Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria

Memoria para optar al grado de doctora
presentada por:

Dinazar Isabel Escudero Ávila

Fecha de lectura: 22 de septiembre de 2015

Bajo la dirección del doctor:

José Carrillo Yáñez

Huelva, 2015

Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria

Tesis Doctoral

Dinazar Isabel Escudero Avila

Dirigida por

José Carrillo Yáñez

Huelva, 2015

Este trabajo ha sido realizado gracias al
apoyo financiero otorgado por el
Consejo Nacional de Ciencia y
Tecnología - México (CONACyT), de
octubre de 2011 a septiembre de 2015.

N° de CVU: 219929

El apoyo otorgado por la Secretaría de Educación Pública de México a través del programa de becas complemento para el ciclo 2013-2014, ha sido también indispensable para la realización de este trabajo y la asistencia a congresos que han contribuido a mi formación como investigadora en este periodo.

Este trabajo de tesis se ha desarrollado en el Centro de Investigación en Didácticas Específicas y Formación en el Aula (CIDIESIA), en colaboración con el Grupo de Investigación "Formación inicial y desarrollo profesional del Profesorado (DESYM)" con código HUM-168 del Plan Andaluz de Investigación.

La realización y mejoramiento constante de este trabajo ha tenido como marco los proyectos de investigación "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España (2012-2013) y "Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas" (EDU2013-44047P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. (2014-2017).

Mi más sincero agradecimiento:

A todos los miembros del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva, por ser un espacio abierto a la construcción de nuevas y muchas veces alocadas ideas, que fueron debatidas, derrumbadas y construidas una y otra vez para terminar en esto que ahora es una tesis doctoral. Este es el espacio en el cual se construyó realmente este trabajo y es también el espacio en el cual he logrado un desarrollo profesional intenso y constante, al lado de colegas pero sobre todo de amigos que estuvieron siempre dispuestos a aportar la crítica más constructiva. Gracias por enseñarme lo que significa trabajar en grupo y no sólo pertenecer a uno.

Al Programa de Matemática Educativa (PROME) del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) del Instituto Politécnico Nacional, por permitirme realizar una estancia de investigación de Octubre 2012 a Enero 2013. En especial gracias al Doctor Mario Sánchez Aguilar que me brindó la oportunidad de explorar el campo de la formación virtual de profesores desde su perspectiva de experto y por darme el apoyo necesario para realizar la toma de datos para esta investigación. Esta estancia me ha dado, y continúa dándome, satisfacciones con respecto a los avances que han derivado de ella en mi formación profesional y también en el ámbito personal.

A las revisoras externas Dra. Rute Monteiro y Dra. Rosa María Farfán por su tiempo y disposición a revisar mi trabajo, así como sus comentarios que han servido para mejorar este documento.

A los miembros del tribunal que han aceptado leer y debatir esta tesis con la intensión de evaluar el trabajo realizado en estos cuatro años y seguramente realizar valiosas aportaciones que puedan servir para la continuación del mismo.

Al Dr. José Carrillo Yáñez que ha resultado ser más que un asesor un coautor de este trabajo. Su apoyo y sus consejos resultaron siempre inspiradores y confortables. Su calidad como investigador y como profesor (que es enorme), solo es superada por su calidad humana (que es gigantesca). Gracias por todas tus atenciones, definitivamente he tenido la maravillosa oportunidad de aprender del mejor, de un excelente investigador, un gran guía de turistas y un anfitrión maravilloso. Además de enseñarme mucho sobre la didáctica de la matemática y sobre la formación de profesores, me has enseñado a apreciar los manjares de esta tierra, el buen vino, el queso, el jamón, la carne de la sierra, las peras..., y sus tradiciones y costumbres, la semana santa, la playa en verano, las casas blancas con tejas rojas, los monumentos,…

A mis amigos y compañeros, Eric, Miguel Ángel, Álvaro, Kike, y Diana, que han sido cómplices, testigos y apoyos constantes en la realización de este trabajo. Sobre todo gracias por convertirse en mi familia, del otro lado del mundo. Gracias por compartir conmigo sus tardes de verano en la playa, sus días de feria en Málaga, sus noches de paseo por Sevilla, sus atardeceres en Córdoba y sus noches de marcha por Huelva. Por enseñarme andaluz y aprender mi chilango.

A los que han sido compañeros a distancia y que físicamente han estado intermitentes, pero que han dejado huella en este trabajo y en mí: José Luis, Nielka, Emma, Juan Diego, Javi y todos los que me faltan. A todos gracias por hacer de este un hogar y de cada momento un recuerdo maravilloso.

A mis otros amigos y profesores Nuria, Cinta, Luis Carlos, Miguel Ribeiro, Rute y Pablo, que me han ofrecido su experiencia, su tiempo y sus atenciones, siempre con comentarios precisos, ya sea para mejorar mi trabajo o para a aprender a ser mejor persona, gracias a todos.

Para todos los compañeros del departamento, que estuvieron siempre dispuestos a brindarnos una amplia sonrisa y una mano amiga, sobre todo a la hora del café.

A todos aquellos que fuera de la universidad me ofrecieron su amistad, su casa, su comida y hasta a su familia y amigos, ustedes han hecho que me enamore de su tierra, de la feria de Sevilla, de las colombinas, de la romería del Rocío, de las sevillanas, los chiringuitos, del salmorejo, de las aceitunas, las cervezas, los tintos de verano y los rebujitos que saben mejor cuando se disfrutan con amigos en una terraza. Son ustedes quienes hicieron de estos cuatro años un suspiro. Los llevo conmigo en fotos y en recuerdos, pero ya estoy deseando volver para buscar de nuevo su compañía, sus palabras y sus sonrisas.

Gracias a todos y todas por todo. Llegue aquí con muchos miedos e incertidumbres, con mucho que aprender y mucho por hacer, deseando que el tiempo volara y me devolviera pronto a casa y extrañamente, ahora me voy igual con la misma nostalgia con la que me fui de México, con la misma incertidumbre del futuro y deseando que el tiempo vuele y me devuelva pronto a Huelva, que es también mi hogar y el lugar donde se queda una parte de mí.

Para mi mejor amigo, mi soporte constante, mi principal compañero de trabajo, y mi compañero de vida, que ha requerido de toda su paciencia e inteligencia para ayudarme a avanzar en los momentos en los que el polvo del camino era más denso, que ha visto siempre el lado bueno de las cosas y ha aprendido a ser mi colega además de ser mi amor.

A mi hija, que no ha requerido asomarse al mundo para ser la mejor inspiración para cerrar esta etapa de mi vida con broche de oro. Espero que este libro te resulte inspirador aunque te sea incomprensible, porque en él he puesto el mayor de los esfuerzos, construyéndolo a base de muchos sacrificios pero también con grandes satisfacciones, como todo lo bueno que uno hace en esta vida.

A mi familia, mi madre, mi padre, mi hermano, mis suegros, mis otros tres hermanos y mi sobrina, que tuvieron que aprender a acortar las distancias físicas y superar las barreras tecnológicas para acompañarme siempre y dejar que los acompañara paso a paso aunque fuera desde lejos, y que hicieron su mejor esfuerzo para sortear y ayudarme a sortear todos los obstáculos que aparecieron por el camino. Si de algo ha servido este alejamiento, ha sido para ser consciente de la falta que me hacen y lo mucho que valoro su existencia, sus consejos, sus palabras y sobre todo sus besos y abrazos. Paradójicamente, al sentirlos tan lejos es cuando más cerca los he tenido.

Índice

Capítulo VI: Conclusiones ……………………………………………………………... 293

Capítulo I. Introducción

I.1 Motivación y contextualización de la investigación

El grupo de investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva y el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM), en el cual se debaten las principales aportaciones de este grupo, son el marco en el cual se desarrolla este trabajo doctoral. Esta tesis es una pequeña muestra de los resultados surgidos del trabajo colaborativo del grupo, y representa un esfuerzo de recopilación y sistematización de la investigación que ha realizado a lo largo de su trayectoria de investigación y de un profundo estudio en el campo de conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas.

Esta investigación es el resultado de la coincidencia de un interés personal como investigadora y un interés colectivo como grupo de investigación de comprender la naturaleza del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, con miras hacia la sistematización de la investigación para generar futuras propuestas de formación basadas en evidencias sustentadas en la investigación.

El momento en el cual se comienza a elaborar esta investigación ha sido propicio, en tanto que la coincidencia de intereses, motivaciones y dedicación al trabajo por parte de doctorandos y profesores de la Universidad de Huelva, así como los demás miembros del grupo de investigación nos permitió comenzar en 2011 un trabajo de crítica y reflexión acerca de los modelos más utilizados para indagar sobre la naturaleza del conocimiento profesional del profesor y sobre su eficacia como herramientas para la investigación, puesto que, como comenta Schoenfeld (1999), aún existen varias preguntas sin resolver al respecto.

> "The idea of the *pedagogical content knowledge* has been elaborated in numerous studies […] Such studies indicate ways in which teachers' knowledge shapes what the teachers are to do in the classroom at times constraining their options, at times providing the support-structure for a wide range of activities. But there are many open questions as one considers the nature of teachers' knowledge. What forms does such knowledge take? How is it organized? How is it accesses? A comprehensive model of teaching needs to address such issues". (p. 247)

El punto de partida para estas reflexiones fue el modelo de Ball, Thames y Phelps (2008), el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), el cual serviría como marco para el análisis de las tesis doctorales que se realizaban en ese momento en el grupo. Las reflexiones realizadas sobre el funcionamiento del MKT y otros trabajos que han servido de sustento para este modelo (como la propuesta de Shulman (1985) y el trabajo de Ma (1999) entre otros), y sobre su potencialidad como instrumentos de análisis del conocimiento del profesor de matemáticas, permiten al grupo observar dificultades tanto en la definición misma de algunos de sus subdominios, como en la delimitación que existe entre ellos. Surge entonces la necesidad de reorientar los esfuerzos del grupo hacia la búsqueda de una propuesta de refinamiento del modelo que permita hacer un análisis más puntual de los distintos elementos que conforman este conocimiento tan específico y que ofrezcan al investigador un panorama más nítido con respecto a los conocimientos que tiene el profesor y la forma en la que estos se organizan y relacionan para permitirle desarrollar su labor docente.

Sin embargo, el trabajo de reflexión y discusión de estas investigaciones muestra que un refinamiento no es suficiente, el análisis que se hace sobre la especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas hace que surja la idea de proponer un modelo propio, que pueda superar las dificultades reportadas en modelos anteriores en cuanto a su uso para la investigación empírica, tomando en consideración los elementos más potentes de cada uno, así como los que persisten como elementos básicos en ellos. Desde entonces el principal interés de los miembros del grupo se ha centrado en el desarrollo de un modelo que sirva para analizar las características específicas que tiene el conocimiento matemático y didáctico matemático que utiliza el profesor, el cual hemos llamado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematics Tacher's Specialised Knowledge* - MTSK).

Este trabajo constituye una muestra de los avances en la construcción colectiva que ha hecho el grupo de investigación sobre el MTSK, mostrada a través de la construcción del marco teórico en el que se presenta y explica el modelo, y una aportación en cuanto a la caracterización de los subdominios que lo conforman, en especial con respecto al dominio de conocimiento didáctico del contenido, basada en la recopilación de datos empíricos.

Una consideración importante dentro de la conformación del modelo es la idea de docencia como una profesión con demandas y actividades particulares, las cuales requieren de una formación sólida y especializada, que permita desarrollar en el profesorado una capacidad reflexiva sobre los procesos que llevará a cabo a lo largo de su desarrollo profesional y sobre los conocimientos que requiere para su labor.

Tomando como base la idea de Schön (1983), quien postula tres etapas en el proceso de reflexión del profesor sobre la actividad matemática en el aula: reflexionar *para* la acción, *en* la acción y *sobre* la acción, dentro de este trabajo distinguimos la idea de *práctica profesional del profesor* de *la acción de enseñar*. Schön considera tres momentos en los que el profesor puede interactuar con el contenido matemático, lo que conlleva entender la *acción* como un momento específico de trabajo o actividad del profesor dentro del aula, el cual se construye a partir de interacciones previas y posteriores con el contenido matemático, es decir, requiere de un trabajo previo al trabajo de aula, de planeación y diseño que puede ser realizado de manera individual o colectiva por el profesor y de un trabajo posterior de reflexión y evaluación que le permita generar un conocimiento cada vez más robusto y profundo de su labor profesional. Esta forma de entender la actividad del profesor de manera extendida fuera de la escuela, permite pensar su labor como un proceso periférico a la interacción directa con los estudiantes y considerar que toda aquella actividad que forma parte del quehacer del profesor y que se encuentra ligada con la promoción del aprendizaje puede considerarse práctica profesional del profesor (Flores & Carrillo, 2014). Bajo esta perspectiva, tanto el trabajo de planeación de clase y diseño de recursos didácticos para el aula, como el análisis de las producciones de los estudiantes, así como la discusión y reflexión previa o posterior al trabajo de aula individual o colectiva, puede ser considerada como una *práctica profesional del profesor*.

Entendiendo *la práctica profesional del profesor* desde una perspectiva integral que contempla todos aquellos momentos en que el profesor interactúa con el contenido matemático, existen múltiples escenarios en los que el profesor interactúa con dicho contenido, los cuales pueden brindar distintas oportunidades para adentrarnos a investigar sobre su conocimiento especializado (Flores, Escudero & Aguilar, 2013). Por otro lado, Parada & Pluvinage (2014) mencionan que el pensamiento matemático del profesor se pone en evidencia cuando éste requiere hacer uso de sus conocimientos sobre un determinado contenido matemático para desarrollar así su práctica profesional, relacionando esta práctica con actividades propias de la profesión, como proponer tareas, seleccionar, usar y diseñar recursos, comunicarse en el aula, hacer adaptaciones curriculares, evaluar y profesionalizarse.

Estas consideraciones permitieron abrir el abanico de posibilidades con respecto a la fuente de la cual podría extraerse información para el análisis empírico de este trabajo, por lo que se pensó en buscar un contexto de formación continua como un escenario para explorar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Mi interés en la investigación al respecto de la línea de conocimiento y desarrollo profesional me trajo a España para unirme a un grupo de investigación reconocido por su tradición y prestigio; sin embargo, este interés surge del trabajo que realicé en México en 2010 en un curso de formación continua para profesores de matemáticas de secundaria, lo cual me permitió conocer los planes y programas propuestos en México, así como algunas de las propuestas de formación continua que ofrece la Secretaría de Educación Pública[1].

Con la intención de poder compaginar estos conocimientos sobre la formación continua en el contexto mexicano y la distancia física que representaba estar en España, comencé a indagar sobre los métodos de investigación en la formación de profesores en entornos virtuales, de manera que pudiera derribar las barreras geográficas contando con un respaldo metodológico sólido al momento de realizar la recolección y análisis de datos. En la búsqueda de esta información encontré en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (México) investigadores que tenían experiencia en la investigación de interacciones virtuales de profesores, además de que este centro cuenta con un programa de maestría y doctorado en línea para profesores en activo, por lo cual solicité una estancia de investigación por tres meses. En el transcurso de la estancia se comentaron detalles al respecto de mi proyecto de investigación y las necesidades que se tenían para la recolección de los datos; de estas conversaciones surgió la idea de trabajar con un grupo de profesores que se encontraban cursando el programa de maestría y que trabajarían en el curso de *Teoría de Situaciones Didácticas*, de enero a marzo de 2013. Esta oportunidad era ideal para las necesidades del proyecto, por lo que se acordó con los tutores del curso mi participación como tutora y la posibilidad de trabajar posteriormente con las producciones que algunos profesores generaran en el curso.

El posgrado vía internet en el que se recolectan los datos para este trabajo puede definirse como un momento clave dentro del desarrollo profesional de los profesores que participan en él, una actividad que, además de ofrecer un entorno de reflexión sobre su propia práctica, permite la interacción con otros profesores, y es un entorno de trabajo menos artificial que los espacios construidos explícitamente con fines de investigación, puesto que es un programa de formación continua, al que acceden los participantes voluntariamente, con la expectativa de convertirse en mejores profesionales de la educación e introducirse en la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática.

La participación en la planeación y desarrollo del curso como tutora me permitió identificar la potencialidad que tenía este escenario como medio para analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Las actividades que se planteaban en el curso (que se describirá más ampliamente en el apartado III.6.1.1), resultaron ser un escenario interesante y propicio para explorar el conocimiento matemático que el profesor usa en su planeación de clase y en el diseño de actividades, el cual se comparte y discute durante la interacción con sus compañeros, puesto que el trabajo en conjunto y el escenario virtual obligan a los participantes a plasmar justificaciones de sus decisiones sobre los diseños y acciones dentro del aula, dando cabida a la posibilidad de hacer explícitos algunos de sus conocimientos que en otros escenarios se manifiestan directamente en acciones y que quizá estarían sujetos a más interpretaciones por parte del investigador.

Aunque se ahondará en la descripción detallada del curso en el capítulo III, es importante señalar que dicho curso está diseñado para trabajar sobre aspectos de la didáctica específica más que aspectos puramente matemáticos, debido a los objetivos del programa de posgrado y a la naturaleza

---

[1] Organismo gubernamental equivalente al Ministerio de Educación en España

de la teoría de situaciones didácticas[2] que, aunque no es el foco principal de discusión, durante el curso se toma como base para trabajar la evaluación y diseño de los recursos didácticos.

Una vez terminado el curso y después de haber revisado todas las participaciones de los profesores en el mismo, se seleccionó a dos profesores que pudieran ser informantes para nuestra investigación. Luego de obtener su permiso para trabajar con los datos que ambos generaron en este curso y después de realizar un primer análisis superficial de sus producciones, se decidió tomar solo el caso de Omar, cuyas participaciones en el curso parecían ser una fuente de información suficientemente amplia para lograr los objetivos planteados.

A reserva de que describiremos más ampliamente el caso de estudio en el epígrafe III.5.1, a manera de introducción diremos que Omar es un profesor de matemáticas de secundaria colombiano, con una actitud magnífica en lo referente al trabajo que se realizaba en el posgrado virtual, siempre dispuesto a participar de las tareas individuales y grupales que se solicitaran dentro del curso. Su formación profesional es la de Ingeniería Química; sin embargo, se ha dedicado a la enseñanza de las Matemáticas, la Física y la Química desde hace más de 25 años. La mayor parte de su experiencia docente la ha adquirido en bachillerato (14 a 18 años) y desde hace aproximadamente 8 años trabaja con estudiantes de secundaria, por lo que los diseños de recursos que propone durante el curso están pensados para este nivel. Además ha ido complementando su formación como profesor asistiendo a cursos y diplomados de formación del profesorado.

I.2 Enfoque y objeto de estudio

Como mencionan Carrillo, Contreras y Flores (2013), los cambios que han surgido en la última década, en el campo de investigación en torno al conocimiento profesional del profesor de matemáticas, apuntan a la necesidad de integración entre el conocimiento didáctico y el disciplinar, así como a la necesidad de profundización en los elementos que forman parte de éste. Una parte sustancial de esta integración de conocimiento es el relativo a la propia disciplina, puesto que no parece razonable que alguien sea capaz de enseñar aquello que no conoce en profundidad, aunque la definición de lo que es conocer en profundidad el contenido que se pretende enseñar tampoco es algo que se tenga claro (Escudero-Avila, et al., en prensa). Esta investigación se interesa por aportar información acerca de la naturaleza y la estructura de dicho conocimiento profesional para el caso específico del profesor de matemáticas. Nos centramos en indagar acerca del papel del profesor de matemáticas, como uno de los actores principales en el proceso de enseñanza y aprendizaje, siendo éste el que elige, diseña y gestiona las acciones que se llevan a cabo en este proceso.

Nuestro objeto de estudio es, por tanto, el conocimiento profesional que tiene el profesor, más concretamente el conocimiento específico del profesor de matemáticas, el cual buscamos caracterizar a través de la conformación del modelo de conocimiento especializado (MTSK) que presentamos como resultado de un estudio teórico de los elementos que lo constituyen, y la forma

---

[2] En esta teoría se proponen elementos para el diseño de situaciones didácticas en torno a un contenido matemático. De la misma manera, se propone una metodología para el diseño, implementación y evaluación de la situación didáctica, la ingeniería didáctica. Brousseau (2007) considera que dado que la enseñanza es el proyecto y acción social de que un alumno se apropie de un saber constituido o en vías de constitución, la didáctica de la matemática se convierte en la ciencia de las condiciones de difusión y apropiación de los conocimientos matemáticos útiles a los hombres y a sus instituciones. Así, la modelización de esa difusión conduce a utilizar el término *situación didáctica* en el sentido de entorno del alumno, que incluye todo lo que coopera específicamente en la componente matemática de su formación.

en la que éste se encuentra organizado, complementado con un análisis empírico que nos permita observar el funcionamiento del modelo, las interacciones entre sus componentes, las formas en las cuales este conocimiento se manifiesta por parte del profesor y las vías de desarrollo que podrían existir para utilizarlas como herramientas en la formación del profesorado para generar una caracterización cada vez más fina de cada dominio y subdominio que lo conforman.

Al igual que Climent (2005), en este trabajo se considera que el conocimiento profesional del profesor está integrado por todos los saberes y experiencias que éste posee, los cuales utilizará durante su labor como docente; dicho conocimiento se construye desde su formación inicial y se complementa con la formación continua que lleva durante su carrera. Es por eso que indagar en un proceso de formación continua del profesorado parece pertinente e interesante, al formar parte de uno de los momentos centrales del desarrollo profesional y un contexto ideal para la utilización del conocimiento profesional que tenga el profesor.

El contexto de formación continua del programa de Matemática Educativa de CICATA permite explorar el conocimiento especializado puesto en juego en tres procesos diferentes del profesor de matemáticas: la resolución de problemas, la planeación y diseño de situaciones para su clase y la discusión colectiva de situaciones de aula. Este escenario de recolección de datos ha resultado idóneo para el análisis de este conocimiento, ya que al elaborar, analizar y discutir situaciones como estas, con sus colegas, hace uso de su conocimiento disciplinar específico en un espacio de reflexión continua y análisis profundo entre pares. Además, este escenario se encuentra mediado por un contexto virtual que aporta la posibilidad de tener un acceso a las participaciones textuales del profesor y que requiere del uso de argumentaciones que permitan una comunicación adecuada de las ideas entre los participantes del curso.

Como he mencionado antes, el trabajo de construcción del modelo se lleva a cabo de manera colectiva, a través de las aportaciones de todos los miembros del grupo de investigación; bajo este esquema, decidimos determinar el papel específico de este trabajo doctoral como parte de las distintas aportaciones que podrían hacerse al modelo. El gusto e interés personal que tengo sobre el dominio de conocimiento didáctico del contenido (PCK) me permitió delimitar el objeto de investigación al estudio de este dominio de conocimiento. Esto permitió definir el objetivo de investigación como: ***describir, caracterizar y comprender el conocimiento didáctico del contenido, a través del análisis del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.***

A pesar de que hemos puesto especial énfasis en el desarrollo teórico de los subdominios que pertenecen a este tipo de conocimiento, en particular en los subdominios referentes a las características de aprendizaje y al de la enseñanza de las matemáticas, esto no significa que pudieramos dejar de lado el análisis de los subdominios correspondientes al dominio matemático, puesto que el surgimiento de evidencias de conocimiento pertenecientes a otros subdominios es inevitable, sobre todo de evidencias de conocimiento de los temas. Además interesa comprender el PCK entendido y construido como parte del MTSK, por lo cual se realiza un análisis completo del dominio matemático y didáctico matemático del conocimiento del profesor que permita observar las interacciones que hay entre las distintas componentes del modelo y comprender cada subdominio como un elemento integrado dentro del conocimiento especializado del profesor.

I.3 Estructura del trabajo

A continuación describiremos la organización que se ha propuesto para la presentación de este reporte de investigación, de manera que el lector pueda tener una visión general de la forma en la que hemos estructurado el trabajo y lo que puede encontrar en cada uno de los capítulos que se presentan.

En el Capítulo II presentamos los fundamentos teóricos sobre los cuales se construye esta tesis, comenzando por el análisis de la naturaleza del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, los elementos que lo componen y la forma en la que estos se organizan. Se realiza además un posicionamiento teórico con respecto a lo que consideraremos conocimiento y la diferencia que estableceremos con las creencias y concepciones del profesor.

En esta sección realizamos también una discusión teórica sobre el modelo MKT, que consideramos necesaria para justificar la necesidad de construir un modelo propio que refleje el carácter específico de éste, ligado directamente al contenido matemático que se pretende enseñar. Este es el punto de partida para reflexionar acerca del carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas.

Se presenta, además, lo que considero como el primer gran aporte de este trabajo, la conformación del modelo MTSK, mostrando su construcción teórica, generando una propuesta nueva de organización y análisis de este tipo de conocimiento profesional, que servirá además como herramienta de análisis en esta investigación.

Dado que el MTSK se conforma a partir de la idea de considerar que es la integración de los conocimientos matemáticos y didácticos del contenido matemático que tiene el profesor lo que hace de ese un conocimiento específico del profesor de matemáticas y que este, además, está permeado por las concepciones que tiene el profesor sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje, se muestra también en este capítulo algunas consideraciones con respecto a las concepciones de los profesores de matemáticas de secundaria, además de las consideraciones teóricas que se tiene en cuenta con respecto al escenario de trabajo virtual en el cual se recolecta la información, de manera que pudiéramos tener una base sólida con la cual analizar e interpretar la información generada en el curso de formación continua.

En el Capítulo III se describe el diseño metodológico que se ha realizado para esta investigación. Hablamos de la elección del paradigma interpretativo como el más adecuado para nuestro interés de investigación, así como sobre el posicionamiento ontológico (perspectiva relativista) y epistemológico (interpretativismo) que se corresponden con este paradigma. Además, se establecen las preguntas de investigación generales y específicas que servirán de guía para el análisis de la información que Omar ha generado a lo largo de sus participaciones en el curso virtual y definimos el objetivo general de la misma.

Además se describe la perspectiva metodológica bajo la cual se diseña este estudio, la metodología *top-down* y *bottom-up*, la cual se considera propicia para alcanzar los objetivos de investigación propuestos en esta investigación.

Se realiza una descripción del tipo de estudio que hemos elegido realizar, que se refiere al estudio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria en un curso virtual de formación permanente, como un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 1995). Para ello realizamos una descripción de lo que es un estudio de caso, el tipo y las características de este y el nivel de la teoría que se puede obtener, y lo concretamos en el caso de este trabajo.

Al final de este capítulo se describen las técnicas y los instrumentos con los cuales se recoge, organiza y analiza la información.

En el Capítulo IV se presenta el análisis de la información, que ha sido dividido en cinco secciones correspondientes al análisis de cada una de las Actividades que conformaron el curso de formación virtual. Los análisis individuales de estas actividades contienen un informe de los resultados organizado a través de los subdominios y categorías del MTSK que se describen en el marco teórico.

La discusión de los resultados recopilados en los análisis individuales de cada una de las Actividades del curso se realiza en el Capítulo V de este informe, en el cual se realiza una comparación de los resultados de cada uno de los análisis, de manera que se presente en este epígrafe una reconstrucción del conocimiento especializado puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación.

En el Capítulo VI se presenta las conclusiones de este estudio, en el cual buscamos abstraernos de los datos obtenidos con el análisis del caso particular y responder así a las preguntas de investigación y teorizar al respecto de las aportaciones teóricas y metodológicas que ofrece el MTSK como herramienta de análisis del conocimiento profesional del profesor. En este capítulo hemos puesto especial énfasis en las conclusiones referentes a la descripción de características específicas del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) como parte del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), además de planteamos una reflexión sobre las líneas futuras de investigación con y sobre el MTSK.

Por último incluimos los Anexos, en los cuales el lector puede encontrar las tablas de análisis generadas para la realización de los informes del Capítulo IV, así como los documentos completos de las participaciones de Omar en cada una de las Actividades del curso, con las codificaciones correspondientes que han servido para referirnos a fragmentos específicos a lo largo del análisis. Estos anexos están organizados por Actividad, de la misma forma en la que se organizan los análisis de la información.

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

Dentro de este capítulo describiremos y articularemos los constructos teóricos que utilizaremos dentro de esta investigación para identificar, analizar y describir el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, en un contexto de formación continua dentro de un entorno virtual. Usaremos estas bases teóricas para dar sustento a las decisiones tomadas en la elección de los enfoques metodológicos.

El marco teórico que mostraremos a continuación está construido sobre la base de la trayectoria de investigación que nuestro grupo de trabajo ha tenido en la línea de conocimiento profesional, por lo que gran parte de este marco refleja un posicionamiento específico, basado en investigaciones previas y construido a partir de la discusión colectiva del grupo de investigación.

II.1 Conocimiento profesional del profesor de matemáticas

El interés por encontrar formas efectivas de estudiar el conocimiento profesional del profesor y comprender los procesos de adquisición, uso y desarrollo de este, lleva a los investigadores a realizar distintas propuestas que permitan indagar sobre la labor del profesor, vista esta como la práctica de un profesional que requiere de conocimientos específicos.

Ponte (2012) señala que la identificación del conocimiento necesario para el ejercicio profesional del profesor y el acceso a las concepciones que lo estructuran no basta, es necesario además comprender la naturaleza de dicho conocimiento como un elemento inseparable de la acción del profesor y de la forma en que este se construye en contextos de procesos reflexivos o de la experiencia. Por su parte, Climent (2002) realiza una caracterización del conocimiento profesional basada en las diferentes propuestas de caracterización que se reflejan en la literatura, las cuales se enfocan en su naturaleza, su origen, sus fuentes, sus componentes y sus vías de desarrollo. En este caso no es nuestro interés profundizar en el origen, las fuentes ni las vías de desarrollo de dicho conocimiento. Situamos el interés de investigación en indagar acerca de cuáles y cómo son los elementos que constituyen el conocimiento profesional, y que son específicos del profesor de matemáticas, es decir, sobre las componentes de este conocimiento y la naturaleza de las mismas.

Al igual que Carrillo (1998a) y Climent (2002), consideramos la utilización del término conocimiento profesional en el sentido de Elstgeest, Goffree y Harlen (1993), que diferencian cinco tipos de conocimiento: *social* (conocimiento de cómo se llama), *físico* (conocimiento de cómo parece ser), *lógico* (conocimiento de cómo se relaciona), *técnico* (conocimiento de cómo debería hacerse) y ***profesional*** (conocimiento de cómo encontrar tu camino hacia) que permite abordar nuevas situaciones y proporciona autonomía, siendo este el nivel que incluye a los otros tipos de conocimientos”.

Además, nos parece que el término *conocimiento profesional* es propicio por su asociación a connotaciones positivas como “buen profesional”, o la idea de que este conocimiento proviene tanto de la práctica, como de la teoría que permita interpretar y reflexionar sobre la práctica (Climent, 2005), que son precisamente con las que nos identificamos.

II.1.1 El conocimiento como objeto de estudio.

Estamos de acuerdo con Llinares (1996) en la necesidad de explicitar el posicionamiento de esta investigación con respecto a la definición de conocimiento, en tanto que será este el objeto de estudio de nuestro trabajo y que existen diferentes perspectivas y posicionamientos teóricos desde los cuales se define y estudia este concepto. Esta reflexión nos permitirá comprender mejor los alcances del trabajo y las bases sobre las que construye el diseño de la investigación.

Basándonos en la tradición de investigación del grupo sobre los diferentes posicionamientos teóricos respecto a la diferenciación entre creencias, concepción y conocimiento, y haciendo uso de la base teórica presentadas en las tesis de Carrillo (1998b) y Contreras (1999), decidimos considerar las creencias como un elemento tan cercano a las concepciones que no tiene sentido distinguirlos, puesto que no se perciben beneficios significativos para el entendimiento de la naturaleza del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, siendo que tanto creencias como concepciones están ligadas de la misma forma al conocimiento.

Al igual que para Thompson (1992), para nosotros no resulta importante distinguir las creencias y las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las cuales serán entendidas como verdades personales, sostenidas individual y/o colectivamente, derivadas de la experiencia o el propio pensamiento, puesto que están basados en componentes afectivas y evaluativas, sobre las que se pueden tener diferentes grados de convencimiento. Pueden además estar justificadas en base a argumentos que no sigan criterios que puedan responder a cánones de evidencia, es decir, no son falsables. Grossman, Wilson y Shulman (1989, en Llinares, 1996) señalan además que las creencias confían altamente en evaluaciones afectivas y personales y son más discutibles que el conocimiento.

Dentro de las descripciones de los distintos modelos de conocimiento del profesor, se hace poco énfasis en los posicionamientos epistemológicos acerca del término conocimiento, optando por realizar algunas reflexiones sobre la naturaleza de dicho conocimiento, los tipos de conocimiento, las componentes que poseen o las fuentes de las que se alimenta (ver Llinares, 1996 para una comparación de modelos y características). Estas caracterizaciones no son en ningún caso exhaustivas e incluso pueden resultar confusas si no se explicitan los posicionamientos teóricos desde los cuales se entienden y usan constructos como *comprensión*, *concepción*, *creencia* o *conocimiento*. Las reflexiones teóricas realizadas al respecto de este constructo proporcionan distintas visiones con respecto a lo que significa conocer, dentro de las cuales hemos buscado un posicionamiento que permita explicitar lo que el modelo MTSK considerará como parte de los subdominios y como elementos pertenecientes a la parte central del mismo.

Pajares (1992) propone algunos elementos que componen el conocimiento, definiéndolo como una amplia red de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos[1]. Por su parte, Schoenfeld (2010) aporta una definición del conocimiento que nos resulta operativa por la amplitud que abarca y la compatibilidad con la propuesta hecha por Pajares:

> “Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo a esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!” (Schoenfeld, 2010, p. 25).

En esta definición, Schoenfeld (2010) incluye, además de los términos propios de su modelo de conocimiento[2], matices que permiten la inclusión de distintos elementos como las acciones y la comprensión relacional, instrumental, lógica o simbólica (Skemp, 1978) que pueden ser consideradas como información disponible. Habla además de una información útil para la actividad que se desempeña (en la enseñanza de la matemática), centrando la atención en el conocimiento que es necesario para la labor profesional del profesor. Por último, habla sobre la idea de un conocimiento que no es necesariamente correcto, lo cual nos parece acorde con la postura de un modelo que busca comprender el conocimiento del profesor y no evaluar su pertinencia con respecto a una referencia de lo que debería ser la educación matemática. La diferencia entre conocimiento correcto o incorrecto es irrelevante en algunos casos, especialmente si la intención del investigador es *saber qué y cómo conoce el profesor*, ya que esa es la información que el

---

[1] Esta red es entendida desde una postura amplia que abarca concepciones y creencias, y está construida también mediante estas.

[2] En su libro *How we think*, Schoenfeld propone tres elementos que permiten entender cómo piensa un individuo:
“*The main claim in the book is that what people do is a function of their resources (their knowledge, in the context of available material and other resources), goals (the conscious or unconscious aims they are trying to achieve), and orientations (their beliefs, values, biases, dispositions, etc.). I argue that if enough is known, in detail, about a person’s orientations, goals, and resources, that person’s actions can be explained at both macro and micro levels. That is, they can be explained not only in broad terms but also on a moment-by-moment basis*”. (p. XIV)

profesor posee, coincida esta con el referente de corrección o no. Además, consideramos necesario hacer una llamada de atención sobre la consideración negativa del término *incorrecto*, definiéndolo no como algo negativo, sino como no coincidente con el referente de *verdad*. (Montes, Flores-Medrano, Carmona, Huitrado & Flores, 2014).

La diferenciación entre creencia y conocimiento podrá entenderse dentro de esta investigación en relación con la implicación de la componente afectiva y emocional en las creencias, frente a la racionalización de las estructuras mentales generales que abarcan significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, etcétera, que suponen las conocimientos (Thompson, 1992).

Hablaremos más profundamente al respecto de la relación entre creencias y conocimiento dentro del modelo de conocimiento especializado en la sección II.3.3

II.1.2 La naturaleza del conocimiento profesional del profesor

Con respecto a la naturaleza del conocimiento profesional, Climent (2002) elabora un análisis teórico, recogiendo sus características principales atribuidas en la investigación, las cuales son retomadas por Muñoz-Catalán (2010). En el cuadro II.1 sintetizamos los aspectos más sobresalientes de ambas publicaciones.

Todas estas características del conocimiento profesional son parte importante del posicionamiento teórico que se construye para esta investigación y que han servido como base para definir un modelo que permitiera indagar sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, por lo que serán retomadas en apartados posteriores, sin embargo, consideramos importante detenernos ahora en el carácter práctico de este conocimiento, para ligarlo a los intereses particulares de este trabajo.

Investigaciones como la de Elbaz (1983) consideran fundamental el conocimiento experiencial, puesto que la consideración del conocimiento como empírico y analítico conduce hacia la infravaloración de lo que el profesor conoce a partir de su práctica diaria, lo que no permite a los mismos profesores apreciar sus conocimientos. Así, Elbaz pone el énfasis en la consideración del carácter "*práctico*" y "*personal*" del conocimiento del profesor.

Es importante señalar que el conocimiento experiencial o práctico no está necesariamente ligado a la interacción directa con los estudiantes. Nos referiremos a la práctica en un sentido amplio, referido a dentro y fuera del aula, en espacios de reflexión personal como pueden ser los cursos de formación continua o los momentos de planeación de clase (Climent, 2002), tomando en cuenta la definición que hacen Flores y Carrillo (2014) de la misma:

> "*We consider professional practice as anything which forms part of the teacher's workload which is closely related to the promotion of their pupils' learning (e. g. Branco & Ponte, 2012). Viewed thus, professional practices go beyond the teacher's role at the front of the class and include activities which are undertaken outside the classroom. Such scenarios of professional practice offer plentiful opportunities to deepen our understanding of specialised knowledge (Flores, Escudero & Aguilar, 2013)*" (p. 82).

Naturaleza del conocimiento profesional del profesor
- *Situado y contextualizado:* Se genera en determinados contextos profesionales, por lo que es producto de la actividad, del contexto y de la cultura donde se desarrolla y emplea (Llinares, 1994). La consideración del conocimiento y aprendizaje del profesor como situado, está relacionado con su carácter social e individual. - *Personal*: Es un conocimiento idiosincrático y característico de cada individuo, puesto que depende de sus concepciones, valores y actitudes, de su experiencia de vida y docente, así como de los contextos en los que participa. (Blanco, Mellado y Ruíz, 1995) - *Social*: Todo el conocimiento, creencias y concepciones, tiene raíces sociales y se conforma a partir de experiencias. Así, las acciones específicas del individuo deben ser interpretadas bajo una reflexión consiente, en un marco de concepciones existentes actuando en un mundo de experiencia, abriendo la posibilidad de dar sentido a las situaciones y elegir alternativas (Ponte, 1994). - *Dinámico, integrado y complejo*: El conocimiento profesional está formado por distintos tipos de saberes organizado a modo de sistema, con elementos difíciles de aislar, integrador de diversos saberes, de tal manera que, el aumento de uno de ellos repercute en otros. Además, está en evolución continua (Elbaz, 1983), crece y se transforma a través de un proceso de interacción con los alumnos, las experiencias profesionales, (Fennemma & Franke, 1992) y con el contenido como objeto de reflexión para la enseñanza. - *Parcialmente tácito*: Este conocimiento posee una componente que surge espontáneamente sin la conciencia de haberlo aprendido, normalmente el profesor no es capaz de describir el saber que su acción revela. Parte del conocimiento es un *saber desde la acción* (Schön, 1983, 1987). Se desarrolla a través de la experiencia y es la reflexión el mecanismo a través del cual se puede llegar a convertir el *saber desde la acción* en *conocimiento desde la acción.* - *Práctico:* Este es un conocimiento para la práctica y esta se constituye en una de sus fuentes de generación principales. No obstante, la experiencia por sí misma no es generadora de conocimiento, si no está acompañada de una reflexión teórica, es decir, un análisis crítico de la experiencia y una complementación a través de la búsqueda de principios generales que respalden dicho análisis.

Cuadro II.1 Síntesis de las caracterizaciones sobre la naturaleza del conocimiento profesional del profesor, realizadas por Climent (2002) y Muñoz-Catalán (2010).

Por su parte, Carrillo (1999 en Muñoz-Catalán, 2010) señala la importancia de considerar la experiencia, la reflexión y el respaldo teórico como pilares fundamentales de este conocimiento práctico.

En el caso de esta investigación nos interesamos por el trabajo de profesores en un curso virtual de maestría, en cual no se realizan observaciones directas del aula, lo cual no quiere decir que el conocimiento que se evidencia en este contexto no sea de tipo práctico, dado que la labor del profesor también consiste en la planeación, reflexión y discusión de recursos didácticos con base en sus experiencias de trabajo anteriores y constructos teóricos provenientes de la investigación. Así, creemos que esta consideración del carácter práctico del conocimiento profesional nos permite sustenta la pertinencia de nuestro contexto de investigación.

Es importante destacar que es en el contexto de la práctica docente donde se activa, valida y se muestra la utilidad del conocimiento profesional, lo cual no implica que el conocimiento profesional de un profesor esté constituido (exclusivamente) por el que *pone en práctica* o que no tenga otros conocimientos que no esté utilizando en ese momento y que puedan activarse en otras situaciones[3] (Climent, 2002).

II.1.3 Las componentes del conocimiento profesional

La naturaleza misma de este conocimiento, en particular el carácter integrado del mismo, hace difícil su identificación y descripción, por lo que, más que explicar la organización y estructura de los elementos que lo constituyen, se suele diferenciar distintos elementos que ayudan a concretar su contenido (Climent, 2002).

Existen distintos parámetros utilizados para diferenciar las componentes del conocimiento profesional, definidas en función de cómo se genera, sobre qué versa o para qué sirve dicho conocimiento. Shulman (1987), por ejemplo, propone una separación del conocimiento del contenido para el profesor en tres componentes, el *Subject Matter Knowledge,* que incluye el conocimiento que requiere el profesor del qué y el porqué de los contenidos referentes a la disciplina que enseña, el *Pedagogical Content Knowledge*, que se refiere a los aspectos de conocimiento referentes a la enseñanza y aprendizaje de contenido que se imparte, y el *Curricular Knowledge*, que se refleja en los programas, materiales planeaciones que tienen los profesores y que les indican las formas y momentos en los cuales usar cierto tipo de herramientas. Un año después, esta propuesta sería refinada estableciendo siete componentes de conocimiento básico para ser profesor (Shulman 1987): "*content knowledge, general pedagogical knowledge, curriculum knowledge, knowledge of learners, knowledge of educational contexts, knowledge of educational ends, purposes, and values, and pedagogical content knowledge*" (p. 8). El interés de los investigadores se ha centrado en esta última componente, considerada como la principal contribución de Shulman, además de la relevancia que se concede a la materia que se enseña como caracterizadora del conocimiento del profesor, sirviendo como base al definir programas de formación inicial o permanente de profesorado, además de haber sido fundamental en múltiples investigaciones orientadas a la caracterización y delimitación del conocimiento profesional del profesor (Carrillo, et al., 2015).

A pesar de que se reconoce el valor de las componentes propuestas por Shulman en cuanto a la materialización que hacen de un conocimiento profesional específico de la enseñanza de la materia, esta es una propuesta genérica para un profesor de cualquier asignatura, lo cual da pie a utilizarla como punto de partida para identificar y sistematizar el conocimiento que requiere un profesor para realizar su labor en disciplinas específicas, poniendo en juego elementos propios del proceso de enseñanza-aprendizaje en una disciplina particular. Los modelos trabajados sobre la propuesta inicial de Shulman se basan en la idea de que el tipo de conocimiento que se enseña ofrece un particular matiz a la práctica del profesor, es decir, no es lo mismo enseñar ciencias sociales que matemáticas.

Con respecto al papel que juega la categorización del conocimiento profesional en esta investigación, podemos decir que se tiene un interés más teórico que práctico, puesto que el objetivo principal está enfocado a desarrollar un modelo teórico de conocimiento especializado del profesor de matemáticas, lo cual se mostrará con más profundidad en los siguientes apartados de este capítulo.

---

[3] Carrillo (1999 en Muñoz-Catalán, 2010) llama *latentes* a estos conocimientos, refiriéndose a "aquellos elementos ocultos que, en determinadas circunstancias (otra cultura escolar), pueden hacerse visibles" (p. 6).

Con respecto al conocimiento profesional del profesor de matemáticas, existen distintos enfoques de investigación que se interesan en identificar y comprender aspectos específicos del conocimiento matemático requerido para llevar a cabo la labor de enseñanza, las cuales intentan aportar especificidad con respecto a la naturaleza del conocimiento disciplinar. Algunas de estas han derivado en la conformación de propuestas de modelación de dicho conocimiento (e. g. *Profound understanding of fundamental mathematics* –Ma 1999; *Knowledge Quartet* - Rowland, Turner, Thwaites & Huckstep 2009; *Proficiency in Teahing Mathematics* -Schoenfeld & Kilpatrick, 2008). La variedad de propuestas en estos modelos refleja la complejidad de la interpretación y comprensión sobre la naturaleza de dicho conocimiento.

Muestra de este interés en la generación de nuevos enfoques y la comparación entre ellos es la discusión realizada en Ball, Charalambous y Lewis (2009), en donde se discuten tres modelos de conocimiento del profesor de matemáticas: *Mathematics for teaching*, *Knowledge Quartet* y *Mathematical knowledge for Teaching*. El foro titulado *Teacher knowledge and teaching: considering a complex relationship through three different perspectives*, llevado a cabo en la reunión del grupo de *Psychology of Mathematics Education* (PME) celebrado en Tesalónica (Grecia), sirve como muestra de la diversidad de perspectivas e intereses que persiguen estos modelos, que son algunos de los más utilizados dentro de la investigación en didáctica de la matemática referente a los profesores.

Cada uno de estos modelos refleja una determinada filosofía y comprensión de la labor del profesorado y sus concepciones sobre lo que debería ser aprendido y el cómo deberá ser enseñado, que permean la construcción del modelo. Por ejemplo, en el *Knowledge Quartet* el interés está puesto primordialmente en observar la práctica del profesor dentro del aula, en contacto directo con los estudiantes, por lo que tiene sentido hablar de situaciones inesperadas en las cuales el profesor se ve en la necesidad de hacer uso de un conocimiento específico de su profesión (Rowland et al., 2009). Por su parte, en la Universidad de Michigan, Estados Unidos, el grupo liderado por Deborah Ball ha desarrollado el *Mathematical Knowledge for Teaching-MKT* (Ball, Thames & Phelps, 2008), cuyo objetivo es la identificación del conocimiento matemático que necesita el profesor para la enseñanza y cuyo enfoque refleja un interés por analizar el conocimiento del profesor como un conocimiento propio y específico de esa profesión, algo que sólo él puede y debe saber sobre su práctica, el cual no necesariamente está limitado al trabajo de aula.

Es precisamente esta especificidad del MKT lo que lo convierte en uno de los modelos más utilizados dentro de las investigaciones del profesor de matemáticas, lo que nos llevó a tomarlo en cuenta como posible marco para el desarrollo de esta investigación en un primer momento, para lo cual se realizó una profunda reflexión acerca de su potencialidad y sus limitaciones como instrumento de análisis. A continuación mostraremos parte de la reflexión realizada sobre este modelo de conocimiento, con la intención de que el lector observe y sea partícipe de uno de los procesos que de manera personal reconozco como uno de los más interesantes de este proyecto doctoral, en cuanto a mi formación como investigadora.

II.2 Discusión teórica sobre el *Mathematical Knowledge for Teahing-MKT*

En Flores, Escudero y Carrillo (2013) y Escudero, Flores y Carrillo (2012), hemos presentado los resultados de una revisión crítica acerca de las definiciones del SCK a partir del trabajo de distintos autores que han utilizado el MKT para la investigación, identificando dos principales formas de definirlo. Comenzaremos esta sección retomando estos trabajos que presentamos y discutimos en el

Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8) de Antalya (Turquía) y en la Escuela de Invierno de Matemática Educativa (EIME) en México, respectivamente, profundizando en los aspectos más importantes de los mismos, que reflejan la reflexión teórica realizada sobre este modelo.

El MKT ofrece un refinamiento con respecto a modelos anteriores proponiendo una categorización de la tipología de conocimiento matemático observado-en/requerido-para la enseñanza que surge a través de la observación directa en el aula, y de la reflexión acerca de la forma en la que los profesores deben conocer los contenidos matemáticos. Ball et al. (2008) presentan el MKT diferenciando dos dominios de conocimiento, el *Pedagogical Content Knowledge* y el *Subject Matter Knowledge*. El primero deriva directamente del esquema de Shulman (1986), agregando un matiz a su propuesta al categorizar este conocimiento a través de tres subdominios: *Knowledge of Content and Students*, que se refiere al conocimiento que combina los saberes acerca de los estudiantes y los saberes acerca de las matemáticas (Ball et al., 2008); el *Knowledge of Content and Teaching*, que combina el conocimiento acerca de la enseñanza con el conocimiento sobre las matemáticas (Ribeiro, Monteiro & Carrillo 2010); y el *Knowledge of Content and Curriculum*, que está representado, entre otras cosas, por el conjunto de programas que se diseñan para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios (Sosa & Carrillo, 2010). Por su parte, el *Subject Matter Knowledge* se divide también en tres subdominios: el *Common Content Knowledge* (CCK), definido como el conocimiento que posee cualquier persona instruida al nivel correspondiente, no siendo único, por tanto, de los profesores de matemáticas (Ball & Bass, 2009); el *Specialized Content Knowledge* (SCK), que se define como el conocimiento matemático que va más allá del que se espera de cualquier adulto bien educado (Ball et al., 2008), incluyendo el saber por qué se hace así, lo que supone un avance respecto del CCK, donde solo se considera el saber hacer, en el SCK, y permite al profesor explicar la procedencia matemática de los errores de los alumnos; y el *Horizon Content Knowledge*, que es presentado como el conocimiento de la relación que existe entre los distintos temas de matemáticas a lo largo de todo el currículum. También incluye una visión útil para ver las conexiones con las ideas matemáticas posteriores. Algunos estudios más recientes han agregado características a este subdominio, de manera que se habla también del conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intra y extra matemática. En el HCK se incluyen también las habilidades que tienen los profesores para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular (Sosa y Carrillo, 2010).

El *Specialized Content Knowledge* (SCK) ha sido considerado uno de los aportes más relevantes de este modelo, según sus autores y otros investigadores en Matemática Educativa (e.g. Herbst & Kosko, 2012), puesto que representa la identificación de un conocimiento de carácter puramente matemático y específico de la profesión. Este ha tenido buena aceptación en gran parte de la comunidad de investigadores puesto que pareciera que permite al investigador profundizar en un aspecto específico del conocimiento del profesor. Sin embargo, también se han reportado algunos problemas de delimitación y definición que lo hacen complicado de observar y analizar.

En algunos trabajos referidos a este modelo, se define el SCK resaltando que este tipo de conocimiento pertenece exclusivamente a la profesión del profesor de matemáticas, es decir, se refiere al conocimiento y habilidad matemática única de la enseñanza, el cual no se usa en contextos distintos al escolar. (e.g. Rivas, Godino & Castro, 2012; Suzuka, et al., 2009). Esta definición nos lleva a considerar que el uso del término *habilidades* responde a la falta de caracterización de la naturaleza del SCK, es decir, se define en función de lo que permite hacer el poseer ese conocimiento, pero no se habla del conocimiento en sí mismo. Consideramos entonces que se define el SCK como único del profesor, ya que las tareas que se le atribuyen son específicas del profesor de matemáticas, sin embargo aún queda la interrogante de si el conocimiento matemático que permite realizar estas tareas no es compartido por otras profesiones o por los mismos estudiantes, lo cual lo situaría como parte del CCK.

La otra tendencia a la que se recurre para definir el conocimiento especializado de Ball es la comparación con el CCK, definido como el conocimiento necesario para resolver las tareas que se proponen a los estudiantes o como aquel que tiene un adulto bien instruido al nivel educativo en cuestión (Ball et al., 2008), como se ha mencionado anteriormente. Markworth, Goodwin y Glisson (2009), por ejemplo, definen simbólicamente el SCK como *"content knowledge needed for the teaching of mathematics, beyond the common content knowledge needed by others"* (p. 69), de modo que es un conocimiento que no necesariamente aprenderá un estudiante. Esta definición suscita algunas dudas:

- ¿Podemos entender el ir más allá como una profundización y ampliación del CCK? Esto significaría permanecer en este subdominio sin intersecar con el SCK.
- ¿Qué pasa si la intención de enseñanza fuera profundizar y ampliar el conocimiento de un contenido, de modo que esas características formaran parte del CCK?, como, por ejemplo, al enseñar algoritmos atendiendo a la necesidad de conocer su origen y funcionamiento de manera profunda por parte de los estudiantes.
- ¿Es esta forma de conocer el contenido ajena a los matemáticos o se requiere alguna intención, y por tanto conocimiento, de enseñanza/aprendizaje para que lo sea?,
- ¿Qué beneficios se obtienen de separar el conocimiento matemático de esta manera?

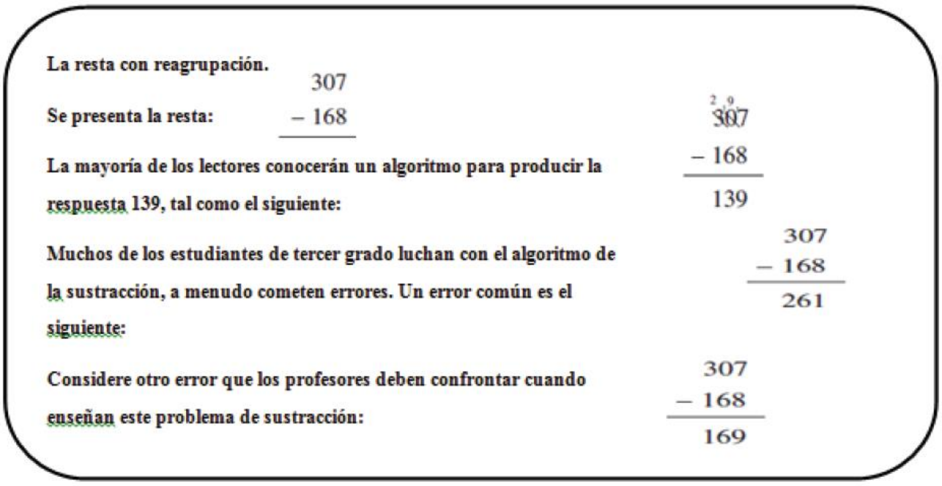
Estos dos tipos o formas de definir el SCK son extrínsecas al conocimiento, lo cual plantea un problema para reconocer, por ejemplo, que un cierto tipo o forma de conocer un contenido sea propia del profesor de matemáticas y no lo sea de otra profesión puesto que no es posible analizar a cada una de las profesiones para determinarlo, además de requerir un estándar sobre el conocimiento que cualquier persona instruida debería tener a cierto nivel.

Al definir de esta forma, los límites entre conocimiento común y conocimiento especializado son demasiado difusos y dependen de aspectos generales (como el tipo de sistema educativo) o aspectos puntuales (las intenciones educativas en el aula o concepciones del profesor).

Apoyados en la revisión bibliográfica sobre el SCK y la experiencia de trabajo de nuestro grupo de investigación con el MKT (Carrillo., Flores, et al., 2013), se encontraron algunos ejemplos redactados por sus autores en forma de tareas específicas de la enseñanza, identificados como *clásicos*, utilizados para explicar el uso del MKT, que pretenden mostrar a qué se refiere, dónde se usa o cómo se desarrolla el SCK, los cuales analizamos tratando de identificar de manera explícita las características del conocimiento puramente matemático que demanda la resolución de estas. Afrontamos paso a paso la tarea propuesta, desempaquetando la información.

El primer ejemplo (Figura II.1), se extrae del artículo de (Ball et al., 2008). El ejemplo de la sustracción *con llevada* en el que muestra una resta y un algoritmo habitualmente usado para resolverla, además de dos errores que pudieran surgir en el proceso de resolución, es uno de los ejemplos más referenciados por los usuarios del MKT. Siendo la detección de errores una tarea específica del profesor, se declara que el conocimiento matemático involucrado en el análisis de los procedimientos que conducen a este será SCK.

> "*In the subtraction example […], recognizing a wrong answer is common content knowledge (CCK), whereas sizing up the nature of an error, especially an unfamiliar error, typically requires nimbleness in thinking about numbers, attention to patterns, and flexible thinking about meaning in ways that are distinctive of specialized content knowledge (SCK). In contrast, familiarity with common errors and deciding which of several errors students are most likely to make are examples of knowledge of content and students (KCS)*" (Ball et al., 2008, p. 401).



La resta con reagrupación.

Se presenta la resta:

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\ 168 \\ \hline \end{array}$$

La mayoría de los lectores conocerán un algoritmo para producir la respuesta 139, tal como el siguiente:

$$\begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{3}}\overset{9}{\cancel{0}}7 \\ -\ 168 \\ \hline 139 \end{array}$$

Muchos de los estudiantes de tercer grado luchan con el algoritmo de la sustracción, a menudo cometen errores. Un error común es el siguiente:

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\ 168 \\ \hline 261 \end{array}$$

Considere otro error que los profesores deben confrontar cuando enseñan este problema de sustracción:

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\ 168 \\ \hline 169 \end{array}$$

Figura II.1: La resta con reagrupación.

La caracterización del SCK realizada en el fragmento citado anteriormente deja al aire cuestiones importantes como lo que se entiende por dimensionar la naturaleza del error, o lo que significa que un error no sea familiar, cómo se reconoce que alguien tiene agilidad de pensamiento numérico o flexibilidad de pensamiento sobre los significados, así como el significado de ir más allá de la solución de la resta. Además podríamos preguntarnos ¿cuál es el conocimiento puramente matemático en este fragmento?

Esta última interrogante nos lleva a realizar el siguiente análisis de los argumentos matemáticos que respaldan la identificación y caracterización del origen de cada uno de los errores propuestos en el ejemplo, es decir, un desempaquetado[4] del conocimiento matemático inmerso en esta situación.

Con respecto al primer error presentado en la figura II.1 (párrafo 4), el procedimiento utilizado consiste en la resta del dígito más pequeño al más grande en cada uno de las tres columnas sin tomar en cuenta si el número se ubica en la fila del minuendo o del sustraendo, lo cual provoca un error derivado de no distinguir la relación entre la primera y segunda fila de la resta, tal como afirman Ball et al. (2008). Estos conocimientos son necesarios para que el profesor identifique el tipo de error en el proceso del estudiante. Ahora bien, el conocimiento que permitiría a un profesor realizar una interpretación del porqué sucede este error es **el saber que la resta de dos números puede ser interpretada como la distancia que hay entre dos números,** puesto que el hecho de que debajo de la columna del 7 y el 8 aparezca el 1, debajo de la columna del 0 y el 6 aparezca un 6 y debajo de la columna del 3 y el 1 aparezca un 2, nos conduce a asociar la operación "resta" a esas cifras, sin tomar en cuenta la posición de los mismos de manera general, tratando de buscar la distancia que hay entre ellos al verlos como unidades aisladas.

---

[4] Término que usamos inspirados en la idea de *unpacking* de Ma (1999).

En el segundo ejemplo de error (párrafo 5), la interpretación de Ball et al. (2008) sobre el posible razonamiento del estudiante que condujo hacia el error radica en la falta de consideración del valor posicional al momento de reagrupar. A esto añadimos la consideración de que, dentro del procedimiento podría asociarse al cero con la ausencia de valor, por lo que no puede *prestar*, forzando al estudiante a *pedirle prestado* una unidad al 3. Consideramos entonces que para reconocer e interpretar el procedimiento erróneo del estudiante, el profesor necesita **conocimientos sobre las diferentes interpretaciones[5] que pueden hacerse sobre el cero y el conocer el uso y justificación del algoritmo de la resta**.

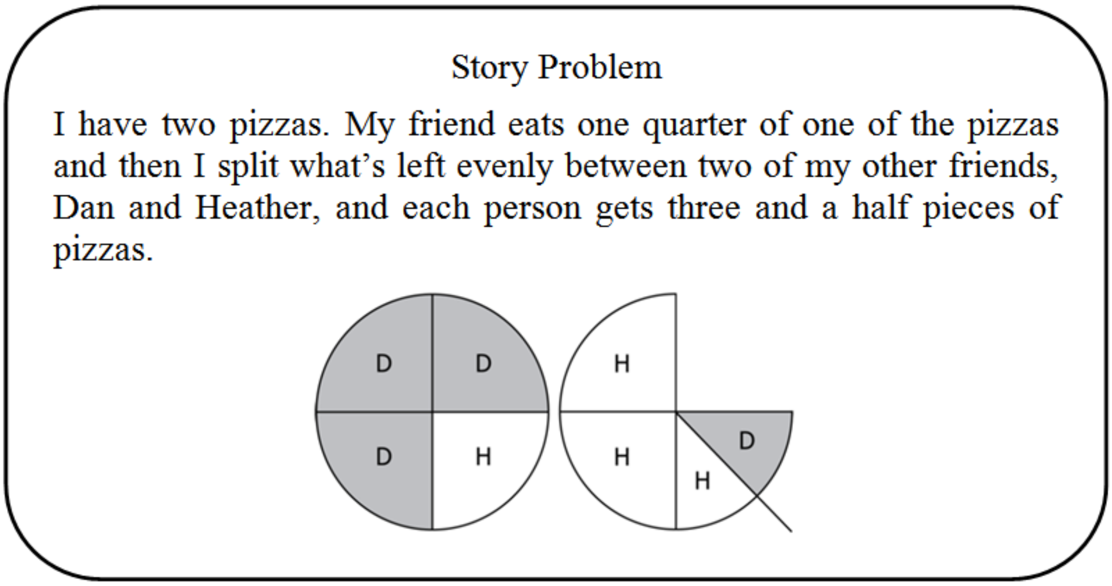
En ambos ejemplos se requiere **conocimiento amplio sobre el funcionamiento y el fundamento que tiene el algoritmo de la resta con reagrupación**, es decir, **sobre la notación desarrollada de un número**.

Dado que los conocimientos explicitados en el desempaquetado de información que hicimos previamente (uso y justificación del algoritmo de la resta, notación desarrollada de un número, la resta como distancia entre dos números y las diferentes interpretaciones del cero) se refieren a conocimientos que usa el profesor para explicar o evaluar las explicaciones matemáticas del origen de estos errores, además de atender a su detección y análisis, podríamos decir que estos encajan en la definición de SCK, sin embargo, vistos como conocimientos puramente matemáticos, no hay evidencias que nos permitan garantizar que estos son exclusivos de la labor del profesor de matemáticas. Además, todos ellos podrían ser categorizados como conocimiento común del contenido si es que las concepciones del profesor lo llevan a considerar que es importante que los estudiantes tengan todos estos conocimientos sobre la resta con llevada, lo que los situaría como parte del CCK. Podemos identificar en este ejemplo una de las dificultades del uso del modelo, la falta de delimitación y diferenciación clara entre el CCK y el SCK.

Uno de los objetivos hacia los que el grupo de Michigan ha dirigido sus esfuerzos consiste en crear oportunidades para el aprendizaje de los conocimientos matemáticos para la enseñanza a través del diseño de tareas que permitan la exploración y práctica de las matemáticas especializadas utilizadas en la enseñanza, las cuales han llamado *MKT tasks* (Suzuka et al., 2009). En Flores, Escudero y Carrillo (2013) mostramos un ejemplo de estas tareas, que utilizan Suzuka y colaboradores (2009) (Figura II.2), en el que los autores comentan que para la mayoría de los profesores es sencillo resolver la operación $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, sin embargo, cuando se les pide elaborar un *story problem* que represente la operación, se requiere explorar conocimientos distintos, que podrían considerarse dentro del MKT. En la Figura II.2 se muestra un *incorrect story problem* y se pide a los profesores analizarlo para descubrir el origen del error, para lo cual requieren comprender la solución matemática que otro profesor ha hecho del problema.

---

[5] Traducción del inglés *statements about zero*



Story Problem

I have two pizzas. My friend eats one quarter of one of the pizzas and then I split what's left evenly between two of my other friends, Dan and Heather, and each person gets three and a half pieces of pizzas.

Figura II.2: Un *story problem* incorrecto para representar $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ (Suzuka et al., 2009, p. 11)

Sobre esta tarea, los autores afirman que, al analizar el problema, el profesor tendrá que reconstruir el proceso de solución y reflexionar sobre aspectos matemáticos específicos:

> "*In fact, attending to others' thinking is a distinguishing characteristic of the work of teaching mathematics as opposed to just doing mathematics for oneself. Teachers routinely study and respond to others' approaches and solutions rather than merely constructing and revising their own. At the same time, the work entailed in this task—analyzing representations and their equivalence, examining the mapping between a model and the concept or procedure it represents, and figuring out where a solution went wrong—is fundamentally mathematical in nature. It is on this special interweaving of the practices of teaching and mathematics that we focus our tasks*" (Suzuka et al., 2009, p.12).

Como mencionamos anteriormente, uno de los elementos que conforman el SCK es la habilidad para interpretar las producciones matemáticas, ya sea de los estudiantes, de otros profesores o de materiales escritos. En este ejemplo nuevamente hacemos el ejercicio de desempaquetar el conocimiento implicado en el problema, haciendo uso de argumentos puramente matemáticos, atendiendo a la idea de localizar y describir el conocimiento específico que permite saber por qué la representación gráfica del resultado parece ser correcta y el *story problem* que se usa para representarlo es incorrecto.

Al observar el tipo de representación mostrada en la tarea, tomando como base dos pizzas las cuales pueden ser mostradas de manera gráfica representándolas con dos círculos, podemos decir que se establece una pizza como un entero y se resta ¼ de pizza para obtener el dividendo buscado, $1\frac{3}{4}$ de pizza. A continuación el enunciado y la representación se separan. El enunciado busca asociar la división con el significado de repartición, es decir, dividir lo que queda de pizza, pero, al ser algo ilógico repartir entre ½ amigo, se habla de una repartición para dos amigos, por lo que se divide entre 2 y no entre ½, lo cual es distinto a lo que se pide representar, por lo que el *story problem* no es adecuado para esta operación.

Por su parte la figura muestra una distribución distinta, puesto que lo que se reparte entre dos amigos son cuartas partes de pizza, es decir, que la unidad cambia de una pizza a un trozo de pizza.

Cuando Suzuka y sus colegas establecen algunos de los objetivos de la tarea y los conocimientos que consideran que pueden ser desempaquetados al resolverla, mencionan la posibilidad de profundizar en ideas centrales sobre las fracciones, como la importancia de atender a la unidad de referencia o al entero, además de promover la reflexión sobre diferentes significados de la división como el *comparar* y el repartir[6].

> "*When interpreted as measurement, division determines how many groups of a certain size (i.e., the divisor) —"fit" into the dividend: In this case, how many halves fit into one and three fourths? Alternatively, division also can be seen as — "partitioning" the dividend into a certain number (i.e., the divisor) of groups, with the quotient representing the size of one group or partition. Interpreting 1¾ ÷ ½ in this way requires partitioning 1¾ into one half of a group*" (Suzuka et al., 2009, p.14).

Este problema parece ser correcto puesto que los números han sido elegidos de manera que los resultados coincidan y pueda generarse la discusión. El descubrir el por qué las soluciones coinciden radica en hacer una operación con fracciones equivalentes:

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \div \frac{2}{4} = \frac{7 \times 4}{2 \times 4} = \frac{7}{2}$$

Derivado de este análisis podemos resaltar algunos de los conocimientos que se involucran en la tarea, los cuales un profesor requeriría para analizarla: **saber que el cociente de dos fracciones es igual que el cociente de cualesquiera fracciones equivalentes de estas; conocer algún algoritmo para la división de fracciones; conocer la propiedad del inverso multiplicativo de un número, además del conocimiento de los significados de la división $\boldsymbol{a \div b}$: como cuantificador (¿cuántas veces cabe a en b?) o para reparticiones (¿cuántos toca a cada uno de los b si repartimos a?).** El significado que se atribuye al *story problem* no puede ser extrapolado a la operación a la que se quiere representar.

Coincidimos con los autores que afirman dentro de las conclusiones que el trabajo con esta tarea permitirá una reflexión sobre el conocimiento matemático para la enseñanza que el profesor requiere al trabajar con la división de fracciones, sin embargo, nos interesaba saber ¿qué de este conocimiento es especializado?, tomando en cuenta las definiciones de este subdominio, ¿no son todos estos conocimientos necesarios para un adulto bien instruido en la división de fracciones? Al igual que en el ejemplo de la sustracción, consideramos que no encontramos conocimiento puramente matemático que se le pueda atribuir específicamente a la labor del profesor, o al que no pueda tener acceso el estudiante.

En estos análisis partimos de las definiciones y concretamos con los ejemplos en los que, según sus autores, se ve implicado conocimiento especializado, atendiendo siempre a la característica del SCK como conocimiento puramente matemático, ya sea como un cúmulo de conocimientos especiales o como un modo especial de ver un contenido. Todo esto se realizó en el intento por explicitar elementos de conocimiento que pertenecieran exclusivamente al SCK.

La revisión sobre las definiciones nos permitió concluir que siempre se hace uso de elementos externos a lo especializado, como la alusión a otras profesiones o a otros subdominios del mismo modelo (CCK), y el análisis de los ejemplos pone de manifiesto que las tareas específicas de

---

[6] Estos términos son utilizados por los autores del artículo haciendo una evidente alusión al trabajo de Ma (1999) en el que se menciona que para elaborar *story problems* sobre la división de fracciones se usan tres modelos que ofrecen distinto significado a la operación: *measurement model, partitive model,*y *product and factors model.*

enseñanza demandan del profesor conocimiento de significados, propiedades y definiciones de los tópicos matemáticos involucrados.

> "*Highlighting the mathematical demands of these mundane and seemingly generic teaching practices can also help teachers appreciate the* ***specialized types of mathematical knowledge*** *and skill used in their work. […] Teaching is mathematically demanding work, requiring* ***specialized knowledge****, skills, and ways of reasoning not learned through typical mathematics courses or used in other professions*" (Suzuka et al., 2009, p.19, el énfasis es nuestro).

Sería natural pensar que estos conocimientos son especializados del profesor de matemáticas, pero, según las definiciones, no es posible afirmarlo. No vemos en estos ejemplos una manera especial de mirar el contenido involucrado, ni tampoco conocimiento de un tipo de matemática especial a la que no puedan o necesiten tener acceso los estudiantes u otros profesionales. Lo que sí es evidente es un uso específico de esos conocimientos.

Más allá de algunas dificultades detectadas en el MKT con respecto a la delimitación del conocimiento especializado, derivadas de la definición de este subdominio al aludir a actividades propias del profesor de matemáticas y no del conocimiento que permite realizarlas, coincidimos con dicho modelo en la consideración de un cuerpo de conocimiento propio del profesor de matemáticas. Sin embargo, este análisis detona en nuestro grupo de trabajo una reflexión sobre lo que puede considerarse como conocimiento especializado y lo que es realmente específico y necesario para el profesor, lo cual nos lleva a asegurar que, aunque la idea de que el profesor de matemáticas posea un conocimiento especializado nos parece del todo acertada, consideramos que este requiere tomar en cuenta más aspectos que sólo los significados, propiedades y definiciones. Consideramos que un conocimiento específico del profesor requiere tomar en cuenta el conocimiento sobre la enseñanza de esas propiedades y definiciones, así como sus modos de construcción.

Este conocimiento no se encuentra sólo en el dominio matemático puesto que es imposible pensar en esta especificidad sin considerar aspectos del conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tales como las formas en que construyen los sujetos, el desarrollo de la complejidad dentro de los temas, y las características de aprendizaje, entre otros, todo ello referido a un contenido matemático. Concluimos entonces que esta especialización debe referirse a su conocimiento profesional en conjunto, más que a una parcela en el dominio matemático (Escudero-Ávila, et. al, en prensa).

Por otra parte, Carrillo, Contreras y Flores (2013), además de analizar los problemas de delimitación entre el SCK y el CCK, justifican la necesidad de reformular el MKT centrándose en el análisis de las componentes del conocimiento del horizonte matemático, que hacen Ball y Bass en 2009 y que Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán (2013) reinterpretan para separar y reagrupar las componentes del mismo, como parte de un nuevo modelo de conocimiento. Además, Carrillo, Contreras et al. (2013) señalan algunas de las dificultades reportadas anteriormente sobre la delimitación del SCK y el conocimiento del contenido y los estudiantes y el conocimiento del contenido y la enseñanza, respectivamente, para mostrar que con una organización diferente puede mejorarse la comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas. Profundizaremos en la descripción de los resultados de estas investigaciones en la siguiente sección, al momento de mostrar la construcción del modelo de conocimiento especializado.

El análisis minucioso del MKT nos ha llevado a reflexionar sobre la idea de conocimiento especializado como un conjunto de conocimientos. Los primeros resultados de esta reflexión son presentados y discutidos en el Grupo de trabajo: *From a study of teaching practices to issues in teacher education,* en el CERME 8, donde los participantes reflexionan sobre la crítica y concuerdan en que las delimitaciones entre subdominios del modelo son difusas y las dificultades de asignación radican en las definiciones. En este espacio de discusión, nuestro grupo presenta también una propuesta de modelo, que consideramos un aporte a la investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, visto desde una perspectiva integral, el cual describiremos en el siguiente apartado.

II.3 El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Como grupo de investigación y como formadores de profesores de matemáticas, nuestro interés se centra en comprender el contenido del conocimiento profesional ligado a las matemáticas desde el punto de vista del proceso de enseñanza y aprendizaje del mismo, a diferencia de la intención de indagar acerca del conocimiento matemático situado en un contexto específico de enseñanza, que refleja el grupo de Michigan en el MKT. Desde nuestra perspectiva esta focalización en la actividad específica del profesor más que en el contenido matemático con el que el profesor trabaja, provoca definiciones basadas en el tipo de facultades que los conocimientos proporcionan al docente, más que hablar de los conocimientos en sí mismos (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013).

Buscamos, entonces, enfocar la especialización del conocimiento profesional, considerando el conocimiento del contenido matemático como el elemento distintivo y específico del profesor de matemáticas, además de tener en cuenta que la caracterización de este conocimiento especializado debía considerar la integración de las componentes que Blanco et al. (1995) llaman *estática* (relativo a los aspectos independientes del profesor como individuo y del contexto en que se desarrolla la enseñanza) y *dinámica* (que se refiere a entender que el conocimiento profesional se genera y evoluciona a partir de los propios conocimientos, creencias y actitudes, que requiere una implicación personal y que evoluciona a través de un proceso dialéctico entre la teoría asimilada y la práctica desarrollada, en un proceso de reflexión –acción - Climent, 2002).

Así, comenzamos el desarrollo de un enfoque en el cual se analizará lo especializado como resultado de la interacción de distintas formas de conocer el contenido matemático y no del contenido como una parte del dominio de conocimiento matemático necesario para la enseñanza, integrando conocimientos de y sobre la matemática, su estructura, su enseñanza, características y estándares de aprendizaje, así como la relación que se guarda con las creencias sobre matemáticas y sobre su enseñanza/aprendizaje, siendo el centro el conocimiento matemático (Escudero et al., 2012; Flores, Escudero y Carrillo, 2013; Carrillo, Flores et al., 2013).

Uno de los objetivos principales del grupo era establecer una diferencia sustancial con respecto del conocimiento pedagógico general, que pudiera forma parte del conocimieto profesional pero no del núcleo de conocimiento específico del profesor de matemáticas, puesto que este no está ligado directamente al conocimiento matemático del profesor. Además, consideramos importante eliminar las referencias externas a conocimientos matemáticos que puedan o no ser compartidos con otros profesionales, como un arquitecto o un matemático puro, además de establecer una separación del conocimiento especializado de profesores de otras disciplinas.

Una vez definido nuestro posicionamiento al respecto del conocimiento especializado, el grupo decide construir un modelo analítico para indagar acerca del conocimiento del profesor de matemáticas inspirado principalmente en el MKT, y recurriendo al análisis de las categorizaciones realizadas en otros modelos de conocimiento del profesor de matemáticas, como los que hemos mencionado anteriormente y en cuyas aportaciones al modelo profundizaremos más puntualmente en la descripción del mismo.

Surge así el *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*, que, como se mencionó anteriormente, se publica por primera vez en el contexto del CERME 8. Dado que en este congreso todas las presentaciones se llevan a cabo en inglés, el nombre del modelo aparece con su traducción a este idioma: ***Mathematics Teacher's Specialised Knowledge.*** Con fines de difusión internacional, el grupo ha adoptado el uso de las siglas correspondientes a la traducción en inglés del nombre del modelo y de sus subdominios, por lo que de aquí en adelante nos referiremos a él como MTSK.

El MTSK es un modelo diseñado desde la investigación y para la investigación, cuyo objetivo principal es servir como herramienta teórica y analítica que permita identificar el conocimiento específico del profesor de matemáticas y comprender la naturaleza del mismo, desde un punto de vista sistemático y artificialmente organizado para su análisis.

La estructura general del MTSK se articula en concordancia con Ponte (2012), que señala que la identificación del conocimiento necesario para el ejercicio profesional del profesor y el acceso a las concepciones que lo estructuran no bastan, es necesario además comprender la naturaleza de dicho conocimiento como un elemento inseparable de la acción del profesor y de la forma en que este se construye en contextos de procesos reflexivos o de la experiencia. Tomamos en cuenta para la elaboración del modelo los avances de investigación relacionados con estos conocimientos, su naturaleza, los elementos que los conforman y los distintos métodos de reconocimiento y exploración de los mismos, así como la relación entre el conocimiento del profesor y sus creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (Carrillo, Contreras, et al., 2014).

Apoyados principalmente en el MKT de Ball et al. (2008) y en el modelo de Shulman (1986), partimos planteando lo especializado como la integración de conocimientos matemáticos y conocimientos didácticos específicos del profesor de matemáticas, los cuales a su vez se dividen en seis subdominios y que consideramos permeados por las concepciones acerca de las matemáticas y su aprendizaje y enseñanza Buscamos una caracterización de los subdominios basada en comprender no solo lo que el profesor conoce, sino cómo lo conoce.

El MTSK como herramienta teórica permite modelar el conocimiento disciplinar, o podríamos decir nuclear, del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. En él subyace un trabajo de investigación teórica sobre los distintos modelos utilizados para la investigación de los conocimientos del profesor de matemáticas y los elementos que en ellos se consideran, reagrupados y organizados bajo una determinada concepción de lo que el profesor podría conocer sobre el contenido matemático inmerso en la enseñanza y cómo podría conocerlo, la cual se irá mostrando y delimitando en las siguientes secciones.

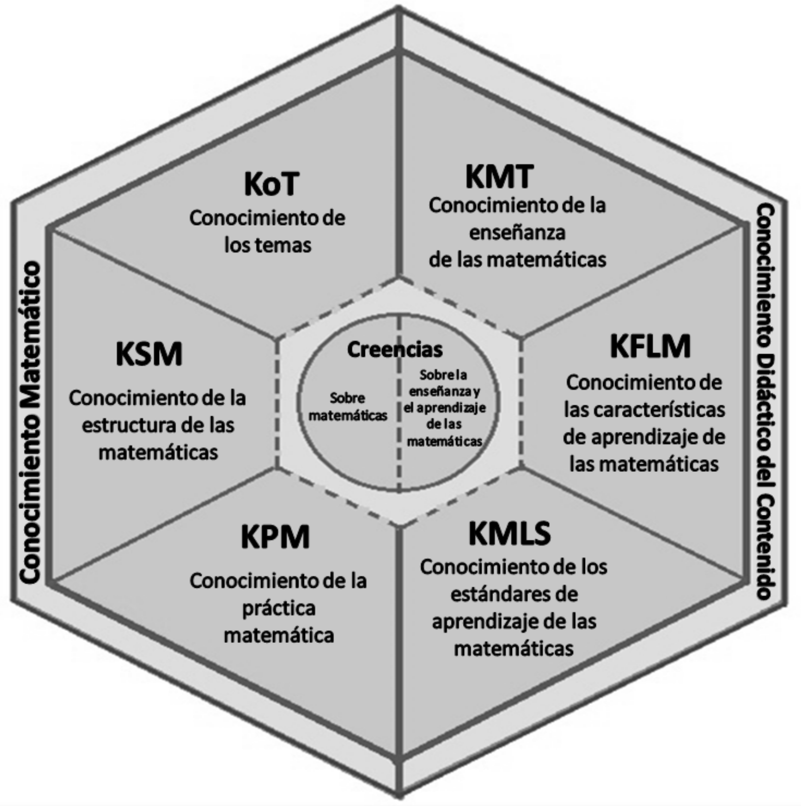


Figura II.3: *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)* con siglas de los subdominios en inglés.

Siendo la intención del modelo indagar acerca de la naturaleza misma del conocimiento que posee el profesor y no el que debería poseer, no es necesario partir de un MTSK ideal, para luego compararlo con el que se evidencia en los datos de la investigación, se genera un modelo de tipo descriptivo y no prescriptivo. Se trata además de una interpretación del conocimiento especializado desde un punto de vista integral, que toma en cuenta las distintas naturalezas, tanto del dominio matemático como del dominio didáctico específico, es decir, considera las diferencias que existen en cuanto a los criterios de validez de uno y otro dominio y destaca las diferentes facetas en las que el profesor conoce el contenido matemático. Los procesos de construcción de conocimiento asociados a estos dominios también poseen diferencias, así como su expresión o manifestación, lo que implica diferentes aproximaciones de los investigadores para acceder a ellos (Escudero-Ávila et. al, en prensa), sobre lo cual hablaremos más ampliamente al describir cada uno de los dominios.

A continuación describimos cada uno de los dominios que conforman el MTSK a la vez que describimos los fundamentos teóricos que han servido como base para su construcción.

II.3.1 El dominio de conocimiento matemático

Al igual que en otros modelos de conocimiento (e.g. Ball et al., 2008, Shulman, 1986), en nuestro modelo consideramos el dominio de Conocimiento Matemático (*Mathematical Knowledge*) como uno de los dos grandes dominios de conocimiento, esto responde a la evidente necesidad de que el profesor conozca en profundidad el contenido matemático que enseñará.

Este tipo de conocimiento es un elemento básico en los distintos modelos de conocimiento profesional, que además realizan una caracterización del conocimiento matemático del profesor de matemáticas diferenciando la naturaleza del propio conocimiento de formas distintas. El interés de estos modelos se centra en señalar diferencias entre lo que conoce y cómo conoce las matemáticas el profesor y lo que conocen los estudiantes, o lo que podrían conocer otros profesionistas o usuarios de esta disciplina.

Shulman (1986) parte de la consideración del *Subject Matter Knowledge* como el conocimiento de la estructura sustantiva, es decir, la variedad de formas en las que los conceptos y principios básicos de la disciplina se organizan, y el conocimiento sintáctico de la disciplina, que se refiere al conjunto de formas en que la verdad o falsedad, validez o invalidez se establecen. Este conocimiento es relacionado con la necesidad que Shulman considera que el profesor tiene sobre el saber *qué* enseña y *porqué* lo enseña.

Como ya hemos mencionado anteriormente, Ball et al. (2008) distinguen el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento del horizonte matemático. En el análisis sobre la naturaleza del conocimiento especializado, realizado en la sección 2.3, hemos dejado claro que este no puede formar parte del dominio de conocimiento matemático como un subdominio dentro de nuestra propuesta, por lo que nos centramos en analizar el contenido de los dos subdominios restantes.

En Ball y Bass (2009) se presentan tres componentes del conocimiento del horizonte matemático (HCK) , en donde se propone una subdivisión con respecto a los temas [HCK(T)], en el que están las conexiones tanto entre temas de matemáticas como con temas de otras disciplinas y que se refiere al conocimiento de las principales ideas y estructuras de la disciplina y las conexiones entre diferentes entes matemáticos, y al desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente, así como al conocimiento de conexiones con contenidos posteriores y anteriores a los que se están tratando; con respecto a las prácticas [HCK(P)], en el que se contempla cómo es construida la matemática, las formas de conocer y crear o producir en Matemáticas, aspectos de la comunicación matemática, el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, establecer relaciones (entre conceptos, propiedades, etc.), correspondencias o equivalencias o elegir representaciones, generalizar o explorar; y con respecto a los valores [HCK(V)], que contiene los principales valores cuando se trabaja o se hacen matemáticas, en donde se consideran los valores centrales de la disciplina, como la precisión y el cuidado con la consistencia del lenguaje matemático, el gusto por la coherencia argumental, la corrección y la exactitud como opuesto de la ambigüedad [no como opuesto de la aproximación] (Carrillo, Contreras et al., 2013).

Montes, Aguilar et al. (2013) realizan un análisis sobre estas componentes del HCK y reportan que la naturaleza de cada componente es sustancialmente distinta y que el único elemento que parece conectar estos tres elementos del subdominio es la idea de matemática elemental desde un punto de vista avanzado y matemática avanzada desde un punto de vista elemental. Estos investigadores comentan que la definición de este subdominio y el desglose de las componentes es tan amplio que pareciera que no hay ningún aspecto del conocimiento matemático que quede fuera del HCK. Los elementos del HCK(T) referidos a las ideas principales de la disciplina y su estructura pudieran dar cabida a todo el conocimiento matemático común, entendiéndolo como el conocimiento de lo que es la matemática, vista como un conjunto de *Temas* incardinados en una *Estructura*. El HCK (P), por su parte, aglutina los conocimientos relativos a la forma (*el cómo*) en la que se construye. (Carrillo, Contreras et al., 2013).

Por otro lado, la idea de definir el conocimiento de manera intrínseca al contenido, y no haciendo alusión a elementos externos al conocimiento profesional del profesor como otros usuarios u otras profesiones, nos obligaba a reinterpretar la definición del conocimiento común distanciándonos de su consideración como el conocimiento básico del profesor distinto al de otros profesionistas o al de sus estudiantes. Para esto nos fue de gran utilidad el marco *Proficiency in Teahing Mathematics*, de Schoenfeld y Kilpatrick (2008)[7], que se enfatiza la importancia de que el profesor posea un conocimiento amplio de las matemáticas escolares así como de una comprensión profunda de las mismas. Gómez (2002) utiliza un esquema de tres tipos de significados que pueden ser asociados a un contenido matemático: la estructura conceptual, que es:

> "la descripción, a nivel de conceptos y relaciones entre ellos, de la estructura matemática en cuestión. Por lo tanto, la estructura conceptual no es solamente la enumeración de los conceptos que se encuentran involucrados en la estructura matemática. La construcción de la estructura conceptual es un proceso que se inicia con la identificación de los conceptos y algunas de sus relaciones" (p. 263).

El siguiente tipo de significado son los sistemas de representación, al respecto señala que "la estructura conceptual deberá representar la estructura matemática en todos sus posibles sistemas de representación. Cada uno de estos sistemas de representación aporta un significado de la estructura matemática desde la perspectiva de las matemáticas escolares" (p. 265).

Finalmente, el tercer tipo es la fenomenología y modelos el cual comprende "identificar, describir, caracterizar y clasificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser organizados (modelizados) por subestructuras contenidas en la estructura en cuestión" (p. 268).

Es importante señalar que al pretender utilizar este modelo para analizar el conocimiento del profesor estamos buscando dotar a los subdominios de suficiente amplitud, de manera que todo lo que pueda conocer el profesor esté contemplado en el modelo.

Después de realizar un análisis de los distintos enfoques de los modelos, decidimos organizar el conocimiento matemático con base en tres vertientes: el conocimiento (profundo) del contenido matemático en sí (conocimiento de los temas), de su estructura (conocimiento de la estructura matemática) y de cómo se procede y produce en matemáticas (conocimiento de la práctica matemática), además de eliminar las referencias a un conocimiento común del contenido, puesto que nuestro interés es realizar una definición intrínseca de los subdominios y no buscar referencias externas. Así, todo lo que se incluya dentro del modelo será necesario para el profesor sin importar el uso que puedan darle otras personas instruidas matemáticamente.

II.3.1.1 Conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics - KoT*)

Comencemos por decir que nos referiremos a *los temas* como los contenidos provenientes de los bloques de conocimiento tradicionalmente estudiados en matemáticas, considerando como referente las áreas propuestas por el *National Council of Teachers of Mathematics*-NCTM (2000) en los estándares matemáticos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad, los cuales están relacionados entre sí. Los temas son los componentes de estas grandes ramas y pueden variar de acuerdo al currículo de cada país.

Coincidimos con los autores de los modelos de conocimiento mencionados anteriormente en que es necesario que el profesor conozca el *qué,* y el *porqué* de los contenidos que enseña, sin embargo nos interesa poner especial atención en la forma en la que estos contenidos deben ser conocidos por el profesor, es decir, *cómo* manejarlos y trabajarlos matemáticamente hablando. Dado que consideramos que dicho conocimiento debe ser transmitido a los estudiantes de manera que estos también puedan encontrar sentido a la matemática que construyen y desarrollan (Flores, Escudero

---

[7] Los autores declaran que basan la construcción de esta componente de su modelo en la idea de conocimiento profundo de Ma (1999).

& Carrillo, 2013; Carrillo, Climent et al., 2013), el profesor deberá reconocer características específicas del contenido desde un punto de vista puramente matemático.

Definimos el KoT como el conocimiento que tiene el profesor sobre los contenidos matemáticos escolares, desde una perspectiva de amplitud y profundidad como la referida en el modelo de Schoenfeld y Kilpatrick (2008), cuyas bases se refieren al trabajo de comprensión profunda de Ma (1999). Esto supone más que sólo conocer el conocimiento de la matemática como disciplina; el profesor debe conocer y entender los contenidos de la matemática escolar, requiriendo así de comprender sus propiedades y significados de manera fundamentada, los procedimientos, estándar y alternativos, que se emplean al abordar un determinado contenido, o las distintas formas de representación matemática o registros de representación asociados al mismo, además de los fenómenos que pudieran estar asociados a la naturaleza de los contenidos, así como aspectos epistemológicos ligados a la matemática que permiten al profesor comprender diferentes significados que pueden atribuírsele al contenido (Carrillo, Climent et al., 2013; Carrillo, Contreras et al., 2013).

Esto coincide con las componentes de conocimiento *de* matemáticas que Climent (2002) y Muñoz-Catalán (2010) consideran como parte de la caracterización del conocimiento profesional del profesor, en la que se refieren al conocimiento del conjunto de conceptos y procedimientos matemáticos, tanto los estructurantes de la materia (los que se refieren a la matemática en general) como los más específicos o locales de contenidos concretos; los hechos; las propiedades y relaciones; los significados que los sustentan; sus representaciones; y las relaciones entre los contenidos (que en el MTSK situaremos en otro subdominio).

Con la intención de profundizar en la caracterización de los subdominios y con miras hacia la construcción de un instrumento de análisis de los mismos, una vez definido el contenido general del subdominio, hemos considerado subdividirlo en categorías que permitan identificar y organizar el conocimiento del profesor sobre los temas matemáticos[8]:

II.3.1.1.1 Conocimiento de los procedimientos matemáticos asociados a un contenido matemático

Dentro de esta categoría se considera el conocimiento *práctico* de trabajo matemático, es decir el *saber hacer*. Es importante para el profesor conocer los procedimientos estándar asociados a contenidos específicos, así como tener el conocimiento matemático suficiente para reconocer los procesos alternativos o no estándar que se ponen en juego al abordar un determinado contenido matemático. Podemos categorizar aquí el conocimiento de algoritmos convencionales y alternativos (*¿cómo se hace/utiliza?*); las condiciones suficientes para proceder (*¿cuándo se puede hacer/utilizar?*)[9]; los fundamentos de dichos algoritmos (*¿por qué se hace/utiliza así?*) y las características que tendría el objeto resultante asociadas al tema en cuestión.

Dentro de esta categoría clasificaríamos el conocer el algoritmo de los productos cruzados, el de invertir el divisor y utilizar el algoritmo para multiplicar en el caso de la división de fracciones, o bien el de dividir sólo los numeradores una vez convertidas ambas a fracciones con denominador común, así como el conocimiento que se tenga sobre la equivalencia de los distintos algoritmos y los contextos matemáticos en los cuales conviene usar uno y otro procedimiento.

---

[8] Para más información sobre este subdominio consultar: Escudero-Ávila et. al (en prensa) y en Vasco, Climent, Escudero-Avila y Flores-Medrano (en prensa).

[9] Esta categoría y sus características han surgido del análisis del trabajo de Omar por lo que las retomaremos en el análisis de resultados.

II.3.1.1.2 Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático

Se refiere al conocimiento sobre propiedades específicas del contenido matemático y los fundamentos que estas tienen, los cuales le dan sentido y significado. Por ejemplo se puede saber que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°, lo cual corresponde a conocer una propiedad de los triángulos. Además, el conocer el fundamento matemático (quizá la demostración)de esta propiedad también forma parte de esta categoría.

Consideramos en esta categoría el conocimiento del conjunto de propiedades que permiten definir un objeto determinado, y las formas alternativas que utilice el profesor para definir (aunque no incluimos aquí el conocimiento de las características que ha de tener una definición), dado que en la matemática escolar es común definir los objetos matemáticos utilizando una serie de propiedades que cumplen estos. Por ejemplo, saber que se define número par como aquel que es múltiplo de dos o se define triángulo acutángulo como aquel que tiene tres ángulos agudos o saber que no basta con conocer que no toda figura plana es un polígono, puesto que esta es también una propiedad de las figuras abiertas que no son polígonos.

II.3.1.1.3 Conocimiento de registros de representación asociados a un contenido matemático

Esta categoría se encuentra inspirada en los trabajos de Duval (e.g. Duval, 1995) sobre los distintos registros de representación semiótica, en los cuales puede representarse un determinado concepto dentro de la matemática. Por ejemplo, para el caso de una fracción podría distinguirse diferentes tipos de registros en los cuales puede representarse el concepto de un medio (D'Amore, 2009):

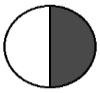
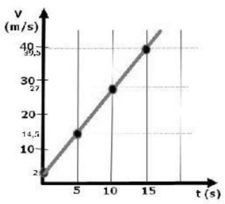
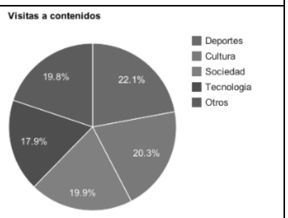
Registros semióticos	**Ejemplos de representaciones semióticas en un determinado registro.**
Aritmético	$\frac{1}{3}$ → Escritura fraccionaria, 0.3→ Escritura decimal
Esquemático o Pictórico	, 
Lenguaje natural	la quinta parte de un entero, un medio, dos tercios
Gráfico	, 
Algebraico	$f(x) = 10x + 3,$ $(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots$

Tabla II.1. Ejemplos de registros y representaciones semióticas.

Consideramos importante incluir en este subdominio el conocimiento sobre la existencia de distintos registros en los cuales puede representarse un determinado contenido (registro numérico, gráfico, verbal, analítico, etcétera), así como el conocimiento de la notación y vocabulario adecuado asociado a dichas representaciones (un medio, la mitad, etcétera).

Es importante señalar que no hablamos de la potencialidad o funcionalidad de un registro como recurso didáctico, puesto que este conocimiento no es puramente matemático, requiere de una reflexión y conocimiento ligado a la enseñanza y aprendizaje de un determinado contenido.

II.3.1.1.4 Conocimiento de la fenomenología asociada a un contenido matemático

Se refiere al conocimiento sobre la fenomenología de los conceptos (Freudenthal, 1983; Rico, 1997), considerada importante para el profesor, de manera que este tenga conocimiento de “una amplia variedad de contextos en los que situar el contenido, así como aspectos epistemológicos ligados a la matemática que permitan al profesor comprender los significados que pueden atribuirse a un contenido” (Carrillo, Contreras et al., 2013, p.196).

Consideramos importante incluir en este subdominio el conocimiento que el profesor tiene acerca de modelos atribuibles a un tema, vistos estos como fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático (Cantoral, Farfán, Lezama & Martínez-Sierra, 2006), entre ellos, los que aparecen en la génesis del propio concepto, es decir, aspectos epistemológicos ligados a la matemática que permitan al profesor comprender los significados que pueden atribuirse a un contenido.

Un ejemplo es el conocimiento sobre el tipo de problemática que puede asociarse a un determinado algoritmo para resolver una división de fracciones (Flores, 2008). En Ma (1999) se muestra un estudio en el cual los profesores chinos ofrecen diferentes modelos de *story problem* asociados la división de fracciones $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$; de estos resultados, Ma identifica tres tipos de modelo asociados al significado de la división de fracciones:

- *Measurement model:* ¿Cuántos $\frac{1}{2}$ metros hay en algo que mide 1 y $\frac{3}{4}$ metros de longitud?, es decir, ¿cuántas veces cabe $\frac{1}{2}$ en $1\frac{3}{4}$?
- *Partitive model:* Si la mitad de una determinada longitud es 1 y $\frac{3}{4}$ metros, ¿qué tan largo es el todo?, lo que equivale a hacer $1\frac{3}{4} * 2 = 1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$
- *Product and factors model*: Si uno de los lados de un rectángulo de $1\frac{3}{4}$ metros cuadrados es de $\frac{1}{2}$ metro, ¿cuánto mide el otro lado?, o dicho de otra forma, ¿qué número multiplicado por $\frac{1}{2}$ da como resultado $1\frac{3}{4}$?

Al respecto, Schoenfeld y Kilpatrick (2008) comentan que un profesor que conoce estos modelos puede trabajar más productivamente con los estudiantes que tienen dificultades con la división de fracciones, a diferencia de un profesor cuyo conocimiento es más limitado.

Por otro lado, se considera el conocimiento que el profesor tiene acerca de la relación del contenido matemático con otros campos y aplicaciones del conocimiento matemático (Muñoz-Catalán, 2010). Por ejemplo, que el profesor conozca que una aplicación para el teorema de Thales es la medición de distancias inaccesibles.

II.3.1.2 Conocimiento de la estructura de la matemática (*Knowledge of the Structure of Mathematics* - KSM)

Este subdominio tiene sus bases en la idea de *Horizon Content Knowledge* (HCK) descrito en el MKT y definido como "una conciencia de cómo los temas se relacionan a lo largo de las matemáticas incluidas en el plan de estudios" (Ball et al., 2008, p. 403). Como habíamos mencionado anteriormente, Montes, Aguilar et al. (2013) comentan que la extensión de la definición de este subdominio y el desglose de las componentes deja poco delimitado su contenido y da la impresión de que no hay ningún aspecto del conocimiento matemático que quede fuera, lo que complica su identificación y análisis como un subdominio de conocimiento. Sin embargo, coincidimos en la consideración de que el conocimiento matemático del profesor incluya, no solo los temas como elementos aislados, sino que es necesario reconocer su integración en un sistema de conexiones que le permita comprender otros contenidos matemáticos posteriores o anteriores, ligados a estos. Esto se relaciona con la idea de conocer conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar ciertos conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas.

Figueiras, Ribeiro, Carrillo, Fernández y Deulofeu (2011) y Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu (2011) incorporan una diferenciación de tres tipos de conexiones dentro del HCK: las conexiones intraconceptuales, que tienen lugar en la proximidad de un único concepto; las conexiones interconceptuales, que se refieren a "ideas matemáticas que permiten vincular diferentes representaciones del mismo concepto o diferentes conceptos que los estudiantes afrontan en el mismo momento" (Martínez et al., p. 431); y las conexiones temporales, que se dan entre conocimientos previos y futuros.

Por su parte, Montes, Aguilar et al. (2013) señalan la importancia de hacer una distinción entre lo que Ball y Bass (2009) llaman HCK (T)[10] y HCK (P), puesto que su naturaleza y riqueza conceptual son sustancialmente distintas. Consideramos que el HCK (P) tiene entidad suficiente para considerarse como un subdominio de conocimiento matemático del profesor, por lo que lo ubicaremos como parte de nuestro subdominio de la Práctica Matemática (descrito más adelante). El HCK (V) está más vinculado a las concepciones y creencias que a los conocimientos. Y con respecto a las conexiones extra-matemáticas las consideramos como parte del conocimiento de la fenomenología que está ya ubicado en el KoT.

Definimos entonces un subdominio que engloba los conocimientos de conexiones inter-conceptuales y conocimientos tanto avanzados, como elementales (con respecto al contenido que se atiende), que permiten al profesor trabajar la matemática desde un punto de vista integral y estructurado.

Basados en estas reflexiones teóricas, se propone caracterizar y organizar este subdominio a través de categorías que distingan cuatro diferentes tipos de conexiones matemáticas que el profesor de matemáticas pudiera conocer[11]:

---

[10] Como mencionamos en la sección II.3.1, HCK (T), HCK (P) y HCK (V) se refiere al conocimiento del horizonte matemático respecto a los temas, las prácticas y los valores respectivamente.

[11] Para más información sobre este subdominio, consultar Montes (2014).

II.3.1.2.1 Conocimiento de la complejización de un contenido matemático

Estas conexiones relacionan los contenidos enseñados con contenidos que se abordarán en niveles posteriores. Una visión de la matemática elemental desde un punto de vista avanzado (Klein, 1933) se refleja en la proyección de los contenidos enseñados como potenciadores para contenidos a enseñar en un futuro. Por ejemplo, el conocimiento que tiene un profesor del trabajo con escalas como una complejización de la actividad de ordenar por tamaños, propia de Educación Infantil.

II.3.1.2.2 Conocimiento de la simplificación de un contenido matemático

Estas conexiones relacionan los contenidos enseñados con contenidos abordados en niveles anteriores. Una visión de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental (Klein, 1933) se refleja en la retrospección de los contenidos enseñados potenciados por los previos.

Montes, Contreras y Carrillo (2013) muestran el ejemplo de un profesor que establece una conexión de simplificación entre la forma de operar los números racionales y la de operar las expresiones algebraicas, al intentar ayudar a una estudiante que tiene dificultades para resolver la expresión algebraica $\frac{-\sqrt{(x^2+1)^3}+\frac{(x-1)-3\left(x^2+1\right)^2}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}}{(x^2+1)^3}$, que resulta de obtener la derivada segunda de una función y en la que debe explorar los puntos de inflexión, para lo cual el profesor sugiere a la estudiante considerar que el trabajo de simplificación de la expresión es equivalente a manipular la expresión $\frac{3+1/4}{7}$.

II.3.1.2.3 Conocimiento de conexiones transversales entre contenidos matemáticos

Se refiere a conexiones que tienen distintos contenidos y pueden relacionarse por alguna cualidad común y, por los modos de pensamiento asociados a dichos temas, contemplan esta característica común. Además incluimos aquí las ideas transversales a las matemáticas como elementos que estructuran diferentes contenidos de la matemática (Carrillo, Contreras et al., 2013).

Por ejemplo, los patrones de igualdad y similitud relacionan propiedades expresadas con relaciones de equivalencia ($6 \cdot 5 = 5 \cdot 6$), resultados de aplicar funciones y operadores a conjuntos numéricos ($f(x) = e^{x-1}$), o la congruencia y semejanza entre figuras ($\Delta ABC \cong \Delta DEF$).

II.3.1.2.4 Conocimiento de conexiones auxiliares entre contenidos matemáticos

Pensemos por ejemplo en el uso de ecuaciones para determinar los ceros (o determinar la no existencia de estos) de una función, consideramos que la conexión que se establece entre ecuaciones y funciones es de tipo interconceptual. No se trata de una conexión intraconceptual, ya que la ecuación no es una cualidad de la función, sino más bien un elemento auxiliar en la obtención de los ceros de la función (la existencia de los ceros de la función y por tanto las raíces de la ecuación para obtenerla, depende de la continuidad de la función en el punto evaluado) y tampoco es una complejización o simplificación entre ecuaciones y funciones. Aquí la necesidad de encontrar los ceros puede hacer de la ecuación un elemento auxiliar para la función. A este tipo de conexión lo llamaremos conexión auxiliar.

II.3.1.3 Conocimiento de la práctica matemática (Knowledge of the Practices in Mathematics - KPM)

La idea de distinguir este subdominio como parte del Conocimiento Matemático nace de la consideración del HCK (P) de Ball y Bass (2009) y de los trabajos de Schwab (1978); Ball y McDiarmid (1990); Ball (2003), y Rowland et al.(2009) acerca del conocimiento sintáctico, que Shulman (1986) incluía dentro del conocimiento de la materia a enseñar.

Se trata del conocimiento que un profesor tiene sobre las formas de proceder propias de la matemática y en especial de la matemática escolar, así como del razonamiento matemático, su conocimiento sobre distintos tipos de razonamientos y saber en qué contextos matemáticos unos son más adecuados que otros. Es importante distinguir el conocimiento de las relaciones o conexiones entre conceptos, propio del *conocimiento de la estructura*, del conocimiento del modo como se establecen dichas relaciones.

Con la inclusión de este subdominio en el modelo, se pretende poner énfasis en la necesidad de que el profesor conozca las formas de proceder para llegar a los resultados matemáticos y las características del trabajo matemático como disciplina científica, aunque sólo nos interesan los que tienen relación con la matemática escolar. Se trata de considerar el conocimiento sobre cómo se explora y se genera conocimiento en matemáticas, cómo se establecen relaciones, correspondencias y equivalencias, cómo se argumenta, se razona y se generaliza, qué papel tiene el convenio, y qué características tienen algunos de los elementos con los que se hacen matemáticas (como una definición o una demostración), además del conocimiento que tiene el profesor acerca de la lógica proposicional, de los modos de proceder (el conocimiento de heurísticos en la resolución de problemas, por ejemplo) y de la sintaxis propia de las matemáticas.

Este conocimiento se refiere a cómo se desarrollan las matemáticas independientemente del concepto abordado, como pudiera ser, por ejemplo, conocer el significado de una condición necesaria y una condición suficiente o saber la diferencia entre conocer *algunas* propiedades del polígono y conocer las propiedades suficientes como para establecer la definición de polígono. Consideramos este conocimiento, usado para trabajar genéricamente en matemáticas, una parte importante del conocimiento del profesor, ya que provee de estructuras lógicas de pensamiento que ayudan a entender el funcionamiento de diversos aspectos matemáticos.

Entendemos que este subdominio es fundamental para que el profesor no solo sea capaz de conocer los diferentes temas que pudiera impartir, y la integración en la estructura matemática que considere el propio profesor, sino que también ha de tener conciencia de cómo se razona y produce en matemáticas, para dar solidez a su propio conocimiento, así como para saber gestionar los razonamientos matemáticos puestos en juego por sus alumnos, a la hora de aceptarlos, refutarlos, o refinarlos, en caso de ser necesario.

Al hablar de prácticas matemáticas dentro del MTSK nos referimos a las acciones realizadas al resolver problemas matemáticos o enfrentarse a cualquier otra actividad matemática, es decir, a procesos puramente matemáticos, distintos de las prácticas profesionales del profesor, que se refieren a acciones específicas del profesor con fines de enseñanza o aprendizaje de un contenido.

Para este subdominio no se han construido categorías; sin embargo, buscamos caracterizarlo y profundizar en su contenido[12].

II.3.2 El dominio de conocimiento didáctico del contenido.

En esta sección mostraremos la fundamentación teórica que hemos desarrollado para este dominio, la cual se ha construido dentro del contexto de trabajo sobre el MTSK realizado en el grupo de investigación. Como ya hemos comentado anteriormente, aunque el modelo ha sido construido de manera colectiva, todos los miembros decidimos centrar esfuerzos en el desarrollo de subdominios específicos del MTSK. Mi papel como miembro de este grupo se centró en realizar aportaciones enfocadas a profundizar en el desarrollo teórico de los subdominios pertenecientes a este dominio didáctico, en particular a los subdominios de *características del aprendizaje* y de *la enseñanza de las matemáticas*. Esto genera que en este apartado se observe una mayor fundamentación y reflexión sobre la construcción de las categorías y la definición de estos subdominios, en contraste con la redacción del dominio matemático, que está basada en aportaciones de otros miembros del grupo e investigaciones colectivas. Esto no significa que los subdominios del Conocimiento Matemático tengan una débil fundamentación en este trabajo, sino que es posible encontrar información más detallada de ellos en trabajos de otros miembros del grupo.

Como es conocido por todo investigador que se interese por la línea de trabajo del conocimiento profesional del profesor, originalmente, Shulman (1986) considera el PCK como una de las componentes del conocimiento del contenido, concerniente al conocimiento del contenido para su enseñanza y que incluye los conocimientos del profesor sobre los temas enseñados con más regularidad, las formas más efectivas de representación de ideas, las analogías más poderosas, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, demostraciones, es decir, todas las formas de representación y formulación de contenido que lo haga comprensible para otros. Además, considera en este dominio el conocimiento de lo que facilita o dificulta el entendimiento de un tema, que está relacionado con las concepciones o preconcepciones y los conocimientos previos que tienen los estudiantes de distintas edades. Afirma que el PCK que tiene el profesor le permitirá elegir las mejores técnicas de organización y presentación de los contenidos acorde con las concepciones de los estudiantes, y que las investigaciones cognitivas relacionadas con las concepciones erróneas de los estudiantes y su influencia en el aprendizaje son una fuente de alimentación para este conocimiento (Shulman, 1986, 1987).

Shulman propone el conocimiento específico para la enseñanza como esencia del PCK, considerándolo como el conocimiento más potente para distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo:

> *"which goes beyond knowledge of subject matter per se to the dimension of subject matter knowledge for teaching. I still speak of content knowledge here, but of the particular form of content knowledge that embodies the aspects of content most germane to its teachability*" (Shulman, 1986, p. 9).

Como habíamos mencionado en apartados anteriores, a partir de que Shulman (1986) propusiera como un dominio de conocimiento el *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) se genera entre los investigadores un especial interés por profundizar en su comprensión, principalmente con la intención de obtener una mejor conceptualización de este constructo y en sus características como un conocimiento particular del profesor, propio de la labor de enseñanza. (e.g. Carpenter, Fennema, Peterson & Carey, 1988; Llinares, 2000; McDiarmind, Ball & Anderson, 1989; Pinto & González,

---

[12] Para más información sobre este subdominio ver la sección de resultados de Flores-Medrano (2015).

2008). Aunque las categorías propuestas inicialmente por Shulman han sido reinterpretadas, estas continúan siendo vigentes y siguen siendo consideradas un avance importante en las concepciones sobre el conocimiento del profesor (Godino, 2009).

Con respecto al nombre que se ha asignado a este dominio de conocimiento como elemento del MTSK, es importante señalar que hemos mantenido en la traducción al inglés del modelo el término *Pedagogical Content Knowledge*, queriendo aludir a los referentes y bases teóricas de las cuales surge la distinción entre un conocimiento disciplinar y un conocimiento didáctico de la disciplina; no obstante, en la traducción al español hemos decidido hablar de *Conocimiento Didáctico del Contenido*, que nos parece que conlleva un significado más acorde con nuestra intención de aludir a lo que Azcárate (1998) define como "un conocimiento profesionalizado de las matemáticas que capacite para una intervención didáctica fundamentada" (p. 27).

Este conocimiento didáctico matemático, aunque requiere del conocimiento matemático, es un conocimiento distinto, con entidad propia, con fuentes y referentes diferentes. Posee una estructura y naturaleza distintas del propio conocimiento matemático formal, puesto que está dirigido a la enseñanza de las matemáticas, cuya fuente principal vive en la Didáctica de la Matemática como cuerpo de conocimiento integrador en sí mismo de muchas fuentes de conocimiento (Azcárate, 1998).

Es por esto que no hemos adoptado términos como el de Conocimiento del Contenido Pedagógico utilizado por Llinares y Sánchez (1998), puesto que intentamos distinguir entre dos campos de la práctica: el didáctico, que se refiere a la estructuración y gestión de contenidos, y otro pedagógico, alusivo a la gestión y control interactivo de los hechos de la clase. En el MTSK se busca dejar de lado los aspectos generales estructuradores de los procesos de enseñanza-aprendizaje que intervienen en los contextos educativos (factores psicosociales, socioculturales y humanos), asociados a la pedagogía, para centrarnos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de una disciplina específica, es decir, los aspectos didácticos (Parada & Pluvinage, 2014). No incluimos en este dominio didáctico conocimientos pedagógicos en contextos de actividades matemáticas, sino tan solo aquellos donde el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Aunque reconocemos la importancia que tiene dentro del conocimiento profesional de todo profesor el conocimiento de aspectos de pedagogía general, no consideramos que estos sean parte del MTSK, puesto que no están ligados directamente con el contenido matemático, que es el corazón de este modelo.

Para el diseño del modelo y su uso en publicaciones en inglés, hemos optado como grupo de investigación por mantener el término PCK, acuñado por Shulman, dadas las dificultades de traducción al inglés de los términos *didáctico* y *pedagógico*, aunque coincidimos con Azcárate (1998) acerca de la necesidad de continuar con la reflexión sobre la conveniencia de mantener el término y los distintos significados que este ha ido sumando a lo largo de los años en distintas investigaciones:

> "Mantener el término y su significado, redefinido numerosas veces, puede ser más perjudicial y confuso que lo contrario. Posiblemente sea el momento de abandonar un término que nació con un significado y en un contexto, sobre el que nos esforzamos en matizar y dar nuevos contenidos sin terminar nunca de independizarlo de su significado inicial. Quizás sea necesario acuñar un nuevo término con un nuevo significado más acorde con la imagen actual del conocimiento profesional de un profesor de matemáticas" (p. 32).

Así, de aquí en adelante nos referiremos a este dominio como Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), que, dentro del MTSK, consideramos una parte de lo que el profesor requiere para su labor docente, y que es el complemento necesario al Conocimiento Matemático, ya que ambos darán sentido y orientación a las decisiones y acciones del profesor de matemáticas. Es precisamente la integración de estos dos tipos de conocimiento lo que conforma el conocimiento especializado.

Por otro lado, aunque se han establecido pautas que ayudan a identificar algunas de las componentes de este conocimiento o posibles formas en las que puede desarrollarse, aún existen discrepancias con respecto a su caracterización.

> “The idea of the pedagogical content knowledge has been elaborated in numerous studies (e. g., Carpenter, Fennema, Peterson & Carey, 1988; Grossman, 1990; Ma, 1999; Sherin, 1996; Stein, Baxter & Leinhart, 1990). Such studies indicate ways in which teachers' knowledge shapes what the teachers are to do in the classroom at times constraining their options, at times providing the support-structure for a wide range of activities. But there are many open questions as one considers the nature of teachers' knowledge. What forms does such knowledge take? How is it organized? How is it accessed? A comprehensive model of teaching needs to address such issues” (Schoenfeld, 1999, p. 247).

Dentro de esta investigación hemos realizado una comparación entre distintas propuestas de su contenido, tratando de localizar los elementos que tienen en común y el tipo de estructura que dan distintos autores a este tipo de conocimiento. La tabla II.2 muestra algunos de los documentos consultados para la elaboración de esta sección y los elementos de conocimiento que se identifican en ellos[13].

---

[13] La totalidad de las investigaciones consultadas para la elaboración de esta sección se irán incorporando a lo largo de la descripción del PCK y de sus subdominios, por lo que consideramos prudente colocar aquí sólo algunas de las investigaciones consultadas, como ejemplos relevantes.

Acercamientos y categorizaciones del Conocimiento Didáctico del Contenido		
Autor	**Sobre el conocimiento del profesor de matemáticas**	**Sobre el conocimiento didáctico del contenido**
Shulman (1986)	Distingue tres categorías de conocimiento: • Subject matter content knowledge • Pedagogical content knowledge • Curricular knowledge	**Subject matter knowledge for teaching** Incluye: • Los temas enseñados con más regularidad • Las formas más efectivas de representación de ideas • Las analogías más poderosas • Ilustraciones • Ejemplos • Explicaciones • Demostraciones Formas de representación y formulación de contenido que lo haga comprensible para otros.
Shulman (1987)	• conocimiento de la materia impartida • conocimientos pedagógicos generales • conocimiento del currículo • conocimiento pedagógico de la materia • conocimiento de los educandos y de sus características; • conocimiento de los contextos educacionales, • conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educacionales, y de sus fundamentos filosóficos e históricos.	El **PCK** adquiere particular interés porque identifica los bagajes distintivos de conocimientos para la enseñanza. Representa la mezcla entre materia y pedagogía por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza. El PCK de la materia es la categoría que permite distinguir mejor entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo.
Ball et al. (2008)	Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) • Mathematical Knowledge • Pedagogical Content Knowledge	Subdominios del PCK: • Conocimiento del contenido y los estudiantes • Conocimiento del contenido y la enseñanza • Conocimiento del currículo
Llinares (1996)	Conocimiento del contenido Conocimiento del contenido pedagógico	Retoma a Shulman, ***Conocimiento del contenido pedagógico*** El conocimiento que le permite al profesor adaptar el contenido a las necesidades de los aprendices particulares, incluyendo su conocimiento de lo que puede resultar fácil o difícil, el papel de determinadas representaciones y su vinculación a tópicos concretos, etc.

Llinares, Sánchez y García (1994)	Investigación específica del Conocimiento de contenido pedagógico del profesor	***Conocimiento de contenido pedagógico del profesor*** Un elemento importante del conocimiento de contenido pedagógico del profesor lo constituyen el conocimiento sobre las **representaciones instruccionales,** las cuales se refieren a un amplio rango de modelos que pueden comunicar alguna cosa relativa a la materia a los aprendices (McDiarmind et al. 1989), y que están vinculadas a los tópicos relativos a la labor de enseñar, y el modo de usarlas por parte del profesor. Algunos tipos de representaciones instruccionales que desempeñan un papel importante en la enseñanza son los dibujos y las representaciones gráficas que aparecen en los libros de texto, o los realizados por el profesor en la pizarra.
Carpenter et al. (1988)	Investigación específica del PCK	PCK basado en Shulman Para analizar el PCK de los profesores, los autores proponen centrarse en los conocimientos sobre: - Distinciones entre tipos de problemas de adición y sustracción. - Estrategias de los estudiantes para resolver los diferentes tipos de problemas - La posibilidad de éxito que tienen los estudiantes al resolver las distintas tareas (predicción de éxito y de estrategias) Se analiza también la relación entre el PCK del profesor y el logro o aprovechamiento de sus estudiantes.
Even yTirosh (1995)	Subject Matter Knowledge: “*The teacher needs not only understand that something is so; the teacher must further understand why it is so*” (Shulman, 1986, p.9). PCK (Shulman, 1986)	PCK como característica del conocimiento del profesor. Proviene de su experiencia como aprendiz y como profesor. *“Exposure to relevant developmental and cognitive research, including learning theories, and interactions with students, are other factors”* (p. 1). Una fuente de este conocimiento es la naturaleza y profundidad del SMK El PCK tiene varias componentes (solo mencionan la que será motivo de la investigación, la planeación): • *students' ways of thinking* • *the conceptions and preconceptions that students bring with them to the learning (cognitive research on student learning)*

Park y Oliver (2008)	Investigación específica del PCK	“El **PCK** es la comprensión y la actuación de los profesores sobre cómo ayudar a un grupo de alumnos a que comprendan una materia específica, usando múltiples estrategias, representaciones, y valoraciones instruccionales mientras trabaja dentro de las limitaciones contextuales, culturales y sociales del aprendizaje” (p.264)
Pinto y González (2006, 2008)	Investigación específica del PCK	Dimensiones del conocimiento didáctico del contenido: • Conocimiento del contenido a enseñar • Conocimiento de las estrategias y representaciones instruccionales • Conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante del tópico específico
Muñoz-Catalán (2010)	Dos componentes del conocimiento profesional: • El conocimiento matemático del contenido • El conocimiento didáctico del contenido	Indicadores del **Conocimiento Didáctico del Contenido** “Conocimiento didáctico del contenido respecto de la enseñanza: • El conocimiento y uso de recursos y modelos. • El conocimiento de distintos modos de representar el contenido y su potencialidad • Destrezas para evaluar las tareas en función de los alumnos • La habilidad para analizar críticamente materiales publicados • El diseño y selección de actividades, la adecuación de estas a las características de sus alumnos • La gestión de la actividad matemática en el aula (la capacidad para plantear situaciones que reten a los alumnos y se adecuen al transcurso de la acción, saber ofrecer ayudas adecuadas, la capacidad para mantener la actividad...) • La evaluación del aprendizaje matemático. • Habilidad para seleccionar las representaciones más adecuadas para sustentar el aprendizaje de los alumnos • La capacidad para proponer ejemplos potentes tanto para introducir los conceptos como para profundizar en ellos. Conocimiento didáctico del contenido respecto del aprendizaje: • El conocimiento de características, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de contenidos matemáticos (tanto locales como capacidades generales del razonamiento matemático).

		• La habilidad para interpretar el aprendizaje de los alumnos a partir de sus manifestaciones. • Habilidad para analizar y comparar críticamente las producciones de los alumnos, extrayendo características generales sobre el aprendizaje de los contenidos. • Conocimiento del modo en que aprenden sus alumnos concretos" (p. 79).
Schoenfeld y Kilpatrick (2008)	Proficiency in Teaching Mathematics • Knowing school mathematics in depth and breath • Knowing students as thinkers • Knowing students as learners • Crafting and managing learning environment • Developing classroom norms and supporting classroom discourse as part of "teaching for understanding" • Building relationships that support learning • Reflecting on one's practice	Se incluye en el modelo el PCK en términos de Shulman • Conocimiento de diferentes estrategias para enfrentar el error • Conocimiento de representaciones que se adecúen al acompañamiento de la estrategia • Conocer a los estudiantes como pensadores • Conocer a los estudiantes como aprendices • La emergencia y creación de entornos de aprendizaje • Desarrollo de normas del aula y apoyar el discurso del aula como parte de la "enseñanza para la comprensión" • Construcción de relaciones que apoyan el aprendizaje

Tabla II.2. Distintos acercamientos y categorizaciones del Conocimiento Didáctico del Contenido.

La fuente de selección de los documentos para esta revisión provino principalmente de los trabajos de miembros del grupo de investigación en los que se habían realizado caracterizaciones del PCK (e.g. Climent, 2002; Sosa, 2011), así como de trabajos en los que se indaga acerca de este conocimiento en particular, ya sea tratando de desarrollarlo, comprenderlo, caracterizarlo o realizando una reflexión teórica sobre este (e.g. Azcárate, 1998; Pinto & González 2006, 2008). Además se incorporaron investigaciones que aparecían referenciadas en varios de estos trabajos y que consideramos como literatura *clásica* (e.g. Carpenter et al. 1988; Marks, 1989), así como investigaciones que aparecían en revistas especializadas en el periodo de elaboración de esta tesis (e.g. Depaepe, Verschaffel & Kelchtermans, 2013; Mitchell, Charalambous & Hill, 2014).

Algunas de estas investigaciones toman este constructo tal cual lo propone Shulman (1987), otras realizan adaptaciones a su contenido, agregando componentes, subdividiéndolo o realizando adecuaciones a una disciplina particular (e.g. Ball et. al, 2008). Sin embargo, existen dos componentes recurrentes en las definiciones realizadas por distintos autores: el conocimiento de las representaciones de la materia y las respuestas a dificultases de aprendizaje específicas, al cual se refieren como conocimiento de estrategias instruccionales y conocimiento de la comprensión de los estudiantes sobre el contenido (Muñoz-Catalán, 2010). En cuanto a los elementos que conforman cada una de las componentes, hay también elementos asignados recurrentemente a una componente en particular, como puede ser el conocimiento de los errores o dificultades más comunes al abordar un determinado contenido, que se ubica en los conocimientos referentes al aprendizaje, o el conocimiento de diferentes estrategias didácticas que puede tener el profesor para enfrentar dichos errores, que se ubica en los conocimientos referentes a la enseñanza.

Otro punto a destacar sobre estas investigaciones es la mezcla de habilidades o capacidades del profesor con conocimientos. Al momento de ligar directamente este tipo de conocimiento con la práctica de aula como actividad principal, se confunde lo que puede hacer el profesor con el conocimiento didáctico y el conocimiento en sí mismo. Un ejemplo de esta mezcla puede verse en los elementos propuestos por Muñoz-Catalán (2010), en los que habla sobre conocimientos, destrezas y habilidades. Por su parte, la descripción que hacen Ball et al. (2008) de los subdominios del PCK está basada en lo que el profesor podrá hacer o sobre el porqué necesita este conocimiento. Al hablar de que el profesor debe anticiparse a las respuestas de sus estudiantes, elegir ejemplos prediciendo las posibles respuestas o interpretar las respuestas de los estudiantes, se hace referencia a sus actividades docentes sin hablar de cuál es el conocimiento que le permitirá realizar estas tareas específicas (Carrillo, Contreras et. al, 2013).

Shulman (1987) menciona los estudios académicos sobre educación como una de las principales fuentes del conocimiento para la enseñanza. Por su parte, los estudios sobre PCK recomiendan, como principales fuentes de formación de este conocimiento, la investigación de la didáctica de las matemáticas, las creencias y concepciones de los profesores, la reflexión de la acción y sobre ella, la experiencia profesional y personal del docente, la interacción entre colegas, y las lecturas, entre otros (Pinto & González 2006, 2008). Este es un elemento sumamente relevante; sin embargo, aunque en algunos de los modelos propuestos pueda tener cabida este tipo de conocimientos, en ninguno de ellos se incorpora explícitamente como componentes del PCK. Pareciera que estos son conocimientos deseables pero no esperables del profesorado. En el caso del MTSK, hemos considerado importante poner énfasis en el análisis de la relación entre los resultados de las investigaciones en didáctica de la matemática y lo que el profesor conoce sobre ellos, que algunos autores denominan como relación entre teoría y práctica (e.g. Sánchez, 2011).

Apoyados en la reflexión de las características analizadas anteriormente, y en los principios teóricos bajo los cuales se concibe la construcción del MTSK, decidimos imprimir en este dominio un especial énfasis en el reconocimiento de las diferencias entre la naturaleza de este dominio y la del dominio del conocimiento matemático, tomando en cuenta las distinciones en cuanto a los criterios de validez, los procesos de construcción de conocimiento asociados a estos, así como su expresión o manifestación, lo que implica diferentes vías para acceder a ellos.

Las investigaciones específicas sobre el PCK han puesto en evidencia la complejidad de comprensión y definición de este tipo de conocimiento (Pinto & González, 2008). Esta complejidad puede deberse a que la naturaleza misma del conocimiento profesional[14], que lo define como un conocimiento, entre otras cosas, complejo y parcialmente tácito, lo vuelve de difícil acceso para los investigadores, pues, como señalan Baxter y Lederman (1999), la cognición del profesor se lleva a cabo inconscientemente, por lo que los profesores no siempre pueden expresar sus pensamientos y creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje. Es un constructo constituido por lo que los profesores conocen, lo que hacen y las razones por las que lo hacen, sin embargo, esto no siempre puede verse directamente reflejado en su práctica.

> "Coincidiendo con G. H. Mead y J. Dewey (en Corbin y Strauss, 2008), […] el conocimiento posee una naturaleza relacional y que se crea a través de la acción y la interacción. Desde esta perspectiva, el conocimiento profesional del profesor, que adquiere y muestra en un momento determinado, viene dado por la situación en la que se encuentra y por las interacciones que establece con los alumnos, con las situaciones de enseñanza-aprendizaje y con los diversos contextos en los que participa y se desarrolla. No obstante, parece que la incidencia del contexto es mayor en el desarrollo [del Conocimiento Didáctico] que en las demás" (Muñoz-Catalán, 2010, p.80).

Dentro del MTSK decidimos mantener el conocimiento didáctico del contenido como un dominio de conocimiento por la importancia que tiene para el profesor el conocimiento del contenido matemático entendido desde el punto de vista de un contenido a enseñar (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas), desde el punto de vista de un contenido a aprender (conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas) y desde una visión general de los estándares de aprendizaje que se pueden/pretenden alcanzar dentro de la educación matemática (conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas). Sin embargo, consideramos que un reajuste en la definición de las componentes de este dominio puede ayudar a clarificar la definición y composición de este, así como al reconocimiento de posibles vías para su desarrollo.

A continuación describiremos cada uno de los subdominios que conforman el Conocimiento Didáctico dentro del MTSK, así como las bases teóricas con las que han sido construidos y categorizados.

II.3.2.1 Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Features of Learning Mathematics* - KFLM)

Con respecto al conocimiento referente al aprendizaje, la tendencia de los modelos de conocimiento es centrarse en el estudiante como el actor principal en el proceso de aprender (e.g. Pinto, 2010; Schoenfeld & Kilpatrick, 2008), lo cual deriva en descripciones de componentes

---

[14] Hemos hablado en profundidad sobre la naturaleza del conocimiento profesional en el apartado II.1.2

referidas al conocimiento que tiene el profesor sobre los estudiantes más que reconocer características específicas del contenido que pudieran tener influencia en su aprendizaje[15].

Coincidimos con los investigadores que reconocen la importancia de poseer un conocimiento que le permita al profesor interpretar las producciones de los estudiantes o desarrollar la capacidad de anticipar razonamientos posibles, así como de asociar distintos contextos que influyen sobre el aprendizaje con el fin de obtener un control sobre el proceso de aprendizaje de sus estudiantes y de entender la procedencia de dichos razonamientos, los errores, las dificultades de aprendizaje o de concepciones erróneas de sus estudiantes. Sin embargo, más que entender las tareas que enfrenta el profesor en su práctica, nos interesa saber cuáles son los conocimientos que se ponen en juego al enfrentar estas tareas o al intentar desarrollar estas habilidades específicas.

En Flores-Medrano, Escudero-Avila, Montes y Carrillo, (en prensa) se analiza la evidente necesidad de que el profesor conozca aspectos relacionados con los procesos de aprendizaje de sus estudiantes, la cual ha derivado en la elaboración de trabajos de investigación sobre las relaciones *profesor-estudiante* y *estudiante-contenido*, necesarias en el proceso de enseñanza y aprendizaje (e.g. Cantoral & Farfán, 2003; Serrano & Pons, 2008;). Estas relaciones se refieren a dos formas distintas de interpretar los procesos de construcción del conocimiento matemático. La relación *profesor-estudiante* pone en el centro el conocimiento que tiene el profesor acerca del estudiante como sujeto cognoscente. En contraste, la relación *estudiante-contenido* se enfoca en el conocimiento que tiene el profesor del propio proceso de aprendizaje. Estas dos formas de interpretar las relaciones implicadas en los procesos de aprendizaje parecen provocar un cambio importante en los procesos de análisis del conocimiento del profesor.

Modelos como el MKT, que considera el subdominio de Conocimiento del Contenido y los Estudiantes, ponen de manifiesto el énfasis en el conocimiento que el profesor tiene acerca del estudiante como aprendiz de matemáticas, lo que se corresponde con el estudio de relaciones *profesor-estudiante*.

> "Combina conocimiento acerca de los estudiantes y conocimiento acerca de matemáticas [… algunas tareas del profesor] requieren una interacción entre un entendimiento específico de la matemática y familiaridad con los estudiantes y sus pensamientos matemáticos. El conocimiento de estudiantes comunes es central" (Ball et al., 2008, p. 401).

Entre otras cosas, un análisis realizado con este marco requiere de la utilización de elementos de corte psicológico y antropológico que permitan analizar las interacciones del profesor con "el colectivo estudiantes" y el conocimiento que se desprenda de dichas interacciones Flores-Medrano et al. (en prensa).

> "Diferentes autores (por ejemplo, Shulman, 1986; Marks, 1989; McDiarmid, Ball & Anderson, 1989; López, 1999) insisten en la necesidad de que el profesor, además de conocer los procesos psicológicos de aprendizaje, debe también conocer cómo aprende un alumno a estudiar un tópico específico. Esto implica conocer el origen y evolución del proceso cognitivo del estudiante (según edad, grado, experiencia y escolaridad), las motivaciones (intrínsecas y extrínsecas), las expectativas e intereses, las maneras de aprender, las preconcepciones, concepciones y dificultades relativas al aprendizaje de las matemáticas en general y del tópico específico matemático en particular" (Pinto, 2008, p. 90).

---

[15] Sobre esto profundizaremos en la descripción de las categorías propuestas para este subdominio de conocimiento.

Desde nuestra perspectiva, el foco central del conocimiento especializado debe estar en el contenido matemático, por lo que decidimos centrar nuestra atención en los conocimientos del profesor sobre las características de aprendizaje inherentes a un contenido matemático en particular o a la matemática en general, cuyo contenido no está centrado en el conocimiento de los estudiantes como actores principales en el proceso de aprendizaje, lo cual no implica que se pretenda restar importancia al papel del estudiante en el proceso de aprendizaje, sino que nos interesa reconocer las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático y las características del contenido matemático en sí mismo como objeto de aprendizaje (Escudero & Carrillo, 2014).

Después de explorar distintas formas de organización del contenido del subdominio (Flores-Medrano et al., en prensa), en esta investigación nos hemos decidido por utilizar una categorización cuyo respaldo esté en los trabajos que toman como base la propuesta inicial de Shulman (1986) y cuyo foco central está en el profesor como conocedor de características específicas del contenido matemático como objeto de aprendizaje:

II.3.2.1.1 Conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático

Se refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Incluye el conocimiento de estructuras o teorías sobre el desarrollo cognitivo del estudiante tanto para la matemática en general como para contenidos particulares.

Como mencionamos anteriormente, a nuestro parecer, la consideración explícita del conocimiento sobre constructos teóricos provenientes de la experiencia profesional o de la investigación sobre la generación de marcos que permitan explicar los procesos de construcción de conocimiento matemático desde el punto de vista de la enseñanza y de su aprendizaje, da cabida al análisis de los conocimientos que pueda tener un profesor sobre algunos de los resultados derivados de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica[16]. Esto puede permitirnos saber cómo usa el profesor dichos conocimientos, o identificar posibles vías de desarrollo de los mismos.

Un ejemplo de conocimiento a ubicar en esta categoría sería el conocimiento de un profesor sobre el proceso de génesis semiótica con el que, según Kuzniak y Richard (2014), los estudiantes transforman objetos concretos y tangibles en objetos matemáticos operatorios, o el conocimiento de la secuencia de Acciones, Procesos, Objetos y Estructuras (Arnon, et al., 2014) como explicación del desarrollo cognitivo del estudiante cuando este se enfrenta a la tarea de aprender en matemáticas.

II.3.2.1.2 Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático

La creciente cantidad de investigación cognitiva sobre el aprendizaje del estudiante, desarrollada en las últimas décadas, ha producido muchos resultados enfocados a la identificación de concepciones, errores, obstáculos y dificultades de los estudiantes y de su pensamiento matemático (Even & Tirosh, 1995). Esto nos lleva a incluir en este subdominio los conocimientos sobre los errores, obstáculos y dificultades, típicas y atípicas, relacionados con las características y procesos de aprendizaje (Muñoz-Catalán, 2010; Sosa, 2011); sin embargo, es importante señalar que incluimos

---

[16] Esta categoría y las características que describimos sobre ella también han surgido del análisis del trabajo de Omar por lo que las retomaremos en el análisis de resultados.

solo las que son propias del contenido matemático específico, es decir, las que están asociadas directamente con las características matemáticas y no pedagógicas del contenido. Un ejemplo de este tipo de conocimiento es el que tiene el profesor de que los estudiantes de secundaria tienden a creer que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, por una confusión con respecto a la aplicación de las leyes de la potenciación, o el conocimiento sobre las confusiones que los estudiantes de primaria pueden tener con los algoritmos de división y multiplicación de fracciones, al no comprender los fundamentos de dichos algoritmos.

Además, hemos querido considerar aquí el conocimiento de características que podrían utilizarse como ventajas o potencialidades aprovechables para el aprendizaje, asociados a la naturaleza de la matemática de un contenido particular. Por ejemplo, en Climent y Carrillo (2002) se observa una marcada tendencia a dibujar triángulos en tramas de puntos haciendo coincidir por lo menos uno de los lados con líneas horizontales y/o verticales de la trama, lo cual limita el trazado de triángulos distintos y la identificación y clasificación de éstos. Esta tendencia ha sido reportada dentro de la literatura de investigación (e.g. Azcárate, 1997) como una dificultad común asociada con el trabajo en los ejes coordenados y el uso habitual de la altura como elevación con respecto a las horizontales, entre otros.

Estos conocimientos pueden estar asociados al contexto específico en el cual se aprende el contenido matemático, de manera que puedan reconocerse distintos matices en las características de aprendizaje de un grupo particular de individuos. Ubicamos, por tanto, aquí el conocimiento que pueda tener el profesor sobre las dificultades, errores o potencialidades matemáticas asociadas al aprendizaje de un contenido específico de un grupo o lugar específico, así como a estudiantes particulares (Pinto & González, 2006).

II.3.2.1.3 Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático

Se refiere a conocimiento que tiene el profesor sobre los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los no habituales (Sosa, Aguayo & Huitrado, 2013). Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor sobre los métodos de solución típicamente usados para resolver un sistema de ecuaciones lineales, de acuerdo a la forma en la que se presenta la ecuación.

Forma de la ecuación de la recta	Sistema de ecuaciones	Método de solución más probable
Forma general	$y - \frac{5}{2}x - \frac{11}{2} = 0$ $y - \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} = 0$	Método de suma-resta para eliminar una de las variables.
Punto pendiente	$y - 3 = \frac{5}{2}(x+1)$ $y - 2 = \frac{3}{4}(x-1)$	Despeje de una de las variables, (en este caso "y" es la más sencilla) para luego buscar la igualación.
Explícita	$y = \frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$ $y = \frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$	Igualación de las ecuaciones para eliminar una de las variables.

Tabla II.3: Métodos de solución de ecuaciones asociados a su forma.

Además se categorizan aquí los conocimientos sobre el lenguaje o vocabulario formal o informal, así como los gestos o figuras usadas comúnmente por los estudiantes al abordar un determinado contenido, por ejemplo saber que los estudiantes tienen tendencia a usar representaciones clásicas de figuras geométricas como podría ser el uso de triángulos equiláteros o con bases horizontales o que suelen usar representaciones de figuras convexas y no cóncavas al trabajar con polígonos.

II.3.2.1.4 Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático

En esta categoría se pretende dar cabida a los conocimientos que tiene el profesor sobre las expectativas e intereses que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas, el conocimiento sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad asociadas comúnmente a las distintas áreas de la matemática, así como las preconcepciones o concepciones erróneas que pueden existir sobre un determinado tópico. Por ejemplo el conocimiento de que el tema de operaciones con números fraccionarios es siempre problemático para los estudiantes y produce rechazo o el conocimiento de que los estudiantes de primaria piensan que al multiplicar siempre se obtiene un número mayor que cualquier factor.

II.3.2.2 Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Teaching* - KMT)

La enseñanza puede ser identificada como la actividad principal de un profesor, el trabajo más representativo dentro de su práctica profesional ligado directamente al aula. Sin embargo, como señalamos en el marco teórico de esta investigación, nuestra definición de práctica profesional incluye distintos contextos y situaciones propias de la labor del profesor y que tiene la misma importancia como parte de su desarrollo como profesional de la educación.

Subrayamos, en su propia denominación, la integración de matemáticas y enseñanza, por lo que no se incluyen aquí conocimientos pedagógicos en contextos de actividades matemáticas, sino tan solo aquello en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza. Como en el resto de subdominios del PCK, puede ser un conocimiento fundamentado en teorías fruto de la investigación en Educación Matemática o en la observación y reflexión de la actividad matemática en el aula. (Carrillo et al., 2015) A diferencia de las tendencias de definición del conocimiento sobre la enseñanza de los modelos que hemos analizado, en el MTSK no se trata de analizar el conocimiento de matemáticas y de la enseñanza como elementos separados que se complementan, ni intentamos determinar las habilidades o tareas específicas de enseñanza que son propias del profesor de matemáticas.

Shulman (1986) se refirió inicialmente a las componentes del PCK como el conocimiento de las formas más efectivas de representación y formulación de un contenido, de manera que este pueda ser comprensible para otros. Se refiere a las analogías más poderosas, a las ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones utilizadas en la enseñanza. Menciona además que estas formas de representación “potentes” no son únicas, por lo que el profesor debe conocer distintas alternativas para utilizar a conveniencia.

Las componentes que se asocian más comúnmente al KMT son los conocimientos del profesor sobre estrategias específicas de enseñanza, las formas más efectivas de representación de ideas y el conocimiento de distintas tareas y actividades relacionadas con la enseñanza de un determinado contenido matemático. Estas componentes han sido utilizadas y reinterpretadas por otros autores, muchos de los cuales se han centrado en ampliar la definición de *las representaciones* como recursos para la instrucción, o las llamadas *representaciones instruccionales*, englobando el conocimiento que tiene el profesor de estas representaciones y las formas en las que las interpreta y utiliza en el aula, así como los vínculos que existen entre estos conocimientos con otros de este mismo dominio pedagógico (Pinto & González, 2008).

> “La atención se centra, así, en el conocimiento del profesor sobre diferentes representaciones instruccionales, vinculadas a un tópico concreto, y en el modo en que son empleadas dichas representaciones. McDiarmind, Ball y Anderson (1989) mantienen que los profesores están comprometidos de una manera constante en la construcción y el uso de esas representaciones” (Llinares, Sánchez & García, 1994, p. 200).

Las definiciones con respecto a estas representaciones son variadas y, a menudo, demasiado amplias. En ellas se hace referencia al conocimiento de distintas representaciones del contenido a enseñar, sus limitaciones, potencialidades y su origen, así como los elementos necesarios para su desarrollo, selección e implementación en el aula.

Llinares et al. (1994) consideran que de “los diferentes tipos de representaciones instruccionales que desempeñan un papel importante en la enseñanza [destacan] los dibujos y las representaciones gráficas que aparecen en los libros de texto, o los realizados por el profesor en la pizarra, los cuales pueden ser utilizados para ejemplificar, ilustrar o explicar un determinado contenido” (p. 200). Estas representaciones coinciden con lo que en el subdominio del KoT hemos considerado como diferentes registros de representación del contenido, puesto que consideramos que el conocimiento de dibujos, gráficas o cualquier otra representación es de tipo matemático. Sin embargo, no queremos decir con esto que el profesor no deba tener un conocimiento del uso didáctico que pueden tener estas representaciones, sino que consideramos que ese conocimiento es de una naturaleza distinta.

En este sentido podemos tomar como ejemplo el trabajo de Mitchell et al. (2014), en el que revisan distintas definiciones de *representación* expuestas en la literatura de investigación en Didáctica de las Matemáticas, en las que se describe qué son las representaciones, para qué sirven y las dificultades de su utilización. Se coincide en que estas son símbolos que tienen un significado asociado a un contenido matemático en un determinado contexto, como los dibujos, modelos manipulables, diagramas, lenguajes hablados o símbolos escritos. Con respecto a la utilidad en la enseñanza, comentan que pueden ser usadas como posibles ayudas para que los estudiantes puedan dar sentido a algo, que facilitan el aprendizaje, ayudan a organizar el pensamiento y a construir modelos mentales, pueden hacer que conceptos matemáticos abstractos sean más accesibles, promueven la conexiones entre distintos procedimientos y conceptos matemáticos, pueden ser usadas para realizar explicaciones de propiedades o algoritmos o para definir operaciones. Por último, presentan algunas dificultades reportadas en la literatura con respecto al uso de estas representaciones: usarlas sin construir ningún tipo de significado; aprender una representación con sus propias reglas, símbolos y lenguaje puede provocar un uso indiscriminado de reglas matemáticas abstractas dejando de lado el valor del aprendizaje del concepto matemático en sí mismo; si las representaciones son usadas de forma incorrecta, se pueden reforzar concepciones erróneas de los estudiantes; las representaciones no son transparentes por sí mismas, su transparencia reside en el proceso de su uso.

Apoyados en este respaldo teórico, Mitchell et al. (2014) presentan una investigación en la que hablan sobre las demandas de conocimiento que implican distintas tareas de enseñanza haciendo uso de representaciones para la suma y resta de números enteros que ayuden a interpretar el significado del “−”, el cual resulta particularmente difícil por ser contrario a la intuición. A diferencia de Shulman (1986), en este trabajo no se analiza el conocimiento de la representación en sí misma como una componente del PCK, sino que se habla de distintos tipos de conocimientos implicados en el uso de dicha representación como recurso didáctico. Los autores utilizan el MKT para organizar los conocimientos que consideran implicados en el uso de representaciones como recurso de enseñanza. Se concluye que los profesores requieren de una combinación de su conocimiento especializado del contenido, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del contenido y los estudiantes, dejando ver una superposición entre lo matemático y lo didáctico que el MKT no logra separar.

Estamos de acuerdo con estos autores en que el conocimiento que requiere el profesor para usar distintas representaciones de un determinado contenido no pertenece solo al dominio didáctico, puesto que requiere de una articulación que le permita, no solo reconocer las representaciones como recurso para la instrucción y las posibles formas en las que este será usado por los estudiantes, sino reconocer las características matemáticas específicas del recurso. El conocer por ejemplo los diferentes tipos de representación de los números racionales no implica saber que existen dificultades en el aprendizaje de las operaciones con ellos que dependen directamente del tipo de representación usada, ni conocer estrategias específicas de utilización de una determinada representación.

Como hemos mencionado antes, consideramos que el conocimiento de dichas representaciones es de tipo más bien matemático, en específico es Conocimiento de los Temas (KoT) y lo ubicamos en la categoría de registros de representación (Apartado II.3.1.1.3). Lo que consideramos un conocimiento didáctico de dicho contenido es el que tiene el profesor sobre las características matemáticas que hacen de esta representación la más propicia para utilizarla en la enseñanza, el cual innegablemente está ligado al dominio matemático, y a los demás subdominios del PCK, pero es, en sí misma, una forma distinta de conocer el contenido matemático.

Como mencionan Bosch y Gascón (2001), la decisión de elegir una determinada representación, recurso, material, formas de instrucción o secuencia para trabajar un determinado contenido, demanda del profesor especial atención en el potencial que tienen para ser usados en la enseñanza, considerando si sus características son las ideales para abordar el contenido matemático, si le es funcional, si su uso es pertinente o si existen otros posibilidades que pudieran serle de más utilidad. Sin embargo, dentro del MTSK consideramos importante que esas características estén directamente ligadas con el contenido matemático y no con aspectos pedagógicos generales.

> "Cada profesor aborda, diariamente, multitud de tareas que constituyen aspectos de algunos de estos problemas (así, por ejemplo, puede empezar a enseñar a resolver ecuaciones de primer grado para introducir el álgebra en la E.S.O. o plantear el problema de la medida de una magnitud continua para mostrar la necesidad de construir los números decimales). Para realizar dicha tareas el profesor utiliza técnicas didácticas –de ayuda al estudio– que están a su alcance (como, por ejemplo, el modelo de la balanza para enseñar a resolver ecuaciones de primer grado o la situación del grosor de una hoja de papel para introducir los decimales). El profesor no elige arbitrariamente las técnicas didácticas que utiliza sino que, por el contrario, esta elección está ligada a una manera más o menos explícita a ciertos argumentos justificativos e interpretativos de dichas técnicas. Estos argumentos abarcan también los presuntos beneficios didácticos de la utilización de una u otra técnica y dependen de la institución donde tiene lugar la enseñanza, de la formación que ha recibido el profesor, de sus conocimientos y creencias y, en definitiva, de sus múltiples sujeciones a diferentes instituciones (escolares, científicas, culturales,...)" (Bosch y Gascón, 2001, p. 2).

Decidimos reorganizar el contenido de este subdominio, tratando de reducir la ambigüedad en el uso del término representación, para lo cual establecemos algunas categorías que nos permitan hacer un análisis más minucioso de este:

II.3.2.2.1 Conocimiento de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático

Al igual que el KFLM, este puede ser un conocimiento fundamentado en teorías que han resultado de la investigación en Educación Matemática o en la observación y reflexión de la actividad matemática en el aula, por lo que este conocimiento puede provenir tanto de investigaciones, como de las propuestas didácticas que tiene el currículo, o de la experiencia previa del profesor. De acuerdo con Schoenfeld y Kilpatrick (2008), estas teorías condicionan la actuación del profesor y el uso que hace del conocimiento[17].

Consideramos importante explicitar aquí la incorporación de una categoría que dé cabida al conocimiento de las formas de enseñanza asociadas a un determinado contenido matemático. En este caso se trata de la inclusión de elementos teóricos que derivan directamente de los estudios específicos de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica, correspondientes a teorías de enseñanza, por ejemplo el conocimiento de la estructura general propuesta en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007) [Acción, Formulación, Validación e Institucionalización] bajo las cuales pueden diseñarse actividades para el aula y ambientes de trabajo matemático *ad hoc* a dichas actividades.

II.3.2.2.2 Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático

En esta categoría nos referimos al conocimiento de características matemáticas específicas de recursos y materiales utilizados para la enseñanza de un contenido particular y no solo al conocimiento de un recurso como tal, es decir, no incluimos como parte de esta categoría el que un profesor conozca la existencia del Geoplano como recurso didáctico, pero sí incluimos el conocimiento que tiene de este como instrumento para representar figuras planas, o el conocimiento de que es imposible representar en él triángulos equiláteros. Estas características sí están asociadas con el contenido matemático y no con aspectos pedagógicos generales. Evidencias sobre la importancia de reconocer las características matemáticas de los recursos matemáticos puede consultarse en Climent y Carrillo (2002), en donde se habla sobre la discusión que hacen estudiantes para profesor sobre el uso de la trama de puntos para trabajar la clasificación de triángulos y en el que se observa que este recurso tiene las mismas limitaciones que el Geoplano para construir triángulos equiláteros y la importancia de que el profesor conozca y reconozca las características matemáticas de los recursos que utiliza en clase.

II.3.2.2.3 Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático.

Como hemos mencionado anteriormente, el profesor necesita conocer los instrumentos que tiene disponibles para abordar el contenido, sus potencialidades, sus limitaciones y las repercusiones que tendría el usarlo como medio para presentar un contenido matemático. Por lo cual se incluyen en esta categoría los conocimientos sobre la potencialidad matemática que pueden tener ciertas secuencias de actividades, tareas, estrategias o técnicas didácticas, que los profesores consideren potentes en el abordaje de un contenido matemático y un momento particular de enseñanza.

Este subdominio involucra conocimientos sobre la potencialidad de actividades, estrategias o técnicas para enseñar un contenido matemático, así como sus limitaciones, o los obstáculos (de

---

[17] Esta categoría y sus características al igual que algunas otras en subdominios anteriores han surgido del análisis del trabajo de Omar por lo que las retomaremos en el análisis de resultados.

dicha actividad o recurso, por ejemplo) que deberán superarse para que la estrategia sea exitosa. Finalmente, los ejemplos elegidos para representar un contenido, las metáforas, las situaciones y las explicaciones, constituyen conocimiento sobre la enseñanza del contenido. Sirva como ejemplo el conocimiento de la metáfora de *pedir prestado* como explicación de la resta con llevada (y en un nivel de mayor profundidad, las posibles dificultades que puede propiciar y explicaciones alternativas como la de *reagrupar* -Ma, 1999). Es evidente en este ejemplo la vinculación entre el KMT y el KFLM, puesto que la elección de cierta metáfora o tarea específica provocará una determinada forma de aprender la resta, además el tener conocimiento sobre las dificultades que puede generar el uso de un cierto recurso permitirá al profesor prever las formas en las que los estudiantes abordarán la tarea, las preguntas que tendrán al respecto de los procedimientos o los errores que podrían cometer, ya sean los derivados del uso de la metáfora o los que provienen de la construcción misma de los significados de la resta, en este caso.

Consideramos aquellos elementos que denotan la intencionalidad de enseñanza del profesor en un tema determinado. En Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014) se menciona como ejemplo para esta categoría saber “en qué momento y qué tipo de ayuda brindar a los estudiantes, qué ejemplos son más potentes de acuerdo al momento e intencionalidad de la clase o conocer alguna tarea específica para propiciar el aprendizaje de un contenido matemático (conocer la Situación Didáctica del rompecabezas para el tema de proporciones)” (p. 65).

Incluimos el conocimiento de ejemplos adecuados para cada etapa o contexto determinado, el conocimiento del abordaje de una secuencia estructurada de ejemplos para ayudar a entender el significado de un contenido matemático, así como el conocimiento de condiciones específicas del aula a la que se dirigen determinadas secuencias de aprendizaje, las cuales norman el proceder del profesor, todo esto en función del contenido matemático que se aborda.

Estos conocimientos permitirán al profesor elegir un determinado material para el aprendizaje de un concepto o un procedimiento matemático, le capacitan para seleccionar los ejemplos más potentes o elegir un libro de texto en función de los beneficios que tenga este como recurso de enseñanza.

II.3.2.3 Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (*Knowledge of Mathematics Learning Standards* - KMLS)

Existen también discrepancias con respecto a la inclusión del conocimiento del currículum dentro del Conocimiento Didáctico. Aunque todos los modelos de conocimiento del profesor reconocen la importancia de tener conocimiento curricular, algunos lo incorporan en el dominio didáctico (e.g. Ball et al., 2008), otros lo consideran distribuido en varios dominios (e.g. Pinto, 2010) y otros lo ponen como un dominio distinto del matemático y del didáctico (e.g. Shulman 1986). Además, el conocimiento curricular es enfocado desde distintos puntos de vista, dado que se hace referencia a distintas formas de interpretación del currículo: como organizador de contenidos, como modelo de planeación del curso, como el que contiene estrategias de enseñanza, como estándar que ayude a la evaluación de saberes adquiridos o como el que norma lo que se debe aprender y cómo debe aprenderse en el curso. Por ejemplo, refiriéndose al dominio del Conocimiento Curricular, Shulman (1987) señala que es:

> "*Represented by the full range of programs designed for the teaching of particular subjects and topics at a given level, the variety of instructional materials available in relation to those programs, and the set of characteristics that serve as both the indications and contraindications for the use of particular curriculum or program materials in particular* circumstance" (p. 10).

Por su parte, Ball et al. (2008) consideran el conocimiento curricular como parte del Pedagogical Content Knowledge; sin embargo, no hay certeza con respecto a su ubicación: "*we are not yet sure whether this may be a part of our category of knowledge of content and teaching or whether it may run across the several categories or be a category in its own right*" (p. 400). En ambos casos, se ha considerado, sobre todo, el conocimiento de materiales y programas que sirvan como herramientas de trabajo para los profesores.

Dentro del MTSK se define un subdominio que engloba también el conocimiento curricular, sin embargo, a diferencia del MKT y la propuesta inicial de Shulman (1986), este no se limita a conocer el currículo como documento oficial, sino que contempla la posibilidad de poseer un conocimiento sobre lo que el estudiante debe aprender en un determinado nivel o momento de desarrollo, por lo cual se habla del conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático, más que de un subdominio curricular, el cual le permita adoptar una postura crítica y reflexiva al momento de abordar un determinado contenido.

Este subdominio da cabida a los conocimientos sobre los contenidos propuestos en las normativas curriculares institucionales, para saber lo que se prescribe en cada etapa, es decir, dar una ubicación temporal y contextual al contenido abordado, además de introducir el conocimiento de objetivos y estándares de aprendizaje *no oficiales* que pueda tener el profesor, así como objetivos y estándares procedentes de asociaciones profesionales o de los investigadores, o los que proceden de la experiencia del profesor respecto a los logros de aprendizaje, añadiendo un elemento de juicio y crítica en relación con lo prescrito por la administración educativa.

Nos referiremos a estándar de aprendizaje como aquello que indica el nivel de capacidad- atribuible a los estudiantes en un determinado momento escolar- para entender, construir y saber matemáticas.

A diferencia del conocimiento ubicado en el Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM), aquí se hace referencia a una ubicación temporal de los contenidos matemáticos y no a las conexiones interconceptuales que puedan existir entre distintos contenidos.

Para la profundización en la caracterización de este subdominio, hemos considerado las siguientes categorías:

II.3.2.3.1 Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico

Se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre lo que se espera que el estudiante aprenda en un determinado nivel escolar. Esto se refiere a los contenidos matemáticos a abordar que deben ser presentados a los estudiantes. Este conocimiento puede ser adquirido por el profesor a través de consultas de un documento rector que indique cuáles son esos contenidos, o como abstracción de las capacidades matemáticas específicas que requiere desarrollar en sus estudiantes en ese momento escolar. Por ejemplo, ubicaremos aquí el conocimiento que pueda tener el profesor de que la multiplicación es abordada en el primero y segundo ciclos de primaria según el Ministerio de la Presidencia [España] (2006)

II.3.2.3.2 Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar

Esta categoría se refiere al conocimiento sobre la profundidad con la que debe ser abordado un determinado contenido matemático, en relación con un ciclo escolar determinado. Por ejemplo, saber que en el grado 2 la multiplicación se trabaja primero como el número de veces, realizándose la transición hacia el segundo ciclo (grados 3 y 4), donde se ve como suma abreviada o reiterada, en disposiciones rectangulares (área de un rectángulo) y como cardinal del producto cartesiano (problemas combinatorios).

II.3.2.3.3 Conocimiento de la secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar

A diferencia de los conocimientos ubicados en el KSM, esta categoría se refiere al conocimiento sobre la secuenciación de diversos contenidos matemáticos, ya sea dentro de un mismo curso o pensando en cursos anteriores, es decir, los conocimientos y capacidades previas que tiene un estudiante para aprender un nuevo contenido en términos de lo que los estándares marcan que se debe conocer antes de abordar un determinado contenido, y lo que aportará este en el abordaje de temas posteriores, que no tiene por qué coincidir con las conexiones de Complejización o Simplificación que matemáticamente puedan construirse. Continuando con el ejemplo de la multiplicación, ubicaríamos aquí el conocimiento que tiene el profesor del segundo ciclo de que los estudiantes han trabajado ya la multiplicación como el número de veces.

II.3.3 Concepciones en el centro del modelo

Es importante señalar el papel de las concepciones y creencias[18] en el MTSK y las relaciones que consideramos con los conocimientos del profesor.

Tomando en cuenta el posicionamiento teórico adoptado en el apartado II.1.1 sobre las concepciones y creencias en el cual señalamos que no las diferenciaríamos entre sí, pero sí lo haríamos con respecto al conocimiento, situando a estas en el terreno de lo actitudinal y al conocimiento en lo cognitivo (entendiendo que ambos terrenos se influencian bidireccionalmente) en este apartado hablaremos acerca del rol de las creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y el por qué las colocamos en el centro del modelo MTSK.

Son muchas las investigaciones que han ofrecido evidencias o reflexiones acerca de las relaciones entre las concepciones de los profesores acerca de las matemáticas y sus prácticas de enseñanza o las relaciones con los conocimientos que utilizan o movilizan en su práctica profesional. Pinto y González (2006) hablan sobre algunas de las relaciones más significativas entre las concepciones de la matemática y su enseñanza y aprendizaje y el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas, así como entre niveles altos de conocimiento del profesor y una actitud positiva en la enseñanza, como puntos de atención comunes en la revisión de distintas investigaciones sobre el conocimiento para la enseñanza. Por otro lado, Thompson (1992) señala que los objetivos que un profesor considera deseables en el programa de matemáticas, su propio papel en la enseñanza, el papel de los estudiantes, las actividades apropiadas en el aula, los enfoques y énfasis de instrucción deseables y los procedimientos matemáticos legítimos, así como los resultados aceptables de la instrucción, son parte de su concepción sobre la enseñanza de las matemáticas. Schoenfeld y

---

[18] Como señalamos ya en el apartado II.1.1, en este estudio no diferenciaremos entre creencias y concepciones.

Kilpatrick (2008) por su parte hablan sobre la relación entre las acciones del profesor y su concepción sobre el aprendizaje de sus estudiantes:

> "*Consider, for example, what happens when a student goes to front of the classroom and flounders or makes a mistake while working on a problem. There is a wide range of possible responses to such a situation, varying from (a) having the student sit down and calling on another student, to (b) leading the student through a correct solution, or to (c) using the situation as an opportunity to raise and explore the mathematical issues entailed in the problem statement and the student's work on it. What the teacher chooses to do is, in large measure, a function of the teachers' view of students as learner*" (p. 13).

Como mencionamos antes, estas reflexiones y los resultados empíricos recopilados a lo largo de la trayectoria del grupo SIDM con respecto a las investigaciones sobre concepciones del profesor de matemáticas, realizadas por distintos miembros del grupo (e.g. Contreras, Carrillo & Climent, 1999; Flores & Carrillo, 2014), ponen de manifiesto la necesidad de tomar en cuenta las concepciones, tanto de estudiantes para profesor como de profesores en ejercicio, como un elemento que impregna todo el conocimiento especializado del profesor. Asimismo, el análisis de estas concepciones y de sus relaciones con el conocimiento especializado permitiría comprender y contextualizar las decisiones o intervenciones, así como el uso que hace el profesor de su conocimiento en la práctica profesional (Muñoz-Catalán, 2010).

Como resultado, se considera plasmar en el modelo de conocimiento una propuesta de relación entre las creencias y los conocimientos del profesor. En la Figura II.4 se observa una ampliación del centro del modelo, el cual ha sido representado con líneas discontinuas que lo separan de los subdominios de conocimiento. Esta representación gráfica del MTSK intenta reflejar la postura del grupo de investigación con respecto a la relación que existe entre creencias y conocimiento.

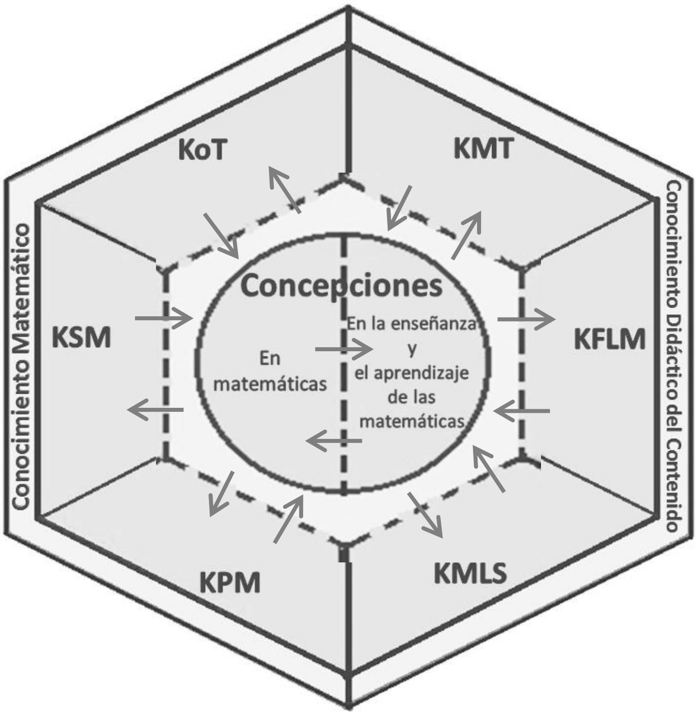


Figura II.4 Relación entre MTSK del profesor y sus concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

II.3.3.1 Concepciones del profesor sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje

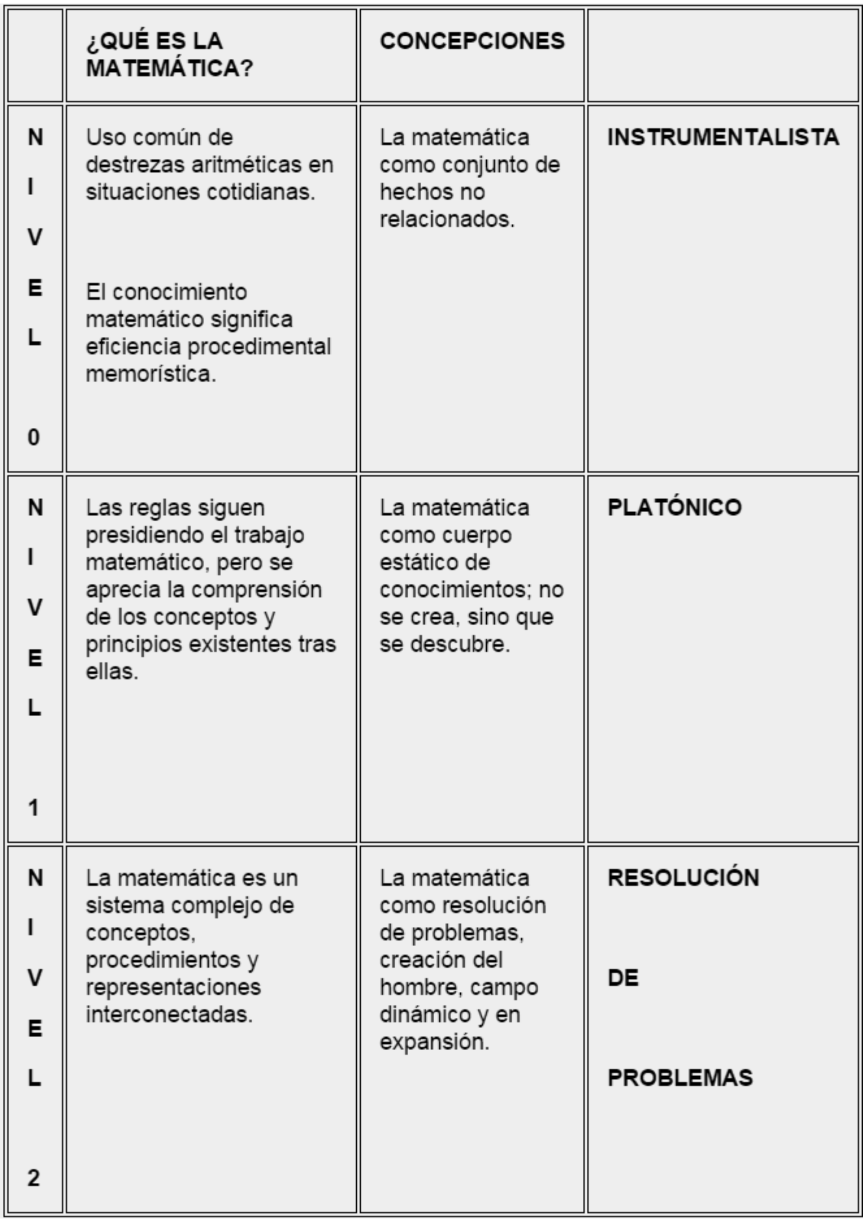
Con respecto a las concepciones del profesor sobre la matemática o sobre su enseñanza, nos basamos en el trabajo de Carrillo (1998), que las define como "el conjunto de creencias, y posicionamientos sobre la matemática (o su enseñanza) que supone el investigador posee el profesor, tras el análisis de sus opiniones y de las respuestas a preguntas sobre su práctica respecto a temas relativos a la naturaleza de la matemática (o de la enseñanza de la matemática)" (p. 43). En este sentido, Pajares (1992) señala la importancia de tener en cuenta que las creencias de los profesores no pueden ser observadas de manera directa ni son medibles, por lo que son el resultado de inferencias sobre lo que las personas dicen, pretenden o hacen.

> "El resultado es una visión de la creencia que se refiere a los juicios de un individuo sobre lo verdadero o falso de una proposición, un juicio que solo puede ser inferido de una comprensión colectiva de lo que está diciendo, pretendiendo hacer y haciendo" (Pajares, 1992, p. 316).

Carrillo (1998) presenta un estudio en el que se analizan las posibles relaciones entre las concepciones sobre las matemáticas de los profesores de Secundaria, sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su modo de resolver problemas matemáticos. El autor propone un sistema de clasificación que permita reconocer rasgos específicos sobre las concepciones de los profesores, de manera que estos puedan catalogarse de acuerdo a una determinada tendencia[19] de acuerdo al tipo de concepciones que se identifican en mayor proporción. En las Figuras II.3 y II.4 se muestran, respectivamente, las características que Carrillo (1998) destaca para cada concepción sobre la matemática y para cada tendencia didáctica (la Figura 11.4 se ha dividido en dos partes para que el tamaño de su contenido permita que este sea legible).

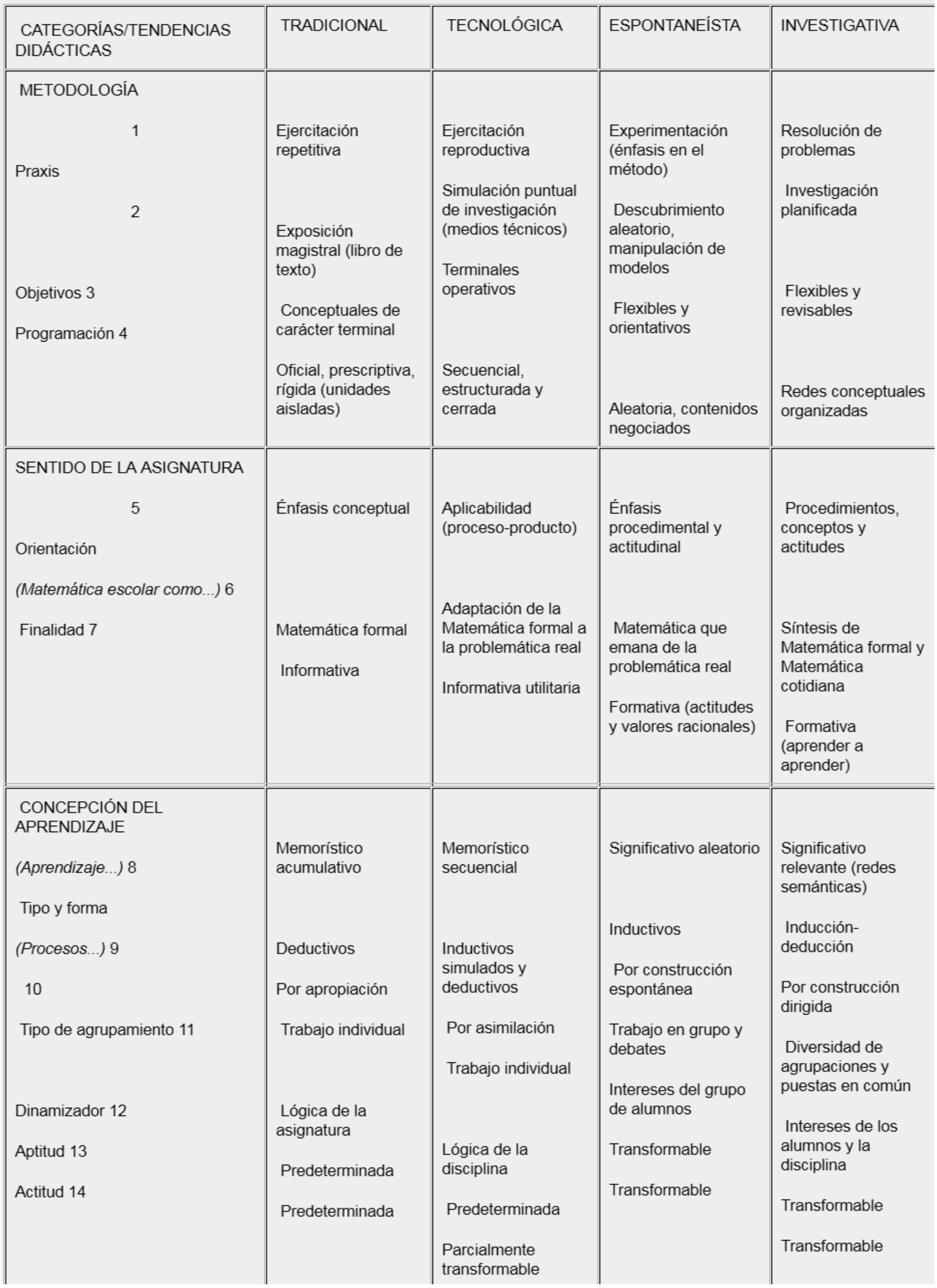
---

[19] El autor se refiere a *tendencias* con la intención de aclarar que se trata de una clasificación con base en rasgos predominantes que no *encorsetan* de ningún modo las concepciones de un profesor en un solo modelo didáctico, debido a que es habitual que un profesor muestre características de distintos modelos.



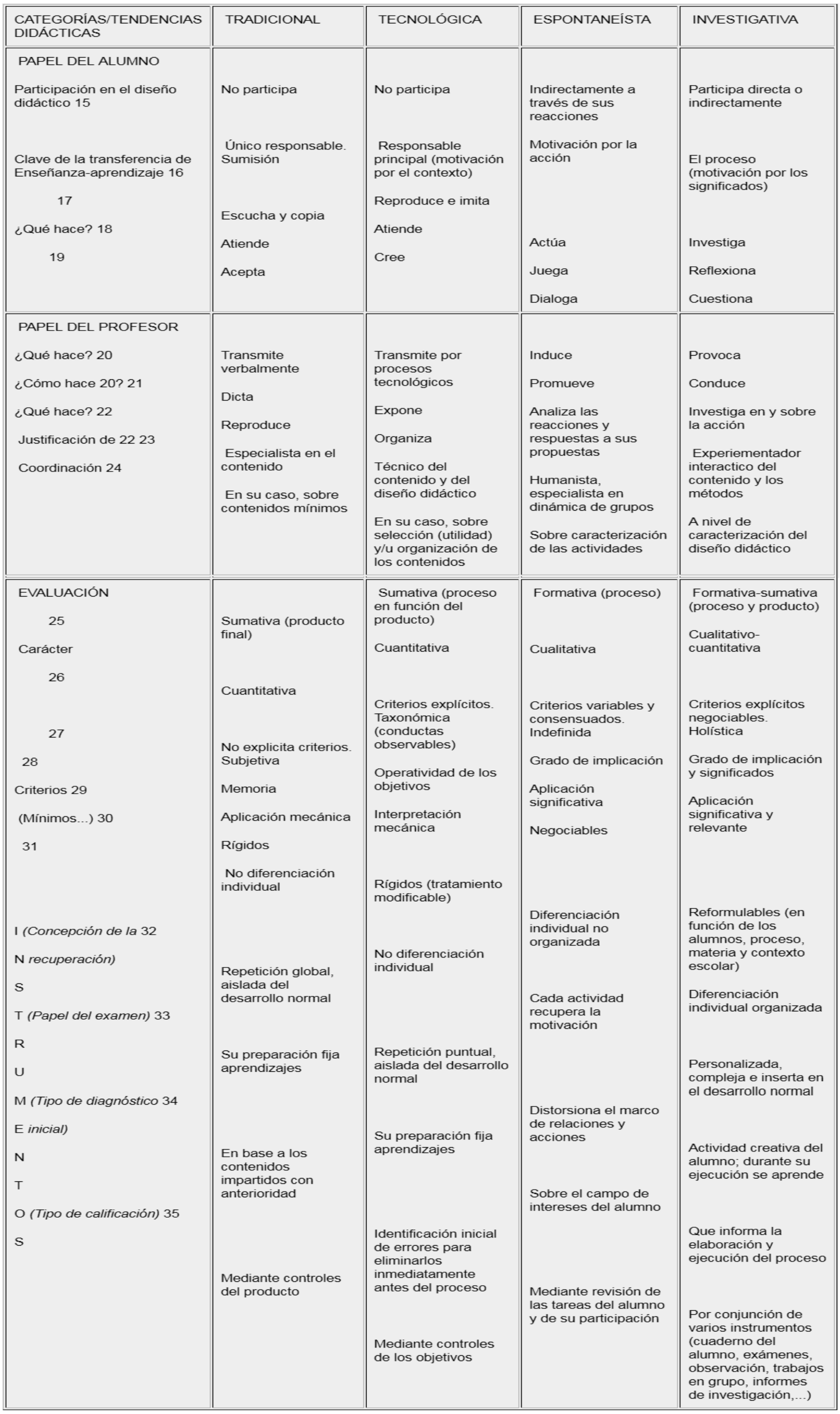
	¿QUÉ ES LA MATEMÁTICA?	**CONCEPCIONES**	
NIVEL 0	Uso común de destrezas aritméticas en situaciones cotidianas. El conocimiento matemático significa eficiencia procedimental memorística.	La matemática como conjunto de hechos no relacionados.	**INSTRUMENTALISTA**
NIVEL 1	Las reglas siguen presidiendo el trabajo matemático, pero se aprecia la comprensión de los conceptos y principios existentes tras ellas.	La matemática como cuerpo estático de conocimientos; no se crea, sino que se descubre.	**PLATÓNICO**
NIVEL 2	La matemática es un sistema complejo de conceptos, procedimientos y representaciones interconectadas.	La matemática como resolución de problemas, creación del hombre, campo dinámico y en expansión.	**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

Figura II.3 Concepciones sobre la matemática (Carrillo, 1998)



CATEGORÍAS/TENDENCIAS DIDÁCTICAS	TRADICIONAL	TECNOLÓGICA	ESPONTANEÍSTA	INVESTIGATIVA
METODOLOGÍA 1 Praxis 2 Objetivos 3 Programación 4	Ejercitación repetitiva Exposición magistral (libro de texto) Conceptuales de carácter terminal Oficial, prescriptiva, rígida (unidades aisladas)	Ejercitación reproductiva Simulación puntual de investigación (medios técnicos) Terminales operativos Secuencial, estructurada y cerrada	Experimentación (énfasis en el método) Descubrimiento aleatorio, manipulación de modelos Flexibles y orientativos Aleatoria, contenidos negociados	Resolución de problemas Investigación planificada Flexibles y revisables Redes conceptuales organizadas
SENTIDO DE LA ASIGNATURA 5 Orientación *(Matemática escolar como...)* 6 Finalidad 7	Énfasis conceptual Matemática formal Informativa	Aplicabilidad (proceso-producto) Adaptación de la Matemática formal a la problemática real Informativa utilitaria	Énfasis procedimental y actitudinal Matemática que emana de la problemática real Formativa (actitudes y valores racionales)	Procedimientos, conceptos y actitudes Síntesis de Matemática formal y Matemática cotidiana Formativa (aprender a aprender)
CONCEPCIÓN DEL APRENDIZAJE *(Aprendizaje...)* 8 Tipo y forma *(Procesos...)* 9 10 Tipo de agrupamiento 11 Dinamizador 12 Aptitud 13 Actitud 14	Memorístico acumulativo Deductivos Por apropiación Trabajo individual Lógica de la asignatura Predeterminada Predeterminada	Memorístico secuencial Inductivos simulados y deductivos Por asimilación Trabajo individual Lógica de la disciplina Predeterminada Parcialmente transformable	Significativo aleatorio Inductivos Por construcción espontánea Trabajo en grupo y debates Intereses del grupo de alumnos Transformable Transformable	Significativo relevante (redes semánticas) Inducción-deducción Por construcción dirigida Diversidad de agrupaciones y puestas en común Intereses de los alumnos y la disciplina Transformable Transformable

Figura II.4a Primera parte de las tendencias didácticas (Carrillo, 1998)



CATEGORÍAS/TENDENCIAS DIDÁCTICAS	TRADICIONAL	TECNOLÓGICA	ESPONTANEÍSTA	INVESTIGATIVA
PAPEL DEL ALUMNO Participación en el diseño didáctico 15 Clave de la transferencia de Enseñanza-aprendizaje 16 17 ¿Qué hace? 18 19	No participa Único responsable. Sumisión Escucha y copia Atiende Acepta	No participa Responsable principal (motivación por el contexto) Reproduce e imita Atiende Cree	Indirectamente a través de sus reacciones Motivación por la acción Actúa Juega Dialoga	Participa directa o indirectamente El proceso (motivación por los significados) Investiga Reflexiona Cuestiona
PAPEL DEL PROFESOR ¿Qué hace? 20 ¿Cómo hace 20? 21 ¿Qué hace? 22 Justificación de 22 23 Coordinación 24	Transmite verbalmente Dicta Reproduce Especialista en el contenido En su caso, sobre contenidos mínimos	Transmite por procesos tecnológicos Expone Organiza Técnico del contenido y del diseño didáctico En su caso, sobre selección (utilidad) y/u organización de los contenidos	Induce Promueve Analiza las reacciones y respuestas a sus propuestas Humanista, especialista en dinámica de grupos Sobre caracterización de las actividades	Provoca Conduce Investiga en y sobre la acción Experiementador interactico del contenido y los métodos A nivel de caracterización del diseño didáctico
EVALUACIÓN 25 Carácter 26 27 28 Criterios 29 (Mínimos...) 30 31 I *(Concepción de la* 32 N *recuperación)* S T *(Papel del examen)* 33 R U M *(Tipo de diagnóstico* 34 E *inicial)* N T O *(Tipo de calificación)* 35 S	Sumativa (producto final) Cuantitativa No explicita criterios. Subjetiva Memoria Aplicación mecánica Rígidos No diferenciación individual Repetición global, aislada del desarrollo normal Su preparación fija aprendizajes En base a los contenidos impartidos con anterioridad Mediante controles del producto	Sumativa (proceso en función del producto) Cuantitativa Criterios explícitos. Taxonómica (conductas observables) Operatividad de los objetivos Interpretación mecánica Rígidos (tratamiento modificable) No diferenciación individual Repetición puntual, aislada del desarrollo normal Su preparación fija aprendizajes Identificación inicial de errores para eliminarlos inmediatamente antes del proceso Mediante controles de los objetivos	Formativa (proceso) Cualitativa Criterios variables y consensuados. Indefinida Grado de implicación Aplicación significativa Negociables Diferenciación individual no organizada Cada actividad recupera la motivación Distorsiona el marco de relaciones y acciones Sobre el campo de intereses del alumno Mediante revisión de las tareas del alumno y de su participación	Formativa-sumativa (proceso y producto) Cualitativo-cuantitativa Criterios explícitos negociables. Holística Grado de implicación y significados Aplicación significativa y relevante Reformulables (en función de los alumnos, proceso, materia y contexto escolar) Diferenciación individual organizada Personalizada, compleja e inserta en el desarrollo normal Actividad creativa del alumno; durante su ejecución se aprende Que informa la elaboración y ejecución del proceso Por conjunción de varios instrumentos (cuaderno del alumno, exámenes, observación, trabajos en grupo, informes de investigación,...)

Figura II.4b Segunda parte de las tendencias didácticas (Carrillo, 1998)

II.3.3.1.1 Algunas consideraciones sobre las concepciones del profesor de matemáticas de secundaria

Hemos realizado también una breve revisión sobre algunas particularidades que han sido reportadas en la literatura de investigación en Didáctica de la Matemática sobre las concepciones de los profesores de secundaria, con la intención de tener una idea de lo que el análisis de las participaciones del sujeto de estudio podía evidenciar, y continuar así construyendo una imagen amplia que nos permita comprender mejor la naturaleza de su conocimiento.

Carrillo (1998), por ejemplo, menciona que en el profesorado de secundaria las concepciones sobre enseñanza y el aprendizaje de la matemática son permeadas por las concepciones sobre la propia matemática. Al respecto, Climent (2002) comenta que esta relación puede estar condicionada por la formación mayormente disciplinar de estos profesores.

> “Dada su formación casi exclusiva y originalmente disciplinar, las ideas sobre la matemática tienen un peso muy fuerte en la propia visión sobre su enseñanza, de tal manera que, en menor o mayor medida, la disciplina constituye uno de los referentes fundamentales en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Quizás, uno de los retos del profesor de Secundaria, para evolucionar desde posiciones iniciales tradicionales y tecnológicas (que parecen ser las generalizadas en el inicio de su carrera docente) es hacer más compleja su visión de la enseñanza añadiendo referentes a la disciplina (la psicología, la sociología, la pedagogía, las nuevas tecnologías y la práctica docente) y enriqueciendo la propia visión de la disciplina como referente para la enseñanza (considerando también la epistemología y la historia de la matemática, las relaciones de la matemática con otras disciplinas y su aplicación a la vida diaria, así como a la didáctica de la matemática, como referente de los aspectos específicos del proceso de enseñanza y aprendizaje de la disciplina)” (p. 27).

Beswick (2007) realiza un estudio sobre las concepciones de los profesores de matemáticas de secundaria asociadas a la creación de entornos constructivistas de aula, en el que divide los resultados en tres grupos o tipos de concepciones:

Concepciones acerca de la naturaleza de las matemáticas:

- Las matemáticas se refieren a la conexión de ideas y el dar sentido a la toma de decisiones.
- Las matemáticas son divertidas.

Las concepciones sobre el aprendizaje de las matemáticas:

- El aprendizaje de los estudiantes es impredecible.
- Todos los estudiantes pueden aprender matemáticas.

Las creencias sobre el papel del profesor:

- El maestro tiene la responsabilidad de mantener el control total del discurso en el aula.
- El maestro tiene una responsabilidad activa de facilitar y guiar la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes.
- El maestro tiene la responsabilidad de introducir a los estudiantes en formas ampliamente aceptadas del pensamiento y de comunicación en las matemáticas.
- El profesor es la autoridad con respecto a las normas sociales que operan en el aula.
- Los maestros tienen la responsabilidad profesional de participar en el aprendizaje continuo.

En Gil y Rico (2003) se reportan las concepciones de profesores de matemáticas de secundaria pertenecientes a la comunidad de Andalucía, ordenando los resultados de mayor a menor frecuencia de elección en los test que se aplicaron en el estudio:

Sobre la valoración que hace el profesor de su trabajo:

- El profesor valora su trabajo primero por el avance en el aprendizaje de los estudiantes y los resultados favorables de los alumnos en las evaluaciones y da menos valor, aunque lo sigue considerando importante, a tener un buen ambiente de trabajo, así como a generar interés y participación en el aula.

Las concepciones sobre los buenos estudiantes de matemáticas:

- Los profesores valoran que un estudiante esté motivado por la materia, su esfuerzo y su trabajo, antes que valorar que este tenga buenas capacidades intelectuales. En último lugar aprecian las cualidades humanas de los estudiantes, como la responsabilidad, solidaridad y participación.

Sobre los aspectos que podrían mejorar la cualificación profesional:

- Los profesores consideran que es prioritario aumentar la formación práctica y el conocimiento de los recursos a través de la comunicación y el intercambio de experiencias con colegas. En un segundo plano colocan la necesidad de dominar el conocimiento didáctico y la profundización en el conocimiento matemático en sí mismo.

Sobre la importancia de estudiar matemáticas en la enseñanza obligatoria:

- En primer lugar se coloca la importancia del carácter formatico de las matemáticas, en segundo lugar la utilidad social y profesional de la misma y finalmente la utilidad para otras disciplinas del currículo.

Sobre la forma en la que se aprenden las matemáticas:

- La mayoría de los profesores se inclina a pensar que las matemáticas se aprenden mediante el esfuerzo y el trabajo personal (lo cual es coherente con la idea del buen estudiante que trabaja y se esfuerza). En un segundo nivel, los profesores consideran otros medios para el aprendizaje, como las ayudas externas, correcciones y explicaciones, la aplicación de estímulos sobre procesos cognitivos y fomento de determinadas actividades, así como la predisposición natural del alumno o la motivación, aunque este último en una escala de valoración menor que los anteriores. Con respecto al aprendizaje mediante el incremento de algún tipo de conocimiento o capacidad, este es valorado como un elemento mucho menos importante.

Sobre los contenidos más importantes en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas:

- En orden de importancia asignada por los profesores están: los contenidos que sean útiles para la vida real, los procedimentales, los conceptuales, los actitudinales, aquellos que potencian la abstracción, la simbolización o algún otro rasgo específico del conocimiento matemático, los que tienen implicaciones curriculares posteriores y los pertenecientes a determinadas disciplinas matemáticas (análisis, algebra, …).

Sobre el tipo de actividades que son más adecuadas para la enseñanza de las matemáticas:

- Los profesores no muestran grandes preferencias por un determinado tipo de actividad, sino que parecen preferir la que mayor número de aspectos conjugue. Sin embargo, tomando en cuentas esas pequeñas diferencias de valoración, los autores comentan que los profesores consideran más adecuadas las actividades que hacen referencia a las finalidades del aprendizaje de las matemáticas (se centran en el alumno como individuo) que las que se refieren a la dinámica de trabajo en el aula (centrado en la metodología).

Sobre las fuentes de las principales dificultades en la enseñanza de las matemáticas de secundaria:

- En su gran mayoría los profesores consideran que el sistema educativo es la principal fuente de dificultad en la enseñanza, seguido por la matemática en sí misma, los estudiantes y al final colocan a los profesores.

Sobre el papel del error en la enseñanza de las matemáticas de secundaria:

- Los profesores muestran más sintonía con planteamientos convencionales sobre el error, al considerar que los errores indican desconocimiento de los estudiantes, el cual debe ser controlado y corregido, frente a posturas como la de valorar y reconsiderar la planificación o programación o a interpretarlo como un factor o una condición para el aprendizaje.

En el caso de nuestra investigación, nos parece importante tener en mente estas consideraciones sobre las concepciones de los profesores de secundaria para tener una base sobre la cual poder interpretar los resultados de nuestro trabajo. Esta reflexión nos ha permitido tener una mayor sensibilidad teórica al momento de realizar el análisis de las declaraciones de Omar y el intercambio de opiniones con sus compañeros, así como identificar algunos elementos que nos permitan contextualizar su trabajo y comprender mejor su forma de proceder (Ver capítulo IV). Sin embargo, debemos advertir que las características del contexto en el cual se realiza la recogida de los datos no nos han permitido contrastar las declaraciones del informante con su práctica de aula, ni realizar una entrevista para indagar sobre sus concepciones de manera específica.

II.4 Consideraciones sobre el escenario de trabajo en línea como contexto de investigación

Con respecto al trabajo virtual, podemos destacar que nos pareció necesario reflexionar sobre las ventajas y dificultades que representa el trabajo en este contexto, para poder mantener el control sobre el escenario en el cual interactúan los profesores y dimensionar el tipo de datos y de resultados que podría arrojar la investigación.

Como describe Sánchez (2010), las investigaciones en las cuales los individuos interactúan cara a cara son significativamente distintas de las interacción vía Internet; las formas de interacción escritas llevadas a cabo de manera virtual, como los emails o los foros sincrónicos o asincrónicos, poseen características propias que las hacen sumamente diferentes a las comunicaciones verbales que tradicionalmente se utilizan en medios presenciales. En este sentido es importante tomar en cuenta que la comunicación e interacción de los participantes del grupo es propia de cada grupo particular.

En Flores, Escudero y Aguilar (2014) se presenta una investigación teórica sobre trabajos de investigación en la línea de formación de profesores de matemáticas en entornos virtuales (*Online*

Mathematics Teacher Education -OMTE), cuyo objetivo es poner de relieve la importancia de reflexionar sobre las características del contexto de la investigación y las consecuencias en el diseño metodológico de la investigación. Esta es un área de investigación en desarrollo, por lo que la información al respecto era escasa; sin embargo, nos parecía importante poder generar una visión general de las tendencias de investigación en este tema.

En esta investigación se analizan los principales temas investigados en el ámbito de la formación del profesorado de matemáticas en línea, encontrando que hay dos temas principales, los estudios centrados en el análisis de las interacciones entre los profesores en entornos en línea y los estudios enfocados en el desarrollo profesional de profesores. Con respecto a los principales enfoques teóricos empleados en esta área, se distinguen tres tipos de teorías: las extrapolaciones de herramientas teóricas originalmente diseñadas para entornos cara a cara, adaptándolos a entornos virtuales, como es el caso de los constructos: Comunidad de práctica (Kynigos & Kalogeria, 2012) o Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Clay, Silverman & Fisher, 2012); las aproximaciones teóricas diseñadas originalmente para entornos virtuales o tecnologizados como el marco *Humans-with-media* (Borba, 2012); y las herramientas metodológicas diseñadas específicamente para los escenarios en línea, por ejemplo el *Online asynchronous collaboration* (Clay et. al, 2012). Sobre el tipo de evidencia empírica que utilizan los investigadores, se encontró que la naturaleza de estos datos es puramente digital, como las producciones escritas que provienen de los foros de discusión o interacción por correo electrónico, los materiales de enseñanza diseñados para contenidos particulares y las producciones matemáticas que se enfocan en estudiar las relaciones entre el profesor y el contenido matemático. Otras características encontradas sobre el tipo de datos generados en estas investigaciones es la proliferación de análisis cualitativos, la escasez de trabajos sobre las producciones matemáticas de los profesores y el uso preferente, para generar datos empíricos, de los software graficadores, recursos de plataformas virtuales como los foros, las salas de chat y los cuestionarios y los artefactos digitales de grabación como *iPods*, cámaras de video y *smartphones*.

Con base en el análisis de estos elementos de la investigación, se realiza una reflexión acerca del trabajo del investigador en estos contextos, para saber si esta labor se transforma por las características de los entornos en línea. La conclusión es que existen algunas pruebas de que el trabajo del investigador es transformado por las características de los entornos en línea, y que estos cambios están directamente relacionados con las herramientas tecnológicas disponibles en los entornos en línea:

a) **Acceso a los datos:** los entornos en línea permiten a los investigadores acceder a datos remotos y de una manera menos intrusiva. Permite a los investigadores observar las interacciones, diálogos, y las producciones matemáticas de los profesores sin estar presente físicamente.
b) **La recolección y procesamiento de datos:** los entornos en línea también pueden facilitar y acelerar la recogida y tratamiento de los datos. Esto proporciona a los investigadores el acceso a las características de las interacciones y la colaboración entre los profesores que serían de difícil acceso en la configuración cara a cara.
c) **Adaptación y creación de herramientas teóricas**: los entornos en línea crean la necesidad de adaptar y generar constructos teóricos y metodológicos adecuados para estudiar los fenómenos relacionados con la didáctica OMTE.

Este trabajo nos permitió mantener una sensibilidad con respecto a las formas, los medios y las expectativas que podrían proponerse en esta investigación. En el caso, por ejemplo, de los foros asincrónicos, las intervenciones son menores que en los foros sincrónicos, pero con mayor profundidad en cuanto a contenido y análisis, puesto que los participantes realizan reflexiones previas a plasmar sus ideas, cuentan con tiempo suficiente para leer y analizar las respuestas de sus compañeros y emitir posteriormente sus comentarios, lo que no sucede con foros sincrónicos o reuniones presenciales, puesto que aquí las respuestas suelen ser con mucha más espontaneidad. Es por esto que el proceso de interacción escrito, usado en los entornos en línea, no nos permite observar con claridad la etapa de acción de los participantes sobre la actividad que se realiza, es decir, las interacciones visibles se enfocan en las etapas de formulación y validación. Sánchez (2003) concluye que los participantes de escenarios virtuales se presentan al momento de la interacción con formulaciones y preconcepciones sobre la actividad matemática a tratar. Por lo que hay que tomar en cuenta que las respuestas pueden no ser las más naturales, sino las que se reflexionaron más. Además, comenta que durante la interacción se entra en un proceso de validación o consenso en el cual los participantes confrontan sus formulaciones poniendo en juego distintos argumentos, técnicas y recursos tecnológicos, siendo las más apegadas al discurso matemático escolar las más aceptadas en estos consensos.

Lo anterior nos lleva a plantear distintos instrumentos que nos permitan interpretar de manera más objetiva los datos recabados durante el trabajo del grupo y a explorar distintas facetas de las comunicaciones a distancia, triangulando las distintas participaciones de los profesores, comparando sus comentarios a través de programas que permitan organizar y manejar la información, como lo es MAXQDA. De esto hablaremos en el siguiente capítulo.

II.5 Resumen gráfico del Capítulo II

A continuación, en el cuadro II.2 mostramos un resumen gráfico del capítulo que nos permita tener una visión general de la construcción que hemos realizado de este marco teórico:

<table>
<tr><td colspan="7">**Marco Teórico**</td></tr>
<tr><td colspan="7">**Conocimiento profesional del profesor de matemáticas**
Carrillo (1998) y Climent (2002) en el sentido de Elstgeest, Goffree y Harlen (1993)</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Objeto de estudio**
Shoenfeld (2010)</td><td colspan="2">**Naturaleza**
Climent (2002)</td><td colspan="3">**Componentes**
Shulman (1986)
Ball, Thames y Phelps (2008)</td></tr>
<tr><td colspan="7">**Discusión teórica del Mathematical Knowledge for Teaching**</td></tr>
<tr><td colspan="7">Reflexión sobre lo que es el conocimiento especializado
Flores, Escudero y Carrillo (2013), Escudero, Flores y Carrillo (2012)</td></tr>
<tr><td colspan="7">**El conocimiento especializado del profesor de matemáticas**
Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge - ***MTSK***
Carrillo, Contreras et al. (2014)</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">**Conocimiento Matemático**</td><td colspan="5">Conocimiento de los temas
KoT</td></tr>
<tr><td colspan="5">Conocimiento de la estructura de las matemáticas
KSM</td></tr>
<tr><td colspan="5">Conocimiento de la práctica matemática
KPM</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">**Conocimiento Didáctico**</td><td colspan="5">Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas
KFLM</td></tr>
<tr><td colspan="5">Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas
KMT</td></tr>
<tr><td colspan="5">Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas
KMLS</td></tr>
<tr><td colspan="7">**Concepciones**
Carrillo (1998)</td></tr>
<tr><td colspan="3">**Sobre la matemática**</td><td colspan="4">**Sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas**</td></tr>
<tr><td>Instrumentalista</td><td>Platónico</td><td>Resolución de problemas</td><td>Tradicional</td><td>Tecnológica</td><td>Espontaneísta</td><td>Investigativa</td></tr>
<tr><td colspan="7">**Consideraciones sobre las concepciones de los profesores de matemáticas de secundaria**</td></tr>
<tr><td colspan="7">**Consideraciones sobre el escenario de trabajo en línea como contexto de investigación**</td></tr>
</table>

Cuadro II.4 Resumen gráfico del capítulo II

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

En este apartado abordaremos la descripción de los fundamentos metodológicos que sustentan nuestras decisiones en cuanto a las formas de organizar e interpretar la información, con miras a comprender el conocimiento especializado que un profesor de matemáticas de secundaria muestra dentro de un entorno de formación continua. Todo esto, en términos de justificar la selección que hacemos de paradigma de investigación, de nuestro posicionamiento epistemológico, ontológico y metodológico y del diseño y utilización de los instrumentos de recogida y análisis de la información. Pretendemos mostrar la coherencia del diseño y análisis de la investigación.

Es importante señalar que una referencia fundamental en este capítulo ha sido el trabajo de Muñoz-Catalán (2010), el cual contiene una discusión profunda de diversos aspectos metodológicos.

III.1 Selección de paradigma

Se describirá a continuación el paradigma con el que se identifica esta investigación, de manera que sean explícitas las ideas sobre las cuales se apoyan los razonamientos y decisiones en cuanto a las formas de proceder durante el proceso de trabajo, de manera que el lector pueda tener claridad acerca de la coherencia del trabajo y el enfoque bajo el que se concibe nuestra investigación, es decir, se explicita el paradigma de investigación bajo el cual se desarrolla este trabajo para luego describir los métodos con los cuales se recogen y analizan los datos.

El paradigma de investigación se define como una forma particular de entender la realidad que se analiza, tanto por parte del investigador como por la comunidad científica a la que este pertenece, lo cual da sentido al tipo de conocimiento que se pretende crear y a la comprensión del mundo que intenta observar e interpretar:

> “Un paradigma de investigación es una red de ideas coherentes sobre la naturaleza del mundo y de las funciones de los investigadores que, aceptadas por una comunidad de investigadores, condicionan las pautas de razonamiento y sustentan las acciones en la investigación” (Bassey, 2003, p. 42).

Por otro lado, Muñoz-Catalán (2010) lo define como:

> “Un esquema teórico, un modo de percibir y comprender el mundo, que nos lleva a identificar determinadas áreas problemáticas e implica también una determinada forma de acercarse a ella, para analizarla e interpretarla. Por tanto, con independencia del paradigma que se adopte para realizar el estudio, una condición necesaria es la coherencia que debe existir entre el paradigma y el problema de estudio” (p. 149).

Además de plasmar su interpretación sobre las diferentes definiciones de este término, Muñoz-Catalán (2010) identifica tres elementos que conforman un paradigma de investigación:

> “Lo que subyace a esta definición es que todos los paradigmas expresan una interpretación particular de la realidad (perspectiva ontológica) y que, para asegurar que el conocimiento teórico que se produzca sea consistente con ella (hace referencia a la perspectiva epistemológica), incluyen un conjunto de modelos, reglas, técnicas y métodos de investigación. Podemos decir, entonces, que el paradigma incluye tres elementos: *una perspectiva ontológica, una perspectiva epistemológica y las perspectivas metodológicas*” (p. 148, el énfasis en nuestro).

A continuación explicitaremos nuestro posicionamiento, con respecto a los elementos, que le dan estructura a nuestro paradigma: una perspectiva ontológica propia, referida a la interpretación particular de la realidad, una perspectiva epistemológica que nos permita asegurar que el conocimiento teórico que se produzca en este trabajo es consistente con esa realidad, además del conjunto de modelos, reglas, técnicas y métodos de investigación que usaremos y que se refieren a la perspectiva metodológica (Bassey, 2003;Carrillo & Muñoz-Catalán, 2011; Santos, 2002).

Con respecto a los distintos paradigmas de investigación, existe una variedad de perspectivas que se utilizan en el campo de las investigaciones educativas, por lo que diferentes autores señalan distintos paradigmas, dentro de los que resaltan como los más usados: *el paradigma interpretativo*, definido por Bassey (2003) en contraste con el *paradigma positivista*, puesto que se rechaza la visión de que el mundo social puede ser entendido en términos de enunciaciones generales acerca de las acciones humanas, y no pretende explicar, controlar o predecir algo sobre el fenómeno de estudio. El paradigma interpretativo difiere también del *paradigma crítico*, que mencionan Latorre, Rincón, y Arnal (1996) y Ernest (1998) como el que pretende conseguir la emancipación y la transformación de la realidad, ya que aquel solo pretende alcanzar una posible interpretación de ella.

La presente investigación pretende posicionarse, entonces, en un **paradigma interpretativo** que es coherente con los objetivos de describir, comprender e interpretar la naturaleza del conocimiento especializado. Este paradigma encaja con la perspectiva de una realidad construida por los humanos y que depende de la visión de cada uno de ellos, evitando así la posibilidad de establecer reglas generales:

> "Para el investigador interpretativo, el propósito de investigar es avanzar en el conocimiento describiendo e interpretando el fenómeno en el mundo, en su intento de obtener significados compartidos con otros. Interpretación es una búsqueda de perspectivas profundas en eventos particulares y de conocimientos teóricos. Esto puede ofrecer posibilidades, pero no certezas, en cuanto al resultado de futuros eventos" (Bassey, 2003, p. 44).

Este paradigma es el que se ajusta mejor a las necesidades que demanda un trabajo sobre los elementos y la naturaleza de una parte específica del conocimiento profesional del profesor (del cual se ha ofrecido una caracterización en el capítulo anterior), entendiendo que se construye como una realidad personal, situada y contextualizada, a la cual puede accederse sólo parcialmente. Dicho paradigma guiará también la definición de los objetivos y preguntas de investigación hacia la caracterización de los elementos que constituyen el conocimiento especializado del profesor a través de la obtención de significado que puedan ser evidenciados en los datos obtenidos para esta investigación.

III.2 Nuestra perspectiva ontológica y epistemológica

Como habíamos mencionado anteriormente, la perspectiva ontológica se refiere a la interpretación particular que el investigador hace de la realidad, la forma en la que la enfrenta y lo que considera posible saber sobre ella (Santos, 2002). Explicitar el posicionamiento del investigador con respecto a la concepción que tiene de la naturaleza de las entidades sociales permite dar soporte y coherencia al paradigma, además de ayudar a orientar cómo enfrentarnos a la realidad que pretendemos investigar y lo que es posible saber de ella.

Con respecto a las diferentes posturas ontológicas que pueden tomarse, Santos (2002) afirma que, de acuerdo al paradigma elegido, la realidad puede ser vista como objetiva, es decir, que existe independientemente de los humanos con el objetivo de conocer esa realidad preexistente, a pesar de que siempre puede accederse a ella de forma limitada (corriente Realista), o, por otro lado, puede reconocerse la existencia de múltiples realidades situadas, que son producto de la actividad humana (corriente Relativista), a las cuales puede accederse a través de la investigación.

La elección y explicitación de nuestro paradigma interpretativo debe responder a las necesidades que demanda el análisis de la naturaleza del conocimiento especializado[1], el cual implica la búsqueda de un enfoque que permita entender el actuar de las personas como consecuencia de la interacción con los objetos y situaciones y los significados que atribuyen a esas interacciones, que se desarrollan a través de un proceso de interpretación (Muñoz-Catalán, 2010). Se adopta, entonces, un enfoque ontológico **relativista**, entendido como el que interpreta los fenómenos sociales y su significado en un proceso de definición constante por parte de los actores sociales,

---

[1] En el epígrafe II.1.2 del marco teórico hemos hablado más a fondo sobre la naturaleza del conocimiento profesional.

además de verlos como construcciones sociales soportadas sobre la base de las percepciones y acciones de los participantes, lo que Bryman (2004) llama *Construccionismo*.

Tomando en cuenta que el fenómeno que se estudia depende de los significados que construyen los participantes de un curso virtual, había que tener conciencia de que sólo se tenían condiciones para acceder a las interpretaciones sobre la realidad que los profesores plasman a través de sus producciones escritas, es decir, la investigación permitió tener una aproximación del conocimiento especializado de ellos, pero no un acceso directo al conocimiento en sí mismo.

La reflexión sobre la naturaleza del conocimiento que se discute en el capítulo anterior y la construcción misma de los fundamentos del modelo de conocimiento especializado nos permiten profundizar en la perspectiva epistemológica del mismo, la cual, por su parte, ofrecerá a la investigación una postura desde la que pueda asegurarse que el conocimiento teórico que se produce es consistente con la realidad que se establece desde la perspectiva ontológica.

Al hablar de la perspectiva epistemológica, nos referimos al conocimiento que resulta de la investigación, a cómo podemos conocer la realidad y a cuál es la base ese conocimiento (Muñoz-Catalán, 2010). Estas cuestiones epistemológicas permiten entender la naturaleza de la relación entre lo que se sabe y lo que se puede saber o lo que es posible saber sobre la realidad que se estudia. Los resultados obtenidos en la investigación realista, de manera natural, garantizan la objetividad, y son verdaderos y libres de valores. En contraste, en una investigación con perspectiva relativista, los resultados son también construcciones humanas, es decir, los resultados son subjetivos (Santos, 2002). Dado que esta última perspectiva es la que encaja con esta investigación, los alcances y limitaciones de este estudio se encuentran condicionados a dichos resultados subjetivos.

Asumiendo que conocer no consiste en la interiorización de una copia de la realidad exterior, sino que implica una interacción entre el sujeto y el objeto de conocimiento a través de la cual se interpretan y reconstruyen los significados implicados en dicho proceso (Bassey, 2003; Bryman, 2004), se sitúa este trabajo en el **interpretativismo** como enfoque epistemológico.

Ritchie y Lewis (2005) definen tres aspectos epistemológicos como organizadores de las discusiones en investigación social: *la relación entre investigador e investigado, las teorías de verdad* y *el modo en que se adquiere el conocimiento*.

A través del debate de la *relación entre investigador y el investigado*, se pretende resaltar la importancia de tomar en cuenta la influencia de las actitudes o participaciones del investigador en el escenario de recogida de datos y cómo los investigados modifican sus respuestas de acuerdo a las interacciones que se dan durante la investigación. No puede negarse que, al ser esta una investigación de tipo social, existe un intercambio de emociones o sensaciones entre investigador e investigado y que los investigados responden a ciertos estímulos, ajustando sus posicionamientos a las respuestas de los investigadores. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que el contexto de recolección de datos de este trabajo se dio a través de un espacio virtual y que era un curso diseñado expresamente para el desarrollo de los profesores como estudiantes de maestría. Además, a pesar de que la investigadora era también la tutora del curso, los objetivos didácticos del curso fueron siempre los que guiaron el desarrollo de las actividades y se hizo lo posible por no separarlos de los objetivos de investigación.

Sin la intención de sesgar la información, se hizo un esfuerzo por fomentar la participación activa de todos los profesores del curso, de manera que pudieran elegirse algunos informantes para el análisis de sus producciones escritas. Nuestras observaciones del curso nos permitieron elegir a Omar (seudónimo) como informante, por ser uno de los profesores que más interactuaba y participaba de las actividades. Al hacerse la selección de los informantes al terminar el proceso de recolección de datos en el curso, puede decirse que no hubo un énfasis especial en fomentar la participación de este profesor de manera diferenciada de los demás profesores del curso (esto con respecto a las discusiones y objetivos planteados para el curso). Además, durante la interacción entre tutores y participantes, la investigadora procuraba ser sólo reguladora y provocadora de participaciones, en tanto que uno de los objetivos del curso era que los profesores intercambiaran opiniones lo más posible (sobre todo en el transcurso de la primera actividad), lo cual podría considerarse como una ventaja del contexto de recolección de datos. Sin embargo somos conscientes de que había una influencia mutua en la recogida de información aunque esta no fuera objeto de nuestra investigación.

Con respecto al *modo en que se adquiere el conocimiento* producido en este trabajo, nuestra investigación se puede enmarcar en el método deductivo-inductivo. Lo consideramos deductivo en el sentido de que las proposiciones o hipótesis se alcanzan teóricamente por medio de un proceso derivado lógicamente, a través de la construcción y discusión teórica del MTSK que hemos plasmado en el apartado II.3 del Marco Teórico y de la cual deriva una primera categorización de conocimiento para cada uno de los subdominios. Por otro lado, la naturaleza inductiva la vemos reflejada en el análisis abierto realizado directamente sobre los datos, que nos permite validar además de complementar y sustentar el modelo desarrollado teóricamente, a través del surgimiento de nuevas categorías o descriptores de los subdominios del MTSK, a partir del caso particular de un profesor de matemáticas de secundaria inmerso en discusiones llevadas a cabo en un contexto de formación permanente, esta estrategia inductiva permite buscar patrones y asociaciones derivadas de las observaciones del caso de Omar.

Bryman (2004) afirma que "en gran medida, las estrategias deductivas e inductivas pueden ser consideradas mejor como tendencias que como distinciones rígidamente impuestas" (p. 11), lo cual denota la flexibilidad de estos constructos y nos permite articular un posicionamiento epistemológico en el que ambas estrategias interactúen y se complementen.

Con respecto al segundo aspecto, referido a *las teorías de verdad*, nos situamos en una perspectiva ontológica relativista, que postula que los fenómenos no pueden medirse de forma absoluta sino a través del consenso entre investigadores y la comparación constante de los datos. Esta perspectiva tiene una carga subjetiva que hemos tratado de controlar a través la interpretación y reinterpretación de datos a través de la interacción entre investigadora y asesor, además de que se presentaron los instrumentos, los datos y los análisis en diversos foros de discusión con distintas comunidades científicas como seminarios de investigación (SIDM[2]) y congresos (SEIEM[3], CERME[4]) y fueron utilizados como ejemplos para ilustrar análisis en distintos artículos de investigación (Escudero-Ávila et. al. en prensa, Carrillo et al., 2015). En este caso el sujeto investigado no interviene dentro del consenso de manera directa, aunque consideramos que la triangulación de diferentes momentos de interacción y de herramientas distintas de recolección y análisis de la información permitió validar los resultados.

Esta subjetividad controlada se ve reflejada en el tipo de acercamiento que realizamos sobre la interpretación de los datos (*Top-down y Bottom-up*, de la que hablaremos en el apartado III.4.1), en

---

[2] Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva.

[3] Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

[4] Congress of European Research in Mathematics Education

el que se intenta complementar el análisis y reducir las inferencias sobre la interpretación de datos para la caracterización de las categorías.

Por otro lado, Carrillo (1998a) recoge algunos criterios de valoración de las investigaciones en Didáctica de la Matemática planteados por diversos autores (e.g. Nissen & Blomhøj, 1983) que permiten evaluar la calidad de la investigación, estos son: *pertinencia, validez, objetividad, originalidad, rigor y precisión, capacidad para predecir, reproductibilidad,* y la *relación con las matemáticas y su enseñanza*.

A continuación explicitamos cómo estos criterios han orientado e influenciado este trabajo, de manera que el lector tenga una panorámica general de la calidad que buscamos en esta investigación:

- *Pertinencia:* Se ha justificado en la introducción y marco teórico la pertinencia de profundizar en la caracterización de la parte específica del conocimiento profesional que pertenece al profesor de matemáticas.
- *Validez:* Se relaciona con el uso que se hace de ella, requiere atención a las posibles interpretaciones que puedan realizarse sobre el trabajo y sobre sus consecuencias potenciales. En este caso consideramos que en la fundamentación teórica que hemos elaborado en el capítulo anterior se explicitan y delimitan los constructos a utilizar, de manera que el lector pueda realizar interpretaciones basadas en afirmaciones explícitas y constructos bien delimitados.
- *Objetividad:* Aunque esta palabra puede llevarnos a pensar en posicionamientos positivas y totalmente controlados, como mencionamos anteriormente, los estudios cualitativos y de enfoque interpretativo tienen un nivel de subjetividad que no demerita la calidad de estos, sino que obliga a encontrar formas de controlar dicha subjetividad. En esta investigación hemos buscado controlar las variables y el análisis a través de triangulación y comparación constante de los datos (Ver apartado III.5.1).
- *Originalidad:* Consideramos que el trabajo de construcción de un modelo de conocimiento que ha desarrollado nuestro grupo, y que se ve reflejado en este trabajo, aporta un grado importante de originalidad. Además, dentro del grupo de estudios que se refieren a esta construcción del MTSK, este estudio aporta información sobre un contexto particular de práctica profesional del profesor (la formación continua en entornos virtuales).
- *Rigor y precisión:* Esto se refiere a la necesidad de ser cuidadoso y atento a los detalles que puede tener el estudio, la búsqueda de la precisión de significado. A este respecto consideramos que la descripción que haremos de las técnicas y los instrumentos de recogida, organización y análisis de la información ha sido lo más detallada y precisa posible (Ver apartado III.6). Además, en el Capítulo IV, el lector podrá evaluar también el rigor con el que los datos son descritos e interpretados.
- *Capacidad para predecir:* Carrillo (1998a) señala que este criterio es visto como una oportunidad de comprender eventos que podrían suceder en situaciones y condiciones similares a las del estudio, más que tener hipótesis firmes que contrastar como leyes generales. Así, consideramos que toda la construcción del marco teórico nos permite ubicar el estudio de manera que podamos tener una sensibilidad con respecto a posibles resultados del estudio.
- *Reproductibilidad:* Consideramos que esta investigación ha buscado la claridad al describir los criterios y elementos con los cuales ha sido construida. Tanto en el marco teórico como en el metodológico, el lector podrá encontrar las bases bajo las cuales se realiza el estudio, de manera que le sea posible realizar reproducciones de esta, teniendo en cuenta que, por el

tipo de investigación (cualitativa), lo que puede buscarse es la coincidencia de interpretaciones.
- *Relación con las matemáticas y su enseñanza:* Al ser el modelo de conocimiento centrado en el contenido matemático, consideramos que no hay lugar a duda de que este tiene una relación directa con las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

Por otra parte, Lester y Lambdin (1994 en Carrillo 1998a) proponen criterios, algunos de los cuales son coincidentes con los anteriores aunque con nombres distintos como es el caso de la *pertinencia* y *relevancia* que estos autores denominan *importancia,* el énfasis en que la investigación ha de poseer a la educación matemática como objetivo principal, lo cual se refiere al criterio de *relación con las matemáticas y su enseñanza,* la *apertura* a la cual se refieren en el mismo sentido de la *objetividad* y *reproductibilidad* haciendo referencia a la necesidad de explicitar todas las hipótesis y puntos de vista dentro de la investigación y la *credibilidad*, relacionada con la *validez,* referida a la fundamentación de los datos en la evidencia y no en la retórica. Además, se presentan algunos criterios complementarios a los anteriormente mencionados:

La coherencia se refiere a la forma en la que todos los elementos o partes de la investigación encajan y la congruencia que existe entre ellos. Por otra parte, *la competencia* se refiere a la evidencia de dominio de las técnicas de recolección, análisis e interpretación de datos., Carrillo (1998a) señala que la evaluación de este criterio supone una dificultad dentro de la presentación de la investigación, puesto que se refiere más al investigador que la investigación. Añade que no considera que la falta de competencia por parte del investigador pueda influir en los demás criterios de calidad.

Con respecto a la *ética*, Carrillo (1998a) propone tener en cuenta la honradez profesional, que evite la manipulación o sesgo voluntario de los datos y de la aplicación de las técnicas a conveniencia de la investigación, además de incluir el consentimiento de los informantes para utilizar su información, mantener la confidencialidad de las fuentes, y reconocer la colaboración de todos los participantes en el trabajo, como informantes y otros investigadores que señalan Lester y Labdin (1994 en Carrillo, 1998a).

La idea de *cualidades no tangibles* es ambigua en tanto que puede referirse a criterios como la claridad, organización, sencillez y originalidad, sin embargo algunos de los criterios mencionados anteriormente son también no tangibles.

III.3 Preguntas y objetivos de investigación

Una vez definido el paradigma de investigación y explicitado el posicionamiento epistemológico y ontológico, se formularon las preguntas y los objetivos de investigación acorde con la realidad que se pretendía analizar y las posibilidades de acceso a ella que identificamos.

Como mencionamos anteriormente, las características del programa de maestría como un espacio de reflexión para profesores en servicio y su declarado enfoque de profesionalización ofrecieron a esta tesis un escenario de investigación particular, permitiendo el análisis del conocimiento especializado del profesor en un contexto de práctica profesional distinta del aula.

Con respecto al modelo de conocimiento especializado, en este trabajo partiremos de indagar cuestiones generales del mismo:

¿Qué conocimiento especializado ponen en evidencia los profesores de matemáticas de secundaria en un contexto de formación continua a través de discusiones virtuales?

Asimismo, consideramos que nuestras aportaciones pueden ser teóricas, además de ofrecer evidencia empírica de su funcionamiento:

¿Qué aportes teóricos y metodológicos ofrece el MTSK al conjunto de investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas?

El curso de teoría de situaciones didácticas, en particular, era un espacio propicio para la reflexión sobre el uso y diseño de recursos didácticos en el cual los profesores discutían y justificaban argumentaciones tratando de estructurar propuestas de enseñanza. Las características mismas del informante como participante activo del curso, interesado en explorar su conocimiento didáctico y reflexionar sobre aspectos del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, resultaban propicias para el planteamiento de preguntas sobre el conocimiento profesional que se encontraba reflejado en las producciones del curso y para un análisis profundo de su conocimiento especializado, en particular de los subdominios de Conocimiento de las Características de Aprendizaje y de la Enseñanza de las Matemáticas correspondientes al Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), por lo que consideramos generar preguntas de investigación más específicas que nos permitieran dar cuenta de estas particularidades:

¿Cuáles son las características específicas del Conocimiento Didáctico del Contenido considerado como parte del modelo MTSK?

¿Qué aporta el análisis a través del MTSK en la búsqueda de una mejor comprensión del conocimiento del profesor de secundaria referente a la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático?

Así, el objetivo general de esta investigación responde a estos intereses específicos sobre conocimiento didáctico como parte del MTSK:

Describir, caracterizar y comprender el Conocimiento Didáctico del Contenido del profesor de matemáticas de secundaria a través del análisis de su Conocimiento Especializado.

Con la intención de dar más claridad con respecto a lo que se entenderá por descripción y caracterización del PCK, se definieron algunos objetivos específicos que ayudarían a organizar la discusión y el análisis, a través de la caracterización de dos de los tres subdominios que lo conforman: el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT):

- *Resaltar la necesidad de cada uno de los subdominios dentro del PCK*
  Se busca identificar momentos en los cuales sea evidente la necesidad de diferenciar los subdominios KFLM y KMT dentro del PCK.
- *Aportar claridad en la definición de los subdominios*
  Se considera importante aportar claridad a las definiciones de los subdominios, teniendo en cuenta que este es un modelo emergente.
- *Encontrar categorías de los subdominios*
  Las categorías ayudan a identificar y diferenciar los distintos tipos de conocimiento dentro del análisis que pueda hacerse del PCK, por lo que identificarlos puede ser una aportación importante para el modelo.

- *Aportar ejemplos potentes de cada subdominio*

Los ejemplos concretos son de gran ayuda para mostrar la pertinencia de un subdominio, evidenciar el uso de las categorías e ilustrar la idea de integración de conocimiento, a la vez que se analizan aspectos específicos del MTSK.

- *Aportar información sobre el modo de acceder al subdominio*

Se busca señalar las situaciones, formas o momentos en los que se haga plausible el reconocimiento de los conocimientos asociados al PCK, es decir dónde y cómo se manifiesta el subdominio. Esto podría permitir generar más y mejores indicadores, descriptores y categorías del subdominio, así como profundizar en su análisis, ya sea en esta o en sucesivas investigaciones.

- *Comprender las interacciones con otros subdominios*

El modelo de conocimiento seccionado no es más que un artificio creado con fines analíticos y cuyo carácter holístico obliga a buscar claridad en la comprensión de las formas en que los subdominios interactúan y se integran para poder describir e interpretar el MSTK.

- *Reconocer posibles vías de desarrollo del subdominio*

Este reconocimiento servirá como aporte para futuras investigaciones en términos de ofrecer algunas perspectivas con respecto a otros posibles análisis del subdominio, lo cual consideramos parte importante de la caracterización de estos.

III.4 Nuestra perspectiva metodológica

La perspectiva metodológica, que describiremos a continuación, es la que permitió fundamentar las decisiones tomadas en cuanto a las formas de proceder, para intentar dar respuesta a las preguntas de investigación y así alcanzar los objetivos trazados. Se refiere a cómo se construye conocimiento respecto de la realidad que se analiza y a la manera en que puede obtenerse dicho conocimiento.

Conviene recalcar que el modo en que se percibe la realidad debe ser coherente con el modo de acercarse a ella y las formas en las que se pretende conocerla e interpretarla, o, lo que es lo mismo, debe existir congruencia entre las dimensiones ontológica, epistemológica y metodológica del estudio (Sosa, 2010).

Se describirá a continuación el nivel de teoría que se pretende alcanzar con este estudio, para lo cual se toman en cuenta los cuatro tipos de teorías que destacan Goetz y Lecompte (1988) en función de su generalidad: la gran teoría, los modelos teóricos, las teorías formales y las teorías sustantivas, conformadas todas por unidades mínimas, que son los conceptos y las categorías (más amplias y generales que los conceptos). En el caso de esta investigación, el paradigma interpretativo y la postura relativista bajo la cual se han construido las preguntas y objetivos de investigación, obligan a descartar la gran teoría o modelos teóricos puesto que los fenómenos educativos y los comportamientos humanos son tan complejos y variados que el desarrollo de leyes universales pudiera parecer una perspectiva reduccionista.

Las teorías sustantivas y formales fundamentan la perspectiva de investigación y dan sustento a las decisiones metodológicas en este estudio. Estas se encuentran ligadas a determinadas poblaciones, escenarios o tiempos, en nuestro caso a un escenario de formación continua virtual. Se dice además que nos referimos a este tipo de teorías cuando, como consecuencia de un estudio, se obtienen relaciones que existen o pueden existir entre los conceptos y las categorías, las cuales pueden expresarse en forma de proposiciones, postulados o generalizaciones, que es precisamente uno de nuestros objetivos, generar una caracterización fina del PCK.

III.4.1 Nuestra metodología *Top- down* y *Bottom-up*

La perspectiva metodológica usada para este estudio se corresponde a una aproximación ***top-down*** («de arriba abajo») y ***bottom-up*** («de abajo arriba»), haciendo uso de lenguaje referido a estrategias de procesamiento de información características de las ciencias de la información. Este enfoque se usa como metodología en este estudio al considerar que proporciona un doble acercamiento a los datos que aportará perspectivas diferentes sobre el análisis (Grbich, 2013).

III.4.1.1 Con respecto al acercamiento *Top–down* que se corresponde con el MTSK

En esta primera fase de la investigación se usaron las definiciones y categorizaciones propuestas para los subdominios del MTSK, desarrolladas a partir de la revisión teórica mostrada en el apartado II.3 del capítulo anterior, con las cuales se genera un sistema de categorías que describiremos como parte de los instrumentos de análisis (Apartado III.6.3.1). El trabajo de construcción teórica del modelo nos proporciona una teoría previa que nos ayuda como investigadores a realizar un primer análisis del conocimiento profesional que dependa directamente del contenido matemático y a contrastar con la evidencia empírica. Podría decirse que se toma los dominios y subdominios del modelo como las gafas que nos permitan observar los datos, de manera que sean estos los que nos hablen sobre el conocimiento especializado del profesor.

El análisis del MTSK de Omar se llevó a cabo de manera completa, es decir, se exploraron todos los subdominios del modelo, haciendo uso de las categorías y subcategorías correspondientes a los seis subdominios, puesto que consideramos que el objetivo específico de caracterizar el conocimiento didáctico del contenido requiere de una mirada integral que permita también estar abiertos a posibles relaciones entre los subdominios del dominio matemático y los del didáctico. Además, el énfasis en el carácter integral y holístico de este hace indispensable tomar en cuenta el conocimiento especializado en su conjunto, y contrastarlo con el análisis puntual de determinados subdominios.

III.4.1.2 Con respecto al acercamiento *Bottom up* que se corresponde con la *Grounded Theory*

Al ser nuestro interés el realizar aportes a la caracterización del modelo, decidimos combinar la aproximación *top-down* con el enfoque *bottom-up*, de manera que pudiéramos tener una cierta "libertad" de aproximación a los subdominios y generación de nuevas categorías de conocimiento, poniendo así bajo escrutinio el modelo, su estructura y su funcionalidad.

Esta aproximación consiste en realizar un análisis de los datos correspondiente con el enfoque de la Grounded Theory (GT)[5] o teoría emergente de los datos, cuyos fundamentos están en una recogida y análisis sistemático de datos, a través de una continua interpelación entre el análisis y recogida de información (Strauss & Corbin, 1994). Así, una parte de la teoría a la que se quiere llegar se genera durante el proceso de investigación, emergiendo directamente de los datos, lo cual es una característica principal en el proceso de desarrollo de la GT, en el que las teorías que se generan van evolucionando a través de una continua interacción entre los procesos de recogida y análisis sistemáticos.

---

[5] Esta teoría se presenta en el libro de Glaser y Strauss *The Discovery of Grounded Theory*, de 1967.

El diseño metodológico que hemos planteado está enfocado a ofrecer información sobre posibles categorías y subcategorías o incluso subdominios que el MTSK no hubiese considerado dentro de su conformación, es por eso que se dice que esta fase es un acercamiento hacia la teoría. Además, tomando en cuenta que las teorías que emanan de esta metodología son reflejo de interpretaciones de los investigadores, realizadas con base en la sensibilidad teórica y los datos que surgen del proceso de análisis y no formulaciones de aspectos descubiertos de la realidad, este planteamiento metodológico se encuentra en sintonía con los posicionamientos ontológicos y epistemológicos mencionados anteriormente.

Las relaciones que se establecerán entre los conceptos y conjunto de conceptos son las que generarán la teoría buscada. Además, este tipo de teorías tiene una riqueza conceptual importante, por la misma densidad de conceptos y relaciones que hay entre estos. Esto se hace a través del uso del método de comparación constante, que se refiere a un procedimiento analítico que tiene como finalidad la búsqueda y establecimiento de semejanzas, diferencias y relaciones entre distintos fragmentos procedentes de los datos, a través de una comparación cuidadosa e intensiva de los resultados que se generan durante el análisis (Muñoz-Catalán, 2010).

El lector podría preguntarse ¿cómo se lleva a cabo una metodología coherente con la *Grounded Theory* teniendo en cuenta que se presenta un marco conceptual sobre el conocimiento matemático (MTSK) que podría sesgar la percepción del investigador?, por la necesidad que tiene este enfoque de acceder al campo libre de la teoría previa. Consideramos que estos enfoques pueden combinarse en tanto que, a pesar de que esta teoría establece que el investigador ha de acceder al campo de estudio sin ninguna teoría previa que desee aplicar directamente sobre los datos, no se niega la existencia y el valor de un bagaje profesional y personal del investigador que le ayude a realizar una mejor comprensión de los datos, que en este caso se relaciona con las definiciones que se han construido de los distintos subdominios del modelo MTSK, lo cual Strauss y Corbin (1994) denominan *Sensibilidad Teórica del investigador*. Por su parte, Muñoz-Catalán (2010) señala la importancia de que las teorías estén fundamentadas en el mundo empírico y sean mejoradas y reelaboradas en un diálogo e interpelación constante con los datos que se van obteniendo.

En esta tesis la primera descripción del modelo MTSK cumple con estas condiciones puesto que emerge del trabajo teórico y empírico realizado con este y otros modelos de conocimiento matemático del profesor, sin embargo, en un intento por realizar nuevas aportaciones teóricas y empíricas al respecto de dicha caracterización, se generan estrategias que permitieran hacer un análisis para establecer comparaciones constantes de los datos manteniendo la mayor sensibilidad posible a la aparición de categorías o relaciones que el MTSK no haya considerado.

Como mencionamos antes, al ser este estudio uno de los primeros en los que se utiliza el MTSK, la intención de nuestro trabajo es aportar información con respecto a la caracterización profunda de este, por lo que el acercamiento a los datos a través de la *Grounded Theory* comparte con esta investigación un interés por el desarrollo de teoría dentro del campo de la investigación, el proceso de desarrollo de la teoría a través del proceso de investigación y emergido de los propios datos y una actitud de apertura a los datos para *permitirles que hablen*. En especial nos interesa aportar precisión en las descripciones y caracterizaciones del KMT y KFLM (Ver Figura III.1)

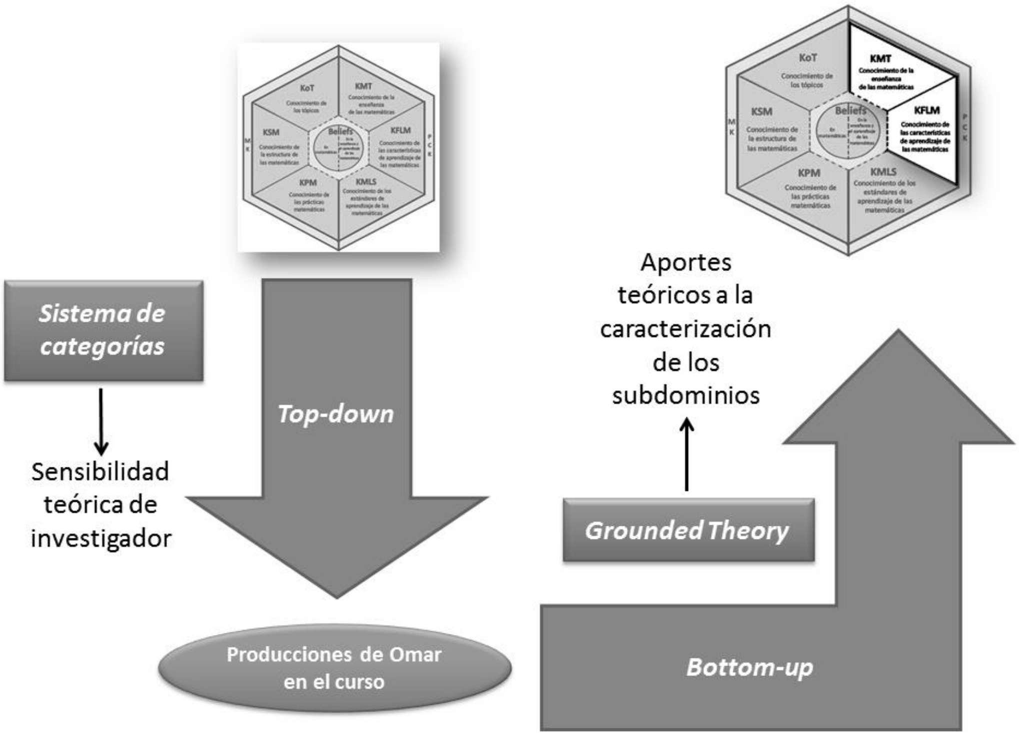


Figura III.1.Acercamiento metodológico ***top – down*** y ***bottom –up*** propuesto para este trabajo.

III.5 El estudio de caso como diseño de investigación

El diseño de investigación o diseño metodológico que describiremos a continuación se refiere a la organización de las actividades que se realizarán para dar solución al problema planteado o responder a la pregunta de investigación. Así, el diseño puede ser visto como el puente entre la pregunta de investigación y la solución o contestación a esta (Sosa, 2010).

A continuación se describen el diseño de investigación elegido para alcanzar los objetivos propuestos y los métodos con los cuales se realiza la recolección y análisis de los datos.

Se ha considerado como diseño de investigación más adecuado para este trabajo *el estudio de caso*, dado que este se refiere a un estudio minucioso y profundo sobre características significativas del objeto de estudio, el cual tiene una forma específica de recoger, organizar y analizar los datos, recabados además en entornos naturales (Bassey, 2003; Stake, 1995).

Stake (1995) comenta que “un niño puede ser un caso, un profesor puede ser un caso, pero su enseñanza no tiene la especificidad suficiente para llamarse caso” (p. 2), puesto que el caso es definido como objeto más que como un proceso. Dado que nuestro objetivo es indagar acerca de las características específicas del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, contrastando su construcción teórica con los resultados de la investigación empírica, consideramos que el estudio del caso particular del profesor de matemáticas de secundaria inmerso en un contexto de formación continua es un entorno propicio para la recogida de datos y el análisis de información.

La naturaleza misma del conocimiento profesional del profesor y el objetivo de profundizar en la comprensión y caracterización del conocimiento, más que el realizar abstracciones generales del mismo, orienta hacia un estudio de caso como método natural, puesto que permitirá capturar más y mejores características de este, como el carácter personal, situado y contextualizado que tiene este conocimiento.

III.5.1 Definición y caracterización del caso

Stake (1995) define tres tipos de estudio de caso: **el intrínseco**, que se refiere a un estudio en el que el investigador tiene la intención de comprender mejor un caso que por sí mismo es de interés, no porque con el estudio de este caso se pueda aprender algo sobre otros casos similares o sobre algún problema parecido, sino porque resulta un caso tan interesante para la investigación que se considera necesario y/o relevante saber algún detalle específico de este; el estudio **instrumental**, cuyo objetivo es lograr una mejor comprensión del objeto de estudio y no del caso, es decir, no interesa el caso por sí mismo, sino la información que este pueda aportar para la generación de teoría; y **el colectivo**, que se refiere a un conjunto de casos, cada uno de los cuales es fundamental para aprender sobre los efectos de las regularidades, siendo sumamente importante la coordinación entre los estudios individuales.

Por su parte, Bassey (2003) hace una clasificación de estos estudios en tres tipos, basándose en el tipo de resultados que pueden obtenerse: el ***story-telling and picture drawing***, que se refiere a "historias narrativas o informes narrativos de proyectos, programas, instituciones o sistemas educativos que merecen ser contados a audiencias interesadas" (p. 58); el ***evaluative***, que se refiere a la "investigación en programas, sistemas, proyectos o eventos educativos para determinar su valía, juzgados por el análisis de los investigadores con el fin de transmitirlo a las audiencias interesadas" (p. 58); y el ***theory-seeking and theory-testing***, que se refiere a un "estudio particular de cuestiones generales que tienen el objetivo de desarrollar proposiciones borrosas[6] (más tentativas), o generalizaciones borrosas (menos tentativas) y transmitirlas junto a su contexto y evidencias a las audiencias interesadas" (p. 58).

Tomando en consideración estas dos clasificaciones, consideramos que puede ubicarse este estudio como un estudio de caso instrumental y de tipo *theory-seeking and theory-testing*, puesto que el interés de la investigación se refiere precisamente a desarrollar y contrastar proposiciones teóricas sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, a través de la evidencia empírica que Omar pueda ofrecer con respecto al uso que hace de su conocimiento matemático y didáctico, es decir su conocimiento especializado. No pretendemos obtener resultados específicos sobre el conocimiento de Omar como individuo, sino utilizar su conocimiento como pretexto para generar teorizaciones sobre la naturaleza del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria de manera general.

A continuación realizamos una caracterización del caso a estudiar, tomando en cuenta lo que Muñoz-Catalán (2010) rescata sobre dos rasgos analíticos que Silverman (2008) propone como relevantes acerca de la investigación basada en el estudio de caso:

1) Cada caso será un caso de algo en lo que el investigador está interesado. Por tanto, la unidad de análisis debe definirse al principio con el fin de clarificar la estrategia de investigación.
2) Cada caso tiene sus límites que deben ser identificados en una fase temprana de la investigación.

---

[6] Traducción del inglés: *fuzzy*

Con respecto a la unidad de análisis: Se ha elegido estudiar el caso del profesor de matemáticas de secundaria, en tanto que este nivel es el más conocido por mí (la investigadora). He tenido experiencias de trabajo en formación continua con profesores de este nivel en México, tanto en contextos de trabajo presencial como virtual, lo cual me permite tener una sensibilidad hacia el tipo de matemáticas que se manejan y el uso que hacen los profesores de su conocimiento matemático en este nivel.

Por otro lado, el contexto de formación continua en el que se recolectan los datos de esta investigación nos permite una exploración de una parte de la práctica profesional distinta de la actividad de aula, en la cual el profesor se ve obligado a poner en juego sus conocimientos matemáticos y didácticos al interactuar con otros profesores. La vasta información y participación constante de los profesores participantes en el curso proporciona constantes oportunidades para profundizar en el análisis del conocimiento especializado que se manifiesta a través de sus participaciones escritas.

Con respecto a las limitaciones de este estudio de caso: Al encontrarse los profesores en un programa de formación continua (master en matemática educativa), su conocimiento profesional va enriqueciéndose durante el proceso de recolección de datos lo cual puede hacer que el conocimiento especializado cambie durante el proceso de trabajo, cuestión que reconocemos como un elemento interesante y que debe tomarse en cuenta al momento de analizar la información, aunque no sea el objetivo de este trabajo el indagar específicamente sobre ese desarrollo de conocimiento. Otro aspecto a considerar es que la naturaleza misma del conocimiento profesional del profesor nos permite acceder solo a las representaciones o manifestaciones del conocimiento, por lo que, lo que se reporta en este trabajo son interpretaciones basadas en la triangulación de los datos, la sensibilidad teórica, y el uso de los conocimientos y experiencias como investigadores tanto personales como profesionales (Strauss & Corbin, 1994).

Carrillo y Muñoz-Catalán (2011) realizan un análisis sobre los aspectos metodológicos empleados en las publicaciones de las Actas de la SEIEM. Entre los elementos que utilizan en su análisis está una tipología de triangulación, la cual está compuesta de la Triangulación de fuentes de datos que se refiere a "la comparación de datos relacionados con el mismo fenómeno, pero que proceden de fases diferentes del proceso de investigación, de diferentes ciclos temporales en el que el fenómeno ocurre o bien de diferentes participantes del entorno" (p. 94). El segundo tipo es la Triangulación de investigadores la cual consiste en lo siguiente:

> "Diferentes observadores participan para detectar o minimizar los sesgos que introduce la propia persona del investigador. Para Hammersley y Atkinson (1995) este tipo de triangulación se promueve mediante la formación de equipos de investigación, y se vería potenciada por la existencia de observadores que adoptaran roles diferentes en el campo o que fueran muy diferente entre sí" (p. 94).

Finalmente, consideran la triangulación de perspectivas metodológicas, la cual "se basa en la comparación de los datos obtenidos con distintas técnicas de recogida de datos. Puesto que cada técnica implica una amenaza diferente para la validación, este tipo de triangulación proporciona la base para contrastar las interpretaciones" (p. 94).

En el caso de esta investigación, la triangulación se lleva a cabo desde distintos ángulos o enfoques. Consideramos realizar una *triangulación de las fuentes de datos*, para lo cual elaboramos un método de comparación de los datos en dos momentos en los que los informantes hacen uso de conocimientos sobre contenidos matemáticos distintos, *El problema de las cuerdas* y *La* *elaboración del recurso individual*[7]. Al elegir utilizar un diseño de estudio de caso instrumental, no es importante el conocimiento especializado evidenciado en la actividad misma, sino las teorizaciones que puedan derivarse del estudio de dos momentos distintos en los cuales el profesor de secundaria pone en juego su conocimiento. Usamos una comparación entre los datos obtenidos de reflexiones individuales, como resolución de las actividades o diseños realizados por Omar y las participaciones que se vierten en foros de reflexión colectiva, en los cuales el profesor discute y genera argumentos a través de las participaciones de sus compañeros.

Por otro lado, los análisis de datos se sometieron a una *triangulación de investigadores*, a través del trabajo en distintos seminarios y reuniones del grupo de trabajo SIDM, encuentros en congresos y la utilización de ejemplos para artículos en revistas especializadas mencionados ya en el apartado III.2.2, todo esto con la intención de compartir e intercambiar puntos de vista con otros investigadores y así brindar más soporte y consistencia a los análisis.

Por último, no está por demás decir que la idea de hacer una triangulación no tiene el objetivo de realizar generalizaciones ni comprobar la validez de los datos, dada la naturaleza cualitativa de este estudio, sino descubrir cuáles de las inferencias pueden minimizarse, de manera que se puedan comprender mejor las producciones de Omar en el curso y el uso que hace de su conocimiento especializado, para así poder realizar comparaciones y aportaciones a la generación misma del modelo MTSK.

III.5.1.1 La selección del caso y el contexto de formación continua

El Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada - CICATA del Instituto Politécnico Nacional, es una institución mexicana, encargada de ofrecer un programa de Posgrado en Matemática Educativa (maestría y doctorado) en línea para profesores de matemáticas de los niveles medio superior y superior, así como para otros profesionales interesados en la enseñanza de las matemáticas. Los datos recolectados para este estudio se extraen de un curso en el cual participan profesores de secundaria y bachillerato como estudiantes del segundo año de maestría. El propósito declarado en la descripción de este posgrado, según consta en su página web[8], es "formar profesores e investigadores altamente especializados que puedan enfrentar la problemática que plantea la incorporación de saberes matemáticos al sistema didáctico, y así favorecer una enseñanza que produzca aprendizaje". Se menciona además que el programa "se apoya en un modelo educativo basado en redes, sistemas de telecomunicaciones, tecnologías de información y modelos de enseñanza y aprendizaje a distancia en la que colaboran investigadores en diversos campos de especialidad ubicados en centros de investigación y universidades del país y del extranjero". Este posgrado es totalmente virtual, lo que facilitaba la recolección de los datos completos del curso.

En el contexto de esta maestría en línea, los profesores comparten conocimientos sobre su práctica docente, derivados de su desarrollo como profesional de la educación matemática, además de adquirir conocimientos nuevos procedentes de la investigación en Matemática Educativa, que les permiten reflexionar y contrastar dicho conocimiento. Pretendemos, entonces, valernos del trabajo que estos profesores realizaron a lo largo de uno de los cursos de maestría[9] y de las producciones que emergen de la discusión entre colegas, con la finalidad de analizar el conocimiento matemático

---

[7] Describiremos las actividades en el apartado III.6.1.1.1

[8] http://www.cicata.ipn.mx/OfertaEducativa/MME/Paginas/Inicio.aspx

[9] Las actividades que se plantean son parte del *Curso de teoría de situaciones didácticas* que se describirá más ampliamente en el apartado III.6.1.1.1

y didáctico que pudiera manifestarse a lo largo del curso, a través de sus participaciones en los foros de discusión, las tareas realizadas, los diseños de recursos didácticos que presentan y las modificaciones que se proponen derivadas de la interacción entre compañeros de grupo y tutores.

El trabajo comenzó con un grupo de ocho profesores y tres profesoras que, como mencionamos antes, cursaban la maestría en Matemática Educativa y que trabajarían en el curso de Teoría de Situaciones Didácticas, de enero a marzo de 2013, nueve de los cuales eran mexicanos, uno colombiano y una argentina. En el momento de la investigación los participantes eran profesores en ejercicio en sus países de origen, lo que, sumado a que el programa de maestría contempla sólo interacciones virtuales, obligaba a los profesores y tutores a entablar toda comunicación a través de una plataforma Moodle y el correo electrónico.

Con respecto a la selección que hicimos de informantes, debemos decir que en un principio se pensó en seleccionar dos profesores, los cuales fueran seleccionados como casos de especial interés para responder a nuestras preguntas y objetivos de investigación (Descritos en el apartado III.1), en la medida en que estos proporcionaran un bagaje amplio de conocimiento matemático y sobre la didáctica de la matemática y una experiencia importante en la enseñanza, además de tener una buena disposición para el trabajo en el curso.

Para la elección de estos profesores, tomamos en cuenta diferentes características:

1. Que los profesores hubiesen realizado todas las tareas y participado en todos los foros del curso, y que su participación fuese activa.
2. Que los comentarios en foros y tareas presentadas en el curso ofrecieran suficiente información como para analizar sus participaciones.
3. Que las propuestas de recursos que presentaron los profesores pusieran más interés en el contenido matemático que en cuestiones de pedagogía general.
4. Que los profesores hubiesen demostrado particular empeño, entrega e interés por una mejora de su práctica y una apertura a la discusión académica entre pares.
5. Por último, que los profesores hubiesen mostrado interés y disposición por trabajar en proyectos de investigación, en particular este proyecto.

Al finalizar el curso se realizó una selección de dos informantes que cumplían con todos estos criterios para la investigación: Ana y Omar. Se les pidió a estos profesores su autorización para tomar las aportaciones realizadas durante el curso como unidades de análisis de esta investigación doctoral. Además se hizo hincapié en que este no era un proyecto ligado al CICATA y se les explicó que los datos personales serían confidenciales, por lo que en este reporte se usan seudónimos. Sin embargo, una vez que comenzamos con los primeros análisis de la información y que se realizaron algunas comparaciones de los datos decidimos dejar de lado el caso de Ana, puesto que no aportaba suficiente información; además, al ser una profesora de nivel universitario, los resultados y teorizaciones serían distintas a las que podrían derivarse del análisis de la información que Omar proporcionaba.

III.5.1.1.1 Omar como informante

Omar es un profesor de secundaria que participó activa y constantemente en el trabajo del curso. Sus aportaciones y reflexiones sobre su propio trabajo y el de sus compañeros ofrecían contenido suficiente para indagar acerca de su conocimiento especializado. Ofrecía información interesante para la profundización y caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria en formación continua, dado que explicita constantemente sus reflexiones y genera argumentaciones muy completas en forma de comentarios para el tutor y para sus compañeros, además de que sus reflexiones son siempre muy completas, lo que permite tener mucha más información.

Este profesor ha nacido, se ha formado y actualmente trabaja en Colombia, es Ingeniero Químico egresado de la Universidad Industrial, dedicado a la docencia desde hace más de 25 años, su experiencia es en el nivel de bachillerato, que corresponde a estudiantes de 14 a 18 años. Ha impartido clases de Matemáticas, Física y Química y asistido a algunos cursos y diplomados de formación para docentes. Desde hace aproximadamente 8 años trabaja con estudiantes de secundaria, por lo que los diseños de recursos que propone durante el curso están pensados para este nivel.

Se define a sí mismo como una persona dedicada al trabajo y a la búsqueda del conocimiento, a la implementación de nuevas estrategias, y métodos que redunden en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las participaciones de Omar dentro del curso son extensas y llenas de justificación matemática y didáctica. El conocimiento matemático que muestra Omar también nos parece suficiente como para poder analizar un conocimiento inherente al contenido matemático, y minimizando la focalización en aspectos pedagógicos generales que no están contemplados dentro del MTSK. Otro aspecto importante es que sus participaciones dentro de los foros no se limitan a responder las preguntas iniciales de los tutores, sino que se interesa por leer y opinar sobre las participaciones de sus compañeros, además de incluir en su discurso evidencias de un conocimiento de constructos teóricos derivados de la investigación en matemática educativa, los cuales muy posiblemente sean un reflejo de su formación dentro del programa de maestría.

III.6 El método: técnicas e instrumentos de recogida, organización y análisis de la información

Carrillo y Muñoz-Catalán (2011) enfatizan la diferenciación que existe entre **los métodos** de investigación como “las técnicas utilizadas para la recogida y el análisis de datos que suponen un enfoque específico y particular” (p. 79) y **la metodología** como “una teoría de métodos, que abarca los fundamentos teóricos subyacentes y el conjunto de asunciones epistemológicas (y ontológicas) que determinan el modo de ver el mundo y, por tanto, la elección de los métodos de investigación” (p. 79), para establecer la relación entre estos de manera que se evidencia cuál es la naturaleza de los datos y la forma en que el investigador los trata, lo que condiciona los métodos de investigación y que el paradigma desde el que se posiciona la investigación no depende de dichos métodos, sino de la coherencia de este con respecto al diseño de la investigación.

Al centrar la atención en la comprensión e interpretación de la naturaleza del conocimiento especializado del profesor, consideramos natural una orientación hacia la utilización de métodos cualitativos de análisis, que permitan comparar y analizar de manera controlada la información que proporciona nuestro informante. Así, las técnicas y los instrumentos de recogida y análisis que se diseñan tienen como intención generar datos que ayuden al desarrollo del análisis cualitativo.

III.6.1 Técnicas e instrumentos de recogida de información

Una vez analizado el contenido del curso de Teoría de Situaciones Didácticas con los tutores y diseñado el contenido de las actividades a realizarse, se consideró que este espacio proporcionaba un entorno *natural*[10] de recolección de datos que pudieran aportar información acerca del MTSK de los estudiantes de la maestría en matemática educativa del programa de CICATA. La disponibilidad de los tutores nos permitió no solo observar el desarrollo del curso sino también participar del diseño e implementación del mismo. Sin embargo, estas condiciones de trabajo nos obligaban a mantener en todo momento una clara delimitación entre los objetivos pedagógicos del curso como parte de un programa de formación profesional y los objetivos de investigación que este trabajo persigue:

1) Los *objetivos pedagógicos del curso* se referían a la construcción de recursos didácticos, a reconocer sus características como herramientas teóricas y metodológicas que permitan diseñarlos e implementarlos en la clase de matemáticas.
2) El *objetivo de investigación* de esta tesis se refiere a describir y comprender el conocimiento profesional del profesor de matemáticas a través del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, más específicamente la profundización en la descripción, comprensión y caracterización de los subdominios de conocimiento de las características de aprendizaje de las matemática y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, a través de las producciones de un curso virtual de formación continua.

Hacer esta distinción era importante en tanto que un objetivo no debía traslaparse con el otro aunque estos fueran compatibles.

III.6.1.1 Definición y características del curso de Teoría de Situaciones Didácticas

El curso de teoría de situaciones didácticas tuvo una duración de cinco semanas, durante las cuales los profesores desarrollaron cinco actividades en las que se diseñaban, discutían y evaluaban recursos didácticos propuestos por los tutores y por los mismos profesores. Se pretendía que los profesores reconocieran las características de estos recursos como herramientas teóricas y metodológicas para poder diseñarlos, evaluarlos e implementarlos en clase.

Tradicionalmente en este curso se presentan elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas propuesta por Brousseau y nutrida por varios investigadores, principalmente miembros de la comunidad didáctica francesa, en la cual se proponen elementos para el diseño de situaciones didácticas en torno a un contenido matemático. De la misma manera, se propone una metodología para el diseño, implementación y evaluación de la situación didáctica, la ingeniería didáctica (Brousseau, 2007). Sin embargo, los tutores del curso consideraron que el diseño de una situación debe seguir un proceso largo y complejo, lo cual sería una limitante en el curso programado para llevarse a cabo en 5 semanas y en el que participaban profesores que podían no tener ninguna experiencia en producir situaciones para implementar en aula ni en el estudio de esta teoría. Es por ello que el objetivo general del curso se transformó para analizar *los recursos didácticos* vistos como problemas matemáticos o secuencias didácticas, que puedan implementarse en clase y que puedan generar en los estudiantes un aprendizaje específico. Además se optó por propiciar el reconocimiento de herramientas teóricas y metodológicas para el diseño e implementación de un recurso didáctico que pudieran ser útiles a los profesores para evaluar sus propios recursos y los de sus compañeros.

---

[10] Nos referimos a un espacio que no se diseña expresamente para satisfacer los objetivos de una investigación, sino que tiene como objetivo el desarrollar en los profesores un conocimiento sobre los recursos didácticos como herramientas para el trabajo en el aula.

Para guiar la reflexión sobre los recursos didácticos, se utilizó el trabajo de Georget (2009). A continuación se presentaron algunas herramientas teóricas y metodológicas que permiten al profesor diseñar, implementar y evaluar la viabilidad de un recurso didáctico para ser llevado al aula de matemáticas y se hace uso de elementos del marco teórico presentado en la investigación doctoral de Georget.

Con respecto a los materiales de apoyo y recursos tecnológicos del curso, los profesores contaban con un curso dentro de la plataforma Moodle del programa de maestría. Este espacio es privado, por lo que sólo los profesores pertenecientes a este grupo y los tutores del curso podían acceder. Dentro de este espacio se contaba con un video de introducción y presentación del curso, foros de discusión y espacios para adjuntar archivos de texto, los cuales podían usarse para describir la dinámica de las actividades a realizarse, para que los profesores subieran sus tareas a la plataforma o para compartir alguna otra información.

III.6.1.1.1 Descripción de la estructura del curso

Con respecto a las estrategias didácticas, el curso se dividió en cinco actividades a realizarse a lo largo de una semana cada una. A continuación describimos su contenido:

III.6.1.1.1.1 Actividad 1. El problema de las cuerdas

Durante la primera semana de trabajo en el curso, se presenta a los profesores la primera actividad, que consistió en resolver el "Problema de las cuerdas" y diseñar una guía pedagógica con la cual se mostraría cómo el profesor puede implementar el problema en clase. Las instrucciones dadas a los profesores eran las siguientes:

a) Resolver el problema de las cuerdas:

> Se colocan n puntos sobre una circunferencia. ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?

b) Presentar las técnicas o diferentes maneras en las cuales puede ser resuelto.

c) Desde la óptica del profesor, señalar en qué nivel consideran que puede ser propuesto.

d) Escribir una guía pedagógica para que un profesor implemente este problema en una clase de matemáticas. En el documento debe detallarse la naturaleza del problema, las razones por las que sería conveniente implementarlo en una clase de matemáticas (objetivos pedagógicos) y la manera en que debería presentarse este problema en la clase de matemáticas. Para esto último será necesario describir, lo más detalladamente posible, la dinámica de la clase:

   a. Manera de presentarlo a los estudiantes (puede modificarse el enunciado)
   b. Puede modificarse el problema, presentando, por ejemplo, número determinado de puntos
   c. Declarar qué se espera que los estudiantes realicen
   d. Declarar las intervenciones que se considera debe realizar el profesor para que el problema pueda ser resuelto por los estudiantes.

Los profesores debían entregar los archivos correspondientes a las tareas de esta actividad el 24 de enero de 2013.

Al finalizar esta actividad se realizó el "Foro 1", que duró dos días, en el cual se pidió hacer una puesta en común sobre la naturaleza del problema de las cuerdas, sobre las técnicas que se visualizaron para resolverlo y sobre la pertinencia del problema como un *buen* recurso didáctico. Para esto se dio la instrucción:

> En este foro se discutirá la naturaleza del problema de las cuerdas y la manera en que se puede presentar en el aula.

La participación en este foro debía llevarse a cabo del 25 al 28 de enero de 2013.

El foro se dividió en 3 conversaciones separadas, cada una correspondiente a una pregunta:

1) ¿Cuál es la naturaleza del problema de las cuerdas?, ¿un ejercicio rutinario, tradicional, abierto?
2) ¿Qué técnicas visualizaste para resolver el problema de las cuerdas?
3) ¿Consideras que el problema de las cuerdas constituye un buen recurso didáctico? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?

III.6.1.1.1.2 Actividad 2. Diseño de recurso didáctico individual

Durante la segunda semana de actividades se pidió a los profesores que diseñaran un recurso didáctico propio, entendido recurso en un sentido amplio, tomando como ejemplo el problema de las cuerdas. Se pidió especificar los objetivos considerados para el diseño, el nivel para el que se propone y las razones que lo hacían ser un buen recurso didáctico:

> Crear un recurso didáctico para la clase de matemáticas del nivel en el que laboran actualmente. Un recurso didáctico es entendido en un sentido amplio, por tanto puede ser un problema, una actividad, un ejercicio, un conjunto de tareas, propuesto/adaptado con la intención de lograr objetivos pedagógicos específicos en una clase de matemáticas.
>
> El recurso que diseñen debe ser presentado en un documento realizado en editor de texto o bien en pdf. Puede proponerse un recurso que requiera de lápiz y papel para ser resuelto o de alguna herramienta informática (programa computacional, calculadora, sitios de internet, celular, etc.)
>
> Se deberán especificar los objetivos considerados para el diseño, el nivel para el que se propone y las razones que lo hacen ser un buen recurso didáctico.

La fecha de entrega de estas tareas era el 31 de enero de 2013.

Para finalizar con esta actividad, algunos tutores enviaron a los profesores comentarios a las actividades individuales, y, a su vez, algunos de los profesores respondieron a estos comentarios. Al no ser una actividad marcada inicialmente en el plan de trabajo, no era obligatorio recibir ni responder a la actividad; sin embargo, Omar recibió y respondió a mis comentarios como tutora.

III.6.1.1.1.3 Actividad 3. Presentación de herramientas teóricas

Se consideraron principalmente dos partes de la tesis de Georget (2009), la primera es la relacionada con las categorías que permiten evaluar un recurso (utilidad, utilizabilidad, adaptabilidad y aceptabilidad), y la segunda tiene que ver con diferentes potenciales que se asocian a las actividades de investigación y de prueba entre pares –RPP (potencial de investigación, potencial de resistencia, potencial de resistencia dinámico, potencial de debate y potencial didáctico)[11].

---

[11] No profundizaremos en estas herramientas puesto que su descripción exacta no nos parece relevante para el análisis del conocimiento del profesor, sin embargo el lector puede consultar el documento en el que se describe cada una de las herramientas en el Anexo III.2.

Durante la tercera semana se pidió a los profesores que leyeran el documento "Herramientas teóricas para el análisis de recursos didácticos", en el que se resumen algunos de los elementos del marco teórico presentado en la investigación doctoral de Georget (2009) y se describen las herramientas que propone para analizar la ergonomía de un recurso didáctico.

El objetivo de presentar en este curso tanto las categorías de análisis relativas a la ergonomía de los recursos, como los potenciales de las actividades de investigación y de prueba entre pares, era dotar a los profesores de herramientas para evaluar el recurso que habían generado para la actividad 2. Así, una vez que hubieran estado informados sobre estas herramientas teóricas, se pidió que se escribiera un reporte crítico del documento:

> Escribir un reporte crítico de las herramientas presentadas, para lo cual se pide describir las características generales de las herramientas, para qué podrían resultar útiles, por qué sería importante conocerlas y cómo podrían ser utilizadas.

Se pedía a los profesores entregar este reporte el miércoles 6 de febrero de 2013.

Al final de esta semana se propuso el "Foro 2", en el cual se discutió acerca de las herramientas y su funcionalidad en el diseño de un recurso didáctico producido por los profesores. Para esto se dividió a los profesores en tres grupos de entre tres y cuatro profesores:

> En este foro se reflexionará sobre las herramientas teóricas propuestas en la lectura de la Actividad 3 y su funcionalidad/manera de operativizarlas en el diseño/evaluación de un recurso didáctico producido para los profesores de matemáticas. El foro será desarrollado por equipos, los cuales se presentan a continuación.

Equipo 1	**Equipo 2**	**Equipo 3**
Omar	(Se omite información por no ser relevante para este estudio)	(Se omite información por no ser relevante para este estudio)
Profesor B		
Profesor J		
Profesor N		

Este foro se llevó a cabo el 7 y 8 de febrero de 2013.

Este foro se dividió en 3 conversaciones separadas, cada una correspondiente a una de las herramientas mencionadas en el trabajo de Georget.

1) Utilidad
2) Utilizabilidad
3) ¿Y los potenciales?

III.6.1.1.1.4 Actividad 4. Análisis del recurso diseñado

Utilizando las herramientas teóricas presentadas en la actividad anterior, durante la cuarta semana se pidió a los profesores que analizaran el recurso que habían diseñado durante la Actividad 2 y que lo presentaran de nuevo, detallando lo más posible las características del recurso a la luz de las herramientas teóricas:

> Utilizando las herramientas teóricas presentadas en la lectura de la Actividad 3, analizar el recurso que cada uno de ustedes ha diseñado en la Actividad 2. Para lo cual, deberán producir un documento en editor de texto y detallar lo más posible las características del recurso diseñado.

La entrega de este documento se programó para el 13 de febrero de 2013

III.6.1.1.1.5 Actividad 5. Evaluación externa del recurso

Durante la última semana los profesores compartieron su recurso didáctico con un colega profesor de matemáticas, solicitándole que lo analizara y lo evaluara:

> Presentar el recurso diseñado a un colega, profesor de matemáticas, y solicitarle que lo analice y evalúe. Para lo cual, primeramente se propone que el colega resuelva la actividad(es) que constituyen el recurso y luego evalúe, como experto en la enseñanza de la matemática, la viabilidad del recurso para ser implementado en la clase de matemáticas.
>
> Escribir un reporte del trabajo realizado con el colega, detallando:
>
> - Perfil del profesor elegido (años de experiencia, nivel en el que se desempeña, formación recibida)
> - La manera en la que le fue presentada el recurso
> - Manera en que analiza el recurso didáctico, características que destaca, las potencialidades que visualiza, los límites de su posible implementación en el aula, etc.

Las tareas de esta actividad fueron solicitadas para el lunes 18 de febrero de 2013

Además se proporcionó a los profesores una guía de entrevista para el colega evaluador, con la finalidad de que este pudiese evaluar el recurso sin necesidad de conocer a fondo las herramientas teóricas:

> Presentar el recurso didáctico desarrollado en la actividad 4 a un colega profesor de matemáticas y solicitarle que evalúe el recurso. Para que el colega pueda evaluar el recurso se le hará una entrevista basada en las categorías de análisis (utilidad, utilizabilidad, adaptabilidad) y de los potenciales (didáctico, de debate y de resistencia y dinámico).
>
> Preguntas propuestas para la entrevista:
>
> 1) ¿Consideras que este recurso podría serte útil en tu práctica?, ¿Por qué?
>
> 2) ¿Consideras que le falta algo? ¿Qué?
>
> 3) ¿Crees que este recurso didáctico es suficientemente "flexible"? ¿Permite tomar decisiones para utilizarlo?
>
> 4) ¿Es un recurso modificable? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?
>
> 5) El recurso ha sido diseñado para lograr ciertos objetivos, ¿consideras que efectivamente se lograrían?
>
> 6) ¿Al utilizar este recurso en la clase de las matemáticas, los estudiantes van a aprender algo? ¿Qué?
>
> 7) ¿Consideras que este recurso favorece el debate entre estudiantes? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?
>
> 8) ¿Consideras que los alumnos llegarán a la solución? Es decir, ¿se cumplirán los objetivos propuestos?
>
> 9) ¿Este recurso permitirá a los alumnos realizar una actividad de búsqueda o de investigación?

10) ¿Qué cambios propones?

11) ¿Crees que los estudiantes podrían tener alguna dificultad al momento de resolver la actividad? ¿Cuáles?

Por último, al final de la semana se pidió a los profesores trabajar en cuatro equipos de entre dos y tres personas, dentro del "Foro 3", en el cual pudiesen exponer los resultados de la evaluación de su actividad y debatir sobre ellos.

En este foro cada participante expondrá a su equipo la evaluación realizada por el profesor de matemáticas del recurso diseñado.

Equipo 1	**Equipo 2**	**Equipo 3**	**Equipo 4**
-	Profesor R	-	-
-	Omar	-	-
-	Ana	-	-

Para realizar la exposición se sugiere generar un documento en formato ppt donde se presenten la evaluación realizada por el profesor de matemáticas. En cada equipo se abrirá un tema para cada integrante, en dicho espacio deberán colocar su ppt (o archivo de otro tipo) y se encargarán de responder las cuestiones de los otros dos integrantes del equipo. Todos los integrantes deberán a su vez ver, reflexionar y discutir las evaluaciones presentadas por cada compañero del equipo.

III.6.1.1.1.6 Codificación de datos para el análisis

Todos los documentos generados por Omar a lo largo del curso fueron recolectados para esta investigación y codificados para su identificación y posterior referencia. Hemos agrupado la notación en la Tabla III.1.

III.6.1.2 El papel de la investigadora

Bassey (2003) señala que el investigador que se describe interpretativo es consciente de que juega un papel clave en el proceso de interpretación de la realidad que observa, reconoce que haciendo preguntas o con la mera observación podría cambiar o influir en la situación que estudia, puesto que se convierte en parte de la realidad y el contexto que observa. Debe reconocerse así, como posible variable de la investigación, aunque los conocimientos de los sujetos derivados de la interacción con el investigador no sean objeto de investigación.

Mi participación dentro del grupo de trabajo tuvo dos vertientes, primero como tutora del curso, por lo cual participé en el diseño del curso, el monitoreo del trabajo con los profesores durante el desarrollo de las actividades, el asesoramiento en foros y tareas, en fomentar las discusiones en algunos de los foros a través de preguntas que pudiesen detonar las reflexiones y discusiones de los profesores, y en la retroalimentación sobre los recursos diseñados. Esta primera etapa requería no perder de vista los objetivos pedagógicos del curso para dejar en un segundo plano mis objetivos de investigación.

Actividad	Documentos		Codificaciones
1	Resolución del problema de las cuerdas		A1_D1
	Guía pedagógica del problema de las cuerdas		A1_D2
	Foro 1: Analizando el problema de las cuerdas	Pregunta 1: ¿Cuál es la naturaleza del problema de las cuerdas?, ¿un ejercicio rutinario, tradicional, abierto?	A1_F1_P1
		Pregunta 2: ¿Qué técnicas visualizaste para resolver el problema de las cuerdas?	A1_F1_P2
		Pregunta 3: ¿Consideras que el problema de las cuerdas constituye un buen recurso didáctico? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?	A1_F1_P3
2	Recurso didáctico individual		A2_D1
	Respuesta a la retroalimentación		A2_D2
3	Reporte de lectura sobre herramientas teóricas		A3_D1
	Foro 2: Herramientas teóricas	Utilidad	A3_F2_P1
		Utilizabilidad	A3_F2_P2
		¿Y los potenciales?	A3_F2_P3
4	Análisis individual del recurso usando las herramientas teóricas		A4_D1
5	Reporte de evaluación externa del recurso		A5_D1
	Foro 3: Discusión de evaluación externa		A5_F3

Tabla III.1 Codificación de documentos generados en cada actividad

En un segundo plano estaba el papel de investigadora, por lo que puede ser que algunas de las discusiones generadas por mí tuvieran la intención implícita de fomentar la explicitación de argumentos matemáticos por parte de los profesores. Sin embargo, aunque no vemos una contraposición fuerte entre los objetivos de esta investigación y los del curso, mientras el curso estuvo activo el objetivo principal siempre fue que los profesores discutieran sobre el diseño y evaluación de los recursos didácticos e hicieran uso de las herramientas teóricas presentadas.

Una vez que el curso terminó nos centramos de nuevo en los objetivos de investigación, para lo cual se realizaron análisis de las actividades y participaciones en los foros, así como diseños de los profesores, con la intención de complementar el conocimiento que el profesor mostraba a lo largo del curso y seguir el rastro de conocimiento que el trabajo del profesor dejaba plasmado en el curso.

Es importante mencionar que en ningún momento la investigadora validó o descalificó opiniones o argumentos de ningún participante, puesto que el papel del tutor es el de propiciar elementos que puedan detonar la reflexión del profesor.

A lo largo del curso los profesores trabajaron dos tipos de recurso en la plataforma: **los archivos de texto**, que se refieren a las tareas que los profesores subieron a la plataforma, y que en su mayoría eran archivos en formato doc, y **los foros de discusión**, que son conversaciones sostenidas entre los profesores, las cuales fueron descargadas directamente de la plataforma en archivo pdf para luego ser transcritos a archivos de Word con la intención de poder editar el texto, eliminando las participaciones de compañeros de Omar que no interactuaban directamente con él, y eliminar algunos gráficos para mantener el anonimato de los participantes.

III.6.1.3 El uso de MAXQDA 11 como instrumento de organización de la información

Con la intención de tener control sobre los datos generados en el curso, nos hemos apoyado en el software de análisis cualitativo MAXQDA 11 para clasificar, ordenar y analizar la información generada por los profesores. Este software está diseñado para funcionar como una herramienta para investigaciones de corte cualitativo principalmente, aunque pueden también obtenerse algunas relaciones cuantitativas de la información.

Teniendo en cuenta la cantidad de información que se genera en las tareas que realizaron los profesores y conversaciones o fragmentos de conversaciones que se sostuvieron en los foros, es necesario tener un medio de registro en el cual pueda sistematizarse la información obtenida en las producciones del curso, de manera que sea posible automatizar la codificación de los documentos, y organizar la información y optimizar la asignación de categorías desde los dos enfoques propuestos, el *top-down* y el *bottom-up*.

El programa permite la inserción directa de archivos en formato doc, por lo que todas las tareas enviadas por los profesores, así como la retroalimentación correspondiente a la actividad 2, fueron agregadas directamente al programa y codificadas automáticamente por este.

A pesar de que el programa admite la inserción de documentos en formato pdf, como se mencionó en el apartado anterior, fue necesario realizar una transcripción de los mismos a formato doc, puesto que la descarga generada por la plataforma crea un archivo no modificable y el texto de una página era reconocido como una sola imagen. Hemos usado sangrías que permitan diferenciar la anidación de las participaciones en los foros propuestos en las actividades 1, 3 y 5, tratando de conservar el orden que tenía la conversación en la plataforma Moodle.

Como mencionamos anteriormente, al tratarse de foros pertenecientes a un curso de la maestría en la que participaban Ana y Omar al momento de la toma de datos, hay participaciones de otros compañeros del grupo que no son objeto de estudio de esta investigación y del tutor del curso que estuviese encargado de moderar el foro; sin embargo, no hemos transcrito las participaciones de estos compañeros a menos que su participación detonara una interacción directa con Ana u Omar. Estos comentarios están agregados en color gris para distinguirlos de los que pertenecen a los casos de estudio.

Como explicamos antes, la metodología *top-down* y *bottom-up* utilizada en este trabajo demandaba la generación de categorías de análisis de los datos. La cantidad de información generada durante el curso y el número de categorías que se utilizaron para el tipo de análisis propuesto requirió del uso de este software como un instrumento que permitía hacer asignaciones de categorías de forma simple y ordenada, haciendo referencia a cualquier tipo de unidad de información (episodios, fragmentos de episodio, frases o palabras una asignación), y triangulando distintos momentos del curso y así obtener un análisis lo más completo posible.

III.6.2 Técnicas e instrumentos de análisis de los datos

Las técnicas de análisis de los datos que utilizamos se encuentran en concordancia con la perspectiva metodológica *top-down* y *bottom-up* que hemos adoptado. Como se describió en el apartado III.4, esta perspectiva nos permite un doble acercamiento a los datos trabajando en dos fases.

III.6.2.1 Diferencia entre evidencia de conocimiento, indicios de conocimiento y oportunidades de exploración de conocimientos

Con objeto de poder explotar en nuestro análisis la mayor cantidad de datos que permitieran entender y caracterizar mejor y más profundamente el conocimiento especializado del profesor, decidimos utilizar una diferenciación de tres tipos de conocimientos puestos en juego dentro de los datos que se generaron a lo largo de las participaciones de los profesores en los trabajos del curso de formación continua.

Comenzamos por diferenciar las ***evidencias de conocimiento***, es decir, los segmentos en los cuales no tenemos duda de que se puede observar un conocimiento del profesor, y que este puede clasificarse como parte de su MTSK. Estos segmentos podrían ser considerados como los datos más potentes de la investigación y con más entidad para dar soporte a la construcción de un mapa general de MTSK del profesor que se estudia.

Además de estas evidencias, decidimos incluir lo que en Moriel-Junior y Carrillo (2014) se denomina ***indicios de conocimiento***, esto para referirnos a fragmentos de información en los que parece percibirse cierto conocimiento matemático o didáctico de la matemática que los sustenta y que pudiera considerarse parte del MTSK, sin embargo, la evidencia no resulta contundente, por lo que se requeriría de una exploración más profunda para poder afirmar que el profesor posee dicho conocimiento.

Por su parte, Flores, Escudero y Aguilar (2013) exponen la idea de ***oportunidades para explorar conocimiento*** como un término que permite especular sobre la información que un segmento, unidad de información o determinado contexto podría aportar a un futuro análisis de los datos. En este sentido podemos decir que en toda investigación surgen momentos que nos parecen potencialmente interesantes para profundizar en una idea, o para explorar cosas distintas a las que originalmente fueron pensadas para el análisis. En el caso específico de este trabajo, existen segmentos o unidades que por sí mismos no proporcionan la información suficiente para hablar de una evidencia o indicio, pero que pudieran servir como punto de partida o referencia para indagar sobre algún aspecto específico del conocimiento del profesor en un futuro, ya sea en análisis posteriores de actividades o en investigaciones posteriores a esta.

Al tratarse este de un trabajo que recolecta información en un entorno que no está diseñado explícitamente para la investigación del MTSK (un entorno *natural* de formación continua), no hubo entrevistas posteriores al análisis que permitieran contrastar los datos recopilados a lo largo del curso, pero utilizamos la idea de oportunidad e indicio para apoyarnos en el análisis progresivo de la información.

Recordemos que los datos del curso se recopilan a lo largo de cinco semanas de trabajo, en las cuales los profesores elaboran y reelaboran propuestas de trabajo individual y colectivamente, a través de la plataforma virtual. Al momento de generarse interacciones entre los profesores y tener la oportunidad de observar las modificaciones y reflexiones generadas por los compañeros a lo largo del curso, las evidencias de conocimientos que pudimos observar en sus participaciones también iban transformándose, proporcionando más información sobre ideas que habían sido formuladas previamente, complementando unidades a partir de peticiones de sus compañeros o tutores y generando reflexiones a partir de observar y analizar el trabajo de sus colegas de curso.

El análisis se llevó a cabo de manera ordenada, es decir, partimos de la Actividad 1, seguimos con la Actividad 2 y así sucesivamente hasta terminar con el análisis de la Actividad 5, lo cual nos permitió observar la evolución del trabajo de los profesores y poder contrastar y complementar sus participaciones. El manejo de estas tres nociones, evidencia, indicio y oportunidad, y la metodología *top-down* y *bottom-up* elegida para el análisis, dio oportunidad a la modificación de las asignaciones realizadas en un determinado momento de análisis a la luz de los nuevos datos que se estaban generando en el curso. Así, un segmento que parece contener información sobre el MTSK del profesor podía clasificarse como indicio de conocimiento según el tipo de información que proporcionaba a los investigadores, sin embargo, era posible que a lo largo del análisis se encontraran otras unidades de información que permitieran complementar o constatar los datos de nuevo, de manera que lo que antes era un indicio podría tener entidad suficiente como para transformarse en una evidencia de conocimiento.

III.6.2.2 Primera asignación de subdominios y categorías en MAXQDA

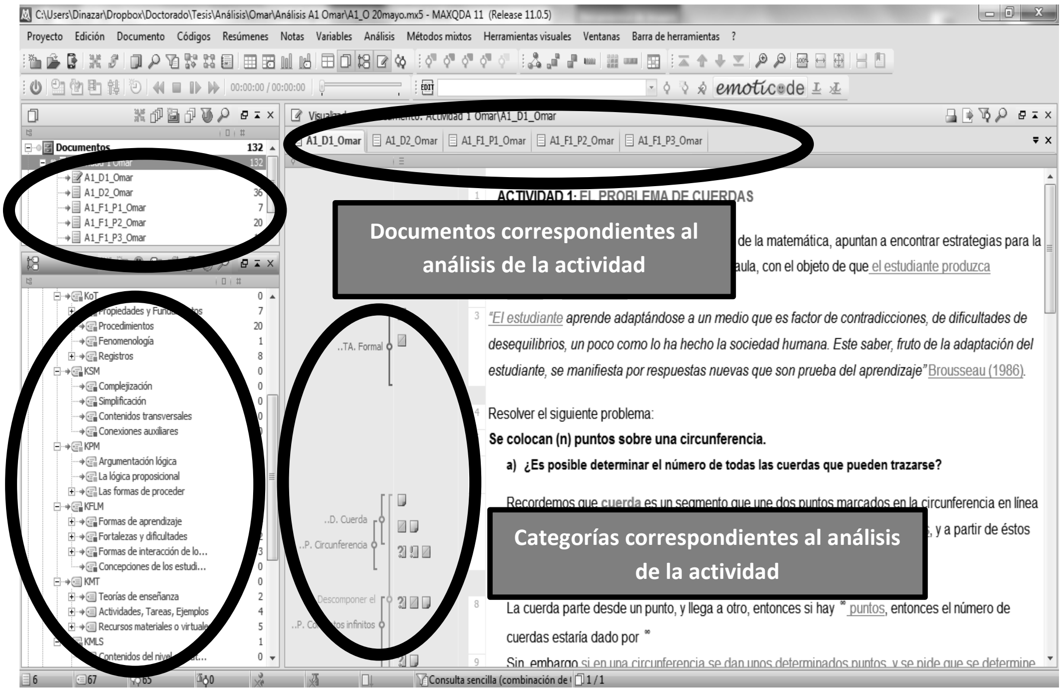
La primera fase, correspondiente al acercamiento *top-down*, se refiere al análisis de los datos a través del sistema de categorías diseñado con base en la construcción teórica del MTSK (Tabla III.2) que se ha descrito en la sección II.3 del capítulo anterior, la cual se introduce en el MAXQDA en forma de sistema de códigos para ser asignados a los distintos fragmentos de los documentos.

Este proceso de asignación de códigos se lleva a cabo de manera abierta, tratando siempre de mantener cierta sensibilidad que permita incorporar nuevas categorías, o subcategorías en el análisis.

Para fines prácticos se decide generar un archivo de MAXQDA (de aquí en adelante llamados *proyectos*) por cada actividad, con la intención de realizar triangulaciones entre las conversaciones que se sostienen en los foros y los fragmentos que están siendo objeto de reflexión en cada una de las cinco actividades. El software es una herramienta muy visual, por lo que las codificaciones realizadas a través de las categorías pueden observarse y clasificarse a través de los nombres asignados a ellas y de códigos de colores, además de que pueden agregarse los códigos y subcódigos que se desee a lo largo de todo el proceso de análisis. (Ver figura III.2)

Subdominios		**Categorías asociadas al subdominio** *Conocimiento sobre:*
Conocimiento matemático	**Conocimiento de los tópicos KoT**	Los procedimientos matemáticos asociados a un determinado contenido
		Las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático
		Los registros de representación asociados a un contenido matemático
		La fenomenología asociada a un contenido matemático
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM	Conexiones de complejización entre contenidos matemáticos
		Conexiones de simplificación entre contenidos matemáticos
		Conexiones transversales entre contenidos matemáticos
		Conexiones auxiliares entre contenidos matemáticos
	Conocimiento de la práctica matemática KPM	
Conocimiento Didáctico del Contenido	**Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM**	Teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático
		Las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático
		Las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático
		Los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	Teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático
		Los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociadas a un contenido matemático
		Las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	Las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico
		Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar
		La secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar

Tabla III.2 Sistema de categorías y subcategorías del MTSK.



Documentos correspondientes al análisis de la actividad

Categorías correspondientes al análisis de la actividad

ACTIVIDAD 1: EL PROBLEMA DE CUERDAS

… de la matemática, apuntan a encontrar estrategias para la … aula, con el objeto de que el estudiante produzca …

"El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje" Brousseau (1986).

Resolver el siguiente problema:

Se colocan (n) puntos sobre una circunferencia.

a) ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?

Recordemos que cuerda es un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea … , y a partir de éstos …

La cuerda parte desde un punto, y llega a otro, entonces si hay ∞ puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por ∞

Sin embargo si en una circunferencia se dan unos determinados puntos, y se pide que se determine …

Figura III.2. Ejemplo de fragmento de codificación del proyecto de Actividad 1.

III.6.2.3 Revisión y reasignación de subdominios y categorías

La segunda fase del análisis, correspondiente al análisis *bottom-up*, consistió en exportar la información desde MAXQDA a tablas de Excel, las cuales pueden manipularse para organizar la información a través de filtros, permitiendo ordenar las codificaciones por documento, por subdominio asignado, por número de párrafo, etcétera.

Este segundo análisis de los datos se realiza apoyados en la tabla de Excel, filtrando los datos de la tabla para acomodar la información por subdominio y reacomodándola en tablas de Word, en las cuales puedan combinarse las celdas y observar los segmentos desde un punto de vista distinto, al extraerlos del texto y compararlos con segmentos asignados al mismo subdominio. Así esta tabla puede contener asignaciones distintas a las que aparecen en la tabla de Excel, dado que esta reorganización nos permite revisar las asignaciones y complementar la información con las notas realizadas en el proyecto de MAXQDA y agregar las figuras faltantes.

Una vez organizada la información, hacemos un resumen de esta en tablas de Word, en las que se reorganiza la información de manera que pueda leerse de izquierda a derecha: el subdominio, categoría y documento que se analiza, el segmento que se ha tomado como evidencia de conocimiento y una justificación sobre la asignación que se hace al segmento[12].

Este proceso de revisión y re-asignación de categorías se realiza a través del método de comparación constante, que Strauss y Corbin (1994) identifican como el método que favorece y garantiza la conceptualización sobre los datos. Este método es un procedimiento analítico que tiene como finalidad el descubrimiento de semejanzas, diferencias y relaciones entre distintos fragmentos procedentes de los datos, a través de una comparación cuidadosa e intensiva.

---

[12] Un ejemplo extenso de este análisis será mostrado en el siguiente capítulo

Glaser y Strauss (1967) afirman que la *Grounded Theory* es mucho más que un método de análisis y que exige toda una actitud del investigador hacia el proceso de recogida y análisis de la información, y es precisamente la comparación constante de los datos lo que permite mantener una sensibilidad y apertura hacia los datos que se analizan.

III.6.2.4 Formato para la presentación de los resultados

La redacción de los resultados se presenta organizada en dos formas:

Primero se extrae y organiza el análisis que reflejan las tablas, reportando los resultados por subdominio y categoría, ilustrando los resultados con algunos de los fragmentos más representativos del análisis.

Además se muestra un esquema que permite observar el análisis global de cada actividad, en la que pueden observarse tanto los conocimientos identificados de forma individual como las relaciones entre ellos. En el siguiente capítulo profundizaremos en la simbología de estos esquemas y su organización.

III.7 Resumen gráfico del Capítulo III

A continuación, en el Cuadro III.1 mostramos un resumen gráfico del capítulo en el puedan observarse los constructos principales de la metodología de este estudio:

<table>
<tr><th colspan="6">Metodología</th></tr>
<tr><td colspan="6">Paradigma interpretativo
(Bassey, 2003)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Perspectiva ontológica</td><td colspan="2">Perspectiva epistemológica</td><td colspan="2">Perspectiva metodológica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Relativista
(Santos, 2002)
Construccionismo
(Bryman, 2004)</td><td colspan="2">Interpretativismo
(Bassey, 2003)
(Bryman, 2004)</td><td colspan="2"><i>top-down</i> <i>bottom-up</i>
(Grbich, 2013)</td></tr>
<tr><td colspan="6">Preguntas de investigación</td></tr>
<tr><td colspan="3">Generales</td><td colspan="3">Específicas</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Qué conocimiento especializado ponen en evidencia los profesores de matemáticas de secundaria en un contexto de formación continua a través de discusiones virtuales?</td><td colspan="3">¿Podemos profundizar en la comprensión del conocimiento del profesor de secundaria referente a la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático a través del análisis de los subdominios que propone el MTSK?</td></tr>
<tr><td colspan="3">¿Qué aportes teóricos y metodológicos ofrece el MTSK al conjunto de investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas?</td><td colspan="3">¿Cuáles son las características específicas del Conocimiento Didáctico del Contenido considerado como parte del modelo MTSK?</td></tr>
<tr><td colspan="6">Objetivos de investigación</td></tr>
<tr><td colspan="6">Describir, caracterizar y comprender el Conocimiento Didáctico del Contenido, a través del análisis de su Conocimiento Especializado (MTSK).</td></tr>
<tr><td colspan="6">Estudio de caso como diseño de investigación</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estudio de caso instrumental
(Stake, 1995)
<i>Theory-seeking and theory-testing</i>
(Bassey, 2003)</td><td colspan="3">El conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria en curso virtual de formación permanente.</td></tr>
<tr><td colspan="6">Método cualitativo</td></tr>
<tr><td colspan="6">Distinción entre evidencias, indicios y oportunidades de conocimiento.
(Moriel-Junior & Carrillo, 2014; Flores Escudero & Aguilar, 2013)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Instrumentos y técnicas</td><td>Recogida</td><td>Plataforma Moodle</td><td>Participaciones individuales
Participaciones en foros</td><td>Documentos Word</td><td>Transcripciones y codificaciones por párrafo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Análisis</td><td>Fase 1</td><td>Sistema de categorías (MTSK)</td><td>MAXQDA</td><td></td></tr>
<tr><td>Fase 2</td><td>Tablas de organización de información</td><td>Excel
Word</td><td><i>Grounded Theory</i>
Comparación constante
(Strauss & Corbin, 1994)</td></tr>
<tr><td colspan="6">Informe de resultados</td></tr>
<tr><td colspan="3">Narración de resultados de cada actividad por subdominio y categoría</td><td colspan="3">Esquemas de conocimiento por actividad</td></tr>
</table>

Cuadro III.1. Resumen gráfico del capítulo III

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En este capítulo mostraremos el análisis detallado de las actividades realizadas durante el curso de formación continua. Este se realizó a partir de la metodología *top-down* y *bottom-up* descrita en el capítulo anterior.

A continuación describimos el proceso de análisis de cada uno de los casos, que, como se mencionó en el capítulo anterior, se realizó a través de distintas técnicas e instrumentos.

Aunque el análisis del trabajo de Omar se realiza documento por documento, el reporte de los resultados ha sido organizado por actividad y por subdominio con la intención de evidenciar mejor las aportaciones teóricas que proporciona el análisis empírico.

IV.1 Informe completo de resultados de la Actividad 1: El problema de las cuerdas

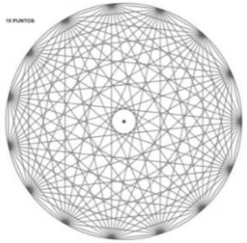
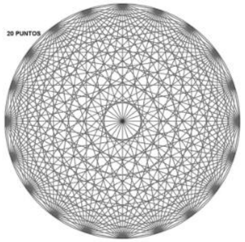
Con la finalidad de que este informe tenga una lectura ágil, se presenta a continuación el primer análisis completo, correspondiente a la Actividad 1. Para las actividades siguientes se mostrarán informes resumidos haciendo alusión a los correspondientes anexos de la tesis, en los que puede leerse el análisis completo de estas.

IV.1.1 Codificación de documentos Actividad 1

Las Tablas IV.1, IV.2, IV.3, IV.4 y IV.5[1] muestran las codificaciones realizadas automáticamente por MAXQDA de los 5 documentos correspondientes a la Actividad 1: Resolución del problema de las cuerdas, Guía pedagógica del problema de las cuerdas, Foro 1 Pregunta 1, Foro 1 Pregunta 2, y Foro 1 Pregunta 3, respectivamente.

---

[1] Los análisis completos en formato de proyecto MAXQDA están disponibles en los anexos digitales de este trabajo

Fila	Segmento
1	**ACTIVIDAD 1: EL PROBLEMA DE CUERDAS**
2	La mayoría de trabajos realizados en el campo de la matemática apuntan a encontrar estrategias para la enseñanza de diferentes conceptos dentro del aula, con el objeto de que el estudiante produzca conocimiento matemático.
3	"El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje" Brousseau (1986).
4	Resolver el siguiente problema:
5	Se colocan (n) puntos sobre una circunferencia.
6	a) ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?
7	Recordemos que cuerda es un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta; como es conocido una circunferencia está conformado por infinitos puntos, y a partir de estos se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo.
8	La cuerda parte desde un punto, y llega a otro, entonces si hay ∞ puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por ∞
9	Sin embargo si en una circunferencia se dan unos determinados puntos, y se pide que se determine el número de cuerdas, es posible hallarlas si esa cantidad de puntos es un número entero positivo.
10	b) Presentar las técnicas o diferentes maneras en las cuales puede ser resuelto
11	Una de las técnicas más comunes es trazar manualmente las cuerdas en un círculo; pero esto lo podemos realizar cuando el número de puntos es pequeño. Me atrevo a decir cuando el número es menor de 20 puntos.
12	Ejemplo con un polígono regular
13	 
14	La otra manera sería utilizando la sucesión que se puede hallar, teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase, el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.
15	Esta sucesión está dada de la siguiente forma:$D = \frac{n}{2}(n-3)$, donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.
16	Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.
17	Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera: $cuerdas = D + n$, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono; $cuerdas = \frac{n}{2}(n-3) + n = \frac{n}{2}(n-1)$

18	Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar el límite $\lim_{n\to x}\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)$. Donde (x) es cualquier entero positivo.
19	c) ¿A qué nivel escolar se le puede proponer como actividad de trabajo?
20	Considero que la primera técnica es probable aplicarla en los grados de la secundaria 9° grado, cuando se enseñe los polígonos con sus diagonales, o cuando se mencione en geometría las cuerdas.
21	En este grado se enseña un poco de sucesiones, al menos la introducción, se entabla alguna relación entre la parte algorítmica con la gráfica, necesaria para una mejor interpretación de la situación.
22	Respecto a la segunda técnica se puede aplicar a estudiantes de finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean límites de sucesiones. Con este concepto aprendido se facilita más hallar el total de cuerdas de determinados puntos.
23	REFERENCIAS
24	Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Facultad de matemática, astronomía, física. Universidad Nacional de Córdoba

Tabla IV.1 **A1_D1** Resolución del problema de las cuerdas de Omar

Fila	Segmento
1	**ACTIVIDAD 1: GUÍA PEDAGÓGICA**
2	Esta situación problema de las cuerdas que se pueden trazar en un círculo cualquiera me lleva a reconocer la importancia de crear, organizar, y desarrollar actividades didácticas que propicien el avance en el conocimiento, y de esta manera el estudiante obtenga un aprendizaje significativo.
3	El objetivo primordial en esta actividad es: Crear en el estudiante la necesidad de avidez de conocimiento, usando conceptos previos ajustados a la nueva situación problemática.
4	La perspectiva de crear situaciones donde el estudiante construya conocimiento matemático, pero enmarcado en un ambiente donde él sea el propiciador de ese conocimiento, y el profesor sea solo un facilitador, es el ambiente de relación por el cual se da esta situación problema.
5	La guía sería propuesta para los estudiantes del bachillerato, 9° grado.
6	A continuación se darán las pautas más importantes para la aplicación de la actividad.
7	1. La situación se presenta al estudiante de la siguiente manera:
8	En un círculo se pueden trazar segmentos que pasan por dos puntos dados en la circunferencia llamados cuerdas; se pide que se marquen (2, 5, 8, 10, 15) puntos en circunferencias diferentes, y a partir de ellos dibujar las cuerdas que se puedan formar. En cada juego de puntos contar cuantas cuerdas se forman, cuando se marcan 2, 5, 8, 10, o 15 puntos en la circunferencia.
9	Después de hallar el número de cuerdas que se pueden trazar, y a partir de los datos conseguidos, obtener el algoritmo matemático para cualquier número de puntos marcados en la circunferencia.
10	2. Como el objetivo es crear en el estudiante esa necesidad de conocimiento, espero que a partir de esta actividad, cada uno de los individuos participantes adquiera el conocimiento adecuado sobre cuerdas, y sucesiones, a través del uso de ambientes visuales, de la manipulación directa del objeto tratado, y de la predicción como práctica social.
11	A través del algoritmo algebraico que se obtiene se puede predecir valores de la totalidad de cuerdas que se pueden trazar, cuando se hace casi que imposible dibujarlas en una circunferencia.
12	La noción de predicción tiene el objeto de ir más delante de los acontecimientos diarios, de anticiparse a lo que puede suceder, teniendo en cuenta que esta se construye a través de las vivencias de los individuos sobre un concepto, y en un contexto determinado.
13	Cantoral (2001) nos dice que debido a la necesidad de predecir, estimar, y hacer aproximaciones sobre cambios o variaciones de fenómenos físicos, y de la mecánica de los cuerpos celestes, también el fluido de líquidos (Newton), la transmisión de calor de (Fourier), la velocidad con que se mueve un cuerpo (Fermat, Descartes, Laplace, y otros), generaron la consecución de modelos matemáticos, para describir, y explicar dichos fenómenos, partiendo de conceptos de cálculo, y análisis matemático.
14	3. Espero que la intervención del profesor sea mínima, con el objeto de que sean ellos los estudiantes los que construyan conocimiento. El profesor se encargará de distribuir los grupos de trabajo, de guiar al grupo cuando se halla desviado del objetivo, de dirigir la ponencia final, de verificar, e institucionalizar el conocimiento.
15	En la verificación el profesor puede utilizar la práctica de graficación como medio de comprobación del algoritmo algebraico propuesto por cada uno de los grupos.
16	PROCESO DE APLICACIÓN DE LA ACTIVIDAD
17	La actividad se divide en los siguientes momentos:

18	1. Inicialmente la actividad se desarrolla individualmente, donde el estudiante manipula el objeto, traza rectas, y obtiene el total de cuerdas para cada uno de los ejercicios pedidos.
19	En este momento a través de la visualización, el estudiante debe llegar al objetivo.
20	2. Luego se reúnen en grupos de tres estudiantes, donde se discutirá el proceso para obtener el algoritmo para cualquier cantidad de puntos. Con una comunicación fluida entre los integrantes, y usando un poco de predicción podemos obtener un algoritmo adecuado.
21	Cuando el estudiante no tiene un conocimiento pleno de lo que es sucesiones, se puede guiar a que a partir de la graficación de datos se obtienen gráficas que me dan con facilidad el algoritmo algebraico; en este momento si se posee un software graficador se debe utilizar como artefacto de ayuda.
22	3. Nuevamente se reestructura los grupos, reuniéndolos de a seis estudiantes, para que comenten, y obtengan una ponencia que deben dar a conocer. Las discusiones matemáticas en este punto son necesarias; los diferentes puntos de vista ayudan a que se perfeccione la respuesta correcta, y formar conocimiento.
23	4. El último momento, la intervención del profesor es fundamental porque junto a los estudiantes, y sus respectivas proposiciones validan e institucionalizan el conocimiento.
24	REFERENCIAS
25	Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad. México, D. F, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Tabla IV.2 **A1_D2** Guía pedagógica del problema de las cuerdas de Omar

Fila	Segmento
1	**Foro 1: Análisis del problema de las cuerdas**
2	**Pregunta 1 ¿Cuál es la naturaleza del problema de las cuerdas?, ¿un ejercicio rutinario, tradicional, abierto**
3	**Tutor 24/01/2013 22:46**
4	¿Cuál es la naturaleza del problema de las cuerdas?, ¿un ejercicio rutinario, tradicional, abierto?
5	**Omar 25/01/2013 08:31**
6	Como se menciona, el problema no es rutinario, porque el estudiante no ha tratado de resolver antes algo relativo a este.
7	Respecto a lo tradicional creo que tiene algo de ello, pero solamente en la consecución del enunciado.
8	Lo consideraría abierto en el sentido de que no solamente puedo realizarlo de una manera, en el caso de forma gráfica o de forma algebraica.
9	Me basé en el escrito que habla de las características de los denominados problemas abiertos (Garret, 1988) podemos notar que:
10	1) No se ofrece explícitamente toda la información requerida para resolverlo, pero quien va a proponer una solución (en este caso el estudiante) dispone de los conocimientos y de los medios para obtenerla.
11	2) Existe cierta ambigüedad en la estructura del problema que permite a quien intenta resolverlo redefinirlo poniendo en juego su creatividad y originalidad.
12	3) Hay libertad para seleccionar restricciones, modelos, métodos matemáticos diferentes.
13	En función de la elección realizada se pueden generar diferentes soluciones. La selección de una de ellas implica una justificación, la propuesta de diferentes soluciones debe ir acompañada de las correspondientes ventajas y desventajas.
14	Garret, R. (1988). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo de ciencias. Enseñanza de las Ciencias , 6 (3), 224-230.
15	[Se realizan otras intervenciones en el foro, pero ninguna alude a Omar]
16	**Profesor N 27/01/2013 23:23**[2]
17	Considero que es un ejercicio abierto, ya que no muestra ninguna restricción en específico, por otra parte el alumno es quien decide de qué manera abordar el ejercicio, y finalmente analiza y evalúa si su método de solución fue practico y si lo condujo o no a una respuesta correcta.
18	**Omar 28/01/2013 07:48**
19	Hola N; de acuerdo con su propuesta.
20	El problema no muestra un único camino de solución; deja a la imaginación, y pericia del estudiante el desarrollo; al inicio es la impresión de que la actividad le faltan datos; lleva al estudiante a que sea creativo, busque nuevas alternativas, y relacione conceptos previos con la nueva situación.

Tabla IV.3 **A1_F1_P1** Foro 1: Analizando el problema de las cuerdas.
Pregunta 1: ¿Cuál es la naturaleza del problema de las cuerdas?, ¿un ejercicio rutinario, tradicional, abierto?

---

[2] En color gris denotamos las participaciones de compañeros o tutores que interactúan con Omar.

Fila	Segmentos
1	**Foro 1: Análisis del problema de las cuerdas**
2	**Pregunta 2 ¿Qué técnicas visualizaste para resolver el problema de las cuerdas?**
3	**Tutor 24/01/2013 22:46**
4	¿Cuáles técnicas visualizaste para resolver el problema de las cuerdas?
5	**Omar 25/01/2013 08:41**
6	Una técnica utilizada fue la de utilizar la gráfica como medio para realizar el trabajo; manipulándola, trazando rectas, segmentos, usando artefactos comunes y software.
7	La otra técnica fue partir de un algoritmo conocido como es el de las diagonales de un polígono inscrito en una circunferencia, y aplicarla en el desarrollo de la actividad, usando el proceso matemático de límite para obtener el resultado.
8	**Omar 28/01/2013 21:09**
9	Mirando en estos momentos otras manera de poder dar solución a la situación de cuerdas, podríamos utilizar también las sucesiones aritméticas con su sumatoria, y a partir de ella obtener los valores pedidos para cualquier número de puntos.
10	Una sumatoria de la sucesión está dada de la siguiente manera: $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$
11	Sabiendo que a_{n}= a_{1}+d(n-1), donde la diferencia d=1,y a_{1}=1, por ser el primer valor a sumar y remplazando en la ecuación nos quedaría $S_n = \frac{n(a_1+a_1+n-1)}{2} = \frac{n(2+n-1)}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$
12	Pero como el último punto no se le puede marcar más cuerdas entonces $\frac{(1+n)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ es lo que me parece que se podría realizar
13	**Ana 25/01/2013 11:47**
14	Buen día!
15	Propuse dos técnicas un tanto similares entre sí:
16	1) Probar para distintos n e intentar encontrar una fórmula que exprese el número de cuerdas. Por ejemplo, contar el número de cuerdas que resultan para n=1,2,3,4,5; proponer una fórmula y verificar si esta funciona para otros valores de n.
17	2) El estudiante puede notar que el número de cuerdas será el resultado de sumar todos los números naturales menores al número de puntos sobre la circunferencia. Por ejemplo, para n=5, determinar que el resultado será 4+3+2+1=10.
18	Aun cuando no proponga una fórmula para todo n, será capaz de responder para un n dado realizando una suma de este tipo.
19	**Omar 28/01/2013 08:00**
20	Muy interesante su propuesta Ana; no la había pensado por esa parte.
21	Me parece que también se puede aplicar para aquellos estudiantes que tienen conocimientos de cálculo en sucesiones; porque a partir de la sucesión de la suma de números enteros sucesivos que corresponde a n*(n+1)/2, podemos obtener el algoritmo que sería n*(n+1)/2 - n = n*(n-1)/2
22	**Ana 28/01/2013 14:00**

23	Hola Omar, justamente esa sería la finalidad de la primera técnica, que logren expresar una fórmula como la que propone sin importar si llegan a simplificarla o no. Saludos
24	**P_F 28/01/2013 22:00**
25	Hola Ana mi propuesta fue similar a la tuya: 4 valores de n, el uso de colores para trazar las cuerdas de cada punto, tablas para registrar el número de cuerdas en cada punto y al final una serie de preguntas detonantes para guiarlos a que deduzcan una fórmula para encontrar las cuerdas para cualquier valor de n.
26	**Ana 29/01/2013 12:38**
27	Hola P_F, si, en cuanto a técnicas más o menos así pensé que lo resolverían los alumnos ya en la propuesta lo dejé un poco más abierto aunque procurando guiar al alumno.
28	Propuse una secuencia de actividades y una de ellas era identificar el número de cuerdas que se podían trazar entre todos los vértices de un decágono inscrito en un círculo.
29	La siguiente era el problema tal cual se nos propuso esperando que los estudiantes realicen algunas deducciones como la que tú describes. Saludos
30	**P_A 28/01/2013 11:43**
	1.-Utlicié combinatoria, la situación se remite a determinar cuántos segmentos puedo determinar con n puntos no alineados tres a tres. 2- Ubicando los n puntos en la circunferencia se puede observar que desde el primer punto se pueden determinar n-1 segmentos, desde el segundo n-2 segmentos, desde el tercero n-3 segmentos y así hasta llegar al n-ésimo punto desde el cual no se traza ningún segmento, de esta manera el problema se remite a sumar los n-1 primeros números naturales. 3- Otra forma puede ser considerando el camino inverso, tomando un punto sobre la circunferencia, queda ningún segmento determinado, agregando otro punto más queda determinado un segmento, al agregar un tercer punto podemos determinar dos segmentos más, con un cuarto punto se anexan tres segmentos más y así al agregar el n-ésimo punto se agregan n-1 segmentos más, obteniendo como solución también la suma de los n-1 primeros números naturales. 4- También es posible observar una relación de recurrencia a medida que agrego puntos, dónde quedaría que el número de segmentos que se pueden determinar con n puntos corresponde al número de segmentos que se determinan con n-1 puntos y sumándole n-1. Saludos
32	**Omar 28/01/2013 20:12**
33	Hola P_A. Interesantes las propuestas;
34	respecto a la segunda es muy parecida a la de Ana?
35	Sería una sumatoria de todos los valores menores que el número de puntos dados, es decir si tengo n = 5 como puntos la sumatoria ((n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4))=4n-10=20-10=10.
36	Esto es lo que quieres dar a entender?
37	Hasta pronto

Tabla IV.4 **A1_F1_P2** Foro 1: Analizando el problema de las cuerdas.
Pregunta 2: ¿Cuáles técnicas visualizaste para resolver el problema de las cuerdas?

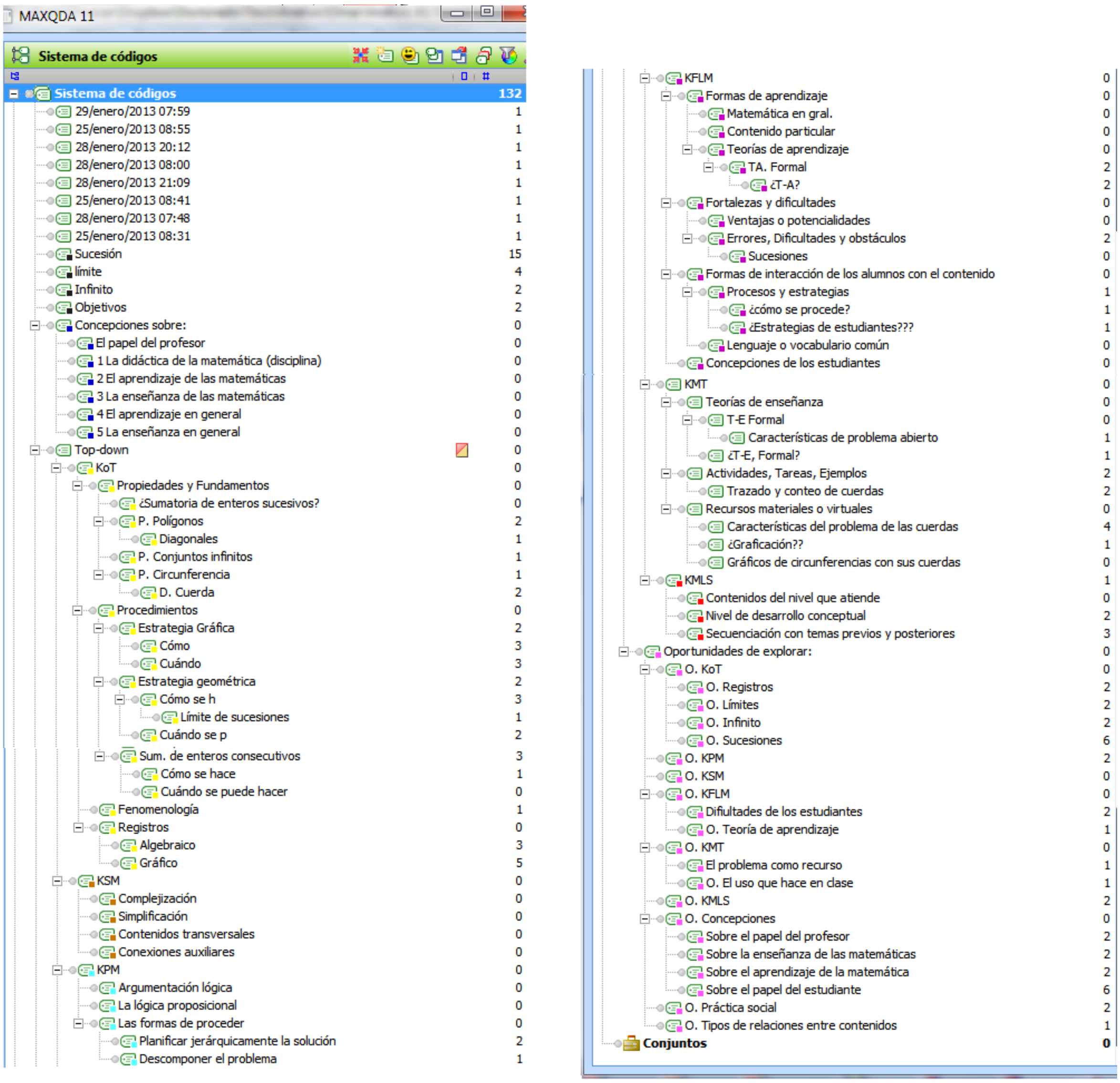
Fila	Segmento
1	**Foro 1: Análisis del problema de las cuerdas**
2	**Pregunta 3 ¿Consideras que el problema de las cuerdas constituye un buen recurso didáctico?, ¿por qué sí?, ¿por qué no?**
3	**Tutor 24/01/2013 22:47**
4	¿Consideras que el problema de las cuerdas constituye un buen recurso didáctico?, ¿por qué sí?, ¿por qué no?
5	**Omar 25/01/2013 08:55**
6	Es un buen recurso matemático.
7	Cuando al estudiante se le proponen situaciones de esta manera, lo llevan a crear, a proponer, a consultar, a comunicar, a predecir, y a construir conocimiento matemático.
8	Esta actividad a simple vista se ve como algo sencillo, comenzando por el enunciado; sin embargo tiene un gran contenido de análisis, y de trabajo.
9	Para poder resolver la actividad se necesita que el estudiante tenga conocimientos previos bien establecidos sobre cuerdas, sucesiones, y en alguna ocasión sobre límites, para la segunda técnica.
10	El estudiante crea conocimiento, al entablar las diferentes relaciones mentales para comprender los significados.
11	Propone, [se refiere al estudiante] cuando deben decidir por el algoritmo que sigue o cumple la actividad. Debe consultar para ampliar el conocimiento del concepto. Predice, porque al darle una cantidad de puntos debe obtener el número de cuerdas que se pueden trazar con ellos.
12	Recogiendo todas las acciones realizadas por el estudiante en la solución de la problemática construye conocimiento matemático.
13	[...]
14	**P_F 28/01/2013 22:37**
15	Considero que el tema es bueno para generar un recurso didáctico, pero creo que en sí la pregunta
16	Se colocan n puntos sobre una circunferencia. ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse? sin la guía del profesor puede resultar difícil para que el alumno llegue al objetivo. En cambio considero que la guía para implementarlo es un buen recurso didáctico porque está pensada en la forma en que el alumno va a ir construyendo su aprendizaje, es un trabajo guiado que le ayuda a que alcance su objetivo.
17	**Omar 29/01/2013 07:59**
18	Hola P_F.
19	Mencionas que es muy interesante como recurso didáctico la actividad de las cuerdas, y estoy totalmente de acuerdo;
20	menciona que el estudiante construye su aprendizaje a partir de esta, busca que el estudiante indague, sea creativo, produzca, innove; y si es así la pregunta está encaminada hacia ese motivo, porque no da muchas pautas.
21	Es importante como lo mencionas que el profesor esté presente, hasta en procesos donde el estudiante crea su propio conocimiento debe existir un tutor.
22	Hasta pronto

Tabla IV.5 **A1_F1_P3** Foro 1: Analizando el problema de las cuerdas.
Pregunta 3: ¿Consideras que el problema de las cuerdas constituye un buen recurso didáctico? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?

IV.1.2 Primera asignación de subdominios y categorías en MAXQDA

Una vez que se codificaron los documentos, se procedió al análisis de los mismos, a través del sistema de categorías y subcategorías propuestas en el apartado III.6.2.2 del capítulo anterior, pero permaneciendo sensibles a la aparición de subcódigos que puedan emerger directamente de los datos, lo cual es coherente con el enfoque *top-down* que hemos adoptado.

En la Figura IV.1 se muestran todos los códigos y subcódigos generados para la actividad 1, después del análisis, así como el número de segmentos asignado a cada uno de ellos.

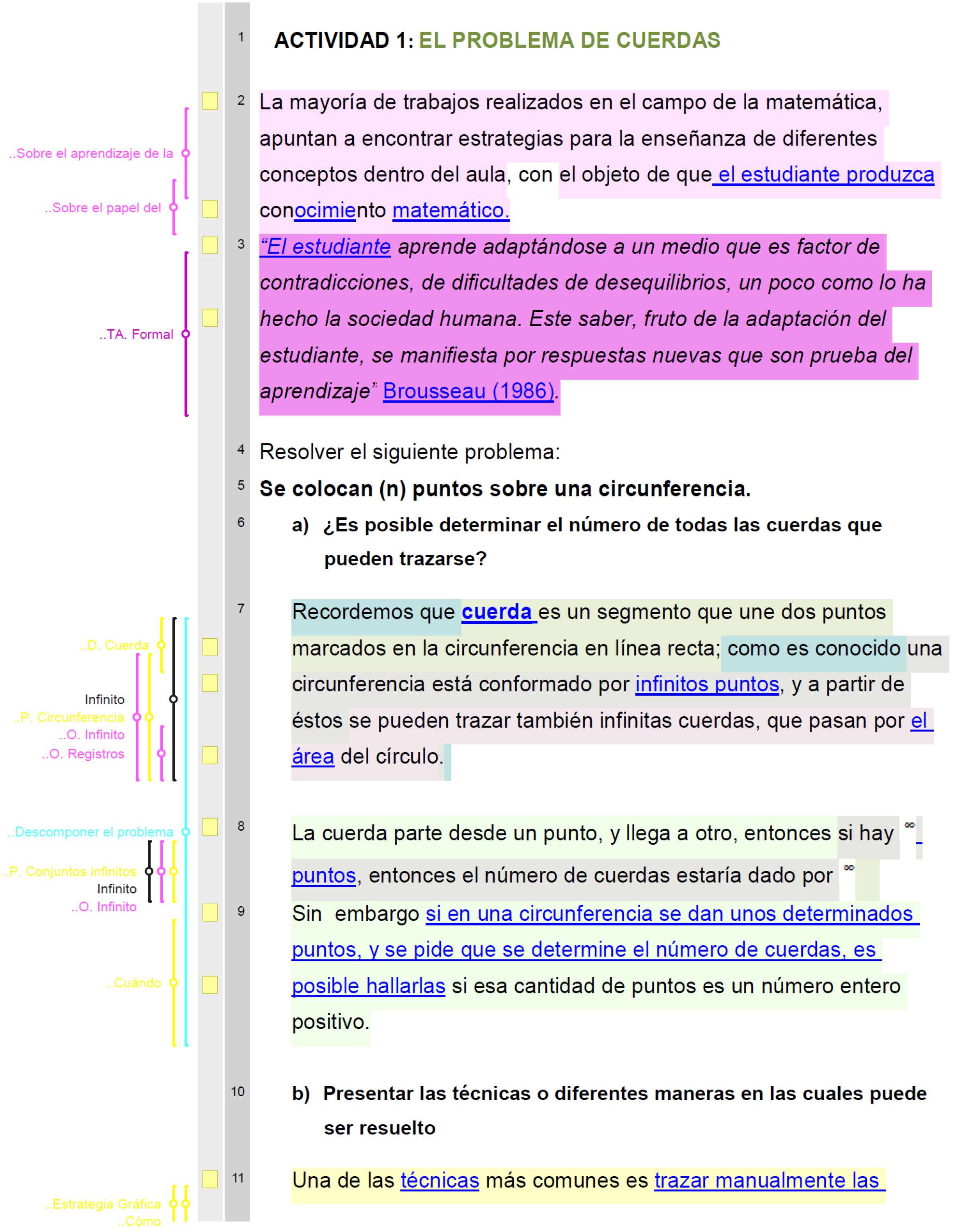


Sistema de códigos	132
29/enero/2013 07:59	1
25/enero/2013 08:55	1
28/enero/2013 20:12	1
28/enero/2013 08:00	1
28/enero/2013 21:09	1
25/enero/2013 08:41	1
28/enero/2013 07:48	1
25/enero/2013 08:31	1
Sucesión	15
límite	4
Infinito	2
Objetivos	2
Concepciones sobre:	0
El papel del profesor	0
1 La didáctica de la matemática (disciplina)	0
2 El aprendizaje de las matemáticas	0
3 La enseñanza de las matemáticas	0
4 El aprendizaje en general	0
5 La enseñanza en general	0
Top-down	0
KoT	0
Propiedades y Fundamentos	0
¿Sumatoria de enteros sucesivos?	0
P. Polígonos	2
Diagonales	1
P. Conjuntos infinitos	1
P. Circunferencia	1
D. Cuerda	2
Procedimientos	0
Estrategia Gráfica	2
Cómo	3
Cuándo	3
Estrategia geométrica	2
Cómo se h	3
Límite de sucesiones	1
Cuándo se p	2
Sum. de enteros consecutivos	3
Cómo se hace	1
Cuándo se puede hacer	0
Fenomenología	1
Registros	0
Algebraico	3
Gráfico	5
KSM	0
Complejización	0
Simplificación	0
Contenidos transversales	0
Conexiones auxiliares	0
KPM	0
Argumentación lógica	0
La lógica proposicional	0
Las formas de proceder	0
Planificar jerárquicamente la solución	2
Descomponer el problema	1
KFLM	0
Formas de aprendizaje	0
Matemática en gral.	0
Contenido particular	0
Teorías de aprendizaje	0
TA. Formal	2
¿T-A?	2
Fortalezas y dificultades	0
Ventajas o potencialidades	0
Errores, Dificultades y obstáculos	2
Sucesiones	0
Formas de interacción de los alumnos con el contenido	0
Procesos y estrategias	1
¿cómo se procede?	1
¿Estrategias de estudiantes???	1
Lenguaje o vocabulario común	0
Concepciones de los estudiantes	0
KMT	0
Teorías de enseñanza	0
T-E Formal	0
Características de problema abierto	1
¿T-E, Formal?	1
Actividades, Tareas, Ejemplos	2
Trazado y conteo de cuerdas	2
Recursos materiales o virtuales	0
Características del problema de las cuerdas	4
¿Graficación??	1
Gráficos de circunferencias con sus cuerdas	0
KMLS	1
Contenidos del nivel que atiende	0
Nivel de desarrollo conceptual	2
Secuenciación con temas previos y posteriores	3
Oportunidades de explorar:	0
O. KoT	0
O. Registros	2
O. Límites	2
O. Infinito	2
O. Sucesiones	6
O. KPM	2
O. KSM	0
O. KFLM	0
Difiultades de los estudiantes	2
O. Teoría de aprendizaje	1
O. KMT	0
El problema como recurso	1
O. El uso que hace en clase	1
O. KMLS	2
O. Concepciones	0
Sobre el papel del profesor	2
Sobre la enseñanza de las matemáticas	2
Sobre el aprendizaje de la matemática	2
Sobre el papel del estudiante	6
O. Práctica social	2
O. Tipos de relaciones entre contenidos	1
Conjuntos	**0**

Figura IV.1 Sistema de categorías y subcategorías de la Actividad 1, generadas después del análisis.

Aunque las asignaciones y el proyecto completo en formato MAXQDA pueden consultarse en los anexos digitales, hemos extraído en la Figura IV.2, algunas asignaciones correspondientes a cada documento de esta actividad para que el lector observe la forma en la que el programa codifica las asignaciones a través de color.

Este programa permite asignar colores a las distintas categorías que se generan para el análisis, lo que proporciona al investigador claridad en la diferenciación de las asignaciones. Además las unidades de información se separan automáticamente por párrafo y las asignaciones de categorías pueden ser realizadas a palabras, segmentos, unidades completas o grupos de unidades de información. Por último, podemos decir que se permite hacer dos asignaciones de categorías diferentes a un mismo segmento de información.



1 **ACTIVIDAD 1: EL PROBLEMA DE CUERDAS**

2 La mayoría de trabajos realizados en el campo de la matemática, apuntan a encontrar estrategias para la enseñanza de diferentes conceptos dentro del aula, con el objeto de que el estudiante produzca conocimiento matemático.

3 *"El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje"* Brousseau (1986).

4 Resolver el siguiente problema:

5 **Se colocan (n) puntos sobre una circunferencia.**

6 **a) ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?**

7 Recordemos que **cuerda** es un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta; como es conocido una circunferencia está conformado por infinitos puntos, y a partir de éstos se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo.

8 La cuerda parte desde un punto, y llega a otro, entonces si hay ∞ puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por ∞

9 Sin embargo si en una circunferencia se dan unos determinados puntos, y se pide que se determine el número de cuerdas, es posible hallarlas si esa cantidad de puntos es un número entero positivo.

10 **b) Presentar las técnicas o diferentes maneras en las cuales puede ser resuelto**

11 Una de las técnicas más comunes es trazar manualmente las

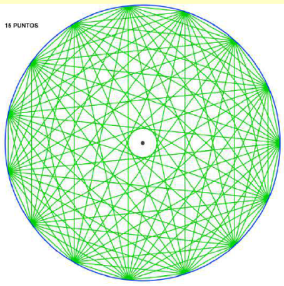
..Cómo
..Cuándo

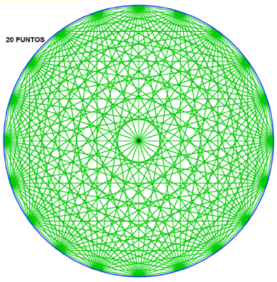
cuerdas en un círculo; pero esto lo podemos realizar cuando el número de puntos es pequeño. Me atrevo a decir cuando el número es menor de 20 puntos.

12 Ejemplo con un polígono regular

13

..Estrategia Gráfica
..Gráfico





..Planificar
..O. El uso que
..O. Sucesiones
Sucesión

14 La otra manera sería utilizando la sucesión que se puede hallar, teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase, el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.

..O. Sucesiones
..P. Polígonos
Sucesión

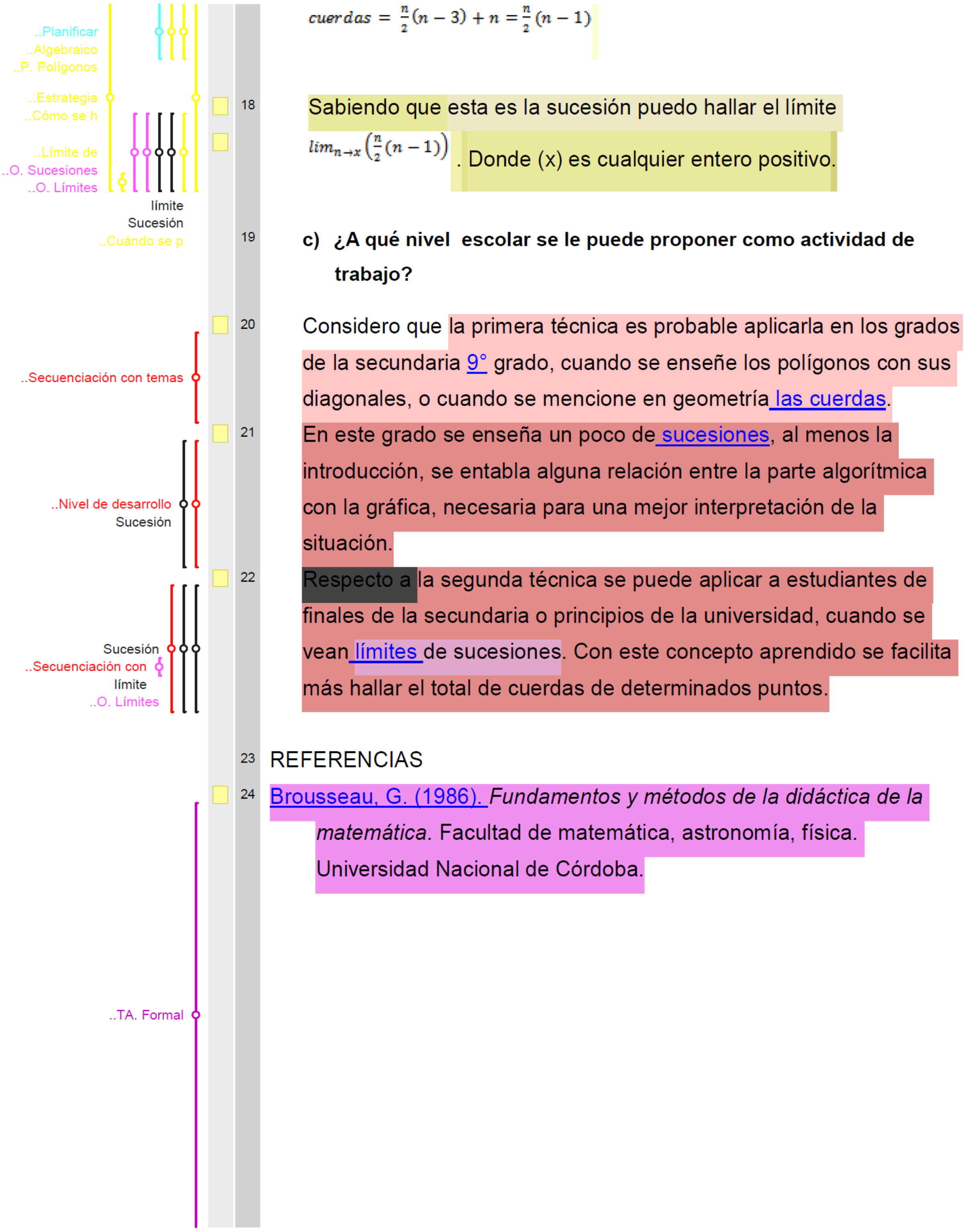
15 Esta sucesión está dada de la siguiente forma: $D = \frac{n}{2}(n-3)$, donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.

..Cómo se h
..Estrategia
..O. Tipos de
..Diagonales
..Cuándo se p
..O. KPM
..Planificar

16 Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.

..Cómo se h
..P. Polígonos

17 Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera: $cuerdas = D + n$, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono;



$cuerdas = \frac{n}{2}(n-3) + n = \frac{n}{2}(n-1)$

18 Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar el límite $lim_{n\to x}\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)$. Donde (x) es cualquier entero positivo.

19 **c) ¿A qué nivel escolar se le puede proponer como actividad de trabajo?**

20 Considero que la primera técnica es probable aplicarla en los grados de la secundaria 9° grado, cuando se enseñe los polígonos con sus diagonales, o cuando se mencione en geometría las cuerdas.

21 En este grado se enseña un poco de sucesiones, al menos la introducción, se entabla alguna relación entre la parte algorítmica con la gráfica, necesaria para una mejor interpretación de la situación.

22 Respecto a la segunda técnica se puede aplicar a estudiantes de finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean límites de sucesiones. Con este concepto aprendido se facilita más hallar el total de cuerdas de determinados puntos.

23 REFERENCIAS

24 Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Facultad de matemática, astronomía, física. Universidad Nacional de Córdoba.

Figura IV.2 Primera asignación de categorías de la Actividad 1 en MAXQDA

Esta primera asignación da origen a la Tabla IV.6, que se descarga directamente del proyecto MAXQDA en forma de documento Excel. Aquí puede observarse la información que MAXQDA arroja sobre las asignaciones de cada documento, ordenadas con el número de segmento que se codifica y el subdominio y categoría que se le asigna.

Documento	**Fecha y hora de la participación en el foro**	**Subdominio y categoría**	**Principio**	**Final**	**Segmento**
A1_D1		Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre el aprendizaje de la matemática	2	2	La mayoría de trabajos realizados en el campo de la matemática apuntan a encontrar estrategias para la enseñanza de diferentes conceptos dentro del aula
A1_D1		Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre el papel del estudiante	2	2	el objeto de que el estudiante produzca conocimiento matemático.
A1_D1		KFLM\Formas de aprendizaje\Teorías de aprendizaje\TA. Formal	3	3	“El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje” Brousseau (1986).
A1_D1		KoT\Propiedades y Fundamentos\P. Circunferencia	7	7	una circunferencia está conformado por infinitos puntos, y a partir de estos se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo.
A1_D1		KoT\Propiedades y Fundamentos\P. Circunferencia\D. Cuerda	7	7	cuerda es un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta;
A1_D1		KPM\Las formas de proceder\Descomponer el problema	7	9	Recordemos que cuerda es un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta; como es conocido una circunferencia está conformado por infinitos puntos, y a partir de estos se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo. La cuerda parte desde un punto, y llega a otro, entonces si hay puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por Sin embargo si en una circunferencia se dan unos determinados puntos, y se pide que se determine el número de cuerdas, es posible hallarlas si esa cantidad de puntos es un número entero positivo.
A1_D1		Oportunidad de explorar KoT\Registros	7	7	se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo
A1_D1		Oportunidad de explorar KoT\Infinito	7	7	una circunferencia está conformado por infinitos puntos, y a partir de estos se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo.

A1_D1		KoT\Propiedades y Fundamentos\P. Conjuntos infinitos	8	8	La cuerda parte desde un punto, y llega a otro, entonces si hay puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por
A1_D1		Oportunidad de explorar KoT\Infinito	8	8	si hay puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por
A1_D1		KoT\Procedimientos\Solución Gráfica\Cuándo puede hacerse	9	9	Sin embargo si en una circunferencia se dan unos determinados puntos, y se pide que se determine el número de cuerdas, es posible hallarlas si esa cantidad de puntos es un número entero positivo.
A1_D1		KoT\Procedimientos\Solución Gráfica	11	13	Una de las técnicas más comunes es trazar manualmente las cuerdas en un círculo; pero esto lo podemos realizar cuando el número de puntos es pequeño. Me atrevo a decir cuando el número es menor de 20 puntos. Ejemplo con un polígono regular
A1_D1		KoT\Procedimientos\Solución Gráfica\Cómo se hace	11	11	trazar manualmente las cuerdas en un círculo;
A1_D1		KoT\Procedimientos\Solución Gráfica\Cuándo se hace	11	11	pero esto lo podemos realizar cuando el número de puntos es pequeño. Me atrevo a decir cuando el número es menor de 20 puntos.
A1_D1		KoT\Registros\Gráfico	12	13	Ejemplo con un polígono regular
A1_D1		KoT\Procedimientos\Solución geométrica	14	18	La otra manera sería utilizando la sucesión que se puede hallar, teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase, el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia. Esta sucesión está dada de la siguiente forma: , donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito. Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes. Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera: __, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono; Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar el límite . Donde (x) es cualquier entero positivo
A1_D1		KPM\Las formas de proceder\Planificar jerárquicamente la solución	14	14	La otra manera sería utilizando la sucesión que se puede hallar, teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase, el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.

A1_D1		Oportunidad de explorar KoT\Sucesiones	14	14	utilizando la sucesión que se puede hallar, teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase, el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.
A1_D1		Oportunidad de explorar KMT\El uso que hace en clase	14	14	teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase,
A1_D1		KoT\Propiedades y Fundamentos\P. Polígonos	15	15	Esta sucesión está dada de la siguiente forma: , donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.
A1_D1		KoT\Procedimientos\Solución geométrica\Cómo se hace	15	16	, donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito. Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no
A1_D1		Oportunidad de explorar KoT\Sucesiones	15	15	Esta sucesión está dada de la siguiente forma:
A1_D1		KoT\Propiedades y Fundamentos\P. Polígonos\Diagonales	16	16	el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes
A1_D1		KoT\Procedimientos\Solución geométrica\Cuándo se puede hacer	16	16	los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.
A1_D1		KPM\Las formas de proceder\Planificar jerárquicamente la solución	16	17	Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes. Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera: , donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono;
A1_D1		Oportunidad de explorar Tipos de relaciones entre contenidos	16	16	Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.
A1_D1		Oportunidad de explorar KPM	16	16	las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes

A1_D1		KoT\Propiedades y Fundamentos\P. Polígonos	17	17	___, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono;
A1_D1		KoT\Procedimientos\Solución geométrica\Cómo se hace	17	18	Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera: ____, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono; Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar el límite .
A1_D1		KoT\Registros\Algebraico	17	17	
A1_D1		KoT\Procedimientos\Solución geométrica\Cómo se hace\Límite de sucesiones	18	18	Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar el límite . Donde (x) es cualquier entero positivo.
A1_D1		KoT\Procedimientos\Solución geométrica\Cuándo se p	18	18	Donde (x) es cualquier entero positivo.
A1_D1		Oportunidad de explorar KoT\Límites	18	18	esta es la sucesión, puedo hallar el límite
A1_D1		Oportunidad de explorar KoT\Sucesiones	18	18	esta es la sucesión, puedo hallar el límite
A1_D1		KMLS\Nivel de desarrollo conceptual	20	20	En este grado se enseña un poco de sucesiones, al menos la introducción, se entabla alguna relación entre la parte algorítmica con la gráfica, necesaria para una mejor interpretación de la situación.
A1_D1		KMLS\Secuenciación con temas previos y posteriores	20	20	la primera técnica es probable aplicarla en los grados de la secundaria 9° grado, cuando se enseñe los polígonos con sus diagonales, o cuando se mencione en geometría las cuerdas.
A1_D1		KMLS\Secuenciación con temas previos y posteriores	22	22	la segunda técnica se puede aplicar a estudiantes de finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean límites de sucesiones. Con este concepto aprendido se facilita más hallar el total de cuerdas de determinados puntos.
A1_D1		Oportunidad de explorar KoT\Límites	22	22	límites de sucesiones
A1_D1		KFLM\Formas de aprendizaje\Teorías de aprendizaje\TA. Formal	24	24	Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Facultad de matemática, astronomía, física. Universidad Nacional de Córdoba.
A1_D2		Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre la enseñanza de las matemáticas	2	2	Esta situación problema de las cuerdas que se pueden trazar en un círculo cualquiera, me lleva a reconocer la importancia de crear, organizar, y desarrollar actividades didácticas, que propicien el avance en el conocimiento,

A1_D2		Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre el papel del estudiante	2	2	desarrollar actividades didácticas, que propicien el avance en el conocimiento, y de esta manera el estudiante obtenga un aprendizaje significativo.
A1_D2		Oportunidad de explorar KFLM\ Teoría de aprendizaje	2	2	aprendizaje significativo
A1_D2		Objetivos	3	5	El objetivo primordial en esta actividad es: Crear en el estudiante la necesidad de avidez de conocimiento, usando conceptos previos ajustados a la nueva situación problemática.
A1_D2		Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre el papel del estudiante	4	4	La perspectiva de crear situaciones donde el estudiante construya conocimiento matemático, pero enmarcado en un ambiente donde él sea el propiciador de ese conocimiento, y el profesor sea solo un facilitador, es el ambiente de relación por el cual se da esta situación problema
A1_D2		KMLS	5	5	La guía sería propuesta para los estudiantes del bachillerato, 9° grado
A1_D2		KoT\Propiedades y Fundamentos\P. Circunferencia\D. Cuerda	8	8	En un círculo se pueden trazar segmentos que pasan por dos puntos dados en la circunferencia llamados cuerdas
A1_D2		KoT\Registros\Gráfico	8	9	En un círculo se pueden trazar segmentos que pasan por dos puntos dados en la circunferencia llamados cuerdas; se pide que se marquen (2, 5, 8, 10, 15) puntos en circunferencias diferentes, y a partir de ellos dibujar las cuerdas que se puedan formar. En cada juego de puntos contar cuantas cuerdas se forman, cuando se marcan 2, 5, 8, 10, o 15 puntos en la circunferencia. Después de hallar el número de cuerdas que se pueden trazar, y a partir de los datos conseguidos, obtener el algoritmo matemático para cualquier número de puntos marcados en la circunferencia.
A1_D2		KMT\Actividades, Tareas, Ejemplos\Trazado y conteo de cuerdas	8	9	se pide que se marquen (2, 5, 8, 10, 15) puntos en circunferencias diferentes, y a partir de ellos dibujar las cuerdas que se puedan formar. En cada juego de puntos contar cuantas cuerdas se forman, cuando se marcan 2, 5, 8, 10, o 15 puntos en la circunferencia. Después de hallar el número de cuerdas que se pueden trazar, y a partir de los datos conseguidos, obtener el algoritmo matemático para cualquier número de puntos marcados en la circunferencia
A1_D2		Objetivos	10	10	Como el objetivo es crear en el estudiante esa necesidad de conocimiento
A1_D2		KoT\Registros\Gráfico	10	10	espero que a partir de esta actividad, cada uno de los individuos participantes adquiera el conocimiento adecuado sobre cuerdas, y sucesiones, a través del uso de ambientes visuales, de la manipulación directa del objeto tratado, y de la predicción como práctica social.
A1_D2		oportunidad de explorar Práctica social	10	10	de la predicción como práctica social.
A1_D2		Oportunidad de explorar KMLS	10	10	espero que a partir de esta actividad, cada uno de los individuos participantes adquiera el conocimiento adecuado sobre cuerdas, y sucesiones

A1_D2		KoT\Procedimientos\Solución Gráfica\Cuándo	11	11	, cuando se hace casi que imposible dibujarlas en una circunferencia.
A1_D2		KoT\Registros\Algebraico	11	11	A través del algoritmo algebraico que se obtiene se puede predecir valores de la totalidad de cuerdas que se pueden trazar, cuando se hace casi que imposible dibujarlas en una circunferencia.
A1_D2		KMT\Teorías de enseñanza\¿T-E, Formal?	12	12	La noción de predicción tiene el objeto de ir más delante de los acontecimientos diarios, de anticiparse a lo que puede suceder, teniendo en cuenta que esta se construye a través de las vivencias de los individuos sobre un concepto, y en un contexto determinado.
A1_D2		Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre la enseñanza de las matemáticas	12	12	La noción de predicción tiene el objeto de ir más delante de los acontecimientos diarios, de anticiparse a lo que puede suceder, teniendo en cuenta que esta se construye a través de las vivencias de los individuos sobre un concepto, y en un contexto determinado.
A1_D2		KoT\Fenomenología	13	13	Cantoral (2001) nos dice que debido a la necesidad de predecir, estimar, y hacer aproximaciones sobre cambios o variaciones de fenómenos físicos, y de la mecánica de los cuerpos celestes, también el fluido de líquidos (Newton), la transmisión de calor de (Fourier), la velocidad con que se mueve un cuerpo (Fermat, Descartes, Laplace, y otros), generaron la consecución de modelos matemáticos, para describir, y explicar dichos fenómenos, partiendo de conceptos de cálculo, y análisis matemático.
A1_D2		KFLM\Formas de aprendizaje\Teorías de aprendizaje\TA. Formal\¿T-A?	13	13	Cantoral (2001) nos dice que debido a la necesidad de predecir, estimar, y hacer aproximaciones sobre cambios o variaciones de fenómenos físicos, y de la mecánica de los cuerpos celestes, también el fluido de líquidos (Newton), la transmisión de calor de (Fourier), la velocidad con que se mueve un cuerpo (Fermat, Descartes, Laplace, y otros), generaron la consecución de modelos matemáticos, para describir, y explicar dichos fenómenos, partiendo de conceptos de cálculo, y análisis matemático.
A1_D2		Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre el papel del profesor	14	14	Espero que la intervención del profesor sea mínima,
A1_D2		Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre el papel del estudiante	14	14	con el objeto de que sean ellos los estudiantes los que construyan conocimiento
A1_D2		KoT\Registros\Gráfico	15	15	En la verificación el profesor puede utilizar la práctica de graficación como medio de comprobación del algoritmo algebraico propuesto por cada uno de los grupos.
A1_D2		Oportunidad de explorar Práctica social	15	15	la práctica de graficación
A1_D2		Oportunidad de explorar KPM	15	15	En la verificación el profesor puede utilizar la práctica de graficación como medio de comprobación del algoritmo algebraico

A1_D2		KFLM\Formas de interacción de los alumnos con el contenido\Procesos y estrategias\¿Estrategias de estudiantes?	18	18	Inicialmente la actividad se desarrolla individualmente, donde el estudiante manipula el objeto, traza rectas, y obtiene el total de cuerdas para cada uno de los ejercicios pedidos.
A1_D2		KMT\Actividades, Tareas, Ejemplos\Trazado y conteo de cuerdas	18	21	1. Inicialmente la actividad se desarrolla individualmente, donde el estudiante manipula el objeto, traza rectas, y obtiene el total de cuerdas para cada uno de los ejercicios pedidos. En este momento a través de la visualización, el estudiante debe llegar al objetivo. 2. Luego se reúnen en grupos de tres estudiantes, donde se discutirá el proceso para obtener el algoritmo para cualquier cantidad de puntos. Con una comunicación fluida entre los integrantes, y usando un poco de predicción podemos obtener un algoritmo adecuado. Cuando el estudiante no tiene un conocimiento pleno de lo que es sucesiones, se puede guiar a que a partir de la graficación de datos se obtienen gráficas que me dan con facilidad el algoritmo algebraico; en este momento si se posee un software graficador se debe utilizar como artefacto de ayuda.
A1_D2		KFLM\Formas de interacción de los alumnos con el contenido\Procesos y estrategias\¿cómo se procede?	19	19	En este momento a través de la visualización, el estudiante debe llegar al objetivo.
A1_D2		KMT\Recursos materiales o virtuales\¿Graficación?	19	19	a través de la visualización, el estudiante debe llegar al objetivo
A1_D2		KoT\Registros\Algebraico	20	21	Luego se reúnen en grupos de tres estudiantes, donde se discutirá el proceso para obtener el algoritmo para cualquier cantidad de puntos. Con una comunicación fluida entre los integrantes, y usando un poco de predicción podemos obtener un algoritmo adecuado. Cuando el estudiante no tiene un conocimiento pleno de lo que es sucesiones
A1_D2		KoT\Registros\Gráfico	21	21	se puede guiar a que a partir de la graficación de datos se obtienen gráficas que me dan con facilidad el algoritmo algebraico; en este momento si se posee un software graficador se debe utilizar como artefacto de ayuda.
A1_D2		Oportunidad de explorar KFLM\Dificultades de los estudiantes	21	21	Cuando el estudiante no tiene un conocimiento pleno de lo que es sucesiones
A1_D2		Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre el papel del profesor	23	23	El último momento, la intervención del profesor es fundamental porque junto a los estudiantes, y sus respectivas proposiciones validan e institucionalizan el conocimiento

A1_D2		KFLM\Formas de aprendizaje\Teorías de aprendizaje\TA. Formal\¿T-A?	25	25	Cantoral, R. (2001). Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad. México, D. F, México: Grupo Editorial Iberoamérica.
A1_F1_P1	25/01/2013 08:31	KMT\Recursos materiales o virtuales\Características del problema de las cuerdas	6	7	Como se menciona el problema no es rutinario, porque el estudiante no ha tratado de resolver antes algo relativo a este. Respecto a lo tradicional creo que tiene algo de ello, pero solamente en la consecución del enunciado.
A1_F1_P1	25/01/2013 08:31	KMT\Recursos materiales o virtuales\Características del problema de las cuerdas	8	8	Lo consideraría abierto en el sentido de que no solamente puedo realizarlo de una manera, en el caso de forma gráfica o de forma algebraica.
A1_F1_P1	25/01/2013 08:31	Oportunidad de explorar KoT\ Registros	8	8	de forma gráfica o de forma algebraica
A1_F1_P1	25/01/2013 08:31	KMT\Teorías de enseñanza\T-E Formal\Características de problema abierto	9	14	Me basé en el escrito que habla de las características de los denominados problemas abiertos (Garret, 1988) podemos notar que: 1) No se ofrece explícitamente toda la información requerida para resolverlo, pero quien va a proponer una solución (en este caso el estudiante) dispone de los conocimientos y de los medios para obtenerla. 2) Existe cierta ambigüedad en la estructura del problema que permite a quien intenta resolverlo redefinirlo poniendo en juego su creatividad y originalidad. 3) Hay libertad para seleccionar restricciones, modelos, métodos matemáticos diferentes. En función de la elección realizada se pueden generar diferentes soluciones. La selección de una de ellas implica una justificación, la propuesta de diferentes soluciones debe ir acompañada de las correspondientes ventajas y desventajas. Garret, R. (1988). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo deciencias. Enseñanza de las Ciencias , 6 (3), 224-230.
A1_F1_P1	28/01/2013 07:48	KMT\Recursos materiales o virtuales\Características del problema de las cuerdas	20	20	El problema no muestra un único camino de solución; deja a la imaginación, y pericia del estudiante el desarrollo; al inicio es la impresión de que la actividad le faltan datos; lleva al estudiante a que sea creativo, busque nuevas alternativas, y relacione conceptos previos con la nueva situación.
A1_F1_P2	25/01/2013 08:41	KoT\Procedimientos\Solución Gráfica	6	6	utilizar la gráfica como medio para realizar el trabajo; manipulándola, trazando rectas, segmentos, usando artefactos comunes y software.
A1_F1_P2	25/01/2013 08:41	KoT\Procedimientos\Solución Gráfica\Cómo	6	6	manipulándola, trazando rectas, segmentos, usando artefactos comunes y software.

A1_F1_P2	25/01/2013 08:41	KoT\Procedimientos\Solución geométrica	7	7	fue partir de un algoritmo conocido como es el de las diagonales de un polígono inscrito en una circunferencia, y aplicarla en el desarrollo de la actividad, usando el proceso matemático de límite para obtener el resultado.
A1_F1_P2	25/01/2013 08:41	KoT\Procedimientos\Solución geométrica\Cómo se h	7	7	partir de un algoritmo conocido como es el de las diagonales de un polígono inscrito en una circunferencia, y aplicarla en el desarrollo de la actividad, usando el proceso matemático de límite
A1_F1_P2	28/01/2013 21:09	KoT\Procedimientos\Sum. de enteros consecutivos	9	12	podríamos utilizar también las sucesiones aritméticas con su sumatoria, y a partir de ella obtener los valores pedidos para cualquier número de puntos. Una sumatoria de la sucesión está dada de la siguiente manera: Sabiendo que a_{n}= a_{1}+d(n-1), donde la diferencia d=1,y a_{1}=1, por ser el primer valor a sumar y remplazando en la ecuación nos quedaría Pero como el último punto no se le puede marcar más cuerdas entonces es lo que me parece que se podría realizar
A1_F1_P2	28/01/2013 21:09	Oportunidad de explorar KoT\ Sucesiones	9	9	podríamos utilizar también las sucesiones aritméticas con su sumatoria, y a partir de ella obtener los valores pedidos para cualquier número de puntos
A1_F1_P2	28/01/2013 21:09	KoT\Procedimientos\Sum. de enteros consecutivos\Cómo se hace	10	12	Una sumatoria de la sucesión está dada de la siguiente manera: Sabiendo que a_{n}= a_{1}+d(n-1), donde la diferencia d=1,y a_{1}=1, por ser el primer valor a sumar y remplazando en la ecuación nos quedaría Pero como el último punto no se le puede marcar más cuerdas entonces
A1_F1_P2	28/01/2013 21:09	Oportunidad de explorar KoT\ Sucesiones	10	10	Una sumatoria de la sucesión está dada de la siguiente manera:
A1_F1_P2	28/01/2013 08:00	KoT\Procedimientos\Sum. de enteros consecutivos	21	21	a partir de la sucesión de la suma de números enteros sucesivos que corresponde a n*(n+1)/2, podemos obtener el algoritmo que sería n*(n+1)/2 - n = n*(n-1)/2
A1_F1_P2	28/01/2013 08:00	KMLS\Nivel de desarrollo conceptual	21	21	Me parece que también se puede aplicar para aquellos estudiantes que tienen conocimientos de cálculo en sucesiones; porque a partir de la sucesión de la suma de números enteros sucesivos que corresponde a n*(n+1)/2, podemos obtener el algoritmo que sería n*(n+1)/2 - n = n*(n-1)/2
A1_F1_P2	28/01/2013 08:00	Oportunidad de explorar KoT\ Sucesiones	21	21	de cálculo en sucesiones; porque a partir de la sucesión de la suma de números enteros sucesivos que corresponde a n*(n+1)/2, podemos obtener el algoritmo que sería n*(n+1)/2 - n = n*(n-1)/2
A1_F1_P2	28/01/2013 20:12	KoT\Procedimientos\Sum. de enteros consecutivos	35	35	Sería una sumatoria de todos los valores menores que el número de puntos dados, es decir si tengo n = 5 como puntos la sumatoria ((n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4))=4n-10=20-10=10.

A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	KMT\Recursos materiales o virtuales\Características del problema de las cuerdas	7	7	Cuando al estudiante se le proponen situaciones de esta manera, lo llevan a crear, a proponer, a consultar, a comunicar, a predecir, y a construir conocimiento matemático.
A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre el papel del estudiante	7	7	Cuando al estudiante se le proponen situaciones de esta manera, lo llevan a crear, a proponer, a consultar, a comunicar, a predecir, y a construir conocimiento matemático.
A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	KMLS\Secuenciación con temas previos y posteriores	9	9	Para poder resolver la actividad se necesita que el estudiante tenga conocimientos previos bien establecidos sobre cuerdas, sucesiones, y en alguna ocasión sobre límites, para la segunda técnica.
A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre el aprendizaje de la matemática	10	10	El estudiante crea conocimiento, al entablar las diferentes relaciones mentales para comprender los significados.
A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	Oportunidad de explorar KMLS	10	10	El estudiante crea conocimiento, al entablar las diferentes relaciones mentales para comprender los significados.
A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	Oportunidad de explorar Concepciones\Sobre el papel del estudiante	11	12	Propone, [se refiere al estudiante] cuando deben decidir por el algoritmo que sigue o cumple la actividad. Debe consultar para ampliar el conocimiento del concepto. Predice, porque al darle una cantidad de puntos debe obtener el número de cuerdas que se pueden trazar con ellos. Recogiendo todas las acciones realizadas por el estudiante en la solución de la problemática construye conocimiento matemático.
A1_F1_P3	29/01/2013 07:59	Oportunidad de explorar KMT\El problema como recurso	19	20	Mencionas que es muy interesante como recurso didáctico la actividad de las cuerdas, y estoy totalmente de acuerdo; menciona que el estudiante construye su aprendizaje a partir de esta, busca que el estudiante indague, sea creativo, produzca, innove; y si es así la pregunta está encaminada hacia ese motivo, porque no da muchas pautas.

Tabla IV.6 Análisis de la Actividad 1 descargada en Excel

A pesar de que esta Tabla, tal cual la proporciona el software, no contiene imágenes, ni justificación sobre las asignaciones y tiene algunas de las codificaciones marcadas como dudosas, sirvió para observar los resultados del primer análisis y tomarla como base para generar la Tabla IV.7, en la que se agregaron manualmente las imágenes y se reacomodó la información para realizar un segundo análisis de la información.

IV.1.3 Revisión y reasignación de subdominios y categorías

A continuación mostramos la Tabla IV.7 que contiene la descripción del segundo análisis del conocimiento especializado de Omar identificado en la actividad 1, correspondiente a la fase del análisis *bottom-up*. Este análisis se basa en el método de comparación constante de los datos derivados del primer análisis de la información y arrojados por el programa MAXQDA en la Tabla IV.6, así lo que se muestra a continuación es una filtración de ese primer análisis en el que se agregan o descartan segmentos según se considere necesario para determinar más precisamente el conocimiento especializado que el profesor pone en juego al resolver el problema de las cuerdas.

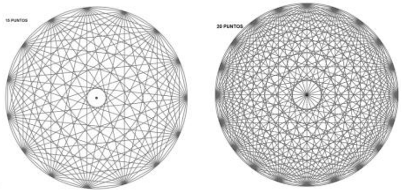
La siguiente Tabla se ha dividido en columnas que pueden leerse de izquierda a derecha, comenzando por el subdominio del cual se dará evidencia, las categorías que surgen del análisis de los datos, el documento al que pertenece el fragmento que se está analizando, el párrafo en el cual se localiza el segmento y el fragmento en el cual se reconoce evidencia del conocimiento especializado de Omar, el cual puede contener algunos comentarios de los investigadores que permitan contextualizar el segmento para una mejor comprensión del mismo, además de haberse agregado las imágenes o ecuaciones correspondientes a cada segmento que la Tabla IV.6 no mostraba. En la última columna se hace una pequeña justificación de cada una de las asignaciones que ayuden al lector a conocer los motivos por los que se codifica la información en una determinada categoría de conocimiento, en la cual se profundizará en la narración de los resultados del análisis.

Al momento de reacomodar la información y redactar la última columna de esta Tabla, se van realizando ajustes y cambios con respecto a las primeras asignaciones a través de un proceso de comparación constante de los datos con fragmentos complementarios y la discusión del análisis con otros investigadores[3].

---

[3] En especial nos referimos, por un lado, al Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (SIDM), en el que se discutieron varios de los análisis presentados en este trabajo, y, por otro lado, a la discusión y consenso entre investigadora y asesor de la tesis.

Subdominio	Categorías	Subcategorías	Documento	Fecha y hora	Principio	Final	Segmento	Sobre la asignación
Dominio de Conocimiento Matemático								
Conocimiento de los temas KoT		***Fenomenología***	A1_D2		13	13	*Cantoral (2001) nos dice que debido a la necesidad de predecir, estimar, y hacer aproximaciones sobre cambios o variaciones de fenómenos físicos, y de la mecánica de los cuerpos celestes, también el fluido de líquidos (Newton), la transmisión de calor de (Fourier), la velocidad con que se mueve un cuerpo (Fermat, Descartes, Laplace, y otros), generaron la consecución de modelos matemáticos, para describir, y explicar dichos fenómenos, partiendo de conceptos de cálculo, y análisis matemático.*	Omar apoya sus argumentos sobre el uso de la predicción, con un respaldo teórico, en el que habla sobre los fenómenos que dan origen al cálculo y al análisis matemático, lo cual identificamos como una evidencia de que el profesor conoce ciertos fenómenos asociados a la construcción del cálculo y el análisis matemático, sin embargo, esta cita está desvinculada totalmente de la resolución del problema.

Conocimiento de los temas KoT	**Procedimientos**	*Método gráfico*	*Cómo se hace*	A1_D1	11	13	*Una de las técnicas más comunes es* ***trazar manualmente las cuerdas en un círculo***[4]*; pero esto lo podemos realizar cuando el número de puntos es pequeño. Me atrevo a decir cuando el número es menor de 20 puntos.* *Ejemplo con un polígono regular* 	En estos fragmentos Omar muestra su conocimiento sobre un método gráfico, explora una posible forma de dar solución al problema, lo cual asociamos con un conocimiento referente al "saber hacer".
				A1_F1_P2 25/01/2013 08:41	6	6	[…] *utilizar la gráfica como medio para realizar el trabajo; manipulándola, trazando rectas, segmentos, usando artefactos comunes y software.*	
			Cuándo puede hacerse	A1_D1	9	9	*Sin embargo si en una circunferencia se dan unos determinados puntos, y se pide que se determine el número de cuerdas,* ***es posible hallarlas si esa cantidad de puntos es un número entero positivo.***	Aunque no fue posible hacer una entrevista a Omar, consideramos que esta afirmación es utilizada para dar sustento a su estrategia, y a la necesidad de usar un lenguaje matemático que le dé rigor a su proceso de solución. Si preguntáramos acerca de lo que sucede cuando ese número no es entero positivo, pensamos que Omar sabría que no es posible que sea de otro modo, dado que el número de puntos sobre una circunferencia siempre estará dado por enteros. Esto nos proporciona entonces evidencias sobre el conocimiento que tiene Omar sobre posibles limitaciones del método o lo que hemos denotado como "saber cuándo puede llevarse a cabo" un determinado procedimiento matemático.
					11	11	[…] *pero esto* ***lo podemos realizar cuando el número de puntos es pequeño.*** *Me atrevo a decir cuando el número es menor de 20 puntos.*	
				A1_D2	11	11	[Se requiere de una estrategia distinta] *cuando se hace casi que imposible dibujarlas en una circunferencia.*	

---

[4] El énfasis en negritas de algunos segmentos es agregado por los investigadores para denotar fragmentos especialmente importantes del segmento.

Conocimiento de los temas KoT	**Procedimientos**	*Método algebraico*	*Cómo se hace*	A1_D1		14	17	*La otra manera sería* ***utilizando*** *la sucesión que se puede hallar, teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase,* ***el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.*** *Esta sucesión está dada de la siguiente forma:* $D = \frac{n}{2}(n-3)$*, donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.* *Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no […]* *Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera:* $cuerdas = D + n$*, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono;* $Cuerdas = \frac{n}{2}(n-3) + n = \frac{n}{2}(n-1)$	Omar evidencia además, conocer una segunda estrategia algebraica de resolución del problema, apoyándose en la fórmula del número de diagonales de un polígono, asociando las cuerdas del círculo con las diagonales de polígonos inscritos en circunferencias.
				A1_F1_P2	25/01/2013 08:41	7	7	*La otra técnica fue partir de un algoritmo conocido como es el de las diagonales de un polígono inscrito en una circunferencia, y aplicarla en el desarrollo de la actividad, usando el proceso matemático de límite para obtener el resultado.*	
			Cuándo se puede hacer	A1_D1		16	16	[…] *los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.*	Omar muestra conocimiento acerca de que la estrategia algebraica puede utilizarse tanto para polígonos regulares como irregulares.
		Indicio Obtención de límite[5]		A1_D1		18	18	*Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar el límite* $\lim_{n\to x}\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)\ [= \frac{x}{2}(x-1)]$ *Donde (x) es cualquier entero positivo.*	A pesar de que este procedimiento parece estar desvinculado de la solución del problema además de ser innecesaria, nos parece importante señalar que consideramos este fragmento un *indicio* del conocimiento que podría tener Omar sobre los procesos de obtención de límites. Sin embargo nos hace falta información para saber lo que el profesor conoce sobre este procedimiento.

---

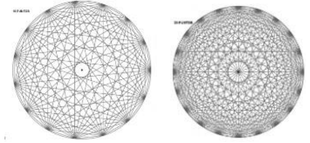
[5] Denotaremos en color gris y negrita las categorías o subcategorías que solo hayan sido identificadas como indicios de conocimiento y solo en gris las que hayan sido identificadas como oportunidades, lo cual nos permite diferenciarlas de las evidencias claras de conocimiento reconocidas en el discurso de Omar.

Conocimiento de los temas KoT	**Procedimientos**	*Método de sumatoria de enteros consecutivos*	*Cómo se hace*	A1_F1_P2	28/01/2013 08:00	21	21	[…] *a partir de la sucesión de la suma de números enteros sucesivos que corresponde a n*(n+1)/2, podemos obtener el algoritmo que sería n*(n+1)/2 - n = n*(n-1)/2*	Derivado de las reflexiones surgidas en el foro, Omar desarrolla un tercer proceso para resolver el problema, que hemos llamado sumatoria de enteros consecutivos. Utiliza la propuesta de Ana y la desarrolla trabajando algebraicamente las sumatorias de enteros sucesivos. Al hacer una argumentación extensa y sustentada matemáticamente del funcionamiento de esta estrategia, creemos que esto puede considerarse parte de su conocimiento de una nueva estrategia de solución del problema
				A1_F1_P2	28/01/2013 20:12	35	35	*Sería una sumatoria de todos los valores menores que el número de puntos dados, es decir si tengo n = 5 como puntos la sumatoria ((n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4))=4n-10=20-10=10.*	
				A1_F1_P2	28/01/2013 21:09	9	12	[…] *podríamos utilizar también las sucesiones aritméticas con su sumatoria, y a partir de ella obtener los valores pedidos para cualquier número de puntos. Una sumatoria de la sucesión está dada de la siguiente manera:* $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ *Sabiendo que a_{n}= a_{1}+d(n-1), donde la diferencia d=1,y a_{1}=1, por ser el primer valor a sumar y remplazando en la ecuación nos quedaría* $S_n = \frac{n(a_1 + a_1 + n - 1)}{2} = \frac{n(2 + n - 1)}{2} = \frac{n(1 + n)}{2}$ *Pero como el último punto no se le puede marcar más cuerdas entonces* $\frac{(1 + n)}{2} - n = \frac{n(n - 1)}{2}$ *es lo que me parece que se podría realizar*	

Conocimiento de los temas KoT	**Propiedades**	*Circunferencia*	*Componentes*	A1_D1	7	7	[…] *una circunferencia está conformada por infinitos puntos, y a partir de estos se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo.*	Conoce una propiedad específica de la circunferencia: está conformada por infinitos puntos.
					7	7	[…] *cuerda es un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta* […]	Omar conoce la definición de cuerda, como la línea que une dos puntos de la circunferencia.
					8	8	*En un círculo se pueden trazar segmentos que pasan por dos puntos dados en la circunferencia llamados cuerdas* […]	
		Polígonos	*Relación diagonales y lados*		15	15	*Esta sucesión está dada de la siguiente forma:* $D = \frac{n}{2}(n-3)$ *, donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.*	Identificamos el conocimiento de la fórmula para obtener el número de diagonales en un polígono, lo cual asociamos con conocer las propiedades de los polígonos, específicamente las relaciones que hay entre las diagonales y los lados de un polígono
			Diagonales		16	16	*[…] el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes*	Además de tener conocimiento sobre las diagonales como un elemento de los polígonos, observamos conocimiento sobre algunas propiedades de las diagonales de los polígonos: puntos equidistantes en la circunferencia forman polígonos regulares y puntos no equidistantes forman polígonos irregulares. Sabe que las diagonales de polígonos irregulares e irregulares se calculan igual.
			Relación cuerdas lados y diagonales (Polígono inscrito)		17	17	$cuerdas = D + n$*, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono;*	En este fragmento y los anteriores identificamos evidencias sobre el conocimiento sobre las relaciones que existen entre las diagonales y lados de los polígonos y las cuerdas de una circunferencia, que se reflejan a través del concepto de polígono inscrito.
		Oportunidad e ***indicio*** *Infinito*		A1_D1	7	8	*[…] una circunferencia está conformada por* ***infinitos puntos,*** *y a partir de estos se pueden trazar también* ***infinitas cuerda****s, que pasan por el área del círculo.* *La cuerda parte desde un punto, y llega a otro,* ***entonces si hay ∞ puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por ∞***	En este fragmento observamos un *indicio* de conocimiento sobre una de las propiedades de los conjuntos infinitos para establecer una relación entre los puntos de la circunferencia y las cuerdas que pueden trazarse. Ya que no tenemos elementos suficientes para hablar de lo que conoce y cómo conoce Omar el concepto de infinito, hablamos solo de *oportunidad* de indagar sobre las propiedades y fundamentos de este.

Conocimiento de los temas KoT	**Propiedades y fundamentos**	*Oportunidad Sumatoria*	A1_F1_P2	28/01/2013 08:00	9	9	[…] *podríamos utilizar también las sucesiones aritméticas con su **sumatoria**, y a partir de ella obtener los valores pedidos para cualquier número de puntos.*	Estos segmentos parecen indicar que Omar reconoce la sumatoria como una suma reiterada de determinados términos, sin embargo no tenemos información suficiente para decir qué conoce exactamente sobre las sumatorias, por lo que marcamos estos fragmentos como una *oportunidad*.
					10	10	*Una **sumatoria** de la sucesión está dada de la siguiente manera:* $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$	
				28/01/2013 20:12	35	35	*Sería una **sumatoria** de todos los valores menores que el número de puntos dados, es decir si tengo n = 5 como puntos la sumatoria ((n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4))=4n-10=20-10=10.*	
		Oportunidad Llímites	A1_D1		18	18	*Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar **el límite*** $lim_{n\to x}\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)$*. Donde (x) es cualquier entero positivo.*	Con respecto al concepto de límite, ya habíamos hablado antes de que Omar conoce el límite como procedimiento matemático, sin embargo consideramos que debe tener también otros conocimientos referentes a las propiedades y los fundamentos de un límite, que no hemos podido reconocer en sus participaciones pero que dejamos señaladas como una *oportunidad*.
					22	22	*Respecto a la segunda técnica se puede aplicar a estudiantes de finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean **límites de sucesiones**.* […]	
			A1_F1_P2	25/01/2013 08:41	7	7	*La otra técnica fue partir de un algoritmo conocido como es el de las diagonales de un polígono inscrito en una circunferencia, y aplicarla en el desarrollo de la actividad, usando **el proceso matemático de límite** para obtener el resultado.*	
			A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	9	9	*Para poder resolver la actividad se necesita que el estudiante tenga conocimientos previos bien establecidos sobre cuerdas, sucesiones, y en alguna ocasión sobre **límites**, para la segunda técnica.*	

Conocimiento de los temas KoT	**Propiedades y fundamentos**	*Oportunidad Sucesión*	A1_D1		14	15	*La otra manera sería utilizando la **sucesión*** […siguiente:] *el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.[…] dada de la siguiente forma:* $D = \frac{n}{2}(n-3)$, […]	Omar reconoce el concepto de sucesión como un tema necesario para llevar a cabo un desarrollo algebraico de la solución del problema, lo cual nos proporciona pistas sobre que el profesor debe conocer ciertas propiedades de las sucesiones, puesto que a veces pareciera confundir el término sucesión con expresiones algebraicas. Sin embargo, sus participaciones no nos son suficientes para profundizar en lo que sabe sobre estas como tema matemático, así que lo proponemos como una *oportunidad*.
					21	22	*En* [9°] *grado se enseña un poco de **sucesiones**, al menos la introducción, se entabla alguna relación entre la parte algorítmica con la gráfica, necesaria para una mejor interpretación de la situación.* […] *la segunda técnica se puede aplicar a estudiantes de finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean límites de **sucesiones**.* […]	
			A1_D2		10	10	[…] *espero que a partir de esta actividad, cada uno de los individuos participantes adquiera el conocimiento adecuado sobre cuerdas, y **sucesiones**, a través del uso de ambientes visuales, de la manipulación directa del objeto tratado, y de la predicción como práctica social.*	
					21	21	*Cuando el estudiante no tiene un conocimiento pleno de lo que es **sucesiones**, se puede guiar a que a partir de la graficación de datos se obtienen gráficas que me dan con facilidad el algoritmo algebraico* […]	
			A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	9	9	*Para poder resolver la actividad se necesita que el estudiante tenga conocimientos previos bien establecidos sobre cuerdas, **sucesiones**, y en alguna ocasión sobre límites, para la segunda técnica.*	
			A1_F1_P2	28/01/2013 08:00	9	10	*Mirando en estos momentos otras manera de poder dar solución a la situación de cuerdas, podríamos utilizar también las **sucesiones aritméticas** con su sumatoria, y a partir de ella obtener los valores pedidos para cualquier número de puntos.* *Una sumatoria de la **sucesión** está dada de la siguiente manera:* $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$	
				28/01/2013 21:09	21	21	*Me parece que también se puede aplicar para aquellos estudiantes que tienen conocimientos de **cálculo en sucesiones**; porque a partir de la **sucesión de la suma de números enteros sucesivos** que corresponde a n*(n+1)/2, podemos obtener el algoritmo que sería n*(n+1)/2 - n = n*(n-1)/2*	

Conocimiento de los temas KoT	**Registros**	*Esquemático*	A1_D1		12	13	*Ejemplo con un polígono regular* 	Estos segmentos nos proporcionan evidencia de que el profesor conoce representaciones esquemáticas de los polígonos inscritos en circunferencias.
		Algebraico	A1_D1		15	15	*Esta sucesión está dada de la siguiente forma:* $\boldsymbol{D = \frac{n}{2}(n-3)}$ *, donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.*	El profesor conoce además registros algebraicos que representan las relaciones entre las circunferencias y sus cuerdas y los polígonos inscritos y sus lados y diagonales.
					17	17	*Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales,* [es]: $\boldsymbol{cuerdas = D + n}$ *, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono;* $\boldsymbol{Cuerdas = \frac{n}{2}(n-3) + n = \frac{n}{2}(n-1)}$	
			A1_F1_P2	28/01/2013 21:09	10	12	*Una sumatoria de la sucesión está dada de la siguiente manera:* $\boldsymbol{S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}}$ *Sabiendo que a_{n}= a_{1}+d(n-1), donde la diferencia d=1,y a_{1}=1, por ser el primer valor a sumar y remplazando en la ecuación nos quedaría* $\boldsymbol{S_n = \frac{n(a_1 + a_1 + n - 1)}{2} = \frac{n(2 + n - 1)}{2} = \frac{n(1+n)}{2}}$ *Pero como el último punto no se le puede marcar más cuerdas entonces* $\boldsymbol{\frac{(1+n)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}}$ *es lo que me parece que se podría realizar*	Conoce además una representación algebraica de la suma de *n* primeros números naturales.
		Oportunidad Registro verbal	A1_D1		7	7	[…] *se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo*	Se requiere más información para saber si este uso (inadecuado) del lenguaje es intencionado o si es que no contempla diferencias entre hablar del interior del círculo y el área del círculo, es decir, si se trata de una imprecisión terminológica, que puede estar asociada a una dificultad conceptual. Sin embargo observamos una *oportunidad* para cuestionarnos acerca de lo que Omar sabe sobre el uso de este registro.

Conocimiento de la práctica matemática **KPM**	*Jerarquización y planificación para la resolución de problemas*	A1_D1	7	9	*Recordemos que **cuerda es** un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta; como es conocido **una circunferencia está conformado por** infinitos puntos, **y a partir de éstos se pueden trazar** también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo.* *La cuerda parte desde un punto, y llega a otro, entonces si hay ∞ puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por ∞* *Sin embargo si **en una circunferencia se dan unos determinados puntos, y se pide que se determine el número de cuerdas, es posible hallarlas si** esa cantidad de puntos es un número entero positivo.*	Se observa en todo el proceso de Omar que va estableciendo una secuencia para resolver el problema, planificando y jerarquizando el uso y la relación de distintos contenidos de manera que construye un proceso o secuencia con la cual estructurar la solución del problema, de la siguiente forma: Omar sabe lo que es una circunferencia y lo que es una cuerda, conoce ciertas propiedades de éstas. Si conoce el número de puntos sobre la circunferencia sabe que es posible conocer el número de cuerdas que pueden trazarse a partir de estos puntos. Por otro lado, sabe también que los polígonos pueden inscribirse en circunferencias, de manera que las diagonales y los lados de estos sean cuerdas de la circunferencia. Ahora utiliza su conocimiento sobre la forma de calcular las diagonales de un polígono, es decir su conocimiento sobre las relaciones entre diagonales, lados y vértices del polígono, lo cual me proporciona una fórmula que me permite obtener el número de cuerdas para cualquier número de puntos sobre la circunferencia. Esta forma de trabajar nos da información sobre lo que sabe el profesor acerca de la resolución del problema, pone en evidencia conocer una práctica de jerarquización de su conocimiento sobre el contenido matemático a utilizar y una forma de argumentación informal de la solución, un heurístico utilizado en la resolución de problemas.
			15	17	***Esta sucesión está dada de la siguiente forma:*** $\boldsymbol{D = \frac{n}{2}(n-3)}$***, donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.*** ***Si conozco esto puedo decir que*** *el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido,* ***teniendo en cuenta que*** *los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no* ***debido a que*** *las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.* ***Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera:*** $cuerdas = D + n$*, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono;* $Cuerdas = \frac{n}{2}(n-3) + n = \frac{n}{2}(n-1)$	

Conocimiento de la práctica matemática KPM	*Oportunidad* *Formas de validación o demostración en matemáticas*			A1_D1	16	16	[…] *las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes*	En estos fragmentos pareciera haber información acerca de que Omar considera como forma de validación el probar la expresión algebraica para algunos casos, trazando y contando cuerdas, sin embargo la evidencia no es lo suficientemente fuerte. Lo consideramos entonces una *oportunidad* de indagar sobre su KPM, con respecto a lo que conoce sobre las formas de validar los resultados en matemáticas.
				A1_D2	15	15	*En la verificación el profesor puede utilizar la práctica de graficación como medio de comprobación del algoritmo algebraico*	
Dominio de Conocimiento Didáctico del Contenido								
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	**Formas de aprendizaje**	*Teorías de aprendizaje*	*Formal*	A1_D1	3	3	*“El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje” Brousseau (1986).*	La fundamentación teórica que Omar hace del texto, expresa un conocimiento sobre teorías de aprendizaje que procede de sus lecturas y de su participación en actividades formativas con cierta carga teórica. Se infiere que usa la cita porque su concepción sobre el aprendizaje coincide con la de Brousseau, sirviéndole como un apoyo teórico que ofrece una base cognitiva a su visión de aprendizaje.
					24	24	*Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Facultad de matemática, astronomía, física. Universidad Nacional de Córdoba.*	

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	**Formas de aprendizaje**	***Indicio Teorías de aprendizaje***	*Formal*	A1_D2	2	2	*Esta situación problema* […] *me lleva a reconocer la importancia de crear, organizar, y desarrollar actividades didácticas, que propicien el avance en el conocimiento, y de esta manera el estudiante obtenga un* ***aprendizaje significativo*** […]	Estos fragmentos parecen provenir del conocimiento que Omar tiene sobre teorías formales de aprendizaje, sin embargo, el profesor no menciona explícitamente la teoría, por lo que consideramos este un *indicio* de conocimiento de constructos teóricos provenientes de una teoría formal. En este caso hace alusión a la fenomenología del cálculo el aprendizaje significativo, la predicción como práctica social y la graficación como constructos extraídos de literatura referente a la Teoría Socioepistemológica. A pesar de que dentro de esta teoría la graficación no es precisamente una práctica social, Omar la asocia como tal, por lo que la consideramos parte de este conocimiento. Esta afirmación se basa en estos y otros segmentos de otras actividades en las que Omar hace alusión directa a la teoría.
					10	10	*[...] espero que a partir de esta actividad, cada uno de los individuos participantes adquiera el conocimiento adecuado sobre cuerdas, y sucesiones, a través del uso de ambientes visuales, de la manipulación directa del objeto tratado, y de la* ***predicción como práctica social****.*	
					12	12	***La noción de predicción*** *tiene el objeto de ir más delante de los acontecimientos diarios, de anticiparse a lo que puede suceder, teniendo en cuenta que esta se construye a través de las vivencias de los individuos sobre un concepto, y en un contexto determinado.*	
					13	13	***Cantoral (2001)*** *nos dice que* […]	
					15	15	*En la verificación el profesor puede utilizar* ***la práctica de graficación*** *como medio de comprobación del algoritmo algebraico propuesto por cada uno de los grupos*	

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	**Formas de interacción de los alumnos con el contenido**	***Indicio*** ***Posibles procesos y estrategias de los estudiantes***	A1_D2		18	18	*Inicialmente la actividad se desarrolla individualmente, donde* ***el estudiante manipula el objeto, traza rectas, y obtiene el total de cuerdas*** *para cada uno de los ejercicios pedidos.*	Observamos aquí un *indicio* del conocimiento que tiene el profesor sobre lo que los estudiantes harán con la actividad. En este caso parece pretender que establezcan un patrón al trabajar con los casos particulares, por lo que considera que será ese proceso el que les permita establecer un algoritmo para generalizar el proceso. Omar deja plasmada la intención de que los estudiantes comiencen usando una estrategia para visualizar gráficamente el problema, sin embargo hasta aquí no tenemos evidencia que respalde que tiene conocimiento sobre esas distintas estrategias que podrían seguir los alumnos.
					19	19	*En este momento* ***a través de la visualización, el estudiante debe llegar al objetivo.***	
			A1_D2		21	21	*Cuando el estudiante no tiene un conocimiento pleno de lo que es sucesiones* ***se puede guiar a que a partir de la graficación de datos se obtienen gráficas que me dan con facilidad el algoritmo algebraico*** […]	
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	**Teorías de enseñanza**	*Formal*	A1_F1_P1	25/01/2013 08:31	9	14	*Me basé en el escrito que habla de las características de los denominados problemas abiertos (Garret, 1988) podemos notar que:* *1) No se ofrece explícitamente toda la información requerida para resolverlo, pero quien va a proponer una solución (en este caso el estudiante) dispone de los conocimientos y de los medios para obtenerla.* *2) Existe cierta ambigüedad en la estructura del problema que permite a quien intenta resolverlo redefinirlo poniendo en juego su creatividad y originalidad.* *3) Hay libertad para seleccionar restricciones, modelos, métodos matemáticos diferentes.* *En función de la elección realizada se pueden generar diferentes soluciones. La selección de una de ellas implica una justificación, la propuesta de diferentes soluciones debe ir acompañada de las correspondientes ventajas y desventajas.* *Garret, R. (1988). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo de ciencias. Enseñanza de las Ciencias, 6 (3), 224-230.*	Omar muestra aquí una argumentación que da sustento a la evaluación que hace del problema apoyándose en lo que conoce sobre literatura referente a la enseñanza de la matemática, lo cual consideramos dentro de un conocimiento formal de constructos teóricos referentes a la enseñanza.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	**Estrategias, técnicas y tareas**	*Trazado y conteo de cuerdas*	A1_D2	8	10	[Dentro de la guía pedagógica que elabora Omar describe las instrucciones y pasos que considera son idóneos para que los estudiantes resuelvan el problema] […] *se pide que se marquen (2, 5, 8, 10, 15) puntos en circunferencias diferentes, y a partir de ellos dibujar las cuerdas que se puedan formar. En cada juego de puntos contar cuantas cuerdas se forman, cuando se marcan 2, 5, 8, 10, o 15 puntos en la circunferencia.* *Después de hallar el número de cuerdas que se pueden trazar, y a partir de los datos conseguidos, obtener el algoritmo matemático para cualquier número de puntos marcados en la circunferencia* […] *espero que a partir de esta actividad, cada uno de los individuos participantes adquiera el conocimiento adecuado sobre cuerdas, y sucesiones,* ***a través del uso de ambientes visuales,*** *de la manipulación directa del objeto tratado, y de la predicción como práctica social.*	Hemos identificado antes que el profesor tiene conocimiento de dos tipos de solución del problema que desarrolló en D1 y que consideramos parte de su KoT_*Procedimientos*, ahora bien, en estos segmentos podemos observar que Omar considera que estos procedimientos pueden ser útiles como estrategias de trabajo para los estudiantes de secundaria. En su propuesta de guía pedagógica utiliza su procedimiento para inducir a los estudiantes a comenzar el trabajo con el problema desde la visualización de casos particulares, dejando la parte de la generalización más libre para que los estudiantes busquen el modelo matemático. Consideramos que esta forma de redireccionar su KoT para utilizarlo directamente en la instrucción a través de una guía específica es una forma distinta de conocer, es un conocimiento del trazado y conteo de cuerdas como estrategia didáctica de trabajo basada en la visualización de registros esquemáticos de casos particulares de circunferencias y sus cuerdas y lo que él llama práctica de graficación. Observamos también relaciones entre lo que conoce sobre esta estrategia didáctica y lo que considera que puede provocar en los estudiantes, es decir, hay una relación entre KMT y KFLM
				18	21	[…] *la actividad se desarrolla individualmente, donde el estudiante manipula el objeto, traza rectas, y obtiene el total de cuerdas para cada uno de los ejercicios pedidos.* *En este momento* ***a través de la visualización****, el estudiante debe llegar al objetivo.* *[…] se discutirá el proceso para obtener el algoritmo para cualquier cantidad de puntos. Con una comunicación fluida entre los integrantes, y usando un poco de predicción podemos obtener un algoritmo adecuado.* *Cuando el estudiante no tiene un conocimiento pleno de lo que es sucesiones, se puede guiar a que* ***a partir de la graficación*** *de datos se obtienen gráficas que me dan con facilidad el algoritmo algebraico; en este momento si se posee un software graficador se debe utilizar como artefacto de ayuda.*	

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	**Estrategias, técnicas y tareas**	*Características del problema como tarea para bordar el tema de cuerdas y sucesiones*	A1_F1_P1	25/01/2013 08:31	6	8	*Como se menciona **el problema no es rutinario**, porque el estudiante no ha tratado de resolver antes algo relativo a este.* ***Respecto a lo tradicional creo que tiene algo de ello,*** *pero solamente en la consecución del enunciado.* ***Lo consideraría abierto*** *en el sentido de que no solamente puedo realizarlo de una manera, en el caso de forma gráfica o de forma algebraica.*	Los segmentos seleccionados nos permiten identificar un conocimiento de Omar sobre las características del problema de las cuerdas como un instrumento para la enseñanza. El profesor analiza la potencialidad del problema para usar distintos registros de representación del contenido y como este propicia en el estudiante un trabajo dinámico con el problema, lo cual señala la estrecha relación entre el KMT y el KFLM.
			A1_F1_ P3	25/01/2013 08:55	7	7	*Cuando al estudiante se le proponen situaciones de esta manera, lo llevan a crear, a proponer, a consultar, a comunicar, a predecir, y a construir conocimiento matemático.*	
			A1_F1_P1	28/01/2013 07:48	20	20	*El problema no muestra un único camino de solución; deja a la imaginación, y pericia del estudiante el desarrollo; al inicio es la impresión de que la actividad le faltan datos; lleva al estudiante a que sea creativo, busque nuevas alternativas, y relacione conceptos previos con la nueva situación.*	
			A1_F1_P3	29/01/2013 07:59	19	20	[…] *es muy interesante como recurso didáctico la actividad de las cuerdas* […] […] *el estudiante construye su aprendizaje a partir de esta, busca que el estudiante indague, sea creativo, produzca, innove;* […] *la pregunta está encaminada hacia ese motivo, porque no da muchas pautas.*	
	Recursos materiales o virtuales	***Indicio*** ***Recursos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas***	A1_D2		21	21	*Cuando el estudiante no tiene un conocimiento pleno de lo que es sucesiones, se puede guiar a que a partir de la graficación de datos se obtienen gráficas que me dan con facilidad el algoritmo algebraico; en este momento si se posee un **software graficador se debe utilizar como artefacto de ayuda.***	Consideramos estos fragmentos un *indicio* del conocimiento que puede tener Omar sobre herramientas tecnológicas diseñadas específicamente para la enseñanza de las matemáticas que permiten realizar representaciones esquemáticas de contenidos matemáticos.
			A1_F1_P2	25/01/2013 08:41	6	6	*Una técnica utilizada fue la de utilizar la gráfica como medio para realizar el trabajo; manipulándola, trazando rectas, segmentos, usando artefactos comunes y **software.***	

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	**Expectativas de aprendizaje de un contenido en un nivel específico**	A1_D1		20	20	[…] *la primera técnica es probable aplicarla en los grados de la secundaria 9° grado, cuando se enseñe los polígonos con sus diagonales, o cuando se mencione en geometría las cuerdas.*	Omar sitúa el problema, haciendo alusión a los temas que considera implícitos en las estrategias de solución que ha propuesto anteriormente, de manera que busca ubicarlos pensando en las necesidades de conocimiento previo que considera que demanda la solución.
		A1_D2		5	5	*La guía sería propuesta para los estudiantes del bachillerato, 9° grado.*	
		A1_D1		22	22	[…] *la segunda técnica se puede aplicar a estudiantes de finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean límites de sucesiones. Con este concepto aprendido se facilita más hallar el total de cuerdas de determinados puntos.*	Omar vuelve a ubicar el problema estableciendo un nivel distinto de complejidad en torno al conocimiento necesario de límites de sucesiones, esta asignación está basada sólo en la ubicación temporal de este tema dentro del currículo.
	Nivel de desarrollo conceptual	A1_D1		21	21	[Refiriéndose a la primera técnica de solución que hemos llamado método gráfico, Omar comenta:] *En este grado* [9°] *se enseña un poco de sucesiones, al menos la introducción, se entabla alguna relación entre la parte algorítmica con la gráfica, necesaria para una mejor interpretación de la situación.*	Conoce el tratamiento que se da de las sucesiones en el 9° grado, en la que se establecen relaciones entre la parte algorítmica y la gráfica, que considera necesarias para la solución, lo cual podemos asociar con el conocimiento que tiene sobre el nivel de desarrollo conceptual que tendrían los estudiantes en este grado
		A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	9	9	*Para poder resolver la actividad se necesita que el estudiante tenga conocimientos previos bien establecidos sobre cuerdas, sucesiones, y en alguna ocasión sobre límites, para la segunda técnica.*	En este caso el profesor establece un estándar de conocimientos necesarios para resolver el problema, de donde inferimos que la consideración de que el nivel en el cual se aplique el problema estará condicionado por el bagaje de conocimientos previos de los estudiantes y los que potencialmente puedan explorarse con el problema.
		A1_F1_P2	28/01/2013 08:00	21	21	*Me parece que también se puede aplicar* [el problema de las cuerdas] *para aquellos estudiantes que tienen conocimientos de cálculo en sucesiones; porque a partir de la sucesión de la suma de números enteros sucesivos que corresponde a n*(n+1)/2, podemos obtener el algoritmo que sería n*(n+1)/2 - n = n*(n-1)/2*	En este fragmento el profesor, parece situar la aplicación del problema a un nivel en el que el desarrollo conceptual de los estudiantes permita realizar un proceso de solución como el de la suma de enteros consecutivos

Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas						
Sobre la matemática	A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	10	10	*El estudiante crea conocimiento, al entablar las diferentes relaciones mentales para comprender los significados.*	Omar parece tener la creencia de que la matemática está formada por redes y en la medida en que esas redes se formen podrán comprenderse significados.
Sobre el aprendizaje de las matemáticas	A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	10	10	*El estudiante crea conocimiento, al entablar las diferentes relaciones mentales para comprender los significados.*	El profesor parece considerar el aprendizaje como un establecimiento de redes que ayuden a comprender los significados de los contenidos matemáticos
Sobre el papel del profesor	A1_D2		14	14	*Espero que la intervención del profesor sea mínima* […]	En este caso, consideramos que estos fragmentos nos hablan sobre las creencias del profesor sobre su papel como gestor de la participación durante la resolución del problema. Además el profesor habla de su papel como autoridad que valida e institucionaliza el conocimiento. NOTA: Aunque hay otros fragmentos donde se refiere a su papel como gestor, consideramos que estos no reflejan ninguna especificidad con respecto a la enseñanza de las matemáticas, y por eso no se incluyen aquí
			23	23	*El último momento, la intervención del profesor es fundamental porque junto a los estudiantes, y sus respectivas proposiciones validan e institucionalizan el conocimiento*	

Sobre el papel del estudiante	A1_D1		2	2	[…] *que el estudiante produzca conocimiento matemático.*	El diseño de la actividad y el propio discurso del profesor reflejan un énfasis en el papel del estudiante como protagonista en la construcción de un procedimiento de solución del problema. El profesor habla varias veces sobre la idea de que el estudiante obtenga la menor ayuda posible del profesor y trabaje de manera individual y en grupo con el problema De estos fragmentos y lo recopilado con respecto a su papel como gestor de la actividad, parece que Omar se inclina por el uso de una aproximación constructivista que permita al estudiante ser el actor principal de la construcción de conocimiento
	A1_D2		2	2	[…] *desarrollar actividades didácticas, que propicien el avance en el conocimiento, y de esta manera el estudiante obtenga un aprendizaje significativo.*	
			4	4	*La perspectiva de crear situaciones donde el estudiante construya conocimiento matemático, pero enmarcado en un ambiente donde él sea el propiciador de ese conocimiento, y el profesor sea solo un facilitador, es el ambiente de relación por el cual se da esta situación problema*	
			14	14	[…] *con el objeto de que sean ellos los estudiantes los que construyan conocimiento.*	
	A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	7	7	*Cuando al estudiante se le proponen situaciones de esta manera, lo llevan a crear, a proponer, a consultar, a comunicar, a predecir, y a construir conocimiento matemático.*	
	A1_F1_P3	25/01/2013 08:55	11	12	*Propone*, [se refiere al estudiante] *cuando deben decidir por el algoritmo que sigue o cumple la actividad. Debe consultar para ampliar el conocimiento del concepto. Predice, porque al darle una cantidad de puntos debe obtener el número de cuerdas que se pueden trazar con ellos.* *Recogiendo todas las acciones realizadas por el estudiante en la solución de la problemática construye conocimiento matemático.*	

Sobre el profesor como participante del curso de formación continua	A1_D1	18	18	*Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar el límite* $lim_{n\to x}\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)$. *Donde (x) es cualquier entero positivo.*	En fragmentos como este en los que el profesor realiza procedimientos matemáticos complejos innecesarios o desvinculados de la resolución del problema, puede intuirse que Omar podría tener la creencia de que como participante de un curso de maestría con profesores, sus resoluciones y argumentaciones deben mostrar un conocimiento profundo de la matemática y de la educación matemática, ya sea porque crea que esto puede ser valorado por sus compañeros o sus tutores o porque considere que es aquí el lugar idóneo para exponer argumentaciones como estas, que no serían propias para el aula de clases. Es importante señalar que se refleja también en el trabajo de Omar un intento constante por utilizar los conocimientos que adquiere de las lecturas y cursos que va realizando a lo largo de la maestría. Busca justificar sus procedimientos a través de sus conocimientos sobre la matemática educativa.
		3	3	*"El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje" Brousseau (1986).*	
Otras consideraciones					
Objetivos	A1_D2	3	3	*El objetivo primordial en esta actividad es: Crear en el estudiante la necesidad de avidez de conocimiento, usando conceptos previos ajustados a la nueva situación problemática.*	Omar propone un objetivo para la actividad que no se refiere a la construcción de ningún conocimiento matemático, sino más bien a fomentar una actitud del estudiante hacia la resolución de problemas
		10	10	*Como el objetivo es crear en el estudiante esa necesidad de conocimiento*	

Oportunidad de explorar los tipos de relaciones entre contenidos	A1_D1	14	14	*La otra manera sería utilizando la sucesión que se puede hallar,* ***teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase****, el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.*	La exploración de este segmento podría darnos información sobre el uso que hace en clase de la fórmula del número de diagonales, permitiéndonos profundizar en su KMT, aunque también podríamos obtener información sobre el KFLM o KMLS.
		16	16	*Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.*	Este segmento pudiese servir para profundizar sobre las relaciones entre: diagonales, cuerdas y polígonos, que conoce el profesor y para analizar el tipo de conexión que establece Omar entre ellos, lo cual hubiese podido dar información sobre el KoT, KSM o KMLS.

Tabla IV.7 Análisis de la Actividad 1 organizada por subdominio y categoría de conocimiento

IV.1.4 Informe de resultados del conocimiento especializado puesto de manifiesto en la Actividad 1

Como mencionamos en la última sección del capítulo anterior, los resultados se presentarán de forma esquemática y de forma narrada. Por tratarse del análisis que estamos utilizando como muestra del proceso de obtención de los resultados, detallaremos lo más posible la elaboración de las descripciones y las figuras que ilustran este análisis.

Basados en la información de la Tabla IV.7, hemos elaborado el siguiente informe de resultados, en el cual hacemos una narración de los conocimientos identificados en esta primera actividad, así como de las categorías que surgen del análisis, ilustrando los resultados con algunos de los fragmentos más representativos de la categoría.

IV.1.4.1 Contextualización del conocimiento evidenciado por Omar en la Actividad 1

Comenzamos este informe con una descripción de aspectos contextuales que puedan ayudar a entender las participaciones de Omar y que no tienen la entidad suficiente para reportarse como parte de su conocimiento especializado, como los objetivos que explicita en sus actividades o las creencias que hemos podido identificar en los fragmentos.

Para Omar, el problema de las cuerdas tiene un objetivo general de producir ciertas actitudes hacia la matemática, más que ser una actividad en la que se construya un determinado contenido matemático; podríamos decir que parece identificarlo como un ejercicio de trabajo con situaciones problemáticas abiertas:

> A1_D2 [3]: El objetivo primordial en esta actividad es: Crear en el estudiante la necesidad de avidez de conocimiento, usando conceptos previos ajustados a la nueva situación problemática.

Además hemos podido identificar en las participaciones de Omar algunas creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje así como sobre algunos de los actores que intervienen en este proceso de enseñanza-aprendizaje.

Sobre las *creencias acerca de la matemática* en general, podemos decir que el profesor habla sobre una matemática formada por redes de conocimientos y en la medida en que los estudiantes puedan ir formando estas redes podrán comprenderse los significados de los conceptos matemáticos. Esto puede observarse tanto en el fragmento siguiente como en la construcción misma de la solución que hace Omar y la estructura de la guía pedagógica que propone.

> A1_F1_P3 [10]: El estudiante crea conocimiento, al entablar las diferentes relaciones mentales para comprender los significados.

Con respecto a las *creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas* mostrado en el desarrollo de esta actividad, podemos hablar de que el profesor considera que el aprendizaje de las matemáticas depende del establecimiento de redes que ayudan a comprender los significados de los contenidos matemáticos, lo que se hará aún más evidente en el desarrollo de la Actividad 2. Esto podría llevarlo a buscar relaciones entre los contenidos que los estudiantes dominan previamente y lo que la actividad puede ayudar a conectar.

> A1_F1_P3 [10]: El estudiante *crea conocimiento al entablar las diferentes relaciones mentales para comprender los significados*[6].

La actividad muestra también, algunas cuestiones acerca de las *creencias de Omar sobre el papel del profesor* al momento de aplicar este tipo de problemas en el aula. En este caso Omar considera que el profesor debe fungir como gestor de la participación durante la resolución del problema interviniendo lo menos posible en la resolución del mismo, además de ser la autoridad que valida e institucionaliza el conocimiento generado por los estudiantes.

> A1_D2 [14]: Espero que la intervención del profesor sea mínima

> A1_D2 [23]: [En] el último momento, *la intervención del profesor es fundamental porque junto a los estudiantes, y sus respectivas proposiciones, validan e institucionalizan el conocimiento.*

Además, el diseño de la actividad y el propio discurso del profesor reflejan algunas de sus *creencias sobre el papel del estudiante* como protagonista en la construcción de un procedimiento de solución del problema. Se habla varias veces sobre la idea de que el estudiante obtenga la menor ayuda posible del profesor y trabaje de manera individual y en grupo para dar solución al problema.

> A1_D1 [2]: La mayoría de trabajos realizados en el campo de la matemática, apuntan a encontrar estrategias para la enseñanza de diferentes conceptos dentro del aula, con el objeto de *que el estudiante produzca conocimiento matemático*.

> A1_D2 [4]: La perspectiva de crear situaciones donde *el estudiante construya conocimiento matemático*, pero enmarcado en un ambiente *donde él sea el propiciador de ese conocimiento, y el profesor sea solo un facilitador*, es el ambiente de relación por el cual se da esta situación problema

> A1_D2 [14]: Espero que la intervención del profesor sea mínima, con el objeto de *que sean ellos los estudiantes los que construyan conocimiento*.

De estos fragmentos y lo recopilado con respecto a su papel como gestor de la actividad, pareciera que Omar busca acercarse a una aproximación constructivista que permita al estudiante ser el actor principal de la construcción de conocimiento.

Queremos resaltar también lo que hemos identificados como *creencias sobre el papel de Omar como participante del curso de formación continua*. Dentro de la resolución del problema el profesor emplea procedimientos matemáticos complejos que resultan innecesarios, además de apoyarse en fragmentos de literatura de investigación en didáctica de la matemática que parecen desvinculados de su resolución del problema.

> A1_D1 [18]: […] *puedo hallar el límite* $lim_{n\to x}\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)$. Donde (x) es cualquier entero positivo.

> A1_D1 [3]: “El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje” Brousseau (1986).

---

[6] Enfatizamos con cursiva algunos segmentos de las unidades de información que usamos para ejemplificar el análisis, de manera que se distinga lo que consideramos más relevante en el fragmento para utilizarlo como evidencia.

Omar parece tener la concepción de que, como participante de un curso de maestría con profesores, sus resoluciones y argumentaciones deben mostrar un conocimiento profundo de la matemática y de la didáctica de la matemática. Esto podría ser porque crea que esto puede ser valorado por sus compañeros o sus tutores o porque considere que es aquí el lugar idóneo para exponer argumentaciones como estas, que no serían propias para el aula de clases, a pesar de no ser necesarias para la resolución del problema o no relacionarse directamente con el mismo.

Retomaremos estas consideraciones sobre las concepciones de Omar a lo largo del análisis, con el afán de mostrar cómo parecen influir en las participaciones dentro del curso y por consiguiente en el conocimiento que puede identificarse.

Por otro lado, de manera general podemos decir que la participación de Omar en esta primera actividad se puede resumir en la propuesta de dos posibles formas de solución: una, que el profesor denomina *método gráfico*, y otra, que hemos llamado *método algebraico.* Apoyado en estas estrategias matemáticas, Omar diseña una guía pedagógica de aplicación del problema en el aula, la cual comparte con sus compañeros en los foros de discusión. Una vez que comienza a analizar las distintas estrategias de sus colegas, reflexiona sobre otra posible forma de abordar la resolución, *el método de sumatoria de enteros consecutivos*. Al presentar estos procedimientos o formas de resolución, el profesor relaciona los contenidos para poner en funcionamiento esos procedimientos y evalúa cuándo es posible utilizarlos.

Una vez que tenemos un panorama general del actuar de Omar, realizamos una interpretación de los conocimientos identificados en sus participaciones, es decir, el conocimiento que pone de manifiesto para resolver y analizar el problema de las cuerdas, además de transformarlo en un recurso para el aula.

Hemos organizado estos conocimientos a través de los subdominios y categorías del MTSK, y giran en torno a las tres estrategias utilizadas para la resolución del problema.

IV.1.4.2 Sobre el KoT en el problema de las cuerdas

IV.1.4.2.1 Conocimiento de procedimientos matemáticos asociados a un determinado contenido

Al momento de argumentar la utilidad del ***método gráfico***[7]***,*** Omar expone conocimientos sobre un determinado procedimiento matemático que pone en evidencia que conoce una forma de resolver el problema y más aún, justifica y evalúa el procedimiento, estableciendo algunas de las limitaciones que tiene el método a la vez que utiliza los conocimientos que tiene sobre las propiedades de los contenidos.

Un elemento característico de este profesor es su esfuerzo por dar sustento a sus procedimientos, de manera que pueda observarse en el desarrollo de su trabajo ***cómo funcionan*** y ***cuándo es posible utilizarlos***. Esto puede verse reflejado en el primer procedimiento de solución que propone, en el que se propone el ***trazado y conteo de las cuerdas tomando casos particulares del problema*** para buscar un patrón generalizable, a través de la manipulación de los gráficos:

> A1_D1 [11]: Una de las técnicas más comunes es *trazar manualmente las cuerdas en un círculo* […]

---

[7] En negrita y cursiva se denotan las evidencias de conocimiento que se van encontrando en las participaciones de Omar.

> A1_F1_P2 [6]: Utilizar la gráfica como medio para realizar el trabajo; *manipulándola, trazando rectas, segmentos, usando artefactos comunes y software*.

El profesor identifica una limitación de su método, al pretender generalizarlo para una cantidad grande de puntos, puesto que la visualización y conteo se tornaría complejo y quizá confuso, por lo tanto ***este método solo sirve cuando el número de cuerdas sea pequeño***:

> A1_D1 [11]: […] pero *esto lo podemos realizar cuando el número de puntos es pequeño.* Me atrevo a decir cuando el número es menor de 20 puntos.

Por otro lado Omar conoce un segundo procedimiento que hemos llamado ***método algebraico***, que parece no estar desvinculada de la primera. Se apoya en ***la observación de las posibles relaciones entre las cuerdas del círculo y las diagonales, los lados y los vértices de los polígonos inscritos***.

> A1_D1 [16]: *La otra manera sería utilizando* la sucesión que se puede hallar, teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase, *el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.*

Una vez que desarrolla la fórmula para obtener el número de diagonales que es posible trazar en un polígono y establece una relación entre las cuerdas del círculo y las diagonales y lados de los polígonos inscritos, parece notar, además, que esta no se relaciona con la distancia entre los vértices del polígono, por lo que puede afirmar entonces que ***este procedimiento funciona tanto para polígonos regulares e irregulares***.

> A1_D1 [14]: La otra manera sería utilizando […] el número de diagonales que se pueden encontrar en un *polígono regular* inscrito en una circunferencia.
>
> A1_D1 [15]: Esta sucesión está dada de la siguiente forma: $D = \frac{n}{2}(n-3)$ donde (n) me representa el número de lados del polígono inscrito
>
> A1_D1 [16]: *Los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no*; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.

En la parte final de A1_D1 Omar realiza un proceso de obtención de límite de una sucesión que llama especialmente la atención, puesto que intenta validar la fórmula haciendo uso de la noción de límite, aunque este no es un procedimiento necesario para la resolución y se encuentra desvinculado del propio problema, puesto que no se toma en cuenta por ejemplo que, en caso de que el límite tuviera sentido, habría que considerar que x sea mayor que 1, puesto que para trazar una cuerda se necesita un mínimo de 2 puntos:

> A1_D1 [18]: Sabiendo que esta es la sucesión puedo hallar el límite $\lim_{n\to x}\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)$. Donde (x) es cualquier entero positivo.

Ahora bien, dado que el MTSK no pretende evaluar si el conocimiento del profesor es correcto o incorrecto, sino que intenta mostrar una descripción profunda de este, consideramos que este episodio podría proporcionar al investigador un ***indicio***[8] ***del conocimiento del profesor sobre procesos de obtención de límites***, lo cual formaría parte del KoT, además de darnos también una

---

[8] En color gris, negrita y cursiva denotaremos los ***indicios de conocimiento*** y sólo con color gris y cursivas las *oportunidades* que se identifiquen en el análisis. Esto se realiza para distinguirlos de las **evidencias de conocimientos** que se encontraron en el análisis.

oportunidad para preguntarnos por *el conocimiento que tiene el profesor sobre las propiedades y los fundamentos de los límites y las sucesiones* que parecen subyacer a este procedimiento.

Derivado de las reflexiones surgidas en el foro, Omar muestra su conocimiento sobre una tercera estrategia de solución, que hemos llamado ***método de sumatoria de enteros consecutivos.*** Utiliza la propuesta de su compañera y la reelabora y reinterpreta para resolver el problema, ***trabajando algebraicamente las sumatorias de enteros sucesivos***.

> A1_F1_P2 [9]: Podríamos utilizar también las sucesiones aritméticas con su sumatoria
>
> A1_F1_P2 [10]: Una sumatoria de la sucesión […]: $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$
>
> A1_F1_P2 [11]: Sabiendo que a_{n}= a_{1}+d(n-1), donde la diferencia d=1,y a_{1}=1, por ser el primer valor a sumar y remplazando en la ecuación nos quedaría $S_n = \frac{n(a_1+a_1+n-1)}{2} = \frac{n(2+n-1)}{2} = \frac{n(1+n)}{2}$
>
> A1_F1_P2 [12]: Pero como el último punto no se le puede marcar más cuerdas entonces $\frac{n(1+n)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$

Aunque no nos fue posible profundizar en esta idea, observamos en este segmento una nueva *oportunidad* para reflexionar *sobre el conocimiento que tiene Omar sobre las sucesiones* además de *las sumatorias* como conceptos matemáticos que utiliza para el desarrollo de esta solución.

Como hemos mencionado anteriormente, en estos fragmentos podemos observar la influencia de las concepciones de Omar sobre los conocimientos que despliega al resolver la actividad. El profesor realiza procedimientos matemáticos complejos, a veces innecesarios o desvinculados de la resolución del problema, que a primera vista podrían considerarse un intento por mostrar un conocimiento amplio de la matemática y de la matemática educativa, y que podrían reflejar sus creencias sobre su papel como estudiante de un curso de maestría y sobre las valoraciones que puedan hacer sus compañeros y tutores de sus procesos de solución y sobre la importancia de mostrar un dominio matemático profundo de contenidos más complejos dando a la solución cierto grado de rigor matemático, puesto que usa el concepto de límite y de sucesión como una forma de generalización de la fórmula, tratando de hacerla útil para cualquier cantidad de puntos y las sucesiones.

IV.1.4.2.2 Conocimiento de propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático

En la primera parte de su actividad, el profesor manifiesta su conocimiento sobre las ***propiedades*** de algunos de los objetos matemáticos que usa para la resolución del problema. Sobre la ***circunferencia***, hace alusión a los puntos que la conforman y define el concepto de ***cuerda***, lo cual le proporciona un conocimiento base para proponer una estrategia gráfica para la solución del problema (el trazado y conteo manual de cuerdas).

> A1_D1 [7]: Recordemos que *cuerda es un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta*; como es conocido *una circunferencia está conformado por infinitos puntos*, y a partir de estos se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo.

También, observamos aquí ***indicios de conocimiento sobre los conjuntos infinitos***, puesto que el profesor parece reconocer una propiedad de estos para establecer una relación entre los puntos de la circunferencia y las cuerdas que pueden trazarse:

> A1_D1 [8]: La cuerda parte desde un punto, y llega a otro, entonces si hay ∞ puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por ∞

Este indicio nos proporciona una información mínima que deja entrever que Omar conoce propiedades de este tipo de conjuntos, sin embargo, al no contar con elementos que nos permitan profundizar al respecto, no podemos hablar mucho de lo que sabe sobre estos conjuntos. Estos fragmentos y reflexiones nos llevan también a identificar una *oportunidad para indagar el conocimiento que tiene el profesor sobre el concepto de infinito*.

Por otro lado, en la búsqueda de un método que pueda superar las limitaciones del primero, propone el método algebraico, donde explicita otros conocimientos sobre las propiedades de los ***polígonos***.

> A1_D1 [16]: […] los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.

> A1_D1 [17]: El número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia. […] $D = \frac{n}{2}(n-3)$ donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito. […] el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera: $cuerdas = D + n$, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono; $cuerdas = \frac{n}{2}(n-3) + n = \frac{n}{2}(n-1)$

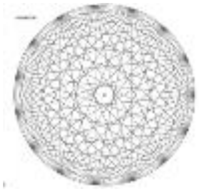
Consideramos primero que Omar conoce ciertas componentes de los polígonos, ***lados, diagonales*** y ***vértices*** y reconoce que existen ***polígonos inscritos, regulares,*** e ***irregulares***. Además los conocimientos que percibimos implicados en el uso que hace el profesor de esta fórmula van más allá de la memorización de un modelo matemático, puesto que establece una ***relación entre las cuerdas del círculo y las diagonales y lados de los polígonos inscritos dentro de una circunferencia***, lo que requiere un conocimiento acerca de la ***relación existente entre el número de diagonales y vértices de un polígono.*** Identificamos, un conocimiento tácito del profesor sobre ***los polígonos y sus diferencias con respecto a la distancia que hay entre sus vértices***, al decir que la fórmula es igual para polígonos regulares o irregulares, además de que nuevamente establece una relación tácita entre los puntos sobre la circunferencia y los vértices de los polígonos, es decir, utiliza de nuevo la idea de polígonos inscritos, aunque no es claro si Omar sabe que no cualquier polígono puede inscribirse en una circunferencia.

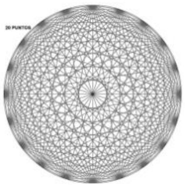
Como ya se había mencionado antes, el profesor utiliza varias veces la palabra sucesión pareciendo referirse a la fórmula que muestra las cuerdas que pueden dibujarse con respecto a un determinado número de puntos, podría estar aludiendo a la fórmula de las diagonales como término general de una sucesión, por lo que reunimos los fragmentos en los que se hablara de este término intentando reconocer lo que sabe Omar sobre este tema, sin embargo, no observamos suficientes evidencias para analizar lo que sabe sobre las sucesiones, por lo que seguimos considerando estos fragmentos como *oportunidad de analizar el conocimiento sobre sucesiones*.

IV.1.4.2.3 Conocimiento de registros de representación asociados a un contenido matemático

Un aspecto importante sobre los procedimientos de solución que utiliza el profesor, es que buscan hacer uso de los contenidos de forma distinta. En el primer método de solución gráfico el profesor utiliza su conocimiento sobre ***registros esquemáticos***[9] ***de representación de las cuerdas en los círculos*** para trazar y comparar casos específicos.

A1_D1 [13]:





Por otra parte, a pesar de que Omar utiliza los polígonos y sus propiedades como base para su segundo método de solución (algebraico), no parece estar utilizando una resolución geométrica, dado que abandona las figuras y se centra en el trabajo algebraico con la fórmula. Propone un trabajo basado en la relación de los círculos y sus cuerdas con los polígonos inscritos totalmente apoyado en su conocimiento sobre el ***registro algebraico de representación de las relaciones entre las cuerdas del círculo y las diagonales del polígono inscrito***.

A1_D1 [17]: [...] $D = \frac{n}{2}(n-3)$ [...] $cuerdas = D + n$ [...] $cuerdas = \frac{n}{2}(n-3) + n = \frac{n}{2}(n-1)$

A1_D2 [21]: Cuando el estudiante no tiene un conocimiento pleno de lo que es sucesiones, se puede guiar a que a partir de la graficación de datos se obtienen gráficas que me dan con facilidad *el algoritmo algebraico*

Dentro del desarrollo de la solución con sumatoria de enteros consecutivos Omar vuelve a utilizar su conocimiento sobre el ***registro algebraico de representación de la suma de n primeros números naturales***.

A1_F1_P2 [10]: Una sumatoria de la sucesión [...] $\boldsymbol{S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}}$

A1_F1_P2 [11]: Sabiendo que **a_{n}= a_{1}+d(n-1)**, donde la diferencia d=1,y a_{1}=1, por ser el primer valor a sumar y remplazando en la ecuación nos quedaría $\boldsymbol{S_n = \frac{n(a_1+a_1+n-1)}{2} = \frac{n(2+n-1)}{2} = \frac{n(1+n)}{2}}$

A1_F1_P2 [12]: Pero como el último punto no se le puede marcar más cuerdas entonces $\boldsymbol{\frac{n(1+n)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}}$

Aunque no nos fue posible profundizar más en el uso de otros registros, sí identificamos una *oportunidad* de explorar el conocimiento que tiene de un *registro verbal de representación de las propiedades de la circunferencia* al referirse al interior de la circunferencia como el área del círculo.

A1_D1 [7] se pueden trazar también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo

---

[9] Con respecto al nombre que se le asigna a este tipo de registros, dentro de la literatura se hace uso de términos como: pictográfico, figural o esquemático. El registro gráfico se usa para dibujos realizados en planos cartesianos. (Hitt, 1998)

Se requiere más información para saber si este uso (inadecuado) del lenguaje, responde a un intento por usar un lenguaje más natural para los estudiantes, o si es que no contempla diferencias entre hablar del interior del círculo y el área del círculo, es decir, si se trata de una imprecisión terminológica que puede estar asociada a una dificultad conceptual del profesor.

IV.1.4.2.4 Conocimiento de la fenomenología asociada a un contenido matemático

Otro aspecto a resaltar en el trabajo de Omar es el uso que hace de literatura de investigación referente al desarrollo histórico que da origen al ***cálculo*** y al ***análisis matemático***, lo cual nos permite observar que el profesor conoce ***aspectos fenomenológicos*** de estos contenidos.

> A1_D2 [13]: Cantoral (2001) nos dice que debido a la necesidad de predecir, estimar, y hacer aproximaciones sobre cambios o variaciones de fenómenos físicos, y de la mecánica de los cuerpos celestes, también el fluido de líquidos (Newton), la transmisión de calor de (Fourier), la velocidad con que se mueve un cuerpo (Fermat, Descartes, Laplace, y otros), generaron la consecución de modelos matemáticos, para describir, y explicar dichos fenómenos, partiendo de conceptos de cálculo, y análisis matemático.

Sin embargo, este fragmento parece estar descontextualizado del desarrollo de la guía pedagógica que va construyendo Omar en A1_D2. Como en otros fragmentos de esta actividad, el profesor hace gala de su conocimiento sobre aspectos de la educación matemática, en un intento de generar argumentaciones sustentadas en sus conocimientos sobre la disciplina, lo cual reafirma nuestra idea de que estas muestras de conocimientos están permeadas por sus concepciones sobre lo que se espera de él en el curso y de cómo y dónde puede mostrar y aplicar los conocimientos que ha adquirido sobre investigaciones en didáctica de la matemática.

En resumen, podemos decir que la estructura del subdominio del conocimiento de los temas que proporciona el MTSK nos ha permitido profundizar en el conocimiento matemático de este profesor de manera que podamos comprender no sólo qué conoce Omar sino cómo lo conoce, lo usa y lo relaciona para elaborar la solución al problema.

El Tabla IV.8 muestra un resumen de las evidencias de conocimientos de los temas que encontramos en el trabajo de Omar, clasificados por subdominio y categoría, en el cual el lector puede observar el análisis profundo que el KoT proporciona sobre las participaciones de Omar.

Por otra parte, inspirados en esquemas como los propuestos por Ma (1999) para desempaquetar el conocimiento, en la Figura IV.3 se muestra cómo se relacionan estos conocimientos, de manera que pueda reflejarse el carácter integrado del conocimiento además de señalar los documentos y unidades de información en los cuales observamos las relaciones o los conocimientos que se presentan.[10]

---

[10] La construcción de estos esquemas por subdominio solo se mostrarán para este primer análisis, con la finalidad de dar claridad sobre el desarrollo de este instrumento. En los siguientes mostraremos sólo la construcción final del MTSK.

	Categorías asociadas al subdominio	**Lo Omar conoce sobre:**		**Forma que representa el conocimiento de Omar en la categoría correspondiente**
Conocimiento de los temas KoT	***Procedimientos***	*Estrategia gráfica*	*Cómo se hace:* Trazado de casos particulares y conteo	▭
			Cuándo se puede hacer: Cuando el número es pequeño, < 20	
		Estrategia algebraica	*Cómo se hace:* Tomar fórmula para obtener las diagonales de un polígono, y sumar los lados, relacionando diagonales y lados de un polígono inscrito con las cuerdas del círculo.	
			Cuándo se puede hacer: Sirve para cualquier polígono, regular o irregular.	
		Sumatoria de enteros consecutivos	*Cómo se hace:* Se utiliza la sumatoria de los números naturales menores que n.	
		Indicios proceso de obtención de límite	En el límite: $\lim_{n\to x}\left(\frac{n}{2}(n-1)\right)$ se sustituye el valor de n por el de x que representa cualquier entero.	⬚
	Propiedades y sus fundamentos	*Circunferencia*	Está conformada por infinitos puntos	⬬
			Definición de cuerda: Segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta	
		Polígonos	El número de diagonales y vértices del polígono está relacionada por: $\boldsymbol{D=\frac{v}{2}(v-3)}$	
			Existen dos tipos de polígonos, regulares e irregulares. Esta clasificación depende de la medida de sus lados.	
			Algunos polígonos pueden inscribirse dentro de circunferencias.	
		Indicio Conjuntos infinitos	Si tengo infinitos puntos puedo trazar infinitas líneas que los unan	⬭
		Oportunidad Sumatoria, sucesión infinito y límite	Sucesión, sumatoria, infinito y límite	◌

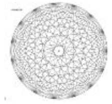
Conocimiento de los temas KoT	***Registros***	*Esquemático*	Representación de cuerdas en el círculo: 	🟨
		Algebraico	Representación de las relaciones entre las cuerdas del círculo y las diagonales del polígono inscrito $D = \frac{n}{2}(n-3), \infty,$	
			Representación de la suma de n primeros números naturales. $\boldsymbol{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$	
		Oportunidad de explorar registro verbal	Representación de las propiedades de la circunferencia: Uso intencionado de lenguaje coloquial	⬚
	Fenomenología	*Fenomenología del cálculo y el análisis matemático*	Surgen del estudio de los cambios o variaciones de fenómenos físicos, y de la mecánica de los cuerpos celestes, el fluido de líquidos, la transmisión de calor y la velocidad con que se mueve un cuerpo.	🗎

Tabla IV.8 Resumen de KoT identificados en la Actividad 1

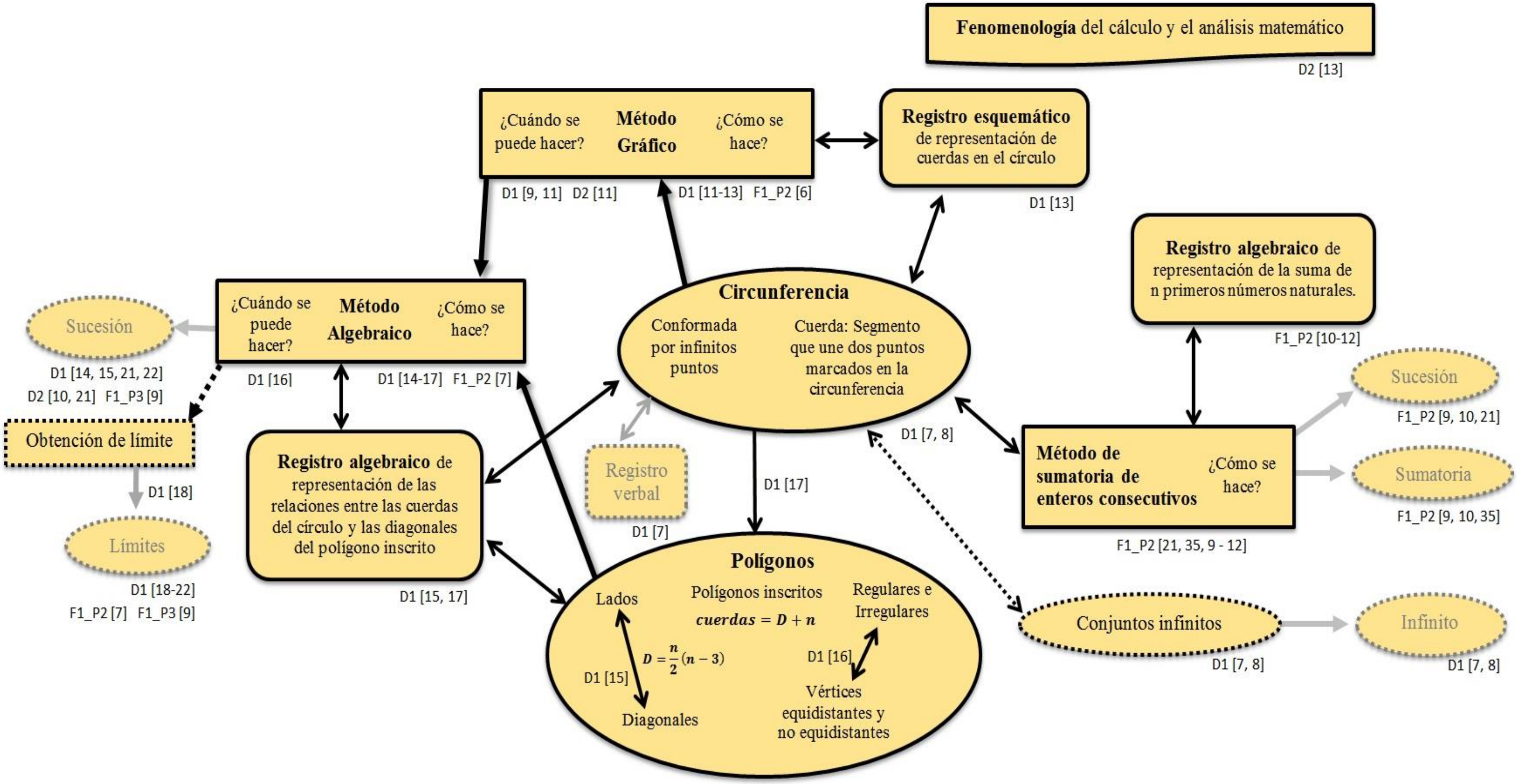


Figura IV.3 KoT de Omar identificado en la Actividad 1, teniendo en cuenta las evidencias, indicios y oportunidades de investigación que resultan del análisis

Codificación de relaciones entre conocimientos		**Figura asociada**
Documento y unidad de información	*Señalamos las unidades de información asociadas al conocimiento identificado poniendo el documento al que pertenecen y el párrafo en el que se encuentran*	D# [#]
Evidencias	*Se usa la forma y el color correspondiente al tipo de conocimiento que se pone de manifiesto.*	▭
Indicios	*Se usa la forma y el color correspondiente al tipo de conocimiento que podría explorarse, pero se puntea el contorno para mostrar que no se tiene suficiente información al respecto para considerarlo evidencia.*	⬚
Oportunidades	*Se usa la forma y el color correspondiente al tipo de conocimiento al que podría asociarse, pero se puntea el contorno de un color gris para mostrar que este no ha podido explorarse durante la investigación, pero podría usarse en futuras investigaciones.*	⬚
Relaciones entre conocimientos	*Se refieren a relaciones entre dos conocimientos.*	⟷
	Se refieren a las relaciones entre conocimientos en el que uno de ellos es identificado como indicio.	⇠⇢
	Se refieren a las relaciones entre conocimientos en el que uno de ellos es identificado como oportunidad.	⟷
	Se utilizan para señalar conocimientos que surgen directamente de otros conocimientos.	⟶
	Se utilizan para señalar conocimientos que surgen directamente de otros conocimientos, sin embargo, alguno de los conocimientos que se relacionan es identificado como oportunidad.	⟶
	Se utilizan para señalar conocimientos que surgen directamente de otros conocimientos, sin embargo, alguno de estos está identificado como indicio.	⇢

Tabla IV.9 Codificación de relaciones para gráficos de MTSK por actividad

IV.1.4.3 Sobre el KSM en el problema de las cuerdas

Con respecto a este subdominio, no hemos obtenido evidencias o indicios que pudieran dar lugar a alguna oportunidad de indagar sobre el conocimiento de Omar con respecto a conexiones de complejización o simplificación de los contenidos matemáticos, ni tampoco identificamos conexiones transversales o auxiliares.

Consideramos que esta falta de evidencias puede deberse a que este subdominio requiere de información demasiado específica, que permita identificar conexiones profundas, más allá de las conexiones temporales o de secuenciación de los contenidos en el currículum que pudieran ser más evidentes en el discurso de Omar.

IV.1.4.4 Sobre el KPM en el problema de las cuerdas

La exploración de casos simples parece ser lo que permite al profesor observar que las cuerdas trazadas en el círculo pueden relacionarse con polígonos inscritos en la circunferencia y sus correspondientes diagonales. Esto nos muestra que Omar tiene un conocimiento de que la descomposición en casos particulares le permite hacer un análisis puntual del problema y así generar ideas sobre la generalización del proceso, lo cual es una forma de proceder en matemáticas,

El KPM identificado en los siguientes fragmentos se refiere a la forma de proceder matemáticamente que utiliza Omar como resolutor del problema, en la cual va estableciendo una secuencia para resolver el problema, planificando y jerarquizando el uso y la relación de distintos contenidos de manera que construye un proceso o secuencia con la cual estructurar la solución, descomponiéndolo por partes, elaborando una argumentación informal de la solución, un heurístico utilizado en la resolución de problemas a través de la observación de relaciones entre cuerdas y los polígonos inscritos y del análisis de patrones para casos específicos, todo esto reflejado más evidentemente en la primera estrategia de solución.

Primero define los elementos que utilizará en la solución:

> A1_D1 [7]: Recordemos que *cuerda es* un segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta; como es conocido *una circunferencia está conformado por* infinitos puntos, **y** *a partir de éstos se pueden trazar* también infinitas cuerdas, que pasan por el área del círculo.

Después establece relaciones entre las propiedades de los contenidos que ha definido:

> A1_D1 [8]: La cuerda parte desde un punto, y llega a otro, *entonces si hay* ∞ puntos, entonces el número de cuerdas estaría dado por ∞

Para luego valorar si es posible dar solución al problema y cuándo es posible hacerlo:

> A1_D1 [9]: *Si* en una circunferencia se dan unos determinados puntos, y *se pide que* se determine el número de cuerdas, *es posible hallarlas si* […]

> A1_D1 [15]: *Esta sucesión está dada de la siguiente forma:* $D = \frac{n}{2}(n-3)$, *donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.*

> A1_D1 [16]: *Si conozco esto puedo decir que* el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, *teniendo en cuenta que* los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no *debido a que* las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.

> A1_D1 [17]: *Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales, estaría dada de la siguiente manera:* $cuerdas = D + n$, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono;
>
> $$Cuerdas = \frac{n}{2}(n-3) + n = \frac{n}{2}(n-1)$$

Se observa también en todo el proceso una secuencia que va construyendo a medida que avanza en resolver el problema, planificando y jerarquizando el uso y la relación de distintos contenidos: una vez que sabe que pueden calcularse las diagonales de un polígono, los relaciona con los círculos puesto que los polígonos pueden inscribirse en circunferencias de manera que las diagonales sean cuerdas de la circunferencia y los lados de los polígonos puedan considerarse como cuerdas, agrega el dato y transforma la fórmula. Además, a lo largo del desarrollo de su estrategia algebraica, el profesor relaciona y sustituye valores en la búsqueda de generalización

Consideramos entonces que este desarrollo de la actividad nos permite identificar lo que sabe sobre una práctica de ***jerarquización y planificación para la resolución de problemas***, específica de matemáticas.

A propósito de algunas afirmaciones del profesor, como la de que las diagonales de polígonos irregulares y regulares “no son equivalentes”, en un primer momento identificamos una oportunidad de indagar acerca del conocimiento de Omar sobre las formas en que se valida una propiedad, cuándo se requiere de dichas validaciones e incluso de su conocimiento sobre la demostración en matemáticas.

> A1_D1 [16]: Las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, *solamente que no son equivalentes*

Sin embargo, en A1_D2 Omar nos habla sobre la verificación de resultados a través del uso de esquemas gráficos. Pareciera entonces, que considera como forma de validación el probar la expresión algebraica para algunos casos, trazando y contando cuerdas, lo cual nos permite hablar de un ***indicio*** más que una oportunidad de preguntar sobre su KPM con respecto a lo que considera una ***forma de validar los resultados en matemáticas***. Sin embargo, al ser esto solo un indicio de que Omar conoce una determinada forma de validación de los resultados de la actividad, no tenemos suficiente información como para asegurar qué sabe el profesor sobre las formas de validación en matemáticas.

> A1_D2 [15]: En la verificación el profesor puede utilizar la práctica de graficación *como medio de comprobación* del algoritmo algebraico

Con respecto al KPM, de manera general podemos decir que la integración explícita de un subdominio que permita enfocar la atención en el conocimiento de la práctica de hacer matemáticas proporciona una visión del profesor como resolutor de problemas y usuario de las matemáticas con sus reglas y sus formas específicas de trabajo.

Al igual que para el KoT, en el Tabla IV.10 se muestra un resumen de las evidencias de conocimientos de la práctica matemática, clasificados por categorías. Además, para continuar con la construcción de una imagen del MTSK de Omar, en la Figura IV.4 se muestra cómo se relacionan los conocimientos del KPM entre ellos y con los ya identificados antes del KoT.

Conocimiento de la práctica de la matemática KPM	**Categorías asociadas al subdominio**	**Lo Omar conoce sobre:**	**Forma que representa el conocimiento de Omar en la categoría correspondiente**
	Jerarquización y planificación para la resolución de problemas	Elabora una argumentación informal de la solución: Define elementos a utilizar → establece relaciones entre las propiedades de los contenidos definidos → valora si es posible dar solución al problema y cuándo es posible hacerlo. Análisis de patrones en casos específicos y observación de relaciones entre cuerdas y los polígonos inscritos	🟦
		Una vez teniendo la fórmula para calcular las diagonales de un polígono, se establece relación entre las diagonales y los lados con las cuerdas de la circunferencia y los lados de los polígonos puedan considerarse como cuerdas, agrega el dato y transforma la fórmula.	
		Esta sucesión está dada […] $D = \frac{n}{2}(n-3)$ *, donde (n) me representa el número de los lados del polígono inscrito.* *Si conozco esto puedo decir que […] teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser […]* *Entonces el número de cuerdas trazadas teniendo en cuenta las diagonales […]* $cuerdas = D + n$*, donde (D), número de diagonales, y (n), número de puntos que es igual al número de lados del polígono […]* Búsqueda de relaciones que el profesor realiza, más que al proceso de sustituir y resolver la ecuación.	
	Indicio Formas de validación y demostración en matemáticas	Las diagonales de polígonos irregulares y regulares "no son equivalentes"	⬚
		Usar representación esquemática de las figuras para validar resultados.	

Tabla IV.10 Resumen de KPM identificados en la Actividad 1

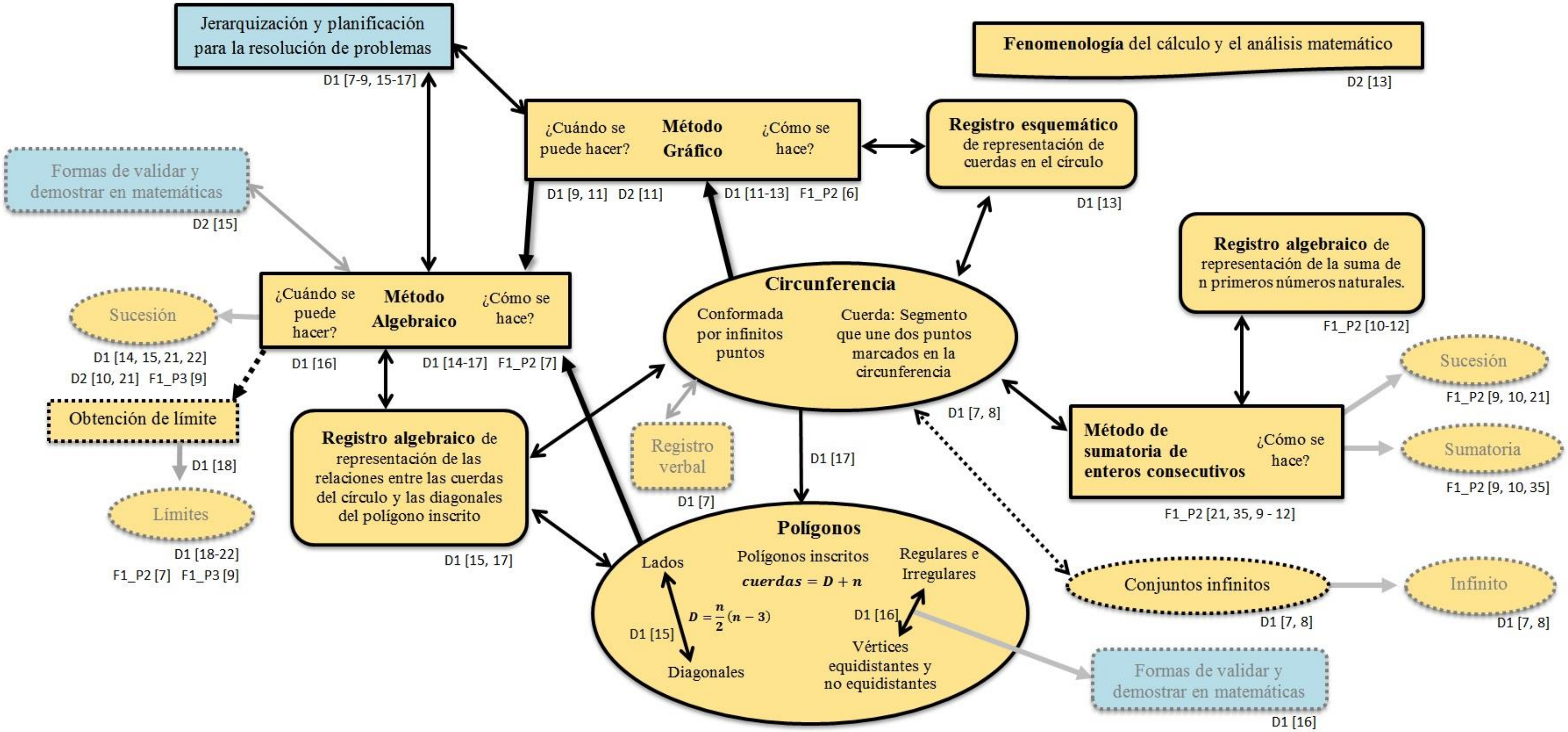


Figura IV.4 KPM de Omar identificado en la Actividad 1 (en color azul), teniendo en cuenta las evidencias indicios y oportunidades de investigación que resultan del análisis, así como las relaciones con KoT.

IV.1.4.5 Sobre el KFLM en el problema de las cuerdas

IV.1.4.5.1 Conocimiento de las teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático

Con respecto a la introducción que el profesor elabora para la resolución de la actividad, consideramos que, a pesar de la desvinculación de esta con la resolución del problema que hemos atribuido ya a sus concepciones, es importante destacar que Omar posee un conocimiento de trabajos de investigación que, muy probablemente, hayan sido consultados como parte de las actividades formativas de la maestría que cursaba al momento de la toma de estos datos. Vemos en este segmento un ***conocimiento de elementos teóricos sobre el aprendizaje*** derivados de la cita que usa de Brousseau, que podrían proporcionarle una base para construir su propia teoría personal de aprendizaje de las matemáticas.

> A1_D1 [3]: “El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje” *Brousseau (1986).*

A lo largo de la descripción de la guía pedagógica (A1_D2), el profesor utiliza el término predicción para hablar del proceso mediante el cual considera que el estudiante abordará el problema de las cuerdas y que este lo asocia con el término de práctica social proveniente de la teoría Socioepistemológica. Su interés y conocimiento de esta teoría se muestra desde la utilización de una cita de Cantoral[11] (uno de los fundadores de la teoría), para justificar su razonamiento sobre la resolución del problema:

> A1_D2 [2]: Esta situación problema de las cuerdas que se pueden trazar en un círculo cualquiera, me lleva a reconocer la importancia de crear, organizar, y desarrollar actividades didácticas, que propicien el avance en el conocimiento, y de esta manera el estudiante obtenga un *aprendizaje significativo*.

> A1_D2 [10]: Espero que a partir de esta actividad, cada uno de los individuos participantes adquiera el conocimiento adecuado sobre cuerdas, y sucesiones, a través del uso de ambientes visuales, de la manipulación directa del objeto tratado, y de *la predicción como práctica social*.

> A1_D2 [12]: *La noción de predicción* tiene el objeto de ir más delante de los acontecimientos diarios, de anticiparse a lo que puede suceder, teniendo en cuenta que esta se construye a través de las vivencias de los individuos sobre un concepto, y en un contexto determinado.

En el caso de la ***predicción como práctica social*** y ***la graficación***, creemos que Omar los toma para dar un sustento sólido a su actividad y los considera funcionales como herramientas para el diseño de su guía pedagógica, sin embargo no tenemos evidencias claras de que el profesor conoce la teoría, ni de que sepa que estos constructos sean parte de ella, por lo que hablamos sólo de fuertes ***indicios de conocimiento de constructos teóricos provenientes de la Socioepistemología***.

Además, en el diseño pedagógico, Omar usa la noción de predicción para justificar la toma de decisiones sobre el diseño de la actividad, utilizándola para guiar los procesos de solución que

---

[11] Esta cita es mostrada en la sección 4.1.4.2.4 del KoT, en la que Omar alude a literatura referente a la fenomenología del cálculo y al análisis matemático (A1_D2 [13]).

permitirán a los estudiantes resolver el problema, lo cual nos estaría mostrando una relación del KFLM con el KMT.

Al igual que en el KoT, en esta parte del análisis observamos en Omar una necesidad por buscar constructos que le permitan explicar y sustentar sus argumentos de construcción de la guía pedagógica que propone, lo que podría relacionarse tanto con sus concepciones sobre su papel como participante de un curso de formación en el que se le ofrecen herramientas que provienen de la investigación en didáctica de la matemática y el uso que puede o debe hacer de estas herramientas a lo largo del curso.

IV.1.4.5.2 Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático

Aunque no tenemos evidencia suficiente para hablar sobre los conocimientos que tiene Omar sobre los posibles procesos y estrategias que los estudiantes podrían utilizar al resolver el problema. En los fragmentos siguientes observamos algunos ***indicios*** sobre ***lo que el profesor espera que los estudiantes hagan en la resolución del problema***.

> A1_D2 [18]: Inicialmente la actividad se desarrolla individualmente, *donde el estudiante manipula el objeto, traza rectas, y obtiene el total de cuerdas para cada uno de los ejercicios pedidos*.

> A1_D2 [19]: En este momento *a través de la visualización, el estudiante debe llegar al objetivo*.

> A1_D2 [21]: Cuando *el estudiante* no tiene un conocimiento pleno de lo que es sucesiones, *se puede guiar a que a partir de la graficación de datos se obtienen gráficas que me dan con facilidad el algoritmo algebraico*

En este caso el profesor habla de que los estudiantes establezcan un patrón al trabajar con los casos particulares, por lo que posiblemente considera que será ese proceso el que les permita establecer un algoritmo para generalizar la solución. Omar deja plasmada la intención de que los estudiantes comiencen usando una estrategia para visualizar gráficamente el problema, sin embargo hasta aquí no tenemos evidencia que respalde que tiene conocimiento sobre esas distintas estrategias que podrían seguir los alumnos, sino sobre las estrategias que él mismo utilizó y que considera que los estudiantes podrían seguir sin problema.

En general, las categorías propuestas para este subdominio y el cambio de enfoque hacia hablar del conocimiento sobre el aprendizaje que depende directamente del contenido nos ha permitido reconocer aspectos específicos del conocimiento especializado de matemáticas y dejar fuera aspectos de pedagogía general. Además, a medida que el análisis avanza pueden observarse más relaciones entre los distintos subdominios.

A continuación mostramos la correspondiente Tabla IV.11 en la que se muestra un resumen del conocimiento de Omar identificado para el subdominio KFLM y la Figura IV.5 que agrega estos conocimientos al mapa que estamos construyendo del MTSK de Omar.

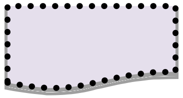
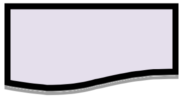
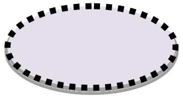
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	**Categorías asociadas al subdominio**	**Lo Omar conoce sobre:**		**Forma que representa el conocimiento de Omar en la categoría correspondiente**
	Teorías de aprendizaje	*Constructos teóricos provenientes de una teoría formal de aprendizaje*	La graficación, modelación y predicción como prácticas sociales.	
		Constructos teóricos asociados al aprendizaje	Reflejadas en el uso de las ideas de Brousseau como introducción a su resolución del problema	
	Indicio Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático	Manipulación de esquemas, trazando rectas, y obteniendo el total de cuerdas para cada uno de los ejercicios pedidos y buscar un patrón a través de la visualización.		

Tabla IV.11 Resumen de KFLM identificados en la Actividad 1

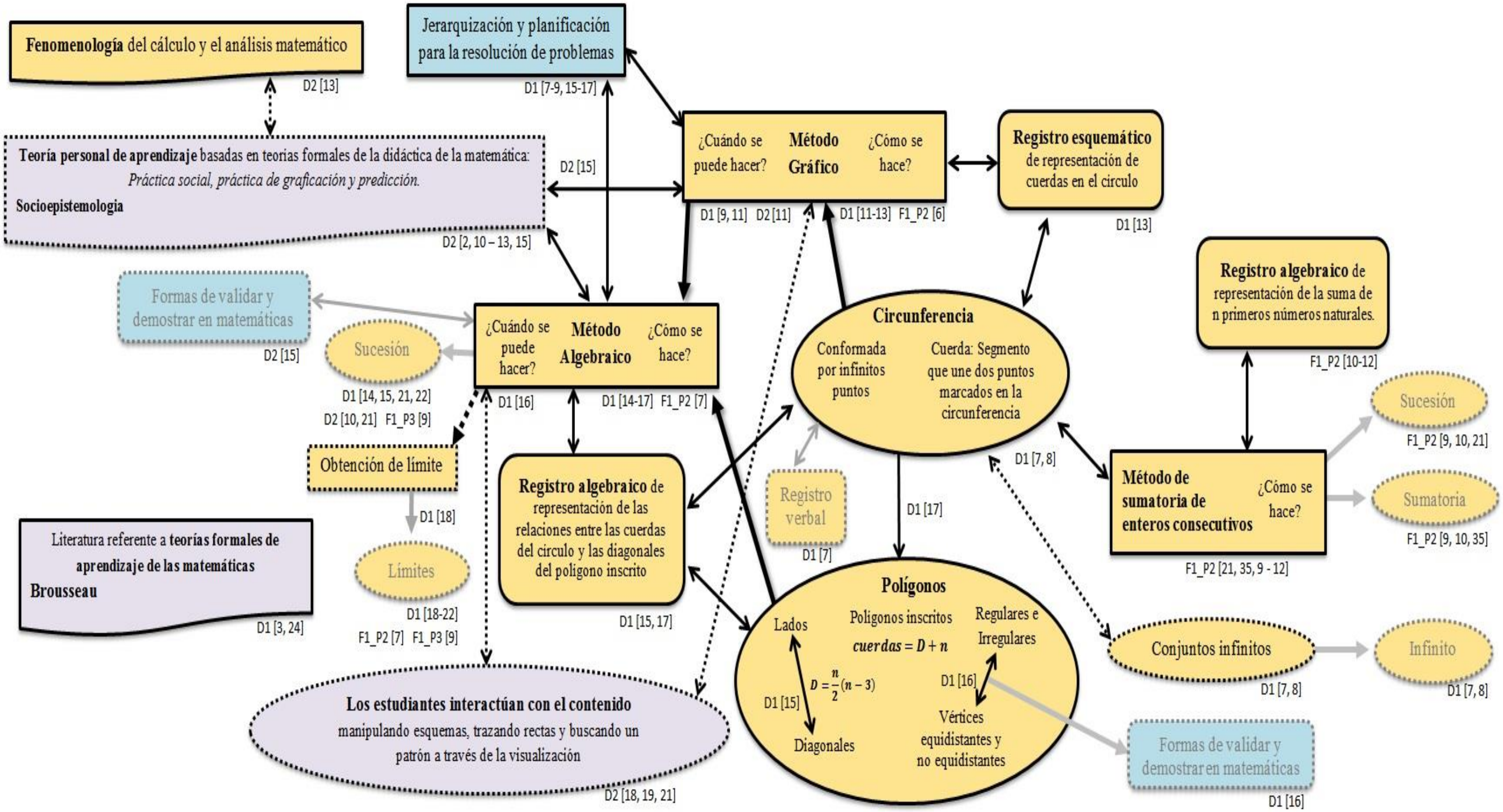


Figura IV.5 KFLM de Omar identificado en la Actividad 1 (en color morado), teniendo en cuenta las evidencias indicios y oportunidades de investigación que resultan del análisis, así como las relaciones con KoT y el KPM identificados anteriormente.

IV.1.4.6 Sobre el KMT en el problema de las cuerdas

IV.1.4.6.1 Conocimiento de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático

Dentro de las discusiones grupales se pide a los profesores que evalúen algunas de las características del problema de las cuerdas como recurso didáctico, a lo que Omar responde analizando la potencialidad del recurso con el conocimiento que tiene sobre literatura de investigación y su experiencia con problemas similares.

> A1_F1_P1 [9]: Me basé en el escrito que habla de las características de los denominados problemas abiertos (Garret, 1988) […]

> A1_F1_P1 [13]: En función de la elección realizada se pueden generar diferentes soluciones. La selección de una de ellas implica una justificación, la propuesta de diferentes soluciones debe ir acompañada de las correspondientes ventajas y desventajas.

> A1_F1_P1 [14]: Garret, R. (1988). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo de ciencias. Enseñanza de las Ciencias, 6 (3), 224-230.

Aunque no es común encontrar en un profesor este tipo de conocimiento relacionado con literatura de investigación en didáctica de la matemática, consideramos que es una de las fuentes principales de las cuales se nutren este y los demás subdominios del conocimiento didáctico, y que pueden dar al profesor una base de conocimiento sobre ***teorías formales de enseñanza*** sumamente rica.

IV.1.4.6.2 Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático

Omar comenta en algunas ocasiones la posibilidad de utilizar recursos tecnológicos o virtuales para realizar las representaciones esquemáticas de la circunferencia con sus cuerdas, lo que hemos considerado como un ***indicio del conocimiento que puede tener Omar sobre herramientas tecnológicas diseñadas específicamente para la enseñanza de las matemáticas*** que permiten realizar representaciones esquemáticas de contenidos matemáticos.

> A1_D2 [21]: Cuando el estudiante no tiene un conocimiento pleno de lo que es sucesiones, se puede guiar a que a partir de la graficación de datos se obtienen gráficas que me dan con facilidad el algoritmo algebraico; *en este momento si se posee un software graficador se debe utilizar como artefacto de ayuda*.

> A1_F1_P2 [6]: Una técnica utilizada fue la de utilizar la gráfica como medio para realizar el trabajo; manipulándola, trazando rectas, segmentos, usando artefactos comunes y *software*.

IV.1.4.6.3 Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático

Otro de los conocimientos que consideramos parte de este subdominio es el que tiene Omar sobre una posible ***estrategia didáctica*** que propone para abordar el contenido. En la guía pedagógica se propone una posible forma de presentar el problema como actividad en el aula, en la cual se observa el camino por el que decide conducir a los estudiantes hacia el ***trazado y conteo de cuerdas*** para construir una solución. Propone abordar el trabajo partiendo de casos particulares trazando esquemas de cada uno para buscar patrones de comportamiento al aumentar el número de puntos y así generar un algoritmo que pueda generalizarse para cualquier cantidad de puntos.

> A1_D2 [8]: Se pide que se marquen (2, 5, 8, 10, 15) puntos en circunferencias diferentes, y a partir de ellos dibujar las cuerdas que se puedan formar. En cada juego de puntos contar cuantas cuerdas se forman, cuando se marcan 2, 5, 8, 10, o 15 puntos en la circunferencia.
>
> A1_D2 [9]: Después de hallar el número de cuerdas que se pueden trazar, y a partir de los datos conseguidos, obtener el algoritmo matemático para cualquier número de puntos marcados en la circunferencia.
>
> A1_D2 [18]: Inicialmente la actividad se desarrolla individualmente, donde el estudiante manipula el objeto, traza rectas, y obtiene el total de cuerdas para cada uno de los ejercicios pedidos.
>
> A1_D2 [19]: En este momento a través de la visualización, el estudiante debe llegar al objetivo.

Por otra parte, derivado de su conocimiento sobre las características de problemas abiertos que propone Garret y de su experiencia de trabajo con el problema, identificamos en las participaciones de Omar un conocimiento sobre las ***características del problema de las cuerdas como una tarea propicia para la enseñanza de las cuerdas y las sucesiones***. En algunas de las unidades de información se puede observar cómo el profesor analiza la potencialidad del problema de las cuerdas como un recurso didáctico, clasificándolo como un problema ***abierto y no rutinario*** el cual tiene la ventaja de permitir al estudiante la utilización y tránsito entre distintos registros de representación del contenido y su potencial para ***propiciar en el estudiante un trabajo dinámico*** con el problema.

> A1_D2 [10]: Como el objetivo es crear en el estudiante esa necesidad de conocimiento, espero que *a partir de esta actividad, cada uno de los individuos participantes adquiera el conocimiento adecuado sobre cuerdas, y sucesiones*, a través del uso de ambientes visuales, de la manipulación directa del objeto tratado, y de la predicción como práctica social.
>
> A1_F1_P3 [19-20]: […] es muy interesante como recurso didáctico la actividad de las cuerdas, […] el estudiante construye su aprendizaje a partir de esta, busca que el estudiante indague, sea creativo, produzca, innove; […] la pregunta está encaminada hacia ese motivo, porque no da muchas pautas.

Al igual que en el caso del KFLM, el cambio de enfoque en el KMT nos permite observar un conocimiento de naturaleza distinta al matemático que continua sin desligarse del contenido y que refleja la estructura didáctica que Omar establece dentro de sus participaciones en el curso.

Como habíamos mencionado antes, este conocimiento tiene una estrecha relación con lo que el profesor reconoce que pueden hacer los estudiantes con el problema (KFLM), que le marca las pautas de lo que puede buscar dentro de su propuesta de estrategia didáctica de trabajo. Además Omar se apoya de sus conocimientos sobre los constructos de la Socioepistemología (KFLM) para explicar la estrategia.

Por otro lado seguimos observando que el KoT es la base que permite al profesor estructurar sus conocimientos, relacionarlos y utilizarlos de forma que estos le puedan ser funcionales para su labor como docente de matemáticas

En el Tabla IV.12 mostramos de nuevo el resumen de los conocimientos identificados para este subdominio y en la Figura IV.6 se agregan los mismos a la representación integrada del MTSK del profesor.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	**Categorías asociadas al subdominio**	**Lo Omar conoce sobre:**		**Forma que representa el conocimiento de Omar en la categoría correspondiente**
	Teorías enseñanza	*Teorías formales o institucionalizadas de enseñanza*	Garret, R. (1988). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo de ciencias. Enseñanza de las Ciencias, 6 (3), 224-230	🗎
	Indicio Recursos materiales o virtuales	Herramientas tecnológicas diseñadas específicamente para la enseñanza de las matemáticas que permiten realizar representaciones esquemáticas de contenidos matemáticos.		⬭
	Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático.	*Trazado y conteo de cuerdas*	Actividad basada en el uso y análisis de casos particulares para buscar patrones de comportamiento al aumentar el número de puntos y así generar un algoritmo que pueda generalizarse para cualquier cantidad de puntos.	🟩
		Características del problema como recurso didáctico	Analiza la potencialidad del recurso como un problema no rutinario y la facilidad de usar distintos registros de representación del contenido	

Tabla IV.12 Resumen de KMT identificados en la Actividad 1

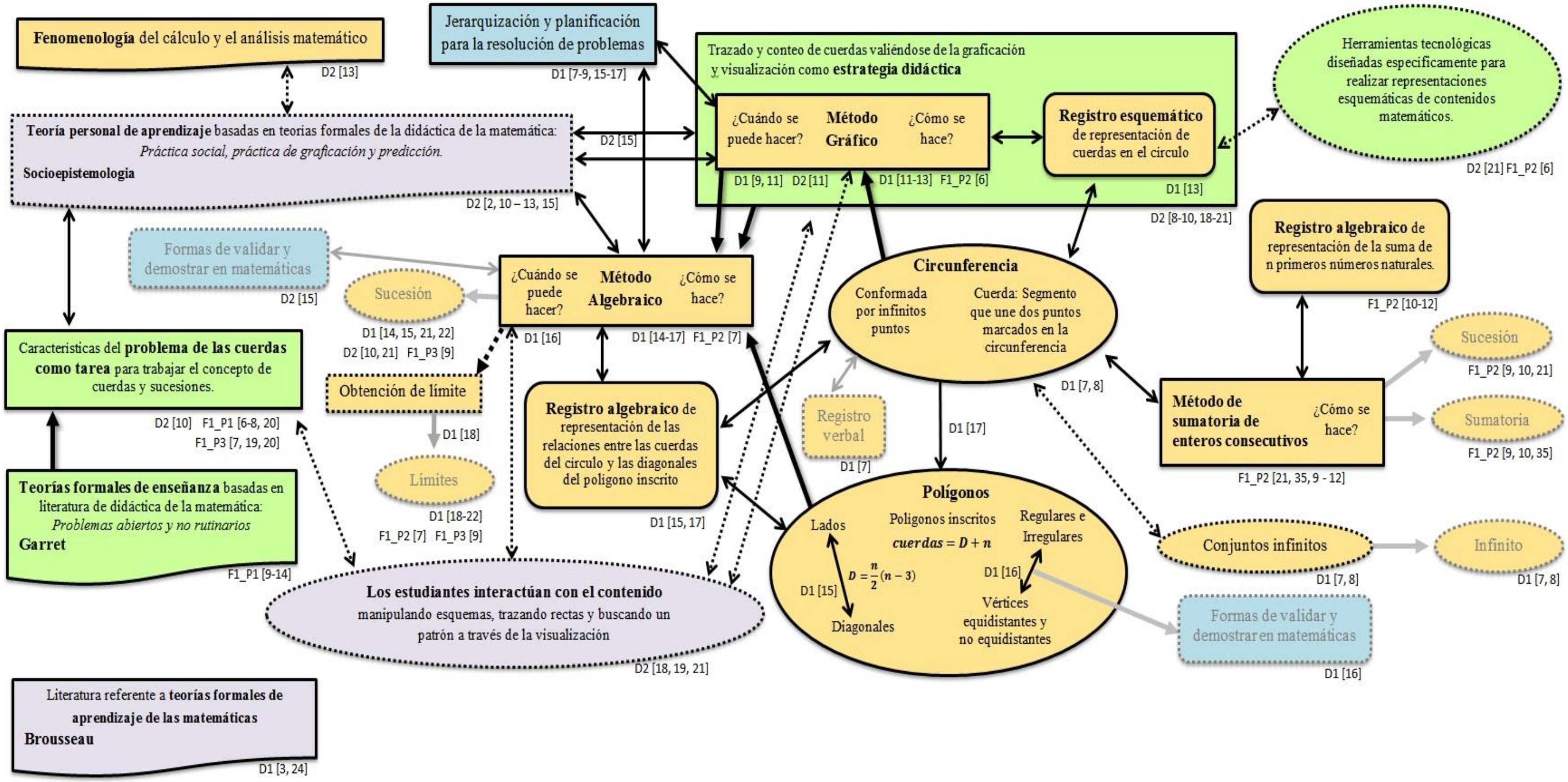


Figura IV.6 KMT de Omar identificado en la Actividad 1 (en color verde), teniendo en cuenta las evidencias indicios y oportunidades de investigación que resultan del análisis, así como las relaciones con KoT, el KPM y el KFLM identificados anteriormente.

IV.1.4.7 Sobre el KMLS en el problema de las cuerdas

IV.1.4.7.1 Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico

Al pedir a Omar que sitúe el problema en un nivel escolar en el que se pueda proponer como recurso didáctico, hace alusión a los temas que considera implícitos en las estrategias de solución que ha propuesto anteriormente, y habla de que si se pretende que se utilice el primer método de solución (gráfica), el problema es ***aplicable en el 9° grado (14 o 15 años), en el que ubica temas como polígonos, y sus diagonales***. Ahora bien, el segundo método de solución es ***aplicable en la universidad, donde se estudian los límites de sucesiones***.

> A1_D1 [20]: La primera técnica es probable aplicarla en los grados de la secundaria 9° grado, cuando se enseñe los polígonos con sus diagonales, o cuando se mencione en geometría las cuerdas.

> A1_D1 [22]: La segunda técnica se puede aplicar a estudiantes de finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean límites de sucesiones. Con este concepto aprendido se facilita más hallar el total de cuerdas de determinados puntos.

Recordemos que a pesar de que sabemos que no es necesario tener conocimientos de sucesiones y límites para resolver el problema, hemos considerado, en la parte de conocimiento matemático, que el uso de estos temas puede provenir de las creencias de Omar más que de su conocimiento matemático. Sin embargo, consideramos que en esta parte del análisis nos interesa sólo evidenciar el conocimiento que tiene Omar sobre la necesidad que tiene el estudiante de poseer conocimientos que sirvan como base para elaborar una solución y cómo los ubica en un determinado nivel.

IV.1.4.7.2 Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar

El profesor conoce, además de la ubicación temporal de los contenidos en un determinado nivel escolar, el tratamiento que se da a estos en ese momento. Sabe por ejemplo que ***al abordar el tema de sucesiones en el 9° grado, se establecen relaciones entre la parte algorítmica y la gráfica***, que considera necesarias para la Método gráfico que propone, lo cual podemos asociar con el conocimiento que tiene sobre el ***nivel de desarrollo conceptual que tendrían los estudiantes en este grado***.

> A1_D1 [21]: En este grado se enseña un poco de sucesiones, al menos la introducción, se entabla alguna relación entre la parte algorítmica con la gráfica, necesaria para una mejor interpretación de la situación.

En el caso del método algebraico, el profesor establece un estándar de conocimientos necesarios para resolver el problema ***en un momento en el que el nivel de desarrollo conceptual de los estudiantes les permita interpretar el problema y realizar un proceso de solución de tipo algebraico***, de donde inferimos que la consideración de que el nivel en el cual se aplique el problema estará condicionado por el bagaje de conocimientos previos de los estudiantes y los que potencialmente puedan explorarse con el problema.

> A1_F1_P3 [9]: Para poder resolver la actividad se necesita que el estudiante tenga conocimientos previos bien establecidos sobre cuerdas, sucesiones, y en alguna ocasión sobre límites, para la segunda técnica.

Con respecto al método de sumatoria de enteros consecutivos, Omar ubica el problema pensando en que este se ***aplique en un momento en el que se cuente con herramientas algebraicas como el conocimiento de cálculo de sucesiones***.

> A1_F1_P2 [21]: Me parece que también se puede aplicar para aquellos estudiantes que tienen conocimientos de cálculo en sucesiones

En suma, el análisis de los conocimientos de este subdominio nos llevan a considerar que la ubicación del problema en un determinado nivel escolar se refiere a los estándares de conocimiento matemático que Omar asocia a un nivel escolar de acuerdo con ***el nivel de desarrollo conceptual*** que tendrían los estudiantes en este grado y en una ubicación temporal del contenido límites del currículo.

A continuación mostramos el Tabla IV.13 y la Figura IV.7 correspondientes al subdominio.

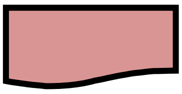
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	**Categorías asociadas al subdominio**	**Lo Omar conoce sobre:**	**Forma que representa el conocimiento de Omar en la categoría correspondiente**
	Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático	La Método gráfico es aplicable en secundaria (9°) cuando se enseñan polígonos y se menciona la geometría de las cuerdas.	
		La Método algebraico es aplicable al final de la secundaria, bachillerato o principios de la universidad cuando se vean límites de sucesiones	
	Nivel del desarrollo conceptual	En 9° grado se entablan relaciones entre los algoritmos, figuras y procedimientos algebraicos que permiten una buena interpretación del problema.	
		Los estudiantes de finales de secundaria, bachillerato y principios de universidad tienen herramientas para interpretar el problema y desarrollar la estrategia algebraica.	
		Los estudiantes con conocimiento de cálculo de sucesiones pueden resolver la actividad a través de la estrategia de sumatoria de enteros consecutivos	

Tabla IV.13 Resumen de KMLS identificados en la Actividad 1

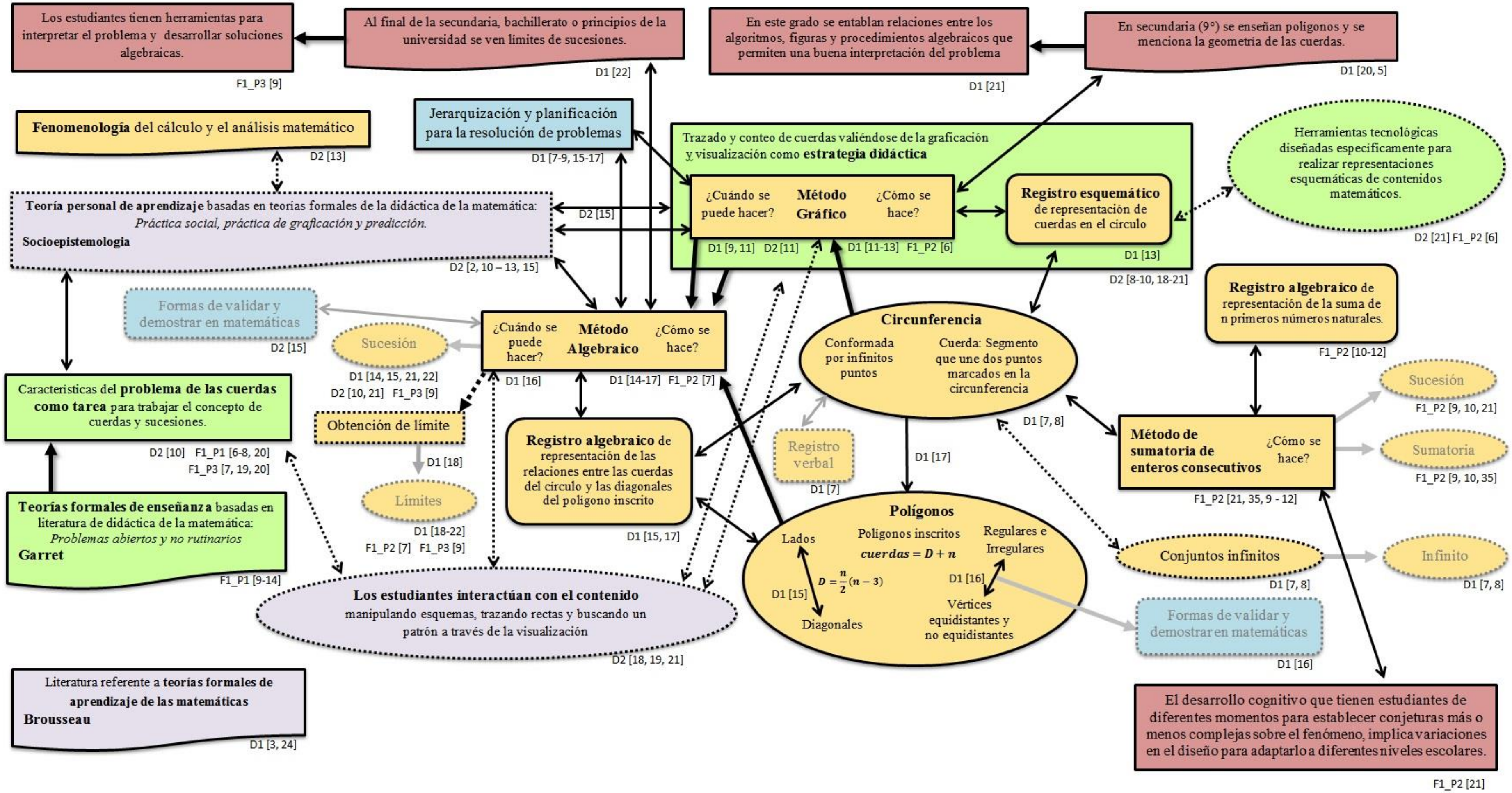


Figura IV.7 KMLS de Omar identificado en la Actividad 1 (en color rojo), teniendo en cuenta las evidencias indicios y oportunidades de investigación que resultan del análisis, así como las relaciones con KoT, el KPM, el KFLM y el KMT identificados anteriormente.

IV.1.4.8 Oportunidades de explorar distintos subdominios del MTSK y las relaciones entre ellos

Dentro del análisis encontramos algunos segmentos que suscitan oportunidades de explorar en más de un subdominio de conocimiento, los cuales consideramos interesante resaltar con el fin de reflexionar sobre la naturaleza de estos conocimientos y sobre las relaciones entre ellos.

Encontramos, por ejemplo, el siguiente segmento que, si se hubiese podido explorar con más profundidad, quizá podría habernos dado información sobre el uso que hace el profesor en clase de la fórmula del número de diagonales de un polígono inscrito en una circunferencia: $D = \frac{n}{2}(n-3)$, permitiéndonos profundizar en su KMT, aunque también podríamos obtener información sobre el KFLM si su respuesta se refiriera a que la fórmula es más fácil de memorizar para los estudiantes, por lo que es un recurso que utilizan constantemente, o KMLS si se refiere a que es una fórmula que deberían dominar a partir de la secundaria.

> D1 [14]: La otra manera sería utilizando la sucesión que se puede hallar, *teniendo en cuenta que se conoce, y se maneja con regularidad en el aula de clase*, el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia.

Consideramos interesante señalar que el siguiente segmento pudiese servir para profundizar en el conocimiento del profesor sobre las relaciones entre diagonales, cuerdas y polígonos, y para analizar el tipo de conexión que establece Omar entre ellos, lo cual hubiese podido dar información sobre el KoT si nos hablara sobre las propiedades de estos conceptos, KSM si nos hablara de que las relaciones y conexiones entre estos temas es de tipo inter-conceptual, o KMLS si relacionara los temas sólo como conceptos necesarios para abordar el problema.

> D1 [16]: Si conozco esto puedo decir que el número de cuerdas que se pueden trazar puede ser conocido, teniendo en cuenta que los puntos marcados pueden ser equidistantes uno del otro o no; debido a que las diagonales en un polígono irregular se marcan de la misma manera como en los regulares, solamente que no son equivalentes.

Codificación de relaciones entre conocimientos		**Figura asociada**
Oportunidades de explorar relaciones entre subdominios	*Se usa un rectángulo sin color de relleno, pero se puntea el contorno de un color gris para mostrar que este no ha podido explorarse durante la investigación, pero podría usarse en futuras investigaciones.*	⬚

Tabla IV.14 Codificación de oportunidades que no están asociadas a un único subdominio del MTSK.

A continuación se muestra la Figura IV.8 que representa los resultados del análisis del conocimiento especializado de Omar puesto en juego dentro de sus participaciones de la Actividad 1 incluyendo las oportunidades e indicios de conocimiento que se encontraron. Este esquema busca reflejar el carácter integrado del MTSK y señalar las principales relaciones entre subdominios, descritas a lo largo del análisis de cada subdominio y categoría.

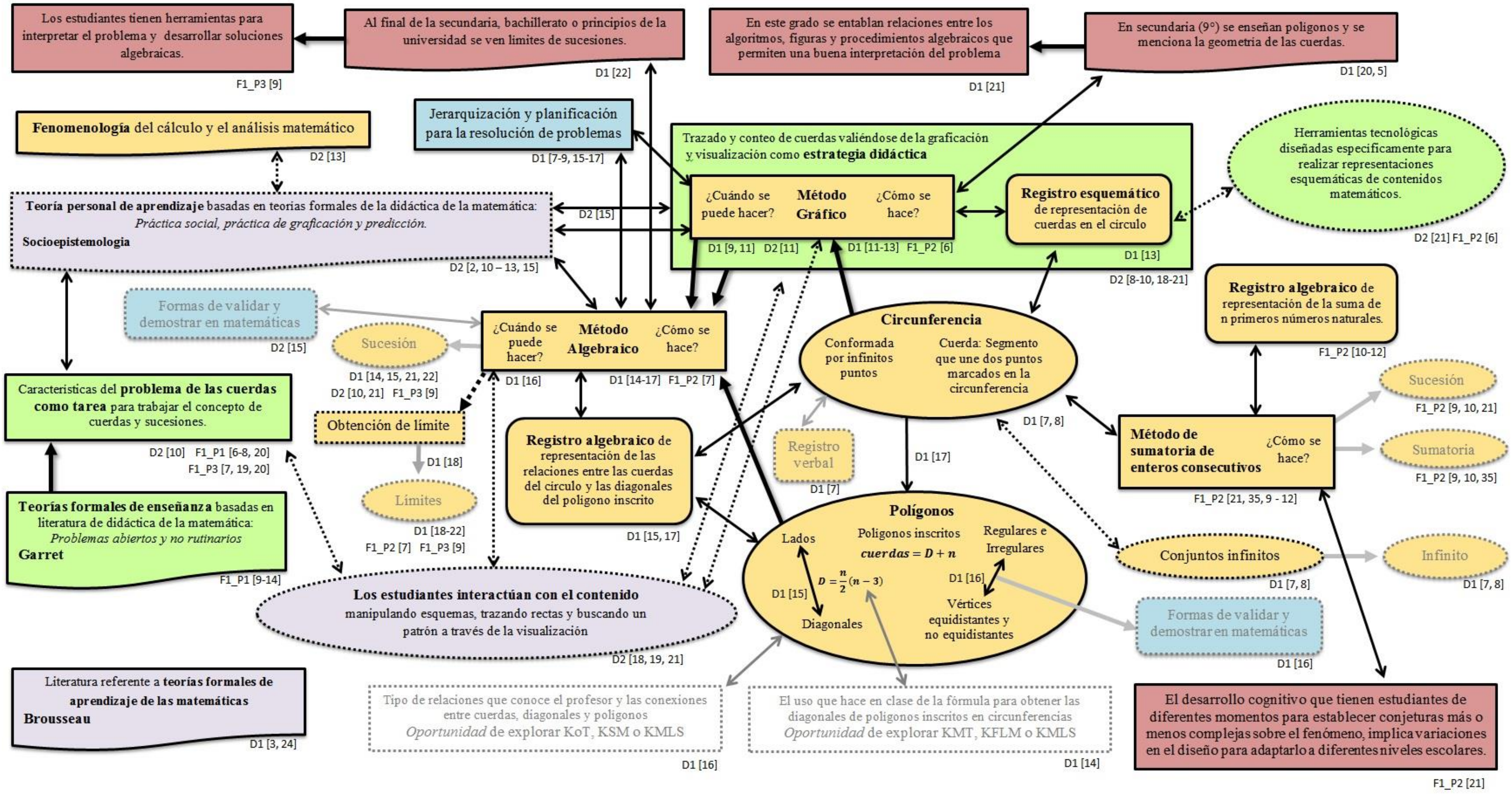


Figura IV.8 Fotografía completa del MTSK que evidencia el profesor, así como los indicios de conocimiento que pudieron identificarse y las oportunidades de investigación de otros conocimientos que pudieron haberse indagado pero que por limitaciones del estudio no han podido ser abordadas.

IV.1.5 Resumen del conocimiento especializado de Omar identificado en la Actividad 1

A continuación realizaremos un breve resumen de los conocimientos que se han logrado identificar en esta actividad, el cual, ha sido representado en la figura IV.8.

El conocimiento de los temas (KoT) proporciona una base de conocimiento matemático sobre la cual el profesor va construyendo la resolución del problema, tomando en cuenta las ***propiedades que conoce sobre las circunferencias y los polígonos***[12], así como algunas de las relaciones que existen entre ellos, que establece a través de su conocimiento de que ***los polígonos inscritos pueden relacionarse con las circunferencias tomando las diagonales y los lados del polígono como cuerdas de la misma***. Sabe además, que ***la circunferencia está conformada por infinitos puntos y que las cuerdas son segmentos que unen dos puntos marcados sobre una circunferencia***, que ***los polígonos tienen lados, vértices y diagonales además de conocer la relación que guardan entre ellos***. Sabe también que ***existen polígonos regulares e irregulares y que éstos pueden identificarse a observando la distancia entre los vértices***. La consideración de esta última relación establecida entre los tipos de polígonos y la distancia de sus vértices y su afirmación de que las diagonales de ambos tipos de polígono se marcan de la misma forma pero no son equivalentes nos condujo a una oportunidad para reflexionar sobre el conocimiento que puede tener Omar sobre las formas de validación y demostración en matemáticas, al preguntarnos: ¿a qué se refiere con que no son equivalentes? y si puede demostrar su afirmación, lo cual podría darnos información sobre su conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM).

Partiendo de esta base de conocimiento, Omar organiza dos procedimientos matemáticos que utiliza para resolver el problema, un ***método gráfico*** trabajando casos particulares, que deriva después en la construcción de un ***método algebraico*** al buscar una generalización de la solución. Ambos métodos nos permiten además acceder a evidencias sobre algunos de los conocimientos que tiene el profesor sobre el ***registro de representación esquemático de las cuerdas del círculo*** y el ***registro algebraico de representación de las relaciones entre las cuerdas y las diagonales de un polígono inscrito en una circunferencia***, respectivamente. El uso que hace Omar de estos métodos nos permite observar las relaciones entre las categorías de propiedades procedimientos y registros de representación, pertenecientes al KoT. Además, una vez que Omar observa y analiza las soluciones de sus compañeros en los foros de trabajo, genera una nueva estrategia que hemos llamado ***método de sumatoria de enteros consecutivos***.

Omar habla también de algunos otros contenidos matemáticos que considera relacionados con la resolución del problema como las sucesiones, los límites, sumatorias o el concepto de infinito y de conjuntos infinitos, sin embargo, al no poder tener información suficiente sobre estos contenidos y lo que sabe sobre ellos en las participaciones del curso, las hemos considerado sólo como indicios u oportunidades de conocimiento.

El trabajo con los métodos gráfico y algebraico en las participaciones del curso nos permitió observar también el KPM que pone en acción Omar, es decir, el conocimiento que tiene sobre prácticas propias del trabajo matemático como la ***jerarquización y planificación para la resolución de problemas***, analizando los patrones con casos específicos y observando las relaciones entre las cuerdas del círculo y los polígonos inscritos. El profesor planifica y jerarquiza los pasos para la solución además de relacionar y sustituir valores en la búsqueda de generalización.

---

[12] Resaltaremos en esta sección las evidencias de conocimiento que surgen en el análisis.

Con respecto a los conocimientos que tiene Omar sobre las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), identificamos conocimientos que tiene el profesor con respecto a ***constructos teóricos asociados con el aprendizaje de las matemáticas***, que adopta como ciertos; en este caso utiliza una cita de ***Brousseau*** en la que se habla sobre la forma en la que aprenden los estudiantes de matemáticas, lo cual, sin embargo, pareciera desligado de la construcción de la solución del problema. Además encontramos indicios de conocimiento de constructos teóricos provenientes de la Teoría Socioepistemológica: práctica social, graficación como práctica social y predicción que sí utiliza a lo largo de la construcción de la guía pedagógica y que parecen proporcionarle una base teórica para diseñar una ***estrategia didáctica de trazado y conteo de cuerdas que se basa en el uso de la graficación y la visualización***, lo cual se ubica en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) de Omar. También encontramos este conocimiento ligado a lo que sabe sobre ***aspectos fenomenológicos que han dado origen al cálculo y al análisis matemático***, que hemos clasificado dentro del KoT, puesto que recurre a citar trabajos de autores cuyo trabajo ha inspirado el surgimiento de la Socioepistemología.

Sobre el KMT, al interactuar con sus compañeros y explicar sus propuestas de solución del problema, el profesor muestra también un ***conocimiento sobre las características del problema como un tarea propicia para trabajar el concepto de cuerdas y el de sucesiones dentro del aula***, que se relaciona también con la "práctica de predicción" que reconoce como constructo de la Socioepistemología (que hemos ubicado en KFLM). Además, el conocimiento que tiene Omar sobre estas características deriva directamente del ***conocimiento que tiene sobre constructos teóricos referentes a teorías de enseñanza que reconoce de la literatura sobre los problemas abiertos (Garret)***.

Encontramos también un indicio de que Omar puede conocer algunas herramientas tecnológicas diseñadas específicamente para realizar representaciones esquemáticas de contenidos matemáticos, que es este caso menciona como útiles para realizar la representación de las cuerdas en el círculo con diferente número de puntos sobre la circunferencia.

Por último podemos señalar que se observaron conocimientos correspondientes al conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) del profesor, referentes a la ubicación temporal o curricular que hace Omar de los temas necesarios para la solución, proponiendo el ***problema como conveniente para aplicar en secundaria, bachillerato o principios de la universidad***, según los conocimientos que tienen los estudiantes en estos niveles. En estos grados los estudiantes ya tienen disponibles herramientas suficientes para afrontar el problema: propiedades de polígonos y las cuerdas de las circunferencias para secundaria, límite de sucesiones y cálculo de sucesiones para bachillerato y universidad. El profesor muestra, además, conocimiento sobre el nivel de desarrollo conceptual que los estudiantes requieren para abordar este problema de acuerdo al nivel educativo en el que se aplique el problema. ***En secundaria se establecen relaciones entre los algoritmos, las figuras y los procesos algebraicos que permitan la interpretación del problema*** y el ***conocimiento del estudiante de bachillerato y universidad sobre el cálculo de sucesiones le permitiría desarrollar soluciones algebraicas del problema*** como la llamada sucesión de enteros consecutivos.

Como hemos mencionado anteriormente, todos estos conocimientos y sus relaciones pueden han sido plasmados en la Figura IV.8, con la finalidad de mostrar el carácter integrado del conocimiento especializado y el alcance que tienen los diferentes subdominios del modelo MTSK para analizarlo.

Como se ha mostrado a lo largo de la narración de este análisis, para elaborar esta figura, hemos decidido utilizar un código de colores y formas que sirvan para diferenciar los subdominios y categorías asociadas a cada uno de ellos, para la elaboración de esquemas que permitieran observar el conocimiento identificado en las actividades de manera más global. En la Tabla siguiente, presentamos un resumen de las codificaciones que se utilizaron en los esquemas anteriores y que se utilizarán para ilustrar los análisis siguientes:

Subdominios		**Categorías asociadas al subdominio** *Conocimiento sobre:*	**Figura asociada a la categoría**
Conocimiento matemático	**Conocimiento de los tópicos KoT**	Procedimientos	▭
		Propiedades y sus fundamentos	⬭
		Registros	▢
		Fenomenología	🗎
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM	Complejización	➡
		Simplificación	⬅
		Contenidos transversales	⬬
		Conexiones auxiliares	■
	Conocimiento de las prácticas matemáticas KPM	Jerarquización y planificación e la resolución de problemas	▭
		Formas de validación o demostración	▢
Conocimiento Didáctico del Contenido	**Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM**	Teorías de aprendizaje	🗎
		Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas	▭
		Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático	⬭
		Los principales intereses y expectativas de los estudiantes	▢
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	Teorías personales o formales de enseñanza	🗎
		Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza	▭
		Recursos materiales o virtuales de enseñanza	⬭
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	Expectativas de aprendizaje	🗎
		Nivel del desarrollo conceptual y/o procedimental	▭
		Secuenciación con temas anteriores y posteriores	⬭

Tabla IV.15 Codificación de figuras y colores para gráficos de MTSK por actividad

IV.2 Informe de resultados de la Actividad 2: Diseño de recurso didáctico individual

De aquí en adelante mostraremos solo el informe de resultados del conocimiento especializado de cada actividad y las codificaciones y asignaciones de subdominios y categorías a los documentos serán ubicados en los anexos de este trabajo, para hacer la lectura más ágil.

A continuación describimos brevemente el contenido del recurso didáctico diseñado por Omar (A2_D1[1]) así como algunas características generales de la respuesta del profesor a los comentarios que hace la tutora del curso sobre su recurso (A2_D2), para luego mostrar los resultados del análisis de los dos documentos correspondientes al trabajo de esta actividad.

Es importante resaltar que en esta actividad el profesor interactuó conmigo como la tutora del curso encargada de hacer una retroalimentación de su recurso didáctico, por lo que se tuvo oportunidad de tener más información sobre sus argumentaciones y generar algunas reflexiones que proporcionaran más información sobre el recurso del profesor. Sin embargo, hay que recordar que el objetivo del curso no era recolectar información para esta investigación, por lo que la retroalimentación no está explícitamente diseñada para indagar sobre el MTSK del profesor.

El recurso que diseña Omar (A2_D1) contiene una sección en la que se habla de los objetivos de la actividad, así como algunas justificaciones sobre la importancia de diseñar actividades para el tema de funciones, los materiales que se utilizarán y algunas recomendaciones generales acerca de la gestión de la actividad. En una segunda sección se describen las dos tareas propuestas para los estudiantes. La primera de ellas se refiere a un tanque con forma de prisma rectangular cuyas dimensiones son 3×5×2 centímetros, el cual se piensa llenar de agua con un flujo constante de 1 cm3 por segundo. Omar propone una serie de preguntas con las cuales pretende que los estudiantes analicen el fenómeno, establezcan relaciones entre las variables y modelen dicho fenómeno para encontrar una función que describa su comportamiento. Para la segunda tarea se presenta el problema de un agricultor que desea encerrar una pequeña parcela rectangular para producir tomate, y posee malla con longitud de 500 metros; se pregunta ¿cuál debe ser la mayor área que puede cubrir con la malla? En este problema se hacen preguntas similares a las de la tarea anterior, tratando de que se establezcan las mismas relaciones y que los estudiantes puedan modelar el fenómeno a través de una función cuadrática. En una última sección Omar presenta algunas conclusiones sobre los objetivos del recurso como material de enseñanza.

Por otro lado, el documento A2_D2 nos permite ampliar la información acerca del diseño de la actividad y conocer más profundamente algunas de las consideraciones matemáticas y didácticas que ha tomado en cuenta Omar para su propuesta.

Los dos documentos correspondientes a esta actividad (A2_D1, y A2_D2), fueron organizados y codificados en un proyecto de MAXQDA para realizar un primer análisis asignando subdominios y categorías de conocimiento a través del programa, trabajando unidad a unidad de información apoyándonos en el sistema de categorías construido en el Capítulo 3 (Ver apartado III.6.2.2) y manteniendo siempre abierta la posibilidad de agregar, quitar o modificar el sistema a partir de las

---

[1] Todos los documentos correspondientes a esta actividad, así como los análisis completos de las misma en MAXQDA y en Word, pueden consultarse en el Anexo II

necesidades observadas en los datos. El resultado de este primer análisis puede consultarse completo en el Anexo II.3.

IV.2.1 Informe de resultados del conocimiento especializado puesto de manifiesto en la Actividad 2: Diseño de recurso didáctico individual

Al igual que en la Actividad 1, la información del primer análisis realizado en MAXQDA fue descargada en tablas de Excel y reacomodada para un segundo análisis organizado ahora por subdominio y categoría, lo que nos permite observar fragmentos provenientes de distintas unidades de información o documentos que han sido clasificadas como conocimiento de una determinada categoría o subdominio, así como realizar modificaciones en las asignaciones, ya sea para confirmar indicios, verificar evidencias, explorar nuevas oportunidades de exploración de conocimiento o descartar algunas asignaciones. Dicho análisis completo está disponible en el Anexo II.4. Basaremos la presentación de resultados en este segundo análisis de la información.

IV.2.1.1 Contextualización del conocimiento evidenciado por Omar en la Actividad 2

A continuación mostramos la descripción de aspectos contextuales del análisis que puedan ayudar a entender las participaciones del profesor y dar sentido a las asignaciones de conocimiento que realizamos más adelante. Como mencionamos en la Actividad 1, utilizamos estos fragmentos para comprender aspectos específicos como los objetivos que persigue en la actividad que diseña o las creencias acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje.

Omar propone una actividad que permita abordar el concepto de función lineal y función cuadrática y hace explícitos los objetivos que se propone alcanzar con este diseño, centrándose en la idea de reafirmar los conocimientos previos que puedan tener los estudiantes sobre el concepto de función, a través de la modelación de fenómenos reales.

> A2_D1 [1, 2]: OBJETIVO:
> Comprender situaciones problemáticas, usando un lenguaje propio del área que lo lleve a afianzar el pensamiento matemático referente a funciones a través de la práctica de modelación.
>
> A2_D1 [9]: Uno de nuestras metas es lograr la resignificación del concepto de función utilizando la práctica de modelación en nuestra actividad.
>
> A2_D1 [50, 51]: Con esta propuesta didáctica se piensa llevar al estudiante al conocimiento de funciones para que logre un aprendizaje significativo del concepto tratado.
> A través de esta podemos determinar los adelantos, y dificultades que se tienen en la consecución del logro, y además observar el comportamiento del estudiante en el desarrollo de las actividades, con el fin de corregir para próximas actividades.

En concordancia con la definición y diferenciación que hemos propuesto en el marco teórico acerca de conocimientos y concepciones o creencias[2], ubicamos dentro de las concepciones del profesor los segmentos cuya argumentación parece tener una carga más afectiva que académica o en los que no se realiza ninguna argumentación sobre las afirmaciones.

---

[2] Ver secciones II.1.1 y II.3.3 de Capítulo II.

Acerca de las *creencias del profesor acerca de la enseñanza de las matemáticas*, observamos también que el profesor considera que en la enseñanza de las matemáticas es importante buscar métodos de trabajo alternativos que propicien el aprendizaje significativo de la matemática y que estas podrían mejorar algunas actitudes hacia la misma como el rechazo o la creencia de que es una asignatura complicada por naturaleza. Considera además a la modelación como uno de estos métodos.

> A2_D1 [53]: [… Es importante] *buscar alternativas de enseñanza que propicien en nuestros estudiantes aprendizajes significativos en matemática,* rompiendo esos paradigmas, donde consideran a la matemática como algo inalcanzable o muy difícil de entender, nos lleva a retomar la modelación, como proceso para obtener los objetivos, y llegar a las metas propuestas, en nuestro caso el estudio de la función.

Otra de las concepciones que identificamos sobre la enseñanza de las matemáticas, tiene que ver con la idea de asociación directa de la modelación con el uso de fenómenos provenientes de contextos reales. Omar considera que el modelado matemático de contextos "reales" permite establecer nuevos significados, en este caso resignificar el concepto de función, al ser más cercanos al contexto cotidiano de los estudiantes. Además, como habíamos mencionado antes, considera la modelación como un método didáctico propicio para generar aprendizaje significativo, a través del uso y construcción de elementos actitudinales externos a la matemática mencionando por ejemplo que a través de la modelación se puede construir un concepto de ciudadanía y generar conciencia política y social en el estudiante.

> A2_D2 [6]: La situación problema está implícita en los enunciados, y es el cómo puedo llegar a obtener los resultados del modelo, utilizando el proceso de modelación. *Resolver situaciones referentes de nuestro ambiente (fenómenos), me da los elementos para obtener el objetivo planteado.*

> A2_D2 [21]: […] la modelación matemática en sí misma es una perspectiva pedagógica centrada en la construcción de ciudadanía, y una conciencia social, y política en el estudiante, cuyo objeto es valorar las habilidades para una participación efectiva en la sociedad.

Sobre sus *concepciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del concepto de función*, el profesor expresa que considera relevante y necesario aprender el concepto de función además de considerarlo una potente herramienta modeladora de fenómenos. Al no tener una argumentación sobre el porqué de estas consideraciones, decidimos colocarlo como parte de las concepciones de Omar.

> A2_D1 [5]: Reconociendo lo necesario que es el aprendizaje de este concepto, y su gran importancia como herramienta modeladora de distintos fenómenos matemáticos, físicos, químicos, económicos entre otros. […]

Por otro lado, sobre las *concepciones sobre la enseñanza de las funciones* en particular, Omar considera que una práctica común de los profesores en la enseñanza de las funciones es enfocarse en el trabajo de registros algebraicos más que en cualquier otro.

> A2_D2 [35]: […] *Generalmente nosotros los profesores nos gusta manejar con más soltura todo lo que tiene que ver con registros algebraicos*, pero también a través de tablas, y de gráficas podemos reconocer en gran medida las diferentes variaciones que puede sufrir una función, al otorgarle a la variable dependiente valores diferentes a los establecidos.

Por último queremos destacar las *creencias sobre el papel del profesor* en el proceso de enseñanza. Al igual que en la Actividad 1 del curso, aquí Omar expresa sus concepciones sobre la necesidad de que el profesor tome el papel de gestor y guía del estudiante permitiéndole construir su propio conocimiento.

> A2_D2 [37]: […] en la modelación el creador del conocimiento es el estudiante, por tal motivo *la intervención del profesor debe ser lo más mínimo*, es decir solamente para ordenar, regresar al camino cuando el estudiante se va por otro, hará las veces de guía para preguntas referentes a los enunciados, no será el que da pistas.

IV.2.1.2 Sobre el KoT en el recurso didáctico

IV.2.1.2.1 Conocimiento de procedimientos matemáticos asociados al concepto de función

Aunque el profesor no resuelve directamente el recurso que propone, sí habla sobre dos posibles métodos para resolver las tareas: la ***solución de ecuaciones simultáneas*** o resolución de un sistema de ecuaciones que pueden plantearse con los datos del problema, y el ***método de diferencias*** que consiste en restar los términos sucesivos de una sucesión numérica. A pesar de que este segundo método está diseñado para trabajar con sucesiones y no con funciones, consideramos que Omar pretende aplicarlo al comparar los resultados de las tablas de datos. Podríamos decir entonces que conoce estos dos métodos aunque no fue posible profundizar exactamente en cómo los aplicaría en la resolución de las tareas.

> A2_D2 [35]: A través de los datos hallados en la tabla, utilizando *solución de ecuaciones simultáneas* […] o *usando diferencias* para hallar los parámetros de las funciones; para la *lineal primera diferencia*, y para la *cuadrática segunda diferencia*; esto cuando necesito hallar los parámetros partiendo de datos dados; ya teniendo éstos grafico en papel o en una hoja milimetrada, y hallo la gráfica. […] Generalmente a nosotros los profesores nos gusta manejar con más soltura todo lo que tiene que ver con registros algebraicos; pero *también a través de tablas, y de gráficas podemos reconocer en gran medida las diferentes variaciones que puede sufrir una función, al otorgarle a la variable dependiente valores diferentes a los establecidos*.

Además, de acuerdo a lo que declara en este segmento, y la forma en la que secuencia las preguntas de las tareas propuestas en su diseño, el procedimiento que Omar considera para resolver la propuesta se basa en realizar tabulaciones de datos que permitan analizar los patrones de comportamiento de los fenómenos y las relaciones entre variables para luego aplicar alguno de los métodos que él menciona y encontrar los parámetros de las funciones que modelan dichos fenómenos y con éstas elaborar las gráficas que se piden en las tareas.

IV.2.1.2.2 Conocimiento de propiedades y sus fundamentos atribuibles al concepto de función

Omar reconoce ciertos elementos que considera básicos para abordar la actividad, para lo cual consideramos que requiere ***conocer componentes específicas de las funciones*** que le permitan llevar a cabo el diseño, como los ***parámetros*** y el concepto de ***variables dependiente e independiente***. Sin embargo, en esta actividad, el profesor no profundiza en lo que conoce sobre ellas ni en las características específicas asociadas a las funciones lineales y cuadráticas, por lo que no podemos hablar de lo que sabe de estas componentes más allá de decir que sabe que las funciones tiene estos elementos.

> A2_D1 [8]: Para el desarrollo de la actividad es necesario que el estudiante, tenga referentes sobre funciones; *conozca someramente que es una función lineal, sus características, sus variaciones, y sus parámetros; lo mismo lo referente a función cuadrática*.

> A2_D2 [29]: En esta actividad trato que el estudiante mire cada relación que pueda existir como *variable*, y la establezca. […] Además se trata de que el estudiante tenga una mentalidad abierta, y se dé cuenta de que no solo puede existir una *relación de variables*, y que aplicando cualquiera de ellas puedo establecer un modelo, que me servirá para reconocer la variabilidad en la matemática.

> A2_D2 [35]: Al pasar de un registro al otro espero que a través de la graficación como práctica social, establezca las *relaciones de variable dependiente-independiente*, y pueda observar cómo se podría hallar o trabajar para modelar a partir de este recurso, el gráfico. A través de los datos hallados en la tabla, utilizando solución de ecuaciones simultáneas si son conocidas por ellos, o usando diferencias para hallar *los parámetros de las funciones*; […] esto cuando necesito hallar *los parámetros* partiendo de datos dados; ya teniendo estos grafico en papel o en una hoja milimetrada, y hallo la gráfica. […]

Observamos también, que Omar sabe que existen ***relaciones entre las variables dependientes e independientes y de las variables con los parámetros de la función***, sin embargo no nos es posible explicitar por ejemplo, cuáles son esas relaciones que conoce y si distingue características distintas para las funciones lineales y para las cuadráticas. Sin embargo, sí podemos decir que el profesor considera que dichas relaciones se establecerán a través del tránsito entre registros de representación.

IV.2.1.2.3 Conocimiento de registros de representación asociados al concepto de función

Dentro del conocimiento del tema función ubicamos el que evidencia Omar sobre los distintos registros de representación de este contenido.

Tomando como ejemplo la primera tarea que propone el profesor, podemos decir que, el diseño de la actividad comienza con un problema de llenado de recipientes que Omar describe haciendo uso de su conocimiento de un registro de representación de ***lenguaje común***, enseguida proporciona un esquema que se relaciona con el problema pasando al uso de un registro ***esquemático***, luego solicita que se construya una tabla cuyas variables son la altura de llenado y el tiempo, buscando transitar hacia el trabajo con un registro ***aritmético***. Posteriormente pregunta por el comportamiento de la gráfica proponiendo una variación en el flujo, lo se refiere al uso de un registro ***gráfico.*** Finalmente, pide que se obtenga una expresión algebraica para ambas situaciones, que es precisamente el modelo matemático al que se pretende llegar usando el registro ***algebraico***.

Sin embargo, es importante señalar que cuando hablamos que estos segmentos no siempre se refieren a registros de representación de la función, como en el caso de los registros esquemático y del lenguaje común. Además algunos de estos fragmentos no se refieren a evidencias explícitas de que el profesor conoce los registros sino que son indicios de que podría conocerlos.

Por otra parte, aunque el profesor no maneja explícitamente los registros gráficos y algebraicos en la actividad (porque no la resuelve), sí sabemos que reconoce la modelación como la construcción de un modelo matemático, es decir, una expresión algebraica que represente el fenómeno que describe y que la estructura misma de las tareas busca que los estudiantes establezcan relaciones entre las gráficas y las expresiones algebraicas que modelizan a los fenómenos. Consideramos, entonces, ***reconoce que existen registros algebraicos y gráficos asociados a la representación de las funciones lineales y cuadráticas***. Sin embargo no hemos podido obtener información acerca de la profundidad con la que conoce estos registros.

> A2_D1 [30]: [Dentro de la tarea 1 el profesor pregunta:] ¿Qué clase de función se obtiene al modelar estas situaciones problema?
>
> A2_D1 [42]: [Dentro de la tarea 2 el profesor pregunta:] ¿Cuál es el modelo establecido?
>
> A2_D2 [20]: Cuando se quiere obtener un modelo matemático a partir de ciertos fenómenos reales, el proceso para la obtención recibe el nombre de modelación matemática
>
> A2_D1 [25]: [Dentro de la tarea 1 el profesor pregunta:] ¿Cómo debe ser la representación gráfica de la situación?
>
> A2_D1 [41]: [Dentro de la tarea 2 el profesor pregunta:] ¿Cómo debe ser la representación gráfica de la situación?
>
> A2_D2 [35]: […] espero que a través de *la graficación* […] establezca las relaciones de variable dependiente-independiente, y pueda observar cómo se podría hallar o trabajar para *modelar a partir de este recurso, el gráfico* […] a través de tablas, y de *gráficas* podemos reconocer en gran medida las diferentes variaciones que puede sufrir una función, al otorgarle a la variable dependiente valores diferentes a los establecidos.

Encontramos también en los siguientes fragmentos evidencias de que el profesor sabe que existen ***registros aritméticos de representación de la función***, puesto que pretende inducir en el estudiante el uso de un registro aritmético al solicitar la construcción de tablas que permitan analizar el comportamiento del fenómeno a través del establecimiento de relaciones funcionales a partir de datos numéricos. Al igual que para los registros algebraicos y gráficos, las evidencias nos muestran una capa superficial del conocimiento del profesor.

> A2_D1 [22]: [Dentro de la tarea 1 el profesor pregunta:] Construir una tabla de datos, donde las variables son altura y tiempo.
>
> A2_D1 [38]: [Dentro de la tarea 2 el profesor pregunta:] Construir una tabla de datos donde aparezcan las variables expuestas

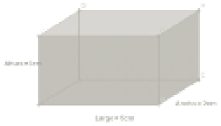
Por otra parte, el profesor pone en juego evidencias de su ***conocimiento de los registros de representación del lenguaje común de los fenómenos de llenado de recipientes y cálculo de área***, para describir las situaciones que pretende que se modelen. Estas representaciones no están directamente ligadas al concepto de función, sin embargo son parte también del conocimiento matemático que tiene Omar, por lo tanto lo consideramos dentro del MTSK.

> A2_D1 [16]: [Tarea 1] Se tiene un tanque de forma rectangular cuyo volumen se muestra en la figura, y se piensa llenar con agua con un flujo determinado de 1 cm^3 por segundo.

> A2_D1 [34]: [Tarea 2] Un agricultor desea encerrar una pequeña parcela para producir tomate, y posee malla con longitud de 500 metros, la parcelita debe ser rectangular; ¿cuál debe ser la mayor área que puede cubrir con la malla que posee?

Omar ilustra las descripciones de los fenómenos apoyándose en figuras que representen una parte de la situación que se desea modelar. A pesar de que estos esquemas no representan el concepto de función, sino que quiere ilustrar el problema consideramos que la representación no es independiente del propósito o la profesión, por lo que lo colocamos como parte del MTSK considerando que el profesor ***conoce una representación esquemática de un tanque rectangular que presenta como un prisma*** y ***conoce una representación esquemática de una parcela rectangular que dibuja como un rectángulo***.

A2_D1 [17]:



A2_D1 [35]:

Ya habíamos mencionado antes la relevancia que toma en la actividad el manejo y tránsito entre los diferentes recursos que da Omar en el desarrollo de las tareas. Consideramos que el conocimiento de base para reconocer este tránsito como proceso de trabajo matemático asociado directamente al concepto de función (KoT en la categoría de procesos) y como estrategia didáctica para la enseñanza de funciones[3] (KMT) es precisamente el conocimiento que tiene sobre los distintos registros de representación de este concepto. Esto lo vemos en relación con sus concepciones acerca de que los profesores dan prioridad al uso de registros algebraicos en el trabajo de aula.

IV.2.1.2.4 Conocimiento de la fenomenología asociada al concepto de función

El profesor habla en la introducción de su recurso sobre la importancia que tiene para él el aprendizaje del concepto de función y su potencial como herramienta modeladora de fenómenos que hemos considerado una concepción sobre la enseñanza y el aprendizaje de este contenido. Ligado a esta concepción el profesor muestra su conocimiento sobre dos fenómenos que pueden modelarse a través de la función lineal (el llenado de un recipiente con forma de prisma rectangular a velocidad constante) y función cuadrática (la variación del área de un rectángulo al mantener el perímetro constante), para estructurar el trabajo con la actividad, lo que nos proporciona una evidencia de ***conocimiento de fenómenos que pueden modelarse a través del concepto de función lineal y función cuadrática, respectivamente***.

> A2_D1 [5]: Reconociendo lo necesario que es el aprendizaje de este concepto, y su gran importancia como herramienta modeladora de distintos fenómenos matemáticos, físicos, químicos, económicos entre otros. […]

---

[3] Profundizamos sobre esta idea sobre el tránsito entre distintos registros de representación como herramienta didáctica que permita al estudiante establecer relaciones entre variables, en el apartado IV.2.1.6.2

A manera de resumen de esta sección para el lector, en la Tabla IV.16 pueden verse todos los conocimientos identificados en el trabajo de esta actividad que han sido clasificados como parte del KoT de Omar.

IV.2.1.3 Sobre el KPM en el recurso didáctico

Omar conoce la modelación matemática como proceso o serie de pasos a seguir para obtener un determinado modelo matemático de los fenómenos físicos, una caracterización de la modelación matemática como un proceso que permite interpretar fenómenos reales desde un modelo matemático, lo que puede asociarse con un ***conocimiento de la modelación matemática como una práctica particular del quehacer matemático***.

> A2_D2 [20]: Cuando se quiere obtener *un modelo matemático* a partir de ciertos fenómenos reales, el *proceso para la obtención recibe el nombre de modelación matemática* […]

En el siguiente fragmento, observamos que Omar hace una mención sobre el proceso de resolución de problemas, y parece reconocerlo como una forma de proceder específica de la matemática, compuesta por una serie de algoritmos matemáticos, lo cual nos permite percibir un ***indicio*** de que podría ***conocer la resolución de problemas como una práctica propia del trabajo matemático***.

> A2_D1 [6]: Tradicionalmente cuando se habla de *resolución de problemas* en cualquier tema tratado, *se entiende como el buscar un procedimiento bien específico utilizando algoritmos matemáticos, y así llegar a la meta propuesta*.

que tienen en matemáticas algunos aspectos de la comunicación formal. En el siguiente fragmento el profesor considera parte de un lenguaje propio de la matemática, los procesos, símbolos y procedimientos formales usados para las funciones, que considera parte importante de los procedimientos de los estudiantes, aunque no especifica cuáles son estos símbolos o procesos. Esto nos lleva a plantear que existe un ***indicio*** de que Omar pudiera conocer algo acerca del ***papel de los símbolos y el lenguaje formal dentro de la comunicación matemática*** como una práctica propia de la disciplina.

> A2_D2 [9]: Cuando hablo de *lenguaje propio del área*, me refiero a que el estudiante debe usar para dar la solución o llegar al modelo, *los procesos, símbolos, procedimientos que hacen referencia a funciones en este caso*.

Asociamos a este subdominio el conocimiento que pudiera tener Omar acerca de la importancia

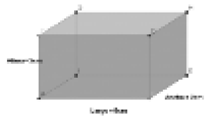
	Categorías asociadas al subdominio	**Omar conoce:**		
Conocimiento de los temas (KoT)	***Procedimientos matemáticos asociados al concepto de función***	*Solución de ecuaciones simultáneas*		
		Método de diferencias	Método de primera diferencia para las funciones lineales	
			Método de segunda diferencia para las funciones cuadráticas	
	Propiedades de las funciones	*Las funciones lineales y cuadráticas*	Están conformadas por parámetros y variables, estas últimas pueden ser variables dependientes o independientes.	
			Existen relaciones entre las variables dependientes e independientes y de las variables con los parámetros de la función.	
	Registros de representación	*Algebraico*	De la función lineal y cuadrática	Búsqueda de modelo matemático (fórmula).
		Gráfico		A partir de las representaciones gráficas podrían establecerse relaciones entre variables
		Aritmético		La construcción de tablas que ayuden a observar el comportamiento del fenómeno.
		Lenguaje común	Del llenado de recipientes a velocidad constante	*Se tiene un tanque de forma rectangular cuyo volumen se muestra en la figura, y se piensa llenar con agua con un flujo determinado de* $1cm^3$ *por segundo*
			Del cálculo de áreas con perímetro constante	*Un agricultor desea encerrar una pequeña parcela para producir tomate, y posee malla con longitud de 500 metros, la parcelita debe ser rectangular; ¿cuál debe ser la mayor área que puede cubrir con la malla que posee?*
		Esquemático	De un tanque rectangular que presenta como un prisma	
			De una parcela rectangular que dibuja como un rectángulo.	
	Fenomenología del concepto de función	*Fenómenos que pueden modelarse con funciones*	El llenado de recipientes a velocidad constante es modelado por una función lineal. El cálculo de áreas con perímetro constante es modelado con una función cuadrática.	

Tabla IV.16 Resumen de conocimiento de los temas (KoT) que posee Omar, identificado en la Actividad 2.

Por último, reconocemos en el siguiente fragmento una *oportunidad* para indagar acerca de lo que Omar *conoce acerca de prácticas de validación de resultados y argumentación que pueden ser utilizadas en matemáticas*. El profesor nos habla acerca de la posibilidad de utilizar un software y la comparación entre pares como forma para validar su resolución, sin embargo, las evidencias no son suficientes para saber lo que Omar conoce sobre los procesos de validación o sobre el uso y gestión que haría de esas herramientas para generar argumentaciones de pruebas matemáticas.

> A2_D2 [39]: El uso del software es para mostrar al estudiante que lo que él realizo no solamente lo validan sus pares, sino también una herramienta que además de ser ayuda para mostrar resultados, es como un agente externo al aula que me puede decir si lo realizado está bien o no. El estudiante le cree bastante a estas herramientas.

Señalemos también que esta participación de Omar nos deja ver su concepción acerca de que este tipo de herramientas virtuales son instrumentos fiables para los estudiantes, que confían en ellas, esto nos permite observar como esta oportunidad de conocimiento se encuentra permeada por las concepciones del profesor.

En la Tabla IV.17 se muestra el resumen de los conocimientos identificados dentro de este subdominio.

Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM)	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**
	Modelación matemática	Una caracterización de la modelación matemática como un proceso que permite interpretar fenómenos reales desde un modelo matemático.
	Indicio ***Resolución de problemas como práctica común en matemáticas***	El proceso de resolución de problemas como una forma de proceder específica de la matemática, compuesta por una serie de algoritmos matemáticos.
	Indicio ***Papel de los símbolos y el lenguaje formal***	Los procesos, símbolos y procedimientos formales usados para las funciones, que son parte del lenguaje propio del área que los estudiantes deben usar para resolver las tareas.
	Oportunidad *Las formas de validación o demostración en matemáticas*	Utilización de un software y la comparación entre pares como forma para validar su resolución

Tabla IV.17 Resumen de conocimiento de la práctica matemática (KPM) que posee Omar, identificado en la Actividad 2.

IV.2.1.4 Sobre el KSM en el recurso didáctico

Al igual que en el análisis de la actividad 1 del curso, no tuvimos suficientes evidencias para hablar de conocimientos ubicables en el subdominio de la estructura de las matemáticas.

IV.2.1.5 Sobre el KFLM en el recurso didáctico

IV.2.1.5.1 Conocimiento de las teorías de aprendizaje asociadas al concepto de función

El los fragmentos siguientes, Omar comenta que le parece importante y más adecuado ***para el aprendizaje del concepto de función cuadrática, trabajar previamente el de función lineal***. Es este conocimiento que pone en juego para elaborar y secuenciar el diseño de las tareas. Esto lo justifica comentando que una vez que los estudiantes han podido trabajar con las funciones lineales y han reflexionado sobre sus características será más sencillo repetir el proceso para las cuadráticas observando sus diferencias. Consideramos entonces que Omar posee este conocimiento como una ***teoría personal sobre el aprendizaje del concepto de función cuadrática***.

> A2_D2 [41]: Siempre he considerado que para un mejor aprendizaje del conocimiento del *concepto de función cuadrática es más probable una mejor aprehensión de este, cuando se ve primero el concepto de función lineal*.

> A2_D2 [45]: [Los ejercicios propuestos en las dos tareas] Son diferentes porque como lo mencioné anteriormente en uno de ellos trato de resignificar el concepto de función lineal, y por ende está dirigido a recoger todo lo conocido sobre funciones; [en] la segunda [tarea] se trabaja la función cuadrática. Teniendo una referencia [previa de las características que tienen las funciones lineales] puedo, con más soltura, jugar con las preguntas esperando respuestas que no son homogéneas.

Al igual que en el análisis del problema de las cuerdas, vuelven a aparecer algunos términos que provienen de la Teoría Socioepistemológica: "práctica de modelación", "discurso matemático" y "resignificación"; pero en esta actividad, Omar confirma que conoce esta teoría y que los se refiere a los constructos que provienen de ella.

> A2_D2 [10] [La tutora comenta:] Asumo, […] que al hablar de práctica, modelación, resignificación, o discurso matemático, te refieres a términos provenientes de la teoría Socioepistemológica, ¿cierto?

> A2_D2 [11]: Está en lo cierto. *La Socioepistemología* como teoría me permite mirar la educación matemática como una práctica donde solamente se transmiten conocimientos, se expresan postulados, se solucionan problemas, se realizan demostraciones, sino además me permite mirar más allá de los conceptos, cuál es el trasfondo de ellos, me permite transformar, me permite llevar los conceptos a otros contextos, me acerca al mundo real.

> A2_D2 [49]: Si lo miramos desde el punto de vista de la lingüística observamos que *Aprendizaje significativo*, y *resignificación* ambos buscan modificar los significados de un concepto; pero *aprendizaje significativo* es el proceso que se hace para obtener el aprendizaje valorativo, y donde hay modificación de nuestras conductas; mientras que *resignificación* es la práctica por la cual llego a ese aprendizaje. Esto me dice que la resignificación está inmersa en el aprendizaje significativo.

Además, hemos podido identificar que el profesor hace referencia al discurso matemático o discurso escolar como un contexto de enseñanza, una serie de las palabras y frases empleadas para dar a conocer los objetivos o las instrucciones de abordaje de la actividad, que da a los estudiantes verbalmente o las que plasma en las actividades escritas.

> A2_D1 [3]: Hoy en día en el campo de la matemática, *el discurso matemático* es tan importante tenerlo en cuenta, porque de acuerdo al análisis que se pueda hacer de este se diseñan, elaboran, desarrollan, y se aplican diferentes didácticas, usando recursos que se tienen a la mano o especializados.
>
> A2_D2 [7]: Generalmente a nuestros estudiantes se les da el objetivo general que es el expuesto por mí, que encierra una gran cantidad de conocimiento dado antes, en, y después de las situaciones presentadas. *El qué, cómo, para qué explícito el profesor lo da a conocer en su discurso escolar*.
>
> A2_D2 [33]: Como lo expuse anteriormente, *cuando el profesor utiliza el discurso matemático ofrece qué se busca o cómo puedo llegar al resultado* […]

Consideramos importante hacer este señalamiento en tanto que, como mencionamos en el análisis de la Actividad 1 del curso, el profesor utiliza en su discurso algunos elementos de lenguaje propio de la Teoría Socioepistemológica. El término “discurso matemático escolar” es usado comúnmente en esta teoría, para hacer referencia a los contenidos matemáticos que son normados por parámetros específicos del contexto escolar, es decir, lo que las instituciones educativas consideran que debe enseñarse y aprenderse sobre un determinado concepto matemático en un nivel específico y las formas en las cuales se aborda en la escuela, lo cual puede ser distinto de la forma en la que se construye este conocimiento en contextos reales (Cantoral, 2013).

Observamos en las consideraciones anteriores, evidencias de ***conocimiento sobre constructos teóricos formales provenientes de la literatura de investigación acerca del aprendizaje de las matemáticas,*** lo cual asociamos con una construcción de ***teoría personal del aprendizaje basada en una teoría formal***.

IV.2.1.5.2 Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con el concepto de función

Omar nos habla también sobre los procedimientos específicos que considera se llevarán a cabo en la actividad de acuerdo con la estructura misma de su diseño y sobre las consecuencias que esta estructura podría traer en la ***forma en la que los estudiantes interactúan con el contenido matemático***: ***estableciendo de relaciones entre variables, observar variaciones en la función respecto de uno de los parámetros, análisis de gráficas, etc…***

> A2_D2 [23]: Procedimiento es todo aquello que se debe realizar en forma ordenada, coherente para llegar al objetivo, utilizando las siguientes acciones: *elaboración de tablas, utilización de algoritmos, la elaboración de gráficas, la comparación, relaciones entre variables, variaciones matemáticas, análisis de datos, consecución modelos*, entre otras.
>
> A2_D2 [48]: […] usando esta clase de actividades ellos *[los estudiantes] pueden llegar no solo a obtener un algoritmo, sino además determinar las diferentes relaciones que se pueden dar, determinar cómo me puede variar una función con respecto a uno de los parámetros, qué puedo obtener de una gráfica, cuál es el proceso para obtener un modelo matemático.* Con todo lo anterior puedo decir que el estudiante logra nuevos significados de función.

Resaltemos aquí la estrecha relación entre la forma en la que los estudiantes se relacionarán con el contenido matemático (KFLM) y la estructura del diseño que propone Omar, el cual dirige al estudiante a llevar a cabo ciertos pasos para lograr el objetivo de resignificación del concepto (KMT)

IV.2.1.5.3 Conocimiento de fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las funciones

Identificamos el conocimiento que tiene Omar acerca de la posibilidad de que ***surjan dificultades en el proceso de aprendizaje de la función relacionadas con sus distintas formas de representación***. Este conocimiento si parece ser inherente al concepto de función en sí mismo, por lo que podemos clasificarlo como parte del KFLM.

> A2_D2 [23]: Su alta complejidad en el aprendizaje, debido a la variedad de sus representaciones en diferentes contextos, y a su forma algorítmica

No fue posible profundizar en el tipo de dificultades que conoce Omar puesto que al pretender indagar más sobre las dificultades para aprender el concepto de función, Omar habla del discurso matemático donde se desenvuelve y la falta de recursos provenientes de la investigación. Sin embargo, dichas dificultades no están asociadas directamente con el contenido matemático, sino con cuestiones de pedagogía general, por lo cual, en este segundo análisis decidimos que no podríamos asociar este fragmento con KFLM.

> A2_D2 [17]: Primero diría que es el discurso matemático donde está inmerso el profesor, donde generalmente no se utiliza la metodología más eficiente para la explicación del concepto; y en segundo los investigadores, porque nos quedamos dormidos en buscar, presentar, y crear nuevas estrategias metodológicas para la enseñanza de la función. Por esto la aprehensión del concepto de función queda muy vago, y con poco cimiento para nuevas aplicaciones.

IV.2.1.5.4 Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar las funciones

Omar tiene conocimiento de ***que la modelación de fenómenos "reales" fomentará en el estudiante el establecimiento de relaciones entre las matemáticas con un contexto atractivo y cercano y que esto le permitirá construir un ambiente propicio para el trabajo matemático***, a través de simulaciones con entornos referentes a situaciones cotidianas.

> A2_D2 [21]: Si se toma como herramienta matemática en la solución de *problemas reales*, [la modelación] permite construir en *un ambiente donde el estudiante pueda realizar las simulaciones*, y donde el modelo hallado puede ser aplicado a situaciones diferentes, permitiendo que el estudiante las utilice en otras áreas del conocimiento

> A2_D2 [43]: No creo que exista ninguna diferencia [entre hablar de parcelas o del área de un rectángulo] en la solución; *simplemente trato de cambiar el ambiente para hacerlo más atractivo*; […] uso el ambiente semirreal para entablar la relación con la modelación.

En la Tabla IV.18 se muestra el resumen de los conocimientos evidenciados por Omar en esta actividad e identificados dentro de este subdominio.

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
	Teorías de aprendizaje sobre el concepto de función	*Teoría personal*	Para el aprendizaje del concepto de función cuadrática, trabajar previamente el de función lineal.
		Teoría personal basada en una teoría formal	Constructos teóricos formales provenientes de la literatura de investigación acerca del aprendizaje de las matemáticas, en este caso la Teoría Socioepistemológica: *resignificación, discurso matemático escolar o práctica de modelación.*
	Formas de interacción de los alumnos con el concepto de función	Forma en la que los estudiantes interactúan con el contenido matemático: *estableciendo de relaciones entre variables, observar variaciones en la función respecto de uno de los parámetros, análisis de gráficas, etc…*	
	Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las funciones	Pueden surgir dificultades en el aprendizaje de las funciones que tienen que ver con las distintas formas de representación de estas.	
	Los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido	La modelación de fenómenos reales motiva a los estudiantes a trabajar con funciones.	

Tabla IV.18 Resumen de conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) que posee Omar, identificado en la Actividad 2.

IV.2.1.6 Sobre el KMT en el recurso didáctico

IV.2.1.6.1 Conocimiento de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático

Como habíamos mencionado antes, se observan algunas evidencias del uso que hace el profesor de ***constructos teóricos provenientes de la teoría Socioepistemológica***. A pesar de que la teoría no está diseñada como teoría directamente aplicable a la enseñanza, Omar utiliza estos términos para generar la estrategia didáctica que diseña. Se aprecia entonces que ***conoce estos constructos teóricos como herramienta didáctica de trabajo***.

Es importante señalar que Omar no hace una asociación de la teoría al trabajo didáctico de las funciones directamente, pero sí con el entorno de trabajo motivador que se genera con la práctica de modelación y su utilidad como herramienta para generar conocimiento matemático al establecer relaciones con los fenómenos de contextos reales en aula. Además, las participaciones no nos proporcionan suficiente información para saber qué tan profundo es su conocimiento sobre la teoría como para asegurar que tiene conocimiento sobre la teoría formal, sin embargo sí consideramos tener evidencia suficiente para decir que el profesor reconoce estos constructos como propicios para generarse una ***teoría personal de enseñanza*** basada en constructos provenientes de la teoría formal.

A2_D2 [11]: La Socioepistemología como teoría me permite mirar la educación matemática como una práctica donde solamente se transmiten conocimientos, se expresan postulados, se solucionan problemas, se realizan demostraciones, sino además me permite mirar más allá de los conceptos, cuál es el trasfondo de ellos, me permite transformar, me permite llevar los conceptos a otros contextos, me acerca al mundo real.

IV.2.1.6.2 Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de las funciones

La estructura del diseño didáctico que propone el profesor pone de manifiesto su conocimiento sobre la ***modelación de fenómenos como estrategia didáctica asociada al aprendizaje de funciones***, y su conveniencia para generar una secuencia de actividades que permita a los estudiantes trabajar el contenido matemático en contextos específicos.

A2_D2 [20]: La modelación matemática se puede mirar desde dos puntos de vista, uno como el medio para enseñar un concepto matemático, y el otro como herramienta para generar significados. En el primero se establecen unas secuencias para enseñar cualquier concepto, y en el segundo se generan significados articulando diferentes contextos para afirmar el aprendizaje.

El discurso del profesor refleja el peso que le da al uso de un contexto “real” para involucrar a los estudiantes y establecer relaciones con la modelación. Sin embargo este uso de contextos no parece estar ligado directamente a los conceptos matemáticos de función lineal y cuadrática, puesto que Omar considera que esta actividad podría trabajarse también con contextos puramente matemáticos sin cambios significativos. Aun así consideramos que Omar tiene conoce las ventajas que tiene el trabajo con la modelación de fenómenos reales con la construcción del concepto de función lineal y/o cuadrática.

Dada la evidencia en la estructura que hace de las actividades y los comentarios del fragmento siguiente, reconocemos el ***conocimiento que tiene el profesor sobre el tránsito de un registro de representación a otro como estrategia didáctica***. Esto lo justifica a través de la búsqueda de relaciones entre ellos por parte de los estudiantes para el modelado del problema.

A2_D2 [34]: ¿Qué esperas que se logre al cambiar de registro algebraico al gráfico?

A2_D2 [35]: Al pasar de un registro al otro espero que […] establezca las relaciones de variable dependiente-independiente, y pueda observar cómo se podría […] modelar a partir de este recurso […] gráfico.

Basados en la secuencia de actividades del diseño, podemos decir además que Omar ***conoce una secuencia de tareas que permite explorar las características específicas de las funciones lineales y relacionarlas con las de las funciones cuadráticas.*** Estos procedimientos son guiados por el profesor con la estructura misma del diseño por medio de la modelación matemática de fenómenos y el tránsito entre registros de representación y se enfocan en la modelación matemática de fenómenos y el tránsito entre registros de representación de la función lineal y cuadrática a través de la elaboración de tablas, utilización de algoritmos y gráficas, relacionar variables, hacer variaciones matemáticas, analizar datos y elaborar modelos, para resolver la actividad.

A2_D2 [22]: ¿Cuáles son los posibles procedimientos que consideras, seguirá el estudiante para resolver los incisos que propones?

A2_D2 [23]: Considero que cuando se habla de procedimiento es todo aquello que se debe realizar en forma ordenada, coherente para llegar al objetivo, utilizando las siguientes acciones: *elaboración de tablas, utilización de algoritmos, la elaboración de gráficas, la* *comparación, relaciones entre variables, variaciones matemáticas, análisis de datos, consecución modelos, entre otras.*

IV.2.1.6.3 Conocimiento de recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados al concepto de función

A pesar de no haber podido recopilar evidencia suficiente acerca del conocimiento matemático que tiene sobre recursos virtuales que le permitan elegirlos como un recurso potente o pertinente para el trabajo con funciones, consideramos importante resaltar que Omar ***conoce dos softwares diseñados específicamente para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Cabri y Geogebra***, aunque no tenemos información sobre el conocimiento que tiene sobre las características matemáticas y didácticas específicas de estos recursos tecnológicos para la enseñanza de las funciones lineales y cuadráticas.

A2_D1 [12]: Se usarán recursos de lápiz, y papel inicialmente, y para la verificación o validación de la actividad se utilizará un software que puede ser GEOGEBRA o CABRI.

A2_D2 [39]: El uso del software es para mostrar al estudiante que lo que él realizo no solamente lo validan sus pares, sino también una herramienta que además de ser ayuda para mostrar resultados, es como un agente externo al aula que me puede decir si lo realizado está bien o no. El estudiante le cree bastante a estas herramientas.

A continuación mostramos la Tabla IV.19 con el resumen de conocimientos ubicados en este subdominio

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
	Teorías de enseñanza	*Teoría de enseñanza personal basada en teorías formales*	Constructos teóricos de la *Socioepistemología* como herramienta didáctica de trabajo. Utiliza la idea de *práctica de modelación* como generadora de conocimientos, de ahí la relación que hace con los contextos del mundo real.
	Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza defunciones.	*Estrategias didácticas*	Modelación de fenómenos como estrategia didáctica asociada al aprendizaje de funciones
			El tránsito de un registro de representación a otro como estrategia didáctica
		Tareas	Secuencia de tareas que permite explorar las características específicas de las funciones lineales y relacionarlas con las de las funciones cuadráticas.
	Recursos materiales o virtuales	*Dos recursos virtuales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*	Geogebra o Cabri como recurso virtual para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Tabla IV.19 Resumen de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) que posee Omar, identificado en la Actividad 2.

IV.2.1.7 Sobre el KMLS en el recurso didáctico

IV.2.1.7.1 Conocimiento expectativas de aprendizaje del concepto de función en un nivel específico

Omar hace pone de manifiesto su ***conocimiento sobre la ubicación temporal del concepto de función, como parte de los contenidos del currículum de bachillerato y universidad***.

> A2_D1 [4]: El concepto de función a través del bachillerato es visto, y tratado con regularidad, el cual se extiende hacia los niveles tecnológicos, y universitarios donde generalmente se le da más relevancia.

Sin embargo, para profundizar en este conocimiento requeriríamos explorar otros conocimientos, lo que nos lleva a considerar estas participaciones como una *oportunidad para indagar sobre lo que sabe Omar de los conocimientos específicos que tienen los estudiantes, y sobre las diferencias que existen en el abordaje del mismo contenido en distintos niveles escolares*.

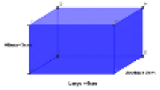
> A2_D2 [17]: Respecto al currículum no creo que repercuta en la complejidad [del aprendizaje del concepto de función], más bien en algunas instituciones se trata de colocar en los programas conceptos así sea vistos muy fugazmente en grados bajos, que son utilizados en otros con mayor intensidad.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
	Expectativas de aprendizaje del concepto de función en un nivel específico	*Ubicación temporal del concepto de función*	El concepto de función se aborda en el bachillerato, niveles tecnológicos y universidad
		Oportunidad Conocimiento de las variaciones en las expectativas de aprendizaje en cada nivel	Los conocimientos específicos que tienen los estudiantes, y sobre las diferencias que existen en el abordaje del mismo contenido en distintos niveles escolares

Tabla IV.20: Resumen de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMLS) que posee Omar, identificado en la Actividad 2.

Al igual que en el análisis de la Actividad 1, con la intención de que el lector tenga una visión general de los conocimientos analizados en esta Actividad 2, mostramos a continuación la Tabla IV.21 con todos los conocimientos asignados a los diferentes dominios y categorías de esta actividad. Además la Figura IV.9 muestra las relaciones entre los conocimientos y refleja el carácter integrado del MTSK para esta actividad.

	Categorías asociadas al subdominio	**Omar conoce:**			**Forma en que se representa el conocimiento en la Figura IV.9**
Conocimiento de los temas KoT	***Procedimientos matemáticos asociados al concepto de función***	*Solución de ecuaciones simultáneas*			▭
		Método de diferencias	Método de primera diferencia para la función lineal		
			Método de segunda diferencia para la función cuadrática		
	Propiedades de las funciones	*Las funciones lineales y cuadráticas*	Están conformadas por parámetros y variables, estas últimas pueden ser variables dependientes o independientes.		⬭
			Existen relaciones entre las variables dependientes e independientes y de las variables con los parámetros de la función.		
	Registros de representación	*Algebraico*	De la función lineal y cuadrática	Búsqueda de modelo matemático (fórmula).	▢
		Gráfico		A partir de las representaciones gráficas podrían establecerse relaciones entre variables	
		Aritmético		La construcción de tablas que ayuden a observar el comportamiento del fenómeno	

Conocimiento de los temas KoT	***Registros de representación***	*Lenguaje común*	Del llenado de recipientes a velocidad constante	*Se tiene un tanque de forma rectangular cuyo volumen se muestra en la figura, y se piensa llenar con agua con un flujo determinado de* $1cm^3$ *por segundo*	▭
			Del cálculo de áreas con perímetro constante	*Un agricultor desea encerrar una pequeña parcela para producir tomate, y posee malla con longitud de 500 metros, la parcelita debe ser rectangular; ¿cuál debe ser la mayor área que puede cubrir con la malla que posee?*	
		Esquemático	De un tanque rectangular que presenta como un prisma		
			De una parcela rectangular que dibuja como un rectángulo.		
	Fenomenología del concepto de función	*Fenómenos que pueden modelarse con funciones*	El llenado de recipientes a velocidad constante es modelado por una función lineal. El cálculo de áreas con perímetro constante es modelado con una función cuadrática.		▭
Conocimiento de la práctica de la matemática KPM	***Modelación matemática***	Una caracterización de la modelación matemática como un proceso que permite interpretar fenómenos reales desde un modelo matemático.			▭
	Indicio Resolución de problemas como práctica común en matemáticas	El proceso de resolución de problemas como una forma de proceder específica de la matemática, compuesta por una serie de algoritmos matemáticos.			▭
	Indicio Papel de los símbolos y el lenguaje formal	Los procesos, símbolos y procedimientos formales usados para las funciones, que son parte del lenguaje propio del área que los estudiantes deben usar para resolver las tareas.			⬭
	Oportunidad Formas de validación o demostración	Utilización de un software y la comparación entre pares como forma para validar su resolución			▭

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	***Teorías de aprendizaje sobre el concepto de función***	*Teoría personal*	Para el aprendizaje del concepto de función cuadrática, trabajar previamente el de función lineal.	▭
		Teoría personal del aprendizaje basada en una teoría formal	Constructos teóricos formales provenientes de la literatura de investigación acerca del aprendizaje de las matemáticas, en este caso la Teoría Socioepistemológica: *resignificación, discurso matemático escolar o práctica de modelación.*	
	Formas de interacción de los alumnos con el concepto de función	Forma en la que los estudiantes interactúan con el contenido matemático: *estableciendo de relaciones entre variables, observar variaciones en la función respecto de uno de los parámetros, análisis de gráficas, etc…*		⬭
	Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de las funciones	Pueden surgir dificultades en el aprendizaje de las funciones que tienen que ver con las distintas formas de representación de estas.		▭
	Los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido	La modelación de fenómenos reales motiva a los estudiantes a trabajar con funciones.		▢

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	***Teorías de enseñanza***	*Teoría de enseñanza personal basada en teorías formales*	Constructos teóricos de la *Socioepistemología* como herramienta didáctica de trabajo. Utiliza la idea de *práctica de modelación* como generadora de conocimientos, de ahí la relación que hace con los contextos del mundo real.	🟩
	Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza defunciones.	*Estrategias didácticas*	Modelación de fenómenos como estrategia didáctica asociada al aprendizaje de funciones	🟩
			El tránsito de un registro de representación a otro como estrategia didáctica	
		Tareas	Secuencia de tareas que permite explorar las características específicas de las funciones lineales y relacionarlas con las de las funciones cuadráticas.	
	Recursos materiales o virtuales asociados al concepto de función	*Dos recursos virtuales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*	Geogebra o Cabri como recurso virtual para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.	🟢
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	***Expectativas de aprendizaje del concepto de función en un nivel específico***	*Ubicación temporal del concepto de función*	El concepto de función se aborda en el bachillerato, niveles tecnológicos y universidad	🟥
		Oportunidad Conocimiento de las variaciones en las expectativas de aprendizaje en cada nivel	Los conocimientos específicos que tienen los estudiantes, y sobre las diferencias que existen en el abordaje del mismo contenido en distintos niveles escolares	🟥

Tabla IV.21 Resumen de MTSK identificado en la Actividad 2

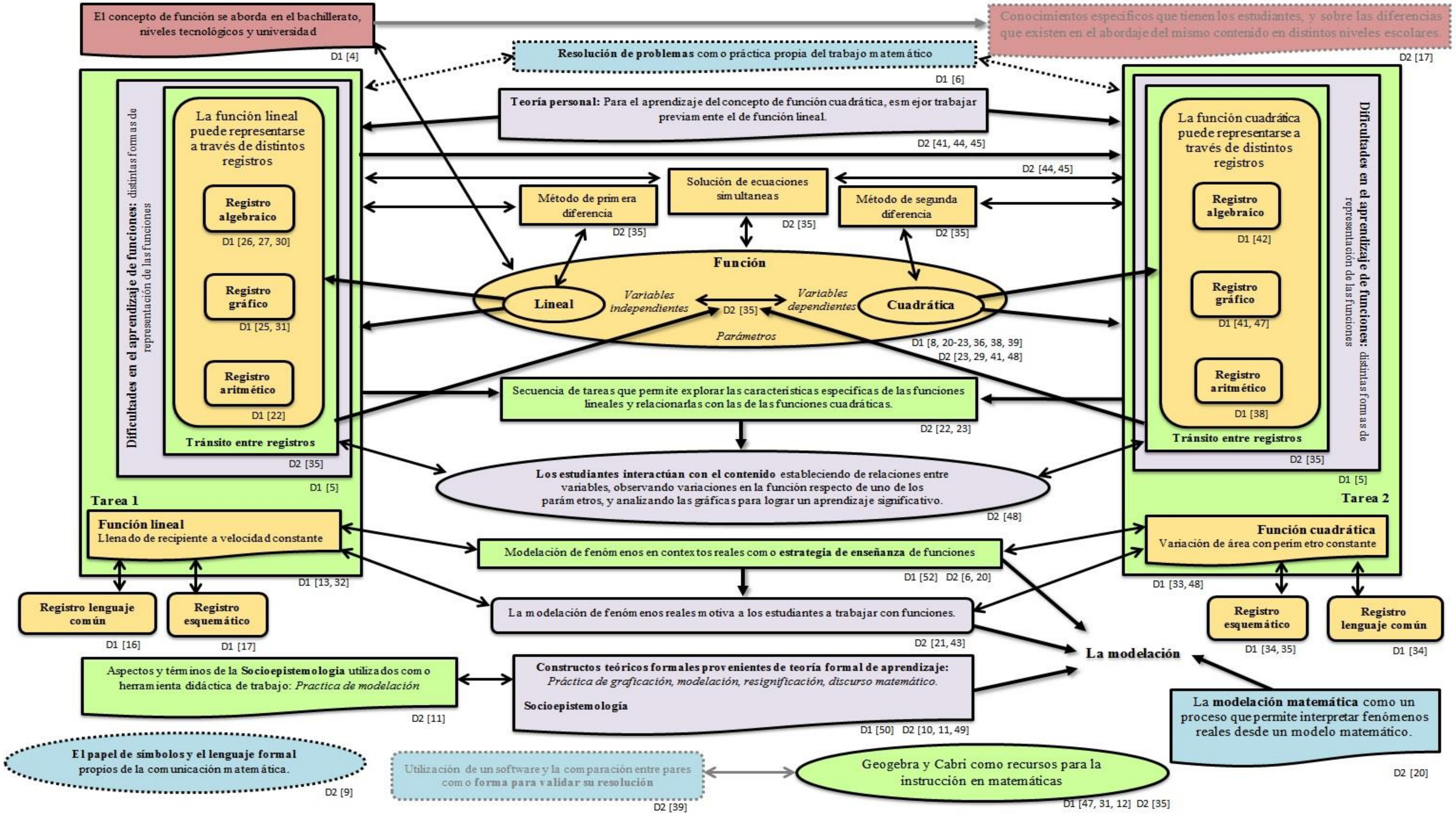


Figura IV.9 MTSK identificado en el análisis de la Actividad

IV.2.2 Resumen de conocimiento especializado de Omar identificado en la Actividad 2

Con la información mostrada en la Tabla IV.21 y la Figura IV.9 elaboramos el siguiente resumen de conocimientos identificados en el análisis de la Actividad 2 y las relaciones que hemos encontrado entre los distintos subdominios y categorías de conocimiento.

Al tratarse de una actividad en la que se solicita a los profesores diseñar y discutir tareas para el aula, los conocimientos que fueron más fácilmente localizables en el análisis fueron los correspondientes al KMT y al KFLM por lo que comenzaremos la descripción de los resultados haciendo alusión a estos conocimientos y a las relaciones que hay entre ellos.

Hemos identificado en este subdominio el conocimiento que tiene Omar sobre la ***existencia de Geogebra y Cabri como recurso virtual para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas***, a pesar de ser una evidencia sobre un conocimiento muy superficial y de no haber podido explorar la relación entre las características matemáticas de estas herramientas y el concepto de función.

Además, en esta parte del curso Omar realiza un diseño didáctico para trabajar el tema de función lineal y cuadrática para estudiantes de secundaria (14-15 años), en el que el profesor utiliza su conocimiento matemático para la enseñanza (KMT) del concepto de función. El profesor ***conoce la modelación de fenómenos como estrategia didáctica que considera asociada al concepto de funciones***. Para esto propone una secuencia de ***dos tareas que permitan explorar las características específicas de las funciones lineales y relacionarlas después con las de las funciones cuadráticas: el llenado de un recipiente a velocidad constante para la modelación de la función lineal (Tarea 1) y la variación de un área con perímetro constante para la de la función cuadrática (Tarea 2)***. Para estructurar las tareas que propone, el profesor decide utilizar el ***tránsito entre los distintos registros de representación como técnica para establecer relaciones entre las variables de la función correspondiente al fenómeno que se está modelando***.

La modelación matemática de fenómenos resulta ser también un foco central dentro del diseño que propone el profesor, la cual permite observar distintas facetas del conocimiento de Omar sobre ésta. Además de reconocer a ***la modelación como*** una ***estrategia didáctica y como un constructo teórico utilizado en teorías formales de investigación en educación matemática*** (KMT), la reconoce también ***como un proceso o práctica común en el trabajo matemático que permite interpretar fenómenos reales desde un modelo matemático*** (KPM), además de poner de manifiesto su ***conocimiento sobre las expectativas e interés que puede generar en los estudiantes al ser una forma de abordaje del contenido motivadora y dinámica*** (KFLM).

El análisis de esta actividad fue especialmente rico en cuanto a las relaciones que pudieron observarse entre el KMT y el KFLM.

La elección de la modelación como estrategia didáctica está relacionada con el conocimiento que tiene Omar de una ***teoría personal de enseñanza*** en la que la práctica de modelación es vista como una herramienta generadora de conocimientos que propicia el establecimiento de relaciones entre distintos registros de representación de un fenómeno. Esta teoría personal tiene está ***basada en la interpretación que hace el profesor del uso del constructo práctica de modelación dentro de la teoría Socioepistemológica y su relación con los contextos del mundo real*** (KMT).

Este conocimiento de constructos teóricos pertenecientes a la teoría Socioepistemológica permite al profesor construir también una ***teoría personal sobre el aprendizaje del concepto de función*** (KFLM) en la que la práctica de modelación permite relacionar distintos registros de representación de la función a través de un contexto variacional, además de que el análisis y reflexión sobre la modelación de fenómenos produce la resignificación de este concepto.

Por otra parte Omar pone de manifiesto su ***conocimiento acerca de que la variedad de representaciones asociadas al concepto de función puede representar una dificultad para su aprendizaje*** (KFLM). El diseño de la tarea nos permite observar como las concepciones que tiene Omar sobre los obstáculos u errores en la resolución de problemas como una oportunidad para el aprendizaje le permite utilizar el reconocimiento de esta dificultad para diseñar tareas que propicien el trabajo con esos diferentes registros de representación. Además observamos otra relación con el dominio de conocimiento matemático, puesto que Omar requiere de su ***conocimiento de que la función puede representarse a través de registros algebraicos, gráficos y aritméticos*** (KoT), para poder ligarlo a su c***onocimiento didáctico sobre el uso que puede darse a esos distintos registros como técnica para afrontar esta dificultad inherente al contenido a través del tránsito e identificación de relaciones entre ellos*** (KMT).

Por otra parte, Omar habla también sobre su conocimiento acerca de que ***los estudiantes interactúan con el contenido matemático estableciendo de relaciones entre variables, observando variaciones en la función respecto de uno de los parámetros, y analizando gráficas*** (KFLM) conocimiento que, como hemos explicado en el análisis, está ligado directamente a la estructura misma de las tareas que plantea el profesor.

Otra de las relaciones entre KMT y KFLM, es la que puede observarse entre el ***conocimiento que tiene Omar acerca de que es más probable lograr un mejor aprendizaje de la función cuadrática si se trabaja primero el concepto de función lineal*** (KFLM), lo cual hemos clasificado como parte de una ***teoría personal de aprendizaje*** que posee el profesor y que le permite estructural la secuencia de tareas de una forma específica.

En esta actividad hubo la oportunidad de centrarse en los conocimientos relacionados específicamente con el tema de función, lo que sirvió para poner de manifiesto que, como habíamos comentado en el análisis de la Actividad 1, el KoT es el conocimiento base del MTSK.

El ***conocimiento que tiene Omar de dos fenómenos que pueden modelarse con funciones*** y lo que sabe sobre ***las representaciones que hace de éstos a través del registro de representación de lenguaje común del llenado de un recipiente a velocidad constante y del cálculo de áreas con perímetro constante y del registro de representación esquemático de un tanque rectangular como un prisma y de una parcela rectangular como un rectángulo*** (KoT), son la base sobre la cual el profesor construye las tareas 1 y 2.

Por último, aunque Omar no resuelve explícitamente la actividad que propone y los conocimientos matemáticos que utiliza para diseñarlos están implícitos en la estructura misma de la actividad, hemos podido encontrar algunas evidencias de KoT que posee el profesor y las cuales subyacen a la estructura de su diseño.

Omar ***conoce propiedades de las funciones lineales y cuadráticas, como que están conformadas por parámetros y variables y que estas últimas pueden ser variables dependientes o independientes, además de que existen relaciones entre las variables dependientes e independientes y de las variables con los parámetros de la función***, aunque no ha sido posible profundizar en su conocimiento sobre estas relaciones ni sobre las diferencias que existen en éstas con respecto a cada tipo de función.

Encontramos además evidencias de que ***conoce dos procedimientos matemáticos asociados al concepto de función con los cuales considera que puede resolverse el diseño que propone, el***

método de solución de ecuaciones simultaneas y el método de diferencias, primera diferencia para función lineal y segunda diferencia para función cuadrática, aunque tampoco fue posible obtener más información sobre lo que sabe exactamente de estos métodos.

Por último haremos referencia al ***conocimiento que utiliza Omar para ubicar temporalmente el tema de función en el bachillerato y la universidad*** y que corresponde su KMLS, aunque no comenta nada sobre cuáles son los conocimientos específicos que tienen los estudiantes de estos niveles ni sobre las diferencias que existen en el abordaje de este contenido de un nivel a otro.

IV.3 Informe de resultados de la Actividad 3: Presentación de herramientas teóricas

Como se describió en el apartado III.6.1.1.1.3 del capítulo anterior, en esta Actividad se pedía a los profesores leer y reflexionar acerca de las herramientas teóricas que propone Georget en su trabajo doctoral, para analizar la ergonomía de un recurso didáctico: las categorías que permiten evaluar un recurso (*utilidad, utilizabilidad, adaptabilidad* y *aceptabilidad*), y los diferentes potenciales que se asocian a las actividades de investigación y de prueba entre pares –RPP (*potencial de investigación, potencial de resistencia, potencial de resistencia dinámico, potencial de debate* y *potencial didáctico*).

Omar presenta en esta actividad sus reflexiones al respecto de estas herramientas teóricas en el documento A3_D1. Aunque a los profesores del curso sólo se les había dado a leer un documento en el que se resumían las definiciones usadas por Georget para cada una de las herramientas de análisis de la ergonomía de un recurso didáctico (Puede consultarse en el Anexo III.2), Omar decidió buscar la tesis completa del autor para ampliar la información. Así, en este primer documento que entrega como tarea, el profesor nos presenta, además de sus comentarios sobre las herramientas teóricas, un análisis de algunos de los modelos pedagógicos que se ajustan a la actividad de investigación y prueba entre pares: *MATh.en.JEANS y situaciones de investigación; las situaciones de investigación en el aula o SIRC; el debate científico en el aula; talleres de investigación sobre matemática o ARM;* y *el modelo de problemas abiertos*.

Como mencionamos en la descripción del caso, una de las cosas que nos llevan a elegir a Omar como informante es precisamente su entusiasmo al respecto de las participaciones en el curso y la amplitud con la que las realiza. Esta actividad es una muestra de ese entusiasmo que nos permite tener mucha más información con la cual tratar de acceder a su conocimiento especializado.

Posterior a la lectura del documento y el envío de las reflexiones individuales, los profesores del curso participaron en las discusiones del Foro 2 que se dividió en tres conversaciones distintas, en las cuales se pudiera discutir sobre la *utilidad, la utilizabilidad* y *los potenciales de investigación* como constructos que ayuden a la evaluación de recursos y que se reflexionara sobre los diseños individuales realizados en la Actividad 2 con la ayuda de estas herramientas[1]. Hemos centrado nuestra atención únicamente en los momentos del foro en los que Omar participa de las discusiones.

Al igual que en las actividades anteriores, los documentos correspondientes a esta actividad (A3_D1, A3_F2_P1, A3_F2_P2 y A3_F2_P3), fueron organizados y codificados en un proyecto de MAXQDA para realizar un primer análisis asignando subdominios y categorías de conocimiento a través del programa, trabajando las unidades de información una a una, apoyándonos en el sistema de categorías construido en el Capítulo 3 (Ver apartado III.6.2.2) y manteniendo abierta la posibilidad de agregar, quitar o modificar el sistema a partir de las necesidades observadas en los datos. El resultado de este primer análisis puede consultarse completo en el Anexo III.4.

---

[1] Todos los documentos referentes a esta actividad están disponibles en el Anexo III.

IV.3.1 Informe de resultados del conocimiento especializado puesto de manifiesto en la Actividad 3: Presentación de herramientas teóricas

Como siempre se realizó la descarga de la información del primer análisis realizado en MAXQDA en tablas de Excel y se reacomodó para un segundo análisis para observar fragmentos provenientes de distintas unidades de información o documentos que han sido clasificadas como conocimiento de una determinada categoría o subdominio. Además se hicieron las modificaciones necesarias en las asignaciones, ya sea por haber confirmado indicios, verificado evidencias, o para analizar nuevas oportunidades de exploración de conocimiento o descartar algunas asignaciones. La presentación de resultados de esta actividad está basada en este segundo análisis de la información disponible en el Anexo III.5.

IV.3.1.1 Contextualización del conocimiento evidenciado por Omar en la Actividad 3

En el análisis de esta actividad ha sido especialmente compleja la identificación de elementos del MTSK del profesor, puesto que muchas de sus participaciones se refieren a la repetición de frases provenientes del trabajo de Georget, o a cuestiones de tipo pedagógico general más a conocimientos matemáticos.

Otro elemento importante a tomar en cuenta en esta actividad es que las reflexiones y participaciones del profesor se realizan alrededor de las herramientas teóricas como recurso de evaluación y no sobre un determinado contenido matemático, por lo que nos parece necesario presentar las participaciones que hace Omar en la actividad referentes a cada una de las herramientas teóricas de trabajo, que son las que utilizará después para ilustrar sus reflexiones sobre la ergonomía del diseño que realizó en la Actividad 2 y para hablar sobre algunos aspectos del problema de las cuerdas discutido en la Actividad 1.

> A3_F2_P2 [7]: […] *utilizabilidad* es la coherencia que tiene la actividad, si se entiende, si tiene profundidad, la manera que se le presenta a los estudiantes.

> A3_F2_P1 [8]: […] este recurso [es útil si] trata de evaluar si existe una adecuación entre el objetivo del aprendizaje definido por el profesor, y el logro de ese objetivo. La evaluación de la *utilidad* de un recurso es por lo tanto, evaluar su adecuación a los deseos de los autores o de las especificaciones. Esto nos quiere decir que es muy importante tener en cuenta el objetivo, y las metas propuestas al querer implementar una actividad. Yo como evaluador de la utilidad de un recurso debo mirar cuál es el objetivo trazado, analizar la actividad propuesta para saber qué se quiere, y si estas se relacionan, dicho recurso tiene utilidad.

> A3_D1 [7]: El criterio *Flexibilidad*; tiene que ver con los medios a disposición de los usuarios para personalizar la interfaz con la intención de dar cuenta de sus estrategias o costumbres de trabajo y las exigencias de la tarea. El criterio Flexibilidad corresponde también a las diferentes posibilidades que tienen los usuarios para lograr un objetivo dado.

> A3_D1 [8]: El criterio de la *adaptabilidad*; tiene que ver con su capacidad [la de la actividad o recurso didáctico,] para reaccionar según el contexto, y según las necesidades y preferencias de los usuarios.

> A3_D1 [9]: […] Definimos la *aceptabilidad* de un EIAH como el valor de la representación mental (actitudes, opiniones, etc., más o menos positivas). Esta representación mental puede ser individual o colectiva. La aceptabilidad puede ser sensible a factores muy diversos como la cultura y los valores de los usuarios, sus afectos, su motivación, la organización social y las prácticas en las cuales se inserta más o menos bien el EIAH.

> A3_D1 [19]: *Potencial de investigación*; son todos esos elementos que permiten que el estudiante ejerza su capacidad de indagar, y buscar un nuevo problema. […] este potencial depende de la situación problema que puede darnos una gran variedad de análisis, y profundización o no; como también depende del estudiante, que puede ir más allá de lo que le piden o simplemente se contente con poco o lo mínimo.

> A3_D1 [22]: *Potencial didáctico*; es importante que en la actividad se defina qué es lo que el estudiante debe aprender, y esta debe estar dirigida hacia el objetivo de aprendizaje. El potencial didáctico ayuda a desarrollar las nociones, y técnicas matemáticas que se pueden aplicar en la actividad, y contexto seleccionado. […]

> A3_D1 [20]: El *potencial de resistencia dinámico* es aquel en el cual la resistencia a la solución puede variar, ir de difícil a trabajable o al contrario; aquí es importante la intervención del profesor que será el encargado de orientar, y dar pautas de análisis.

> A3_D1 [21]: *Potencial de debate*; las actividades se deben diseñar [de manera que] la discusión entre pares se realice constantemente, y se realice en cada momento del desarrollo. Estos debates pueden, por ejemplo, estar relacionados al avance de la investigación/búsqueda, los contornos del problema, la definición de ciertos objetos, la validación de conjeturas, etc.

> A3_F2_P3 [13]: […] se nos dice que las potencialidades están correlacionadas una con la otra, pero ellas son independientes es decir una se puede dar sin la necesidad que la otra se dé; esto lo puedo apoyar porque hay casos en que se sucede. […]

Una vez identificados los significados que Omar ha construido con respecto a estas herramientas teóricas podemos hablar sobre las concepciones evidenciadas por el profesor en esta actividad.

Con respecto a *las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, el profesor nos habla de la conveniencia de trabajar con actividades que fomenten en el estudiante la investigación, discusión y búsqueda de información en la resolución de problemas, para propiciar con ellas un mejor aprendizaje, lo cual puede complementarse con el uso de actividades contextualizadas con fenómenos reales como la que él ha propuesto en la Actividad 2.

> A3_D1 [27]: Desarrollar el potencial de investigación, va a propiciar en el estudiante que busque, proponga, determine alternativas de solución para las diferentes actividades dadas, propiciando un mejor aprendizaje; cuando se proponen actividades de resolución de problemas, cuando se diseña una situación donde interviene una fenómeno físico, químico o matemático donde se tiene que utilizar la práctica de modelación o cuando simplemente se propone una situación de discusión estamos fomentando la investigación. […]

Además, observamos que Omar considera que siempre que una actividad propicie la investigación habrá aprendizaje puesto que dicha investigación ayuda en el desarrollo de procesos mentales que llevan a un aprendizaje significativo.

> A3_F2_P3 [13]: […] Se me dice que el potencial didáctico es cuando hay un aprendizaje en el estudiante, pero *cuando hay investigación* así no se llegue a conseguir el objetivo trazado *el estudiante aprende* a que por los métodos estudiados no es posible hallar el logro; *además cuando se investiga se desarrollan procesos mentales que llevan al aprendizaje significativo*.

En los siguientes fragmentos podemos encontrar evidencias acerca de para qué cree Omar que sirven algunas de las herramientas teóricas en la enseñanza, relacionando esto con sus creencias sobre cómo lograr un mejor desempeño de los estudiantes como resolutores a través del diseño mismo de la actividad. Podríamos decir entonces que el profesor considera que utilizar estas herramientas puede ayudarle a sustentar la construcción o diseño de actividades en matemáticas.

> A3_D1 [19]: [El] Potencial de investigación […] depende de la situación problema que puede darnos una gran variedad de análisis, y profundización o no; como también depende del estudiante, que puede ir más allá de lo que le piden o simplemente se contente con poco o lo mínimo. *Es mejor cuando los alumnos disponen de varios medios para intentar resolver el problema o para comenzar a resolverlo, que cuando no hubiera sino un sólo medio cercano para lograrlo*.

> A3_D1 [29]: Muchos creemos que todo aquello relacionado con *discusión o debate* se debe desarrollar en áreas diferentes a la matemática, pero estamos equivocados; fomentar el debate lleva no solo a conseguir el camino más propicio al objetivo, sino que *a través de éste se fundamentan procesos mentales que llevan al estudiante a obtener un aprendizaje con significado*. Cualquier tema que se diseñe se puede adaptar para que se resuelva en parte por el debate.

Con respecto a *las concepciones sobre su papel del profesor* Omar nos habla de las características que considera debería poseer un profesor como gestor y diseñador de una actividad. Considerando por ejemplo la importancia de tener un sólido conocimiento matemático y la capacidad de diseñar tareas que representen verdaderos retos para los estudiantes.

> A3_D1 [28]: *El profesor como diseñador o guía [...] debe poseer capacidad para realizar actividades donde al estudiante no le sea muy fácil desarrollar el trabajo*, y que durante toda la actividad esté buscando alternativas para la solución […] *De esta manera fomentamos la capacidad de indagar, de buscar alternativas, de no ser facilista, de profundizar; al menos se deben proponer estas actividades aunque cortas pero que mentalicen al estudiante sobre la necesidad de conocimiento.*

> A3_D1 [85]: […] para llevarlo a cabo [el modelo de problemas abiertos] *se necesita un profesor con conocimientos claros sobre los temas tratados, con gran capacidad de investigación, de diseño, y buena metodología de enseñanza*.

A pesar de que algunas de las participaciones están basadas en argumentos de tipo pedagógico general y no se observa la relación directa con el contenido matemático, consideramos importante mostrar, como parte del contexto del curso, las concepciones de Omar con respecto a que el profesor puede tener dificultades para utilizar nuevas estrategias de enseñanza debido a sus temores con respecto a los entornos virtuales o al cansancio y a que debe ser un facilitador de los procesos en la clase y que sus intervenciones deben estar dirigidas gestionar los tiempos y mantener la atención en la actividad, es decir, es una participación externa a la resolución de la actividad.

> A3_D1 [25]: El miedo que muchos profesores tienen a los medios de información y comunicación, es un obstáculo para establecer nuevas alternativas, y estrategias metodológicas del proceso enseñanza aprendizaje.

> A3_D1 [73]: La carga que lleva el profesor como director, organizador creador, diseñador, y otros, puede causar cansancio, y realizar un proceso tradicional para acortar tiempo, y trabajo.

> A3_F2_P3 [27-31]: De acuerdo a una idea que se expresa en la tesis de GEORGET, […] *el papel del profesor es el de facilitador de la investigación, el de dirigir el debate en la clase, y de darle un cierre adecuado*. Esto quiere decir que *él será el encargado de dirigir hacia el objetivo el curso; si este se ha desviado volver a que tome el rumbo, intervenir constantemente cuando observe distracción, si está utilizando tecnología como la computadora, estar pendiente que no se desvíen a realizar otras actividades que no conciernen. […]*
> Creo que referente al tiempo se debe analizar la propuesta, […] si sabemos de antemano que el grupo es bastante dedicado a su trabajo […] es posible dar […] toda la hora; de lo contrario *la intervención del profesor es crucial para cortar, y proponer conclusiones.*
> De acuerdo a la actividad si es bastante asequible se puede dar el tiempo prudente para el desarrollo; de lo contrario nuevamente *la intervención del profesor es necesaria*.
> Cuando no se conoce un grupo creo que es necesario no dar todo el tiempo para la solución, sino más bien dar el tiempo para una conclusión o reflexión sobre la actividad o *para que el profesor dé el cierre adecuado.*

Con respecto al *papel de los estudiantes* en el proceso de aprendizaje, el profesor tiene la concepción de que el idear sus propios ejemplos para un determinado concepto puede ayudar a propiciar una actitud más participativa en el diseño de las actividades y una mejor comunicación con sus pares.

> A3_D1 [30]: En algunas oportunidades los profesores proponen a sus estudiantes que ellos mismos ideen unos ejemplos sobre determinado concepto; […] es el punto de partida para promover en el estudiante el deseo de que ellos mismos realicen un taller, una clase, propongan, y diseñen actividades que las den a entender, y establezcan una comunicación fluida entre los pares.

Por otro lado, también cree que los estudiantes de universidad tienen un mayor interés por el conocimiento, distinto al de estudiantes de grados anteriores.

> A3_D1 [67]: […] a nivel universitario se puede proyectar mejor [el proyecto MATh.en.JEANS], especialmente porque el campo de acción, y el interés por el conocimiento es más inherente en el estudiante; […]

Omar proporciona también información acerca de algunas *concepciones con respecto a la importancia que le da a colocar de forma explícita los objetivos en los recursos didácticos* como apoyo para el profesor que aplicará la actividad en su aula.

> A3_F2_P1 [18-20]: *Cuando yo diseño una actividad generalmente especifico el objetivo* cuando la quiero aplicar a mis estudiantes; si yo como diseñador de la actividad coloco *el objetivo*, este no debe ser un impedimento para que otro profesor tome la propuesta, y tenga que ceñirse al objetivo planteado, porque éste lo puede usar para otra actividad que de pronto el diseñador no la realizó.
> Ya sea diseñada por mi o por otro profesor, *los objetivos de aprendizaje deben estar claros, escritos, y/o dados a conocer a nuestros estudiantes; es decir la persona que aplica el recurso debe especificar los objetivos.*
> Claro está que si es una actividad donde quiero observar si está bien diseñada, la manera de comprobarlo es presentándola sin determinar o mostrar el objetivo, con el propósito que el estudiante, llegue a la meta que en mis intereses había propuesto.

Una vez que hemos realizado esta contextualización acerca del trabajo de Omar en esta actividad 3, pasamos a describir los conocimientos identificados como pertenecientes a cada uno de los subdominios del MTSK

IV.3.1.2 Sobre el KoT en la presentación de herramientas teóricas

IV.3.1.2.1 Conocimiento de propiedades y sus fundamentos atribuibles un contenido matemático

Como hemos mencionado antes, las reflexiones de esta parte del curso no están centradas en algún contenido matemático en particular, sin embargo, el profesor utiliza algunos ejemplos para ilustrar sus participaciones, en los que utiliza parte de su conocimiento matemático. Este es el caso del siguiente fragmento en el cual Omar muestra evidencias de que sabe que ***el logaritmo de cero no existe***, aunque no fundamenta el porqué de su afirmación, lo que no nos permite saber qué otras propiedades conoce del logaritmo y si sabe cuál es el fundamento matemático que sostiene que el logaritmo de cero no existe.

> A3_F2_P1 [26]: En la mayoría de textos cuando se quiere explicar por ejemplo el logaritmo, simplemente tratan de enseñar algoritmos, y memorización; las actividades propuestas no trabajan el vacío que existe para explicar por qué *el logaritmo de cero lo damos como inexistente.* […]

La Tabla IV.22 muestra los conocimientos identificados en el trabajo de esta actividad que han sido clasificados como parte del KoT de Omar.

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
Conocimiento de los temas (KoT)	***Propiedades y fundamentos***	*Logaritmo*	El logaritmo de cero no existe

Tabla IV.22 Resumen de conocimiento de los temas (KoT) que posee Omar, identificado en la Actividad 3.

IV.3.1.3 Sobre el KSM en la presentación de herramientas teóricas

IV.3.1.3.1 Conocimiento de conexiones transversales entre contenidos

Por otro lado, al reflexionar acerca del modelo de situaciones de investigaciones en el aula o proyecto SIRC que Georget menciona dentro de las actividades de investigación y de prueba entre pares (RPP), observamos un ***conocimiento de una idea clave subyacente a la estructura de la matemática (la variación)***, la cual conecta temas como las fracciones, el logaritmo, la potencia y otros que menciona en el fragmento siguiente, al considerar que éstos tienen características compartidas que los hacen propicios para ser trabajados a través de la modelación matemáticas.

> A3_D1 [72]: Hay *muchos conceptos matemáticos* que podrían ser desarrollados por este modelo [de situaciones de investigación en el aula o SIRC]; expongo entre temas *las fracciones, el logaritmo, la potencia, la factorización, las funciones, la derivada, todo lo que tenga relación con variación, entre otras*. Creo que todo aquello que permita realizar modelos tiene que ver con este proyecto.

Como hemos mencionado en la contextualización de esta Actividad 3, la identificación de evidencias, indicios u oportunidades de exploración de otros conocimientos referentes al dominio de conocimiento matemático fue muy escasa. Pasaremos ahora a la descripción de los conocimientos referentes al dominio de conocimiento didáctico del contenido.

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**
Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)	***Conexiones transversales entre contenidos matemáticos***	Conoce una conexión transversal entre las fracciones, el logaritmo, la potencia, la factorización, las funciones y la derivada, reconociendo a la variación como la idea clave que subyace en la estructura de la matemática y que conecta todos estos contenidos.

Tabla IV.23 Resumen de conocimiento de los temas (KSM) que posee Omar, identificado en la Actividad 3.

IV.3.1.4 Sobre el KFLM en la presentación de herramientas teóricas

IV.3.1.4.1 Conocimiento de las teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático

Al igual que en el análisis del problema de las cuerdas (Actividad 1) y el diseño del recurso individual (Actividad 2), vuelven a aparecer algunos términos que parecen hacer referencia a constructos teóricos provenientes a la Teoría Socioepistemológica, al momento de hablar de la modelación como una práctica. Observamos entonces un indicio de conocimiento sobre constructos teóricos formales provenientes de la literatura de investigación acerca del aprendizaje de las matemáticas.

> A3_D1 [27]: […] cuando se promulgan actividades de resolución de problemas, cuando se diseña una situación donde interviene una fenómeno físico, químico o matemático donde se tiene que utilizar *la práctica de modelación* o cuando simplemente se propone una situación de discusión estamos fomentando la investigación. […]

IV.3.1.4.2 Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático

Pensando en que Omar había hablado en actividades anteriores sobre ***la importancia de la modelación de fenómenos reales como un mecanismo de trabajo motivador para los estudiantes***, consideramos este fragmento un complemento que aporta más evidencias al respecto de que el profesor reconoce estos contextos como algo que motiva a los estudiantes y les permite establecer más relaciones entre lo cotidiano y lo matemático.

> A3_D1 [68]: […] Las actividades más llamativas para los estudiantes son aquellas que tienen relación con las ciencias naturales, como las relacionadas con caída libre, movimientos, y aquellas donde la medición interviene de una manera primaria. […]

En la Tabla IV.23 se muestra el resumen de los conocimientos evidenciados por Omar en esta actividad e identificados dentro de este subdominio.

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	***Teorías de aprendizaje sobre el concepto de función***	*Indicio* *Teoría personal del aprendizaje basada en una teoría formal*	Constructos teóricos formales provenientes de la literatura de investigación acerca del aprendizaje de las matemáticas (Teoría Socioepistemológica) *Práctica de modelación.*
	Los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido	La importancia de la modelación de fenómenos reales como un mecanismo de trabajo motivador para los estudiantes	

Tabla IV.23 Resumen de conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) que posee Omar, identificado en la Actividad 3.

IV.3.1.5 Sobre el KMT en la presentación de herramientas teóricas

IV.3.1.5.1 Conocimiento de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático

En esta actividad, Omar vuelve a hacer uso de sus ***conocimientos sobre elementos teóricos referentes a las características de los problemas abiertos***, lo que se suma a los conocimientos evidenciados en la Actividad 1 en los que se hacía referencia a Garret y que parafrasea en las participaciones de esta actividad.

> A3_D1 [80-85]: El modelo de los problemas abiertos
>
> Un modelo bastante interesante si se mira desde la óptica del aprendizaje significativo; […] a través de las conjeturas, los diseños, los diálogos, las objeciones que realiza el estudiante está desarrollando conocimiento de una manera eficaz.
>
> *En los problemas abiertos debemos tener en cuenta los siguientes criterios:*

> *1) No se ofrece explícitamente toda la información requerida para resolverlo, pero el estudiante debe poseer la información para resolverlo.*
>
> *2) El estudiante debe ser creativo, y muy original para desarrollar la actividad, porque en algunas ocasiones el problema es ambiguo.*
>
> *3) Hay libertad para seleccionar restricciones, modelos, métodos matemáticos diferentes. La propuesta de diferentes soluciones debe ir acompañada de las correspondientes ventajas y desventajas.*
>
> […] Reconozco el potencial que tiene esta clase de modelo, pero para llevarlo a cabo se necesita un profesor con conocimientos claros sobre los temas tratados, con gran capacidad de investigación, de diseño, y buena metodología de enseñanza.

Consideramos entonces, que Omar conoce constructos teóricos referentes a una ***teoría formal de enseñanza*** con respecto al trabajo con los problemas abiertos.

IV.3.1.5.2 Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de las funciones

Ligado al conocimiento de la propuesta teórica que menciona Garret, Omar muestra también un ***indicio de conocimiento sobre las características de los problemas abiertos como una estrategia propicia para la enseñanza***, que podemos relacionar con lo detectado anteriormente en la Actividad 1.

> A3_F2_P3 [14-18]: […] el propósito de aplicar problemas abiertos consiste en posicionar a los estudiantes en la situación de investigación matemática, e introducirlo en el ambiente de trabajo para que se coloque en el lugar del investigador en matemáticas.
>
> [… Los problemas abiertos tienen] características interesantes […] desde el primer momento el estudiante debe indagar, ser creativo, original, y estar dispuesto a ocupar tiempo para el desarrollo de la actividad. Es conveniente la utilización de un problema abierto en una actividad en clase, y además es también interesante, y retador para un profesor llevarlo a su aula
>
> […] con respecto a los problemas abiertos [el profesor], debe escribir, diseñar, establecer las diferentes relaciones, distribuir el grupo, el tamaño de estos, y darle un cierre a la actividad. […]
>
> Hay muchos problemas para implementarlo comenzando desde el mismo currículo, las instituciones, y el tiempo para llevarlo a cabo.

A pesar de que los fragmentos muestran que el profesor sabe para qué pueden servir este tipo de problemas y lo que podrían detonar en los estudiantes, sus participaciones muestran argumentos de tipo pedagógico y desligados del contenido matemático, por lo que sólo podemos hablar de un indicio y no de evidencias de MTSK.

IV.3.1.5.3 Conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados al logaritmo

Observamos en las participaciones de Omar una *oportunidad* para explorar acerca de lo que Omar conoce sobre *la forma en que es tratado el concepto de logaritmo en los libros de texto*.

> A3_F2_P1 [26]: *En la mayoría de textos cuando se quiere explicar por ejemplo el logaritmo, simplemente tratan de enseñar algoritmos, y memorización; las actividades propuestas no trabajan el vacío que existe para explicar por qué el logaritmo de cero lo damos como inexistente.* Esto me indica que cualquier actividad que se trate de realizar sin incluir este parámetro, […] lo consideraría un poco incompleto en el [desarrollo del aprendizaje del] concepto.

A continuación mostramos la Tabla IV.24 con el resumen de conocimientos ubicados en este subdominio

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	***Teorías de enseñanza***	*Teoría de enseñanza formal sobre problemas abiertos*	Literatura de investigación "que habla de las características de los denominados problemas abiertos" refiriéndose al trabajo que Garret publica en 1988 en la revista Enseñanza de las Ciencias.
	Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza	***Indicio Estrategias didácticas***	Conocimiento sobre las características de los problemas abiertos como una estrategia propicia para la enseñanza de las matemáticas
	Recursos materiales o virtuales	*Oportunidad forma de abordar el logaritmo en clase*	Las estrategias, técnicas y tareas que se proponen en los libros de texto para abordar el tema de logaritmo.

Tabla IV.24 Resumen de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) que posee Omar, identificado en la Actividad 3.

IV.3.1.6 Sobre el KMLS en la presentación de herramientas teóricas

IV.3.1.6.1 Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico

En los siguientes fragmentos, el profesor nos muestra un ***indicio*** que indica que podría ***conocer la ubicación un determinado nivel escolar los distintos proyectos*** que lee en la tesis de Georget ***a través de los temas que considera pueden estar ya enseñados en un momento escolar específico***, lo cual le dará al estudiante herramientas para afrontar las tareas que se le propongan.

A3_D1 [27]: [… El potencial de] investigación *se puede aplicar desde la misma primaria*; no debe ser una actividad complicada, sino más bien de acuerdo a su desarrollo intelectual.

[El profesor al hablar del proyecto MATh.en.JEANS comenta:]

A3_D1 [68]: […] Las actividades más llamativas para los estudiantes son aquellas que tienen relación con las ciencias naturales, como las relacionadas con caída libre, movimientos, y aquellas donde la medición interviene de una manera primaria. *Las dos primeras actividades podrían aplicarse a estudiantes con algún conocimiento de ellas, o sea terminación del bachillerato; la última para estudiantes de primaria*.

[Refiriéndose al modelo de los problemas abiertos:]

A3_D1 [85]: El modelo puede ser aplicable a todo nivel de bachillerato; y los temas como se expone pueden ser variados

La Tabla IV.25 contiene el resumen de conocimientos ubicados en este subdominio

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	**Indicio** **Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico**	Conocer la ubicación en un determinado nivel escolar de los distintos tipos de trabajo matemático a través de los temas que considera pueden estar ya enseñados en ese nivel.

Tabla IV.25 Resumen de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMLS) que posee Omar, identificado en la Actividad 3.

A continuación mostramos la Tabla IV.26 con el resumen de todos los conocimientos asignados a los diferentes dominios y categorías de la Actividad 3, junto con la Figura IV.10 en la que se muestra, las relaciones entre los conocimientos y refleja el carácter integrado del MTSK para esta actividad.

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**		**Forma que representa el conocimiento de Omar en la Figura IV.10**
Conocimiento de los temas KoT	***Propiedades y fundamentos***	*Logaritmo*	El logaritmo de cero no existe	⬭
Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM	***Conexiones transversales entre contenidos matemáticos***	Conoce una conexión transversal entre las fracciones, el logaritmo, la potencia, la factorización, las funciones y la derivada, reconociendo a la variación como la idea clave que subyace en la estructura de la matemática y que conecta todos estos contenidos.		⬬
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	***Teorías de aprendizaje sobre el concepto de función***	***Indicio*** ***Teoría personal del aprendizaje basada en una teoría formal***	Constructos teóricos formales provenientes de la literatura de investigación acerca del aprendizaje de las matemáticas (Teoría Socioepistemológica) *Práctica de modelación.*	⬚
	Los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido	La importancia de la modelación de fenómenos reales como un mecanismo de trabajo motivador para los estudiantes		▢

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	***Teorías de enseñanza***	*Teoría de enseñanza formal sobre problemas abiertos*	Literatura de investigación “que habla de las características de los denominados problemas abiertos” refiriéndose al trabajo que Garret publica en 1988 en la revista Enseñanza de las Ciencias.	🟩
	Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza	***Indicio Estrategias didácticas***	Conocimiento sobre las características de los problemas abiertos como una estrategia propicia para la enseñanza de las matemáticas	🟩
	Recursos materiales o virtuales	*Oportunidad forma de abordar el logaritmo en clase*	Tratamiento habitual del logaritmo en los libros de texto.	🟢
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	***Indicio Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico***	Conocer la ubicación en un determinado nivel escolar de los distintos tipos de trabajo matemático a través de los temas que considera pueden estar ya enseñados en ese nivel.		🟥

Tabla IV.26 Resumen de MTSK identificado en la Actividad 3

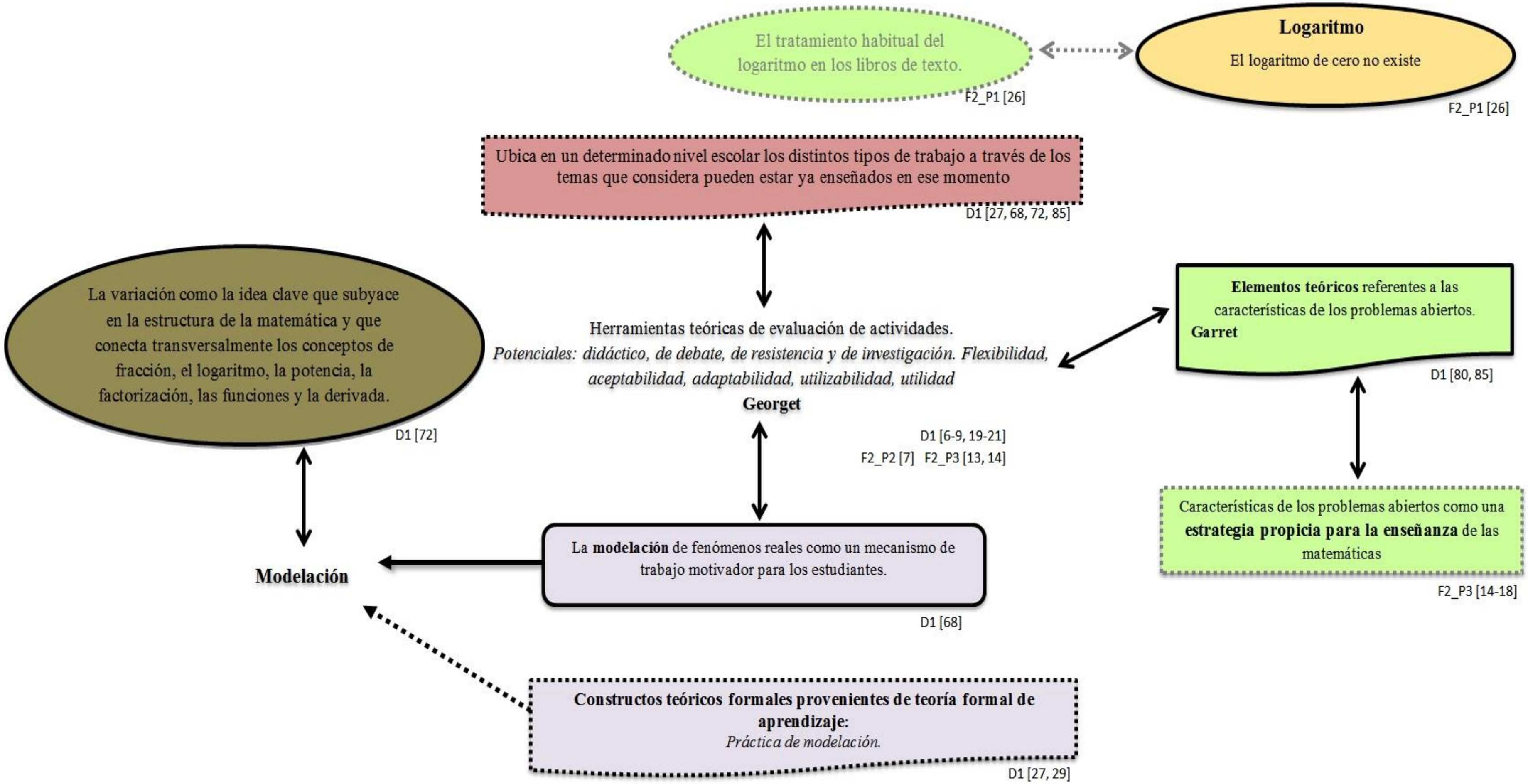


Figura IV.10 MTSK identificado en el análisis de la Actividad

IV.3.2 Resumen de conocimiento especializado de Omar identificado en la Actividad 3

El siguiente resumen de conocimiento especializado de Omar está basado en la información mostrada en la Tabla IV.26 y la Figura IV.10.

La reflexión que se pidió a los profesores sobre las herramientas teóricas de evaluación de Georget sirven como pretexto para explorar nuevos conocimientos de Omar, sin embargo, algunos de ellos están completamente desligados de las actividades y contenidos que se trataban en el curso hasta el momento de realizar esta Actividad 3 (las cuerdas, los polígonos, la función lineal y la función cuadrática). Sin embargo, al ser conocimientos específicos del profesor de matemáticas, consideramos importante tomarlos en consideración para ampliar nuestra comprensión sobre el MTSK de Omar y sobre el funcionamiento del modelo como herramienta de análisis.

El ***conocimiento que tiene el profesor acerca de la inexistencia del logaritmo de cero***, es un ejemplo del conocimiento de propiedades del contenido (KoT) que surge como un conocimiento aislado de los que habían surgido hasta este momento. Las participaciones del profesor al respecto de este contenido nos permitieron también visualizar una oportunidad para preguntarnos sobre lo que conoce el profesor acerca del tratamiento que se da habitualmente a este contenido matemático en los libros de texto, lo cual nos proporcionaría información sobre el KMT referente a los recursos.

Por otro lado, el profesor comenta algunos tipos de trabajo matemático que se llevan a cabo dentro de ciertos proyectos de investigación (como el MATh.en.JEANS). Estos comentarios ponen de manifiesto un indicio de que Omar tiene cierto conocimiento sobre los estándares de aprendizaje (KMLS) en niveles escolares específicos, que le permiten ubicar los distintos tipos de proyecto en un determinado grado de acuerdo a los temas que considera que pueden tener los estudiantes en ese momento específico de su educación.

Un punto importante del análisis de esta actividad es la aparición de una primera evidencia de conocimiento de la estructura matemática (KSM). Omar reconoce a ***la variación como idea clave que conecta transversalmente los conceptos de fracción, el logaritmo, la potencia, la factorización, las funciones y la derivada***. El profesor muestra una evidencia de saber que es la idea de variación la que subyace en la estructura de la matemática y conecta estos contenidos. Lamentablemente no se ha podido profundizar en este conocimiento para explorar más sobre este tipo de conexión.

Omar hace alusión a esta conexión entre contenidos al hablar de que éstos son propicios para trabajar con la modelación. Esta relación con la modelación matemática nos permite encontrar otras evidencias de conocimiento que sí se relacionan con los conocimientos que se ponían en juego en actividades anteriores.

El profesor muestra evidencias de reconocer que ***el trabajo con la modelación de fenómenos reales resulta ser motivante para los estudiantes***, como ya había comentado en la Actividad 2, lo cual ubicamos como parte de su conocimiento sobre las expectativas e intereses de los estudiantes al respecto de una forma específica de trabajo en matemáticas, es decir, como parte de su conocimiento de las características de aprendizaje (KFLM). Sobre este mismo subdominio muestra además nuevos indicios de conocer constructos teóricos provenientes de la Socioepistemología, al hablar de nuevo de la *práctica de modelación.*

Sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), Omar vuelve a utilizar su ***conocimiento sobre elementos teóricos referentes a los problemas abiertos***, parafraseando lo que había comentado en la Actividad 1 sobre el trabajo de Garret. A este conocimiento de agrega un indicio de que el profesor conoce ciertas características de este tipo de problemas para considerarlos como una estrategia propicia para la enseñanza de las matemáticas.

IV.4 Informe de resultados de la Actividad 4: Evaluación del recurso con herramientas teóricas

La penúltima actividad de curso consistía en realizar una evaluación de la tarea diseñada individualmente en la Actividad 2. Esta evaluación debería apoyarse en la utilización de las herramientas teóricas para analizar la ergonomía de un recurso didáctico presentadas a los profesores en la Actividad 3: las categorías que permiten evaluar un recurso (*utilidad, utilizabilidad, adaptabilidad* y *aceptabilidad*), y los diferentes potenciales que se asocian a las actividades de investigación y de prueba entre pares –RPP (*potencial de investigación, potencial de resistencia, potencial de resistencia dinámico, potencial de debate* y *potencial didáctico*).

Al igual que en las actividades anteriores, se pide a los profesores que elaboren un documento en *Word* en el que realicen una evaluación de la pertinencia de las tareas que han diseñado para sus respectivos recursos (A4_D1) y que si se considera necesario se hagan ajustes en el diseño. En esta actividad no hay discusiones grupales a través de foros. El documento correspondiente a la participación de Omar en esta actividad fue organizada y codificada en un proyecto de MAXQDA para realizar como siempre un primer análisis asignando subdominios y categorías de conocimiento a través del programa, trabajando las unidades de información una a una, apoyándonos en el sistema de categorías construido en el Capítulo 3 (Ver apartado III.6.2.2) y manteniendo abierta la posibilidad de agregar, quitar o modificar el sistema a partir de las necesidades observadas en los datos. El resultado de este primer análisis puede consultarse completo en el Anexo IV.4.

IV.4.1 Informe de resultados del conocimiento especializado puesto de manifiesto en la Actividad 4: Evaluación del recurso con herramientas teóricas

Como en las demás actividades se realizó la descarga de la información del primer análisis en MAXQDA a tablas de Excel y el reacomodó para un segundo análisis en el que se pudiesen observar fragmentos provenientes de distintas unidades de información o documentos que han sido clasificadas como conocimiento de una determinada categoría o subdominio. Esto ayudó como siempre a realizar las modificaciones necesarias en las asignaciones. Los resultados de análisis de esta actividad (disponible en el Anexo IV.5) sirven como base para realizar el informe que se muestra a continuación.

IV.4.1.1 Contextualización del conocimiento evidenciado por Omar en la Actividad 4

En esta cuarta actividad del curso, Omar explicita *los objetivos* que se ha propuesto lograr con la aplicación de su diseño, que se refieren a la construcción del concepto de función lineal y cuadrática, a través de la modelización matemática de un fenómeno físico, que permita observar las variaciones en los parámetros de las funciones. Hace alusión a fomentar el uso de conocimientos previos sobre funciones, y de la modelación de fenómenos físicos para, lo que llama, “afianzar” el conocimiento sobre función lineal y cuadrática.

Podemos interpretar que el profesor considera que al momento de resolver la actividad podrían tenerse ciertos conocimientos acerca de estas funciones pero se requiere un análisis más profundo de las relaciones entre las variables para comprender mejor su funcionamiento y sus características.

> A4_D1 [34]: *El objetivo que se propuso inicialmente* [en la Actividad 2 del curso] para [el recurso] es el siguiente: *"Comprender situaciones problemáticas, usando un lenguaje propio del área que lo lleve a afianzar el pensamiento matemático referente a funciones a través de la práctica de modelación"*. Sin embargo a través de un análisis más profundo, y con ayuda de los [tutores] se le hacen algunos ajustes para una mejor conformación de este. *Comprender los fenómenos presentados usando un lenguaje matemático que lo lleve a afianzar procesos de aprendizaje referente a funciones a través de la práctica de modelación.* Mirando el objetivo, y la propuesta didáctica presentada existe coherencia en el objetivo, y lo que se quiere obtener (metas), que a través del proceso de la modelación, y de cada una de las preguntas formuladas podemos desarrollar, y afianzar en el estudiante sus procesos de aprendizaje referentes a funciones, estableciendo una utilidad para la actividad.

> A4_D1 [62]: Esta actividad está diseñada con el fin de que los estudiantes partiendo de algunos conceptos ya enseñados sobre funciones, los pueda aplicar en el aprendizaje de la función cuadrática.

Omar destaca también su consideración sobre la modelación matemática como medio para generar significados sobre un determinado concepto. Estas son consideraciones que extrae textualmente de sus participaciones en la Actividad 2, lo cual nos indica que el profesor pretende volver a resaltar la importancia que tiene para él el trabajo de modelación como eje de su diseño.

> A4_D1 [63]: Recordando el concepto de modelación podemos decir lo siguiente: *Cuando se quiere obtener un modelo matemático a partir de ciertos fenómenos reales, el proceso para la obtención recibe el nombre de modelación matemática; la modelación matemática se puede mirar desde dos puntos de vista, uno como el medio para enseñar un concepto matemático, y el otro como herramienta para generar significados. En el primero se establecen unas secuencias para enseñar cualquier concepto, y en el segundo se generan significados articulando diferentes contextos para afirmar el aprendizaje.*

Como en los análisis de actividades anteriores, el profesor sigue haciendo uso de términos asociados a la teoría Socioepistemológica: *la resignificación, lo variacional y la práctica de modelación*, aunque continua son explicitar qué tanto sabe sobre estos constructos ni si conoce resultados de investigación asociados con estos constructos y esa teoría o relacionados directamente con el concepto de función.

> A4_D1 [34]: […] Comprender los fenómenos presentados usando un lenguaje matemático que lo lleve a afianzar procesos de aprendizaje referente a funciones a través de la práctica de modelación. […]

> A4_D1 [62]: […] El juego entre el contexto algebraico, y gráfico permite a través de la modelación *resignificar* el concepto de función cuadrática.

Con respecto a *las concepciones del profesor, sobre el recurso didáctico diseñado como objeto de enseñanza,* podemos decir que Omar hace alusión a la conveniencia de la utilización de fenómenos reales y sobre las virtudes que cree que tiene el recurso que ha diseñado: sencilla y bien estructurada. Estas apreciaciones parecen estar hechas desde un plano afectivo, por lo que las consideramos parte de las concepciones.

Además el profesor liga estas características de su diseño con las concepciones acerca de que el estudiante pueden considerar interesante este tipo de actividades puesto que lo hace sentir cómodo, lo que puede provocar un mejor desarrollo de procesos de aprendizaje.

> A4_D1 [36]: *La relación que se trata de establecer entre lo cotidiano, y el lenguaje matemático, nos lleva a pensar que el estudiante acepta con agrado este tipo de recursos, porque lo hace sentir en su ambiente, y a gusto en el desarrollo de dicho recurso*. Además porque la actividad está desarrollada para el nivel, edad, y con los recursos disponibles para que la elabore adecuadamente. *La actividad está bien estructurada, y sencilla para la aceptación por parte de colegas profesores, entendiéndola como actividad propicia para el desarrollo de procesos de aprendizaje en el estudiante.*

Con respecto a *las concepciones sobre su papel como profesor,* Omar se refiere al trabajo del profesor como aplicador o usuario de un recurso didáctico y la falta de reflexión. Nos ofrece información sobre sus concepciones acerca del papel del profesor como gestor de la enseñanza y evaluador de las potencialidades y limitaciones de una determinada actividad o tarea.

> A4_D1 [68]: Realizar un análisis a las actividades propuestas en el aula de clase, y [seguir] pautas como las presentadas en las "herramientas teóricas para el análisis de recursos didácticos" guían al profesor para que en próximas actividades fomente las líneas en los cuales se demuestra fortaleza, mejore aquellas donde existen deficiencias, mire otras oportunidades donde se puede aplicar recursos, y analice que amenazas le pueden traer una actividad mal planeada o diseñada a los estudiantes.

Como mencionamos al principio de este capítulo, uno de los objetivos principales de esta actividad era la evaluación del recurso didáctico diseñado en la Actividad 2 con las herramientas teóricas que Georget propone. El profesor realiza esta evaluación de su diseño con estas herramientas haciendo así una concreción del conocimiento de teorías al caso de los recursos, sin embargo el uso y discusión que hace de estas herramientas sigue sin estar directamente ligado al contenido matemático, por lo que no las hemos considerado como parte del MTSK.

> A4_D1 [57]: Referente a la utilidad que puede tener la actividad, la podemos establecer con el objetivo propuesto, aquí debemos ser bastante claros porque de lo contrario otra persona no le encuentra correlación en el desarrollo de la actividad, y su objetivo. […]
>
> A4_D1 [58]: Si hablamos de la adaptabilidad de este recurso, puede ser usado para estudiantes de octavo, o de undécimo grado, y por qué no a universitarios cuando se hable de integrales […]
>
> A4_D1 [60]: […] Debido al cambio de ritmo de una manera organizada, y dirigida creo que se aplica el potencial de resistencia y resistencia dinámica.

Pasemos ahora a la descripción de los conocimientos identificados como pertenecientes a cada uno de los subdominios del MTSK en esta Actividad 4, tomando en cuenta que el análisis de la evaluación realizada por el profesor sobre su diseño de la Actividad 2, nos ayudó a ampliar las evidencias de conocimiento especializado de Omar con respecto al concepto de función, sobre todo en el dominio didáctico, por lo que la identificación de nuevas evidencias en el dominio matemático resultan algo escazas aunque no menos importantes que en actividades anteriores.

IV.4.1.2 Sobre el KoT en la evaluación del recurso con herramientas teóricas

IV.4.1.2.1 Conocimiento de la fenomenología asociada al concepto de función

Identificamos en este documento de evaluación, una *oportunidad de explorar si Omar reconoce las características de matematización de fenómenos reales como parte de la fenomenología de la función lineal y cuadrática*, que es el tema que aborda en el recurso que diseña.

> A4_D1 [57]: […] La palabra fenómeno tiene que ser bien entendida como la situación matemática que se presenta en una actividad, y que para su desarrollo necesita procesos en este caso matemáticos; los fenómenos más utilizados son los físicos.

Este fragmento parece estar relacionado con los indicios de conocimiento referente a la fenomenología encontrados en la Actividad 2, sobre el conocimiento de Omar acerca del papel de la función como herramienta modeladora de fenómenos reales.

En la Tabla IV.27 mostramos el conocimiento identificado en el trabajo de esta actividad que han sido clasificados como parte del KoT de Omar.

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
Conocimiento de los temas (KoT)	***Fenomenología del concepto de función***	*Oportunidad Características de matematización de fenómenos reales como parte de la fenomenología de la función lineal y cuadrática*	El papel de la función como herramienta modeladora de fenómenos reales

Tabla IV.27 Resumen de conocimiento de los temas (KoT) que posee Omar, identificado en la Actividad 4.

IV.4.1.3 Sobre el KPM en la evaluación del recurso con herramientas teóricas

Al igual que en la Actividad 2 del curso, en este documento A4_D1, se hace mención de la posibilidad de usar un software graficador para verificar o validar la solución del problema, lo que podría utilizarse como otra *oportunidad para profundizar en el conocimiento que tiene Omar sobre los procesos y herramientas de validación y demostración en matemáticas*.

> A4_D1 [8]: Se usarán recursos de lápiz, y papel inicialmente, y *para la verificación o validación de la actividad se utilizará un software* que puede ser GEOGEBRA o CABRI

Este conocimiento está ligado a su conocimiento de Geogebra y Cabri como herramientas para la instrucción en matemáticas, que se describirá en el KMT.

La Tabla IV.28 contiene el KPM identificado en el trabajo de esta actividad.

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**
Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM)	*Oportunidad* *Las formas de validación o demostración en matemáticas*	Geogebra y Cabri como herramientas para validar procesos matemáticos asociados con la modelación matemática

Tabla IV.28 Resumen de conocimiento de los temas (KPM) que posee Omar, identificado en la Actividad 4.

IV.4.1.4 Sobre el KFLM en la evaluación del recurso con herramientas teóricas

IV.4.1.4.1 Conocimiento de las teorías de aprendizaje asociadas al concepto de función lineal

Al momento de hablar acerca del potencial didáctico de su diseño, el profesor se refiere a lo que se aprende al resolver las tareas que propone, consideramos estas participaciones una oportunidad para explorar el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de la función lineal a través del análisis de la variación y el cambio, es decir, de un contexto variacional.

> A4_D1 [33]: […] se puede observar en las primeras preguntas [de la primera tarea] cómo el diseño didáctico dirige al estudiante a inmiscuirse en el contexto variacional, invitándolo a desarrollar una serie de actividades. Seguidamente lo invita a que [… establezca] un modelo matemático, y que represente los datos en un gráfico, para luego incitarlo a que comience a realizar variaciones fomentando la investigación, y la aprehensión de conocimiento. De esta manera podemos observar el potencial didáctico que tiene la actividad

IV.4.1.4.2 Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con el concepto de función

Identificamos aquí un ***indicio de conocimiento acerca de la necesidad que tendrán los estudiantes de cambiar sus procesos a lo largo del desarrollo de la actividad***. Principalmente habla de un cambio en el nivel de exigencia al cambiar las condiciones de los fenómenos como prolongar la altura del recipiente o variar la velocidad del flujo. Omar considera que estos cambios requerirán una variación en las estrategias de resolución de los estudiantes.

> A4_D1 [35]: [Refiriéndose a la primera tarea de su recurso el profesor señala:] La propuesta hace que el estudiante no prosiga con el mecanismo de solución tradicional, sino que debe utilizar otros mecanismos para dar solución a la situación presentada.

> A4_D1 [56]: [A partir de este fragmento, Omar hace referencia a la segunda tarea propuesta en su recurso:] Observando con atención la actividad nos damos cuenta que en el enunciado si hay una situación problema explícita (¿cuál debe ser la mayor área que puede cubrir con la malla que posee?) *Esta pregunta inmediatamente hace que el estudiante comience a maquinar el problema de cómo conseguir el máximo de área para encerrarlo con la malla que posee*.

Aunque Omar sigue mencionando la necesidad de los estudiantes de utilizar distintas estrategias o mecanismos de solución distintos a los tradicionales, no hace explícitos cuáles son esos mecanismos. Lo que sí explica es que es la actividad misma la que generará esa variación en los procesos, por lo que este conocimiento lo reconocemos ligado directamente al KMT.

El resumen de los conocimientos evidenciados por Omar en esta actividad e identificados dentro de este subdominio se muestra en la Tabla IV.29

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	***Teorías de aprendizaje sobre el concepto de función***	*Oportunidad* *El conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de la función lineal a través del análisis de la variación y el cambio*	Una forma de resignificar la función lineal es a través del análisis de la variación y el cambio en los parámetros de ésta: *contexto variacional*
	Formas de interacción de los alumnos con el concepto de función	***Indicio*** ***Necesidad que tendrán los estudiantes de cambiar sus procesos a lo largo del desarrollo de la actividad***	Hay cambio en el nivel de exigencia al cambiar las condiciones de los fenómenos como prolongar la altura del recipiente o variar la velocidad del flujo, y estos requerirán una variación en las estrategias de resolución de los estudiantes

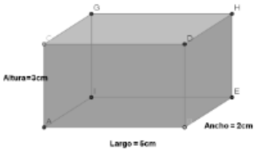
Tabla IV.29 Resumen de conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) que posee Omar, identificado en la Actividad 4.

IV.4.1.5 Sobre el KMT en la evaluación del recurso con herramientas teóricas

IV.4.1.5.1 Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de las funciones

A pesar de que Omar tenía la opción de modificar el recurso didáctico diseñado en la Actividad 2 del curso con base en la evaluación que hiciera de él a través de las herramientas teóricas que Georget propone, el profesor decide presentar las mismas tareas de su diseño sin cambios.

Como ya han sido analizados los conocimientos identificados en los segmentos correspondientes a estas tareas en el apartado 4.2, no consideramos necesario repetir el análisis completo para esta actividad, dado que, al finalizar los análisis de todas las actividades haremos un ejercicio de recopilación y relación de conocimientos en todas las actividades del curso, especialmente de la 2 a la 5. Sin embargo, para fines de contextualización de los nuevos conocimientos detectados, nos parece importante considerar de nuevo que el profesor conoce una secuencia didáctica relativa al concepto de función lineal y función cuadrática, a través de la cual, el estudiante puede establecer relaciones entre variables de manera que se fomente la generación de significados en el concepto de función.

> A4_D1 [9-13]: Consta de dos situaciones problema que se relacionan con escenarios que generalmente observamos muy a menudo en nuestro medio, y en contextos matemáticos.
>
> PRIMERA ACTIVIDAD
>
> Se tiene un tanque de forma rectangular cuyo volumen se muestra en la figura, y se piensa llenar con agua con un flujo determinado de $1cm^3$ por segundo.
>
> 
>
>
> Se pretende analizar la situación para poder establecer lo diferentes vínculos, y desarrollarla.

> A4_D1 [38-40]: SEGUNDA ACTIVIDAD
>
> Un agricultor desea encerrar una pequeña parcela para producir tomate, y posee malla con longitud de 500 metros, la parcelita debe ser rectangular; ¿cuál debe ser la mayor área que puede cubrir con la malla que posee?
>
> 

A esta información el profesor agrega evidencias de su ***conocimiento sobre características de la tarea 1 como estrategia didáctica propicia para el trabajo con la función lineal***, como la conveniencia de tomar en cuenta la variación y el cambio como foco central de trabajo y la búsqueda de un modelo matemático que represente variaciones propias de este tipo de funciones, así como la flexibilidad de esta tarea para adaptarse a distintos niveles educativos.

> [Mientras analiza la Tarea 1, el profesor comenta:]
>
> A4_D1 [33]: […] se puede observar en las primeras preguntas cómo el diseño didáctico dirige al estudiante a inmiscuirse en el contexto variacional, invitándolo a desarrollar una serie de actividades. Seguidamente lo invita a que […establezca] un modelo matemático, y que represente los datos en un gráfico, para luego incitarlo a que comience a realizar variaciones fomentando la investigación, y la aprehensión de conocimiento. […]
>
> A4_D1 [35]: […] La actividad me permite adaptarla para diferentes grados, lo cual indica que no es rígida; además en el ambiente que se presenta el fenómeno hace que el estudiante desarrolle las preguntas sintiéndose no ajeno a dicha situación más bien se introduce en este de una manera fácil. La propuesta hace que el estudiante no prosiga con el mecanismo de solución tradicional, sino que debe utilizar otros mecanismos para dar solución a la situación presentada.

Al igual que con la Tarea 1, Omar hace explícitas algunas de sus consideraciones que hace para el diseño de la Tarea 2 mostrando su ***conocimiento acerca de las características de la tarea 2 como estrategia didáctica propicia para abordar el concepto de función cuadrática***.

El profesor considera que esta tarea mantiene coherencia entre el objetivo que se plantea de resignificar el concepto de función y que los medios que proporciona al estudiante para alcanzarlo son adecuados, es decir, encuentra que el diseño que hace y la secuenciación de las preguntas que va formulando es propicia para alcanzar los objetivos. Esta consideración lo lleva a evaluarlo como un recurso útil para el trabajo con funciones.

> [Mientras analiza la Tarea 2, el profesor comenta:]
>
> A4_D1 [59, 60]: Mirando lo referente a su estructura podemos decir lo siguiente: en el primer inciso menciono las variables como parte del problema con el propósito de que el estudiante se inmiscuya directamente con dicho problema. En la segunda pregunta inmediatamente coloco al estudiante en el ámbito de investigación, porque debe comenzar a realizar comparaciones, variaciones, predicciones, para desarrollarla. En el numeral (h) nuevamente el estudiante debe usar los recursos de investigación para dar solución o proponer una aproximación a esta pregunta.
>
> Como en la tarea anterior, en ésta también los estudiantes pasan de instantes donde debe reconocer fácilmente los procesos a aplicar, a otros donde la investigación se hace presente; al leer las preguntas los individuos con un conocimiento aceptable dará solución a algunos numerales como el (a, c, d, g) por los conceptos previos que se tienen, pero los demás si necesitan de un análisis más profundo donde se debe utilizar medios, y recursos diferentes a los que venía usando. […]
>
> A4_D1 [64, 65]: La actividad permite que después de realizar la aprehensión del conocimiento significativo sobre función cuadrática, pueda llevarlos a contextos diferentes, y aplicarlos allí; esto me permite realizar adaptaciones para diferentes grados. El estudiante para resolver la situación presentada debe recurrir al uso de herramientas, y mecanismos que ayudan al desarrollo cognoscitivo, y procedimental.
>
> La actividad crea conflictos cognitivos respecto de los que se tienen, y los nuevos; lo cual conlleva a que se cree conocimiento.

Ambas tareas, la 1 y la 2 parecen tener la misma estructura de trabajo con la variante del fenómeno que se modela, por lo que las relaciones establecidas entre variables son distintas. Esto nos hace pensar que las características que el profesor reconoce en una tarea tienen relación con la otra.

Además, podemos observar aquí una relación directa de estos conocimientos con el KFLM, en tanto que el diseño y estructura misma de la actividad busca la generación y utilización de procedimientos específicos por parte de los estudiantes para la resolución del problema para generar el aprendizaje de significados específicos de la función lineal y cuadrática.

Por otro lado, detectamos de nuevo, evidencias de que Omar tiene ***conocimiento de la modelación de fenómenos reales como técnica de enseñanza de las funciones***. En el análisis de las Actividades 2 y 3 del curso hemos hablado ya del conocimiento que muestra Omar sobre la modelación y el uso que hace de ésta y en el segmento siguiente, en el que el extracto marcado es una repetición textual de su trabajo en A2_D2 [20]

> A4_D1 [63]: […] La forma como se desarrolla la actividad conduce al estudiante a crear nuevos procesos de aprendizaje sobre función cuadrática, retomando los conocimientos previos para crearlo. Recordando el concepto de modelación podemos decir lo siguiente: *Cuando se quiere obtener un modelo matemático a partir de ciertos fenómenos reales, el proceso para la obtención recibe el nombre de modelación matemática; la modelación matemática se puede mirar desde dos puntos de vista, uno como el medio*

> *para enseñar un concepto matemático, y el otro como herramienta para generar significados. En el primero se establecen unas secuencias para enseñar cualquier concepto, y en el segundo se generan significados articulando diferentes contextos para afirmar el aprendizaje.* Mirando la coherencia que existe entre el objetivo, y el desarrollo de la actividad, se puede decir que existe una buena utilidad.

Para terminar con los conocimientos identificados dentro de esta categoría, resaltamos la detección de un ***indicio de conocimiento de la potencialidad de usar distintos registros de representación como estrategia didáctica*** para lo cual se requiere un conocimiento de los distintos registros en los cuales puede abordarse el concepto de función y que habíamos identificado previamente en el análisis de la Actividad 2 del curso como parte del KoT

> A4_D1 [35]: La propuesta como está diseñada se puede ver que tiene la particularidad de manejar contextos diferentes como el algebraico, el visual, y el gráfico que unidos fundamentan el aprendizaje de funciones. […]

> A4_D1 [62]: […] El juego entre el contexto algebraico, y gráfico permite a través de la modelación resignificar el concepto de función cuadrática

IV.4.1.5.2 Conocimiento de recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático

Omar había mostrado en actividades anteriores pistas al respecto de su ***conocimiento de softwares diseñados para realizar representaciones esquemáticas y gráficas de un determinado contenido matemático***. En esta Actividad 4, el profesor vuelve a recurrir a esta idea ofreciéndonos otra evidencia de este conocimiento al mencionar ***Geogebra y Cabri***. Además, como mencionamos en la descripción del KPM, el profesor relaciona este conocimiento con la posibilidad de usar estas herramientas tecnológicas para verificar o validar los resultados de los estudiantes.

> A4_D1 [8]: Se usarán recursos de lápiz, y papel inicialmente, y para la verificación o validación de la actividad se utilizará un *software que puede ser GEOGEBRA o CABRI*

A continuación mostramos la Tabla IV.30 con el resumen de conocimientos ubicados en este subdominio

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	***Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de las función lineal y cuadrática***	*Una secuencia de tareas relativa al concepto de función lineal y función cuadrática*	Tareas 1 y 2 del recurso didáctico presentado en la Actividad 2 del curso, para establecer relaciones entre variables de manera que se fomente la generación de significados en el concepto de función.
		Características de la tarea 1 como estrategia didáctica propicia para el trabajo con la función lineal	Conveniencia de tomar en cuenta la variación y el cambio como foco central de trabajo y la búsqueda de un modelo matemático que represente variaciones propias de este tipo de funciones, así como la flexibilidad de esta tarea para adaptarse a distintos niveles educativos
		Características de la tarea 2 como estrategia didáctica propicia para abordar el concepto de función cuadrática	Esta tarea mantiene coherencia entre el objetivo que se plantea de resignificar el concepto de función y que los medios que proporciona al estudiante para alcanzarlo son adecuados, es decir, encuentra que el diseño que hace y la secuenciación de las preguntas que va formulando es propicia para alcanzar los objetivos
		La modelación de fenómenos reales como estrategia de enseñanza	Llenado de recipientes a velocidad constante y cálculo de área con perímetro constante.
		Indicio Potencialidad de usar distintos registros de representación como técnica didáctica	El tránsito por distintos registros de representación permite, a través de la modelación, resignificar el concepto de función cuadrática.
	Recursos materiales y virtuales	*Herramientas tecnológicas*	Geogebra y Cabri como recursos tecnológicos para la representación gráfica y esquemática de contenidos y la verificación de resultados.

Tabla IV.30 Resumen de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) que posee Omar, identificado en la Actividad 4.

IV.4.1.6 Sobre el KMLS en la evaluación del recurso con herramientas teóricas

IV.4.1.6.1 Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico

En los segmentos siguientes observamos algunas pistas acerca de lo que sabe Omar de los conceptos que se ponen en juego para resolver las actividades y los que se aprenderán al terminar la resolución del recurso diseñado podría ser útil para estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad. El profesor considera que esto es posible adaptando las tareas a nuevos contextos y buscando el uso de recursos matemáticos correspondientes al nivel que se desee atender.

Consideramos esto un indicio del conocimiento que puede tener Omar sobre los estándares de aprendizaje que pueden tener los estudiantes en cada nivel escolar en el que pudiera aplicarse el recurso. Estos indicios pueden asociarse con los conocimientos identificados en los análisis de las Actividades 2 y 3.

A4_D1 [36]: […] la actividad está desarrollada para el nivel, edad, y con los recursos disponibles para que la elabore adecuadamente. […]

A4_D1 [58]: Si hablamos de la adaptabilidad de este recurso, puede ser usado para estudiantes de octavo, o de undécimo grado, y por qué no [para] universitarios cuando se hable de integrales […]

A4_D1 [64]: La actividad permite que después de realizar la aprehensión del conocimiento significativo sobre función cuadrática, pueda llevarlos a contextos diferentes, y aplicarlos allí; esto me permite realizar adaptaciones para diferentes grados. […]

Los conocimientos asociados a este subdominio están resumidos en la Tabla IV.31.

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	***Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico***	***Indicio Estándares de aprendizaje que pueden tener los estudiantes en cada nivel escolar en el que pudiera aplicarse el recurso***	Es posible que el recurso diseñado sea útil para estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad, adaptando las tareas a nuevos contextos y buscando el uso de recursos matemáticos correspondientes al nivel que se desee atender.

Tabla IV.31 Resumen de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMLS) que posee Omar, identificado en la Actividad 4.

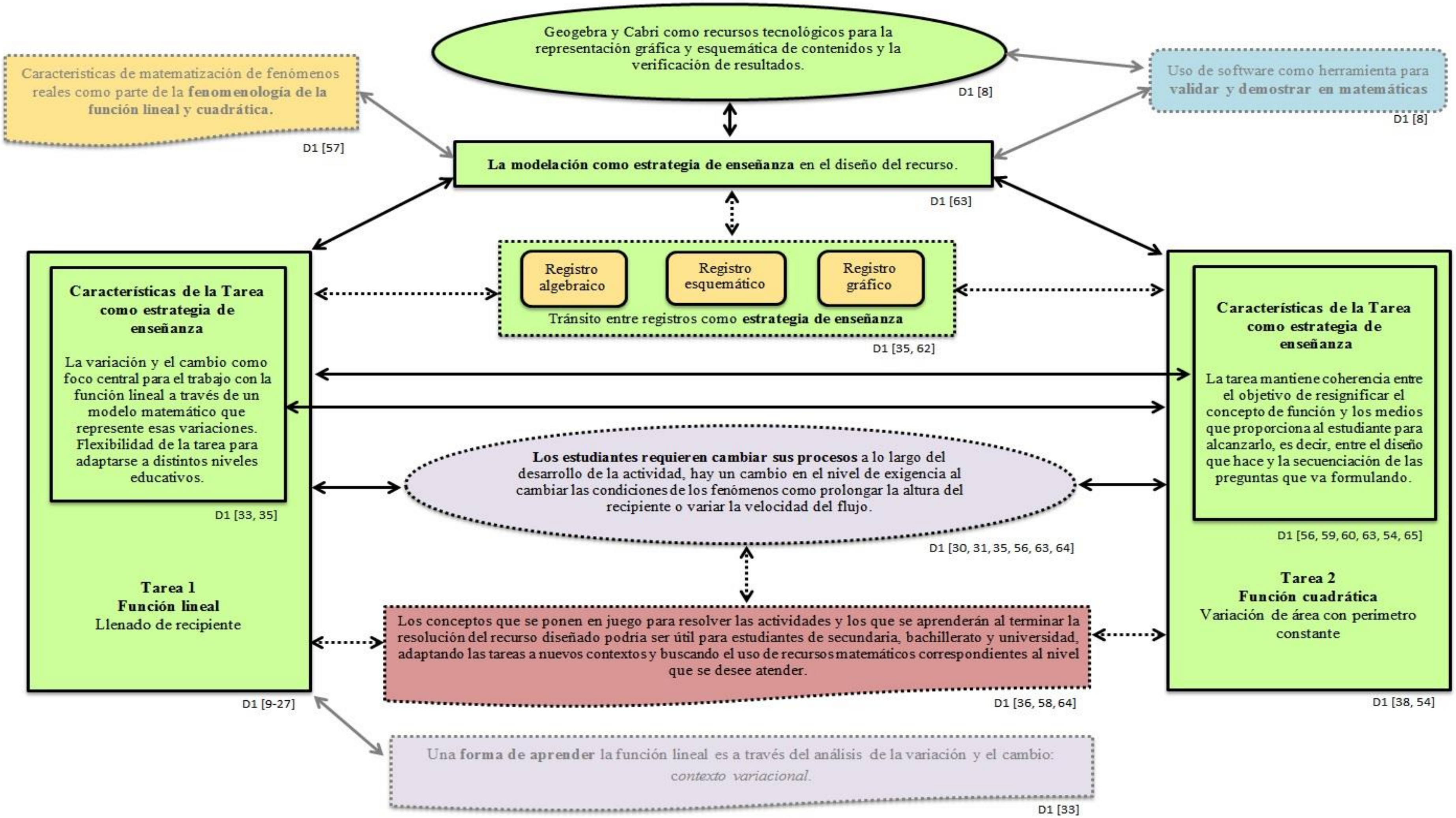
Al igual que en el análisis de las actividades anteriores, mostramos a continuación la Tabla IV.32 con el resumen de todos los conocimientos asignados a los diferentes dominios y categorías de esta Actividad 4, junto con la Figura IV.11 que muestra las relaciones entre los conocimientos y refleja el carácter integrado del MTSK para esta actividad.

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**		**Forma que representa el conocimiento de Omar en la Figura IV.11**
Conocimiento de los temas KoT	***Fenomenología del concepto de función***	*Oportunidad* *Características de matematización de fenómenos reales como parte de la fenomenología de la función lineal y cuadrática*	El papel de la función como herramienta modeladora de fenómenos reales	🟨
Conocimiento de la práctica de la matemática KPM	*Oportunidad* *Las formas de validación o demostración en matemáticas*	Geogebra y Cabri como herramientas para validar procesos matemáticos asociados con la modelación matemática		🟦
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	***Teorías de aprendizaje sobre el concepto de función***	*Oportunidad* *Aprendizaje de la función lineal a través del análisis de la variación y el cambio*	Una forma de resignificar la función lineal es a través del análisis de la variación y el cambio en los parámetros de ésta: *contexto variacional*	🟪
	Formas de interacción de los alumnos con el concepto de función	***Indicio*** ***Conocimiento acerca de la necesidad que tendrán los estudiantes de cambiar sus procesos a lo largo del desarrollo de la actividad***	Hay cambio en el nivel de exigencia al cambiar las condiciones de los fenómenos como prolongar la altura del recipiente o variar la velocidad del flujo, y estos requerirán una variación en las estrategias de resolución de los estudiantes	⬭

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	***Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de las función lineal y cuadrática***	*Una secuencia de tareas relativa al concepto de función lineal y función cuadrática*	Tareas 1 y 2 del recurso didáctico presentado en la Actividad 2 del curso, para establecer relaciones entre variables de manera que se fomente la generación de significados en el concepto de función.	🟩
		Características de la tarea 1 como estrategia didáctica propicia para el trabajo con la función lineal	Conveniencia de tomar en cuenta la variación y el cambio como foco central de trabajo y la búsqueda de un modelo matemático que represente variaciones propias de este tipo de funciones, así como la flexibilidad de esta tarea para adaptarse a distintos niveles educativos	
		Características de la tarea 2 como estrategia didáctica propicia para abordar el concepto de función cuadrática	Esta tarea mantiene coherencia entre el objetivo que se plantea de resignificar el concepto de función y que los medios que proporciona al estudiante para alcanzarlo son adecuados, es decir, encuentra que el diseño que hace y la secuenciación de las preguntas que va formulando es propicia para alcanzar los objetivos	
		La modelación de fenómenos reales como estrategia de enseñanza	Llenado de recipientes a velocidad constante y cálculo de área con perímetro constante.	
		Indicio ***Potencialidad de usar distintos registros de representación como técnica didáctica***	El tránsito por distintos registros de representación permite, a través de la modelación, resignificar el concepto de función cuadrática.	⬚
	Recursos materiales y virtuales	*Herramientas tecnológicas*	Geogebra y Cabri como recursos tecnológicos para la representación gráfica y esquemática de contenidos y la verificación de resultados.	⬭

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	***Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico***	***Indicio*** ***Estándares de aprendizaje que pueden tener los estudiantes en cada nivel escolar en el que pudiera aplicarse el recurso***	Es posible que el recurso diseñado sea útil para estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad, adaptando las tareas a nuevos contextos y buscando el uso de recursos matemáticos correspondientes al nivel que se desee atender.	🟥

Tabla IV.32 Resumen de MTSK identificado en la Actividad 4



Geogebra y Cabri como recursos tecnológicos para la representación gráfica y esquemática de contenidos y la verificación de resultados.
D1 [8]

Características de matematización de fenómenos reales como parte de la **fenomenología de la función lineal y cuadrática.**
D1 [57]

Uso de software como herramienta para **validar y demostrar en matemáticas**
D1 [8]

La modelación como estrategia de enseñanza en el diseño del recurso.
D1 [63]

Registro algebraico

Registro esquemático

Registro gráfico

Tránsito entre registros como **estrategia de enseñanza**
D1 [35, 62]

Características de la Tarea como estrategia de enseñanza

La variación y el cambio como foco central para el trabajo con la función lineal a través de un modelo matemático que represente esas variaciones. Flexibilidad de la tarea para adaptarse a distintos niveles educativos.
D1 [33, 35]

Tarea 1
Función lineal
Llenado de recipiente
D1 [9-27]

Características de la Tarea como estrategia de enseñanza

La tarea mantiene coherencia entre el objetivo de resignificar el concepto de función y los medios que proporciona al estudiante para alcanzarlo, es decir, entre el diseño que hace y la secuenciación de las preguntas que va formulando.
D1 [56, 59, 60, 63, 54, 65]

Tarea 2
Función cuadrática
Variación de área con perímetro constante
D1 [38, 54]

Los estudiantes requieren cambiar sus procesos a lo largo del desarrollo de la actividad, hay un cambio en el nivel de exigencia al cambiar las condiciones de los fenómenos como prolongar la altura del recipiente o variar la velocidad del flujo.
D1 [30, 31, 35, 56, 63, 64]

Los conceptos que se ponen en juego para resolver las actividades y los que se aprenderán al terminar la resolución del recurso diseñado podría ser útil para estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad, adaptando las tareas a nuevos contextos y buscando el uso de recursos matemáticos correspondientes al nivel que se desee atender.
D1 [36, 58, 64]

Una **forma de aprender** la función lineal es a través del análisis de la variación y el cambio: *contexto variacional.*
D1 [33]

Figura IV.11 MTSK identificado en el análisis de la Actividad 4

IV.4.2 Resumen de conocimiento especializado de Omar identificado en la Actividad 4

A continuación realizamos una descripción de los conocimientos identificados en el análisis de la Actividad 4 y las relaciones que hemos encontrado entre los distintos subdominios y categorías del MTSK. Esta se encuentre en correspondencia con la información mostrada en la Tabla IV.32 y en la Figura IV.11.

El análisis de esta cuarta actividad ha resultado conveniente para profundizar en las características que Omar observa en su diseño de tareas para la función lineal y cuadrática. A pesar de que hace un análisis por separado de las tareas 1 y 2, el profesor hace uso de un conocimiento que parece más bien general del concepto de función y de ambas tareas como parte del mismo recurso y que tienen una misma estructura, por lo cual las características que identifica son comunes a ambas tareas.

Para el profesor, ***las tareas que ha diseñado son adaptables a diferentes grados, su estructura dirige al estudiante al uso de la variación y el cambio como foco central de trabajo y la búsqueda de un modelo matemático que represente variaciones propias de este tipo de funciones y son coherentes con los objetivos que se propone promover un aprendizaje significativo, con el cual el estudiante pueda trabajar en otros contextos***. Este conocimiento de características específicas de las tareas como estrategia de enseñanza, lo hemos considerado parte del KMT.

Acerca de este subdominio (KMT), encontramos también un indicio de que estas características específicas de las tareas, están relacionadas con el conocimiento que tiene Omar sobre la potencialidad de usar distintos registros de representación como una técnica de enseñanza asociada al concepto de funciones, lo cual se suma a los conocimientos identificados en análisis anteriores. Además este indicio de encuentra también relacionado con el conocimiento que pone de manifiesto acerca de ***la modelación de fenómenos reales como estrategia de enseñanza***. La elección de esta estrategia de modelación nos permite también obtener evidencias sobre el uso que comenta Omar que pueden tener recursos tecnológicos como Cabri y Geogebra, evidenciando el ***conocimiento que tiene de la existencia de recursos tecnológicos para la representación gráfica y esquemática de contenidos y la verificación de resultados***. Este conocimiento de herramientas útiles para la verificación de resultados, del cual ya había dado antes muestras el profesor, nos ha llevado a preguntarnos de nuevo sobre lo que conoce acerca de las formas de validación y demostración en matemáticas, sin embargo, esta actividad no arroja suficientes evidencias para reconocer este conocimiento, por lo que sólo la marcamos como una oportunidad de explorar el conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM) del profesor.

El uso de la modelación en el diseño didáctico y las participaciones del profesor nos llevan también a la identificación de otra oportunidad de explorar lo que sabe Omar al respecto de las características de la matematización de fenómenos reales como parte de la fenomenología de la función lineal y cuadrática, en la que no nos ha sido posible profundizar con el análisis de esta actividad.

Sobre el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), solo nos ha sido posible reconocer un indicio del conocimiento que puede tener Omar acerca de la necesidad que tendrán los estudiantes de cambiar sus procesos a lo largo del desarrollo de la actividad al variar las condiciones del fenómeno y una oportunidad de reflexionar sobre lo que sabe con respecto al aprendizaje de la función lineal, puesto que se habla de una forma de resignificar la función lineal es a través del análisis de la variación y el cambio en los parámetros de ésta, a través de lo que Omar llama trabajar con un contexto variacional.

Por último identificamos un indicio de que Omar puede conocer estándares de aprendizaje que pueden tener los estudiantes en cada nivel escolar en el que pudiera aplicarse este tipo de recurso, puesto que habla de que Es posible que el recurso diseñado sea útil para estudiantes de secundaria, bachillerato y universidad, adaptando las tareas a nuevos contextos y buscando el uso de recursos matemáticos correspondientes al nivel que se desee atender. Sin embargo, no nos dice cuáles son los recursos específicos para cada nivel escolar ni habla sobre las adaptaciones necesarias para cada nivel.

IV.5 Informe de resultados de la Actividad 5: Evaluación externa del recurso

La última actividad del curso consistía en pedir a un colega profesor que resolviera y evaluara el diseño que se había estado discutiendo en las Actividades 2 a 4, para lo cual se facilitó un cuestionario. Los participantes del curso de formación presentaron en esta Actividad 5, un documento en el que se mostraba la evaluación que había hecho el colega, así como las reflexiones del profesor que diseñó la actividad acerca de esta evaluación (A5_D1). Además los participantes discutieron algunos de los aspectos de las evaluaciones de sus recursos a través de un foro de discusión (A5_F3).

La información plasmada en el documento en el que se presenta la evaluación del recurso de Omar, realizada por un colega profesor, así como sus participaciones registradas en el foro fueron organizadas y codificadas en un proyecto de MAXQDA para realizar el primer análisis asignando subdominios y categorías de conocimiento como se hizo en todas las actividades del curso. El resultado de este primer análisis puede consultarse completo en el Anexo V.4.

IV.5.1 Informe de resultados del conocimiento especializado puesto de manifiesto en la Actividad 5: Evaluación externa del recurso

Se realizaron las modificaciones pertinentes en las asignaciones de los subdominios a través del trabajo con las tablas de Excel que fueron descargadas del MAXQDA. Esto a través del segundo análisis de la información en el que se observan fragmentos provenientes de distintas unidades de información que han sido clasificadas como conocimiento de una determinada categoría o subdominio. La presentación de resultados de esta actividad está basada, como en los análisis anteriores, en este segundo análisis de la información disponible en el Anexo V.5.

IV.5.1.1 Contextualización del conocimiento evidenciado por Omar en la Actividad 5

En algunos fragmentos de A5_D1 Omar habla sobre *los objetivos* que pretende alcanzar con la actividad, haciendo referencia a que la actividad que propone toma la modelación como una estrategia didáctica que le permite otorgar nuevos significados al concepto de función pero no habla sobre cuáles son esos nuevos significados que quiere alcanzar, es decir, no habla sobre los estándares de aprendizaje que podrían ser alcanzados a través de la resolución de su propuesta.

> A5_D1 [16]: OBJETIVO: Comprender los fenómenos presentados usando un lenguaje matemático que lo lleve a afianzar procesos de aprendizaje referente a funciones a través de la práctica de modelación..

> A5_F3 [35]: El objetivo planteado es el de *afianzar procesos de aprendizaje a través de la modelación*, lo cual me dice que *el estudiante debe de poner en conflicto los conocimientos previos que tiene con las nuevas significaciones que debe establecer*.

Dentro del foro de discusión, se entabla una conversación acerca de la necesidad de ser precisos en el uso del lenguaje al redactar una actividad como las que se han diseñado en el curso. Con respecto a esta discusión, nos parece interesante destacar lo que el profesor comenta sobre lo que él considera que puede o debe hacerse al redactar estos objetivos.

> A5_F3 [59-64]: Tiene razón respecto al uso de palabras generales que nosotros como profesores utilizamos para escribir un objetivo.
>
> También tiene razón cuando dice que si el que aplica la actividad es otra persona diferente al creador, va a entenderlo de otra manera, si el objetivo no es claro y no entrelaza de manera adecuada sus partes.
>
> *Creo que cuando se explicita un objetivo introduciendo el qué, cómo, para qué, [sirve una actividad] y en ocasiones donde [puede trabajarse], no se van a tener problemas en la comprensión, y relación de éste con la actividad*.
>
> Me parece que debemos ser más cuidadosos en utilizar palabras más precisas en la elaboración de los objetivos, Acotaría lo siguiente: cuando una actividad está bien organizada, estructurada, y precisa para desarrollar o llegar al objetivo creo que palabras como las que se mencionan [descubrir, comprender, introducir, profundizar y conocer] se pasan por alto no se profundizan, porque al leer el objetivo y establecer relación con la actividad se sabe a qué se debe llegar.
>
> Generalmente los objetivos específicos me brindan la oportunidad de que aclare la composición del objetivo general.

Por otra parte destacamos que el profesor continúa utilizando algunos elementos del lenguaje teórico presentado en la Actividad 3, para hablar acerca de la evaluación que hace el colega de su diseño, con la intención de justificar la pertinencia de su actividad como un recurso didáctico potente y funcional.

> A5_D1 [95]: […] Pensaría que con la respuesta se manifiesta también *el potencial de investigación, y el de adaptación.*

> A5_D1 [110]: En la respuesta dada se puede establecer en palabras de la investigación que puede existir el *potencial de resistencia dinámico*, y afirma nuevamente *la utilidad, y utilizabilidad* en la actividad. […]

Además, Omar vuelve a hacer alusión a términos de la teoría Socioepistemológica que había usado en actividades anteriores como, la práctica de modelación y la resignificación de los conceptos.

> A5_F3 [26]: *La práctica de modelación* […] es la que se aplica en este recurso, y sobre la cual se creó la actividad […] lleva al estudiante a que realice *predicciones*, y a que él *dé nuevos significados de la función lineal (resignificación)*

Con respecto a *las concepciones el papel del profesor*, en actividades como la que él ha diseñado, Omar considera que deben tenerse características específicas como el gusto por innovar y buscar nuevas estrategias de enseñanza, así como tener la capacidad y el conocimiento suficiente para gestionar la actividad para dirigirla hacia el alcance de los objetivos, además conocer los recursos matemáticos y actitudinales con los que los estudiantes resolverán las tareas.

> A5_D1 [122]: Referente a los profesores, […este tipo de actividades] les atrae especialmente a aquellos que les gusta innovar, investigar, buscar estrategias de enseñanza. Además brindan estos recursos una ayuda didáctica para el desarrollo de las actividades matemáticas de los diferentes grados.

A5_F3 [91]: El llevar al estudiante al descubrimiento de la solución no es fácil, porque necesito de un profesor activo, investigador, dado por completo a la actividad, diseñar secuencias bien fundamentadas dependiendo del objetivo que se quiera lograr, dominio de un grupo, y otras situaciones […]

A5_F3 [92]: Además debo de conocer al estudiante muy bien y de forma individual, que le gusta, que conoce, cómo reacciona ante las actividades, y algunas otras.

Otro aspecto importante a destacar en la contextualización del análisis de esta Actividad 5, es que nos ha ofrecido la oportunidad de ampliar algunos de los conocimientos detectados en actividades anteriores en lo que se refiere al concepto de función lineal, puesto que el colega que evaluó resolvió y evaluó la actividad sólo resolvió la primera tarea, con lo que las reflexiones de Omar se centraron en esta parte de su diseño.

IV.5.1.2 Sobre el KoT en la Evaluación externa del recurso

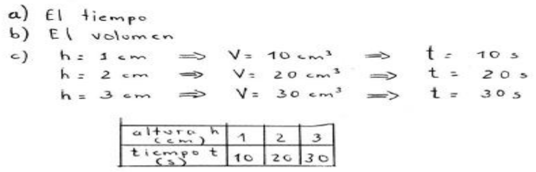
IV.5.1.2.1 Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles al concepto de función lineal

Omar hace un trabajo de interpretación del trabajo de su colega en la resolución de la tarea 1, y en su reporte para esta actividad trata de describir y justificar los procedimientos matemáticos que se utilizan.

En la primera parte de la solución que hace el colega que resuelve y evalúa la actividad, puede observarse que éste no toma como variable dependiente la altura en el inciso c, sino como variable independiente ya que le asigna valores y hace los cálculos (utilizando el área de la base y la velocidad de llenado) como si el tiempo dependiera de la altura. Sin embargo, Omar no nota este cambio en las variables, en la interpretación que hace, habla de una asignación de datos grandes para el tiempo y la obtención de valores (enteros) para la altura, equivocando la interpretación del trabajo de su colega, pero mostrando conocimiento sobre el concepto de variable dependiente e independiente de acuerdo al fenómeno estudiado ya que valida las respuestas de su colega en los incisos a y b, y en el inciso c Omar sigue considerando el tiempo como la variable independiente[1].

[Solución del Profesor X a los primeros incisos de la Tarea 1]

A5_D1 [35]: […]



a) El tiempo
b) El volumen
c) $h = 1\ cm \Rightarrow V = 10\ cm^3 \Rightarrow t = 10\ s$
$h = 2\ cm \Rightarrow V = 20\ cm^3 \Rightarrow t = 20\ s$
$h = 3\ cm \Rightarrow V = 30\ cm^3 \Rightarrow t = 30\ s$

altura h (cm)	1	2	3
tiempo t (s)	10	20	30

[…]

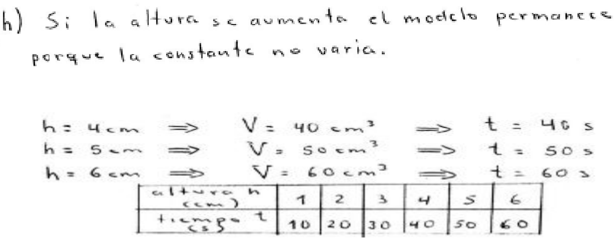
A5_D1 [38-44]: a. ¿Cuál cree que es la variable independiente en la propuesta?
En esta pregunta la respuesta es dada de acuerdo a los datos suministrados, porque *[el profesor X] relaciona las dos magnitudes establecidas en el enunciado volumen y tiempo. Toma como variables lo que tiene a mano* […]
b. ¿Cuál es la variable que depende de otra?
Compara para hallar la respuesta entre las dos magnitudes dadas, y si ya se estableció que el tiempo era la independiente, la otra es dependiente. […]
c. Construir una tabla de datos, donde las variables son altura y tiempo.
Se observa que el profesor al realizar la tabla toma valores grandes de tiempo porque lo más probable es que predice que en tiempos pequeños no podrá realizar las

---

[1] Todas las imágenes presentadas en el análisis de esta Actividad 5 sobre la resolución de la Tarea 1, corresponden a las resoluciones del colega que evaluó la actividad.

> *mediciones pertinentes debido a que se dificulta tomar las mediciones de altura, y/o para que los resultados de volumen sean enteros.*
> Cuando en las preguntas anteriores se le indaga por las variables menciona el tiempo, y el volumen, pero al realizar la tabulación toma la altura como variable dependiente, y de acuerdo a los datos dados constituye otras relaciones como altura-volumen.

A5_D1 [35, 36]: […]



h) Si la altura se aumenta el modelo permanece porque la constante no varia.

h = 4cm ⟹ V = 40 cm³ ⟹ t = 40 s
h = 5cm ⟹ V = 50 cm³ ⟹ t = 50 s
h = 6cm ⟹ V = 60 cm³ ⟹ t = 60 s

altura h (cm)	1	2	3	4	5	6
tiempo t (s)	10	20	30	40	50	60

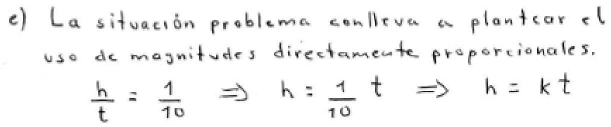
[…]

A5_D1 [55, 56]: h. ¿Si se decide prolongar la altura del recipiente se debe realizar un nuevo proceso para obtener el modelo o con el mismo obtenido anteriormente sirve? […]

> La respuesta que da el profesor está fundamentada en el modelo que establece con anterioridad [h=1/10 t], donde *toma la altura como variable dependiente*, y además afirma que […] al no variar [la constante] no tiene por qué cambiarse el modelo, y lo afirma a través de dar más datos a la tabla. No podemos determinar cuál sería la respuesta si la relación de variables pudiera ser otra.

El análisis de los fragmentos anteriores nos permite considerar que Omar ***sabe que la variable dependiente es la que depende de los valores que tome la variable independiente y del tipo de fenómeno que se modele, es decir del tipo de función***, a pesar de estar realizando interpretaciones erróneas del trabajo de su colega. Estas participaciones parecen ampliar un poco las evidencias que habíamos encontrado en el análisis de la Actividad 2 con respecto al concepto de variable dependiente e independiente y sus relaciones.

Por otro lado, al resolver la Tarea 1, el colega que evalúa la actividad se refiere a la proporcionalidad directa para referirse al tipo de relación que existe entre las variables que intervienen en el fenómeno. Esto nos permitió encontrar evidencias de algunos conocimientos que tiene Omar acerca de este concepto y la relación que encuentra con la función lineal.



e) La situación problema conlleva a plantear el uso de magnitudes directamente proporcionales.

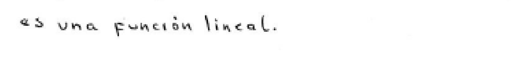
$$\frac{h}{t} = \frac{1}{10} \Rightarrow h = \frac{1}{10}t \Rightarrow h = kt$$

A5_D1 [122]: […] […]

A5_D1 [47-50]: e. ¿Con los datos obtenidos en el literal (c), podría modelarse el problema? Explique.

> Para obtener el modelo usa proporciones, y establece la relación entre variables; la constante que acompaña la variable independiente, en este caso tiempo, la establece como el inverso del área establecida como largo*ancho.
> Hace énfasis en la proporcionalidad como medio para hallar el modelo.

Omar identifica el modelo matemático $h = \frac{1}{10}t$ como una función lineal y determinar cuál es la variable independiente y dependiente en el modelo matemático que plantea su colega.



j) La función que se obtiene al modelar la situación es una función lineal.

A5_D1 [36]: […] […]

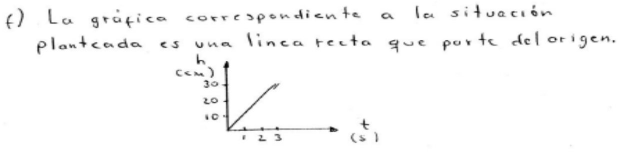
> A5_D1 [59, 60]: j. ¿Qué clase de función se obtiene al modelar estas situaciones problema?
> De acuerdo a lo estipulado por el profesor en anteriores preguntas, siempre afirma que existe un modelo lineal, lo cual enfatiza en ésta. Esto indica que por la experiencia, y lo que conoce desde el inicio sabe la clase de función que modela el fenómeno.

A pesar de que en este último fragmento Omar afirma que su colega había hecho alusión antes a un modelo lineal, hasta este inciso el colega no había hablado explícitamente de función lineal, sino que se había referido a magnitudes directamente proporcionales y a comportamientos lineales de la gráfica. Sin embargo, consideramos que Omar reconoce que ***las funciones lineales guardan relaciones de proporción directa***, por ello infiere que su colega se refiere todo el tiempo a la función lineal.

IV.5.1.2.2 Conocimiento de registros de representación asociados al concepto de función lineal

Al respecto de los distintos registros de representación que se manejan en la actividad, Omar describe las repuestas de su colega, permitiéndonos profundizar en los conocimientos que habíamos comenzado a detectar en el análisis de la actividad 2, acerca de ***la representación gráfica de la función lineal: la gráfica que modela el fenómeno de la Tarea 1 es una recta que pasa por el origen y si la constante del modelo varía, también cambia la pendiente de la recta***.

A5_D1 [35]: […]

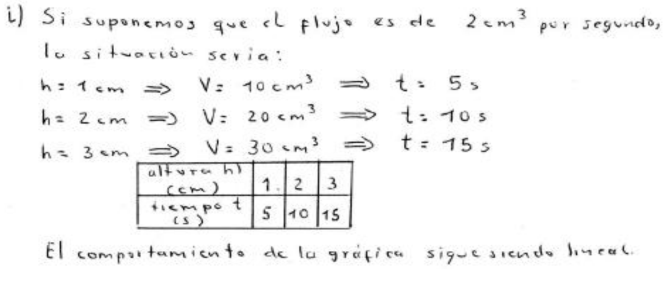


f) La gráfica correspondiente a la situación planteada es una linea recta que parte del origen.

[…]

> A5_D1 [51, 52]: [f. ¿Cómo debe ser la representación gráfica de la situación?
> [El colega evaluador] Proporciona la gráfica de acuerdo a los datos hallados por él en el numeral (c), sin prolongar la línea que representa la relación altura-tiempo.

A5_D1 [36]: […]



i) Si suponemos que el flujo es de 2cm^3 por segundo, la situación seria:

$h = 1\,cm \Rightarrow V = 10\,cm^3 \Rightarrow t = 5\,s$

$h = 2\,cm \Rightarrow V = 20\,cm^3 \Rightarrow t = 10\,s$

$h = 3\,cm \Rightarrow V = 30\,cm^3 \Rightarrow t = 15\,s$

altura h) (cm)	1.	2	3
tiempo t (s)	5	10	15

El comportamiento de la gráfica sigue siendo lineal.

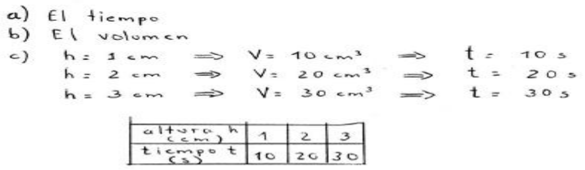
[…]

> A5_D1 [57, 58]: i. ¿Si el flujo varía cuál es el comportamiento de la gráfica? Si aumenta el flujo o si disminuye. Explique
> La explicación referente a este interrogante la argumenta estableciendo un valor para el volumen, realiza tabulaciones, *establece y reafirma que el comportamiento de la gráfica sigue siendo lineal. No se menciona si la gráfica cambia de inclinación (pendiente) al variar el flujo*.

Dado que para interpretar y validar la solución que da su colega, Omar requiere ciertos conocimientos matemáticos. Las respuestas que proporciona el colega evaluador a la tarea son aceptadas por Omar como correctas.

Así, podemos inferir que Omar considera que las representaciones aritméticas que utiliza en las tabulaciones son una representación de la función lineal y de las condiciones del fenómeno según lo que se pregunta en los distintos incisos. Consideramos esto un ***indicio de que Omar conoce ciertas características de la representación aritmética de la función lineal*** que le permiten evaluar las respuestas de su colega, aunque no tenemos información suficiente sobre cuáles son esas características.

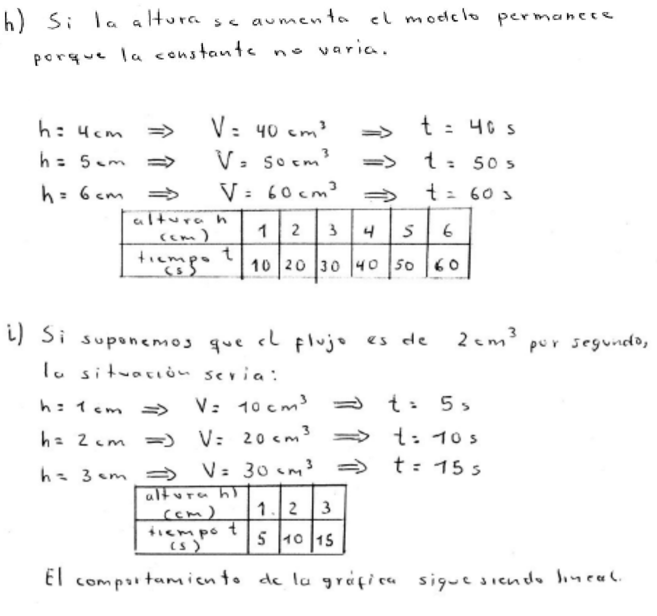
A5_D1 [35, 36]: […]



a) El tiempo
b) El volumen
c) $h = 1\ cm \Rightarrow V = 10\ cm^3 \Rightarrow t = 10\ s$
$h = 2\ cm \Rightarrow V = 20\ cm^3 \Rightarrow t = 20\ s$
$h = 3\ cm \Rightarrow V = 30\ cm^3 \Rightarrow t = 30\ s$

altura h (cm)	1	2	3
tiempo t (s)	10	20	30

[…]



h) Si la altura se aumenta el modelo permanece porque la constante no varia.

$h: 4cm \Rightarrow V: 40\ cm^3 \Rightarrow t = 40\ s$
$h = 5cm \Rightarrow V = 50\ cm^3 \Rightarrow t = 50\ s$
$h = 6cm \Rightarrow V = 60\ cm^3 \Rightarrow t = 60\ s$

altura h (cm)	1	2	3	4	5	6
tiempo t (s)	10	20	30	40	50	60

i) Si suponemos que el flujo es de $2\ cm^3$ por segundo, la situación seria:
$h = 1\ cm \Rightarrow V: 10\ cm^3 \Rightarrow t: 5\ s$
$h = 2\ cm \Rightarrow V: 20\ cm^3 \Rightarrow t: 10\ s$
$h = 3\ cm \Rightarrow V = 30\ cm^3 \Rightarrow t = 15\ s$

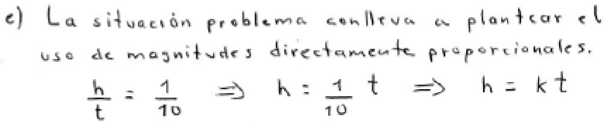
altura h) (cm)	1.	2	3
tiempo t (s)	5	10	15

El comportamiento de la gráfica sigue siendo lineal.

[…]

En este mismo sentido, consideramos también que en el inciso e, Omar pone en evidencia ***conocimiento de una representación algebraica general de las magnitudes directamente proporcionales que identifica también como funciones lineales: $h = kt$ donde $k = \frac{1}{A}$***

A5_D1 [35]: […]



e) La situación problema conlleva a plantear el uso de magnitudes directamente proporcionales.
$\frac{h}{t} = \frac{1}{10} \Rightarrow h = \frac{1}{10} t \Rightarrow h = kt$

[…]

A5_D1 [49]: Para obtener el modelo usa proporciones, y establece la relación entre variables; *la constante que acompaña la variable independiente, en este caso tiempo, la establece como el inverso del área establecida como largo*ancho.*

IV.5.1.2.3 Conocimiento de la fenomenología asociada al concepto de función lineal

Con respecto a esta categoría, en el análisis de la Actividad 2 y 4 del curso habíamos hablado de la detección de indicios y oportunidades, respectivamente, de que el profesor tuviera un conocimiento del concepto de función como una herramienta matemática para modelar fenómenos físicos. En esta quinta actividad observamos evidencias de los conocimientos que tiene el profesor acerca de la modelización gráfica del llenado de recipientes que propone en la Tarea 1 de su actividad. Observamos evidencias de que Omar reconoce que este fenómeno se modela a través de una función lineal y que la gráfica cambia en el momento en que se alcanza la altura máxima del recipiente, convirtiéndose en una línea horizontal. Sabe también que si el flujo varía la gráfica sufre cambios en la inclinación. Además, Omar sabe que realizar variaciones en el fenómeno produce cambios en el modelo gráfico.

> A5_D1 [57]: […] ¿Si el flujo varía cuál es el comportamiento de la gráfica? Si aumenta el flujo o si disminuye. […]

> A5_D1 [58]: [… El profesor que resuelve y evalúa la actividad] establece y reafirma que el comportamiento de la gráfica sigue siendo lineal. *No se menciona si la gráfica cambia de inclinación (pendiente) al variar el flujo*.

> A5_F3 [72-74]: Si hacemos a (a) como la altura del recipiente; generalmente pienso que el estudiante realizara la gráfica como la presentó el profesor hasta el valor de tiempo (30) que corresponde a la altura (3) que sería el máximo de altura del recipiente.
> *Si el estudiante después de la gráfica anterior me dibuja una línea constante* [es decir, una línea horizontal], primero me está demostrando que entendió la actividad debido a que *a partir de este dato al transcurrir el tiempo la altura no varía*, y quiere ir más allá de lo propuesto o que la actividad es muy simple para el nivel que se aplica.
> Para afrontar este momento primero le propondría [al estudiante] que comparara la gráfica con la que se obtiene cuando la altura es mayor, ejemplo (8 cm) con el mismo flujo; y que pasaría en los dos casos cuando varía el flujo.

Al observar la resolución que hace su colega, Omar realiza algunas reflexiones sobre la posibilidad de generar nuevas preguntas para el recurso y de variar las condiciones del fenómeno a modelar en esta Tarea 1. Consideramos que estas reflexiones pueden estar relacionadas con un conocimiento sobre las implicaciones matemáticas que tiene la variación de las condiciones del fenómeno.

> A5_D1 [101]: […] Si se piensa modificar para otros grados pensaría en introducir otras preguntas como *¿Se puede variar la abscisa en forma negativa? ¿Si el recipiente tiene un hueco con una salida de flujo de la tercera parte de la entrada, cómo establecería el modelo?*

> A5_F3 [77-80]: Hay otras preguntas con las cuales podría aprovechar la actitud del estudiante, dependiendo de la situación, y serían:
> *¿Se puede variar la abscisa en forma negativa?*
> *¿Si el recipiente tiene un hueco con una salida de flujo de la cuarta parte de la entrada, cómo establecería la gráfica, y el modelo?*
> ¿Qué pasaría si el hueco de salida es mayor que el flujo de entrada?

Aunque no tenemos información suficiente para determinar si Omar sabe cuáles son los cambios que sufriría el modelo gráfico al variar las condiciones del fenómeno, sí observamos una *oportunidad para indagar sobre lo que sabe acerca de estas condiciones para que los fenómenos resultantes en los cambios tengan sentido y sigan siendo fenómenos que representen a la función lineal*.

En la Tabla IV.33 mostramos el conocimiento identificado en el trabajo de esta actividad que han sido clasificados como parte del KoT de Omar.

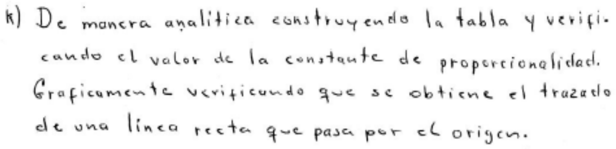
Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
conocimiento de los temas (KoT	***Propiedades de las funciones***	*Variable dependiente e independiente*	La variable dependiente es la que depende de los valores que tome la variable independiente y del tipo de fenómeno que se modele, es decir del tipo de función.
		Proporcionalidad	Las funciones lineales guardan relaciones de proporción directa.
	Registros de representación de la función lineal	*Gráfico*	La gráfica que modela el fenómeno de la Tarea 1 es una recta que pasa por el origen y si la constante del modelo varía, también cambia la pendiente de la recta.
		Algebraico	Una representación algebraica general de las magnitudes directamente proporcionales que identifica también como funciones lineales: $\mathrm{h} = \mathrm{kt}$ donde $\mathrm{k} = \frac{1}{\mathrm{A}}$
		Indicio Aritmético	Características de la representación aritmética de la función lineal
	Fenomenología del concepto de función lineal	***Modelización gráfica del llenado de recipientes***	Este fenómeno se modela a través de una función lineal y la gráfica cambia en el momento en que se alcanza la altura máxima del recipiente, convirtiéndose en una línea horizontal. Si el flujo varía la gráfica sufre cambios en la inclinación. Realizar variaciones en el fenómeno produce cambios en el modelo gráfico
		Oportunidad Condiciones matemáticas necesarias en los fenómenos	Características de variaciones en las condiciones del fenómeno tengan sentido y sigan siendo representados por una función lineal

Tabla IV.33 Resumen de conocimiento de los temas (KoT) que posee Omar, identificado en la Actividad 5.

IV.5.1.3 Sobre el KPM en la Evaluación externa del recurso

Con respecto al conocimiento de Omar acerca de prácticas propias de la actividad matemática, reconocemos un ***conocimiento acerca de los procesos de validación*** en la disciplina cuando hace referencia a que ***la comparación de los resultados obtenidos en distintos registros de representación de un fenómeno sirve como medio de validación de un modelo matemático***.

A5_D1 [36]: […]



k) De manera analitica construyendo la tabla y verificando el valor de la constante de proporcionalidad. Graficamente verificando que se obtiene el trazado de una linea recta que pasa por el origen.

[…]

A5_D1 [61, 62]: k. ¿Cómo comprueba la veracidad del modelo hallado?

> El encuestado nos quiere mostrar que en todo *el proceso se está verificando, a través de representaciones como la algebraica con la relación de proporcionalidad, la tabulación, y la graficación, necesarias para dar el modelo usando la práctica de m*odelación. Me atrevo a comentar que trata de explicar que a través de predicciones de datos tanto en la tabla como en la gráfica se verifica la veracidad del modelo.

En la Tabla IV.34 mostramos el KPM identificado en el trabajo de esta actividad.

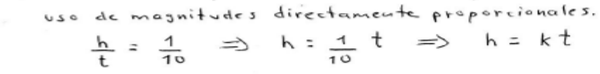
Subdominio	Categorías asociadas al subdominio	Omar conoce:
Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM)	*Las formas de validación o demostración en matemáticas*	La comparación de los resultados obtenidos en distintos registros de representación de un fenómeno sirve como medio de validación de un modelo matemático

Tabla IV.34 Resumen de conocimiento de los temas (KPM) que posee Omar, identificado en la Actividad 5.

IV.5.1.4 Sobre el KSM en la Evaluación externa del recurso

IV.5.1.4.1 Conocimiento de conexiones transversales entre contenidos matemáticos

Con respecto al conocimiento de Omar acerca conexiones transversales entre contenidos, hemos encontrado en este análisis un ***indicio de conocimiento de conexiones transversales al identificar a la variación como idea estructurante*.** Puesto que para interpretar la solución que da el colega que evalúa el recurso, Omar observa el procedimiento y describe las relaciones que observa en las representaciones algebraicas de su colega, lo que podría indicar que está haciendo uso de una idea fundamental en matemáticas: la variación (acompañada de las nociones de relación, variable y constante)

> [Solución del colega evaluador a la Tarea 1 propuesta en el recurso didáctico diseñado por Omar en el inciso e]
>
> A5_D1 [122]: […]
>
> 
>
> e) La situación problema conlleva a plantear el uso de magnitudes directamente proporcionales.
>
> $\frac{h}{t} = \frac{1}{10} \Rightarrow h : \frac{1}{10} t \Rightarrow h = kt$
>
> […]
>
> [Omar hace alusión a las preguntas que corresponden a cada uno de los incisos que propone en la tarea 1 para referirse al análisis que hace sobre la resolución del colega evaluador para cada una de estas preguntas]
>
> A5_D1 [47-50]: e. ¿Con los datos obtenidos en el literal (c), podría modelarse el problema? Explique.
> Para obtener el modelo usa proporciones, y establece la relación entre variables; la constante que acompaña la variable independiente, en este caso tiempo, la establece como el inverso del área establecida como largo*ancho.
> Hace énfasis en la proporcionalidad como medio para hallar el modelo.

Este indicio podría relacionarse con el conocimiento identificado en la Actividad 3, en la que Omar relaciona distintos contenidos matemáticos a través de esta misma idea de variación.

IV.5.1.5 Sobre el KFLM en la Evaluación externa del recurso

IV.5.1.5.1 Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático

En su interpretación de la resolución que hace su colega de la Tarea 1, Omar pone en evidencia su consideración de que ***el manejo de tiempos pequeños podría representar una dificultad en la resolución de la tarea***, puesto que podría complicar los cálculos de altura en el llenado del recipiente y generar valores no enteros. Consideramos que esta afirmación puede ser un ***indicio de su conocimiento sobre posibles dificultades que podrían surgir en los procesos matemáticos utilizados para la resolución de la Tarea 1***, lo cual podría tener repercusiones en el establecimiento de relaciones entre variables y a su vez en el aprendizaje que pretende lograrse con esta actividad.

> A5_D1 [43]: Se observa que el profesor al realizar la tabla toma valores grandes de tiempo porque *lo más probable es que predice que en tiempos pequeños no podrá realizar las mediciones pertinentes debido a que se dificulta tomar las mediciones de altura, y/o para que los resultados de volumen sean enteros*.

Omar nos habla también de que considera que si el estudiante no ha trabajado actividades con una estructura similar a la del recurso didáctico que él propone, podría tener muchas dificultades para resolverlo. Sin embargo, al no tener más información a este respecto, podemos hablar solo de una *oportunidad de explorar cuáles serían las dificultades asociadas a trabajar con actividades como la diseñada por Omar por primera vez.*

> A5_D1 [119, 120]: […] *para el estudiante que no se le ha aplicado este tipo de recursos algunas preguntas deben ser más explícitas o que guíen en el desarrollo del proceso.*
> De acuerdo a lo estipulado por el profesor que realizó la evaluación de la actividad, la limitación […] es referente al currículo, al sistema educativo donde se aplique, y a la preparación que los estudiantes tengan relativo a la aplicación de este tipo de recursos. *Con este análisis podemos estipular que si un estudiante obtiene sus conocimientos a través de una enseñanza tradicional poco fundamentada, va a tener bastante dificultad para llevar a cabo este tipo de [actividades]*.

IV.5.1.5.2 Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con el concepto de función

A pesar de que en esta actividad 5 Omar está haciendo una interpretación de los procesos de resolución de un colega profesor y no los de un estudiante, no parece haber una distinción entre este tipo de respuesta y la que podría dar un alumno, por lo que consideramos el siguiente fragmento como un ***indicio de que Omar sabe que al enfrentarse a la tarea, los resolutores podrían utilizar comúnmente valores "grandes" de tiempo para obtener resultados enteros de volumen y altura***.

> A5_D1 [42-44]: c. Construir una tabla de datos, donde las variables son altura y tiempo.
> Se observa que el profesor al realizar la tabla toma valores grandes de tiempo porque lo más probable es que predice que en tiempos pequeños no podrá realizar las mediciones pertinentes debido a que se dificulta tomar las mediciones de altura, y/o para que los resultados de volumen sean enteros.
> Cuando en las preguntas anteriores se le indaga por las variables menciona el tiempo, y el volumen, pero al realizar la tabulación toma la altura como variable dependiente, y de acuerdo a los datos dados constituye otras relaciones como altura-volumen.

Ante la respuesta del colega evaluador, en la que solo establece las relaciones entre altura-volumen y tiempo-volumen, Omar hace énfasis en la importancia de que se identifiquen otras posibles relaciones. Identificamos en este interés una *oportunidad para explorar los conocimientos sobre cómo repercutiría la identificación de distintas relaciones entre variables en el conocimiento del estudiante acerca de los comportamientos de las rectas en el plano de acuerdo a los parámetros involucrados en la relación de cada par de variables*.

> A5_D1 [45, 46]: d. ¿Se podría encontrar otras parejas de variables, y cuáles serían?
>
> El profesor determina la pareja de variables de acuerdo a lo que ha desarrollado de la actividad, y lo que a simple vista puede observar, y establecer. *De pronto por la prontitud de realizar la actividad u otra característica, pasa por alto otras relaciones como: altura-tiempo, altura-área lateral o posterior, tiempo-áreas, volumen-áreas.*

El resumen de los conocimientos evidenciados por Omar en esta actividad e identificados dentro de este subdominio se muestra en la Tabla IV.35.

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	***Formas de interacción de los alumnos con el concepto de función***	***Indicio*** ***Posibles procesos y estrategias del resolutor***	Al enfrentarse a la tarea, los resolutores podrían utilizar comúnmente valores "grandes" de tiempo para obtener resultados enteros de volumen y altura
		Oportunidad *Conocimiento acerca de la influencia del tipo de trabajo con un contenido sobre el aprendizaje del mismo.*	Repercusiones de la identificación de distintas relaciones entre variables en el conocimiento del estudiante acerca de los comportamientos de las rectas en el plano de acuerdo a los parámetros involucrados en la relación de cada par de variables.
	Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje	***Indicio*** ***Posibles dificultades que podrían surgir en los procesos matemáticos utilizados para la resolución de la Tarea 1***	El manejo de tiempos pequeños podría representar una dificultad en la resolución de la tarea, puesto que podría complicar los cálculos de altura en el llenado del recipiente y generar valores no enteros.
		Oportunidad *Dificultades asociadas a trabajar con actividades como la diseñada por Omar por primera vez*	"para el estudiante que no se le ha aplicado este tipo de recursos algunas preguntas deben ser más explícitas o que guíen en el desarrollo del proceso."

Tabla IV.35 Resumen de conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) que posee Omar, identificado en la Actividad 5.

IV.5.1.6 Sobre el KMT en la evaluación externa del recurso

IV.5.1.6.1 Conocimiento de teorías de enseñanza asociadas al concepto de función lineal

Al respecto de esta categoría, Omar muestra de nuevo evidencias sobre la construcción de una teoría personal de enseñanza basada en su conocimiento sobre constructos teóricos de la Socioepistemología al utilizar la idea de práctica de modelación como generadora de conocimientos, de ahí la relación que hace con los contextos del mundo real.

> A5_F3 [26]: *La práctica de modelación* que es la que se aplica en este recurso, y sobre la cual se creó la actividad me exige tener conocimiento sobre los conceptos anteriormente nombrados, y por qué no conocer sobre función lineal, de una manera tradicional. La actividad me acerca a la realidad, me muestra un fenómeno que pocas veces aplicamos en el aula, me lleva a establecer relaciones como las nombradas, pero aplicadas a situaciones de la vida diaria; lleva al estudiante a que realice predicciones, y a que él *dé nuevos significados de la función lineal (resignificación)*

IV.5.1.6.2 Conocimiento de estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza asociadas al concepto de función lineal

En sus participaciones Omar explicita su conocimiento acerca de características de la Tarea 1 como un instrumento propicio para la enseñanza, estableciendo que esta no es una tarea fácil de realizar, requiere de un pensamiento matemático basado en predecir y dar nuevos significados a la función lineal, lo cual va más allá de la aplicación automática de algoritmos o secuencias determinadas y promueve un aprendizaje significativo en los estudiantes.

> A5_D1 [95]: El profesor [… que evalúa el recurso, considera] que sería conveniente que recursos como estos se aplicaran desde grados inferiores, y manifiesta que el recurso propuesto lo aplicaría a un grado superior. Referente a esta pregunta *podemos determinar que la actividad no es fácil de desarrollar, es decir no está realizada para aplicar algoritmos ni seguir secuencias determinadas sino más bien desarrollar el aprendizaje significativo en el estudiante.* […]

> A5_D1 [116]: [El colega evaluador] Recalca que no es una actividad sencilla, lo cual dice que se necesitan algunas herramientas diferentes a las comunes para desarrollarla. Cuando menciona que para poder dar solución a las preguntas planteadas se necesita conocer sobre el tema, me lleva a pensar que a través de la actividad se puede lograr nuevos significados del concepto.

> A5_F3 [19]: […] el profesor [X] menciona que la actividad posee utilidad, pude modificarse para otros cursos, es aceptada por él como actividad propicia para la enseñanza, hay relación entre objetivo-actividad, no hay ambigüedades. *Por tal razón la actividad es clara, y lleva al estudiante a ir más allá del solo manejo de algoritmos, memorización, y de aprender el concepto como único objetivo*.

> A5_F3 [26, 27]: […] *La actividad me acerca a la realidad, me muestra un fenómeno que pocas veces aplicamos en el aula, me lleva a establecer relaciones como las nombradas, pero aplicadas a situaciones de la vida diaria; lleva al estudiante a que realice predicciones, y a que él dé nuevos significados de la función lineal (resignificación).*
>
> El objetivo no es el de aprender conceptos de memoria o algorítmicos, sino más bien la de a través de procesos de modelación llegar a un aprendizaje significativo del concepto. […]

En el análisis de la Actividad 2 y 4, habíamos hablado ya de las referencias que hace Omar acerca de la potencialidad de ***la modelación como estrategia didáctica***. En este análisis, el profesor vuelve a hacer estas referencias y profundizando en algunas de las características que reconoce en este tipo de estrategia: ***implica desarrollar procesos mentales que van más allá de aplicar una fórmula o hallar un resultado y requiere que los estudiantes tengan ciertos conocimientos previos que le permitan establecer relaciones entre variables y dar nuevos significados al concepto de función***.

> A5_D1 [112]: […] la investigación en el aula no es solo seguir un formulismo establecido sino de buscar alternativas para dar solución a la propuesta. *Cuando nos dice que no solo es buscar, y usar fórmulas, me está estableciendo una relación entre la actividad, y la modelación como práctica; porque en esto se basa la modelación, en desarrollar procesos mentales, que lleven al estudiante mucho más allá de aplicar una fórmula o hallar un resultado*.

> A4_D1 [26, 27]: *La práctica de modelación* que es la que se aplica en este recurso, y sobre la cual se creó la actividad, *me exige tener conocimiento sobre los conceptos anteriormente nombrados, y porque no conocer sobre función lineal, de una manera tradicional. La actividad me acerca a la realidad,* me muestra un fenómeno […] me lleva a establecer relaciones […], pero aplicadas a situaciones de la vida diaria; lleva al estudiante a que realice predicciones, y a que él dé nuevos significados de la función lineal (resignificación).
>
> El objetivo no es el de aprender conceptos de memoria o algorítmicos, sino más bien la *de a través de procesos de modelación llegar a un aprendizaje significativo del concepto*.

En cuanto a las reflexiones generadas en el foro de discusión, estas ayudan a que Omar muestre algunos ***conocimientos sobre estrategias o formas de gestionar la actividad según las posibles respuestas de los estudiantes***, ***haciendo variaciones en los parámetros del fenómeno, como la altura del recipiente y la velocidad de llenado***, de manera que se establezcan nuevas relaciones y se observen nuevos comportamientos de la función.

> A5_F3 [72-80]: Si hacemos a (a) como la altura del recipiente; generalmente pienso que el estudiante realizara la gráfica como la presentó el profesor [X] hasta el valor de tiempo (30) que corresponde a la altura (3) que sería el máximo de altura del recipiente.
>
> Si el estudiante después de la gráfica anterior me dibuja una línea constante *[...] le pediría la argumentación del porqué la realizó de esa manera; [...] le propondría que comparara la gráfica con la que se logra cuando la altura es mayor, ejemplo (8 cm) con el mismo flujo; y que pasaría en los dos casos cuando varía el flujo*.
>
> Estos casos se pueden presentar, y el profesor debe estar dispuesto a ampliar el recurso con otras expectativas.
>
> Todo esto me lleva a pensar en que la actividad no está acabada o es única […]
>
> *Hay otras preguntas con las cuales podría aprovechar la actitud del estudiante, dependiendo de la situación, y serían:*
>
> *¿Se puede variar la abscisa en forma negativa?*
>
> *¿Si el recipiente tiene un hueco con una salida de flujo de la cuarta parte de la entrada, cómo establecería la gráfica, y el modelo?*
>
> *¿Qué pasaría si el hueco de salida es mayor que el flujo de entrada?*

Omar había hecho alusión en las actividades anteriores de curso a que los estudiantes que afrontaran esta actividad podrían tener conocimientos previos sobre los conceptos de función lineal y cuadrática, y que éstos ayudarían al proceso de resolución de la actividad. En el análisis de esta actividad observamos que se refiere de nuevo a que estos conocimientos previos podrían tener una influencia en la resolución de la tarea, lo cual nos permite identificar una *oportunidad de explorar* *el conocimiento de Omar acerca de la influencia que puede tener el hecho de que un resolutor sepa, con anterioridad a enfrentar esta actividad, el tipo de función asociada al fenómeno, sobre el proceso de solución*.

> A5_D1 [59, 60]: j. ¿Qué clase de función se obtiene al modelar estas situaciones problema?
> De acuerdo a lo estipulado por el profesor en anteriores preguntas, siempre afirma que existe un modelo lineal, lo cual enfatiza en ésta. *Esto indica que por la experiencia, y lo que conoce desde el inicio sabe la clase de función que modela el fenómeno*.

Otra cosa que llamó nuestra atención es la alusión que hace Omar a que una enseñanza tradicional podría generar dificultades en la resolución de la actividad. Reconocemos aquí una *oportunidad de explorar el tipo de tareas que asocia a una forma de enseñanza tradicional en matemáticas*

> A5_D1 [120]: […] podemos estipular que si un estudiante obtiene sus conocimientos a través de una enseñanza tradicional poco fundamentada, va a tener bastante dificultad para llevar a cabo este tipo de [actividades].

IV.5.1.6.3 Conocimiento de recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático

Con respecto a la categoría de recursos materiales o virtuales, observamos que Omar ***conoce ciertas características de los libros de texto como recurso material para la enseñanza de la función lineal***. El profesor comenta en las discusiones del foro, que en los libros se recurre al uso generalizado de la representación algebraica de las funciones más que de otros registros.

> A5_F3 [89-90]: Referente a los libros de texto […] muchos de éstos siguen una línea para la solución, y generalmente es la algebraica a través de algoritmos, olvidándose de establecer relaciones entre el contexto, y otras representaciones a veces necesarias como la graficación.
> Las actividades abiertas generalmente nos son muy apetecidas por los libros por algunas circunstancias que no viene al caso nombrarlas;
> Es también difícil que en los textos encontremos actividades que tengan ramificaciones que me indiquen los diferentes caminos que pueden tomar los estudiantes al querer darles solución.

En la Tabla IV.36 se muestra el resumen de conocimientos ubicados en este subdominio

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**	
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	***Teorías de enseñanza***	*Teoría de enseñanza personal basada en teorías formales*	Constructos teóricos de la *Socioepistemología* como herramienta didáctica de trabajo. Utiliza la idea de *práctica de modelación* como generadora de conocimientos, de ahí la relación que hace con los contextos del mundo real.
	Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza asociadas al concepto defunción lineal.	*Características de la Tarea 1 como un instrumento propicio para la enseñanza*	Esta no es una tarea fácil de realizar, requiere de un pensamiento matemático basado en predecir y dar nuevos significados a la función lineal, lo cual va más allá de la aplicación automática de algoritmos o secuencias determinadas y promueve un aprendizaje significativo en los estudiantes
		La modelación como estrategia didáctica	Implica desarrollar procesos mentales que van más allá de aplicar una fórmula o hallar un resultado y requiere que los estudiantes tengan ciertos conocimientos previos que le permitan establecer relaciones entre variables y dar nuevos significados al concepto de función.
		Estrategias o formas de gestionar la actividad según las posibles respuestas de los estudiantes	Para que los estudiantes puedan establecer nuevas relaciones y se observen nuevos comportamientos de la función, se pueden hacer variaciones en los parámetros del fenómeno, como la altura del recipiente y la velocidad de llenado.
		Oportunidad Repercusiones de conocimientos previos de los estudiantes sobre los procesos de resolución.	La influencia que puede tener en la resolución de la tarea, el hecho de que un resolutor sepa, con anterioridad a enfrentar esta actividad, el tipo de función asociada al fenómeno.
	Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza asociadas al concepto defunción lineal.	*Oportunidad Tipo de tareas que asocia a una forma de enseñanza tradicional en matemáticas*	“si un estudiante obtiene sus conocimientos a través de una enseñanza tradicional poco fundamentada, va a tener bastante dificultad para llevar a cabo este tipo de [actividades]”
	Recursos materiales o virtuales asociados al concepto de función	*Características de los libros de texto como recurso material para la enseñanza de la función lineal.*	En los libros se recurre al uso generalizado de la representación algebraica de las funciones más que de otros registros

Tabla IV.36 Resumen de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) que posee Omar, identificado en la Actividad 5.

IV.5.1.7 Sobre el KMLS en la Evaluación externa del recurso

IV.5.1.7.1 Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de la función lineal en un nivel específico

Por otra parte, queremos resaltar que Omar considera que la tarea es modificable para grados anteriores o más avanzados del octavo y noveno grado para el que había sido originalmente diseñado. Reconoce que en dicha adaptación se deben tener en cuenta los estándares de conocimiento sobre función lineal en estos grados y ser consecuente con ello en las adaptaciones que se realicen de la tarea.

> A5_D1 [121]: En general la actividad se puede aplicar a nuestros estudiantes del grado octavo, noveno, y con algunos cambios para grado séptimo, undécimo, y universidad.

> A5_F3 [35-37]: En el informe no establezco los conocimientos que debe tener el estudiante, debido a que *la actividad la posiciono en un grado determinado, y de acuerdo al currículo el estudiante ya ha afirmado esos conocimientos*.
>
> Sin embargo […], me parece que para ser más específicos puedo agregar qué conocimiento debe tener el estudiante.
>
> *Cuando una actividad se adapta a otros grados diferentes al propuesto, se debe hacer teniendo como referencia que los conocimientos para resolverlo sean conocidos, como es este caso*.

Además, Omar señala también que ***los estudiantes de octavo y noveno grado tienen conocimiento suficiente sobre el concepto de función lineal como para afrontar la actividad exitosamente y establecer nuevos significados del concepto***, aunque no profundiza en cuáles son estos conocimientos.

IV.5.1.7.2 Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar

Omar dice que esta actividad puede adaptarse a diferentes niveles escolares modificando preguntas pero conservando la estructura y objetivos de la misma, lo cual nos lleva a plantear una *oportunidad de explorar el conocimiento que tiene acerca de cómo pueden realizarse esas adaptaciones de acuerdo a un determinado nivel de desarrollo conceptual que puedan tener los estudiantes en ciertos momentos escolares*.

> A5_D1 [47]: […] diría que agregando algunas preguntas o quitando otras se puede ajustar a diferentes cursos, sin cambiar el objetivo, y la estructura de la actividad.

Los conocimientos asociados a este subdominio están resumidos en la Tabla IV.37.

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	***Expectativas de aprendizaje de la función lineal en un nivel específico***	La actividad diseñada por Omar es adaptable a grados anteriores y posteriores al octavo y noveno grado, para los que estaba originalmente diseñada. Sin embargo, se deben tener en cuenta los estándares de conocimiento sobre función lineal en estos grados y ser consecuente con ello en las adaptaciones que se realicen de la tarea.
		Los estudiantes de octavo y noveno grado tienen conocimiento suficiente sobre el concepto de función lineal como para afrontar la actividad exitosamente y establecer nuevos significados del concepto
	Nivel de desarrollo conceptual y procedimental	*Oportunidad* *Conocimiento acerca de cómo pueden realizarse adaptaciones a diferentes grados de acuerdo a un determinado nivel de desarrollo conceptual que puedan tener los estudiantes en ciertos momentos escolares.*

Tabla IV.37 Resumen de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMLS) que posee Omar, identificado en la Actividad 5.

A continuación mostramos la Tabla IV.38 con el resumen de todos los conocimientos asignados a los diferentes dominios y categorías de la Actividad 5, junto con la Figura IV.12 en la que se muestra, como en los análisis anteriores, las relaciones entre los conocimientos y refleja el carácter integrado del MTSK para esta actividad.

Subdominio	**Categorías asociadas al subdominio**	**Omar conoce:**		**Forma que representa el conocimiento de Omar en la Figura IV.12**
Conocimiento de los temas KoT	***Propiedades de las funciones***	*Concepto de variable dependiente e independiente*	La variable dependiente es la que depende de los valores que tome la variable independiente y del tipo de fenómeno que se modele, es decir del tipo de función.	⬭
		Proporcionalidad	Las funciones lineales guardan relaciones de proporción directa.	
	Registros de representación de la función lineal	*Gráfico*	La gráfica que modela el fenómeno de la Tarea 1 es una recta que pasa por el origen y si la constante del modelo varía, también cambia la pendiente de la recta.	▢
		Algebraico	Una representación algebraica general de las magnitudes directamente proporcionales que identifica también como funciones lineales: $h = kt$ donde $k = \frac{1}{A}$	
		Indicio Aritmético	Características de la representación aritmética de la función lineal	⬚
	Fenomenología del concepto de función lineal	***Modelización gráfica del llenado de recipientes***	Este fenómeno se modela a través de una función lineal y la gráfica cambia en el momento en que se alcanza la altura máxima del recipiente, convirtiéndose en una línea horizontal. Si el flujo varía la gráfica sufre cambios en la inclinación. Realizar variaciones en el fenómeno produce cambios en el modelo gráfico	▭
		Oportunidad Condiciones matemáticas necesarias en los fenómenos	Características de variaciones en las condiciones del fenómeno tengan sentido y sigan siendo representados por una función lineal	⬚

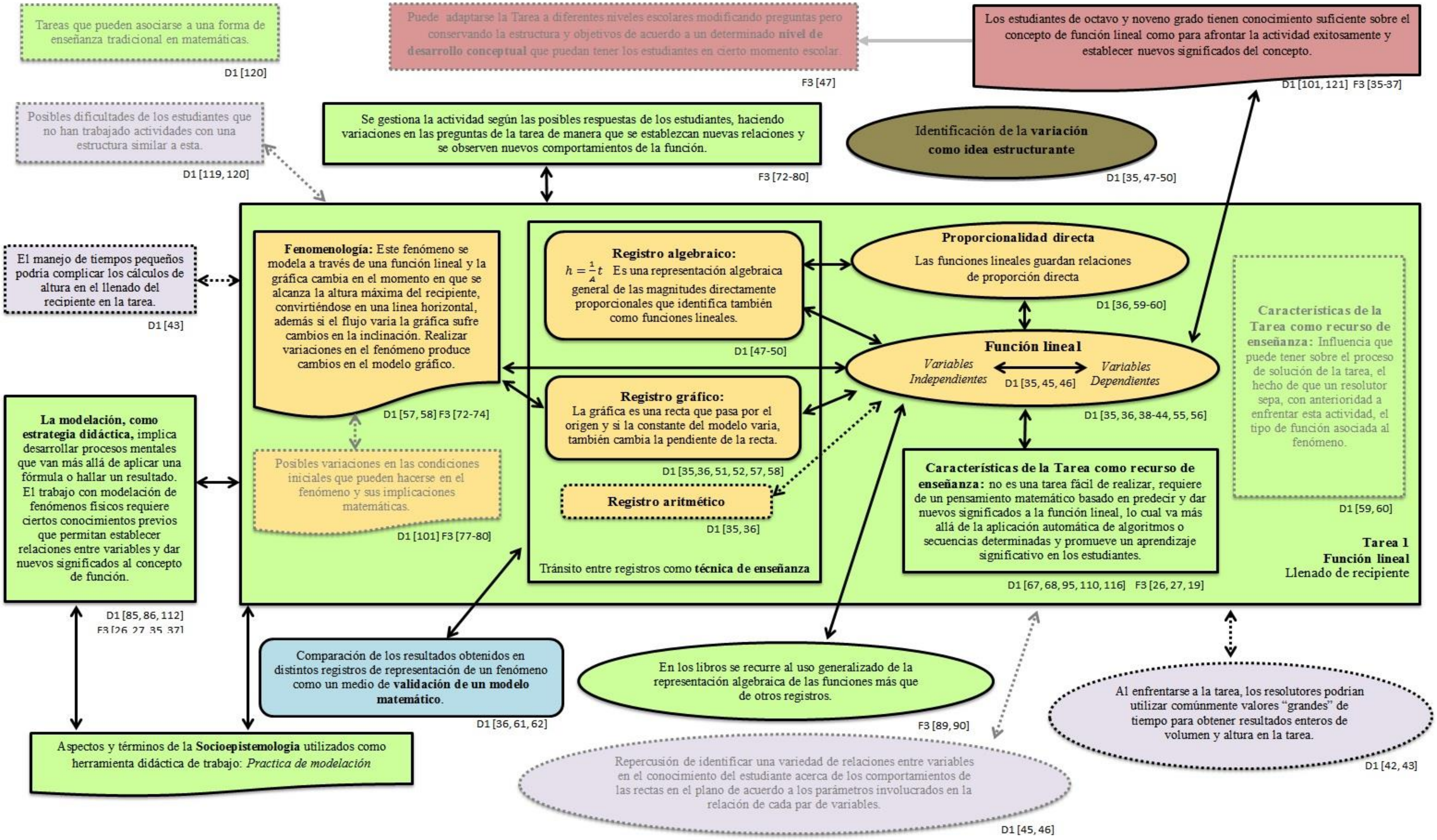
Conocimiento de la práctica de la matemática KPM	*Las formas de validación o demostración en matemáticas*	La comparación de los resultados obtenidos en distintos registros de representación de un fenómeno sirve como medio de validación de un modelo matemático	▭
Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM	***Indicio Conexiones transversales entre contenidos matemáticos***	Identificación de la variación como idea estructurante	⬬

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	***Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje***	***Indicio*** ***Posibles dificultades que podrían surgir en los procesos matemáticos utilizados para la resolución de la Tarea 1***	El manejo de tiempos pequeños podría representar una dificultad en la resolución de la tarea, puesto que podría complicar los cálculos de altura en el llenado del recipiente y generar valores no enteros.	⬚
		Oportunidad *Dificultades asociadas a trabajar con actividades como esta por primera vez*	“para el estudiante que no se le ha aplicado este tipo de recursos algunas preguntas deben ser más explícitas o que guíen en el desarrollo del proceso.”	⬚
	Formas de interacción de los alumnos con el concepto de función	***Indicio*** ***Posibles procesos y estrategias del resolutor***	Al enfrentarse a la tarea, los resolutores podrían utilizar comúnmente valores “grandes” de tiempo para obtener resultados enteros de volumen y altura	⬭
		Oportunidad *La influencia del tipo de trabajo con un contenido sobre el aprendizaje del mismo.*	Repercusiones de la identificación de distintas relaciones entre variables en el conocimiento del estudiante acerca de los comportamientos de las rectas en el plano de acuerdo a los parámetros involucrados en la relación de cada par de variables.	⬭

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas **KMT**	***Teorías de enseñanza***	*Teoría de enseñanza personal basada en teorías formales*	Constructos teóricos de la *Socioepistemología* como herramienta didáctica de trabajo. Utiliza la idea de *práctica de modelación* como generadora de conocimientos, de ahí la relación que hace con los contextos del mundo real.	🗎
	Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza asociadas al concepto defunción lineal.	*Características de la Tarea 1 como un instrumento propicio para la enseñanza*	Esta no es una tarea fácil de realizar, requiere de un pensamiento matemático basado en predecir y dar nuevos significados a la función lineal, lo cual va más allá de la aplicación automática de algoritmos o secuencias determinadas y promueve un aprendizaje significativo en los estudiantes	🟩
		La modelación como estrategia didáctica	Implica desarrollar procesos mentales que van más allá de aplicar una fórmula o hallar un resultado y requiere que los estudiantes tengan ciertos conocimientos previos que le permitan establecer relaciones entre variables y dar nuevos significados al concepto de función.	
		Estrategias o formas de gestionar la actividad según las posibles respuestas de los estudiantes	Para que los estudiantes puedan establecer nuevas relaciones y se observen nuevos comportamientos de la función, se pueden hacer variaciones en los parámetros del fenómeno, como la altura del recipiente y la velocidad de llenado.	
		Oportunidad *Repercusiones de conocimientos previos de los estudiantes sobre los procesos de resolución.*	La influencia que puede tener en la resolución de la tarea, el hecho de que un resolutor sepa, con anterioridad a enfrentar esta actividad, el tipo de función asociada al fenómeno.	⬚
		Oportunidad *Tipo de tareas que asocia a una forma de enseñanza tradicional en matemáticas*	"si un estudiante obtiene sus conocimientos a través de una enseñanza tradicional poco fundamentada, va a tener bastante dificultad para llevar a cabo este tipo de [actividades]"	
	Recursos materiales o virtuales asociados al concepto de función	*Características de los libros de texto como recurso material para la enseñanza de la función lineal.*	En los libros se recurre al uso generalizado de la representación algebraica de las funciones más que de otros registros	⬭

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	***Expectativas de aprendizaje de la función lineal en un nivel específico***	La actividad diseñada por Omar es adaptable a grados anteriores y posteriores al octavo y noveno grado, para los que estaba originalmente diseñada. Sin embargo, se deben tener en cuenta los estándares de conocimiento sobre función lineal en estos grados y ser consecuente con ello en las adaptaciones que se realicen de la tarea.	🟥
		Los estudiantes de octavo y noveno grado tienen conocimiento suficiente sobre el concepto de función lineal como para afrontar la actividad exitosamente y establecer nuevos significados del concepto	
	Nivel de desarrollo conceptual y procedimental	*Oportunidad* *Conocimiento acerca de cómo pueden realizarse adaptaciones a diferentes grados de acuerdo a un determinado nivel de desarrollo conceptual que puedan tener los estudiantes en ciertos momentos escolares.*	⬚

Tabla IV.38 Resumen de MTSK identificado en la Actividad 5



Tareas que pueden asociarse a una forma de enseñanza tradicional en matemáticas.

Puede adaptarse la Tarea a diferentes niveles escolares modificando preguntas pero conservando la estructura y objetivos de acuerdo a un determinado **nivel de desarrollo conceptual** que puedan tener los estudiantes en cierto momento escolar.

Los estudiantes de octavo y noveno grado tienen conocimiento suficiente sobre el concepto de función lineal como para afrontar la actividad exitosamente y establecer nuevos significados del concepto.

Posibles dificultades de los estudiantes que no han trabajado actividades con una estructura similar a esta.

Se gestiona la actividad según las posibles respuestas de los estudiantes, haciendo variaciones en las preguntas de la tarea de manera que se establezcan nuevas relaciones y se observen nuevos comportamientos de la función.

Identificación de la **variación como idea estructurante**

El manejo de tiempos pequeños podria complicar los cálculos de altura en el llenado del recipiente en la tarea.

Fenomenología: Este fenómeno se modela a través de una función lineal y la gráfica cambia en el momento en que se alcanza la altura máxima del recipiente, convirtiéndose en una linea horizontal, además si el flujo varia la gráfica sufre cambios en la inclinación. Realizar variaciones en el fenómeno produce cambios en el modelo gráfico.

Registro algebraico: $h = \frac{1}{4}t$ Es una representación algebraica general de las magnitudes directamente proporcionales que identifica también como funciones lineales.

Proporcionalidad directa

Las funciones lineales guardan relaciones de proporción directa

Función lineal

Variables Independientes ⟷ *Variables Dependientes*

Registro gráfico: La gráfica es una recta que pasa por el origen y si la constante del modelo varia, también cambia la pendiente de la recta.

Registro aritmético

Tránsito entre registros como **técnica de enseñanza**

Características de la Tarea como recurso de enseñanza: Influencia que puede tener sobre el proceso de solución de la tarea, el hecho de que un resolutor sepa, con anterioridad a enfrentar esta actividad, el tipo de función asociada al fenómeno.

La modelación, como estrategia didáctica, implica desarrollar procesos mentales que van más allá de aplicar una fórmula o hallar un resultado. El trabajo con modelación de fenómenos físicos requiere ciertos conocimientos previos que permitan establecer relaciones entre variables y dar nuevos significados al concepto de función.

Posibles variaciones en las condiciones iniciales que pueden hacerse en el fenómeno y sus implicaciones matemáticas.

Características de la Tarea como recurso de enseñanza: no es una tarea fácil de realizar, requiere de un pensamiento matemático basado en predecir y dar nuevos significados a la función lineal, lo cual va más allá de la aplicación automática de algoritmos o secuencias determinadas y promueve un aprendizaje significativo en los estudiantes.

Tarea 1
Función lineal
Llenado de recipiente

Comparación de los resultados obtenidos en distintos registros de representación de un fenómeno como un medio de **validación de un modelo matemático**.

En los libros se recurre al uso generalizado de la representación algebraica de las funciones más que de otros registros.

Al enfrentarse a la tarea, los resolutores podrian utilizar comúnmente valores “grandes” de tiempo para obtener resultados enteros de volumen y altura en la tarea.

Aspectos y términos de la **Socioepistemologia** utilizados como herramienta didáctica de trabajo: *Practica de modelación*

Repercusión de identificar una variedad de relaciones entre variables en el conocimiento del estudiante acerca de los comportamientos de las rectas en el plano de acuerdo a los parámetros involucrados en la relación de cada par de variables.

Figura IV.12 MTSK identificado en el análisis de la Actividad 5

IV.5.2 Resumen de conocimiento especializado de Omar identificado en la Actividad 5

El siguiente resumen se conforma a través de la descripción de los conocimientos identificados en el análisis de la Actividad 5 y las relaciones entre los distintos subdominios y categorías del MTSK, las cuales hemos representado en la mostrada en la Tabla IV.38 y en la Figura IV.12.

El análisis de esta última actividad del curso ha sido de utilidad para aportar información sobre el KoT de Omar en lo que se refiere a lo que sabe sobre la función lineal. Encontramos evidencias del conocimiento que tiene de que ***la variable dependiente está en función de los valores que tome la variable independiente y del tipo de fenómeno que se modele***, es decir del tipo de función. Además la resolución que hace un colega del diseño ayuda a la exploración de nuevas evidencias de conocimiento, permitiéndonos observar por ejemplo que pone de manifiesto que Omar sabe que ***las funciones lineales guardan relaciones de proporción directa***. Estos dos tipos de conocimiento, que hemos clasificado como conocimiento de propiedades del contenido, ayudan al profesor a interpretar los procedimientos que lleva a cabo su compañero al resolver su actividad y generan participaciones que nos permiten identificar que sabe que la función lineal puede representarse a través de ***registros de representación algebraica*** y que ***reconoce una de estas representaciones generales de las magnitudes directamente proporcionales que identifica también como función lineal:*** $h = kt$ ***donde*** $k = \frac{1}{A}$***.*** Omar muestra además que conoce características del ***registro gráfico de representación de la función lineal***, puesto que sabe que ***la gráfica que modela el fenómeno de la Tarea 1 es una recta que pasa por el origen y que si la constante del modelo varía, también cambia la pendiente de la recta***.

Sobre el registro de representación aritmético de la función lineal sólo hemos podido encontrar indicios de que conoce que existe esta representación, pero no hemos logrado explorar qué es lo que conoce sobre éste.

Aunque no se refiere a esto explícitamente en esta actividad, sabemos, de los análisis anteriores, que Omar reconoce el tránsito entre los diferentes registros de representación como una técnica de enseñanza propicia para el trabajo con funciones, la cual sirve al profesor para explicitar su conocimiento acerca de que ***la comparación de los resultados obtenidos en distintos registros de representación de un fenómeno sirve como medio de validación de un modelo matemático,*** lo cual consideramos parte de su KPM.

Otros de los conocimientos que hemos clasificado como parte del KoT, se refieren a las evidencias encontradas a través del uso e interpretación del registro gráfico que hace Omar, en donde pone de manifiesto lo que sabe acerca de la ***fenomenología asociada al concepto de función lineal en lo referente a la modelización gráfica del llenado de recipientes*** al afirmar que este fenómeno ***se modela a través de una función lineal y la gráfica cambia en el momento en que se alcanza la altura máxima del recipiente, convirtiéndose en una línea horizontal, que si el flujo varía la gráfica sufre cambios en la inclinación y que realizar variaciones en el fenómeno produce cambios en el modelo gráfico.*** Esta evidencia nos ha sugerido además, una oportunidad de preguntarnos sobre lo que sabe el profesor acerca de las características de las variaciones en las condiciones del fenómeno para que estas tengan sentido y siga siendo representado por una función lineal.

Sobre la Tarea 1 del diseño que propone Omar para la función lineal, se encuentran evidencias de su conocimiento de características que tiene y por las cuales la considera propicia para enseñanza de este concepto. Esta ***no es una tarea fácil de realizar, requiere de un pensamiento matemático***

basado en predecir y dar nuevos significados a la función lineal más allá de la aplicación automática de algoritmos o secuencias determinadas y promueve un aprendizaje significativo en los estudiantes. Además, Omar realiza algunos comentarios acerca de que el resolutor de la tarea podría contar con ciertos conocimientos al respecto de la función lineal, lo que nos llevó a cuestionarnos acerca de lo que sabe exactamente el profesor de la influencia que puede tener en la resolución de la tarea, el hecho de que un resolutor sepa, con anterioridad a enfrentar esta actividad, el tipo de función asociada al fenómeno. Todos estos conocimientos los consideramos para del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.

Sobre este mismo subdominio (KMT), como en actividades anteriores, Omar vuelve a mostrar evidencias de tener un conocimiento de la ***modelación como una estrategia de enseñanza***, sin embargo, en este análisis hemos podido complementar dicho conocimiento al reconocer que el profesor considera que esta estrategia ***implica desarrollar procesos mentales que van más allá de aplicar una fórmula o hallar un resultado y requiere que los estudiantes tengan ciertos conocimientos previos que le permitan establecer relaciones entre variables y dar nuevos significados al concepto de función***.

Otro de los conocimientos que reaparecen en este análisis es el que tiene de una ***teoría personal de enseñanza basada en los constructos teóricos de la Socioepistemología*** (KMT). Omar utiliza la idea de práctica de modelación como generadora de conocimientos y para relacionar el trabajo matemático con los contextos del mundo real.

La discusión que hace Omar de su diseño y las reflexiones de sus compañeros en el foro nos permiten analizar también conocimientos referentes a las ***estrategias o formas de gestionar la actividad según las posibles respuestas de los estudiantes***, puesto que el profesor reconoce que ***para que los estudiantes puedan establecer nuevas relaciones y observen nuevos comportamientos de la función, se pueden hacer variaciones en los parámetros del fenómeno, como la altura del recipiente y la velocidad de llenado*** (KMT). Estas variaciones pueden generarse a través de nuevas preguntas para los alumnos y cambios en la actividad.

Otro de los conocimientos que hemos clasificado como parte del KMT de Omar, es el que evidencia sobre las ***características que tienen los libros de texto como recurso para la enseñanza de la función lineal***, al referirse a que ***en los libros se recurre al uso generalizado de la representación algebraica de las funciones más que de otros registros***.

Con respecto al KSM hemos podido encontrar evidencias de que Omar ***identifica la variación como idea estructurante en la matemática***, que se suma a las evidencias que habíamos identificado en el análisis de la Actividad 3 sobre la variación como una conexión transversal entre distintos contenidos.

Sobre el KFLM solo hemos podido encontrar indicios de conocimiento referente a ***las posibles dificultades que podrían surgir en los procesos matemáticos utilizados para la resolución de la Tarea 1*** y una oportunidad de reflexionar sobre las dificultades asociadas a trabajar con actividades como esta por primera vez que son conocidas por Omar. Además encontramos un indicio de lo que sabe sobre las formas de interacción con el contenido matemático al comentar que ***los resolutores podrían utilizar comúnmente valores "grandes" de tiempo para obtener resultados enteros de volumen y altura***. Por otro lado, la insistencia del profesor de buscar distintas relaciones entre las variables de la función, señalan una oportunidad para explorar su conocimiento acerca de las repercusiones de la identificación de estas distintas relaciones en el conocimiento del estudiante acerca de los comportamientos de las rectas en el plano de acuerdo a los parámetros involucrados en la relación de cada par de variables.

La actividad diseñada por Omar es considerada por él mismo como adaptable a grados anteriores y posteriores al octavo y noveno grado, para los que estaba originalmente diseñada. Sin embargo, aunque no habla de cómo se hace exactamente esta adaptación de acuerdo a un determinado nivel de desarrollo conceptual que puedan tener los estudiantes en ciertos momentos escolares, sí comenta que ***se deben tener en cuenta los estándares de conocimiento sobre función lineal en estos grados y ser consecuente con ello en las adaptaciones que se realicen de la tarea***. Además el profesor hace alusión a que ***los estudiantes de octavo y noveno grado tienen conocimiento suficiente sobre el concepto de función lineal como para afrontar la actividad exitosamente y establecer nuevos significados del concepto***. Estos conocimientos los hemos clasificado como parte de su conocimiento sobre las expectativas de aprendizaje del concepto de función lineal en un nivel escolar determinado (KMLS).

CAPÍTULO V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este apartado realizaremos una discusión de los conocimientos identificados en Omar a lo largo del análisis de las cinco actividades pertenecientes al curso de formación continua en el que participaba y mostraremos una panorámica general de su conocimiento especializado con base en los análisis de las actividades individuales del curso.

V.1 Contexto en el que se enmarca el conocimiento especializado de Omar

A lo largo del curso, el profesor va realizando reflexiones individuales con los tutores y con sus compañeros del curso, acerca del contenido matemático que se estaba trabajando y sobre la enseñanza y aprendizaje de este contenido. Esto nos ha dado la oportunidad de indagar sobre de lo que conoce Omar sobre contenidos como la circunferencia, los polígonos y funciones lineales y cuadráticas, así como lo que sabe de su enseñanza y su aprendizaje.

En los análisis de cada una de las Actividades hemos hablado sobre de los objetivos que Omar se plantea para cada una de sus propuestas de aplicación en el aula, también acerca del uso que hace de recursos que no están exclusivamente ligados a la matemática, y sobre las creencias manifestadas por el profesor relativas a la matemática, su enseñanza y aprendizaje, algunas de las cuales son declaradas por el profesor y otras están reflejadas implícitamente en el diseño, discusión y evaluación de actividades que hace a lo largo del curso de formación (cabe señalar que estas no han podido ser contrastadas con su actuación en el aula). Estas consideraciones nos han ayudado a contextualizar las participaciones del profesor en las distintas actividades. En particular, pudimos comprobar con el análisis empírico que las creencias subyacen al uso que hace el profesor de su conocimiento y permean en su toma de decisiones con respecto a las secuencias que diseña para abordar los contenidos. Por ejemplo, Omar considera que "en la modelación el creador del conocimiento es el estudiante, por tal motivo la intervención del profesor debe ser lo más mínimo, es decir solamente para ordenar, regresar al camino cuando el estudiante se va por otro, hará las veces de guía para preguntas referentes a los enunciados, no será el que da pistas". Esta concepción sobre el papel que debe asumir el profesor durante la gestión de las actividades en las que se utiliza la modelación, lleva al profesor hacia la construcción de una secuencia de tareas en la que las tareas permitan a los estudiantes un trabajo autónomo, es decir, todo el trabajo de diseño de las tareas se ve influenciado por esta concepción.

En las declaraciones de Omar y en las instrucciones de trabajo que propone en la guía pedagógica del *problema de las cuerdas* y el diseño que propone para la modelación de funciones lineales y cuadráticas, se pone de manifiesto la intención del profesor de considerar actividades abiertas y flexibles que permitan el trabajo en grupos y den cabida a diferentes procesos de solución, de tomar el papel de gestor y guía de la actividad y no de resolutor de la misma. Además se observa en el profesor el gusto por innovar y el conocimiento de las actitudes de los alumnos ante cierto tipo de actividades como, por ejemplo, la modelación de fenómenos reales. Todas estas características nos indican que las creencias de Omar sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son cercanas a los descritos por Carrillo (1998) para la tendencia investigativa.

A pesar de que en los distintos análisis individuales de las Actividades se han tomado en consideración las oportunidades e indicios de conocimiento reflejadas en las participaciones de Omar, en este capítulo hemos decidido hablar solo de las evidencias de conocimiento que hemos encontrado, puesto que nos parece que esto nos permitirá hacer énfasis en la potencialidad del modelo MTSK para analizar el conocimiento del profesor.

V.2 Dominio de conocimiento matemático

V.2.1 Sobre el Conocimiento de los Temas (KoT)

El análisis de este subdominio ha centrado la atención en el conocimiento que tiene el profesor sobre el *qué* y el *porqué* de los contenidos escolares que se trabajan en el curso virtual desde un punto de vista puramente matemático.

Cada actividad analizada ampliaba el mapa de conocimiento que se ponía en evidencia para este subdominio, puesto que se encontraban evidencias que permitían ir complementando información o confirmando indicios de conocimiento. Algunos de estos conocimientos podían estar desvinculados de la actividad o tarea que se abordaba y algunos otros parecían haberse utilizado innecesariamente, sin embargo los consideramos parte del KoT del profesor. A continuación se desglosan las evidencias de conocimiento que asignamos a este subdominio siguiendo el esquema de categorías descritas en el Marco Teórico.

V.2.1.1 Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático

La definición de esta categoría como parte del dominio de conocimiento puramente matemático, nos ha permitido reconocer los conocimientos básicos con los que cuenta el profesor para desarrollar las actividades del curso, focalizando la atención en lo que sabe acerca de las propiedades de un determinado contenido matemático y los fundamentos de estas, así como el conocimiento de la definición o definiciones de dicho contenido. Esta categoría nos permite centrarnos en la indagación de esta base de conocimiento matemático de la que dispone el profesor.

En la Actividad 1, en la que el profesor trabaja *el problema de las cuerdas*, se ponen de manifiesto conocimientos que tiene acerca de propiedades de la circunferencia. Omar sabe que la circunferencia está “conformada por infinitos puntos” y define la cuerda a través de sus propiedades como un “segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta”.

Además, el profesor utiliza para esta primera actividad del curso lo que sabe sobre las propiedades de los polígonos, por ejemplo que la expresión $\boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{n}}{2}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{3})$ establece las relaciones que existen entre el número de diagonales y vértices de un polígono, también que algunos polígonos pueden inscribirse dentro de circunferencias y que existen dos tipos de polígonos (regulares e irregulares) cuya clasificación depende de las medidas de sus lados. Para esta última propiedad, los datos con los que contamos no nos permiten saber si Omar conoce ejemplos de polígonos irregulares que tengan todos sus lados iguales (por ejemplo, polígonos cóncavos estrellados equiláteros) o de polígonos equiláteros irregulares convexos (por ejemplo, el rombo). Carreño y Climent (2009), explican que esta forma de clasificar solamente con base en la medida de los lados está íntimamente relacionada con los efectos del uso de los polígonos convexos como figuras prototípicas, lo cual inhibe el pensamiento de figuras cóncavas cuando se trabaja con polígonos. Estos efectos fueron observados por ellas en estudiantes para maestro.

Con respecto a los conocimientos detectados en las Actividades 2, 3, 4 y 5, el contenido matemático sobre el que se centra la atención es el de función, en particular las funciones lineales y cuadráticas. Sobre estos objetos matemáticos encontramos evidencia de que Omar sabe que las funciones están conformadas por parámetros y variables dependientes o independientes, más aún, sabe que el valor de la variable dependiente no solamente está condicionada por los valores que tome la variable independiente, sino también por el tipo de fenómeno que se esté modelando. En términos de Hitt (1998), el conocimiento que tiene Omar sobre estas propiedades le permite realizar una articulación entre el registro gráfico y el contexto real. En la actividad 5 se manifiesta también su conocimiento relativo a que los parámetros de las funciones lineales guardan relaciones de proporción directa. Esta idea del concepto de razón como una función de un par ordenado de números de valores de una magnitud, junto al concepto de proporción como igualdad entre dos razones, son consideradas como ideas fundamentales del razonamiento proporcional (Fernández y Llinares, 2012).

Aunque consideramos que Omar tendrá muchos otros conocimientos sobre las propiedades de estos contenidos matemáticos, las evidencias que hemos podido recopilar nos hablan de conocimientos superficiales del profesor, puesto que este menciona propiedades pero no nos habla de los fundamentos de éstas, como en el caso de la Actividad 3, en la que Omar pone de manifiesto su conocimiento sobre una propiedad del logaritmo, al afirmar que “el logaritmo de cero lo damos como inexistente”, pero no justifica el porqué de dicha propiedad. Esto, muy probablemente, se debe al contexto de trabajo en el cual se recolecta la información, es decir, a que el curso no estaba explícitamente diseñado para indagar sobre el MTSK y a que no fue posible realizar entrevistas específicas para profundizar en estas participaciones; sin embargo, más que considerar esto como un problema, destacamos la potencialidad del modelo como una herramienta que nos permite observar y analizar el conocimiento del profesor en un contexto de formación que no estaba específicamente diseñado para esta investigación.

V.2.1.2 Conocimiento de la fenomenología asociada a un contenido matemático

En las actividades 2 y 4 detectamos algunos indicios del conocimiento de Omar sobre el empleo de la función como herramienta modeladora de fenómenos; sin embargo, teníamos poca información al respecto. No fue sino hasta el análisis de la actividad 5 que pudimos ampliar la información y encontrar evidencias de conocimiento relacionados con aspectos fenomenológicos de las funciones lineales. Los resultados del análisis nos permiten observar que el profesor sabe que la función lineal modeliza el fenómeno de llenado de recipientes con condiciones específicas tanto para la forma del recipiente, como para la velocidad de llenado, y que la gráfica resultante cambia en el momento en que se alcanza la altura máxima del recipiente, convirtiéndose en una línea horizontal. También sabe que si el flujo varía, pero es constante a intervalos, la gráfica sufre cambios en la inclinación, por lo que realizar variaciones en el fenómeno produce cambios en el modelo gráfico. Esta vinculación entre la forma de la gráfica y el fenómeno que representa es uno de los aspectos que en el MTSK se incluyen dentro de esta categoría (la modelización de fenómenos), el otro aspecto es la aplicación de un objeto matemático en un contexto extra-matemático. Un tratamiento similar al planteado por Omar, lo encontramos en Briceño y Cordero (2010) para el caso de la modelación del movimiento de objetos y sus relaciones con las variaciones que sufren las gráficas que modelan su posición y su velocidad. Estos autores concluyen que dichas actividades propician un desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Esta categoría nos ha ayudado a apreciar el conocimiento que tiene el profesor respecto de fenómenos físicos y modelos matemáticos atribuibles al tema de función. El tener conocimiento de aspectos epistemológicos ligados a la matemática permite comprender los significados, en el caso de la función lineal a través de la modelización matemática de estos fenómenos físicos.

V.2.1.3 Conocimiento de los registros de representación asociados a un contenido matemático

En el caso del análisis de la Actividad 1, el profesor pone de manifiesto conocer la representación esquemática de la circunferencia y sus cuerdas, el registro algebraico de representación de las relaciones entre las cuerdas del círculo y las diagonales del polígono inscrito y el registro algebraico de representación de la suma de los *n* primeros números naturales. Este conocimiento está ligado a los procesos de solución que propone para *el problema de las cuerdas* y a su conocimiento sobre las propiedades de los conceptos que representa. Estas evidencias nos permiten sólo observar que el profesor conoce estas representaciones sin profundizar en qué es lo que sabe sobre estas y, más adelante, indagar sobre el conocimiento que tiene sobre el uso didáctico que pueden tener, es decir, las relaciones de este conocimiento con el KMT.

Ahora bien, en el análisis de la Actividad 2 observamos algunos indicios de que Omar conocía registros de representación algebraicos, gráficos y aritméticos de la función lineal y cuadrática, los cuales utilizaba para diseñar la secuencia de tareas que propone en esta parte del curso. No es hasta la Actividad 5 que el profesor nos permite analizar más focalizadamente su conocimiento del registro gráfico de la función lineal que representa al fenómeno estudiado, con lo cual obtuvimos evidencias del conocimiento que tiene Omar sobre características específicas de la gráfica de este tipo de función, que es una recta que pasa por el origen y que la variación en la constante solamente repercute en la inclinación de la recta en el esquema. Además, al reconocer como función lineal a una expresión algebraica propuesta por otro profesor, Omar muestra conocimiento sobre una representación de la función en un registro algebraico que también la identifica como una representación de dos cantidades que se encuentran relacionadas en proporcionalidad directa.

La actividad que diseña Omar nos da información también de su conocimiento acerca de otros registros que no representan a la función pero sí a otros objetos matemáticos y que sirven como apoyo para generar las tareas que permitirán atribuir significados a los conceptos de función lineal y cuadrática: conoce un registro de lenguaje común para representar el llenado de recipientes a velocidad constante y otro para el cálculo de áreas con perímetro constante, además de conocer un registro esquemático de representación de un tanque rectangular que presenta como un prisma y el de una parcela rectangular que dibuja como un rectángulo. Aunque estos conocimientos parecieran muy superficiales o desconectados del concepto matemático, forman parte del diseño de la tarea y sirven como punto de partida para la modelación matemática, por lo que nos parece importante destacarlos.

El conocimiento y manejo de estos distintos registros nos ha permitido reconocer aspectos específicos de la matemática que sirven al profesor como base para plantearse un uso didáctico de los registros de representación, así como para el diseño de tareas y la evaluación de procedimientos de solución de estas tareas, llevados a cabo por estudiantes o colegas. Observamos entonces que este tipo de conocimiento puede estar ligado directamente al dominio de conocimiento didáctico, en especial al KMT y al KFLM.

V.2.1.4 Conocimiento de los procedimientos matemáticos asociados a un determinado contenido

En la Actividad 1, las participaciones de Omar nos permiten reconocer el conocimiento referente a procesos de solución *para el problema de las cuerdas*. El profesor conoce dos formas de resolver este problema, a través de tomar casos particulares y “trazar manualmente las cuerdas en un círculo” para contarlas y tratar de reconocer un patrón en el comportamientos de estos casos, denominada por él mismo como un método de solución de tipo gráfico, y a través de un método de tipo algebraico en el que se tomala fórmula para obtener “el número de diagonales que se pueden encontrar en un polígono regular inscrito en una circunferencia” al que se suman los lados, relacionando diagonales y lados de un polígono inscrito con las cuerdas del círculo.

Un punto importante a resaltar es que Omar nos habla no solo de *cómo funcionan* estos dos procesos de solución sino que también comenta *cuándo podrían utilizarse*, esto no significa que esté proponiendo condiciones de exclusividad en el uso de cada procedimiento, sino que destaca algunas situaciones en las que son de utilidad, es decir, no señala que la solución de tipo algebraico no sea útil para la condición que propone en la solución gráfica ni viceversa. La solución gráfica la considera útil “cuando el número de puntos es pequeño, […] cuando el número es menor de 20 puntos”; por otro lado, señala que el procedimiento de solución de tipo algebraico es apropiado tanto para polígonos regulares como irregulares “debido a que las diagonales en un polígono irregular [se calculan] de la misma manera [que] en los regulares”.

En esta misma actividad el profesor muestra su conocimiento sobre un tercer procedimiento de solución, que propone tras observar las soluciones de sus compañeros del curso, este es a partir del uso de la sumatoria de enteros consecutivos.

En la Actividad 2 Omar nos muestra su conocimiento de dos posibles procedimientos matemáticos asociados al trabajo con funciones lineales y cuadráticas, el método de solución de ecuaciones simultáneas y el método de diferencias, “para la lineal primera diferencia, y para la cuadrática segunda diferencia”. Lamentablemente las participaciones del profesor solo nos permiten saber que conoce estos métodos y no los detalles acerca de lo que sabe de ellos.

Es importante señalar también que en la Actividad 1 Omar menciona otros conceptos matemáticos como sucesiones, límites, sumatorias o infinito, sin embargo no ofrece información suficiente para determinar cuál es el conocimiento que tiene de estos contenidos, además de que aparecen en el discurso de Omar como elementos que buscan dotar de formalidad a sus respuestas, soluciones y justificaciones pero que, como mencionamos en el análisis individual de esta primera actividad, no son necesarios para la resolución del problema ni se ha obtenido suficiente información sobre ellos como para hablar de evidencias, por lo que no hemos considerado necesario discutirlos en este capítulo.

La descripción que hemos hecho del KoT que se pone de manifiesto en el análisis del curso de formación continua, queda recopilada a manera de resumen en la Tabla V.1.

Las relaciones entre las distintas categorías de este subdominio descritas en los apartados anteriores se muestran gráficamente en la Figura V.1, que permite al lector tener una visión general de los resultados obtenidos en este subdominio.

Subdominio	**Categoría**	**Actividad**	**Omar conoce:**	
Conocimiento de los temas KoT	***Propiedades y sus fundamentos***	A1	*Circunferencia*	Está conformada por infinitos puntos
				Definición de cuerda: Segmento que une dos puntos marcados en la circunferencia en línea recta
			Polígonos	El número de diagonales y vértices del polígono está relacionada por: $\boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{3})$
				Existen dos tipos de polígonos, regulares e irregulares. Esta clasificación depende de la medida de sus lados.
				Algunos polígonos pueden inscribirse dentro de circunferencias.
		A2 A5	*Las funciones lineales y cuadráticas*	Están conformadas por parámetros y variables, estas últimas pueden ser variables dependientes o independientes, más aún sabe que el valor de la variable dependiente depende de los valores que tome la variable independiente y del tipo de fenómeno que se modele, es decir del tipo de función que quiera representarse.
		A5	*Proporcionalidad*	Las funciones lineales guardan relaciones de proporción directa.
		A3	*Logaritmo*	El logaritmo de cero no existe
	Fenomenología	A1	*Fenomenología del cálculo y el análisis matemático*	Surgen del estudio de los cambios o variaciones de fenómenos físicos, y de la mecánica de los cuerpos celestes, el fluido de líquidos, la transmisión de calor y la velocidad con que se mueve un cuerpo.
		A5	*Función lineal como herramienta de modelización matemática del llenado de recipientes a velocidad constante*	Este fenómeno se modela a través de una función lineal y la gráfica cambia en el momento en que se alcanza la altura máxima del recipiente, convirtiéndose en una línea horizontal. Si el flujo varía la gráfica sufre cambios en la inclinación. Realizar variaciones en el fenómeno produce cambios en el modelo gráfico

Conocimiento de los temas KoT	***Registros***	A1	*Esquemático*	Representación de cuerdas en el círculo
		A2		De un tanque rectangular que presenta como un prisma
				De una parcela rectangular que dibuja como un rectángulo.
		A1	*Algebraico*	Representación de las relaciones entre las cuerdas del círculo y las diagonales del polígono inscrito
				Representación de la suma de n primeros números naturales.
		A5		Representación de las magnitudes directamente proporcionales: una representación algebraica general de estas que identifica también como funciones lineales
		A5	*Gráfico*	Representación del fenómeno de la Tarea 1 (llenado de recipiente): es una recta que pasa por el origen y si la constante del modelo varía, también cambia la pendiente de la recta.
		A2	*Lenguaje común*	Del llenado de recipientes a velocidad constante
				Del cálculo de áreas con perímetro constante
	Procedimientos	A1	*Método gráfico*	*Cómo se hace:* Trazado de casos particulares y conteo
				Cuándo se puede hacer: Cuando el número es pequeño, < 20
			Método algebraico	*Cómo se hace:* Tomar fórmula para obtener las diagonales de un polígono, y sumar los lados, relacionando diagonales y lados de un polígono inscrito con las cuerdas del círculo.
				Cuándo se puede hacer: Sirve para cualquier polígono, regular o irregular.
			Método de sumatoria de enteros consecutivos	*Cómo se hace:* Se utiliza la sumatoria de los números naturales menores que n.
		A2	*Solución de ecuaciones simultáneas*	Para función lineal y cuadrática
			Método de diferencias	Método de primera diferencia para función lineal
				Método de segunda diferencia para función cuadrática

Tabla V.1 Evidencias de KoT de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua.

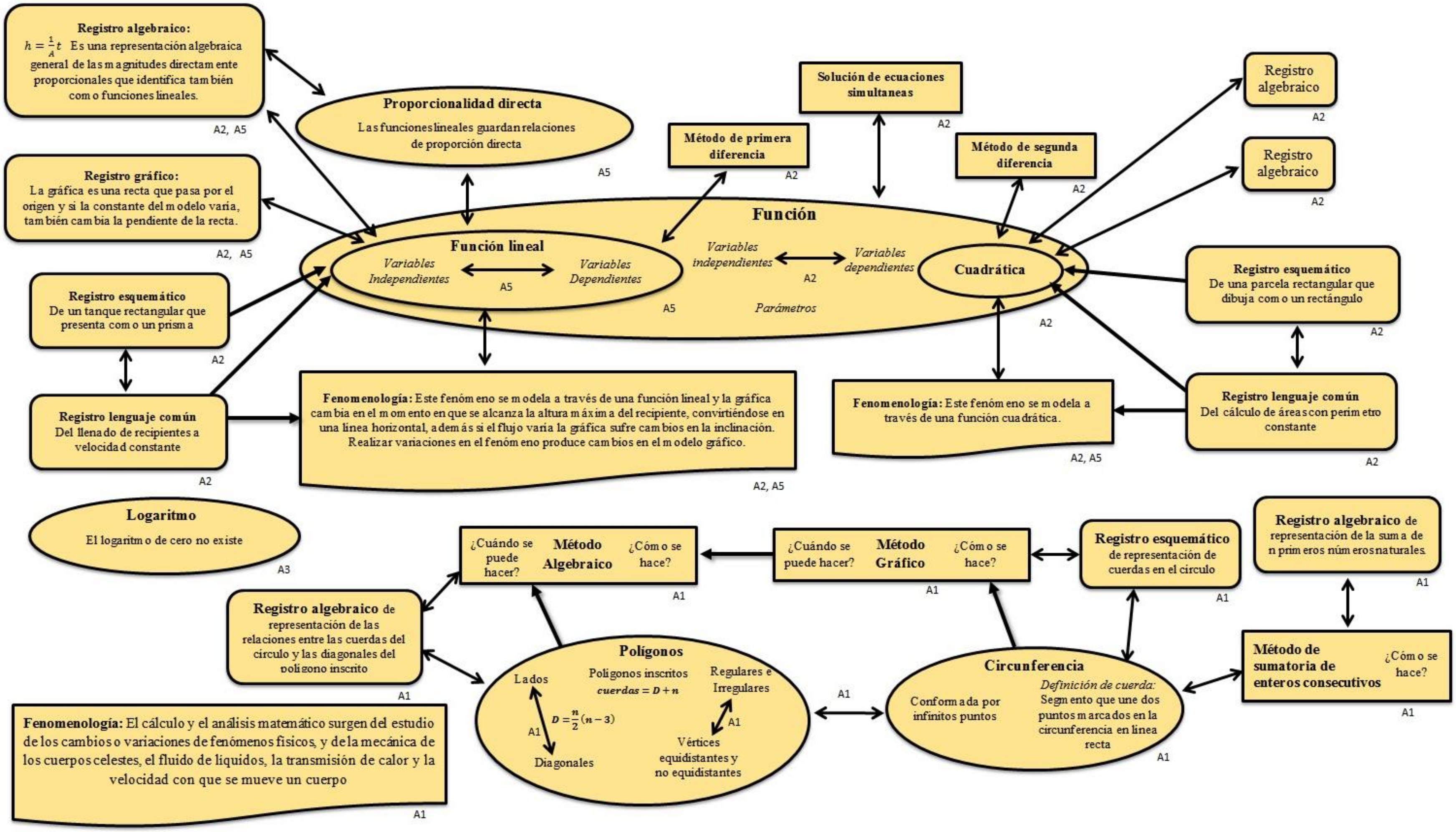


Figura V.1 Evidencias de KoT de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua y las relaciones entre las categorías de este subdominio.

V.2.2 Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

Como se comentó en el marco teórico, para este subdominio no se han construido categorías previas a la investigación empírica, sin embargo, a lo largo del análisis, hemos encontrado algunas categorías que pueden servirnos para caracterizarlo y profundizar en su contenido. A continuación hablaremos sólo de las categorías para las que se encontraron evidencias claras de que Omar poseía dichos conocimientos.

Dentro de la resolución del *problema de las cuerdas*, el profesor establece una serie de pasos a través de los cuales elabora y argumenta su procedimiento de solución, lo cual se refiere a una forma específicade proceder matemáticamente, en la que se establece una secuencia para resolver el problema, planificando y jerarquizando el uso y la relación de distintos contenidos de manera que construye un heurístico utilizado en la resolución de problemas, el cual ha sido denominado por Wood (1988) como *técnica de subobjetivos*. A través de esta, logra la observación de relaciones entre cuerdas y los polígonos inscritos y hace un análisis de patrones para casos específicos. Esta forma de abordar el trabajo matemático lo hemos considerado una evidencia del conocimiento que tiene Omar de la ***jerarquización y planificación para la resolución de problemas como una práctica propia de la disciplina***, una forma en la cual se razona y produce matemáticas.

En la Actividad 1 detectamos también un indicio de conocimiento de las formas de validación o demostración de un resultado en matemáticas, puesto que Omar comenta que “en la verificación el profesor puede utilizar la práctica de graficación como medio de comprobación del algoritmo algebraico”, es decir, considera como forma de validación el probar la expresión algebraica para algunos casos, trazando y contando cuerdas. Aunque estas participaciones nos habían permitido generar una nueva categoría en este subdominio, aún no teníamos información suficiente para asegurar que el profesor tenía el conocimiento de esta práctica. Sin embargo, en las Actividades 2 y 4 el profesor hace referencia a que “para la verificación o validación de la actividad se utilizará un software que puede ser GEOGEBRA o CABRI”, añade que esto es “para mostrar al estudiante que lo que él realizó no solamente lo validan sus pares, sino también una herramienta que además de ser ayuda para mostrar resultados, es como un agente externo al aula que me puede decir si lo realizado está bien o no”. Si bien es cierto que algunos autores (e. g. Hölzl, 2001) señalan que el uso de software puede ir más allá en la demostración que el simple hecho de hacer verificaciones con éste, también lo es que el uso como elemento para confirmar propiedades que plantea Omar puede ser visto como un primer paso en el camino hacia la construcción del pensamiento necesario para realizar dichas demostraciones. Torregrosa-Gironés, Haro, Penalva y Llinares (2010) afirman que en el trabajo que hacen profesores de secundaria con software dinámico “la función explicativa de la prueba aparece como una herramienta para convencer y los profesores ven útil el software dinámico durante la resolución de los problemas para potenciar esta función” (p. 379).

Además, la Actividad 5 aporta evidencias más claras y amplía la información acerca de este conocimiento sobre formas de validar en matemáticas, en tanto que el profesor establece que en la resolución que hace su colega de la tarea 1 se observa un conocimiento sobre otra posible forma de validación: “a través de representaciones como la algebraica con la relación de proporcionalidad, la tabulación, y la graficación, […] de predicciones de datos tanto en la tabla como en la gráfica se verifica la veracidad del modelo".

Esto nos lleva a plantear que Omar tiene conocimientos de ***las formas de validación o demostración de un resultado en matemáticas***, que consideramos una práctica del trabajo matemático. Sabe que se pueden utilizar representaciones esquemáticas, realizadas a mano o con ayuda de herramientas tecnológicas, como recursos externas de validación, o verificación de resultados algebraicos. De manera más general, podemos decir que hemos obtenido evidencias de que Omar reconoce que la comparación de los resultados obtenidos en distintos registros de representación de un fenómeno sirve como medio de validación de un modelo matemático.

Otra evidencia de este conocimiento se manifiesta en el análisis de la Actividad 2, en donde el profesor comenta que "cuando se quiere obtener un modelo matemático a partir de ciertos fenómenos reales, el proceso para la obtención recibe el nombre de modelación matemática". Esta evidencia la hemos clasificado como parte de su KPM, en tanto que Omar muestra que ***conoce la modelación como una práctica particular del quehacer matemático***.

Algunos elementos que Omar muestra sobre formas de proceder en matemáticas parecen conducir al profesor en la gestión y organización de su conocimiento de los temas dentro de la resolución de un problema, y también en la toma de decisiones con fines didácticos. Tal es el caso del tránsito entre registros, el cual, al considerarlo como una forma de validación de resultados, lo lleva a plantear la necesidad de conocer los distintos registros de representación y sirve como base en su estrategia didáctica del diseñode las tareas referentes a función lineal y cuadrática. Estas relaciones con el conocimiento de los temas pueden observarse en la Figura V.2, en la que se plasma un panorama general de este conocimiento.

A modo de resumen elaboramos la Tabla V.2, que contiene el KPM que se pone de manifiesto en el análisis del curso de formación continua.

Subdominio	**Categoría**	**Actividad**	**Omar conoce:**	**Representación de este conocimiento en la Figura V.2**
Conocimiento de la práctica de la matemática KPM	***Jerarquización y argumentación para la resolución de problemas***	A1	Una serie de pasos a través de los cuales elabora y argumenta su procedimiento de solución, lo cual se refiere a una secuencia para resolver el problema, planificando y jerarquizando el uso y la relación de distintos contenidos de manera que construye un heurístico utilizado en la resolución de problemas a través de la observación de relaciones entre cuerdas y los polígonos inscritos y del análisis de patrones para casos específicos.	
	Modelación matemática	A2	Una caracterización de la modelación matemática como un proceso que permite interpretar fenómenos reales desde un modelo matemático.	
	Formas de validación o demostración	A1 A2 A4	Se pueden utilizar representaciones esquemáticas, realizadas a mano o con ayuda de herramientas tecnológicas, como recursos externas de validación, o verificación de resultados algebraicos.	
		A5	La comparación de los resultados obtenidos en distintos registros de representación de un fenómeno sirve como medio de validación de un modelo matemático.	

Tabla V.2 Evidencias de KPM de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua.

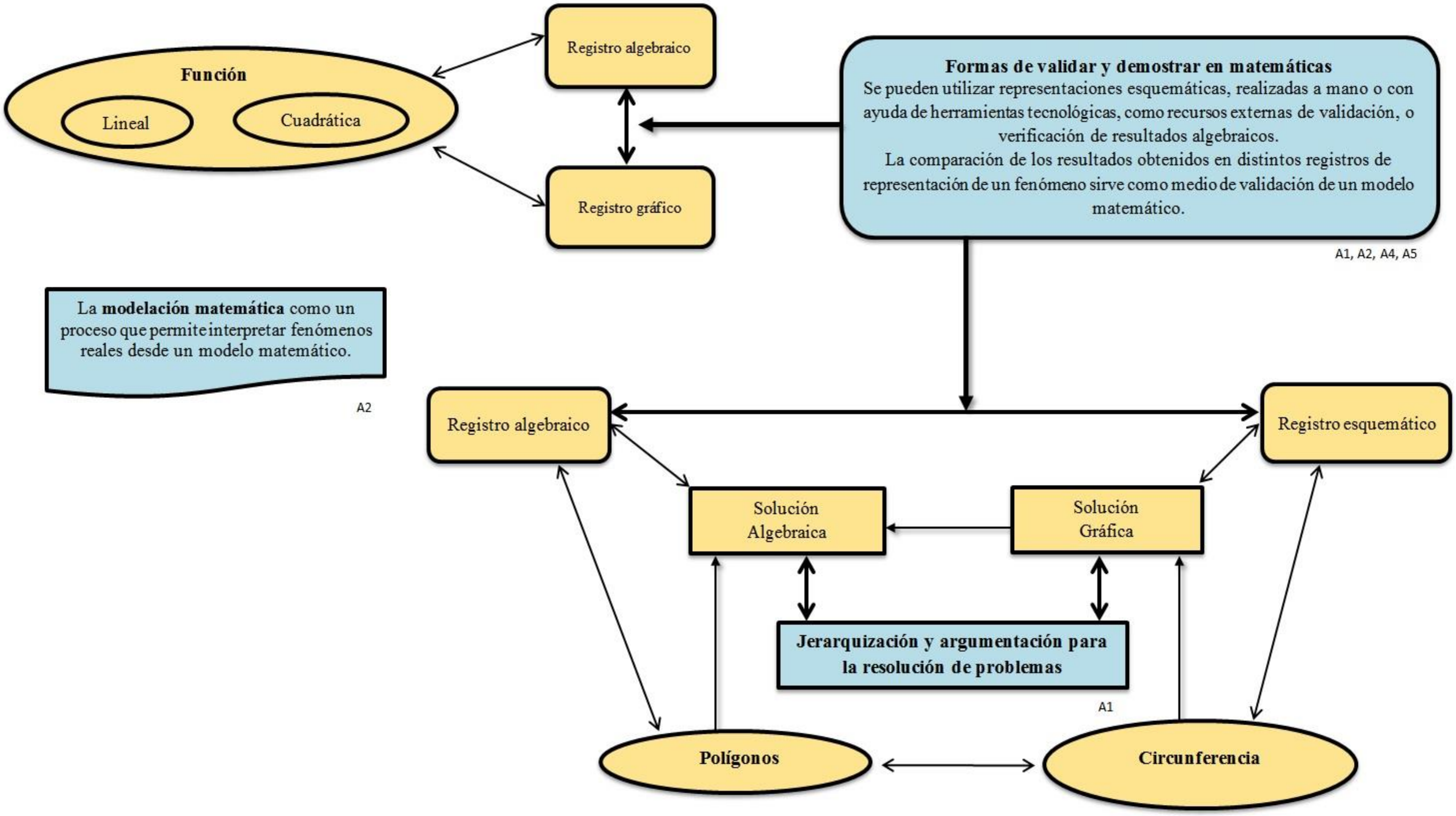


Figura V.2 Evidencias de KPM de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua y las relaciones entre las categorías de este subdominio y el KoT[1].

---

[1] Para esta y las figuras siguientes, se decidió marcar con líneas más delgadas las relaciones establecidas en esquemas anteriores y resaltar con líneas más gruesas las nuevas relaciones descritas en el apartado correspondiente.

V.2.3 Sobre el conocimiento de la estructura de la matemática (KSM)

V.2.3.1 Conocimiento de conexiones transversales entre contenidos

En la Actividad 3 y 5 Omar nos permite observar que conoce una conexión transversal entre “las fracciones, el logaritmo, la potencia, la factorización, las funciones, la derivada, todo lo que tenga relación con variación”, de donde interpretamos que el profesor reconoce a la variación como la idea clave que subyace en la estructura de la matemática y que conecta todos estos contenidos.

Con respecto a este subdominio, como mencionamos en algunos de los análisis anteriores, no nos ha sido posible encontrar más que la evidencia de conocimiento descrita en el párrafo anterior. Aun cuando hemos encontrado conocimientos de distintos temas a lo largo de las participaciones del curso, algunos de ellos parecen estar totalmente desconectados, como el conocimiento que muestra el profesor sobre las propiedades de los logaritmos, y, por otro lado, en los que sí se pueden observar relaciones explícitas hechas por Omar, como el de las propiedades de la circunferencia y las de los polígonos inscritos, existen relaciones intraconceptuales, demasiado cercanas como para hablar de complejización o simplificación de un conocimiento, no pareciendo existir tampoco conexiones transversales o auxiliares.

La Tabla V.3 contiene el KSM que se pone de manifiesto en el análisis y en la Figura V.3 se observan las relaciones que hay entre este conocimiento y el KoT de Omar.

Subdominio	**Categoría**	**Actividad**	**Omar conoce:**	**Representación de este conocimiento en la Figura V.3**
Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM	***Conexiones transversales entre contenidos matemáticos***	A3 A5	Conoce una conexión transversal entre las fracciones, el logaritmo, la potencia, la factorización, las funciones y la derivada, reconociendo a la variación como la idea clave que subyace en la estructura de la matemática y que conecta todos estos contenidos.	●

Tabla V.3 Evidencias de KSM de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua.

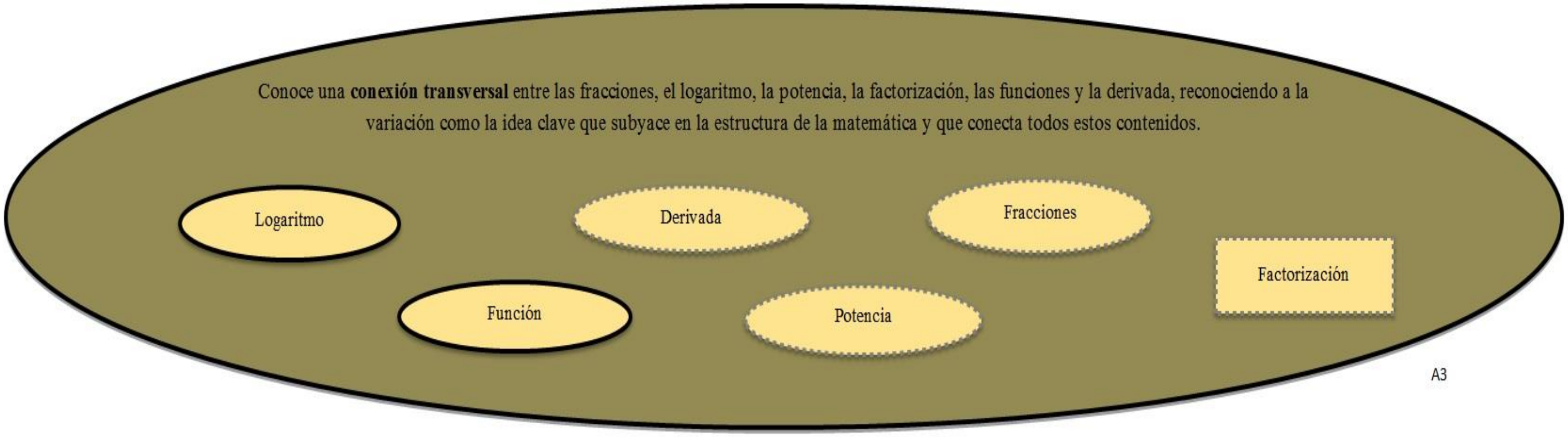


Figura V.3 Evidencias de KSM de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua y las relaciones entre las categorías de este subdominio y el KoT.

V.3 Dominio de conocimiento didáctico del contenido

V.3.1 Sobre el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

V.3.1.1 Conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático

En el análisis de la primera actividad encontramos evidencias de que Omar conoce literatura referente a teorías formales de aprendizaje, como el trabajo de Brousseau (1986), del que cita textualmente: "El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por respuestas nuevas que son prueba del aprendizaje". Aunque el profesor no discute ni contextualiza el uso de la cita dentro de la resolución que elabora del *problema de las cuerdas*, consideramos esta como una evidencia de que conoce este tipo de literatura proveniente de la investigación en didáctica de la matemática, por lo que lo consideramos parte del MTSK.

Observamos además, en las Actividades 1, 2, 3 y 5, evidencias del conocimiento de Omar referente a constructos teóricos que aprendió en el trabajo previo con la Teoría Socioepistemológica, la cual fue diseñada para la investigación acerca de la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013). Por ejemplo, "práctica social", "predicción como práctica social", "resignificación", "práctica de modelación" o "discurso matemático". En la Actividad 1, estos constructos son utilizados por Omar para justificar el uso del problema de las cuerdas como una actividad de aula en la guía pedagógica que elabora. Por otro lado, en la Actividad 2, 3 y 5 los utiliza para elaborar los objetivos de la actividad referente a la función lineal y cuadrática, así como para argumentar y sustentar la estructura y pertinencia de su diseño.

A pesar de que en las evidencias que hemos podido recopilar en las participaciones del curso nos permiten afirmar que el profesor reconoce estos constructos como parte del lenguaje asociado a la Socioepistemología, no podemos asegurar que el significado que les asigna se corresponda con los que la teoría formal ha definido, debido a que el profesor los utiliza, pero no los define de manera rigurosa: hemos señalado antes que en algunos casos parece que el profesor no hace distinciones entre prácticas sociales y prácticas como acciones, por ejemplo cuando habla de la "práctica de graficación". Sin embargo sí podemos afirmar que Omar conoce la teoría y la terminología que ésta utiliza. La distinción que hacemos en este subdominio entre teorías personales e institucionalizadas para el aprendizaje de las matemáticas no posiciona a las institucionalizadas como un conocimiento más profundo o sustentado respecto a las personales. Precisamente el ejemplo que aquí se discute nos da información de un conocimiento superficial sobre elementos de teorías institucionalizadas de aprendizaje de las matemáticas, el cual puede ser contrastado con un conocimiento profundo de teorías personales.

El profesor considera que la variedad de registros de representación asociada a las funciones es una dificultad para el aprendizaje de este contenido. Omar añade que la "práctica de modelación" permite relacionar distintos registros y de esta manera puede afrontar esta dificultad a través de un "contexto variacional", además de que el análisis y reflexión sobre la modelación de fenómenos produce la "resignificación" de los conceptos de función lineal y cuadrática. Esta estructuración personal de constructos provenientes de teorías institucionalizadas nos lleva considerar que el profesor ha logrado construir una teoría personal de aprendizaje de las funciones basada en su organización de dichos constructos teóricos.

Otro ejemplo del conocimiento que tiene Omar de teorías personales de aprendizaje de las matemáticas está en la Actividad 2, en la cual el profesor afirma: "siempre he considerado que para un mejor aprendizaje del conocimiento del concepto de función cuadrática, es más probable una mejor aprehensión de éste cuando se ve primero el concepto de función lineal". No se trata de un conocimiento de secuenciación de contenidos, ya que el orden que propone Omar no es sobre la enseñanza de la función lineal primero para después enseñar función cuadrática, más bien, se trata de un conocimiento que se refleja en el diseño, en el cual hace un tratamiento con la función lineal para luego extrapolarlo a la función cuadrática para que los estudiantes observen regularidades en el trabajo, pero también aprecien las diferencias entre una y otra función y los fenómenos que modeliza cada una. Tampoco se trata de una creencia superficial proveniente de su reflexión personal, ya que esta consideración se aprecia en el diseño de manera estructurada y con objetivos claros en el aprendizaje. Queremos resaltar que, a diferencia del ejemplo anterior sobre teorías personales, en este caso el conocimiento no deriva de la interpretación y organización de elementos de una teoría formal, sino de las reflexiones de las experiencias anteriores con este contenido.

Como hemos señalado en análisis anteriores, el uso que hace el profesor de constructos como estos y referencias provenientes de la investigación en educación matemática, parece responder a su concepción con respecto al papel que tiene como participante en un curso de formación de nivel posgrado y a su necesidad de utilizar conocimientos que ha adquirido a lo largo de esta formación, lo cual es una ventaja para esta investigación dado que no es una tarea fácil encontrar profesores con características de formación como las de Omar, que acude a este tipo de constructos para respaldar o justificar sus participaciones en el curso o sus decisiones en cuanto al diseño de actividades para el aula. Esto nos permite dar sustento con datos empíricos a la inclusión de esta categoría dentro del MTSK y reflexionar sobre la utilidad que tienen estos conocimientos para el profesor de matemáticas.

V.3.1.2 Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático

La evidencia más clara que tenemos sobre el conocimiento de Omar asociable a esta categoría la encontramos en el análisis de la Actividad 2. Sobre el concepto de función lineal y cuadrática, el profesor hace referencia a "su alta complejidad en el aprendizaje, debido a la variedad de sus representaciones en diferentes contextos, y a su forma algorítmica". Hitt (1998) presenta una investigación con profesores de matemáticas de secundaria, en la cual se muestra un análisis sobre las dificultades en la articulación de los diferentes registros de representación en el trabajo con el concepto de función y define una taxonomía de la comprensión de dicho concepto: i) ideas imprecisas acerca del concepto de función, ii) identificación de diferentes representaciones del concepto, identificación de sistemas de representación, iii) transformación de un sistema de representación a otro manteniendo el significado, iv) hacer una articulación coherente entre dos sistemas de representación y v) hacer una articulación coherente de diferentes sistemas de representación en la solución de un problema.

El conocimiento que reportamos en este categoría le sirve a Omar como justificación a la estructura de su diseño, en el que se explicitan los elementos que los estudiantes deben considerar en el tránsito entre registros de representación de las funciones de manera que puedan observar las relaciones entre dichos registros. Omar utiliza este conocimiento sobre dicha dificultad como base para elaborar su diseño de enseñanza sobre funciones, cuyos objetivos podríamos relacionar con alcanzar el quinto nivel de la taxonomía de Hitt (1998). Esta vinculación entre el conocimiento de dificultades y su uso en el diseño de actividades muestra una relación directa entre el KFLM y el KMT.

V.3.1.3 Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático

Sobre esta categoría hemos encontrado más indicios y oportunidades que evidencias de conocimiento. Cuando Omar explica aquello que espera que sus estudiantes hagan al resolver las actividades que él diseñó (tanto para el *problema de las cuerdas*, como para la función lineal y cuadrática), no queda claro si lo que menciona se basa en una anticipación a las producciones de los estudiantes para estructurar los diseños o si está describiendo cuáles son los procedimientos que espera provocar con la estructura de la tarea. No obstante, en esta categoría hemos colocado los conocimientos referentes a lo que Omar manifiesta conocer de la forma en la que los estudiantes abordarán un determinado contenido sin importar si está condicionado o no por la forma en la que estructuró su diseño.

En la Actividad 2 el profesor habla de lo que considera que realizarán los estudiantes para establecerlas relaciones entre variables, dice que sus estrategias se basarán en la “elaboración de tablas, utilización de algoritmos, la elaboración de gráficas, la comparación, relaciones entre variables, variaciones matemáticas, análisis de datos, consecución modelos, entre otras”.

El profesor sabe además que “usando esta clase de actividades ellos [los estudiantes] pueden llegar no solo a obtener un algoritmo, sino además determinar las diferentes relaciones que se pueden dar, determinar cómo me puede variar una función con respecto a uno de los parámetros, qué puedo obtener de una gráfica, cuál es el proceso para obtener un modelo matemático”. Omar considera que esta forma de relacionarse con el contenido llevará al estudiante a establecer “nuevos significados de la función”.

V.3.1.4 Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático

El diseño de tareas para la función lineal y cuadrática, que propone Omar en la Actividad 2, está basado principalmente en la idea de modelación “como herramienta matemática en la solución de problemas reales”. El profesor considera que este tipo de actividades ayudan a “cambiar el ambiente para hacerlo más atractivo”, puesto que este tipo de trabajo resulta motivador para los estudiantes. Villa y Ruiz (2009) explican que esta motivación se sustenta en la cercanía de esta metodología con la matemática como una actividad científica que se encarga de dar respuesta a problemas y estudiar fenómenos que permiten avanzar en otras ciencias.

En la Actividad 3, el profesor comenta que “las actividades más llamativas para los estudiantes son aquellas que tienen relación con las ciencias naturales, como las relacionadas con caída libre, movimientos, y aquellas donde la medición interviene de una manera primaria”, vuelve a recalcar que la modelación de fenómenos genera un interés particular en los estudiantes. Además, hemos de destacar que para el profesor la modelación de fenómenos está ligada directamente al contenido matemático puesto que, como hemos señalado antes, su conocimiento de la fenomenología le permite reconocer a la función como herramienta propia de la modelación matemática.

En la Tabla V.4 presentamos los resultados del análisis de conocimientos de Omar referentes al KFLM y en la Figura V.4 se muestran las relaciones de este conocimiento con el conocimiento matemático descrito anteriormente.

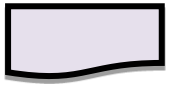
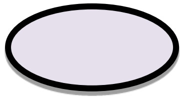
Subdominio	**Categoría**	**Actividad**	**Omar conoce:**		**Representación de este conocimiento en la Figura V.4**
Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM	***Teorías de aprendizaje***	A1	*Teorías formales de aprendizaje*	Literatura referente a teorías formales de aprendizaje: Brousseau	
		A1 A2 A3 A5	*Teoría personal construida con base en una teoría formal de aprendizaje*	Constructos que provienen de la Socioepistemología: práctica social, predicción como práctica social, resignificación, práctica de modelación o discurso matemático	
		A2	*Teoría personal de aprendizaje*	Se aprende mejor la función cuadrática si antes se ha abordado el tema de función lineal	
	Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje	A2	*Dificultades asociadas al aprendizaje de funciones*	Complejidad debida a la variedad de representaciones en diferentes contextos, y a su forma algorítmica.	
	Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático	A2	Los estudiantes interactúan con el contenido matemático estableciendo de relaciones entre variables, observando variaciones en la función respecto de uno de los parámetros, y analizando gráficas.		
	Los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido	A2 A3	La modelación de fenómenos reales como un mecanismo de trabajo motivador para los estudiantes en el trabajo con funciones		

Tabla V.3 Evidencias de KFLM de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua.

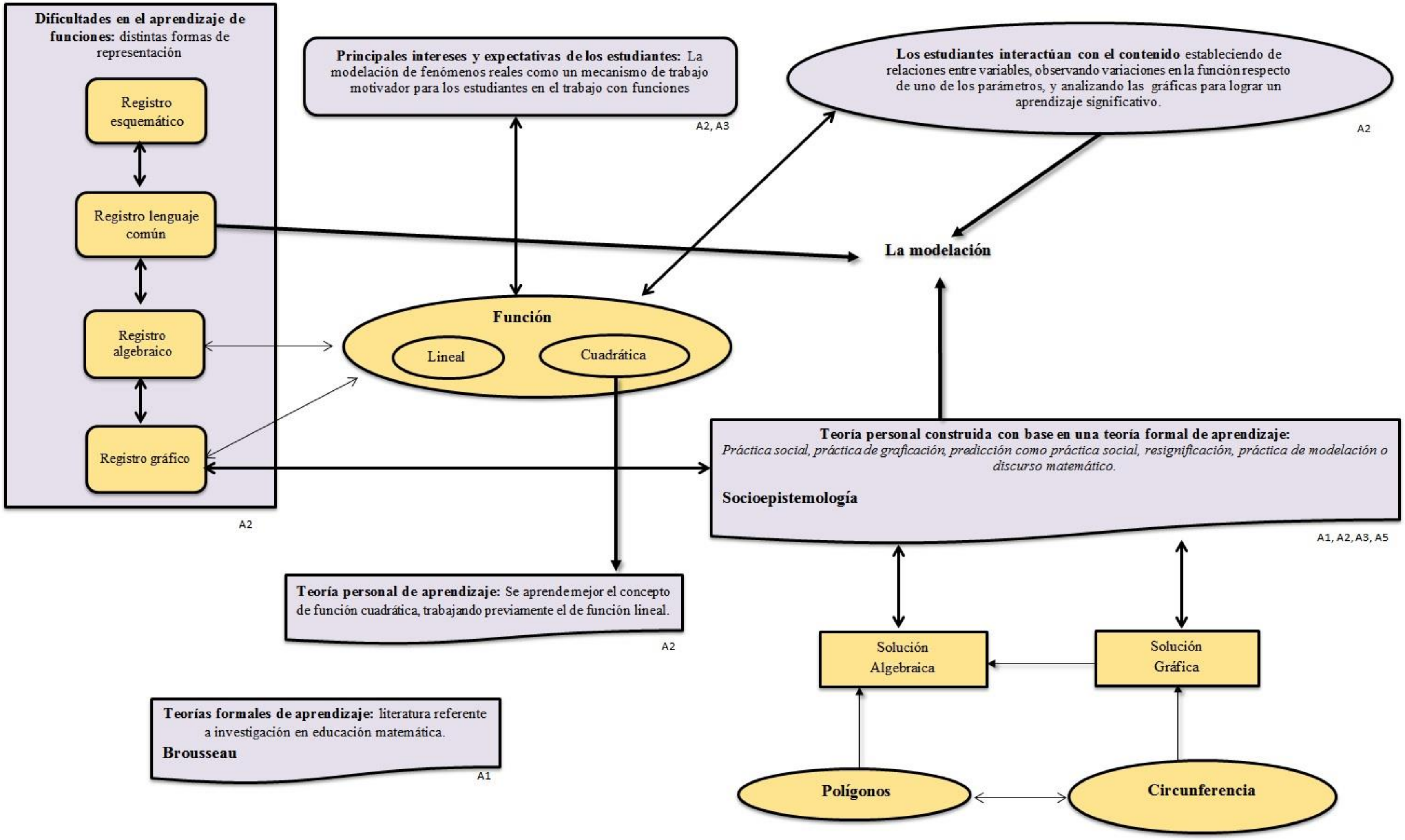


Figura V.4 Evidencias de KFLM de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua y las relaciones entre las categorías de este subdominio y el KoT.

V.3.2 Sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

V.3.2.1 Conocimiento de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático

Dentro de las interacciones de los foros correspondientes a la Actividad 1, Omar establece algunas conjeturas al respecto de la naturaleza del *problema de las cuerdas*, calificándolo como un problema abierto y no rutinario, para lo cual el profesor utiliza su conocimiento de literatura de investigación "que habla de las características de los denominados problemas abiertos" refiriéndose a Garret (1988), en el que se hace referencia a la diferencia entre problemas abiertos y cerrados que existía en la literatura.

> "Hay, por otro lado, situaciones para las que puede haber varias respuestas de las que ninguna de ellas sea correcta o equivocada en términos absolutos, sino simplemente la más adecuada para un conjunto dado de circunstancias. Posiblemente están involucrados un conjunto de factores en conflicto y nunca podemos estar seguros de que hayamos llegado siquiera a la mejor respuesta. Estas situaciones abiertas carecen de una solución definida y solamente pueden ser resueltas" (Garret, 1988, p. 226).

Se considera entonces que Omar hace explícito su conocimiento de teorías formales de enseñanza provenientes de literatura de investigación. Este conocimiento es retomado en la Actividad 3, en la que Omar parafrasea la participación realizada en la Actividad 1 para hablar sobre la potencialidad de los problemas abiertos como actividades para el aula.

Por otra parte, aunque en la Actividad 1 Omar había comenzado a utilizar lenguaje referente a la Socioepistemología, es en la Actividad 2 donde comenta explícitamente que se refiere a esta teoría, además de ampliar la información sobre del uso que hace de estos constructos teóricos. El profesor comenta: "la Socioepistemología como teoría me permite mirar la educación matemática como una práctica donde no solamente se transmiten conocimientos, se expresan postulados, se solucionan problemas, se realizan demostraciones, sino además me permite mirar más allá de los conceptos, cuál es el trasfondo de ellos, me permite transformar, me permite llevar los conceptos a otros contextos, me acerca al mundo real". Estas nuevas evidencias indican que su conocimiento de estos constructos está ligado a cuestiones de enseñanza, además del énfasis que había puesto en el aprendizaje y que fue descrito en el subdominio anterior.

Esta idea parece ser la que lo lleva a utilizar la "práctica de modelación" en el diseño y estructura de sus tareas para generar en el estudiante nuevos significados al respecto de la función lineal y cuadrática, estableciendo relaciones entre la modelización matemática y los contextos reales, lo cual parece responder a una influencia significativa de trabajos relativos a Socioepistemología como el de Cantoral (2001), sobre el cual Omar comenta: "[esta investigación] nos dice que debido a la necesidad de predecir, estimar, y hacer aproximaciones sobre cambios o variaciones de fenómenos físicos, y de la mecánica de los cuerpos celestes, también el fluido de líquidos (Newton), la transmisión de calor de (Fourier), la velocidad con que se mueve un cuerpo (Fermat, Descartes, Laplace, y otros), generaron la consecución de modelos matemáticos, para describir, y explicar dichos fenómenos, partiendo de conceptos de cálculo, y análisis matemático". Es posible que está vinculación que hacer Omar de la enseñanza de las matemáticas con esta teoría venga de que en la Socioepistemología se busca comprender la construcción de conocimiento matemático a través de prácticas sociales en contextos no necesariamente escolares, es decir, buscar reconocer los aspectos epistemológicos y sociales del contenido matemático que permitan una articulación didáctica en la matemática escolar sin que esto represente una desvinculación del contenido con el fenómeno o práctica que ha dado origen al mismo (Cantoral, 2013).

Al igual que en el caso del KFLM, no tenemos evidencias suficientes para decir que el profesor tiene un conocimiento formal o riguroso de una teoría, sí consideramos que conoce ciertos aspectos de ella que le han permitido generar una teoría personal de enseñanza basada en algunos de sus constructos.

V.3.2.2 Conocimiento de recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático

Esta categoría fue especialmente difícil de observar en el análisis, puesto que nos interesaba reconocer en las participaciones de Omar el conocimiento de las características matemáticas que puede tener un material físico o virtual para la enseñanza de un determinado contenido. Sin embargo, a pesar de que el profesor habló varias veces de la posibilidad de usar herramientas tecnológicas como Geogebra o Cabri para validar los resultados obtenidos a través del trabajo manual o algebraico de los contenidos, tanto para el *problema de las cuerdas* como para las tareas referentes a función lineal y cuadrática, no hizo mención de la potencialidad que tienen estos materiales para el trabajo matemático, las diferencias entre ellos, ni de las ventajas y desventajas de su utilización para trabajar el concepto de función. Lo que sí podemos afirmar es que el profesor conoce dos softwares diseñados específicamente para la enseñanza de las matemáticas, que permiten realizar representaciones gráficas y esquemáticas de contenidos matemáticos.

Por último, en la Actividad 5 el profesor nos muestra conocimiento de una característica específica de los libros de texto como materiales didácticos: “muchos de éstos siguen una línea para la solución, y generalmente es la algebraica a través de algoritmos, olvidándose de establecer relaciones entre el contexto, y otras representaciones a veces necesarias como la graficación”. Esto puede considerarse un conocimiento de características específicas ligadas directamente a la enseñanza de las funciones, dado que estos conocimientos se suman a los resultados obtenidos anteriormente acerca de lo que sabe Omar sobre la dificultad que supone la variedad de representaciones de las funciones, y estos conocimientos sirven para motivar el planteamiento de secuencias de tareas en las que se utilicen distintos registros de representación de las funciones lineales y cuadráticas.

V.3.2.3 Conocimiento de las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático

En el análisis de la Actividad 1 Omar pone de manifiesto el conocimiento que tiene del proceso de trazado y conteo como estrategia didáctica propicia para trabajar el *problema de las cuerdas* en el aula. Es precisamente esta estrategia la que utiliza para elaborar la guía pedagógica que se le solicita y en la cual basa el planteamiento de una tarea que guie al estudiante hacia la solución del problema: “se pide que se marquen (2, 5, 8, 10, 15) puntos en circunferencias diferentes, y a partir de ellos dibujar las cuerdas que se puedan formar […] contar cuantas cuerdas se forman, cuando se marcan 2, 5, 8, 10, o 15 puntos en la circunferencia. […] a partir de los datos conseguidos, obtener el algoritmo matemático para cualquier número de puntos marcados en la circunferencia”.

En esta primera parte del curso, el profesor hace referencia también al conocimiento de características específicas del *problema de las cuerdas* como tarea en la cual "cada uno de los individuos participantes adquiera el conocimiento adecuado sobre cuerdas, y sucesiones, a través del uso de ambientes visuales, de la manipulación directa del objeto tratado, y de la predicción como práctica social", además de reconocer que es un problema abierto, y no rutinario que propicia el trabajo dinámico como características específicas de este tipo de problemas.

Con respecto a las evidencias de conocimiento de la Actividad 2 en adelante, Omar va aportando información que complementa sus participaciones y proporciona un mapa más amplio de su KMT al tener la posibilidad de discutir sobre el mismo diseño en todas las Actividades restantes.

En la Actividad 2 y 4 Omar enuncia una definición de modelación como el proceso para "obtener un modelo matemático a partir de ciertos fenómenos reales", además de reconocerla modelación de fenómenos en contextos reales como una estrategia para la enseñanza de las función es puesto que "se puede mirar desde dos puntos de vista, uno como el medio para enseñar un concepto matemático, y el otro como herramienta para generar significados". Esta información se complementa en la Actividad 5, en la que el profesor continúa profundizando en las características de la modelación como estrategia didáctica, al afirmar que se basa "en desarrollar procesos mentales, que lleven al estudiante mucho más allá de aplicar una fórmula o hallar un resultado".

A partir del conocimiento que tiene Omar sobre la modelación como una estrategia propicia para la enseñanza de las funciones, elabora el diseño que presenta en la Actividad 2, en el cual se pone de manifiesto el conocimiento de dos fenómenos que permiten explorar características específicas de las funciones lineales y de las funciones cuadráticas, respectivamente: el llenado de recipientes ("se tiene un tanque de forma rectangular cuyo volumen se muestra en la figura [5cm de largo, 2cm de ancho y 3cm de altura], y se piensa llenar con agua con un flujo determinado de $1cm^3$ por segundo"), que hemos nombrado como Tarea 1, y la variación de un área con perímetro constante ("un agricultor desea encerrar una pequeña parcela para producir tomate, y posee malla con longitud de 500 metros, la parcelita debe ser rectangular; ¿cuál debe ser la mayor área que puede cubrir con la malla que posee?"), que hemos llamado Tarea 2. Estas tareas tienen el objetivo de propiciar el establecimiento de relaciones entre variables de manera que se fomente la generación de significados en el concepto de función. Más adelante, en la Actividad 4, el profesor complementaba esta información explicitando algunos conocimientos de las características de estas tareas. Esta forma de trabajar puede estar vinculada a su conocimiento, que describimos antes, de que los estudiantes se sienten motivados con el trabajo de modelación de fenómenos en contextos reales. Al uso que hace Omar de este conocimiento podría subyacer una creencia compartida por diferentes profesores de secundaria, relativo a que "las actividades más apropiadas para la enseñanza de las matemáticas son las motivadoras, las conectadas con la vida real y las que emplean determinadas dinámicas de trabajo" (Gil y Rico, 2003, p. 42).

Al respecto de la Tarea 1, en la Actividad 2 Omar considera que "el ambiente en que se presenta el fenómeno hace que el estudiante desarrolle las preguntas sintiéndose no ajeno a dicha situación, más bien se introduce en éste de una manera fácil. La propuesta hace que el estudiante no prosiga con el mecanismo de solución tradicional, sino que debe utilizar otros mecanismos para dar solución a la situación presentada". La estructura de la tarea "dirige al estudiante a inmiscuirse en el contexto variacional". Esta misma estructura es utilizada también en la Tarea 2.

Sobre la Tarea 2 Omar considera que esta “propicia en el individuo el interés, y la curiosidad por desarrollar, y obtener el resultado”, además “permite que después de realizar la aprehensión del conocimiento significativo sobre función cuadrática, [el estudiante] pueda llevarlos a contextos diferentes, y aplicarlos allí”. El profesor reconoce también que la resolución de la actividad requerirá de “recurrir al uso de herramientas, y mecanismos que ayudan al desarrollo cognoscitivo, y procedimental” puesto que “crea conflictos cognitivos” entre los conocimientos y las herramientas que posee el estudiante y los que adquirirá al resolver la tarea que considera necesarios para la resignificación de los conceptos.

En la Actividad 5 Omar centra su atención en la Tarea 1 y aporta algunas otras evidencias de conocimiento sobre sus características: “la actividad no es fácil de desarrollar, es decir no está realizada para aplicar algoritmos ni seguir secuencias determinadas sino más bien desarrollar el aprendizaje significativo en el estudiante”, además de reafirmar su consideración de que “a través de la actividad se puede lograr nuevos significados del concepto”.

A pesar de que el profesor hace el análisis de características de las tareas 1 y 2 por separado, no parece que se hagan consideraciones distintas o específicas para cada tipo de función, sino que más bien parece aludir a las características generales de la estructura misma de las tareas, la cual, como hemos dicho anteriormente, es muy similar para ambas. Las reflexiones que hace el profesor sobre sus propios diseños ha sido de interés para la comunidad científica y se han desarrollado métodos de acercamiento a estas reflexiones ya que estas pueden generar elementos que apoyen el desarrollo profesional del profesor de matemáticas (e.g. Parada y Pluvinage, 2014; Ramos, 2014).

Desde el momento en que Omar presenta su diseño en la Actividad 2 habla del tránsito entre distintos registros de representación como la técnica didáctica a través de la cual pretende que los estudiantes establezcan las relaciones entre variables y analicen el comportamiento de las funciones. Esta técnica está ligada tanto a la estrategia de modelación de fenómenos en contextos reales como a las dificultades de aprendizaje inherentes al concepto de función que Omar había mencionado en esta actividad.

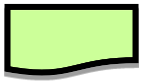
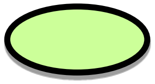
Por último, en la Actividad 5 también obtuvimos algunas evidencias sobre el conocimiento que tiene Omar de estrategias para gestionar posibles respuestas de los estudiantes a la Tarea 1: “si hacemos a (a) como la altura del recipiente; generalmente pienso que el estudiante realizará la gráfica como la presentó el profesor [colega que evalúa la Tarea] hasta el valor de tiempo (30) que corresponde a la altura (3) que sería el máximo de altura del recipiente. Si el estudiante después de la gráfica anterior me dibuja una línea constante, […] está demostrando que entendió la actividad debido a que a partir de este dato al transcurrir el tiempo la altura no varía[…].Para afrontar este momento primero le pediría la argumentación del porqué la realizó de esa manera; de segundo le propondría que comparara la gráfica con la que se logra cuando la altura es mayor, ejemplo (8 cm) con el mismo flujo; y qué pasaría en los dos casos cuando varía el flujo”.

Omar pone de manifiesto que tiene una hipótesis sobre posibles procesos de solución para la Tarea 1, en específico en lo que se refiere a la representación gráfica del fenómeno, a partir de la cual él genera una estrategia didáctica para motivar al estudiante a reflexionar sobre del comportamiento de la gráfica, y para que los estudiantes puedan establecer nuevas relaciones y se observen nuevos comportamientos de la función. El profesor comenta que se pueden hacer variaciones en los parámetros del fenómeno, como la altura del recipiente y la velocidad de llenado: “todo esto me lleva a pensar en que la actividad no está acabada o es única […] Hay otras preguntas con las cuales podría aprovechar la actitud del estudiante, dependiendo de la situación, y serían: ¿Se puede variar la abscisa en forma negativa?, ¿si el recipiente tiene un hueco con una salida de flujo de la cuarta parte de la entrada, cómo establecería la gráfica, y el modelo?, ¿qué pasaría si el hueco de salida es mayor que el flujo de entrada?”

A pesar de que los resultados que hemos podido recolectar en el análisis de este subdominio son de participaciones en el curso y no de observaciones de aula, consideramos que la forma en la que está definido el subdominio (ligado a un conocimiento didáctico del contenido matemático y no a la práctica de enseñanza como actividad propia del profesor) y las categorías que hemos formulado para su análisis han sido de gran ayuda para reconocer conocimientos específicos en este contexto de formación continua. Además nos permitieron observar cómo se mantiene la relación entre los conocimientos didácticos y matemáticos del profesor.

En la Tabla V.5 se muestra el resumen general de los resultados obtenidos en el análisis de conocimientos referentes al KMT.

Por su parte, la Figura V.5 proporciona un panorama de las relaciones entre las categorías de estos conocimientos y las relaciones con otros subdominios de conocimiento y busca evidenciar la potencialidad que tiene el KMT para realizar un análisis minucioso del conocimiento para la enseñanza (a través de los subdominios y las categorías), a la vez que se reconoce que estas separaciones son ficticias y que se requiere de una comprensión del carácter integrado del conocimiento especializado.

Subdominio	**Categoría**	**Actividad**	**Omar conoce:**		**Representación de este conocimiento en la Figura V.5**
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	***Teorías enseñanza***	A1 A3	*Teoría formal de enseñanza*	Literatura de investigación "que habla de las características de los denominados problemas abiertos" refiriéndose al trabajo que Garret publica en 1988 en la revista Enseñanza de las Ciencias.	
		A2	*Teoría personal de enseñanza basada en teorías formales*	Constructos teóricos de la *Socioepistemología* como herramienta didáctica de trabajo. Utiliza la idea de *práctica de modelación* como generadora de conocimientos, de ahí la relación que hace con los contextos del mundo real.	
	Recursos materiales o virtuales	A1 A2 A4	Herramientas tecnológicas diseñadas específicamente para la enseñanza de las matemáticas: Geogebra y Cabri, que permiten realizar representaciones gráficas y esquemáticas de contenidos matemáticos.		
		A5	*Características de los libros de texto como recurso para la enseñanza de las funciones.*	En los libros se recurre al uso generalizado de la representación algebraica de las funciones más que de otros registros	

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	***Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático.***	A1	*Estrategia Trazado y conteo de cuerdas*	Actividad basada en el uso y análisis de casos particulares para buscar patrones de comportamiento al aumentar el número de puntos y así generar un algoritmo que pueda generalizarse para cualquier cantidad de puntos.	🟩
			Tarea Características del problema de las cuerdas para trabajar cuerdas y sucesiones	Tarea que propicia el conocimiento adecuado sobre cuerdas, y sucesiones, a través del uso de ambientes visuales, de la manipulación directa de objetos matemáticos, y de la "predicción como práctica social". Este es un problema abierto, y no rutinario que propicia el trabajo dinámico.	
		A2 A4 A5	*Estrategia Modelación de fenómenos reales para la enseñanza de funciones*	Implica desarrollar procesos mentales que van más allá de aplicar una fórmula o hallar un resultado y requiere que los estudiantes tengan ciertos conocimientos previos que le permitan establecer relaciones entre variables y dar nuevos significados al concepto de función.	
			Tareas Para la enseñanza del concepto de función lineal y función cuadrática	*Función lineal:* Se tiene un tanque de forma rectangular cuyo volumen se muestra en la figura [5cm de largo, 2cm de ancho y 3cm de altura], y se piensa llenar con agua con un flujo determinado de $1cm^3$ por segundo"	
				Función cuadrática: Un agricultor desea encerrar una pequeña parcela para producir tomate, y posee malla con longitud de 500 metros, la parcelita debe ser rectangular; ¿cuál debe ser la mayor área que puede cubrir con la malla que posee?	

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	***Estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático.***	A2 A4 A5	*Tareas Para la enseñanza del concepto de función lineal y función cuadrática*	*Características generales de las tareas*	Permiten establecer relaciones entre variables de manera que se fomente la generación de significados en el concepto de función. Son adaptables a diferentes grados. Propician en el individuo el interés, y la curiosidad por desarrollar, y obtener el resultado. El uso de un ambiente de modelación hace que el estudiante se involucre en la resolución de las tareas. Su resolución requerirá del uso de herramientas, y mecanismos no tradicionales que ayuden al desarrollo cognoscitivo y procedimental puesto que, crea conflictos cognitivos entre los conocimientos y las herramientas que posee el estudiante y los que adquirirá al resolver la tarea. La estructura de las tareas dirige al estudiante al uso de la variación y el cambio como foco central de trabajo y la búsqueda de un modelo matemático que represente variaciones propias de este tipo de funciones. No son tareas fáciles de realizar, requieren de un pensamiento matemático basado en predecir y dar nuevos significados a la función, lo cual va más allá de la aplicación automática de algoritmos o secuencias determinadas y promueve un aprendizaje significativo, con el cual el estudiante pueda trabajar en otros contextos.	🟩
			Técnica Tránsito entre registros de representación	Con la cual pretende que los estudiantes establezcan las relaciones entre variables de las funciones y analicen su comportamiento.		
		A5	*Estrategia Para gestionar la actividad según las posibles respuestas de los estudiantes*	Para que los estudiantes puedan establecer nuevas relaciones y se observen nuevos comportamientos de la función, se pueden hacer variaciones en los parámetros del fenómeno, como la altura del recipiente y la velocidad de llenado.		

Tabla V.5 Evidencias de KMT de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua.

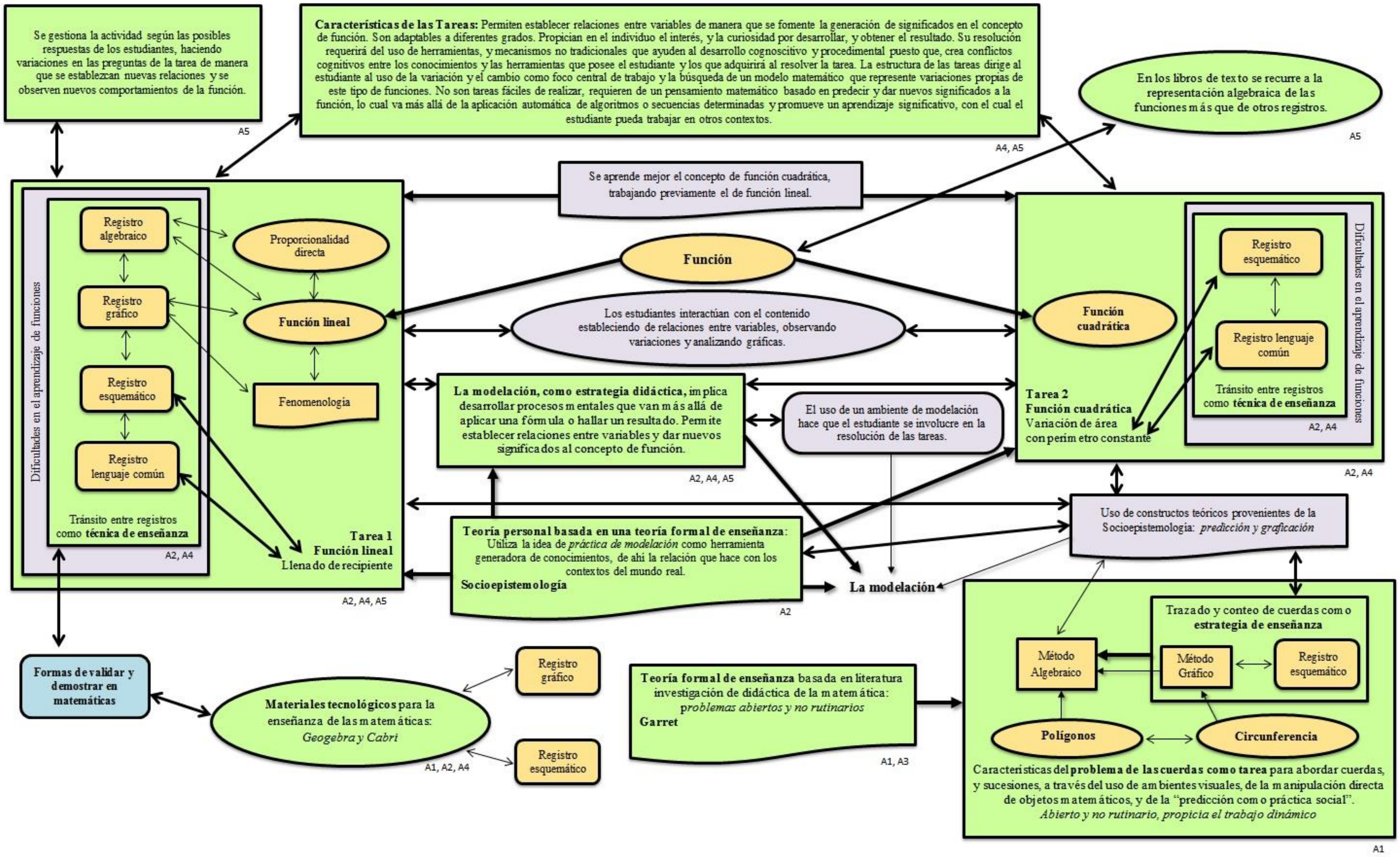


Figura V.5 Evidencias del KMT de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua y las relaciones entre las categorías de este subdominio con el KoT, el KPM y el KFLM.

V.3.3 Sobre el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

V.3.3.1 Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico

En la primera Actividad se pregunta a los participantes del curso por el nivel escolar en el que puede utilizarse el *problema de las cuerdas* como actividad didáctica. Las respuestas de Omar a este respecto nos permiten observar evidencias sobre el conocimiento que tiene de lo que pueden o deben saber los estudiantes de un determinado ciclo o nivel escolar acerca de contenidos como la circunferencia o los polígonos. Considera que la estrategia que propone de trazado y conteo de cuerdas para casos particulares es aplicable en “secundaria 9° grado [estudiantes de 14 o 15 años], cuando se enseñe los polígonos con sus diagonales, o cuando se mencione en geometría las cuerdas”. Omar sabe que en este nivel los estudiantes tendrán que abordar estos dos temas. Además agrega que para poder ofrecer una solución algebraica del problema y hacer una generalización el nivel adecuado para aplicarlo sería “finales de la secundaria o principios de la universidad, cuando se vean límites de sucesiones. Con este concepto aprendido se facilita más hallar el total de cuerdas de determinados puntos”.

Las tareas sobre función lineal y cuadrática que Omar diseña para la Actividad 2, se proponen para estudiantes de álgebra de octavo grado (13- 14 años). Aunque el profesor afirma que “el concepto de función a través del bachillerato es visto, y tratado con regularidad, el cual se extiende hacia los niveles tecnológicos, y universitarios donde generalmente se le da más relevancia”, en la discusión del foro de la Actividad 5 comenta: “la actividad la posiciono en un grado determinado, y de acuerdo al currículo el estudiante ya ha afirmado esos conocimientos”, refiriéndose a que la resolución de estas tareas requieren de “algunos conceptos previos sobre proporcionalidad, algunas relaciones sobre volumen-tiempo, altura-volumen entre otras […] y por qué no conocer sobre función lineal, de una manera tradicional”, todo esto forma parte de lo que se espera que un estudiante sepa en el octavo grado. No clasificamos esta evidencia dentro de la categoría de secuenciación de los temas, dado que el profesor no se refiere a las variantes de la enseñanza y aprendizaje de las funciones en los diferentes niveles, sino a las expectativas de estos temas (¿qué aspectos del tema de funciones deben conocer los alumnos de octavo grado?).

Además, en la Actividad 4 el profesor comenta que su diseño puede adaptarse a distintos grados, “puede ser usado para estudiantes de octavo, o de undécimo grado, y por qué no a universitarios cuando se hable de integrales”. Esta última alusión a la ubicación del concepto de integral en un nivel universitario la consideramos también parte de esta categoría, aunque no es clara cuál es la relación que hace Omar de este contenido con las tareas de su diseño. El profesor comenta además que esta adaptación “se debe hacer teniendo como referencia que los conocimientos para resolverlo sean conocidos”, es decir, que las adaptaciones requieren de saber cuáles son los temas que los estudiantes han visto en estos niveles.

V.3.3.2 Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar

Además de poseer los conocimientos necesarios para ubicar contenidos matemáticos en un momento escolar específico, también ofrece evidencias de conocer (aunque de forma superficial) el nivel de desarrollo conceptual que tendrán los estudiantes en el 9° grado al abordar el tema de sucesiones: “en este grado se enseña un poco de sucesiones, al menos la introducción, se entabla alguna relación entre la parte algorítmica con la gráfica, necesaria para una mejor interpretación de la situación”.

Por otro lado, Omar comenta que para utilizar un método algebraico de resolución que ha asociado a finales de secundaria o principios de la universidad “se necesita que el estudiante tenga conocimientos previos bien establecidos sobre cuerdas, sucesiones, y en alguna ocasión sobre límites”, es decir que los conocimientos matemáticos requeridos para resolver la tarea coinciden con los conocimientos esperados para los estudiantes que hayan cursado (y aprendido adecuadamente) algunos de los contenidos de los grados anteriores al noveno.

Cuando Omar comenta con sus compañeros del curso de formación el método de sumatoria de enteros consecutivos, pone de manifiesto un conocimiento sobre su posible utilización en un momento en el que se cuente con herramientas algebraicas suficientes para desarrollar las sumatorias: “se puede aplicar para aquellos estudiantes que tienen conocimientos de cálculo en sucesiones”.

El resumen general de los resultados obtenidos en el análisis de conocimientos referentes a este subdominio está recopilado en la Tabla V.6.

En la Figura V.6 se presenta una imagen de las relaciones que se encuentran entre las distintas categorías del subdominio y las relaciones con otros subdominios de conocimiento, en este caso el KoT y el KMT que son los subdominos con los que encontramos relaciones.

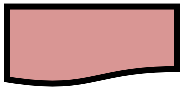
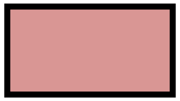
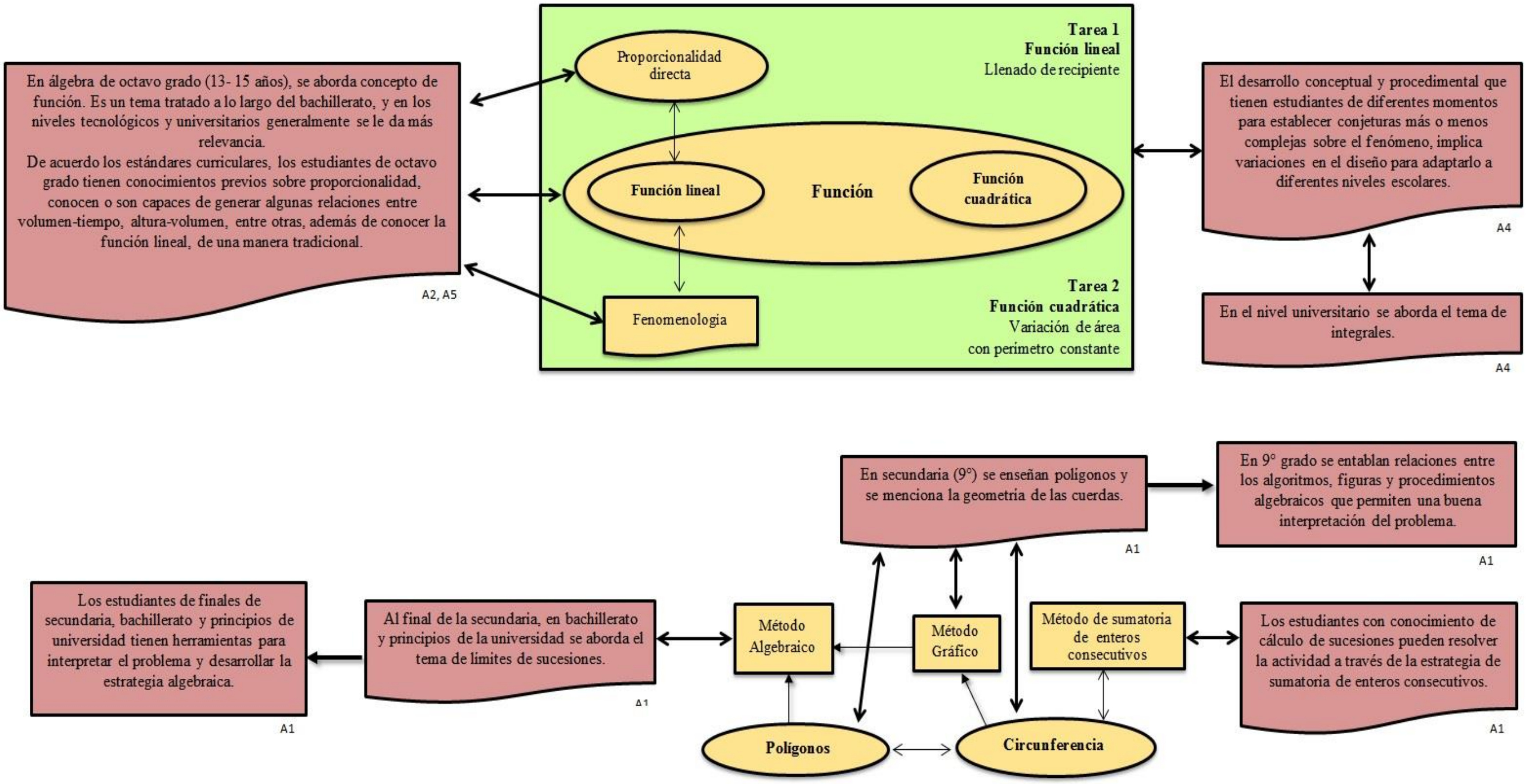
Subdominio	**Categoría**	**Actividad**	**Omar conoce:**	**Representación de este conocimiento en la Figura V.6**
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	***Expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico***	A1	En secundaria (9°) se enseñan polígonos y se menciona la geometría de las cuerdas.	
			Al final de la secundaria, bachillerato o principios de la universidad se ven límites de sucesiones.	
		A2	En álgebra de octavo grado (13- 15 años), se aborda concepto de función. Es un tema tratado a lo largo del bachillerato y en los niveles tecnológicos, y universitarios generalmente se le da más relevancia	
		A5	De acuerdo los estándares curriculares, los estudiantes de octavo grado tienen conocimientos previos sobre proporcionalidad, conocen o son capaces de generar algunas relaciones entre volumen-tiempo, altura-volumen, entre otras, además de conocer la función lineal, de una manera tradicional.	
		A4	En el nivel universitario se aborda el tema de integrales. El desarrollo cognitivo que tienen estudiantes de diferentes momentos para establecer conjeturas más o menos complejas sobre el fenómeno, implica variaciones en el diseño para adaptarlo a diferentes niveles escolares.	
	Nivel del desarrollo conceptualy/o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar	A1	En 9° grado se entablan relaciones entre los algoritmos, figuras y procedimientos algebraicos que permiten una buena interpretación del problema.	
			Los estudiantes de finales de secundaria, bachillerato y principios de universidad tienen herramientas para interpretar el problema y desarrollar la estrategia algebraica.	
			Los estudiantes con conocimiento de cálculo de sucesiones pueden resolver la actividad a través de la estrategia de sumatoria de enteros consecutivos	

Tabla 5.5 Evidencias de KMLS de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua.



En álgebra de octavo grado (13- 15 años), se aborda concepto de función. Es un tema tratado a lo largo del bachillerato, y en los niveles tecnológicos y universitarios generalmente se le da más relevancia.
De acuerdo los estándares curriculares, los estudiantes de octavo grado tienen conocimientos previos sobre proporcionalidad, conocen o son capaces de generar algunas relaciones entre volumen-tiempo, altura-volumen, entre otras, además de conocer la función lineal, de una manera tradicional.

El desarrollo conceptual y procedimental que tienen estudiantes de diferentes momentos para establecer conjeturas más o menos complejas sobre el fenómeno, implica variaciones en el diseño para adaptarlo a diferentes niveles escolares.

En el nivel universitario se aborda el tema de integrales.

En secundaria (9°) se enseñan polígonos y se menciona la geometría de las cuerdas.

En 9° grado se entablan relaciones entre los algoritmos, figuras y procedimientos algebraicos que permiten una buena interpretación del problema.

Los estudiantes de finales de secundaria, bachillerato y principios de universidad tienen herramientas para interpretar el problema y desarrollar la estrategia algebraica.

Al final de la secundaria, en bachillerato y principios de la universidad se aborda el tema de límites de sucesiones.

Los estudiantes con conocimiento de cálculo de sucesiones pueden resolver la actividad a través de la estrategia de sumatoria de enteros consecutivos.

Figura V.6 Evidencias del KMLS de Omar puesto de manifiesto a lo largo del curso de formación continua y las relaciones entre las categorías de este subdominio con el KoT y el KMT.

V.4 Reflexiones generales sobre el MTSK de Omar

En este capítulo, se hace una recopilación de toda la información obtenida en las cinco actividades realizadas a lo largo del curso virtual de formación continua que ha servido como contexto para la recogida de datos de esta investigación. El objetivo es poder analizar las relaciones entre los distintos conocimientos y las evidencias que se reflejan a lo largo del curso, para mostrar un último panorama general del MTSK identificado en el caso de Omar.

Esta información nos permitirá responder a la pregunta de investigación: ¿qué conocimiento especializado ponen en evidencia los profesores de matemáticas de secundaria en un contexto de formación continua a través de discusiones virtuales?

El análisis de conocimiento especializado del caso de Omar nos ha aportado información del tipo de conocimientos que pueden ponerse de manifiesto al entablar discusiones virtuales entre pares y al reflexionar sobre el diseño y pertinencia de actividades matemáticas específicas. En particular, el desarrollo mismo del curso nos ha permitido explorar una faceta importante de la práctica profesional del profesor, el diseño de tareas y la evaluación de las mismas. Además, de generar una reflexión al respecto de la importancia de tiene el KoT como base para el trabajo matemático y didáctico del profesor. Aun cuando, en su mayoría, los conocimientos que se detectaron fueron superficiales, los resultados del análisis nos permiten reconocer cuáles son los conocimientos matemáticos básicos que tiene el profesor que le servirán como punto de partida para resolver problemas, evaluar y diseñar actividades, así como reflexionar sobre los procesos de resolución de otras personas.

El conocimiento de formas de proceder y producir en matemáticas correspondiente al KPM permite al profesor organizar y gestionar el conocimiento matemático que se aborda, tanto el suyo como el que desea que los estudiantes adquieran o desarrollen. Además, son estas mismas prácticas matemáticas las que el profesor espera que los estudiantes utilicen en sus resoluciones por lo que pueden también influenciar la estructura de las tareas que diseña. Otro aspecto importante a considerar es que estas prácticas parecen estar ligadas al nivel escolar en el cual serán utilizadas; por ejemplo, en el caso de las formas de validación o demostración en matemáticas se hace alusión a herramientas tecnológicas, comparación de resultados en distintos registros de representación y validaciones entre pares, que son propias de estudiantes de niveles inferiores al bachillerato y la universidad.

Las relaciones entre el KMT y el KFLM son evidentes e incluso parecen ser demasiado cercanas, sin embargo la distinción entre los conocimientos referentes a los procesos de aprendizaje y los referentes a los procesos de enseñanza de un determinado contenido ayudan a comprender mejor la toma de decisiones del profesor en la generación y diseño de tareas, así como para la discusión y evaluación de las mismas.

El espacio de formación continua en el que se recogen los datos y el uso que hace Omar de los conocimientos referentes a constructos teóricos referentes a la investigación, nos permiten reflexionar sobre la forma en la que los profesores asimilan estas teoría, las formas en las que transforman los resultados de investigación en propuestas prácticas de enseñanza y aprendizaje y las dificultades que tienen para entender y traducir estas teorías en elementos prácticos que puedan aplicar directamente en el aula.

Tener en cuenta los estándares de conocimiento tanto en secundaria como en niveles más avanzados como el bachillerato y la universidad, sirve al profesor como referencia para establecer objetivos acorde con los conocimientos que se desean desarrollar en los estudiantes, el bagaje de conocimiento previo con el que pueden contar, así como sus futuras necesidades con respecto a un determinado contenido.

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES

VI.1 El contexto de formación continua en entornos de trabajo virtuales como escenario para la investigación del conocimiento profesional

El análisis de este curso de formación nos ha permitido observa cómo el trabajo colaborativo y la discusión entre pares que se genera en los cursos virtuales, así como la necesidad de justificar y explicar exhaustivamente las participaciones y opiniones emitidas en estos entornos que limitan la comunicación de los participantes, favorecen la generación de argumentaciones largas y fundamentadas, que ayuden al profesor a comunicar mejor las ideas que pretende expresar. Esta característica representa una ventaja para el investigador que puede ir complementando la información que obtiene en distintos momentos del curso y explorar una misma evidencia desde diferentes ángulos.

A pesar de que una de las limitaciones de este trabajo era el que éste curso no está diseñado para ser un escenario de recolección de datos para la investigación del conocimiento profesional, consideramos que la información obtenida ha sido lo suficientemente rica como para poder establecer conclusiones generales sobre el conocimiento matemático específico del profesor, así como para poner a prueba la funcionalidad del modelo MTSK como herramienta de análisis.

El trabajo colaborativo de este contexto de formación provoca reflexiones enriquecedoras para los profesores que debaten sus propias ideas y las de sus compañeros. Este curso en específico permite adquirir herramientas para el diseño y evaluación de actividades didácticas para el aula de matemáticas.

> A5_F3 [12]: Las actividades, y foros propuestos en este curso son bastante enriquecedores, y formadores; nos dan pautas primero para diseñar una buena actividad donde se pueda relacionar las diferentes potencialidades; segundo, nos direccionan para evaluar cada una de nuestras actividades en el ambiente del aula.

VI.2 Aportes teóricos y metodológicos que ofrece el MTSK

Como hemos mencionado en el marco teórico, la construcción del MTSK es el resultado de un trabajo colaborativo del grupo de investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva, dentro del cual se inscribe esta tesis como una pequeña aportación a la consolidación del modelo como una herramienta de investigación potente y práctica para indagar sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Este trabajo se suma, entonces, a los resultados obtenidos en otras investigaciones doctorales que han sido presentadas antes que esta (Montes, 2014; Rojas, 2014; Moriel Junior, 2014) y a otras que están en construcción.

Recordemos que el objetivo general de esta tesis es **describir, caracterizar y comprender el conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas a través del análisis de su conocimiento especializado**. Para esto hemos considerado necesario realizar un análisis que incluyera todos los subdominios del MTSK y que nos ofreciera información acerca de las relaciones entre la parte didáctica y la parte matemática del modelo. Este análisis nos ha permitido también obtener algunas conclusiones acerca de las características específicas de los subdominios del dominio matemático, aunque significativamente menos profundas que las que se han generado para el dominio de conocimiento didáctico, puesto que no es nuestro objetivo principal.

Dado que la descripción y construcción de los subdominios y categorías del modelo se lleva a cabo desde dos acercamientos (*top-down* y *bottom-up*), en este capítulo iremos comparando y retomando elementos de la caracterización teórica de los subdominios (realizada en el capítulo 2) y elementos que surgen como resultado del análisis de los datos empíricos (capítulo 4 y 5), para contrastar y complementar la caracterización de los subdominios del modelo y dar respuesta a la pregunta de investigación:

¿Qué aportes teóricos y metodológicos ofrece el MTSK al conjunto de investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas?

VI.2.1 Dominio de conocimiento matemático

Se han obtenido evidencias de la mayoría de los subdominios de conocimiento especializado en el análisis del curso, a excepción del KSM, del que no se obtuvieron evidencias, oportunidades ni indicios de conocimiento.

VI.2.1.1 Sobre el conocimiento de los Temas (KoT)

El KoT fue uno de los subdominios en los que más información ha podido obtenerse. En todas las actividades del curso se pudieron detectar conocimientos de este subdominio, además de que se detectaron relaciones de este con todos los demás subdominios del MTSK. Podría considerarse entonces el KoT como eje sobre el cual se relacionan y organizan los demás conocimientos del MTSK, lo cual resulta lógico si tomamos en consideración que lo mínimo que requiere conocer un profesor de matemáticas son los contenidos matemáticos.

Las categorías planteadas inicialmente para este subdominio resultaron ser útiles para el análisis, y suficientes para incluir todas las evidencias de conocimiento de un contenido matemático determinado. Sin embargo, los datos del caso analizado aportaron algunas subcategorías al analizar el conocimiento de los procedimientos matemáticos asociados a un determinado contenido: *¿cómo se hace?* y *¿cuándo puede hacerse?* Estas fueron detectadas gracias a las características específicas de Omar, que realizaba justificaciones y argumentaciones muy completas de sus procedimientos, en las que pudimos detectar los conocimientos que tenía acerca de ciertos procedimientos matemáticos, cómo se desarrollan estos procedimientos y las condiciones bajo las cuales podían utilizarse.

Con respecto a la categoría de conocimiento de propiedades y fundamentos atribuibles a un determinado contenido matemático, creemos que podría ser beneficioso para la descripción y comprensión del conocimiento el diferenciar el conocimiento del profesor sobre propiedades del tema o contenido matemático de su conocimiento sobre las propiedades necesarias y suficientes para elaborar definiciones del contenido con la intención de resaltar las diferencias entre las formas de conocer uno u otro contenido y así tener una mejor comprensión de la amplitud o profundidad (Schoenfeld & Kilpatrick, 2008) del conocimiento evidenciado.

A diferencia de caracterizaciones del conocimiento matemático como la que se hace en el MKT (Ball et al., 2008),en las que se contempla una distinción entre lo que sabe el profesor y lo que sabe cualquier otro individuo sobre matemáticas, consideramos que la definición del KoT, realizada de manera intrínseca al propio contenido, permite reconocer este subdominio como una red estructurada de conocimientos matemáticos y centrar la atención en lo que conoce y cómo lo conoce el profesor de matemáticas, sin importar si otros profesionales comparten este conocimiento o si este es distinto al que tiene un estudiante, puesto que nuestra intención es comprender su naturaleza y no compararlo con un ideal de conocimiento.

VI.2.1.2 Sobre el conocimiento de la práctica matemática (KPM)

Sobre KPM podemos concluir que la definición realizada en el capítulo de marco teórico: *conocimiento del profesor sobre las formas de proceder propias de la matemática y en especial de la matemática escolar, sobre el razonamiento matemático en general y sobre distintos tipos de razonamientos y el contexto matemático en el que unos son más adecuados que otros,* nos ha servido como punto de partida para identificar los conocimientos del profesor acerca de las formas de proceder y producir en matemáticas. Además, el análisis realizado sobre los datos del curso permitió definir algunas categorías que puedan servir para futuras investigaciones:

- *Conocimiento de la jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos.*
- *Conocimiento de las formas de validación y demostración en matemáticas.*
- *Conocimiento del papel de los símbolos y el uso del lenguaje formal en matemáticas.*
- *Conocimiento de los procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas.*
- *Conocimiento de prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)*

Aunque no obtuvimos ningún indicio, evidencia u oportunidad de explorar el *conocimiento de las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones en matemáticas*, la reflexión sobre el análisis de las participaciones de Omar, sobre todo en la Actividad 1, en la que se define el concepto de cuerda y se hace mención de algunas propiedades de la circunferencia, nos lleva a plantearnos este conocimiento como otra posible categoría para este subdominio.

Por otra parte, el análisis de este conocimiento y la descripción de las relaciones con otros subdominios del modelo nos ofrecen información sobre la importancia de proponer el KPM como un subdominio específico del MTSK, puesto que el conocimiento de estas prácticas propias del trabajo matemático destaca como el que le permite al profesor organizar y gestionar su propio conocimiento matemático y el de sus estudiantes.

VI.2.1.3 Sobre el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)

Como hemos señalado anteriormente, la detección de conocimientos referentes al KSM pareciera necesitar de condiciones específicas en cuanto al contexto, los objetivos y la metodología de la investigación, puesto que es necesario acceder a un conocimiento demasiado específico del profesor. Quizá si hubiera sido posible realizar una entrevista a Omar para indagar sobre los conocimientos que tiene con respecto a la variación como idea estructurante de la matemática para conectar distintos contenidos o sobre los motivos por los que hacía uso de contenidos como límite o sucesiones y cómo se relacionaban estos con los temas implícitos en la resolución del *problema de las cuerdas*, habríamos podido encontrar algunas evidencias y algunos indicios de conocimientos referentes a conexiones interconceptuales que aportaran información sobre este subdominio.

VI.2.2 Dominio de conocimiento didáctico del contenido

A continuación mostraremos las conclusiones sobre los intereses específicos de este trabajo, referentes al conocimiento didáctico del contenido (PCK) y su papel dentro del MTSK, así como sobre las relaciones de este con el conocimiento matemático. Estas conclusiones están orientadas hacia las preguntas de investigación específicas que se plantearon en el capítulo 2:

¿Podemos profundizar en la comprensión del conocimiento del profesor de secundaria referente a la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático a través del análisis de los subdominios que propone el MTSK?

¿Cuáles son las características específicas del Conocimiento Didáctico del Contenido considerado como parte del modelo MTSK?

Para esto nos apoyaremos además en los objetivos específicos que nos hemos planteado para describir y caracterizar el PCK, en especial el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT):

- ✓ *Resaltar la necesidad de cada uno de los subdominios dentro del PCK*
- ✓ *Aportar claridad en la definición de los subdominios*
- ✓ *Buscar categorías de los subdominios*
- ✓ *Aportar ejemplos potentes de cada subdominio*
- ✓ *Aportar información sobre el modo de acceder al subdominio*
- ✓ *Analizar las interacciones con otros subdominios*
- ✓ *Reconocer posibles vías de desarrollo del subdominio*

VI.2.2.1 Sobre el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Los resultados del análisis de este subdominio coinciden con investigaciones anteriores (e.g. Schoenfeld & Kilpatrick, 2008; Pinto, 2010) sobre la importancia de conocer características de aprendizaje propias de la disciplina que se enseña. Como señalamos en la descripción realizada en el capítulo 2, la inclusión de este subdominio como parte del PCK ayuda a la identificación del conocimiento didáctico que tiene el profesor sobre un determinado contenido matemático que le permite interpretar las producciones de los estudiantes, anticiparse a posibles razonamientos, así como entender su procedencia, prever posibles errores que pudieran cometer los estudiantes al trabajar con ese contenido, así como reconocer las posibles dificultades de aprendizaje que puedan surgir en el trabajo matemático, así como tener en cuenta las concepciones que puedan intervenir en el proceso de aprendizaje.

Podríamos refinar la definición de este subdominio al referirnos al **conocimiento que tiene el profesor sobre las características del contenido matemático en sí mismo como objeto de aprendizaje**, **incluyendo aquí lo que sabe acerca de las características de aprendizaje inherentes a un contenido matemático en particular o a la matemática en general y de las características de aprendizaje derivadas de la interacción de los estudiantes con el contenido matemático.**

La influencia de la idea central del MTSK (focalizar nuestra atención en el conocimiento del profesor ligado directamente al contenido matemático) sobre este subdominio orienta hacia la búsqueda de conocimientos sobre el proceso mismo de aprendizaje de un contenido matemático, lo que ha generado que en el análisis se puedan establecer relaciones claras entre el conocimiento de características de aprendizaje específicas de un contenido y el conocimiento del contenido en sí mismo. Esto nos ha permitido mantener la idea de hablar de describir solo el conocimiento específico del profesor de matemáticas y dejar fuera del modelo conocimientos referentes al aprendizaje en general, los cuales, aunque son importantes para la práctica profesional de un profesor, consideramos de naturaleza distinta a los que se incluyen en el MTSK.

VI.2.2.1.1 Sobre la categorización y ejemplificación del subdominio

La categorización de este subdominio, desarrollada como parte de la construcción teórica del modelo (Capítulo 2), ha resultado efectiva para el análisis del conocimiento de Omar. Las categorías han resultado suficientes para clasificar todos los conocimientos referentes a este subdominio, además de que la clasificación de las evidencias ha sido de simple asignación, puesto que son categorías suficientemente disjuntas. Sin embargo, el trabajo con el caso de Omar nos ha permitido observar algunos detalles con respecto a los nombres o contenidos de las categorías, que podrían modificarse para aportar mayor claridad en investigaciones posteriores con este subdominio:

La categoría de *conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático*, como se dijo en la descripción del capítulo 2, surge del análisis de los datos de Omar. Las características de este profesor y el contexto de formación en el que se analiza su conocimiento nos permiten analizar aspectos de su conocimiento que no se evidencian comúnmente en observaciones de aula. Además, los resultados del análisis nos llevan a considerar necesaria una distinción entre el conocimiento de ***teorías formales*** y la construcción de ***teorías personales*** referentes al proceso de aprendizaje de un contenido matemático. Esto nos permite comprender mejor el conocimiento que tiene el profesor y la forma en la que lo utiliza, además de ofrecernos información acerca de la forma en la que los profesores utilizan los resultados de investigación desarrollados en la didáctica de la matemática y su forma de entenderlos y transformarlos para llevarlos al aula.

Según las evidencias que hemos obtenido en esta investigación, la forma en la que el profesor entiende y utiliza los constructos teóricos formales no se corresponde exactamente con la forma en la que la teoría los ha definido o propone utilizarlos; esto puede deberse a la dificultad de transformar constructos de investigación en propuestas prácticas de acción en el aula o a la complejidad que supone comprender estos constructos para cualquier persona que se acerca por primera vez a una teoría de investigación. Estas dificultades provocan que se realice una adaptación de los constructos tomando ciertas ideas clave que permitan dar sustento a las decisiones que toma el profesor para diseñar o aplicar una actividad para el aula, lo que deriva en la construcción de una teoría personal basada en teorías formales de aprendizaje. Este es precisamente el caso de Omar, quien conoce algunos constructos pertenecientes a la Teoría Socioepistemológica, con los cuales elabora una teoría personal de aprendizaje de las funciones, la cual podríamos describir de la siguiente forma: La "práctica de modelación" de fenómenos físicos y "la predicción" permiten a los estudiantes contextualizar el uso de las funciones. Así, a través de la "práctica de graficación" y el análisis de la "variación" en estos fenómenos, es posible hacer una "resignificación" del concepto de función[1].

Además se ha puesto de manifiesto en esta investigación la importancia de incluir en este subdominio los conocimientos del profesor referentes a teorías personales construidas a partir de su experiencia de trabajo con un determinado contenido si es que ésta tiene un sustento distinto a consideraciones de tipo afectivo, como en el caso de Omar, que basa todo el diseño de sus tareas y el desarrollo de su propuesta didáctica en la consideración de que para un mejor aprendizaje de las características específicas de la función cuadrática, es mejor haber trabajado antes con la función lineal. El profesor no señala que esta sea la única forma de secuenciar estos contenidos, ni se

---

[1] Los estudios sobre la predicción como práctica social y el estudio de la modelación de fenómenos en contextos reales o concretos para lograr un desarrollo del pensamiento variacional, son algunas de las principales líneas de investigación abordadas bajo la perspectiva de la teoría Socioepistemológica. (e. g. Briceño & Cordero, 2010; Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez & Suárez, 2004)

refiere a los momentos específicos en los que deben abordarse, sino que hace referencia a la potencialidad que tiene este tipo de secuencia en cuanto al aprendizaje de la función cuadrática. Aunque pueda haber resultados de investigación que se correspondan con esta consideración, el profesor puede no conocerlos, pero aun así su experiencia y conocimiento matemático y didáctico sobre el concepto de función cuadrática le permiten elaborar esta teoría personal.

Con respecto a la categoría de *conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático*, consideramos prudente hacer una propuesta de modificación en el nombre de la categoría, refiriéndonos al ***conocimiento de las formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje***. Este cambio se propone teniendo en cuenta que, en un contexto de formación de profesores, puede darse que la interacción no sea entre contenido y estudiante sino se refiera a un resolutor cualquiera, como en el caso de Omar en que se hacen conjeturas respecto a los procesos de solución y formas de trabajo con un determinado contenido matemático de sus compañeros del curso y de un colega profesor que evalúa su diseño para el aula. A pesar de que el profesor que interactúa con el contenido no parece estar aprendiendo con la resolución, Omar reconocía en estas formas de interacción aspectos generales referidos al aprendizaje del contenido, como por ejemplo cuando el profesor expresa su conocimiento acerca de que los estudiantes interactúan con el concepto de función estableciendo relaciones entre variables, observando variaciones respecto de uno de los parámetros, y analizando gráficas.

Teniendo en cuenta que hemos definido la práctica profesional del profesor como una actividad que va más allá del aula, y que la formación de profesores resulta ser un contexto sumamente rico para la exploración del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, consideramos que renombrar la categoría ayuda a nuestra intención de construir un modelo que sirva como herramienta de análisis en cualquier contexto en el que el profesor utiliza este conocimiento, además de ser congruentes con la idea de dar menos protagonismo a la figura del estudiante como sujeto cognoscente y más al propio proceso de aprendizaje.

Otra de las categorías que se han definido para este subdominio es la del *conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático.* Al igual que en la categoría anterior, creemos que es posible modificar la redacción de la categoría para dar cabida, no sólo a los conocimientos de los *principales intereses*, sino a cualquier tipo de interés o expectativa que pueda existir sobre el trabajo con un determinado contenido matemático. Por lo tanto proponemos enunciar esta categoría como el **c*onocimiento de los intereses y expectativas de los estudiantes sobre el abordaje de un determinado contenido matemático*****.** Un ejemplo del conocimiento que puede tener el profesor sobre los intereses y expectativas de los estudiantes con respecto al concepto de función, se refiere al reconocimiento de que la modelación de fenómenos físicos resulta atractiva y motivadora para los estudiantes, puesto que permite generar en el estudiante un interés en explicar el comportamiento del fenómeno y contextualizar el trabajo matemático que realiza, es decir, hacerlo menos abstracto.

Con respecto a la categoría de *conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático*, no se observa necesidad de modificarla, dado que las evidencias que se registran para ella han sido clasificadas sin ninguna dificultad.Un ejemplo de conocimiento de las dificultades asociadas al aprendizaje de funciones es el que tiene el profesor sobre la complejidad que representa para los aprendices reconocer e interpretar la variedad de registros de representación que existen para este contenido.

VI.2.2.1.2 Sobre las interacciones con otros subdominios

La relación de este subdominio con el KoT era de esperarse, puesto que hemos mencionado anteriormente que es precisamente este tipo de conocimiento matemático el que subyace en la base del conocimiento especializado del profesor. Además, la propia definición del KFLM está hecha para reconocer el conocimiento didáctico inherente a un determinado contenido matemático. Por ejemplo, el conocimiento que tiene un profesor sobre las dificultades que implica la variedad de registros de representación para el aprendizaje del concepto de función, requiere de tener un conocimiento subyacente sobre los registros de representación mismos, sus características y las relaciones que existen entre ellos.

La relación entre el KFLM y el KMT es tan cercana que la distinción entre los conocimientos que pertenecen a uno y otro subdominio podría parecer complicada o innecesaria, sin embargo, los resultados de esta investigación nos han permitido valorar la potencialidad que tiene realizar esta distinción, en tanto que nos permite interpretar y comprender más profundamente la naturaleza del conocimiento del profesor desde dos perspectivas o formas de conocer el contenido matemático, como contenido a aprender y como un contenido a enseñar. Las conclusiones sobre la caracterización del KMT nos permitirán profundizar más sobre esta relación.

VI.2.2.1.2 Sobre el modo de acceder al subdominio y posibles vías de desarrollo

La mayor parte de los conocimientos que se identificaban como parte del KFLM, ya sean indicios, oportunidades o evidencias, provenían de las Actividades 2 en adelante. Consideramos que el contexto de diseño, justificación y discusión de actividades para el aula es un entorno propicio para la exploración de este subdominio, puesto que el profesor requiere de utilizar el KFLM para diseñar tareas y anticipar posibles procesos de los resolutores, además de que la discusión con sus tutores, la reflexión entre pares y la necesidad de una comunicación escrita propia del entorno virtual, demandan del profesor argumentaciones que justifiquen el diseño y la toma de decisiones sobre éste.

Observamos también que no es indispensable que el profesor centre su atención en los estudiantes como actores principales del proceso de aprendizaje para obtener evidencias de este conocimiento, estas son también reconocibles en reflexiones sobre la construcción del diseño y las características específicas del contenido a abordar.

Resultaron también útiles los comentarios del profesor sobre las resoluciones que hacen otros colegas profesores de los problemas matemáticos que se presentaron en el curso. Este punto es especialmente interesante puesto que los resultados del análisis del caso específico de Omar y la observación general del curso de formación nos permitió reconocer que los profesores a los que se les pide resolver un problema matemático buscan siempre hacer alusión a los posibles procedimientos de estudiantes hipotéticos que pudieran resolver ese problema, es decir, es muy difícil para ellos hacer una separación entre su papel de profesor y el de resolutor de un problema matemático, lo cual complica el acceso a conocimientos más avanzados que puedan tener sobre el contenido, dado que tiende a utilizar sólo los conocimientos que consideran que un estudiante puede poseer.

Consideramos que una de las principales fuentes de las que puede alimentarse este subdominio está constituida por los resultados de investigación en didáctica de la matemática, relacionados con un determinado contenido matemático. El conocimiento de estos resultados permitiría al profesor tener un bagaje de conocimiento sobre estudios científicos y evidencias empíricas que le proporcionen información sobre fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, las formas más comunes de interacción con el contenido, así como los intereses y expectativas que existen sobre un contenido, además, por supuesto, de poder reconocer teorías de aprendizaje que le permitan observar distintas formas de comprender un contenido y construir una idea propia acerca del proceso de aprendizaje.

VI.2.2.2 Sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

El análisis del contexto de formación continua en la que se desarrolla este trabajo, nos permite observar aspectos importantes acerca de los conocimientos del profesor ligados directamente a los procesos de transmisión de conocimiento matemático, los cuales se reflejan en el diseño de las tareas que propone en el curso y los recursos que utiliza para construirlas y discutirlas. La delimitación de un subdominio en el que pueda atenderse exclusivamente a estos aspectos, nos ha permitido explorar en detalle los conocimientos implicados en estas construcciones y la articulación que Omar hace de estos para lograr sus objetivos de aprendizaje, así como las características matemáticas que tienen algunas herramientas utilizadas en el diseño.

Consideramos que la inclusión de un espacio específico para este tipo de conocimientos permite resaltar matices importantes con respecto al conocimiento especializado del profesor, que son quizá los más evidentes o sencillos de reconocer dentro de la práctica del profesor, puesto que están reflejados directamente en aspectos prácticos como el diseño de tareas o el uso de materiales como libros de texto y softwares, a diferencia de los conocimientos pertenecientes al KPM por ejemplo, los cuales están implícitos en el trabajo matemático del profesor y requieren de una interpretación por parte del investigador.

Al igual que en el KFLM, el focalizar la atención en los aspectos de enseñanza directamente relacionados con el contenido matemático ha ayudado a reconocer aspectos inherentes a la práctica del profesor de matemáticas y separarnos del conocimiento de pedagogía y didáctica general.

Los resultados del análisis y la discusión teórica realizada en el apartado II.3.2.2, nos permiten construir una definición más general de este subdominio como el **conocimiento del profesor sobre las características del contenido matemático como objeto de enseñanza; lo que el profesor sabe sobre las distintas posibilidades de enseñanza, condicionadas por la naturaleza misma del contenido**.

VI.2.2.2.1 Sobre la categorización y ejemplificación del subdominio

La definición el subdominio y las categorías que se establecieron tras la revisión de literatura referente al KMT han sido suficientes para clasificar todas las evidencias de conocimiento recabadas para este subdominio. Sin embargo, al igual que en el caso del KFLM, consideramos que los resultados del análisis teórico y empírico del subdominio nos dan información suficiente para proponer algunas modificaciones sobre las categorías o agregar subcategorías.

Con respecto a la categoría de *conocimiento de las teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático*, se identifican conocimientos referentes a constructos teóricos o **teorías formales** de enseñanza y conocimientos de **teorías personales de enseñanza**, de la misma forma que en el KFLM nos habíamos referido a las teorías de aprendizaje. Por ejemplo, el conocimiento del profesor de que existen dos tipos de problemas: los problemas abiertos y los cerrados, y que cada uno posee características específicas como constructos utilizados para la investigación en didáctica de la matemática (Garret, 1988), lo consideramos un conocimiento de constructos teóricos formales ligados directamente a la enseñanza de las matemáticas a través de la perspectiva de resolución de problemas.

Por otro lado, la forma en la que Omar utiliza los constructos de “práctica de modelación”, “predicción” y “variación” como base para la construcción de tareas matemáticas en contextos reales, las cuales permitirán “resignificar” el concepto de función a través de afrontar una dificultad inherente al concepto de función (el tránsito entre los distintos registros de representación de la función), refleja la construcción que ha hecho el profesor de una teoría personal de enseñanza basada en su conocimiento de constructos teóricos de la Socioepistemología, y la interpretación que hace de éstos para transformarlos de herramientas de investigación sobre la construcción social del conocimiento matemático en herramientas para la enseñanza de las matemáticas.

Sobre el *conocimiento de los recursos materiales o virtuales de enseñanza de un contenido matemático* hemos observado complicaciones con respecto al nombre asignado para la categoría, puesto que no nos referimos en esta categoría a que el profesor conozca un determinado material como puede ser un libro de texto de matemáticas, sino que nos referimos al conocimiento que tiene sobre las características matemáticas y didácticas de ese libro para la enseñanza de un contenido matemático. Pongamos como ejemplo el conocimiento de que en los libros se recurre al uso generalizado del registro de representación algebraica de las funciones más que de otros registros, lo cual sí se refiere a una característica específica de este material directamente ligada al contenido matemático que puede influir en el proceso de aprendizaje de este concepto y en la forma en la que este se enseña. Estas reflexiones nos llevan a plantear un nuevo nombre de la categoría como ***conocimiento de características matemáticas específicas de recursos didácticos para la enseñanza de un determinado contenido***; esta descripción permite incluir aquí recursos materiales como las regletas o el Geoplano y recursos tecnológicos, tanto los diseñados específicamente para la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo Cabri, como los que han sido adaptados para fines educativos como las hojas de cálculo de Excel.

La categoría de *conocimiento de las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático* fue de gran utilidad para reconocer y analizar el conocimiento que utiliza el profesor de matemáticas al momento de plantear actividades para el aula. Consideramos además que sería interesante para investigaciones posteriores indagar sobre la conveniencia de distinguir entre estrategias, técnicas y tareas de enseñanza para el análisis minucioso de este conocimiento. Las evidencias de conocimiento que extrajimos en este trabajo apuntan a que esta distinción podría permitir al investigador observar un pequeño fragmento de información desde perspectivas distintas y establecer distinciones específicas que podrían dar información sobre las distintas posibilidades de acción que tiene el profesor, así como reflexionar sobre la toma de decisiones que hace sobre su diseño. Por ejemplo, en el caso de la resolución del problema de las cuerdas podemos identificar lo siguiente:

Estrategia: Trazado de figuras y conteo manual de casos particulares para identificar patrones de comportamiento en el número de cuerdas que se pueden trazar en un círculo con un número determinado de puntos.

Técnica: Se pide que se marquen cuerdas para casos específicos y realizar conteo, a partir de los cuales se puedan obtener datos para identificar el algoritmo matemático para cualquier número de puntos.

Tarea: Trazar todas las cuerdas que sean posibles en circunferencias con 2, 5, 8, 10 y 15 puntos respectivamente. Contar cuántas cuerdas se forman en cada una de las circunferencias y a partir de la observación de estos resultados obtener un algoritmo general.

Aunque la estrategia y la técnica utilizada para la resolución de este problema y la construcción de la guía pedagógica de la Actividad 1 era la misma en la mayoría de los profesores del curso, las tareas que planteaban para resolverlo variaban significativamente, incluso, en el caso de Omar, podemos observar que aunque el profesor conoce un procedimiento específico para pasar de los casos concretos a la identificación de un algoritmo general a través de la relación de la circunferencia y sus cuerdas con los polígonos inscritos y sus diagonales, no recurre a ella para utilizarla como técnica didáctica o para incluirla como parte de la tarea que propone a los estudiantes.

VI.2.2.2.2 Sobre las interacciones con otros subdominios

Como en todos los demás subdominios, se observa una relación de dependencia del KMT con respecto al KoT que posee el profesor, la cual pone de manifiesto que los conocimientos didácticos sobre el contenido matemático tienen como base los conocimientos matemáticos del contenido. Para que un profesor pueda reconocer características matemáticas específicas de un software para usarlo como recurso didáctico en la enseñanza de las funciones, requiere tener un conocimiento básico sobre el concepto de función, que le permita evaluar la potencialidad del recurso y valorar su funcionamiento y pertinencia.

Podemos concluir además que el conocimiento que tiene el profesor sobre distintos recursos de enseñanza como los softwares y ciertas estrategias de enseñanza (KMT), así como el uso que hace de esos conocimientos puede estar relacionado con lo que sabe acerca de las formas de proceder y producir en matemáticas (KPM), posiblemente por el carácter organizador del trabajo matemático que tiene el KPM y que hemos descrito anteriormente.

Las principales relaciones que se ponen de manifiesto en nuestro análisis son las que existen con el KFLM. Como hemos señalado antes, estas son relaciones de interdependencia entre las distintas categorías de estos dos subdominios y ponen de manifiesto el carácter integrado e inseparable del conocimiento del profesor sobre el propio proceso de enseñanza y aprendizaje. Lo que conoce el profesor sobre las formas de interacción con el contenido y los intereses o expectativas que existen para su aprendizaje, así como lo que sabe sobre teorías de aprendizaje y posibles dificultades asociadas al aprendizaje de un determinado contenido tienen una influencia significativa en el diseño de las actividades que realiza el profesor; sin embargo, es importante distinguir entre la influencia de estos conocimientos en el diseño didáctico y el conocimiento que tiene el profesor sobre el propio diseño como recurso para la enseñanza.

Un ejemplo de la potencialidad de diferenciación de los conocimientos del profesor a través de estos subdominios es el siguiente: El profesor conoce distintos registros de representación para las funciones lineales, además de características específicas de estos registros (KoT). Asimismo, sabe que esta variedad de representaciones puede suponer una dificultad en el proceso de aprendizaje de este tipo de funciones (KFLM). Estos conocimientos de naturaleza distinta permiten al profesor tomar una decisión en cuanto a la forma en la que elaborará el diseño de una actividad para trabajar el concepto de función lineal. El profesor reconoce el tránsito que puede hacerse entre los distintos registros de representación como una posible técnica de enseñanza que permita analizar las relaciones entre las variables de la función y observar el comportamiento de la misma desde distintos enfoques (KMT). Además, el profesor sabe que la modelación matemática del comportamiento de fenómenos físicos es una estrategia de enseñanza propicia para explotar estas distintas representaciones de la función lineal (KMT).

VI.2.2.2.3 Sobre el modo de acceder al subdominio y posibles vías de desarrollo

Los resultados de la reflexión sobre la construcción teórica y refinamiento empírico de este subdominio nos han permitido observar que, al igual que en el caso del KFLM, el diseño de actividades para abordar contenidos matemáticos específicos en el aula resulta ser un contexto propicio para la manifestación de conocimientos referentes a este subdominio. Además, la discusión con otros profesores sobre la actividad y el análisis de resoluciones realizadas por personas externas (en este caso otro profesor agendo al curso de formación) o estudiantes hipotéticos, ayudan a complementar y profundizar las evidencias de este conocimiento, puesto que el profesor requiere de justificar el diseño poniendo de manifiesto el conocimiento que tiene sobre aspectos específicos de enseñanza.

Con respecto a las posibles vías de desarrollo de este conocimiento, consideramos que el profesor requiere de establecer objetivos específicos a desarrollar para luego poder reflexionar sobre las necesidades de conocimiento que tiene con respecto a los aspectos didácticos del conocimiento.

VI.2.2.3 Sobre el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

Aunque este subdominio forma parte del PCK, nos hemos concentrado más en la exploración de los dos subdominios anteriores. Sin embargo, sobre el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas podemos concluir que la identificación de conocimientos pertenecientes a este subdominio fue escasa. La información que se recopila a este respecto es fruto de preguntas específicas con respecto a la ubicación de las actividades en un momento escolar específico o sobre la flexibilidad de las actividades para adaptarse a distintos niveles educativos. Esto significa que la exploración de este tipo de conocimientos requiere de preguntas específicas por parte de los investigadores.

Otro aspecto importante es que, aunque la definición del subdominio como el **conocimiento que tiene el profesor sobre lo que se debe conocer y la forma en la que debe conocerse un contenido matemático en un determinado nivel o momento de desarrollo escolar y un determinado contexto educativo**, era suficiente para identificar unidades de información que se referían a la manifestación de evidencias de KFLM, las categorías que se construyeron de manera teórica no fueron del todo funcionales para el análisis de estos conocimientos. Las categorías parecen no ser lo suficientemente disjuntas como para aportar información distinta sobre este conocimiento, lo cual complica la asignación más que ayudar a la comprensión de la naturaleza de este contenido. Sobre todo se tuvo problemas de asignación al tratar de diferenciar entre la categoría de *conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico* y el *conocimiento de la secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar.* Consideramos entonces que es necesario realizar investigaciones específicas sobre este subdominio, de manera que puedan tenerse datos suficientes para proponer mejoras en la categorización del mismo, dado que este trabajo no ha logrado recabar suficiente información como para reelaborar las categorías propuestas teóricamente.

Por último podemos señalar también que la falta de evidencias sobre el KSM nos impidió tener más información sobre las relaciones entre el conocimiento de distintos tipos de conexión entre contenidos matemáticos y la ubicación temporal e institucional que puede hacer el profesor de estos contenidos.

Con base en las reflexiones finales de esta investigación y las propuestas de cambios que hemos comentado en los epígrafes anteriores, en la Tabla VI.1 presentamos la reelaboración del sistema de categorías de análisis que habíamos diseñado con base en la construcción teórica del MTSK que se había presentado en la sección III.6.2.2 de la metodología.

VI.2.3 Características específicas del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) como parte del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

Las conclusiones generadas para la descripción y caracterización de los distintos subdominios y en especial los correspondientes al PCK nos permiten retomar las preguntas específicas de investigación que se plantearon en esta tesis, y afirmar que consideramos que la definición y categorización de los subdominios del MTSK referentes a la enseñanza y el aprendizaje del contenido matemático permiten una exploración minuciosa y focalizada del conocimiento del profesor de matemáticas.

Además, hemos podido analizar y obtener evidencias sobre las características específicas del PCK definido dentro del MTSK corroborando que es un conocimiento de naturaleza distinta del matemático, puesto que sus criterios de validez, procesos de construcción, así como su expresión o manifestación en la práctica del profesor son sustancialmente distintos; podríamos decir que éstos se muestran de una forma mucho más explícita, por lo menos en el contexto de formación continua que hemos analizado en esta tesis.

Los subdominios y las categorías propias del conocimiento didáctico del contenido suponen un refinamiento de los subdominios propuestos por el modelo que ha inspirado la construcción del MTSK, el *Mathematical Knowledge for Teaching,* en términos del contenido de los subdominios, así como en su conceptualización, focalizando la atención en el conocimiento que tiene el profesor de cómo las matemáticas son aprendidas, enseñadas, o de cuáles son las expectativas de aprendizaje en los diferentes niveles educativos (Escudero et. al., en prensa)

VI.3 Sobre futuras líneas de investigación con MTSK

Aunque se realizó un esfuerzo por tomar en cuenta el papel de las concepciones dentro de la contextualización del conocimiento especializado de este trabajo, consideramos que es necesario desarrollar investigaciones específicas de la relación entre conocimiento y concepciones en el MTSK, como la de Flores y Carrillo (2014), como futura (y presente) línea de investigación, utilizando ambas dimensiones como complementarias a la hora de analizar el conocimiento del profesor. La exploración de esta línea de investigación supone la aceptación de la integración de conocimiento y concepciones como parte de la *red amplia de conceptos, imágenes y habilidades* que el profesor tiene disponibles para desarrollar su actividad docente

Subdominios		**Categorías asociadas al subdominio** *Conocimiento sobre:*	
Conocimiento matemático	**Conocimiento de los tópicos KoT**	Los procedimientos matemáticos asociados a un determinado contenido	***¿Cómo se hace?***
			¿Cuándo puede hacerse?
		Las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático	
		Los registros de representación asociados a un contenido matemático	
		La fenomenología asociada a un contenido matemático	
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas KSM	Conexiones de complejización entre contenidos matemáticos	
		Conexiones de simplificación entre contenidos matemáticos	
		Conexiones transversales entre contenidos matemáticos	
		Conexiones auxiliares entre contenidos matemáticos	
	Conocimiento de la práctica matemática KPM	**Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos.**	
		Las formas de validación y demostración en matemáticas.	
		El papel de los símbolos y el uso del lenguaje formal en matemáticas.	
		Los procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas.	
		Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)	
		Las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones en matemáticas	
Conocimiento Didáctico del Contenido	**Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM**	Teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático	***Formales***
			Personales
		Las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático	
		Las formas de interacción con un contenido matemático asociadas a su aprendizaje	
		Los intereses y expectativas de los estudiantes sobre el abordaje de un determinado contenido matemático	
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT	Teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático	***Formales***
			Personales
		Características matemáticas específicas de recursos didácticos para la enseñanza de un determinado contenido	
		Las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático	
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS	Las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico	
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar	
		La secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar	

Tabla IV.1 Reelaboración de sistema de categorías y subcategorías del MTSK. [2]

.

---

[2] Resaltamos en negritas las categorias que han sido propuestas para modificación

La idea de utilizar la distinción entre oportunidad, indicio y evidencia, utilizados para el análisis de este trabajo, ha resultado sumamente útil para la triangulación de los datos y la complementación y comparación constante de los datos generados a lo largo del curso; sin embargo, consideramos que la utilización de estos constructos como herramienta para la generación de entrevistas o construcción de viñetas puede resultar mucho más conveniente y generar información más rica y abundante sobre el conocimiento del profesor.

Uno de los pasos importantes con respecto a la utilización del modelo es el desarrollo de propuestas de investigación sobre las posibles vías de desarrollo de conocimientos específicos en el profesor. Para esto, creemos que las aportaciones de caracterización del PCK que contiene este trabajo pueden resultar útiles y orientadoras.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., O. A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., y otros. (2014). The Teaching of Mathematics Using APOS Theory. *APOS theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education* (pp. 57-91). Springer.

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G., & Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 17* (pp. 418-422). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma*, *25*, 23-30.

Azcárate, P. (1998). Sobre el conocimiento didáctico del contenido. Dilemas y alternativas. En L. Rico, & M. Sierra (Eds.). *Primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 25-33). Zamora: SEIEM.

Ball, D.L. (2003). *What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics?*. Consultado en http://goo.gl/FwZllX el 1 de mayo de 2015.

Ball, D.L., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Methematik*. Oldenburg, Alemania.

Ball, D.L., Charalambous, C.M.T., & Lewis, J. (2009). RF1: Teacher knowledge and teaching: viewing a complex relationship from three perspectives. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 121-150). Tesalónica, Grecia: PME.

Ball, D.L., & McDiarmird, G. (1990). The subject matter preparation of teachers. En W. Houston (Ed.). *Handbook of Research on Teacher Education* (pp. 437-449). New York: Macmillan.

Ball, D.L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings*. Maidenhead, Philadelphia: Open University Press.

Baxter, J., & Lederman, N.G. (1999). Assessment and measurement of pedagogical content knowledge. En J. Gess-Newsome, & N.G. Lederman (Eds.). *Examining Pedagogical Content Knowledge: The Construct and its Implications for science education* (pp. 147-161). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic.

Beswick, K. (2007). Teachers' beliefs that matter in secondary mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 95-120.

Blanco, L., Mellado, V., & Ruiz, C. (1995). Conocimiento didáctico del contenido de ciencias y matemáticas y formación de profesores. *Revista de Educación*, Número 307, 427-446.

Borba, M. (2012). Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *44*(6), 801-814.

Bosch, M., & Gascón, J. (2001). Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. Consultado en http://goo.gl/rsB1db el 24 de septiembre de 2014.

Briceño, E., & Cordero, F. (2010). Desarrollo del pensamiento variacional con el uso tecnológico en un ambiente de difusión del conocimiento. En P. Leston (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 23* (pp. 1003-1012). México, D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Bryman, A. (2004). *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa: un estudio de la formación social de la analiticidad*. México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R. & Farfán, R.M. (2003). Mathematics Education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 255-270.

Cantoral, R., Farfán, R.M., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(4), 83-102.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Peterson, P.L., & Carey, D.A. (1988). Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Students' Problem Solving in Elementary Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(5), 385-401.

Carreño, E., & Climent, N. (2009). Polígonos: conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas. En M.J. González, M.T. González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 187-196). Santander: SEIEM.

Carrillo, J. (1998a). *Proyecto docente y de investigación*. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Carrillo, J. (1998b). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Montes, M., Contreras, L.C. … Muñoz-Catalán, M.C. (2015). *The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model*. Manuscrito sometido a evaluación.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Contreras, L. C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática*. *Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L., Aguilar, A., Escudero, D., & Montes, M. (2013). Investigación sobre el profesor de matemáticas en la Universidad de Huelva (España). En C. Dolores, M. García, J. Hernández, & L. Sosa, *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 97 - 116). México: Diaz de Santos.

Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M.C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco, & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 99-116). Ciudad Real, España: SEIEM.

Clay, E., Silverman, J., & Fisher, D. (2012). Unpacking online asynchronous collaboration in mathematics teacher education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *44*(6), 761-763.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Tesis de doctorado publicada en http://goo.gl/KJA4Yb. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Climent, N., & Carrillo, J. (2002). Ejemplificación de una propuesta formativa: el uso de situaciones de primaria en la formación inicial. En L.J Blanco, & L.C. Contreras (Eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente* (pp. 119-180). Extremadura, España: Universidad de Extremadura.

Contreras, L. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas e el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica*, 11, 150-164.

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, *34*, 12-25.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: a study of practical knowledge*. Londres: Croom Helm.

Elstgeest, J., Goffree, F., & Harlen, W. (1993). Education for teaching science and mathematics in the primary school. En W. Harlen. (Ed.). *Science and technology education*. París, Francia: UNESCO.

Ernest, P. (1998). The epistemological basis of qualitative research in mathematics education: A postmodern perspective. En A.R. Teppo (Ed.), *Qualitative research methods in mathematics education* (pp. 22-39). Reston, Virginia: NCTM.

Escudero, D., & Carrillo, J. (2014). Knowledge of features of learning mathematics as part of MTSK. En S. Oesterle, C. Nicol, P. Liljedahl, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME38 and PME-NA36* (p. 306). Vancouver, Canada: PME.

Escudero, D., Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Memorias de la XV Escuela de Invierno de Matemática Educativa* (pp. 35-42). Ciudad de México: Cinvestav.

Escudero-Ávila, D.I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L.C., & Montes, M. (en prensa). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*.

Even, R., & Tirosh, D. (1995). Subject-Matter Knowledge and Knowledge about Students as Sources of Teacher Presentations of the Subject-MatterAuthor of the Subject-Matter. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(1), 1-20.

Fennema, E., & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). Reston, Virginia: NCTM.

Fernández, C., & Llinares, S. (2012). Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(1), 277-310.

Figueiras, L., Ribeiro, M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deulofeu, J. (2011). Teachers' advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics*, *31*(3), 26-28.

Flores, E., & Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge through her practice. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Ed.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME38 and PME-NA36* (pp. 81-88). Vancouver, Canada: PME.

Flores, E., Escudero, D.I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D., & Aguilar, M.S. (2014). Online mathematics teacher education: main topics, theoretical approaches, techiniques and changes in researchers' work. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, & D. Allan (Ed.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME38 and PME-NA36*(pp. 89-96). Vancouver, Canada: PME.

Flores, E., Escudero, D., & Carillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turquía: ERME.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Conocimiento (MTSK)*. Tesis de doctorado no publicada. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, & M.A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Montes, M, & Carrillo, J. (en prensa). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los Espacios de Trabajo Matemático? *Actas del IV Simposio de Espacios de Trabajo Matemático*.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Dordrecht: Reidel.

Georget, P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire: perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants*. Tesis de doctorado no publicada. París: Université Paris-Diderot - Paris VII.

Garret, R. M. (1988). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el curriculo de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 6(3), 224-230.

Gil, F., & Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(1), 27-47.

Glaser, B.G., & Strauss, A.L. (1967). *The discovery of Grounded Theory. Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Goetz, J.P. y Lecompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-292.

Grbich, C. (2013). *Qualitative data analysis: An introduction*. California: Sague Publications.

Herbst, P., & Kosko, K. (2012). *Mathematics Knowledge for Teaching High School Geometry*. Consultado en http://goo.gl/WCA5X8 el 1 de mayo de 2015.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134.

Hölzl, R. (2001). Using dinamic geometry software to add contrast to geometric situations - A case study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(2), 63-86.

Klein, F. (1933). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* [Elementary mathematics from a higher viewpoint]. Berlin: Springer.

Kuzniak, A., & Richard, P.R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Troisième symposium Espace de travail mathématique*, 7-12.

Kynigos, C., & Kalogeria, E. (2012). Boundary crossing through in-service online mathematics teacher education: The case of scenarios and half-baked microworlds. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *44*(6), 733-745.

Latorre, A., Rincón, D. del, & Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Hurtado.

Llinares, S. (1994). El profesor de matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional. En L. Santaló et al. (Eds.). *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia* (pp.183-225). Madrid: Rialp.

Llinares, S. (1996). Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas: Conocimiento, Creencias y Contexto en Relación a la Noción de Función. En J.P. Ponte, et al. (Eds.). *Desenvolvimento profissional des professores de matemática. Què formação? Serção de Educação Matemática* (pp. 47-82). Lisboa: Sociedad Portuguesa de Ciencias de Educação.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. Ponte, & L. Serrazina (Eds.). *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia. Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). Portugal: Sociedade de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao.

Llinares, S., & Sánchez, V. (1998). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional. En L. Rico, & M. Sierra (Ed.), *Primer simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 13-24). Zamora: SEIEM.

Llinares, S., Sánchez, V., & García, M. (1994). Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. *Revista de Educación*, Número 304, 199-225.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Marks, R. (1989). *What exactly is pedagogical content knowledge? Examples from Mathematics*. San Francisco: AERA.

Markworth, K., Goodwin, T., & Glisson, K. (2009). The Development of Mathematical Knowledge for Teaching in the Student Teaching Practicum. En D.S. Mewborn, & H.S. Lee (Eds.). *AMTE Monograph 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers* (pp. 67–83). San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Educators.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L.

Blanco, & M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-438). Ciudad Real: SEIEM.

McDiarmind, G., Ball, D.L., & Anderson, C.W. (1989). Why Staying One Chapter Ahead Doesn't Really Work: Subject Specific Pedagogy. En M.C. Reynolds (Ed.). *Knowledge Base for the Beginning Teacher* (193-205). New York: Pergamon Press.

Ministerio de la Presidencia (2006). *Boletín Oficial del Estado*, Número 293, España: Autor.

Mitchell, R., Charalambous, C., & Hill, H. (2014). Examining the task and knowledge demands needed to teach with representations. *Journal of Mathematics Teachers Education*, *17*(1), 37-60.

Montes, M.A. (2014). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso*. Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/nIxbKq. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. (2013). MTSK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, & M. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185-3194). Antalya, Turquía: ERME.

Montes, M., Contreras, L.C., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Montes, M., Flores-Medrano, E., Carmona, E., Huitrado, J.L., & Flores, P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano, & M. Montes (Eds.). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 9-22). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Moriel-Junior, J.G. (2014). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações*. Tesis de doctorado inédita. Mato Grosso, Brasil: Universidade Federal de Mato Grosso

Moriel-Junior, J.G., & Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

Muñoz-Catalán, M.C. (2010). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/OA4ydJ. Huelva, España: Universidad de Huelva.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: Autor.

Nissen, G. & Blomhøj, M. (Eds.). (1993). *Criteria for scientific quality and relevance in the didactics of mathematics*. Roskilde: Danish Research Council for the Humanities.

Pajares, F. (1992). Teachers’ beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*(39), 307-332.

Parada, S., & Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 83-113.

Park, S., & Oliver, J.S. (2008). Revisiting the conceptualisation of Pedagogical Content Knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, *28*(3), 261-284.

Pinto, J. E. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Tesis de doctorado no publicada. Salamanca, España: Universidad de Salamanca.

Pinto, J., & González, M. (2006). Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en Matemáticas. Una aproximación para su estudio. En M. Bolea, M. Moreno, & M. González (Eds.). *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 237-255). Huesca, España: SEIEM.

Pinto, J., & González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática*, *20*(3), 83-100.

Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers’ professional knowledge. En J.P. Ponte, & F. Matos (Eds.). *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 195-210) Lisboa: Portugal.

Ponte, J.P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-96). Barcelona, España: Graó, de IRIF, S. L.

Ramos, E. (2014). *Reflexión docente sobre la enseñanza del álgebra en un curso de formación continua*. Tesis de doctorado no publicada. Granada, España: Universidad de Granada.

Ribeiro, M., Monteiro, R., & Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación Matemática*, *22*(2), 123-138.

Ritchie, J., & Lewis, J. (Eds.) (2005). *Qualitative Research Practice: a guide of SocialScience Students and Researchers*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Rivas, M., Godino, J.D., & Castro, W. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema*, *26*(42B), 559-588.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. Tesis de doctorado no publicada. Granada, España: Universidad de Granada.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. Lomdon, UK: SAGE Publications.

Sánchez, M. (2003). *Un estudio sobre interacciones y comunicación en educación matemática a distancia*. Tesis de maestría no publicada. México, D. F.: Cinvestav.

Sánchez, M. (2010). *How to simulate interactions and reflections in online mathematics teacher education?* Tesis de doctorado no publicada. Denmark: Roskilde University,

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5*(4), 129-145.

Santos, L. (2002). A investigação e os seus implícitos: contributos para uma discussão. En J. Murillo, P.M. Arnal, R. Escolano, J. Gairín, & L. Blanco (Eds.). *Investigación en educación Matemática.VI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 157-170). Logroño, España: SEIEM.

Schoenfeld, A. (1999). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 243-261.

Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. New York: Routlege.

Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En T. Wood, & D. Tirosh (Eds.). *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Sense Publishers.

Schön, D.A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. USA: Basic Books Inc.

Schön, D.A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Schwab, J. (1978). *Science, curriculum and liberal education*. Univesity of Chicago Press.

Serrano, J., & Pons, R. (2008). La concepción constructivista de la instrucción: hacia un replanteamiento del triángulo interactivo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *38*(13), 681-712.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Silverman, D. (2008): *Doing qualitative research*. Thousand Oaks: Sage Publication.

Skemp, R. (1987). *The Psychology of learning Mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos.* Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/FZPmof. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Sosa, L., Aguayo, L., & Huitrado, J. (2013). KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, & L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México D. F.: Díaz de Santos.

Sosa, L., & Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 569-580). Lleida: SEIEM.

Stake, R. (1995). *The Art of case study*. USA: SAGE.

Strauss, A., & Corbin, J. (1994). *Grounded Theory Methodology: An overview*. En N. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Thousand Oaks, C.A.

Suzuka, K., Sleep, L., Ball, D.L., Bass, H., Lewis, J.M., & Thames, M.H. (2009). Designing and Using Tasks to Teach Mathematical Knowledge for Teaching. En D.S. Mewborn, & H.S. Lee (Eds.). *AMTE Monograph Series Volume 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers* (pp. 7-24). San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Educators.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: McMillan.

Torregrosa-Gironés, G., Haro, M.J., Penalva, M.C, & Llinares, S. (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo de un entorno virtual de aprendizaje. *Revista de Educación*, Número 352, 379-404.

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., & Flores-Medrano, E. (en prensa). The characterisation of the specialised knowledge of a University Lecturer in Linear Algebra. En K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of CERME 9*.

Villa, J.A., & Ruiz, H.M. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *27*, 1-21.

Wood, L.E. (1987). *Estrategias de pensamiento*. Barcelona: Editorial Labor, S. A.

ANEXOS

Cada uno de los documentos que se presentan en los Anexos tiene la finalidad de permitirle al lector una mirada amplia de los datos y de cómo fue el proceso de análisis de estos. Para poder descargarlos, es necesario dar clic en el nombre del documento y se descargará un fichero. Para abrir los archivos se requiere de un software para lectura de hojas de cálculo y de archivos con extensión pdf. Además, los documentos de MAXQDA requieren de este software, del cual hay una versión gratuita de prueba en su web.

Anexo	**Descripción**
I.1	Análisis Actividad 1 en formato MAXQDA
I.2	Descarga de análisis MAXQDA
II.1	Análisis Actividad 2 en formato MAXQDA
II.2	Codificación de documentos Actividad 2
II.3	Descarga de análisis MAXQDA
II.4	Primer análisis Actividad 2
II.5	Segundo análisis Actividad 2
III.1	Análisis Actividad 3 en formato MAXQDA
III.2	Herramientas teóricas para el análisis de recursos didácticos
III.3	Codificación de documentos Actividad 3
III.4	Descarga de análisis MAXQDA
III.5	Primer análisis Actividad 3
III.6	Segundo análisis Actividad 3
IV.1	Análisis Actividad 4 en formato MAXQDA
IV.2	Codificación de documentos Actividades 4
IV.3	Descarga de análisis MAXQDA
IV.4	Primer análisis Actividad 4
IV.5	Segundo análisis Actividad 4
V.1	Análisis Actividad 5 en formato MAXQDA
V.2	Codificación de documentos Actividad 5
V.3	Descarga de análisis MAXQDA
V.4	Primer análisis Actividad 5
V.5	Segundo análisis Actvidad 5