van a ser capaces de formular un problema a través de ellos (KMLS).

El modelo MTSK ha permitido evidenciar aspectos del conocimiento profesional, relacionados con los seis subdominios de los que se compone el modelo. Además, apreciamos una distinción entre conocimiento relacionado con los contenidos a trabajar por los alumnos y entre conocimiento relacionado con la formulación de problemas como práctica matemática. Esto no solo significa que diseñar y gestionar una tarea de formulación de problemas no es una tarea trivial, sino también que requiere de conocimiento profundo tanto desde el punto de vista matemático como desde el punto de vista didáctico del contenido específicos del contenido sobre el que se formulan problemas, así como un conocimiento especializado vinculado a la formulación de problemas. Así, no solo se necesita conocimiento especializado para la gestión de una tarea de formulación de problemas, sino también para el proceso de diseño de la misma. Se ha mostrado que es precisamente ese conocimiento implícito en el diseño de las tareas el que permite generar escenarios específicos que habilitan a los estudiantes para formular problemas en relación con un contenido determinado.

7 Conclusiones y limitaciones del estudio

En esta sección se expondrán las conclusiones extraídas de las investigaciones en términos de MTSK. Así, habiendo analizado cada investigación individualmente bajo la lupa del modelo, y habiendo obtenido unos resultados comentados en la sección anterior, en esta sección de discusión de resultados comentaremos qué conocimiento especializado sobre formulación de problemas se ha evidenciado atendiendo a los subdominios del modelo MTSK.

Si bien en la sección anterior recogíamos en el análisis aspectos del conocimiento sobre contenidos geométricos o aritméticos, entre otros, en este punto comentaremos, exclusivamente, los elementos del conocimiento que guardan relación con la formulación.

Posteriormente, se realizará una reflexión sobre las limitaciones del estudio, así como posibles líneas futuras en las que pueda derivar la investigación.

7.1 ¿Qué conocimiento especializado específico sobre formulación de problemas se pone en juego en diferentes momentos de tareas de formulación?

El título del apartado se corresponde con la pregunta que conjuga las tres investigaciones en términos de MTSK. Asimismo, atendiendo a los análisis individuales que se han realizado siguiendo los dominios del modelo MTSK, presentamos a continuación los elementos del conocimiento compartidos en las tres investigaciones atendiendo a los subdominios del modelo y que se relacionan a su vez con la formulación de problemas.

7.1.1 Conocimiento de los temas (KoT):

Comenzando por el conocimiento de los temas (KoT) observamos en las tres investigaciones aspectos del conocimiento que se relacionan con este subdominio. En primer lugar, observamos en la primera investigación que se muestran indicios de conocimiento sobre los tipos de estructura que puede tener un problema multiplicativo: isomorfismo de medida, relación escalar y producto cartesiano (Ivars y Fernández, 2016).

Por otro lado, en relación con las categorías extraídas de la segunda investigación observamos que, en la planificación de una tarea de formulación de problemas, se moviliza conocimiento de los temas cuando se decide qué tipo de problema se quiere promover dada una situación de formulación determinada. Por tanto, el conocer los tipos de problema (clasificación,

ordenación, aditivos o reparto) supone que el maestro pueda generar escenarios de formulación más variados y potentes para sus alumnos.

El conocer cómo se pueden mostrar los datos de un problema en la formulación también forma parte del KoT sobre formulación de problemas. En el caso de la primera investigación, se aprecia que hay maestros que en su formulación le dan un carácter implícito al elemento negativo del enunciado. En el caso de las dos investigaciones en infantil, las características del alumnado hacen que la maestra se decante por explicitar todos los datos que se usan en el problema.

Observamos también en las tres investigaciones un conocimiento sobre los elementos que contienen los enunciados de los problemas. Si bien este conocimiento no es una evidencia, de una manera implícita atienden tanto los estudiantes para maestro formulando problemas como Rosa con sus alumnos a unos elementos concretos que el enunciado debe tener. En el caso de los estudiantes para maestro se infiere en los enunciados formulados, ya que todos ellos contienen los elementos de Malaespina (2003) y, en el caso de Rosa, se infiere también debido a que trata, para con sus alumnos, que todos estos elementos se encuentren en el enunciado del problema formulado.

En relación con el elemento de Malaespina de la incógnita, observamos en los estudiantes para maestro una tendencia a seguir una estructura donde la incógnita se sitúe en el elemento final del enunciado ($a+b=¿c?$). Esto puede suponer un conocimiento sobre dónde se sitúa este elemento.

Por otro lado, atendiendo a las características del resultado de formulación, los estudiantes para maestro no movilizan este conocimiento ya que, algunos, dan por correctas soluciones que no satisfacen a la operación propuesta en el problema. Sin embargo, en las investigaciones donde Rosa es protagonista observamos que, en algunos casos, reconduce a alumnos cuando se topan con un resultado que no se corresponde con el correcto, movilizándolo así ese conocimiento sobre características que debe tener la solución al enunciado formulado.

Por último, en lo referido al KoT, identificamos en las investigaciones conocimiento sobre características que puede tener una tarea de formulación tanto desde el punto de vista de generar un enunciado como de generar un escenario para formular.

Encontramos en las tres investigaciones diferentes contextos sobre los que se construye el problema. En el caso de los estudiantes para maestro se muestran contextos asociados a números enteros, pero se observa una tendencia hacia tres de los nueve contextos identificados. El conocer estos contextos puede, por un lado, facilitar la formulación de problemas en tareas de formulación y, por otro, facilitar el diseño de escenarios de formulación como ocurre con las dos investigaciones siguientes. En ellas, se aprecia que la maestra conoce diferentes contextos asociados a determinados contenidos matemáticos y son la base sobre la que sustenta este diseño de escenarios.

Además, el conocimiento sobre características relacionadas con el grado de libertad, carácter manipulativo de los escenarios o la familiarización que pueden tener los estudiantes con este, supone un conocimiento del tema para la maestra gestora de la actividad. El conocer estas características puede suponer que, el diseño del escenario de formulación, sea acorde a un determinado grupo de estudiantes en relación con el nivel cognitivo o edad de los alumnos.

7.1.2 Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

Identificamos en las investigaciones 2 y 3 un indicio de conocimiento sobre fases de la tarea de la formulación. El conocimiento de estas fases puede resultar interesante desde dos puntos de vista. Por un lado, puede ser interesante conocerlo desde el punto de vista del maestro como gestor de una tarea de formulación para apoyar a los alumnos y tratar de que transcurran por estas fases y, por otro lado, desde el punto de vista del formulador como un proceso de autorregulación en la tarea. Si bien este aspecto del conocimiento no se ha identificado en la investigación con los estudiantes para maestro, resultaría interesante conocer estas fases ya que habría ayudado a realizar una autorregulación del proceso de formulación del problema. Este conocimiento estaría ligado al KPM como jerarquización y planificación en procesos de formulación de problemas matemáticos.

Otro aspecto identificado como KPM en tareas de formulación sería el conocer que se pueden generar nuevos problemas matemáticos. En las investigaciones realizadas en el aula se aprecia que, la maestra, utiliza en varias ocasiones estrategias para que los alumnos continúen con el proceso de formulación. A través de la estrategia “¿y si...?” se pone de manifiesto una ampliación del problema; a través de introducir una palabra (dentro), impone una nueva condición sobre la que formular un problema matemático; y enfatizando un apartado del mural con un círculo como contextualización de un problema. Por tanto, parece conocer que para ampliar un problema es posible realizar suposiciones sobre un problema existente, cambiar o

introducir una condición nueva o generar un nuevo espacio sobre el que poder formular problemas.

También identificamos en el KPM el conocimiento sobre el tipo de formulación de problema al que invita una tarea, es decir, si se utiliza una situación estructurada, semi-estructurada o libre. Este conocimiento se infiere en las dos últimas investigaciones dada la elección que Rosa hace para sus escenarios y para su mural (situaciones semi-estructuradas).

7.1.3 Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

En lo relacionado con el conocimiento didáctico sobre formulación de problemas, solo encontramos indicios y evidencias en las dos investigaciones llevadas a cabo en el aula. Esto se debe a la naturaleza didáctica de las sesiones en contraposición con la primera investigación siendo esta una tarea para generar un enunciado de un problema.

En primer lugar, pasamos a comentar el conocimiento que lleva a la maestra a seleccionar el mural y a diseñar los escenarios de formulación. Este conocimiento se encuentra relacionado con la elección de recursos para la formulación. En este caso, la maestra basa esta elección en la cantidad de elementos matemáticos que tanto el mural como los escenarios suscita para que sus alumnos formulen problemas a través de ellos.

Por otro lado, en relación con las estrategias utilizadas, observamos que la maestra recurre, principalmente a tres diferentes: utilizar una palabra como dato que el problema debe contener (dentro); utilizar expresiones que extiendan el problema y se realicen suposiciones sobre cambios que pueden surgir en la situación (“¿Y si...?”) (Lavy y Bershadsky, 2003); y seleccionar o focalizar una parte de los datos expuestos en el mural para que los alumnos fijen la atención en unos datos determinados.

Asimismo, Rosa, al tener las fases de formulación presentes, trata de que sus alumnos transcurran por ellas para terminar formulando un problema. El intentar que los alumnos sigan una serie de pasos para formular un problema, así como las preguntas que realiza a los alumnos formaría parte de su conocimiento sobre estrategias de enseñanza.

7.1.4 Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Atendiendo al conocimiento de las características del aprendizaje del alumnado, observamos que la maestra moviliza conocimiento ligado a dificultades de aprendizaje relacionadas con la

formulación de problemas. En primer lugar, apreciamos momentos en los que la maestra permanece atenta a que su alumnado formule un problema matemático y que ayude a que ningún elemento del enunciado falte. Por ejemplo, cuando realiza cuestiones para evitar que se olvide la pregunta del problema.

También evidencia conocimiento sobre dificultades cuando, por ejemplo, un alumno enuncia un problema y lo resuelve de una manera errónea. Sabe que los estudiantes pueden formular un problema que no es acorde con la solución proporcionada y los reconduce para lograr que la solución sea coherente con el enunciado propuesto. El conocimiento sobre esta dificultad también lo observamos en la primera investigación. Sin embargo, se trataba de un conocimiento sobre el tema de los EPM en contraposición con este PCK que Rosa muestra en su aula.

Identificamos también que la maestra conoce que ante una misma situación de formulación pueden surgir varios problemas matemáticos. Esto se pone de manifiesto cuando un niño verbaliza un problema que involucra diferentes elementos matemáticos. Rosa detiene al alumno y dice que, en su formulación, hay varios problemas, por lo que propone a los demás niños diseccionar lo que ha dicho el niño anterior y formular diferentes problemas. Este conocimiento se encuentra relacionado con las formas de interacción de los niños con la formulación de problemas.

Otro aspecto del conocimiento de la maestra ligado a la interacción de los alumnos con la formulación de problemas lo encontramos cuando los alumnos representan el problema formulado en un folio. Rosa sabe que los alumnos no van a dibujar el proceso de formulación, sino que van a expresar la solución del problema y, ante esto, trata de construir con ellos el problema a través de la representación de la solución que han expresado en el dibujo.

7.1.5 Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

El subdominio de los estándares de aprendizaje de las matemáticas no solo es relevante desde el punto de vista curricular. En lo referido a la formulación de problemas encontramos aspectos interesantes, sobre todo en la elección y el diseño de actividades de formulación.

Observamos que la maestra basa la construcción del material en conocimiento que le permite realizar la mejor elección posible teniendo en cuenta la etapa en la que la actividad va a llevarse a cabo. En este caso, siguiendo las categorías extraídas de la segunda investigación, al ser educación infantil, la maestra tiene especial cautela seleccionando el grado de libertad de la

tarea, el carácter manipulativo de esta y la familiarización de sus estudiantes con el mural y los escenarios mostrados. Esta selección está basada en conocimiento, no solo curricular de la etapa, sino sobre qué nivel espera de su alumnado en la tarea y qué puede ayudar al alumnado a la consecución del objetivo de la actividad.

Si bien en la sección 7.1.1, ligada al KoT mencionamos que conocer las características que puede tener un escenario de formulación (grado libertad, manipulación, familiarización), la elección de cómo van a ser esas características en una tarea estaría ligada al PCK, en este caso, al KMLS.

De la misma manera, identificamos que la expresión de la formulación que la maestra promueve en sus estudiantes también se encuentra ligada a su conocimiento sobre estándares de aprendizaje en lo que al nivel que se espera del alumnado respecta. En ese sentido, la maestra invita a sus alumnos tanto a verbalizar un problema como a dibujarlo.

Otra elección que Rosa realiza basada en el KMLS es el tipo de formulación (semi-estructurada). Si bien el conocimiento de los diferentes tipos de formulación formaría parte del KoT, la elección de una situación semi-estructurada se encuentra relacionada con el nivel esperado del alumnado. Para Rosa, una situación de formulación libre sería demasiado amplia para alumnos de 5 años y, una situación estructurada, no le permitiría generar diferentes escenarios de formulación que puedan dar lugar a diferentes tipos de problema.

7.2 Reflexiones finales y limitaciones del estudio

7.2.1 Conclusiones respecto a los objetivos de la investigación

La investigación en el conocimiento sobre y para la aplicación de la formulación de problemas en las aulas se antoja necesaria, especialmente con respecto a un marco para la enseñanza a través de la formulación de problemas (English, 2020). El conocimiento especializado deseable puede ser un punto de partida para impulsar la falta de implementación de la formulación de problemas en el aula (Ellerton, 2013). Si bien el modelo MTSK no propone una visión normativa del conocimiento en general y, por tanto, tampoco sobre el conocimiento ligado a la formulación de problemas, en futuros avances sería interesante determinar aquellos elementos imprescindibles para la gestión de la formulación de problemas en un aula, así como para la formulación de problemas en sí.

Se pone también de manifiesto la importancia del conocimiento que habilita el desarrollo e implementación de la formulación de problemas en las aulas. En los dos primeros artículos se han evidenciado aspectos sobre el contenido (artículo 1) y aspectos sobre el conocimiento didáctico del contenido en relación con la gestión (artículo 2) relevantes en lo que al conocimiento matemático especializado respecta. En el tercer artículo, además de estos dos aspectos, se evidencia también conocimiento a tener en cuenta cuando se implementa una sesión sobre formulación de problemas.

Tal y como se ha observado en el artículo 1, la remodelación y la implementación de tareas basadas en la formulación de problemas en etapas de formación inicial de maestros es necesario. Los resultados han mostrado que los maestros no solamente tienen dificultades matemáticas para atender a un proceso de formulación en un contenido determinado, sino que tampoco tienen estrategias para poder gestionar, evaluar y atajar los problemas que les puede suscitar la formulación de un problema.

En relación con el conocimiento matemático especializado en términos de MTSK identificamos que el conocimiento para formular problemas tiene una naturaleza diferente al conocimiento para diseñar, gestionar e implementar tareas sobre formulación de problemas. Esto se evidencia en la selección de los casos de los artículos, ya que, en el primero de ellos, el papel del maestro es de formulador y no como guía de una sesión sobre formulación de problemas.

El conocimiento de la formulación de problemas como tarea matemática no es suficiente. En el artículo 2 se muestra que para poder diseñar y gestionar una sesión de formulación de problemas se necesita conocer cómo se estructura la sesión, en qué aspectos focalizar la atención y qué características puede contener una tarea o escenario de formulación para que pueda resultar fructífero de cara a los alumnos en infantil y primaria. Por tanto, en los programas de formación inicial y continua es también oportuno considerar la enseñanza de los aspectos clave que sustentan una tarea de formulación de problemas, con el objetivo de facilitar tanto el diseño como la gestión en el aula.

En línea con el párrafo anterior, además de ser necesario el conocimiento sobre la formulación de problemas, en el primer análisis sobre el MTSK movilizado identificamos aspectos del conocimiento que se relacionan con contenidos diferentes a la formulación de problemas. Por tanto, la especialización del conocimiento en formulación no solo requiere dominar los

aspectos relativos a la formulación, sino que también requiere conocer aspectos específicos de los contenidos sobre los que se formula un problema.

El dar respuesta a la cuestión “¿Qué necesitan conocer los maestros en relación con la formulación de problemas, así como la planificación y gestión de lecciones basadas en esta práctica matemática?” podrá ayudar a clarificar aspectos relevantes que los docentes deban conocer y dominar para impartir sesiones a través de esta práctica. Además, permitirá también modificar y añadir a los planes de formación estos elementos para trabajar con los maestros desde las etapas de formación inicial.

7.2.2 Limitaciones y líneas de investigación futuras

Entre las limitaciones de la investigación encontramos el estudio del PCK que se moviliza para formular en un contexto de terminado. En la primera investigación se pide formular un problema, pero no hemos podido inferir conocimiento didáctico del contenido al no tener en cuenta las características que pueden tener los alumnos. Convendría indagar en qué conocimiento didáctico se moviliza cuando se formula un problema para que un grupo de alumnos determinado lo resuelva. Asimismo, en la primera investigación también se podría indagar a través de entrevistas a los maestros sobre el conocimiento empleado durante la tarea. Esto nos permitiría conocer qué conocimiento matemático especializado han empleado de manera específica durante la tarea, así como el conocimiento que sustenta la toma de decisiones durante el proceso de formulación del problema. Creemos que para esto sería interesante hacer una aproximación similar a la de los artículos 2 y 3, a través de estudios de caso con profesores expertos, lo cual permitiría acceder a ejemplos de buenas prácticas en la formulación de problemas.

En relación con el MTSK evidenciado, podría ser objeto de investigación el estudio de las creencias en relación con la formulación de problemas. Si bien estas tres investigaciones han tenido el MK y el PCK como foco de interés, el estudio de las creencias puede suponer un elemento que sustente la toma de decisiones sobre cómo diseñar una tarea de formulación de problemas, como formular un problema, o qué características puede contener un problema en relación con las creencias.

En relación con el foco de estudio, una posible línea de investigación sería conocer acerca de la capacidad de los niños sobre formular problemas, y su relación con el conocimiento y habilidades de los profesores para diseñar y gestionar sesiones de formulación de problemas.

Parece que los alumnos desde educación infantil tienen la habilidad de poder formular problemas matemáticos (English, 1998). Sin embargo, al no ser una práctica habitual en las aulas (Ellerton, 2013), termina disipándose a medida que se avanza en las etapas educativas (Kilpatrick, 1987; Lester, 1989).

Este estudio tiene una limitación intrínseca, que a su vez entendemos como una potencialidad. El artículo 1 se centra en futuros maestros que enseñarán matemáticas en Educación Primaria, mientras que los artículos 2 y 3 están centrados en una maestra de Educación Infantil experta. Esto supone que la aproximación realizada no ha sido uniforme ni en el grado de experiencia de los maestros, ni en el nivel educativo en el que enseñan o enseñarán. De haberlo sido, es posible que la información obtenida pudiera haber estado más refinada. Sin embargo, esta aproximación heterogénea permite asumir que los resultados puedan entenderse desde cierta transversalidad, pudiendo tener cierto grado de generalización plausible (Bassey, 1999).

Una limitación adicional está vinculada al posicionamiento que hemos adoptado respecto de la formulación de problemas. En el artículo 1 se estudian los problemas que crean los estudiantes para maestro, desde donde desarrollamos el análisis mostrado en este trabajo. Sin embargo, diferentes aproximaciones a la formulación de problemas plantean que este constructo abarca tres habilidades (Carrillo et al., 2021): La creación de problemas, como se muestra en el artículo 1; la selección de problemas de libros de texto (Crespo, 2003); y la transformación de problemas ya existentes (Chico et al., en prensa). En futuros estudios pretendemos profundizar en el conocimiento que se moviliza tanto en la creación como en la selección y transformación de problemas escolares, en lo que Carrillo et al. (2021) denominan Competencia Profesional en Formulación de Problemas Escolares.

Además de las anteriores limitaciones y potencialidades, creemos que la investigación en educación matemática en general, y esta en particular, debe ser transferida a los procesos educativos en los que sea relevante. Así, este trabajo tiene potenciales implicaciones en la formación inicial y continua de maestros, que deberán ser exploradas en el futuro.

Una limitación general del estudio y que se encuentra ligada al uso de metodologías basadas en el estudio de casos, es la imposibilidad de realizar afirmaciones que sean generalizables en un sentido estadístico. La intención del estudio ha sido, desde la exploración de casos concretos, tratar de caracterizar el conocimiento especializado en relación con la formulación de problemas, pero no podemos realizar afirmaciones que abarquen todos los casos. Por tanto,

el estudio de diferentes casos con diferentes características como, por ejemplo, relacionadas con aspectos socioculturales, o con docentes de distintos niveles, puede enriquecer el conocimiento identificado en esta investigación. Asimismo, será interesante también desarrollar investigaciones centradas en la formulación de problemas vinculada a contextos o dominios matemáticos específicos, con diferentes niveles de concreción (e.g. geometría, análisis, funciones, la noción de azar).

Por otro lado, además de las dificultades implícitas de cada investigación que han sido mencionadas en cada una de ellas, podemos decir que la uniformidad en la metodología podría hacer que se extrajeran resultados adicionales a esta investigación. Así, al haber utilizado métodos mixtos, quizá una prospectiva futura de investigación sería indagar en el conocimiento especializado sobre formulación de problemas utilizando métodos más uniformes.

Para finalizar, en relación con la aplicación del modelo, hemos tenido dificultades para ubicar en los subdominios algunos aspectos del conocimiento relacionado con la formulación de problemas, sobre todo en los que a los tipos de formulación se refiere. Esta dificultad ha surgido porque, en el modelo MTSK, podemos entender la formulación de problemas como forma de producir matemáticas, lo que se vincularía al KPM. Sin embargo, al haber analizado el conocimiento sobre la formulación de problemas, parecía en algunos momentos adecuado incluir los tipos de formulación como un conocimiento sobre el tema de formulación, enmarcado en el KoT y no como KPM. Esto podría resultar interesante como línea de discusión y como contenido de investigaciones futuras.

formulación de problemas. En primer lugar, apreciamos momentos en los que la maestra permanece atenta a que su alumnado formule un problema matemático y que ayude a que ningún elemento del enunciado falte. Por ejemplo, cuando realiza cuestiones para evitar que se olvide la pregunta del problema.

También evidencia conocimiento sobre dificultades cuando, por ejemplo, un alumno enuncia un problema y lo resuelve de una manera errónea. Sabe que los estudiantes pueden formular un problema que no es acorde con la solución proporcionada y los reconduce para lograr que la solución sea coherente con el enunciado propuesto. El conocimiento sobre esta dificultad también lo observamos en la primera investigación. Sin embargo, se trataba de un conocimiento sobre el tema de los EPM en contraposición con este PCK que Rosa muestra en su aula.

Identificamos también que la maestra conoce que ante una misma situación de formulación pueden surgir varios problemas matemáticos. Esto se pone de manifiesto cuando un niño verbaliza un problema que involucra diferentes elementos matemáticos. Rosa detiene al alumno y dice que, en su formulación, hay varios problemas, por lo que propone a los demás niños diseccionar lo que ha dicho el niño anterior y formular diferentes problemas. Este conocimiento se encuentra relacionado con las formas de interacción de los niños con la formulación de problemas.

Otro aspecto del conocimiento de la maestra ligado a la interacción de los alumnos con la formulación de problemas lo encontramos cuando los alumnos representan el problema formulado en un folio. Rosa sabe que los alumnos no van a dibujar el proceso de formulación, sino que van a expresar la solución del problema y, ante esto, trata de construir con ellos el problema a través de la representación de la solución que han expresado en el dibujo.

7.1.5 Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

El subdominio de los estándares de aprendizaje de las matemáticas no solo es relevante desde el punto de vista curricular. En lo referido a la formulación de problemas encontramos aspectos interesantes, sobre todo en la elección y el diseño de actividades de formulación.

Observamos que la maestra basa la construcción del material en conocimiento que le permite realizar la mejor elección posible teniendo en cuenta la etapa en la que la actividad va a llevarse a cabo. En este caso, siguiendo las categorías extraídas de la segunda investigación, al ser educación infantil, la maestra tiene especial cautela seleccionando el grado de libertad de la

tarea, el carácter manipulativo de esta y la familiarización de sus estudiantes con el mural y los escenarios mostrados. Esta selección está basada en conocimiento, no solo curricular de la etapa, sino sobre qué nivel espera de su alumnado en la tarea y qué puede ayudar al alumnado a la consecución del objetivo de la actividad.

Si bien en la sección 7.1.1, ligada al KoT mencionamos que conocer las características que puede tener un escenario de formulación (grado libertad, manipulación, familiarización), la elección de cómo van a ser esas características en una tarea estaría ligada al PCK, en este caso, al KMLS.

De la misma manera, identificamos que la expresión de la formulación que la maestra promueve en sus estudiantes también se encuentra ligada a su conocimiento sobre estándares de aprendizaje en lo que al nivel que se espera del alumnado respecta. En ese sentido, la maestra invita a sus alumnos tanto a verbalizar un problema como a dibujarlo.

Otra elección que Rosa realiza basada en el KMLS es el tipo de formulación (semi-estructurada). Si bien el conocimiento de los diferentes tipos de formulación formaría parte del KoT, la elección de una situación semi-estructurada se encuentra relacionada con el nivel esperado del alumnado. Para Rosa, una situación de formulación libre sería demasiado amplia para alumnos de 5 años y, una situación estructurada, no le permitiría generar diferentes escenarios de formulación que puedan dar lugar a diferentes tipos de problema.

7.2 Reflexiones finales y limitaciones del estudio

7.2.1 Conclusiones respecto a los objetivos de la investigación

La investigación en el conocimiento sobre y para la aplicación de la formulación de problemas en las aulas se antoja necesaria, especialmente con respecto a un marco para la enseñanza a través de la formulación de problemas (English, 2020). El conocimiento especializado deseable puede ser un punto de partida para impulsar la falta de implementación de la formulación de problemas en el aula (Ellerton, 2013). Si bien el modelo MTSK no propone una visión normativa del conocimiento en general y, por tanto, tampoco sobre el conocimiento ligado a la formulación de problemas, en futuros avances sería interesante determinar aquellos elementos imprescindibles para la gestión de la formulación de problemas en un aula, así como para la formulación de problemas en sí.

Se pone también de manifiesto la importancia del conocimiento que habilita el desarrollo e implementación de la formulación de problemas en las aulas. En los dos primeros artículos se han evidenciado aspectos sobre el contenido (artículo 1) y aspectos sobre el conocimiento didáctico del contenido en relación con la gestión (artículo 2) relevantes en lo que al conocimiento matemático especializado respecta. En el tercer artículo, además de estos dos aspectos, se evidencia también conocimiento a tener en cuenta cuando se implementa una sesión sobre formulación de problemas.

Tal y como se ha observado en el artículo 1, la remodelación y la implementación de tareas basadas en la formulación de problemas en etapas de formación inicial de maestros es necesario. Los resultados han mostrado que los maestros no solamente tienen dificultades matemáticas para atender a un proceso de formulación en un contenido determinado, sino que tampoco tienen estrategias para poder gestionar, evaluar y atajar los problemas que les puede suscitar la formulación de un problema.

En relación con el conocimiento matemático especializado en términos de MTSK identificamos que el conocimiento para formular problemas tiene una naturaleza diferente al conocimiento para diseñar, gestionar e implementar tareas sobre formulación de problemas. Esto se evidencia en la selección de los casos de los artículos, ya que, en el primero de ellos, el papel del maestro es de formulador y no como guía de una sesión sobre formulación de problemas.

El conocimiento de la formulación de problemas como tarea matemática no es suficiente. En el artículo 2 se muestra que para poder diseñar y gestionar una sesión de formulación de problemas se necesita conocer cómo se estructura la sesión, en qué aspectos focalizar la atención y qué características puede contener una tarea o escenario de formulación para que pueda resultar fructífero de cara a los alumnos en infantil y primaria. Por tanto, en los programas de formación inicial y continua es también oportuno considerar la enseñanza de los aspectos clave que sustentan una tarea de formulación de problemas, con el objetivo de facilitar tanto el diseño como la gestión en el aula.

En línea con el párrafo anterior, además de ser necesario el conocimiento sobre la formulación de problemas, en el primer análisis sobre el MTSK movilizado identificamos aspectos del conocimiento que se relacionan con contenidos diferentes a la formulación de problemas. Por tanto, la especialización del conocimiento en formulación no solo requiere dominar los

aspectos relativos a la formulación, sino que también requiere conocer aspectos específicos de los contenidos sobre los que se formula un problema.

El dar respuesta a la cuestión “¿Qué necesitan conocer los maestros en relación con la formulación de problemas, así como la planificación y gestión de lecciones basadas en esta práctica matemática?” podrá ayudar a clarificar aspectos relevantes que los docentes deban conocer y dominar para impartir sesiones a través de esta práctica. Además, permitirá también modificar y añadir a los planes de formación estos elementos para trabajar con los maestros desde las etapas de formación inicial.

7.2.2 Limitaciones y líneas de investigación futuras

Entre las limitaciones de la investigación encontramos el estudio del PCK que se moviliza para formular en un contexto de terminado. En la primera investigación se pide formular un problema, pero no hemos podido inferir conocimiento didáctico del contenido al no tener en cuenta las características que pueden tener los alumnos. Convendría indagar en qué conocimiento didáctico se moviliza cuando se formula un problema para que un grupo de alumnos determinado lo resuelva. Asimismo, en la primera investigación también se podría indagar a través de entrevistas a los maestros sobre el conocimiento empleado durante la tarea. Esto nos permitiría conocer qué conocimiento matemático especializado han empleado de manera específica durante la tarea, así como el conocimiento que sustenta la toma de decisiones durante el proceso de formulación del problema. Creemos que para esto sería interesante hacer una aproximación similar a la de los artículos 2 y 3, a través de estudios de caso con profesores expertos, lo cual permitiría acceder a ejemplos de buenas prácticas en la formulación de problemas.

En relación con el MTSK evidenciado, podría ser objeto de investigación el estudio de las creencias en relación con la formulación de problemas. Si bien estas tres investigaciones han tenido el MK y el PCK como foco de interés, el estudio de las creencias puede suponer un elemento que sustente la toma de decisiones sobre cómo diseñar una tarea de formulación de problemas, como formular un problema, o qué características puede contener un problema en relación con las creencias.

En relación con el foco de estudio, una posible línea de investigación sería conocer acerca de la capacidad de los niños sobre formular problemas, y su relación con el conocimiento y habilidades de los profesores para diseñar y gestionar sesiones de formulación de problemas.

Parece que los alumnos desde educación infantil tienen la habilidad de poder formular problemas matemáticos (English, 1998). Sin embargo, al no ser una práctica habitual en las aulas (Ellerton, 2013), termina disipándose a medida que se avanza en las etapas educativas (Kilpatrick, 1987; Lester, 1989).

Este estudio tiene una limitación intrínseca, que a su vez entendemos como una potencialidad. El artículo 1 se centra en futuros maestros que enseñarán matemáticas en Educación Primaria, mientras que los artículos 2 y 3 están centrados en una maestra de Educación Infantil experta. Esto supone que la aproximación realizada no ha sido uniforme ni en el grado de experiencia de los maestros, ni en el nivel educativo en el que enseñan o enseñarán. De haberlo sido, es posible que la información obtenida pudiera haber estado más refinada. Sin embargo, esta aproximación heterogénea permite asumir que los resultados puedan entenderse desde cierta transversalidad, pudiendo tener cierto grado de generalización plausible (Bassey, 1999).

Una limitación adicional está vinculada al posicionamiento que hemos adoptado respecto de la formulación de problemas. En el artículo 1 se estudian los problemas que crean los estudiantes para maestro, desde donde desarrollamos el análisis mostrado en este trabajo. Sin embargo, diferentes aproximaciones a la formulación de problemas plantean que este constructo abarca tres habilidades (Carrillo et al., 2021): La creación de problemas, como se muestra en el artículo 1; la selección de problemas de libros de texto (Crespo, 2003); y la transformación de problemas ya existentes (Chico et al., en prensa). En futuros estudios pretendemos profundizar en el conocimiento que se moviliza tanto en la creación como en la selección y transformación de problemas escolares, en lo que Carrillo et al. (2021) denominan Competencia Profesional en Formulación de Problemas Escolares.

Además de las anteriores limitaciones y potencialidades, creemos que la investigación en educación matemática en general, y esta en particular, debe ser transferida a los procesos educativos en los que sea relevante. Así, este trabajo tiene potenciales implicaciones en la formación inicial y continua de maestros, que deberán ser exploradas en el futuro.

Una limitación general del estudio y que se encuentra ligada al uso de metodologías basadas en el estudio de casos, es la imposibilidad de realizar afirmaciones que sean generalizables en un sentido estadístico. La intención del estudio ha sido, desde la exploración de casos concretos, tratar de caracterizar el conocimiento especializado en relación con la formulación de problemas, pero no podemos realizar afirmaciones que abarquen todos los casos. Por tanto,

el estudio de diferentes casos con diferentes características como, por ejemplo, relacionadas con aspectos socioculturales, o con docentes de distintos niveles, puede enriquecer el conocimiento identificado en esta investigación. Asimismo, será interesante también desarrollar investigaciones centradas en la formulación de problemas vinculada a contextos o dominios matemáticos específicos, con diferentes niveles de concreción (e.g. geometría, análisis, funciones, la noción de azar).

Por otro lado, además de las dificultades implícitas de cada investigación que han sido mencionadas en cada una de ellas, podemos decir que la uniformidad en la metodología podría hacer que se extrajeran resultados adicionales a esta investigación. Así, al haber utilizado métodos mixtos, quizá una prospectiva futura de investigación sería indagar en el conocimiento especializado sobre formulación de problemas utilizando métodos más uniformes.

Para finalizar, en relación con la aplicación del modelo, hemos tenido dificultades para ubicar en los subdominios algunos aspectos del conocimiento relacionado con la formulación de problemas, sobre todo en los que a los tipos de formulación se refiere. Esta dificultad ha surgido porque, en el modelo MTSK, podemos entender la formulación de problemas como forma de producir matemáticas, lo que se vincularía al KPM. Sin embargo, al haber analizado el conocimiento sobre la formulación de problemas, parecía en algunos momentos adecuado incluir los tipos de formulación como un conocimiento sobre el tema de formulación, enmarcado en el KoT y no como KPM. Esto podría resultar interesante como línea de discusión y como contenido de investigaciones futuras.

8 Informe con el factor de impacto de las publicaciones presentadas

En esta sección justificamos el factor de impacto de las revistas en las que han sido publicadas las investigaciones. Tal y como se expone en el artículo 35 del reglamento del programa de doctorado de la Universidad de Huelva, esta tesis se compone de un conjunto de aportaciones científicas, en este caso 3, sobre un mismo campo de conocimiento científico. En este caso, el nexo común de las investigaciones es, como se ha mencionado anteriormente, la formulación de problemas y su conocimiento por parte del profesorado de las primeras etapas de la educación.

Las publicaciones deben estar, según la normativa de la Universidad de Huelva, indexadas en alguna de las bases de datos con mayor impacto (Science Citation Index, Social Science Citation Index, Art & Humanities Citation Index) o que se considere para la Comisión Nacional Evaluadora de la Actividad Investigadora (CNEAI) como de valoración precedente para cada campo de investigación en particular. Mostramos a continuación los distintos indicios de calidad vinculados a cada una de las publicaciones y, en particular, los datos de indexación correspondientes al año de publicación de cada artículo.

8.1 Educação e pesquisa

Educação e Pesquisa es una revista de la Facultad de Educación de la Universidad de São Paulo que se edita desde el año 1975. Los artículos que publican son de carácter teórico, empírico o de revisiones bibliográficas y el contenido de las publicaciones se relaciona con aspectos educativos y aportes relacionados con el desarrollo del conocimiento en educación.

Título	Educação e Pesquisa
Referencia	Montes, M. A., Pascual, M. I., Carrillo, J. y Martín-Díaz, J. P. (2022). Caracterización de problemas multiplicativos de números enteros propuestos por futuros maestros. <i>Educação e Pesquisa</i>, 48. https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248238551
ISSN	Versión impresa ISSN: 1517-9702 Versión on-line ISSN: 1678-4634
País	Brasil
URL	http://www.educacaoepesquisa.fe.usp.br
Contenidos	Educación en general

Indexada en	BBE, Clase, DOAJ, EDUBASE, ERA, IRESIE, LATINDEX, PSICODOC, SIBI, SCIELO, SCIMAGO, SCOPUS (Q3, educación. Factor de impacto: 0,237)
-------------	--

8.2 Sustainability

Sustainability (ISSN 2071-1050) es una revista internacional con carácter multidisciplinar. Es de acceso abierto y publica artículos de investigación sin restricciones de extensión. Su objetivo es invitar a los científicos a publicar sus investigaciones experimentales y teóricas relacionadas con las ciencias naturales, las ciencias sociales y las humanidades. Se deben proporcionar todos los detalles experimentales y metodológicos para que los resultados puedan ser reproducidos.

Título	Sustainability
Referencia	Martín-Díaz, J.P., Montes, M., Codes, M. y Carrillo, J. (2020). Characterisers of Teaching in a Mathematics Problem Posing Lesson in Preschool Education. <i>Sustainability</i>, 12(15), 6148. https://doi.org/10.3390/su12156148
ISSN	ISSN: 2071-1050
País	Suiza
URL	https://www.mdpi.com/journal/sustainability
Contenidos	Revista multidisciplinar
Indexada en	GEOBASE, GeoRef, AGRIS, RePEc, CAPus / SciFinder, Scopus (Q2. Factor de impacto: 0,664), SCIE and SSCI (Web of Science) (JCR Q2. Factor de impacto: 3.251).

8.3 Uniciencia

Uniciencia es una revista de la Facultad de Ciencias Naturales y Aplicadas de la Universidad Nacional de Costa Rica (Editorial EUNA). Su objetivo es compartir resultados de investigaciones de alta calidad a la comunidad nacional e internacional. El público objetivo involucra a investigadores, académicos y especialistas del sector público y privado en las áreas de la revista. Cuenta con 5 núcleos principales de temáticas y, concretamente en el núcleo 5, se encuentra la educación matemática como tema de interés.

Título	Uniciencia
Referencia	Martín-Díaz, J. P. y Montes, M. A. (en prensa). Conocimiento especializado para la enseñanza a través de la formulación de problemas en educación infantil. <i>Uniciencia</i>
ISSN	2215-3470
País	Costa Rica
URL	https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/index
Contenidos	Revista multidisciplinar
Indexada en	REDALYC, LATINDEX, DOAJ, ESCI, Scielo Citation Index (Web of Science), Scopus (Q3, ciencias sociales. Factor de impacto: 0.17)

9 Bibliografía

- Akay, H. y Boz, N. (2009). Prospective teachers' views about problem-posing activities. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 1, 1192-1198. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2009.01.215>
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barlow, A. y Cates, J. (2006). The Impact of Problem Posing on Elementary Teachers' Beliefs About Mathematics and Mathematics Teaching. *School Science and Mathematics*, 106, 64-73. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18136.x>
- Bassey, M. (1999). *Case Study Research in Educational Settings*. Open University Press.
- Bernardo, A. B. I. (2001). Analogical problem construction as an indicator of understanding in mathematics word problem solving. En F. Salili, C.-Y. Chiu y Y.Y. Hong (Eds.), *Multiple competencies and self-regulated learning: Implications for multicultural education* (pp. 67-81). Information Age Publishing.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to the other subjects--state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.
- Brookes, B. (1976). Philosophy and action in education: when is a problem? *ATM Supplement*, 19, 11-13.
- Brown, S. (1993). How to create problems. En S. I. Brown y M. I. Walter (Eds.), *Problem posing: Reflections and applications* (pp. 174-177). Lawrence Erlbaum Associates.
- Brown, S. y Walter, M. (1993). *Problem posing*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Brown, S. y Walter, M. (2005). *The art of problem posing (3rd edition)*. Erlbaum
- Cai, J. y Cifarelli, V. V. (2005). Exploring mathematical exploration: How two college students formulated and solved their own mathematical problems. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 27(3), 43-72.
- Cai, J. y Hwang, S. (2019). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem posing research in mathematics: Some answered and unanswered questions. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Problem posing: From research to effective practice*. Springer.
- Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101391.
- Cai, J. y Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning?* NCTM.

- Carrillo, J., Montes, M. y Contreras, L.C. (2021). La competencia profesional en formulación de problemas escolares. En GIDIMAT-UA (Ed.), *Ideas para la Educación Matemática* (pp. 162-183). Compobell.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
- Cazden, C. B. (1986). Classroom discourse. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 432–463). Macmillan.
- Calvo, C., Carrillo A., de la Fuente, A., de León, M., González, M. J., Gordaliza, A., Guevara, I., Lázaro, C. y Monzó, O. (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. CEMat.
- Chapman, O. (2006). Classroom Practices for Context of Mathematics Word Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 211-230. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1>
- Chen, L., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2015). Enhancing the development of Chinese fifth-graders' problem-posing and problem-solving abilities, beliefs, and attitudes: A design experiment. En M. Singer, N. F. Ellerton, J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 309– 329). Springer.
- Chico, J., Montes, M. y Badillo, E. (en prensa). Teachers' professional competence to pose school problems: the case of transformation of existing problems. *Comunicación presentada al XII Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática*. ERME.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*. 37. 149-158. [10.1007/s11858-005-0004-6](https://doi.org/10.1007/s11858-005-0004-6).
- Cifarelli, V. V. y Sevim, V. (2015). Problem posing as reformulation and sense-making within problem solving. En M. Singer, N. F. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 177–194). Springer.
- Codes, M., Martín-Díaz, J.P. y Pérez, R. (2020). Formulación de problemas en un aula de Educación Infantil: un reto desde la resolución de problemas. *APeDuC Journal*, 01(1), 87-99.
- Collins, A. (1986). *Different goals of inquiry teaching*. BBN Laboratories Incorporated.
- Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52. 243-270. <https://doi.org/10.1023/A:1024364304664>.
- Crespo, S. y Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11. 395-415. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9081-0>.

- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Ellerton, N.F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies Mathematics* 83, 87–101. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9449-z>
- English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal context. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17 (1986), 261–271.
- English, L. D. (2003). Problem posing in the elementary curriculum. En F. Lester, y R. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving*. National Council of Teachers of Mathematics.
- English, L.D. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: commentary. *International Journal of Educational Research*, 102, 101451. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.06.014>.
- English, L. D. y Watson, J. M. (2015). Statistical literacy in the elementary school: Opportunities for problem posing. En F. Singer, N. Ellerton, y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing*. Springer.
- Flores, E., Escudero D. I. Aguilar A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275 - 282). SEIEM.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel.
- Gade, S. y Blomqvist, C. (2015). From Problem Posing to Posing Problems via Explicit Mediation in Grades 4 and 5. En F. Singer, N. Ellerton, y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_9
- Gergen, K. J. (1992). The social constructionist movement in modern psychology. En R. B. Miller (Ed.), *The restoration of dialogue: Readings in the philosophy of clinical psychology* (pp. 556–569). American Psychological Association. <https://doi.org/10.1037/10112-044>
- Getzels, J. W. (1979). Problem finding: A theoretical note. *Cognitive Science*, 3(2), 167–171. https://doi.org/10.1207/s15516709cog0302_4
- Gonzales, N.A. (1998). A Blueprint for Problem Posing. *School Science and Mathematics*, 98, 448-456.
- Grbich, C. (2013). *Análisis de datos cualitativos: una introducción*. Salvia.
- Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Dover Publications.

- Haghverdi, M. (2015). A study of the causes of the difficulties with problem-posing in primary schools classrooms: Considering the teachers' viewpoint. *International Conference of The Mathematics Education for the Future Project*.
- Hošpesová, A. y Tichá, M. (2015). Problem Posing in Primary School Teacher Training. En F. Singer, N. Ellerton, y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_21
- Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación Matemática*, 28(6), 9-38.
- Jamieson-Proctor, R. y Byrne, C. (2008). Primary teachers' beliefs about the use of mathematics textbooks. M. Goos, R. Brown y K. Makar (Eds.), *Navigating currents and charting directions (Proceedings of the 31st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (pp. 1 - 8). MERGA.
- Kantowski, M. G. (1981). Problem solving. En E. Fennema (Ed.), *Mathematics education research: Implications for the 80's* (pp. 111-126). National Council of Teachers of Mathematics.
- Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 1-15). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. Shoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp 123-148). Lawrence Erlbaum Associates.
- Klaassen, K. y Doorman, M. (2015). Problem Posing as Providing Students with Content-Specific Motives. En F. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_10
- Klinshtern, M., Koichu, B. y Berman, A. (2015). What Do High School Teachers Mean by Saying "I Pose My Own Problems"? En Singer, F., F. Ellerton, N. y Cai, J. (Eds.), *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education* (pp. 449-467). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_22
- Koichu, B., Harel, G. y Manaster, A. (2012). Ways of thinking associated with mathematics teachers' problem posing in the context of division of fractions. *Instructional Sciences*, 41, 681-698. <https://doi.org/10.1007/s11251-012-9254-1>
- Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R. y Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 149-161. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.002>
- Krippendorff, K. (2013). *Content Analysis: an introduction to its methodology*. Sage.

- Kwon, H. y Capraro, M. (2021). Nurturing Problem Posing in Young Children: Using Multiple Representation within Students' Real-World Interest. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16. <https://doi.org/10.29333/iejme/11066>
- Latorre, A., Rincón, D. y Arnal, J. (1997). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. GR92.
- Lavy, I. y Bershadsky, I. (2003). Problem posing via "what if not?" strategy in solid geometry - A case study. *The Journal of Mathematical Behavior* 22, 369-387. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.007>.
- Lee, Y., Capraro, R. y Capraro, M. (2018). Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13. <https://doi.org/10.12973/iejme/2698>
- Leikin, R. y Grossman, D. (2013). Teachers modify geometry problems: from proof to investigation. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 515-531 <https://doi.org/10.1007/s10649-012-94604>
- Lester, F. (1989). Reflections about mathematical problem-solving research. En R. I. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 115-124). Erlbaum.
- Lester, F. K. (1980). Research in mathematical problem solving. En R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 286-323). NCTM.
- Leung, S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 103-116 <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9436-4>
- Lin, K.M. y Leng, L.W. (2008). Using problem-posing as an assessment tool. *Paper presented at the 10th Asia - Pacific Conference on Giftedness*.
- Lincoln, Y.S. y Guba, E. (1985). *Naturalistic Inquiry*. SAGE.
- Malaspina, U. (2013). Variaciones de un problema. El caso de un problema de R. Douady. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 34, 141- 49.
- Mamona-Downs, J. y Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24, 385-401. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.011>
- Mervis, D. (1978). Problem solving and the child. *School Science and Mathematics*, 78, 270-272.
- Mestre, P. J. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Applied Developmental Psychology*, 23, 9-50
- Meyerson, L. N. (1993). Mathematical mistakes. En S. I. Brown y M. I. Walter (Eds.), *Problem posing: Reflections and applications* (pp. 153-158). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa

- y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). SEIEM.
- Moses, B., Bjork, E. y Goldenberg, E. R. (1990). Beyond problem solving: problem posing. En T. J. Cooney y C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s* (pp. 83-91). National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2020). *Catalyzing Change in Middle School Mathematics: Initiating Critical Conversations*. NCTM.
- National Research Council. (2005). *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom*. National Academies Press.
- Nicolaou, A. A. y Philippou, G. N. (2007). Efficacy beliefs, problem posing, and mathematics achievement. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the V Congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 308- 317). CERME.
- Olson, J.C. y Knott, L. (2013). When a problem is more than a teacher's question. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 27–36. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9444-4>
- Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning (Volume II): Patterns of Plausible Inference*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1985). *How to solve it* (2nd ed.). Princeton University Press.
- Priest, D. J. (2009). *A problem posing intervention in the development of problem solving competence of underachieving middle year students*. Queensland University of Technology.
- Quintero, E. (2004). *Problem posing with multicultural children's literature*. Peter Lang.
- Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.
- Reyes, A. D., Peña, J. L. S. y Perdomo, Y. C. (2016). La formulación de problemas en la enseñanza de la matemática en la educación secundaria básica. *Boletín Redipe*, 5(2).

- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 153-172.
- Schwab, J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury, y N. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum and liberal education: Selected essays* (pp. 229-272). University of Chicago Press.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of mathematics*, 14, 19-28.
- Silver, E. A. y Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539.
- Silver, E. A. y Mamona, J. (1989) Problem posing by middle school teachers. En C.A. Maher, G.A. Goldin, y R.B. Davis (Eds.), *Proceedings of the eleventh annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 263-269). PME-NA.
- Simon, M.A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 2.
- Singer, F. M. y Moscovici, H. (2008). Teaching and learning cycles in a constructivist approach to instruction. *Teaching and Teacher Education*, 24(6), 1613-1634.
- Stein, M. K. y Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2(1), 50-80.
- Stein, M., Engle, R., Smith, M. y Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.
- Stoyanova, E. y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. En P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Tichá, M. y Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 133 - 143. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9455-1>.
- Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (5th ed.). Pearson Education.
- Van Harpen, X. y Presmeg, N. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 117-132 <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9456-0>.

- Van Harpen, X. y Presmeg, N. (2015). An Investigation of High School Students' Mathematical Problem Posing in the United States and China. En F. Singer, N. Ellerton, N. y J. Cai, (Eds.), *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_14
- Xu, B., Cai, J., Liu, Q. y Hwang, S. (2019). Teachers' predictions of students' mathematical thinking related to problem posing. *International Journal of Educational Research*, 102. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.005>.