

Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas



La formulación de problemas matemáticos en educación infantil: una aproximación desde la gestión del aula

Memoria para optar al grado de doctor
presentada por:

Enrique Carmona Medeiro

Fecha de lectura: 6 de octubre de 2025

Bajo la dirección de la doctora:

Nuria Climent Rodríguez

Huelva, 2025



TESIS DOCTORAL

La formulación de problemas matemáticos en educación infantil: una aproximación desde la gestión del aula

Enrique Carmona Medeiro

UNIVERSIDAD DE HUELVA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN



Universidad de Huelva
Departamento de Didácticas Integradas



**La formulación de problemas matemáticos en
educación infantil: una aproximación desde la
gestión del aula**

Tesis Doctoral

Enrique Carmona Medeiro

Dirigida por

Nuria Climent Rodríguez

Huelva, 2025

Programa de doctorado

Doctorado en Investigación en la Enseñanza y Aprendizaje de las
Ciencias Experimentales, Sociales, Matemáticas y de la Actividad
Física y Deportiva

A mi madre y a mi padre

Reconocimientos:

Esta investigación ha sido desarrollada en el marco de los proyectos de investigación:

- Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: Tareas y conocimiento del formador (MTSK-T&MTEK) (PID2021-122180OB-I00) financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación

Asimismo, se ha realizado en el seno Grupo de Investigación de la Universidad de Cádiz “Desarrollo Profesional del Docente” (D.P.D.) del Plan Andaluz de Investigación Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (PAIDI), referencia HUM-462.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a todos los miembros del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva por el impacto que han tenido en mi desarrollo profesional y personal. A mis amigos y compañeros José Luis, Emma, Eric, Dina, Álvaro y Miguel Ángel, con quienes he compartido momentos inolvidables tanto personales como académicos. Vuestros logros me alegran sinceramente, y siempre he sentido vuestro deseo profundo de que pudiera culminar este camino. Gracias por vuestra amistad.

Quiero expresar también mi agradecimiento a todos los maestros y colegas que me han inspirado durante mi trayectoria profesional en las universidades de Huelva y Cádiz: Pepe, Nuria, Luis Carlos, Cinta, Ribeiro, Pablo, Chema y Pilar. Especialmente a ti, Pepe: te tengo muy presente, y te voy a extrañar profundamente el día de la defensa.

Mi gratitud se extiende a todos los colegas de profesión que me han hecho la vida más fácil y amable: Osmar, Juampe, Paco, Juan Antonio y Fran. Gracias por vuestra ayuda, por acompañar con afecto y sin ruido.

A ti, Nuria, mi directora, colega y amiga: gracias por tu paciencia infinita, por tu saber sereno y por la confianza que siempre has depositado en mí. Gracias por tu calidad humana, por tu apoyo constante y por todo lo que he aprendido a tu lado.

También quiero agradecer a todas las personas que han estado a mi lado durante este proceso, aun cuando no siempre he sabido cuidar de ellas como merecían. A mis amigos Alberto, Joaquín, Antonia y Manuela; a mis primos Carlos, Laura, Marta, Dani, Jorge, Violeta, Rafa, Ricardo y Luci; a mis tíos Ana, Rafa, Mari Carmen, Rafi, Carlos, Pedro, Ricardo y Luci. Hay miradas amorosas que edifican, y yo he tenido la fortuna de recibir siempre el amor incondicional de mi abuela Ana y de mi tito Pepe. Gracias por sostenerme cuando más lo he necesitado.

También quiero agradecer profundamente a mis maestras y maestros de la vida: Bea, Cris, Sebastián, Mamá Celia, Germán, José y Antonia. Gracias por abrirme las puertas de la universidad universal del universo.

Este camino comenzó en 2019, cuando mi hijo Omar tenía apenas un año. Ha sido un proceso largo y, en muchos momentos, árido. A veces sentí que la tesis era inabordable, que no podría con ella. Me enfrentó a viejos y nuevos fantasmas, pero si hay algo de lo que me siento verdaderamente orgulloso es de haber comprendido que la única forma de llegar a buen puerto era convertirme en mi mejor aliado. Agradezco profundamente a la vida por todas y cada una de las vivencias que me han acompañado en este proceso: por las bendiciones recibidas y también por las dificultades, que me impulsaron a medrar, a confiar en mis habilidades y a buscar mis propios recursos. Hoy lo sé: todo lo que sucede, conviene.

A mi hijo Omar y a mi compañera de vida, Gema. El deseo de compartir una vida próspera con vosotros ha sido mi motor y mi refugio. Omar, vida mía, “el libro”, como tú llamas a esta tesis, ya no nos robará más tiempo. Gracias por tu luz.

Por último, y no menos importante, a mi familia de origen: a mi madre Kety, a mi padre Enrique, a mi hermana Elena, a mis sobrinos Leo y Mario, a mi cuñado Dani y a Mariano. Gracias por sostenerme cuando más lo necesitaba. No tengo ninguna duda de que esta tesis no habría sido posible sin la ayuda incondicional de mi madre. Gracias, mamá, por tu amor y por tus cuidados constantes, sin ti no habría sido posible. Esta meta también es tuya.

RESUMEN

Esta tesis examina la práctica de formulación de problemas matemáticos (FPM) en Educación Infantil desde la perspectiva de la gestión docente. Aunque la FPM se reconoce como una actividad con gran potencial para el desarrollo del pensamiento matemático, su integración efectiva en el aula resulta compleja y poco habitual. Esta complejidad también se refleja en el ámbito de la investigación, donde los estudios son relativamente recientes y han centrado su atención en los productos del alumnado, dejando en segundo plano la implementación. En particular, persisten lagunas sobre cómo apoyar al profesorado en el diseño y puesta en práctica de estas tareas, especialmente en contextos reales de aula. Son escasos los trabajos que describen con detalle los procesos de gestión, así como las decisiones que los docentes deben tomar durante el diseño e implementación.

Estas dificultades se intensifican al introducir la FPM en Educación Infantil. Por un lado, la investigación en esta etapa es aún incipiente, lo que refuerza la necesidad de comprender cómo se manifiesta la FPM en la primera infancia. Por otro, los primeros contactos del alumnado con esta práctica coinciden con un momento sensible del desarrollo, en el que se encuentra inmerso en la adquisición de la lectoescritura, el despliegue de habilidades comunicativas y una experiencia limitada en resolución de problemas.

La tesis se articula como compendio de tres publicaciones. El primer estudio analiza las decisiones de una maestra durante el diseño e implementación de una tarea de FPM no estructurada, identificando las variables didácticas que configuran su enfoque y los dilemas asociados. El segundo profundiza en la gestión docente durante la implementación, con el objetivo de caracterizar las demandas matemáticas formuladas por la maestra, las acciones del alumnado que las detonan y sus relaciones. El tercero se centra en los obstáculos que enfrentan niños y niñas al formular problemas, vinculados tanto a la exploración de la situación como a la construcción de los enunciados.

Los resultados evidencian tanto la viabilidad como la complejidad de integrar la FPM en la primera infancia, y muestran que su implementación requiere un diseño y una gestión sensibles y flexibles. Se identifican múltiples dilemas relacionados con el foco del contenido, la estructuración, el contexto, el lenguaje y los niveles de interacción. Las intervenciones de la maestra se configuran como respuestas situadas, ajustadas de forma contingente al desarrollo de la actividad, y orientadas a sostener el trabajo matemático desde una perspectiva dialógica. Asimismo, se ofrece una lectura comprensiva de las formulaciones infantiles como expresiones legítimas del pensamiento personal y matemático del alumnado. También se subraya el papel clave de la intervención docente para reconocer y sostener los problemas emergentes del alumnado.

Metodológicamente, se adopta un enfoque cualitativo basado en un estudio de caso intrínseco, centrado en una maestra con amplia experiencia en Educación Infantil que participa en un proceso de investigación colaborativa. El análisis combina observación de aula, transcripción de sesiones, entrevistas y revisión documental, junto con codificación inductiva y análisis relacional.

La tesis concluye que la FPM puede enriquecer la experiencia matemática en la infancia, siempre que el profesorado reciba apoyo para afrontar los desafíos específicos que implica su diseño y gestión. Se ofrecen aportaciones relevantes para la didáctica de la matemática y la formación docente, al visibilizar decisiones profesionales que permiten sostener tareas abiertas en contextos de alta incertidumbre. Finalmente, se proponen líneas futuras de investigación orientadas a profundizar en la comprensión de la FPM en la primera infancia.

INDICE

Capítulo 1. Justificación, pertinencia y delimitación del objeto de estudio	22
1.1. Introducción	23
1.2. Justificación y pertinencia del estudio	23
1.2.1. La importancia de la formulación de problemas en el progreso de las ciencias y matemáticas	23
1.2.2. La importancia de la formulación de problemas en Educación Matemática	24
1.2.2.1. <i>La formulación de problemas matemáticos como competencia para la vida</i>	24
1.2.2.2. <i>La formulación de problemas como medio para promover el desempeño matemático</i>	26
1.2.2.3. <i>La formulación de problemas como medio evaluar el desempeño matemático</i>	28
1.2.2.4. <i>La formulación de problemas como medio para mejorar las habilidades de resolución de problemas</i>	29
1.2.2.5. <i>La formulación de problemas como medio para promover y evaluar la creatividad matemática</i>	31
1.2.3. La formulación de problemas matemáticos en el currículum de Educación Infantil	33
1.2.4. La formulación de problemas como ámbito de investigación en Educación Matemáticos: retos y necesidades	34
1.2.4.1. <i>Retos y necesidades vinculadas a la investigación sobre la formulación de problemas matemáticos en Educación Infantil</i>	36
1.2.4.2. <i>Retos y necesidades vinculadas a la investigación sobre la gestión de las tareas de formulación de problemas matemáticos</i>	37
1.3. Problema de investigación y objetivos de la tesis	42
1.3.1. Pregunta de investigación	42
1.3.2. Objetivos de la tesis	43
Capítulo 2. Referentes teóricos	44
2.1. Introducción	45
2.2. ¿Qué es un problema matemático?	45
2.2.1. La noción de tarea matemática	46
2.2.2. La noción de problema matemático	49
2.3. La naturaleza de la formulación de problemas matemáticos	53
2.3.1. Generar y reformular problemas	53
2.3.2. Niveles de estructuración de las tareas de formulación de problemas	57

2.3.3. Caracterización de las tareas de formulación de problemas	61
2.3.3.1. <i>Elementos estructurales de las tareas: situación problemática y prompt</i>	62
2.3.3.2. <i>Situación estructurada Vs situación no estructurada</i>	65
2.3.3.3. <i>Actividades que no son formulación de problemas</i>	67
2.4. Estudios previos sobre la formulación de problemas matemáticos en Educación Infantil	71
2.4.1. Estudios en los que existe una intencionalidad didáctica explícita para el tratamiento de la formulación de problemas matemáticos	72
2.4.1.1. <i>Modelos de doble ciclo resolución-formulación</i>	73
2.4.1.2. <i>Formulación directa</i>	79
2.4.1.3. <i>Modelos de triple ciclo resolución-instrucción-formulación</i>	91
2.4.2. Estudios en los que no existe una intencionalidad didáctica explícita para el tratamiento de la formulación de problemas matemáticos	94
2.4.3. Avances, vacíos y tendencias	100
Capítulo 3. Marco metodológico	105
3.1. Introducción	106
3.2. La construcción del conocimiento científico y su dimensión paradigmática	106
3.3. Selección del paradigma	108
3.3.1. Cuestión ontológica	108
3.3.2. Cuestión epistemológica	109
3.3.3. Cuestión metodológica	111
3.4. Diseño de investigación: Estudio de caso	112
3.5. Selección del caso	113
3.6. Fases de la investigación	116
3.7. Técnicas e instrumentos de recogida de información y análisis de datos	118
Capítulo 4. Resultados	125
4.1. Introducción	126
4.2. Breve descripción del contenido de los artículos	126
4.2.1. Artículo 1	126
4.2.2. Artículo 2	126
4.2.3. Artículo 3	127
4.3. Comprensión de la gestión de la FPM: articulación de los estudios	127

4.4. Artículo 1: Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education	130
4.5. Artículo 2: Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en un aula de educación infantil	158
4.6. Artículo 3: Students' difficulties with problem posing in early childhood education	184
Capítulo 5. Discusión de los resultados	206
5.1. Introducción	208
5.2. Dilemas inherentes al diseño de una tarea de FPM	208
5.2.1. ¿Qué actividad matemática se pretende movilizar con la FPM?	209
5.2.2. ¿Cómo se planifica y organiza una tarea de FPM para favorecer la actividad matemática que se pretende movilizar?	210
5.2.2.1. <i>Dilema relacionado con la variable contexto</i>	210
5.2.2.2. <i>Dilema relacionado con la variable estructura</i>	211
5.2.2.3. <i>Dilema relacionado con la variable lenguaje</i>	212
5.2.2.4. <i>Dilema relacionado con la variable niveles de interacción</i>	212
5.2.3. ¿Qué conclusiones podemos extraer de la posición de la maestra antes los dilemas inherentes al diseño de una tarea de FPM para un aula de Educación Infantil?	214
5.3. Dificultades del alumnado durante la FPM	215
5.3.1. ¿Qué dificultades tiene el alumnado durante la exploración de la situación problemática?	216
5.3.2. ¿Qué dificultades se evidencian en los problemas formulados por el alumnado? ...	217
5.3.2.1. <i>¿Qué aspectos del pensamiento infantil revelan los problemas de naturaleza no matemática formulados por el alumnado?</i>	219
5.3.2.2. <i>¿Qué dificultades revelan los problemas incompletos formulados por el alumnado?</i>	221
5.3.2.3. <i>¿Qué dificultades revelan los problemas inconsistentes formulados por el alumnado?</i>	223
5.3.3. ¿Qué conclusiones podemos extraer de las dificultades del alumnado a través de los problemas que formula?	224
5.4. Dilemas inherentes a la gestión de una tarea de FPM	225
5.4.1. ¿Modifica la maestra su postura ante los dilemas durante la implementación de la tarea con respecto a su posición durante el diseño?	228
5.4.1.1. <i>Dilema relacionado con la variable foco del contenido</i>	229
5.4.1.2. <i>Dilema relacionado con la variable contexto</i>	229
5.4.1.3. <i>Dilema relacionado con la variable estructura</i>	229
5.4.1.4. <i>Dilema relacionado con la variable lenguaje</i>	233

5.4.1.5. Dilema relacionado con la variable niveles de interacción	236
5.4.2. Cuándo y cómo intervenir: Una aproximación a los dilemas de intervención y adecuación desde la perspectiva de las demandas matemáticas	236
5.4.2.1. Cuándo intervenir: un dilema contingente en la gestión de la FPM	237
5.4.2.2. Cómo intervenir: ajustar el tipo y grado de andamiaje en la formulación de problemas	239
Capítulo 6. Conclusiones	244
6.1. Introducción	245
6.2. Valoración del cumplimiento de los objetivos de investigación	245
6.3. Contribuciones al campo de investigación sobre la FPM	247
6.3.1. Aportaciones específicas al estudio de la FPM en Educación Infantil	248
6.3.1.1. Comprensión del diseño y gestión de tareas de FPM	249
6.3.1.2. Comprensión de las dificultades del alumnado	250
6.4. Limitaciones y líneas de investigación futuras	250
6.5. Conclusión general	252
Capítulo 7. Factor de impacto de las publicaciones presentadas	254
7.1. Introducción	255
7.2. Journal of Mathematical Behavior	256
7.3. PNA	258
7.4. Education Science	260
Referencias	262
Anexos	286
Anexo 1. Estudio 1: Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education	287
Anexo 2. Estudio 2: Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en un aula de educación infantil	303
Anexo 3. Estudio 3: Students' difficulties with problem posing in early childhood education	331

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Niveles de actividad en el aula atendiendo a su estructura organizativa (Elaboración propia según Doyle (1986))	46
Figura 2. Elementos estructurales de una tarea matemática (Elaboración propia basada en Newell y Simon (1972); Wickelgren (1974); Doyle (1988); Bruder (2000); Leuders (2015))	47
Figura 3. Relación entre tarea, actividad y problematicidad (Elaboración propia)	48
Figura 4. Elementos estructurales de un problema matemático (Malaspina, 2021)	52
Figura 5. Caracterización de las tareas de formulación de problemas (Elaboración propia según Stoyanova y Ellerton (1996))	58
Figura 6. Situación problemática de una tarea de FPM según Cai et al. (2022) y Cai y Hwang (2022 y 2023)	64
Figura 7. Tipos de tareas de formulación de problemas (Elaboración propia según Baumanns y Rott (2020 y 2022a))	66
Figura 8. Situación problemática presentada mediante un mural como punto de partida para la formulación de problemas (Carmona-Medeiro et al., 2024)	116
Figura 9. Parte específica del mural a la que se hace referencia en la Tarea 6	232
Figura 10. El dilema del lenguaje durante el desarrollo de la sesión de FPM (Elaboración propia según Carmona-Medeiro et al. (2024))	235
Figura 11. Relaciones entre las demandas matemáticas y las acciones previas del alumnado durante el evento (“Formulación del problema de Agustín”) (Carmona-Medeiro y Climent, 2024)	242

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Estudios empíricos que abordan la formulación de problemas en la primera infancia y edad del alumnado (Elaboración propia)	37
Tabla 2. Tipos de tareas matemáticas en relación al conocimiento (C) o desconocimiento (D) de sus elementos estructurales: (1) estado inicial, (2) operadores y (3) estado final (Elaboración propia basada en Bruder, 2000; Leuders, 2015)	47
Tabla 3. Los procesos de formulación de problemas (Elaboración propia basada en Silver (1994))	56
Tabla 4. Ejemplo relativos a las tareas de formulación de problemas libres según sus autores (Elaboración propia)	58
Tabla 5. Ejemplo relativos a las tareas de formulación de problemas semiestructuradas según sus autores (Elaboración propia)	59
Tabla 6. Ejemplo relativos a las tareas de formulación de problemas estructuradas según sus autores (Elaboración propia)	59
Tabla 7. Los procesos de formulación de problemas (Elaboración propia según Stoyanova y Ellerton (1996))	60
Tabla 8. Los procesos de formulación de problemas (Elaboración propia según Silver (1994) y Stoyanova y Ellerton (1996))	66
Tabla 9. Criterios de identificación de la regulación de la cognición como conducta metacognitiva en la formulación de problemas (Baumanns y Rott, 2022a)	67
Tabla 10. Tareas matemáticas invertidas según el conocimiento (C) o desconocimiento (D) de sus elementos estructurales:(1) información, (2) entorno matemático, (3) requerimiento y (4) contexto (Elaboración propia)	68
Tabla 11. Ejemplos de tareas invertidas empleadas en la literatura de investigación sobre formulación de problemas (Elaboración propia)	70
Tabla 12. La actividad de formulación de problemas relativa al profesor según Cai et al. (2019), Cai y Hwang (2020) y Cai (2022)	70
Tabla 13. Estudios que introducen la FPM mediante un ciclo doble resolución-formulación (Elaboración propia)	74
Tabla 14. Problemas previos y prompts empleados en los estudios que introducen la FPM mediante un doble ciclo resolución-formulación (Elaboración propia)	75

Tabla 15. Características de los estudios que introducen la FPM mediante formulación directa (Elaboración propia)	81
Tabla 16. Características de las tareas de FPM en los estudios de formulación directa (Elaboración propia)	82
Tabla 17. Ejemplificación de los cinco componentes estructurales de los problemas aritméticos aditivos (Elaboración propia)	92
Tabla 18. Características de los estudios que estudian la FPM emergente sin la existencia explícita de tareas (Elaboración propia)	96
Tabla 19. Situaciones de juego libre que detonan la FPM junto con los problemas formulados por los estudiantes (Elaboración propia)	97
Tabla 20. Situaciones lúdicas que detonan la FPM junto con los problemas formulados por los estudiantes (Elaboración propia)	99
Tabla 21. Criterios que justifican la selección de Beatriz como informante (Elaboración propia)	114
Tabla 22. Pregunta de investigación y objetivos del estudio (Elaboración propia)	117
Tabla 23. Interrogantes de los estudios y su relación con los objetivos específicos de la tesis (Elaboración propia)	118
Tabla 24. Ejemplo de la estructura de análisis efectuada sobre las unidades de información durante la fase 1 (Elaboración propia)	119
Tabla 25. Variables empleadas para el análisis del diseño y gestión de una tarea de FPM (Carmona-Medeiro et al, 2024)	121
Tabla 26. Categorías y subcategorías emergentes vinculadas a la gestión del aula matemática durante una tarea de FPM (Carmona-Medeiro y Climent, 2024)	121
Tabla 27. Indicadores emergentes (DM1-DM9) relativos a la subcategoría Demandas Matemáticas (DM) (Carmona-Medeiro y Climent, 2024)	122
Tabla 28. Indicadores emergentes relativos a la acción del alumno (D1-D7) que detona la acción docente (DM1-DM9) (Carmona-Medeiro y Climent, 2024)	122
Tabla 29. Indicadores emergentes vinculados a las dificultades del alumnado (D1-D5) durante la tarea de formulación de problemas (Carmona-Medeiro y Climent, 2025)	123
Tabla 30. Estudio, técnicas e instrumentos de recogida de información y análisis de datos (Elaboración propia)	123

Tabla 31. Variables utilizadas para analizar el diseño y la gestión de las tareas de formulación de problemas (Carmona-Medeiro et al., 2024)	209
Tabla 32. Dificultades emergentes del alumnado durante la sesión de FPM	216
Tabla 33. Dificultades emergentes durante la exploración de la situación problemática	216
Tabla 34. Tipos de problemas documentados en la literatura sobre FPM en la primera infancia que evidencian dificultades del alumnado (Elaboración propia)	218
Tabla 35. Tipos de problemas de naturaleza no matemática emergentes	220
Tabla 36. Tipos de problemas incompletos emergentes	221
Tabla 37. Tipos de problemas inconsistentes emergentes	223
Tabla 38. Variables utilizadas para analizar la gestión de las tareas de formulación de problemas según Carmona-Medeiro et al. (2024)	227
Tabla 39. Variables utilizadas para analizar la gestión de las tareas de formulación de problemas según Carmona-Medeiro y Climent (2024)	227
Tabla 40. Tipos de tareas según el prompt empleado (Elaboración propia)	228
Tabla 41. Gradación en el espectro de tareas no estructuradas según el tipo de restricciones introducidas por el prompt (Elaboración propia)	233
Tabla 42. Descriptores emergentes (DM2-1 y DM2-2) relativos al indicador DM2	240
Tabla 43. Información de la revista The Journal of Mathematical Behavior (Elaboración propia)	256
Tabla 44. Factor de impacto de la revista The Journal of Mathematical Behavior (Elaboración propia)	257
Tabla 45. Información de la revista PNA (Elaboración propia)	258
Tabla 46. Factor de impacto de la revista PNA (Elaboración propia)	259
Tabla 47. Información de la revista Education Science (Elaboración propia)	260
Tabla 48. Factor de impacto de la revista Education Science (Elaboración propia)	261

CAPÍTULO 1

JUSTIFICACIÓN, PERTINENCIA Y DELIMITACIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO

“Creo que los problemas son el corazón de las matemáticas, y espero que, como maestros, en el aula [...] capacitemos a nuestros estudiantes para ser mejores formuladores y resolutores de problemas que nosotros” (Halmos, 1980, p. 524).

1.1. Introducción

1.2. Justificación y pertinencia del estudio

1.2.1. La importancia de la formulación de problemas en el progreso de las ciencias y matemáticas

1.2.2. La importancia de la formulación de problemas en Educación Matemática

1.2.2.1. La formulación de problemas matemáticos como competencia para la vida

1.2.2.2. La formulación de problemas como medio para promover el desempeño matemático

1.2.2.3. La formulación de problemas como medio para evaluar el desempeño matemático

1.2.2.4. La formulación de problemas como medio para mejorar las habilidades de resolución de problemas

1.2.2.5. La formulación de problemas como medio para promover y evaluar la creatividad matemática

1.2.3. La formulación de problemas matemáticos en el currículum de Educación Infantil

1.2.4. La formulación de problemas como ámbito de investigación en Educación Matemáticos: retos y necesidades

1.2.4.1. Retos y necesidades vinculadas a la investigación sobre la formulación de problemas matemáticos en Educación Infantil

1.2.4.2. Retos y necesidades vinculadas a la investigación sobre la gestión de las tareas de formulación de problemas matemáticos

1.3. Problema de investigación y objetivos de la tesis

1.3.1. Pregunta de investigación

1.3.2. Objetivos de la tesis

1.1. Introducción

La investigación desarrollada tiene como foco principal la formulación de problemas matemáticos (en adelante FPM) en Educación Infantil. En este primer capítulo se presentan los elementos principales que justifican la pertinencia de nuestra investigación. Se parte de una reflexión sobre la importancia de la FPM resaltando tanto su importancia como línea de investigación en Educación Matemática, como su potencial desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicha importancia se argumenta en torno a tres pilares: (i) su papel en el avance de las ciencias y matemáticas como disciplinas; (ii) su valor en la Educación Matemática; y (iii) su integración en el currículum de Educación Infantil.

Situado el tema de estudio y justificada su relevancia, a continuación, se exponen los retos y desafíos que aborda actualmente la investigación sobre formulación de problemas. Por último, se formula la pregunta de investigación y los objetivos de la tesis.

1.2. Justificación y pertinencia del estudio

1.2.1. La importancia de la formulación de problemas en el progreso de las ciencias y matemáticas

Aunque el interés por los procesos de formulación de problemas es relativamente reciente en el ámbito de la Educación Matemática, no es nuevo en otras áreas del conocimiento (Kilpatrick, 1987). La formulación de problemas ha sido reconocida como un proceso esencial en el avance y construcción de las ciencias (Cai et al., 2015). En este sentido, Einstein e Infeld (1938) señalaron que formular un problema es más importante que resolverlo. Formular problemas significativos e interesantes ha sido y es, reconocido como un elemento central de la actividad científica. La formulación de preguntas nuevas y precisas, no solo permite tanto la identificación de nuevos problemas, como la reconsideración de viejos problemas desde un nuevo enfoque (Einstein e Infeld, 1938), sino que, además, proporciona entusiasmo intelectual a los científicos (Kennedy, 2005).

La importancia de la formulación de problemas matemáticos ha sido destacada por los matemáticos, siendo considerada una actividad inherente a la naturaleza del pensamiento matemático, fundamental para las matemáticas como disciplina, e importante en el quehacer de los matemáticos profesionales debido a su papel central en la creación matemática (Hadamard, 1945; Polya, 1989; Poincaré, 1913; Klamkin, 1968; Halmos, 1980; Silver, 1994; Cai y Mamlok-Naaman, 2020). Así, por ejemplo, Cantor (1867), citado en Baumanns y Rott (2022b), enfatizó la importancia que la capacidad de plantear preguntas supone para el avance de las matemáticas, afirmando que “En matemáticas, el arte de plantear una pregunta es de mayor valor que resolverla.” (Cantor, 1867, p.26). La importancia de la formulación de problemas también ha sido considerada desde el ámbito de la epistemología de las ciencias, como un elemento clave para desarrollar una actitud científica:

El espíritu científico nos impide tener opinión sobre cuestiones que no comprendemos, sobre cuestiones que no sabemos formular claramente. Ante todo, es necesario saber plantear los problemas. Y dígame lo que se quiera, en la vida científica los problemas no se plantean por sí mismos. Es precisamente este sentido del problema el que indica el verdadero espíritu científico. (Bachelard, 2000, pp.16)

Dada la notoria relevancia que se le otorga al proceso de formulación de problemas en la construcción del conocimiento científico y matemático (Cantor, 1867; Einstein y Infeld, 1938; Poincaré, 1948; Polya, 1989; Halmos, 1990; Bachelard, 2000), y el amplio consenso existente acerca de que la capacidad de formular preguntas y problemas que cuestionen los saberes propios y ajenos, es un elemento crucial del quehacer científico y matemático, entendemos, que resulta procedente formular la siguiente cuestión: ¿Existe alguna similitud entre cómo un ser humano aprende significativamente un concepto científico y/o matemático y cómo dicho concepto ha sido construido por la comunidad científica y/o matemática?

Al respecto, Popper y Eccles (1977) encontraron una similitud entre cómo la comunidad científica construye el conocimiento y estandariza los saberes y cómo un ser humano se apropia significativamente de ellos, enfatizando “que el proceso de comprensión y el proceso de producción real o descubrimiento de... [teorías, leyes científicas, etc.] son muy parecidos. Ambos son procesos de creación y combinación” (Popper y Eccles, 1977, p. 461).

Compartimos con Silver (1994) que la actividad de formular problemas matemáticos, no solo tiene lugar en la construcción de las matemáticas por matemáticos profesionales, sino que también tiene lugar durante el aprendizaje de las matemáticas, cuando se favorece una aplicación reflexiva de las matemáticas en los estudiantes. Además, como veremos más adelante, es una actividad crítica de la labor docente (Cai et al., 2022).

1.2.2. La importancia de la formulación de problemas en Educación Matemática

La FPM no solo es una práctica propia del quehacer matemático profesional, sino que constituye también un recurso pedagógico de alto valor en el ámbito educativo. En este apartado se explora su importancia dentro de la Educación Matemática, entendida como medio para el desarrollo del pensamiento y la comprensión conceptual del alumnado, como una herramienta para la evaluación, la mejora de la resolución de problemas y la promoción de competencias transversales como la creatividad, la autonomía o la actitud crítica. A partir de distintos enfoques teóricos y evidencias empíricas, se argumenta por qué la FPM debe ser considerada una práctica clave en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como una vía legítima para favorecer el desarrollo integral del alumnado desde las primeras etapas educativas.

1.2.2.1. La formulación de problemas matemáticos como competencia para la vida

La FPM trasciende su valor instrumental como habilidad escolar para constituirse en una competencia clave para la vida. En una sociedad caracterizada por la incertidumbre, la

complejidad y el cambio constante, las personas necesitan desarrollar capacidades que les permitan enfrentar situaciones nuevas, tomar decisiones informadas y construir sentido ante lo inesperado (Cai et al., 2013; Maslow, 2008). En este contexto, la FPM se revela como una herramienta educativa poderosa, ya que sitúa al sujeto como agente activo que interpreta su realidad, identifica cuestiones relevantes y es capaz de construir preguntas significativas. Como afirma Kilpatrick (1987), fuera del aula la mayoría de los problemas no se reciben formulados, sino que deben ser descubiertos o creados por quien los enfrenta. Según Schön (1979), reforzando lo anterior, los problemas no existen como entidades objetivas, sino que son contruidos por las personas en su intento de comprender y actuar en situaciones complejas.

En este sentido, aprender a formular problemas no sólo es relevante para el desempeño matemático, sino que fortalece habilidades como la creatividad, el pensamiento crítico, la autonomía, la resiliencia y la toma de perspectiva. Más aún, promueve una actitud vital de apertura, cuestionamiento y búsqueda de sentido, imprescindible para una ciudadanía activa y reflexiva. Tal como señala Freire y Faundez (2013), educar en la capacidad de preguntar, y no solo de responder, es una vía para dignificar el pensamiento, el asombro y la transformación. Coincidimos con él cuando afirma que una educación basada en preguntas “es la única educación creativa y apta para estimular la capacidad humana de asombrarse, de responder al asombro y resolver los verdaderos problemas esenciales, existenciales y el propio conocimiento” (p. 76). En esta misma línea, Bachelard (2000) recuerda que todo conocimiento genuino nace de una pregunta, y que no hay aprendizaje profundo sin una interrogación significativa que lo sostenga.

Sin embargo, esto contrasta notablemente con la realidad de la enseñanza de las matemáticas en la mayoría de las aulas, donde los problemas que enfrenta el alumnado han sido propuestos y formulados por el maestro o el libro de texto (Kilpatrick, 1987). La idea de que el propio alumnado pueda formular problemas matemáticos y que además el proceso per se pueda ser fecundo para su capacitación matemática y personal debe ser considerada por el profesorado. Freire y Faundez (2013) y Brousseau (2007) advierten que una educación centrada en las respuestas burocratiza el acto de preguntar, anulando su potencial epistemológico y formativo. En tales contextos, el alumnado recibe sistemáticamente respuestas a preguntas que no ha formulado, desconectándose así del sentido y la significación personal del conocimiento. Incorporar la FPM como actividad habitual en el aula implica entonces dar voz al alumnado, reconociéndolo como sujeto epistémico capaz de construir y explorar sus propias preguntas.

Desde una perspectiva más amplia, las dificultades y los problemas son inherentes al ser humano y a la vida. Experimentar la complejidad del amor, la amistad, la inmersión en el mundo profesional, o incluso la soledad y el aburrimiento, forma parte de la existencia. La naturaleza de los problemas que enfrentamos es diversa y profundamente subjetiva: lo que para una persona representa un reto asumible puede ser, para otra, una experiencia abrumadora (Levine, 2013). En cualquier caso, un elemento clave de las personas que se autorrealizan es su capacidad

de aceptar los problemas sin deformar la realidad (Maslow, 2009). Como él mismo señala, los problemas inherentes a la vida superior son, en verdad, maravillosos en comparación con el vacío existencial o la vida idiotizada por la rutina. Vivir plenamente implica aceptar que amar, tener hijos o crear conlleva sufrimiento, pero que es un privilegio asumir esos riesgos por lo que aportan de sentido a la existencia.

Por ello, más que nunca, la sociedad dinámica de hoy requiere de graduados escolares que puedan adaptarse a situaciones nuevas, frecuentemente impredecibles, como cambiar de trabajo, de hogar o incluso de profesión, y tomar decisiones informadas en tales contextos (Cai et al., 2013). Contribuir a la formación de ciudadanos resilientes desde la Educación Matemática implica cultivar una actitud indagadora, una disposición a formular y reformular los problemas que se encuentran en el mundo. La experiencia de descubrir y crear los propios problemas matemáticos debería ser parte de la educación de cada estudiante.

Así, incluir la FPM en la experiencia escolar no solo tiene sentido matemático, sino también humano: contribuye a formar personas capaces de enfrentarse a su mundo de forma crítica y creativa, de leer la realidad desde sus preguntas y de transformar la incertidumbre en posibilidad. Como afirma Maslow (2009), necesitamos una educación que ayude a desarrollar un nuevo tipo de ser humano, que se sienta a gusto con los cambios, que no evite los problemas, sino que los asuma con curiosidad, coraje y creatividad, sin deformar la realidad. La FPM, como práctica educativa, se alinea con esta visión y debe ser considerada una vía legítima para contribuir al desarrollo integral del alumnado y al fortalecimiento de competencias esenciales para la vida.

1.2.2.2. La formulación de problemas como medio para promover el desempeño matemático

La FPM es una actividad genuinamente matemática que implica una alta exigencia cognitiva (Silver, 1994). Por esta razón, puede utilizarse en cualquier nivel educativo como medio para promover el desarrollo del pensamiento y de habilidades matemáticas (Kilpatrick, 1987; Silver, 1997; English, 1998; Brown y Walter, 2005; Cai y Cifarelli, 2005; Singer et al., 2011; Singer et al., 2013; Malaspina, 2013b; Blanco et al., 2015; Lee et al., 2018).

En particular, la FPM se ha asociado al desarrollo del desempeño matemático del alumnado a través de tres vías principales: la comprensión relacional, la profundización conceptual y el desarrollo de habilidades matemáticas. A continuación, se desarrollan con mayor detalle estos tres aportes.

La formulación de problemas matemáticos favorece la comprensión relacional y significativa de las matemáticas.

Uno de los principales aportes de la FPM es su capacidad para brindar a los estudiantes oportunidades para establecer conexiones entre distintos conceptos (Dickerson, 1999; Castro,

2011). Formular un problema requiere articular conocimientos construidos en diferentes momentos de la trayectoria escolar, con frecuencia adquiridos de forma fragmentada (Castro, 2011). Además, la FPM promueve la conexión entre los conocimientos adquiridos y los nuevos conocimientos incipientes, a través de experiencias significativas y personales del alumnado (Dickerson, 1999; Cai et al., 2022).

Cuando se propone formular un problema en torno a un tópico matemático dado (por ejemplo, el uso de la suma, una propiedad geométrica o el concepto de función), los estudiantes deben imaginar contextos en los que dicho contenido adquiriera sentido y sea necesario. Este proceso estimula la generación de conexiones intra y extra-matemáticas, lo que favorece una comprensión más profunda y significativa del conocimiento matemático implicado (Malaspina, 2013a; Espinoza, 2018).

La formulación de problemas matemáticos brinda oportunidades para profundizar en los conceptos matemáticos

Otro de los beneficios ampliamente reconocidos de la FPM es su capacidad para generar situaciones en las que los estudiantes pueden explorar en profundidad los significados de los conceptos y procedimientos matemáticos, así como su utilidad (Brown y Walter, 2005; Van Harpen y Presmeg, 2013; Blanco et al., 2015; Espinoza, 2018; Leikin y Elgrably, 2019). Según Lee et al. (2018), la FPM es un contexto privilegiado para promover una comprensión más rica del conocimiento matemático, ya que permite a los estudiantes reflexionar y construir ideas con mayor autonomía (Burcin, 2005), lo cual puede potenciar tanto la precisión como la complejidad de sus producciones (Van Harpen y Presmeg, 2013).

La formulación de problemas contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas

Además de su valor conceptual, la FPM contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas transferibles más allá del aula (Espinoza, 2018). A partir del modelo de Zhang et al. (2022), es posible identificar tres fases claves en el proceso de FPM: comprensión de la tarea de formulación de problemas, construcción del problema y expresión del mismo. La comprensión de la tarea requiere explorar la situación problemática, analizar críticamente el prompt, examinar la información disponible y comprender el requerimiento (Castro, 2011; Espinoza, 2018). La construcción del problema, implica explorar, conjeturar y probar diferentes posibilidades (Silver, 1994), lo cual se enriquece aún más en contextos colaborativos donde los estudiantes negocian significados y estrategias (Whitin, 2004; Cai et al., 2022). La expresión del problema conlleva organizar el lenguaje para comunicar con claridad y precisión la situación formulada (Burcin, 2005), lo que a su vez fomenta procesos de generalización y verificación (Castro, 2011; Malaspina, 2013a).

La posibilidad de formular múltiples problemas a partir de una misma situación (Resnick y Ford, 1990; Martín-Díaz, 2022), junto con la incorporación de experiencias personales y contextos significativos, favorece el desarrollo de habilidades como la creatividad, la

flexibilidad mental y el razonamiento lógico (Ellerton, 1986; Silver, 1994; Bonotto, 2013; Leikin y Elgrably, 2019).

A pesar del consenso sobre los beneficios potenciales de la FPM, persisten interrogantes en torno a su impacto real en el desarrollo de la comprensión significativa y de las habilidades matemáticas del alumnado. El estudio a gran escala realizado por Cai et al. (2013) muestra que el desempeño de los estudiantes en tareas de FPM es generalmente bajo. En este sentido, Cai et al. (2015) destacan la importancia de brindar a los estudiantes más oportunidades para participar en tareas de formulación y de reflexionar sobre ellas, al tiempo que se investiga qué tipo de preparación necesitan para hacerlo de manera efectiva.

Aunque se ha avanzado en la caracterización de las variables que conforman una tarea de FPM (Silver, 1994; Stoyanova, 1998; Reitman, 1965; Leung, 2013), como presentaremos en el capítulo 2, sigue sin estar claro cuáles de ellas son más relevantes para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático. Según Cai et al. (2022), aún no se comprende con precisión cómo diseñar tareas que integren de forma adecuada estas variables, ni qué tipos de consignas favorecen la emergencia de los distintos aspectos del pensamiento matemático. Por ello, proponen avanzar en estudios de validación a gran escala que permitan examinar con mayor rigor los efectos de la FPM en el desempeño matemático de los estudiantes.

1.2.2.3. La formulación de problemas como medio para evaluar el desempeño matemático

Tradicionalmente, el desempeño matemático de los estudiantes se ha evaluado a través de su capacidad para resolver problemas matemáticos (Cai et al., 2015). Sin embargo, un creciente cuerpo de investigación sugiere que la formulación de problemas (FPM) puede ser una vía igualmente poderosa para acceder a la comprensión matemática del alumnado. Estudios previos han mostrado que el éxito de los estudiantes en tareas de resolución de problemas matemáticos está estrechamente vinculado con su habilidad para formular problemas matemáticos (Silver y Cai, 1996; Cai y Hwang, 2002; Cai et al., 2013, Cai et al., 2015). Bajo esta premisa, pedir al alumnado que formule problemas no solo les invita a asumir un rol activo en la construcción del conocimiento matemático, sino que también permite a los docentes observar cómo interpretan, estructuran y comprenden los contenidos abordados en clase.

Desde los años ochenta, estudios como los de Hart (1981), Ellerton (1986), Greer y McCaen (1991) y Simon (1993) ya apuntaban el potencial de la FPM como herramienta para explorar la comprensión conceptual de los estudiantes, así como sus disposiciones afectivas hacia las matemáticas (Silver, 1994). Más recientemente, investigaciones como las de Tichá y Hošpesová (2013) han evidenciado la utilidad de la FPM como instrumento diagnóstico en la formación inicial del profesorado. En su estudio sobre la comprensión de las fracciones, los problemas formulados por los futuros docentes permitieron identificar concepciones erróneas

y obstáculos conceptuales, lo que sugiere que la FPM puede funcionar como un recurso formativo para afinar la enseñanza y favorecer aprendizajes significativos.

En la misma línea, Kotsopoulos y Cordy (2009) utilizaron la FPM como herramienta de evaluación del progreso de estudiantes de Educación Primaria. Sus hallazgos destacan la capacidad de la FPM para proporcionar evidencia del grado de alineación entre los problemas formulados por los alumnos y los objetivos de aprendizaje establecidos, abriendo así una vía para monitorear el desarrollo de la comprensión matemática.

El interés actual por esta línea de trabajo se ha reforzado con estudios más recientes que exploran cómo la formulación permite evaluar qué aspectos matemáticos resultaron más accesibles o significativos para los estudiantes durante la resolución (Palmér y van Bommel, 2023; van Bommel et al., 2024). En sus investigaciones con estudiantes de 6 años, estos autores muestran que los problemas formulados tras una tarea de resolución revelan qué comprensiones han sido interiorizadas, qué aspectos han sido desatendidos y, en algunos casos, qué nuevas conexiones se han establecido, incluso más allá de lo que se había previsto inicialmente en la tarea de resolución.

No obstante, la literatura también alerta sobre la baja frecuencia de éxito que experimentan los estudiantes al enfrentarse a tareas de FPM (Cai et al., 2013), lo que ha llevado a subrayar que la utilidad diagnóstica de esta práctica está estrechamente ligada al tipo de experiencias previas que los alumnos han tenido con esta actividad (Cai et al., 2013, 2015). En este sentido, diversos autores coinciden en que es necesario enriquecer las oportunidades de formulación en el aula para que esta práctica adquiera significado y funcione como una fuente informativa válida sobre el pensamiento matemático del alumnado (Ran et al., 2025).

Cai et al. (2015) también identifican la necesidad de desarrollar y validar instrumentos que permitan usar la FPM como medida de la competencia matemática, así como diseñar tareas que revelen distintos aspectos del desempeño estudiantil. Este desafío sigue vigente en las investigaciones más recientes, donde la construcción de criterios claros y útiles para valorar las producciones formuladas por los estudiantes es considerada una prioridad metodológica para el campo (Zhang et al., 2022; Cai y Rott, 2023).

En síntesis, aunque existen sólidos fundamentos teóricos y empíricos que respaldan la FPM como vía para acceder a la comprensión matemática del alumnado, el impacto de esta práctica dependerá, en gran medida, del diseño de las tareas, la preparación del profesorado para guiar su implementación y la calidad de las experiencias que los estudiantes acumulen en torno a ella.

1.2.2.4. La formulación de problemas como medio para mejorar las habilidades de resolución de problemas

Los procesos de formulación desempeñan un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático, particularmente en su relación con la resolución de problemas

matemáticos (en adelante, RPM), como han señalado autores clásicos como Polya (1989), Bransford y Stein (1986), English (1997) y Brown y Walter (2005). Aunque la FPM no ha sido una práctica común en la enseñanza tradicional de las matemáticas (Cai et al., 2015), diversos estudios coinciden en destacar su potencial para mejorar las habilidades de resolución del alumnado. Silver (1994) fue uno de los primeros en justificar la inclusión de la FPM en el currículo por su valor para formar mejores resolutores de problemas. Desde entonces, esta línea de investigación ha cobrado fuerza, buscando esclarecer cómo y en qué medida las capacidades de plantear y resolver problemas se interrelacionan (Ellerton, 1986; Silver y Cai, 1996; Cai et al., 2015).

Kilpatrick (1987) ya señalaba que formular problemas constituye una condición inherente a la resolución en la vida real, como hemos señalado en el epígrafe 1.2.2.1. Incluso cuando se enfrenta a un problema explícito, el proceso de resolución implica continuamente reformulaciones (Davis, 1985; Polya, 1989), lo que evidencia que la FPM no es solo un recurso útil para resolver problemas, sino una dimensión constitutiva del propio acto de resolver. De ahí que estrategias como el método IDEAL de Bransford y Stein (1986), las propuestas heurísticas de Polya (1989) o el enfoque de generación de problemas de Brown y Walter (1993, 2005) hayan integrado la FPM como una herramienta para potenciar la comprensión y resolución.

Desde esta perspectiva, se ha documentado una fuerte correlación entre la habilidad para formular y resolver problemas (Silver y Cai, 1996; Cai y Hwang, 2002; Baumanns y Rott, 2018). Por ejemplo, English (1997) demostró que los estudiantes con mayor desempeño en RPM tienden a formular problemas con estructuras más complejas, mientras que Winograd (1991), Silver y Mamona (1989), y Sweller et al. (1983) evidenciaron que la práctica sistemática de FPM mejora significativamente las capacidades de resolución. Incluso estudios recientes, como los de Zhang et al. (2022) y Ran et al. (2025), refuerzan esta interdependencia al mostrar que la formulación permite al alumnado activar conocimientos, reflexionar sobre la estructura de los problemas y generar conexiones que enriquecen la comprensión del problema original.

Sin embargo, no todos los estudios han encontrado una relación directa. Silver y Mamona (1989) no hallaron una correlación significativa, y Cai y Hwang (2002) mostraron que esta relación era más débil entre estudiantes estadounidenses que entre sus pares chinos, sugiriendo que el vínculo entre FPM y RPM está mediado por factores culturales, curriculares y pedagógicos. Así, como advierte Silver (1994), esta interrelación es compleja y aún insuficientemente comprendida, lo que plantea la necesidad de avanzar teóricamente para esclarecer el rol específico que desempeña la FPM en los procesos de resolución.

Sheets y Cifarelli (2009) proponen dos preguntas clave para guiar futuras investigaciones: (i) ¿cómo influyen las formulaciones iniciales en la posterior resolución? y (ii) ¿de qué manera la actividad de resolución retroalimenta la generación o reformulación de nuevos problemas? Estas preguntas siguen vigentes en estudios más actuales, como, por ejemplo, los de Palmér y

van Bommel (2023) y van Bommel et al. (2024), que combinan ciclos de resolución y formulación y exploran en qué medida los problemas resueltos se ven reflejados en los problemas formulados.

En resumen, la evidencia acumulada apoya la tesis de que fomentar la formulación de problemas en el aula puede mejorar no solo el desempeño en la resolución, sino también la comprensión profunda de las estructuras matemáticas, el sentido de agencia y la capacidad metacognitiva del alumnado. No obstante, se requieren más estudios empíricos que permitan esclarecer los mecanismos mediante los cuales la FPM incide en la resolución, especialmente en etapas tempranas y en contextos diversos.

1.2.2.5. La formulación de problemas como medio para promover y evaluar la creatividad matemática

Si bien en epígrafes anteriores se ha señalado que la FPM puede contribuir al desarrollo de diversas habilidades matemáticas, su vinculación específica con la creatividad ha sido objeto de un cuerpo creciente de investigaciones que justifican dedicarle un apartado propio.

La formulación de problemas ha sido tradicionalmente considerada una manifestación de la creatividad o del talento excepcional (Hadamard, 1945; Silver, 1994). Diversos estudios (Getzels y Jackson, 1962; Balka, 1974; Torrance, 1966; Leung, 1997; Van Harpen y Sriraman, 2013; Voica y Singer, 2012, 2013) han puesto de relieve esta relación al utilizar tareas de formulación de problemas como medio para evaluar la creatividad de los estudiantes. El análisis de las producciones generadas en estas tareas suele seguir el esquema propuesto por Balka (1974), que contempla tres dimensiones de la creatividad: fluidez, referida al número de problemas o preguntas generadas; flexibilidad, relativa a la variedad de categorías de problemas formulados; y originalidad, entendida como el grado de novedad o rareza de los enunciados planteados (Silver, 1994).

Silver (1997) sostiene que involucrar a los estudiantes en procesos de formulación de problemas matemáticos (FPM) promueve el desarrollo de su fluidez, flexibilidad y originalidad creativa. En esta línea, Voica y Singer (2013) destacan que la FPM puede ofrecer indicios significativos sobre la flexibilidad cognitiva de los estudiantes.

El estudio de Leung (1997), basado en un instrumento compuesto por 18 tareas, mostró el valor de la FPM tanto para evaluar la competencia matemática general de estudiantes de Educación Primaria como para valorar su capacidad creativa. De modo similar, Van Harpen y Sriraman (2013) emplearon tareas de FPM con estudiantes de Secundaria para analizar su desempeño creativo, observando, en general, importantes limitaciones en los resultados obtenidos. Por su parte, Voica y Singer (2012) evidenciaron ciertos matices en la relación entre FPM y creatividad: sus hallazgos con alumnos de Educación Primaria sugieren que quienes formularon problemas más convencionales, más cercanos al contexto dado, demostraron una comprensión matemática más profunda que aquellos que generaron enunciados más originales, pero alejados

del marco contextual. Este hallazgo sugiere que la originalidad, si no va acompañada de una conexión con los contenidos matemáticos esperados, puede no reflejar necesariamente una comprensión más profunda.

También se ha investigado la relación entre la formulación de problemas y las habilidades matemáticas excepcionales (Silver, 1994). Los trabajos de Krutetskii (1976) y Ellerton (1986) exploran cómo esta capacidad varía en función del nivel de competencia matemática. Krutetskii, por ejemplo, propuso tareas con una pregunta implícita que debía ser identificada y respondida por los estudiantes. Los resultados mostraron que quienes presentaban una habilidad matemática elevada eran capaces de identificar y responder dicha pregunta sin dificultad, a diferencia de los estudiantes con menor rendimiento, que requerían ayudas o no lograban formularla. En el estudio de Ellerton, se solicitó a los estudiantes que formularan problemas difíciles para un compañero, observándose que los alumnos con mayor competencia matemática generaban enunciados más complejos que aquellos con habilidades más limitadas.

El hecho de que la FPM se haya incorporado como instrumento para valorar la creatividad y el talento matemático sugiere una conexión entre ambas dimensiones (Silver, 1994). Sin embargo, esta relación no ha sido plenamente confirmada. Investigaciones como las de Haylock (1987) y Leung (1993, citada en Silver, 1994) no hallaron una base sólida que la sustente. De hecho, Leung (1993, citada en Silver, 1994) encontró que el conocimiento matemático específico guarda una fuerte relación con la calidad de los problemas formulados, lo que pone en cuestión la idea de reservar la FPM a estudiantes considerados especialmente creativos o talentosos. En esta misma línea, Silver (1994) defiende que la formulación de problemas debe entenderse como una práctica propia de un enfoque educativo basado en la indagación.

¿Es entonces viable utilizar la formulación de problemas como indicador tanto de creatividad como de aprendizaje matemático? Esta pregunta ha sido abordada por Cai et al. (2015), quienes, a partir de una revisión de la literatura y resultados empíricos, concluyen que la FPM puede ser una herramienta valiosa para evaluar y fomentar la creatividad. No obstante, Crespo y Sinclair (2008) advierten sobre la necesidad de desarrollar en el alumnado criterios estéticos que les permitan valorar la calidad matemática de los problemas planteados. En este sentido, Cai et al. (2015) subrayan que el potencial creativo de la FPM se incrementará en la medida en que se promueva en el aula una apreciación estética del quehacer matemático.

Entre los desafíos que aún enfrenta la comunidad investigadora, Cai et al. (2015) destacan la importancia de avanzar en el diseño y validación de instrumentos que permitan utilizar la FPM como medida fiable de la creatividad, así como en la identificación de tipos de tareas que resulten más eficaces para revelar el pensamiento creativo del alumnado. Finalmente, considerando el bajo rendimiento que los estudiantes suelen mostrar en tareas de FPM (Cai et al., 2013), estos autores insisten en la necesidad de investigar qué tipo de preparación y experiencias requieren los alumnos para desenvolverse creativamente en la formulación de problemas.

1.2.3. La formulación de problemas matemáticos en el currículum de Educación Infantil

En los últimos años, muchos países han enfatizado la formulación de problemas como un objetivo importante de aprendizaje para los estudiantes (Cai, 2022; Li et al., 2022; Zhang y Cai, 2021; Zhang et al., 2022). El primer llamado curricular a considerar la importancia de que el alumnado participe en los procesos de formulación de problemas tuvo lugar hace más de 30 años “... *los estudiantes deberían tener cierta experiencia en reconocer y formular sus propios problemas, una actividad que está en el corazón de hacer matemáticas*” (NCTM, 1989, p. 138). Desde entonces, con especial hincapié en las últimas décadas, se ha ido cultivando la conciencia sobre la importancia de la formulación de problemas matemáticos entre investigadores y educadores (Zhang et al., 2022). Esto ha permitido que la formulación de problemas haya sido reconocida progresivamente en los documentos curriculares de muchos países (Australian Education Council, 1991; Chinese Ministry of Education, 2003; NCTM, 1991, 2000, 2003).

A pesar de que las recomendaciones internacionales han ido estableciendo un énfasis mayor en la formulación de problemas (e.g., “*Los estudiantes deben tener la oportunidad de formular problemas a partir de situaciones dadas y crear nuevos problemas modificando las condiciones de un problema dado*”, NCTM, 2000, p. 95), la legislación estatal española no incorporó la formulación de problemas de manera explícita hasta el año 2022. La publicación del Real Decreto 217/2022, de 9 de marzo, que establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria y el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, que establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, constituyen el primer llamado a considerar la importancia de la formulación de problemas como parte esencial del quehacer matemático. Sin embargo, en lo que respecta a la Educación Infantil, a nivel estatal (Real Decreto 95/2022) no existe ningún llamado explícito a considerar la formulación de problemas como medio y/o fin para el desarrollo competencial del alumnado. Esta ausencia de indicaciones a nivel estatal, deja en manos de las concreciones curriculares establecidas por las distintas comunidades autónomas la consideración o no de la formulación de problemas como una práctica clave para el desarrollo del pensamiento matemático en edades tempranas.

Así, en el documento curricular en el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Infantil en la Comunidad Autónoma de Andalucía, donde se desarrolla este estudio (Decreto 100/2023, de 9 de mayo) la formulación de problemas es mencionada en uno de los descriptores operativos que deben emplearse para medir el grado de adquisición de la competencia clave STEAM tras finalizar dicha etapa:

STEM1. Se inicia en el planteamiento de pequeños problemas mediante la aplicación de procesos básicos manipulativos y creativos que impliquen la utilización gradual de símbolos y códigos matemáticos para acercarse a la solución de cuestiones o problemas de la vida cotidiana (Decreto 100/2023, de 9 de mayo, p.16)

Asimismo, en el documento curricular por el que se establece la evaluación del proceso de aprendizaje y se determinan los procesos de tránsito entre las etapas de infantil y primaria en la misma comunidad autónoma (Orden del 30 de mayo de 2023), se emplea el mismo descriptor (STEM1) para evaluar el grado de adquisición de la competencia clave STEM tras finalizar dicha etapa educativa.

El marco curricular que ordena la etapa de Educación Infantil en el sistema educativo español (Real Decreto 95/2022), establece la resolución de problemas como eje fundamental para el desarrollo de la competencia matemática del alumnado. Las concreciones realizadas en el ámbito autonómico de Andalucía (Decreto 100/2023; Orden del 30 de mayo de 2023) extienden el énfasis sobre los procesos de resolución como vía de capacitación del alumnado. La FPM apenas tiene presencia explícita y queda relegada a un papel marginal. Esta ausencia contrasta con los avances en Educación Matemática, que subrayan el valor formativo de la FPM para favorecer el desempeño matemático desde edades tempranas (Martín-Díaz y Montes, 2022).

El desarrollo de habilidades para la resolución de problemas se ha tornado central tanto en el currículum escolar como en la actividad de aula (Ellerton et al., 2015; Lester y Cai, 2016). El énfasis que el currículum actual de Educación Infantil otorga a la resolución de problemas como vía privilegiada para el tratamiento del conocimiento matemático (Decreto 100/2023), implica asumir que uno de los roles esenciales del profesorado es generar situaciones problemáticas.

Esta orientación implica que la FPM, aunque no se mencione explícitamente como medio y/o fin desde la perspectiva del aprendizaje, se convierte en una actividad fundamental en la práctica profesional docente. La capacidad docente para formular, adaptar o seleccionar problemas adecuados para estimular la actividad matemática infantil se configura como una competencia profesional clave (Cai et al., 2022).

La prevalencia de la resolución de problemas respecto a la FPM en el ámbito de la investigación (Carrillo y Cruz, 2016), se ha visto reflejada tanto en el ámbito curricular como en la actividad de aula. Aunque muchos países la han reconocido como un objetivo clave en el aprendizaje de los estudiantes (Cai, 2022), la enseñanza de las matemáticas a través de la FPM, representa un enfoque de enseñanza relativamente nuevo (Chen y Cai, 2020) y poco frecuente en las aulas (Cai y Hwang, 2023). Como se puede apreciar en el panorama curricular actual en Educación Infantil, aún queda un largo camino para que la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se articule en torno a problemas y no exclusivamente a su resolución.

1.2.4. La formulación de problemas como ámbito de investigación en Educación Matemáticos: retos y necesidades

En las últimas décadas, la FPM ha emergido como un campo de interés creciente en la investigación en Educación Matemática, como hemos presentado en epígrafes anteriores. Sin embargo, este campo enfrenta aún numerosos retos que deben ser abordados para consolidar una base teórica y empírica sólida que guíe tanto la práctica docente como las futuras

investigaciones. A continuación, se describen algunos de los retos que interpelan a la investigación sobre FPM.

Una de las necesidades más importantes que enfrenta la FPM atañe a la necesidad de construir marcos teóricos consistentes y cohesivos que permitan establecer definiciones precisas que contribuyan a comprender el fenómeno general de la FPM (Baumanns y Rott, 2022a; Cai et al., 2015; Cai y Leikin, 2020). A pesar del aumento significativo de estudios en distintos niveles educativos, el campo carece de una conceptualización compartida que permita diferenciar claramente la FPM de otras prácticas como la resolución de problemas o la modelización. Esta ambigüedad terminológica y teórica limita la posibilidad de comparar estudios, desarrollar instrumentos de evaluación comunes y construir conocimiento acumulativo.

El diseño de tareas de FPM representa otro núcleo crítico. Investigaciones recientes destacan la importancia de identificar cómo las variables de las tareas impactan en el desarrollo del pensamiento matemático y de qué manera favorecen o no una formulación productiva (Baumanns y Rott, 2022a, 2022b; Cai y Hwang, 2020; Xu et al., 2020). En este sentido, existe una necesidad urgente de clarificar qué elementos del diseño promueven diferentes tipos de formulación y cómo estos se relacionan con el desarrollo del pensamiento matemático (Cai et al., 2024).

Aunque se han propuesto algunos modelos para evaluar los problemas formulados (Zhang et al., 2022; Cai y Rott, 2023), la evaluación del desempeño en FPM es otro de los retos, ya que no existe aún un consenso sobre los criterios que deberían utilizarse para analizar estas producciones. Esta carencia metodológica dificulta tanto la investigación comparada como la valoración formativa por parte del profesorado.

Asimismo, se reconoce la necesidad de explorar con mayor profundidad los procesos cognitivos, metacognitivos y afectivos implicados en la FPM (Cai y Leikin, 2020; Chen y Cai, 2020). Una cuestión clave es entender cómo se movilizan los conocimientos matemáticos, qué tipo de razonamientos predominan en diferentes edades, y cómo influyen las creencias, emociones y experiencias previas de los estudiantes en su capacidad para formular problemas.

También se evidencia una falta de estudios longitudinales y comparativos que permitan analizar la evolución de la FPM a lo largo de distintas etapas educativas y en diferentes contextos culturales (Cai y Hwang, 2022; Ran et al., 2025). Esta carencia limita la posibilidad de establecer trayectorias de desarrollo y principios instructivos transferibles.

El uso de tecnología en la FPM es un ámbito incipiente pero prometedor. Aunque algunos estudios han explorado el uso de entornos digitales como MONSAKUN Touch (Yamamoto et al., 2012), se trata de estudios aislados, por lo que todavía se desconoce el potencial de otras herramientas digitales para mediar o ampliar las oportunidades de formulación en distintos niveles educativos.

La literatura de investigación reciente identifica un conjunto extenso de retos y necesidades que deben ser abordados para avanzar en la consolidación de la FPM como práctica educativa y campo de investigación. Entre las muchas líneas abiertas de investigación sobre FPM centraremos la atención en dos aspectos que han recibido poca atención, la FPM en Educación Infantil y el rol del profesor en la gestión de aula. La presente tesis doctoral se inscribe en estas dos agendas de investigación, con el propósito de contribuir al desarrollo de conocimiento situado sobre la FPM en la etapa de Educación Infantil, atendiendo especialmente a los procesos de implementación y gestión de tareas en contextos reales de aula.

1.2.4.1. Retos y necesidades vinculadas a la investigación sobre la formulación de problemas matemáticos en Educación Infantil

En las últimas décadas, la investigación sobre formulación de problemas matemáticos ha experimentado un notable crecimiento, tanto en términos de cantidad de estudios como en diversidad de enfoques y niveles educativos implicados (Cai y Hwang, 2020; Lee, 2021; Liljedahl y Cai, 2021; Ellerton et al., 2015). Según Lee (2021), el volumen de publicaciones en revistas académicas sobre formulación de problemas se ha incrementado de forma sostenida desde los años noventa. La formulación de problemas ha pasado de ocupar un rol marginal a convertirse en un foco de investigación clave por su potencial tanto para promover el pensamiento matemático, como para vehicular innovaciones curriculares y metodológicas en la enseñanza de las matemáticas (Cai y Hwang, 2020). Aunque la FPM ha sido investigada en distintos niveles educativos, incluyendo primaria (Bonotto y Santo, 2015; Possamai y Allevato, 2024), secundaria (Cai et al., 2023; Koichu, 2020; Krawitz et al., 2024) y universidad (Baumanns y Rott, 2024; Montes et al., 2024; Rosli et al., 2015), la mayoría de los estudios se centran en la educación primaria y secundaria (Lee, 2021). Hasta la fecha la educación infantil sigue siendo una etapa escasamente explorada (Cai y Hwang, 2020; Martín-Díaz et al., 2020; Palmér y van Bommel, 2020; van Bommel et al., 2024). El estado de investigación sobre formulación de problemas elaborado por Lee (2021) revela que, según su revisión sistemática basada en las bases de datos ERIC, PsycINFO, ProQuest Dissertations & These Global y Google Scholar, y atendiendo a criterios de selección que incluían estudios empíricos en inglés publicados en revistas académicas entre 1990 y 2019, no existen estudios que involucren específicamente a la primera infancia (0-6 años).

Actualmente, la investigación en este campo sigue siendo incipiente y dispersa. La ausencia de marcos conceptuales específicos para el análisis de la FPM en Educación Infantil dificulta su sistematización, y la escasa experiencia del profesorado con este tipo de tareas añade complejidad a su implementación y estudio. Ante la necesidad de estudios empíricos que ayuden a comprender el fenómeno de la FPM en educación infantil, diversos trabajos han comenzado a explorar tanto la viabilidad como el potencial de la formulación de problemas (Tabla 1).

Tabla 1. Estudios empíricos que abordan la formulación de problemas en la primera infancia y edad del alumnado (Elaboración propia)

Estudios	Rango etario
Fosse et al. (2020)	1-5 años
Martín-Díaz et al. (2020); Codes et al. (2020); Martín-Díaz y Montes (2022)	4-5 años
Kalmpourtzis (2019); Kalmpourtzis et al. (2021)	5-6 años
Lowrie (2002); Cheeseman (2019); Palmér y van Bommel (2020); van Bommel y Palmér (2021); Jastrzębowska (2023); Palmér y van Bommel (2023); van Bommel et al. (2024)	6 años
Chang (2007); Yamamoto et al. (2012); Possamai et al. (2023)	6-7 años

Aunque la Educación Infantil en el sistema educativo español implica al alumnado de entre 0 y 6 años, dada la escasez de investigaciones se consideraran estudios que impliquen el rango etario 6-7. A pesar de que estos estudios ofrecen una base emergente de conocimiento que permite avanzar hacia una mejor comprensión de esta práctica en la primera infancia, cabe señalar que la mayoría de los estudios se centran en alumnos de 6 años, siendo escasos los estudios que abordan específicamente la FPM en edades más tempranas, como los 4 o 5 años, lo que deja un área de vacancia relevante en el panorama actual.

1.2.4.2. Retos y necesidades vinculadas a la investigación sobre la gestión de las tareas de formulación de problemas matemáticos

El creciente interés por la FPM como práctica didáctica ha visibilizado no solo su potencial para el desarrollo del pensamiento matemático, sino también los importantes desafíos que conlleva su implementación en el aula. Aunque muchos países han reconocido la FPM como un objetivo clave del aprendizaje matemático escolar (Cai, 2022), representa un enfoque de enseñanza relativamente nuevo (Chen y Cai, 2020) y poco consolidado en las prácticas cotidianas del aula (Cai y Hwang, 2023). Dado que la actividad de FPM se aleja de las costumbres habituales del aula, su incorporación desafía las normas y expectativas escolares sobre qué significa enseñar y aprender matemáticas (Cai et al., 2015), y plantea tensiones tanto para los docentes como el alumnado.

La integración efectiva de la FPM en el aula es compleja, por un lado, implica un cambio profundo en los roles del profesorado y el alumnado (Cai y Hwang, 2022), y, por otro lado, requiere de habilidades y capacidades específicas que permitan manejar dichas complejidades (Martín-Díaz y Montes, 2022; Singer et al., 2013; van Bommel et al., 2024). Font (2008) sostiene que la manera en que se gestionan las tareas matemáticas puede tener un impacto incluso mayor que el propio diseño de las mismas. De este modo, una tarea de FPM cuidadosamente elaborada puede derivar en una actividad poco rica por parte del alumnado si no se acompaña de una gestión docente adecuada que la sostenga y potencie.

Asumimos al docente como un agente dinamizador, cuyos patrones de prácticas, normas, valores e ideas no solo inciden en el aprendizaje del alumnado (Cai et al., 2015), sino que también poseen un potencial transformador tanto en los estudiantes como en las propias instituciones educativas (Carmona-Medeiro y Cardeñoso, 2021). El docente, es, por tanto, una pieza clave en la conformación de un ambiente enriquecido que posibilite la inclusión productiva de la FPM en el aula (Kilpatrick, 1987). Sin embargo, la gestión de aula no puede entenderse solo como un conjunto de decisiones organizativas, sino como una práctica situada y compleja en la que no existe una respuesta “correcta” predeterminada para determinar cuándo y cómo intervenir (Godino et al., 2015; Mason, 2016). Atender y sostener las dificultades emergentes del alumnado durante la formulación de problemas requiere considerar las características contextuales del aula y ofrecer un determinado tratamiento a la diversidad del alumnado, atendiendo sus distintos estados cognitivo-afectivos durante la FPM (Godino et al., 2015).

Desde una perspectiva investigativa, se ha avanzado en el análisis de variables relacionadas con la FPM, como la estructura de las tareas o las características de los problemas formulados (Singer et al., 2015; Cai et al., 2022), pero persiste una importante laguna en el conocimiento sobre cómo se implementan estas tareas en el aula, y qué dificultades emergen en su gestión (Cai, 2022). Múltiples estudios coinciden en señalar la necesidad de comprender con mayor profundidad cómo las decisiones del profesorado afectan a la participación del alumnado y a la calidad de los problemas formulados (Cai y Hwang, 2021; Liljedahl y Cai, 2021).

La literatura subraya que el profesorado desempeña un papel central en la viabilidad de las tareas de FPM. Por ello, comprender cómo los docentes conducen y regulan estas actividades resulta esencial para avanzar en la comprensión de qué condiciones posibilitan que los estudiantes formulen problemas significativos. En este sentido, la literatura señala la necesidad de ahondar en qué medida la comprensión de la naturaleza del acompañamiento, los andamiajes, la conformación de un clima enriquecido, el establecimiento de normas de participación y la regulación del discurso impactan en su incorporación efectiva (Çakır y Akkoç, 2020; Kilpatrick, 1987; Peng et al., 2021; Zhang y Cai, 2021).

En consecuencia, la investigación sobre formulación de problemas debe atender de manera prioritaria los desafíos vinculados a su gestión en el aula, entendida como una práctica compleja y situada que articula las decisiones del profesorado con las respuestas del alumnado. Esto requiere, por un lado, explorar las perturbaciones que la introducción de tareas abiertas de FPM genera en las dinámicas habituales de clase y en la actividad del alumnado; y por otro, analizar qué estrategias docentes permiten sostener dicha actividad, ofreciendo andamiaje y orientación sin limitar la agencia de los estudiantes. Tal como han señalado distintos autores, la naturaleza abierta e incierta de las tareas de formulación demanda al profesorado una toma de decisiones constante, en contextos donde no existen respuestas predefinidas (Cai, 2022; Rowland y Zazkis, 2013). Comprender cómo se gestiona esa incertidumbre, cómo se adaptan las intervenciones

docentes a las características cognitivas y afectivas del alumnado, y cómo estas decisiones inciden en la calidad y sentido matemático de los problemas formulados, constituye una línea de trabajo clave para avanzar en la viabilidad e implementación efectiva de esta práctica.

A la luz de estas consideraciones, resulta necesario desdoblar el análisis de los desafíos asociados a la gestión de la FPM en el aula atendiendo a dos planos complementarios: por un lado, las dificultades que enfrentan los docentes en la implementación y conducción de estas tareas; y por otro, los obstáculos que experimenta el alumnado durante la formulación de problemas. Esta doble mirada permite profundizar en los factores que inciden en la viabilidad didáctica de la FPM, reconociendo que las decisiones del profesorado y las respuestas del alumnado se configuran en una relación dialógica y mutuamente condicionada. A continuación, se detallan los principales retos identificados en la literatura desde ambas perspectivas.

Un primer conjunto de desafíos se relaciona con el diseño e implementación instruccional. Diversos estudios (Chen y Cai, 2020; Cai y Hwang, 2021, 2022; Li et al., 2022; Cai, 2022) advierten que diseñar tareas de FPM efectivas supone un reto complejo que exige combinar accesibilidad, demanda cognitiva y apertura. Esta dificultad se amplifica cuando los docentes deben integrar la formulación con otros elementos del currículum, gestionar los tiempos de clase y atender la diversidad del alumnado. En este sentido, se destaca la necesidad de desarrollar marcos de diseño que orienten al profesorado sobre cómo secuenciar, graduar e implementar estas tareas dentro de una progresión didáctica coherente (Li et al., 2020; Cai y Hwang, 2023).

Asimismo, la gestión docente de las producciones del alumnado emerge como un área poco explorada pero crucial (Zhang y Cai, 2021; Li et al., 2022; Cai, 2023). Los docentes enfrentan dilemas sobre qué hacer con los problemas formulados por los estudiantes: cómo evaluarlos, cuáles discutir en clase, cómo integrarlos en la enseñanza sin perder de vista los objetivos curriculares, y cómo valorar aquellos que se alejan de lo esperado sin desmotivar al alumnado. Los docentes manifiestan inseguridad a la hora de valorar los problemas planteados por el alumnado, especialmente cuando estos son atípicos, incompletos o poco convencionales (Li et al., 2020; Cai, 2022). En este sentido, Cai (2022) identifica tres áreas de desafío para los maestros: (i) gestionar problemas de naturaleza no matemática; (ii) problemas planteados por los alumnos que no guardan relación con los objetivos de la lección; y (iii) la naturaleza inherentemente abierta de las tareas de formulación de problemas. La ausencia de criterios claros y de herramientas formativas dificulta el uso de la FPM como estrategia de retroalimentación y evaluación formativa. La literatura plantea interrogantes urgentes: ¿qué dimensiones (estructurales, conceptuales, expresivas) deben considerarse al analizar los problemas formulados?, ¿cómo desarrollar instrumentos que sean accesibles y útiles en la práctica docente cotidiana? (Zhang et al., 2022; Cai y Rott, 2023).

La implementación efectiva de la FPM en el aula exige desarrollar un conocimiento profesional específico que permita a los docentes interpretar las formulaciones del alumnado y responder

de forma pedagógicamente significativa. En este sentido, se reconoce la necesidad de avanzar en la identificación y desarrollo del conocimiento didáctico especializado requerido para planificar, adaptar y sostener estas tareas en el aula (Martín-Díaz y Montes, 2022; Baumanns y Rott, 2022a). Este conocimiento incluye no solo la comprensión profunda de la estructura de los problemas y los entornos matemáticos implicados, sino también la capacidad para anticipar dificultades, seleccionar recursos adecuados y diseñar estrategias de andamiaje ajustadas a las comprensiones del alumnado.

A pesar del impulso de propuestas como la enseñanza basada en el planteamiento de problemas (P-PBL), todavía se sabe poco sobre las condiciones que permiten al profesorado apropiarse de estas estrategias y adaptarlas a su contexto de enseñanza (Cai y Hwang, 2021; Liljedahl y Cai, 2021). En este marco, se subraya la importancia de promover modelos de formación situados, centrados en el análisis de casos reales y en la reflexión conjunta sobre la práctica (Cai y Hwang, 2023), que favorezcan el desarrollo de habilidades docentes vinculadas a la interpretación de las producciones estudiantiles y a la toma de decisiones didácticas en tiempo real (Cai, 2022).

Asimismo, diversas investigaciones advierten que la ausencia de experiencias formativas sólidas puede derivar en una implementación superficial o mecánica de la FPM, en la que se prioriza el cumplimiento de la tarea sobre su sentido matemático (Cai y Hwang, 2020; Possamai et al., 2023). Tal como señalan Zhang et al. (2022), no basta con proponer tareas abiertas o invitar al alumnado a formular problemas; es imprescindible articular un acompañamiento instruccional intencionado que promueva la apropiación progresiva de esta práctica como parte del quehacer matemático escolar.

Desde la perspectiva del alumnado, los estudios han considerado que los problemas formulados no sólo representan una vía para evaluar el desempeño matemático del alumnado, sino que además puede ser un indicador de sus dificultades emergentes (Cai et al., 2015). Existen múltiples enfoques para analizar los problemas formulados por el alumnado (Cai y Hwang, 2023; Carrillo y Cruz, 2016; Leavy y Hourigan, 2022; Palmer y van Bommel, 2020). En general, los enfoques caracterizan los problemas atendiendo a distintas variables, que implican discernir en primera instancia, si son problemas matemáticos o no, es decir, si contienen todos los elementos estructurales (información, contexto, entorno matemático y requerimiento). En segunda instancia, en el caso de tratarse de problemas matemáticos completos, se analiza si son coherentes con las variables de la tarea (situación problemática y prompt) o no. Por último, en el caso de los problemas no matemáticos, se analiza si son problemas incompletos, es decir, si están desprovistos de alguno de los elementos estructurales, o, por el contrario, si se tratan de problemas inesperados. En este sentido, la literatura de investigación ha documentado muchos de los errores más frecuentes, como la dificultad para formular problemas matemáticos, la dificultad para identificar y articular los elementos estructurales del problema, y en el caso de Educación Infantil, la tendencia a formular narrativas sin contenido matemático, o la imposibilidad de producir preguntas explícitas (Codes et al., 2020; Martín-Díaz et al., 2020;

Possamai et al., 2023). Estas dificultades reflejan tanto limitaciones lingüísticas y cognitivas propias de la etapa evolutiva, como la escasa familiaridad con este tipo de actividad escolar (Lowrie, 2002).

Sin embargo, tal como señalan Ran et al. (2025) la mayoría de los estudios se han centrado en las respuestas esperadas, es decir, en los problemas matemáticos válidos y resolubles, dejando en un segundo plano los problemas no matemáticos (incompletos, inconsistentes con los variables de la tarea o inesperados). La perspectiva preponderante a tratar los problemas no matemáticos en términos de error o déficit ha repercutido en que los análisis se han limitado al recuento de errores sin considerar el potencial cognitivo y creativo de dichas respuestas (Ran et al., 2025).

Compartimos con Ran et al. (2025) que uno de los desafíos más relevantes para el campo de la investigación sobre FPM subyace en atender los problemas no matemáticos sin caer en una visión deficitaria y explorar sistemáticamente las respuestas inesperadas. La literatura también señala que una barrera importante para la implementación sostenida de la FPM es el desconocimiento del pensamiento matemático del alumnado, así como la dificultad para anticipar y responder a las dificultades que enfrentan los estudiantes durante esta práctica (Xu et al., 2020; Li et al., 2020; Ran et al., 2025). Estos factores resultan clave para diseñar e implementar propuestas didácticas que no sólo sean viables, sino también significativas desde la perspectiva de los estudiantes. La gestión de las respuestas inesperadas, como formulaciones incompletas, irrelevantes o no matemáticas, constituye un área de investigación emergente que puede ofrecer claves para diseñar mejores apoyos y enriquecer la comprensión del aprendizaje matemático.

El estudio de Ran et al. (2025) realiza un llamado a enriquecer el campo de la FPM incluyendo una mirada más amplia y analítica sobre los problemas formulados por el alumnado. Los problemas no matemáticos no deben verse como errores a corregir, sino como ventanas para comprender cómo los estudiantes interpretan las tareas, cómo piensan matemáticamente, y cómo puede la enseñanza adaptarse mejor a su diversidad cognitiva. En este sentido, los autores proponen una clasificación basada en el modelo de procesos de FPM de Cai y Rott (2023), diferenciando entre respuestas inesperadas ligadas a: (i) la comprensión de la tarea (orientación); (ii) la conexión de la información (conexión); y (iii) la generación del problema (expresión o formulación).

La primera infancia (0-6) representa un caso idiosincrático dentro del campo de la FPM, ya que, por un lado, el alumnado se encuentra en pleno desarrollo de la lectoescritura y de sus habilidades comunicativas, y, por otro lado, cuando se enfrentan a sus primeros acercamientos en esta práctica, aún cuentan con una experiencia limitada en la resolución de problemas. En consecuencia, los problemas que formulan pueden responder a una lógica diferente, más compleja o menos convencional, estrechamente ligada a su momento evolutivo y a sus concepciones personales sobre lo que significa un problema.

Desde esta perspectiva, compartimos con Ran et al. (2025), que se requieren investigaciones que aborden las dificultades emergentes en la formulación de problemas desde una mirada más comprensiva, que permita interpretar dichas producciones como manifestaciones legítimas del pensamiento personal y matemático de los niños. Aunque estos problemas puedan no ajustarse a las expectativas del profesorado, reflejan procesos cognitivos relevantes y una lógica propia que merece ser comprendida, atendida, valorada y, cuando sea posible, potenciada.

En definitiva, los desafíos vinculados a la investigación sobre la gestión de las tareas de FPM exigen una atención prioritaria dentro del campo de la Educación Matemática. Abordar estas necesidades implica no solo profundizar en el conocimiento sobre el rol docente y las dificultades del alumnado, sino también generar propuestas formativas, modelos de intervención y marcos analíticos que permitan comprender, sostener y enriquecer esta práctica en contextos reales de aula. La presente tesis se inscribe en este esfuerzo colectivo por ampliar los horizontes de la FPM, contribuyendo al desarrollo de un conocimiento más situado, inclusivo y pedagógicamente relevante.

1.3. Problema de investigación y objetivos de la tesis

1.3.1. Pregunta de investigación

La FPM ha sido reconocida como una práctica de gran valor para el desarrollo del pensamiento matemático, la creatividad y la comprensión conceptual en los distintos niveles educativos. Sin embargo, su incorporación en las aulas de Educación Infantil sigue siendo muy limitada y poco explorada. Esta escasa presencia contrasta con el creciente reconocimiento de que los niños y niñas, incluso antes de dominar la lectoescritura, son capaces de participar significativamente en actividades de formulación de problemas, siempre que se diseñen y gestionen adecuadamente. A pesar de estos indicios, el conocimiento actual sobre cómo introducir la FPM en la práctica docente de la etapa infantil es aún fragmentario. Las investigaciones existentes se centran en explorar su viabilidad, analizar los tipos de problemas que los niños pueden formular o describir intervenciones aisladas, pero se conoce poco sobre cómo se gestiona esta práctica en contextos reales de aula, qué decisiones didácticas la hacen posible y qué tipo de dificultades emergen durante su implementación.

En este contexto, esta tesis doctoral se enmarca en una línea de investigación emergente y pretende avanzar en la comprensión de cómo se pueden gestionar las tareas de FPM en el aula de Educación Infantil. Hemos formulado nuestro problema de investigación en los siguientes términos:

¿Qué desafíos implica la integración de la formulación de problemas matemáticos en el aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la gestión de aula?

Dirigimos nuestra problemática de investigación al interés por conocer cómo una maestra gestiona esta práctica en un aula de Educación Infantil, con niños y niñas de entre 4 y 5 años que no tienen experiencia previa en la formulación de problemas a partir de una situación dada. Nuestro propósito no es abordar este fenómeno como un conjunto de decisiones instruccionales de la maestra al margen del aula, sino comprenderlas como parte de una práctica situada, en la que dichas decisiones emergen y se transforman a partir de la interacción con el alumnado.

1.3.2. Objetivos de la tesis

En consonancia con esta pregunta, el objetivo general de la tesis es:

Analizar cómo una maestra gestiona una tarea de FPM en un aula de Educación Infantil (4-5 años) desde una perspectiva relacional, en la que las acciones de la maestra se configuran en respuesta a las necesidades, dificultades y acciones del alumnado.

A partir de este objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- ♦ Objetivo 1.- Caracterizar los dilemas que la maestra enfrenta durante el diseño y gestión de una tarea de FPM.
- ♦ Objetivo 2.- Caracterizar la gestión docente durante la implementación de una tarea de FPM, con especial atención a las demandas matemáticas que se establecen y las acciones del alumnado que las detonan.
- ♦ Objetivo 3.- Identificar y analizar las dificultades emergentes que experimenta el alumnado durante las distintas fases de la tarea de FPM.

La articulación de estos objetivos permite avanzar en la comprensión del fenómeno de la FPM en la etapa de Educación Infantil (4-5 años) desde una comprensión que integra las miradas de la maestra y el alumnado. Abordar la gestión del aula de las tareas de FPM desde esta doble perspectiva aporta evidencias que pueden contribuir tanto al desarrollo teórico en este campo como a la mejora de las prácticas docentes orientadas a su integración en el aula.

CAPÍTULO 2

REFERENTES TEÓRICOS

“No sabemos nada con certeza absoluta. Es muy importante comprender esto. Damos por ciertas algunas cosas en diversos grados. Algunas son sumamente inseguras, otras casi seguras, pero ninguna es absolutamente cierta.” (Feynman, 1990, p. 286).

2.1. Introducción

2.2. ¿Qué es un problema matemático?

2.2.1. La noción de tarea matemática

2.2.2. La noción de problema matemático

2.3. La naturaleza de la formulación de problemas matemáticos

2.3.1. Generar y reformular problemas

2.3.2. Niveles de estructuración de las tareas de formulación de problemas

2.3.3. Caracterización de las tareas de formulación de problemas

2.3.3.1. Elementos estructurales de las tareas: situación problemática y prompt

2.3.3.2. Situación estructurada vs situación no estructurada

2.3.3.3. Actividades que no son formulación de problemas

2.4. Estudios previos sobre la formulación de problemas matemáticos en Educación Infantil

2.4.1. Estudios en los que existe una intencionalidad didáctica explícita para el tratamiento de la formulación de problemas matemáticos

2.4.1.1. Modelos de doble ciclo resolución-formulación

2.4.1.2. Formulación directa

2.4.1.3. Modelos de triple ciclo resolución-instrucción-formulación

2.4.2. Estudios en los que no existe una intencionalidad didáctica explícita para el tratamiento de la formulación de problemas matemáticos

2.4.3. Avances, vacíos y tendencias

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan los referentes teóricos vinculados con la FPM empleados durante esta investigación, que han provisto al investigador de la familiaridad necesaria para aproximarse al contenido a investigar.

En el primer bloque, se aborda la noción de problema, partiendo desde las conceptualizaciones de tarea y actividad, ahondando tanto en su naturaleza como en sus características estructurales. Durante este recorrido se analiza críticamente cómo se manifiesta en la propia noción de problema matemático la prevalencia de los procesos de resolución de problemas con respecto a los de formulación, y se finaliza adoptando la noción de problema matemático en el ámbito de la formulación de problemas, desde el contraste con la noción asumida en el ámbito de la resolución de problemas.

En el segundo bloque, se analiza la noción de formulación de problemas matemáticos, profundizando tanto en su naturaleza como en sus características estructurales. Debido a que uno de los retos más importantes que se presentan en el ámbito de investigación sobre la formulación de problemas matemáticos, es la construcción de marco teóricos cohesivos y la estandarización del vocabulario, consideramos la pertinencia de abordar algunos de los hitos que han marcado la evolución y complejidad de dicho constructo. En primer lugar, se profundiza en las conceptualizaciones clásicas (Silver, 1994; Stoyanova y Ellerton, 1996), sobre las que se han edificado la mayoría de las investigaciones sobre formulación de problemas. Se presenta un análisis crítico de dichas aproximaciones, así como, las diferencias y sinergias que emergen entre ambas conceptualizaciones. En segundo lugar, se presentan dos conceptualizaciones actuales (Cai y Hwang, 2020 y 2023; Baumanns y Rott, 2020 y 2022a) que pretenden dar respuesta a las necesidades del ámbito de investigación señaladas. Por último, el análisis de las cuatro aproximaciones señaladas, nos permite adoptar un posicionamiento sobre las características de la formulación de problemas y delimitar qué es una tarea de formulación de problemas.

Finalmente, en el tercer bloque, se recogerán los estudios previos que han investigado la FPM en Educación infantil, con el fin de delimitar el estado actual de la cuestión y justificar la pertinencia del estudio que se presenta en esta tesis.

2.2. ¿Qué es un problema matemático?

Existen muchas aproximaciones a la noción de problema desde distintos ámbitos del conocimiento (Psicología, Computación, Inteligencia Artificial, Matemáticas, Lógica Formal, etc.). Nuestro interés es caracterizar la noción de problema desde el ámbito de la Educación Matemática, y, en concreto, con respecto a los procesos de formulación de problemas. Para caracterizar los procesos inherentes a la formulación de problemas, es necesario partir de una definición que evidencie las características y estructura de los problemas matemáticos. Sin

embargo, tanto en la literatura de investigación en Educación Matemática como en la práctica educativa, el término “problema” se ha utilizado (y se sigue utilizando), para designar un amplio espectro de situaciones, a menudo contradictorias (Schoenfeld, 1985; Baumanns y Rott, 2018). A veces el término se emplea como sinónimo de tarea y, por tanto, se asume que un problema es cualquier tipo de tarea, sin atender que existe un amplio espectro de tareas de naturaleza diferente. En otras ocasiones, el término “problema” se emplea como sinónimo de tarea no rutinaria. Por lo tanto, para definir qué es un problema comenzaremos por conceptualizar la noción de “tarea matemática” en general y, a continuación, destacaremos la perspectiva que se adoptará en esta investigación para conceptualizar la noción de problema matemático.

2.2.1. La noción de tarea matemática

Aunque los términos tarea y actividad a menudo se emplean como sinónimos (Mason y Johnston-Wilder, 2006), su distinción será esencial para introducir la noción de problema matemático. Según Doyle (1986), resulta interesante distinguir cuatro niveles de sucesos en el aula, atendiendo a su estructura organizativa: sesión, lección, tarea y actividad (Figura 1).

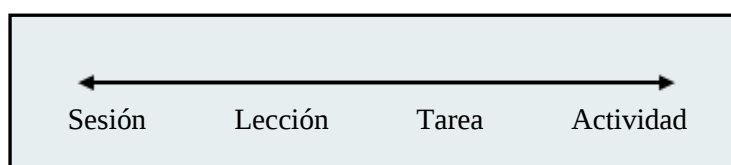


Figura 1. Niveles de actividad en el aula atendiendo a su estructura organizativa

De este modo, los niveles quedan organizados en un espectro, cuyos extremos son: la unidad organizativa más amplia, la sesión, y la unidad organizativa más básica, la actividad. Centrando la atención en las nociones de tarea y actividad, entendemos que una tarea matemática, en un sentido amplio, es cualquier tipo de artefacto/dispositivo (proyectos, preguntas, problemas, construcciones, aplicaciones, ejercicios, etc.) que se ofrece a los estudiantes y que se les incita a realizar, con el objetivo de centrar su atención en una idea matemática específica (Christiansen y Walther, 1986; Stein et al., 1996; Mason y Johnston-Wilder, 2006). Al respecto, Bruder (2000) indica que toda tarea implica una solicitud de acción en el alumnado orientada hacia el aprendizaje, mientras que Leuders (2015) señala que toda tarea se ubica en un marco de aprendizaje y posee un propósito didáctico, por tanto, una misma tarea puede emplearse y optimizarse para diferentes funciones (explorar, sistematizar, practicar, aplicar, comprobar, etc.) y, además puede orientarse para movilizar distintos tipos de conocimiento: actitudinal, procedimental, conceptual o metacognitivo.

Mientras tanto, la actividad, es lo que sucede cuando los estudiantes intentan llevar a cabo su interpretación de la tarea (Christiansen y Walther, 1986; Mason y Johnston-Wilder, 2006). Aunque hay autores (Gómez, 2007) que incluyen al profesor para caracterizar la noción de actividad, en adelante consideraremos que la tarea es dominio de la labor docente, y su propósito

es detonar la actividad del alumnado; mientras que la actividad es dominio del alumnado, e implica todas las acciones que el alumnado pone en marcha con el propósito de afrontar la resolución de la tarea. Dicho de otro modo, el objetivo de la actividad es la resolución de la tarea (Ponte, 2004).

Los distintos intentos de conceptualizar la noción de tarea (Newell y Simon, 1972; Wickelgren, 1974; Doyle, 1988, Bruder, 2000; Leuders, 2015) identifican sistemáticamente tres elementos constitutivos (Figura 2): (1) expresiones dadas (estado inicial), (2) expresiones de objetivo (estado final), y (3) operaciones que transforman el estado inicial en el estado objetivo (operadores). Según Bruder (2000), el estado inicial está conformado por los requisitos previos y la información proporcionada sobre una situación; el estado final está determinado por aquello que se pide que se busque o examine (conclusiones, resultados, demostraciones, etc.); y los operadores son los conocimientos que intervienen o pueden intervenir en la resolución de la tarea (modelos matemáticos, cadenas de evidencias, heurísticos, etc.).

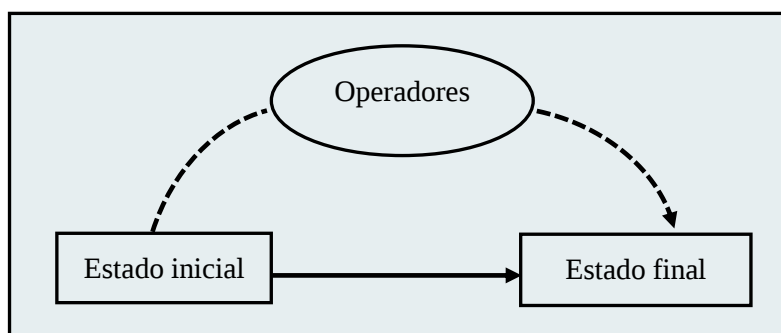


Figura 2. Elementos estructurales de una tarea matemática (Elaboración propia basada en Newell y Simon, 1972; Wickelgren, 1974; Doyle, 1988, Bruder, 2000; Leuders, 2015)

Atendiendo a la información proporcionada en una tarea con respecto a estos tres componentes estructurales, resulta interesante distinguir los siguientes tipos de tareas (Tabla 2).

Tabla 2. Tipos de tareas matemáticas en relación al conocimiento (C) o desconocimiento (D) de sus elementos estructurales: (1) estado inicial, (2) operadores y (3) estado final (Elaboración propia basada en Bruder, 2000; Leuders, 2015)

Tipos de tareas	Estado inicial	Operadores	Estado final
Tarea resuelta (trivial)	C	C	C
Tarea rutinaria	C	C	D
Tarea no rutinaria	C	D	C/D
Tarea invertida	C/D	D	C
Tarea abierta	C/D	D	D

Compartimos con Baumanns y Rott (2020) que esta organización de las tareas en torno al conocimiento o desconocimiento de sus elementos estructurales, permite caracterizar diferentes tipos de tareas con diferentes grados de rutina, conformando un espectro de tareas que van desde las tareas rutinarias hasta las tareas no rutinarias. No cabe duda que la diferenciación entre tareas matemáticas no rutinarias y rutinarias ha sido beneficioso para el avance en la investigación en Educación Matemática (Schoenfeld, 1992), ya que permite considerar las tareas matemáticas como un espectro en el que los dos extremos son claramente reconocibles (Polya, 1954).

Coincidimos con Mason (2016a) que, si asumimos que una tarea, en un contexto concreto y bajo ciertas circunstancias, establece una demanda matemática, y que es la persona que se enfrenta a la tarea, la que experimenta o no la problematización de la tarea (Figura 3), no parece razonable otorgar atributos a las tareas matemáticas:

Aunque las tareas matemáticas escolares suelen ser asociadas a atributos como “real”, “auténtico”, “difícil”, “rutinario”, “abierto”, “cerrado”, “interesante”, etc., consideramos que etiquetar las tareas conduce a una desafortunada transferencia entre los atributos del estado de una persona a los atributos de una tarea (Mason, 2016a: p.276).

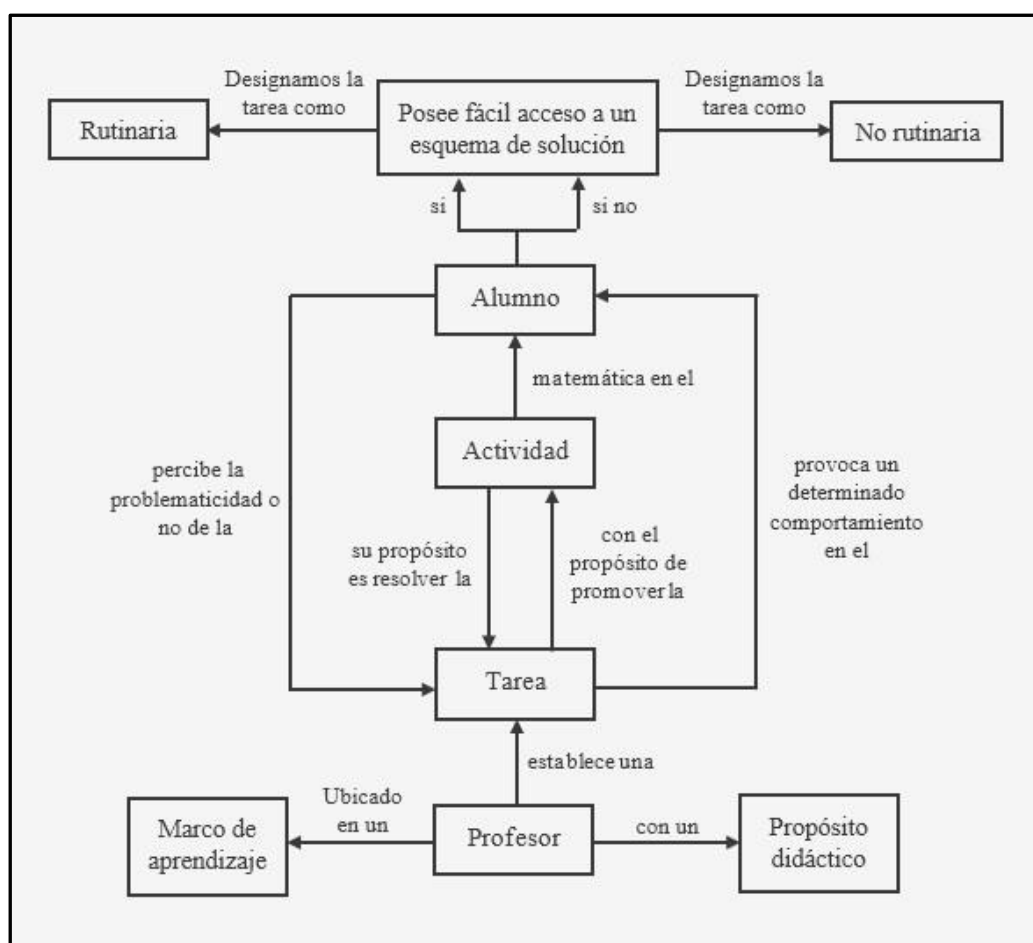


Figura 3. Relación entre tarea, actividad y problematización (Elaboración propia)

Por ello, en adelante, cuando designemos las tareas mediante los adjetivos “trivial”, “rutinaria”, “no rutinaria” y “abierta”, asumimos que esos adjetivos no son estados inherentes a la tarea sino a la persona que trata de resolverla. Por ello, es importante incidir que el elemento clave para discernir si una tarea es rutinaria o no recae sobre el resolutor de la tarea, ya que es una atribución específica del individuo. Si tiene fácil acceso a un esquema de solución, hablaremos de tarea rutinaria, mientras que, si no tiene acceso, hablaremos de tarea no rutinaria (Schoenfeld, 1985).

Las tareas, rutinarias o no, proporcionan entornos intelectuales que posibilitan la movilización del desempeño matemático de los estudiantes, sin embargo, no todas las tareas establecen los mismos tipos de demandas cognitivas, y, por tanto, no inducen el mismo tipo de aprendizaje (Doyle, 1988). Existe un amplio consenso acerca de que las tareas que son percibidas como un desafío (tareas no rutinarias), pueden proporcionar un terreno fértil para que los estudiantes aprendan matemáticas (Cai y Hwang, 2023). Así, por ejemplo, Arbaugh et al. (2010) hablan de “razonamiento esforzado” y Hiebert y Grouws (2007) hablan de “lucha productiva” para hacer hincapié, en que la base para construir la comprensión conceptual y el sentido matemático, subyacen en las oportunidades que proporcionan aquellas tareas que invitan a los estudiantes a enfrentarse a conceptos que, aunque están a su alcance, aún no comprenden con claridad.

La importancia de las tareas desafiantes (no rutinarias) ha sido señalada en distintos documentos curriculares (NCTM, 1991 y 2000) por su valía para promover la comprensión conceptual, el razonamiento y la comunicación matemática.

2.2.2. La noción de problema matemático

Una vez establecida la distinción entre tarea y actividad (Figura 3), procedemos a definir la noción de problema. Definir la noción de problema matemático implica cierta dificultad. Según Schoenfeld (1985) la dificultad radica en que el término problema es relativo, e incide en que un problema no es inherente a una tarea matemática, sino que más bien es una relación particular entre un sujeto y la tarea (Mason, 2016a), y precisa que un problema es una tarea cuya resolución implica dificultad al sujeto. Charnay (2002) caracteriza la noción de problema como una terna situación-alumno-entorno y añade tres características esenciales de los problemas: (a) sólo hay problema si el sujeto percibe una dificultad, (b) existe una motivación que impulsa a franquear la dificultad, percibiendo el problema como un desafío intelectual propio, (c) una situación puede constituir un problema para un sujeto y no ser percibida como un problema por otro sujeto que o bien puede resolver la situación inmediatamente o no sentirlo como un desafío intelectual propio. A las características anteriores Resnick (1987) y Resnick y Ford (1990) añaden que con frecuencia dan lugar a caminos de resolución distintos y soluciones múltiples, y en cada uno de los casos con costos y beneficios distintos. También señalan que su resolución requiere un trabajo cognitivo intenso y mecanismos propios de regulación.

El interés por caracterizar la estructura de los problemas ha sido manifiesto desde diferentes ámbitos del conocimiento. Los esfuerzos, en general, han sido dirigidos a diferenciar los distintos problemas atendiendo a su estructura y a las condiciones dadas, que determinan cómo se resuelve el problema. Entre las más destacadas, señalamos la categorización de Reitman (1964 y 1965), desde el ámbito de la psicología (composición musical), o la de Simon (1973), desde el ámbito de la inteligencia artificial.

Según Simon (1973) resulta interesante distinguir entre dos tipos de problemas atendiendo a su estructuración: problemas bien estructurados y mal estructurados. Señala que un problema está bien estructurado cuando la información necesaria para resolver el problema está contenida en su enunciado, las reglas para encontrar una solución correcta son claras y tiene criterios definidos para una solución. Declara que dichos problemas son los que normalmente se encuentran en la escuela o en los libros de texto. Por el contrario, afirma que un problema mal estructurado puede poseer información innecesaria, no contener la información necesaria para su resolución o puede contener información extraña o contradictoria. Así, por ejemplo, un problema puede carecer de información suficiente para producir una solución única. Los problemas mal estructurados se asemejan más a los problemas que se encuentran en la vida cotidiana, como pedir un préstamo o estimar la pintura que se va a comprar para pintar una casa (Kilpatrick, 1987).

La clasificación dicotómica de Simon (1973) atendiendo a la estructuración de los problemas, ha sido útil para evidenciar que las decisiones y procesos empleados por el resolutor cambian notablemente dependiendo de que el problema esté bien o mal estructurado (Kilpatrick, 1987), aunque según Fredericksen (1984) esta categorización es demasiado simple para captar las variaciones en la estructura del problema, y distingue tres categorías de problemas: (a) problemas bien estructurados, claramente formulados que pueden resolverse mediante el empleo de un algoritmo conocido, teniendo disponibles criterios para comprobar la corrección de la solución, (b) problemas bien estructurados que requieren un pensamiento productivo, es decir, el resolutor debe idear todos o parte de los procedimientos que conducen a la solución, y (c) problemas mal estructurados, que carecen de una formulación clara, de un procedimiento que garantice una solución y criterios para determinar cuándo se ha logrado la solución.

Por otro lado, Reitman (1965), en un estudio sobre composición musical, planteó categorías de problemas atendiendo a lo bien o mal que estuvieran definidas las componentes del problema, estado inicial y estado final u objetivo. El estado inicial está determinado por la situación en la que se encuentra el sujeto en el momento de enfrentar la resolución/formulación: conocimientos sobre el problema, actitudes, motivaciones, habilidades, etc. Mientras que el estado final, está determinado por el objetivo o meta que se precisa alcanzar. Reitman (1965) conformó cuatro categorías de situaciones problemas, que emergen de conjugar los dos estados (inicial y objetivo) con dos valores (definido e indefinido): Estado inicial y objetivo bien definidos (1), estado inicial bien definido y objetivo indefinido (2), estado inicial indefinido y objetivo

definido (3) y estado inicial y objetivo mal definido (4). El término “bien definido” se emplea para referirse a situaciones en las que existe un consenso sobre el objetivo, es decir, el problema se considera resuelto cuando se alcanza dicho objetivo. El término “indefinido” se emplea para referirse a dos situaciones, cuando la definición de los objetivos forma parte del problema, es decir, cuando no existe un consenso sobre el objetivo, y por tanto no se puede determinar un solo objetivo. La segunda situación tiene lugar cuando el estado inicial y/o el objetivo están mal definidos o especificados (Noda, 2000).

Desde las nociones asumidas de tarea y problema, un problema es una subcategoría de la categoría tarea; por tanto, hablar de las componentes estructurales de un problema es lo mismo que hablar de las componentes estructurales de una tarea. Desde el ámbito de la Educación Matemática, según Baumanns y Rott (2020) los distintos intentos por conceptualizar la noción de problema identifican consistentemente tres componentes inherentes a su estructura: expresiones dadas (estado inicial), expresiones de meta o resultado deseado (estado final o de meta), y operaciones que transforman el estado inicial en el estado final o de meta (operadores). Estas componentes ya han sido definidas (Doyle, 1988, Bruder, 2000; Leuders, 2015) cuando se abordó la noción de tarea (Figura 2).

Por otro lado, Malaspina (2021) señala que todo problema matemático posee cuatro elementos estructurales: información, requerimiento, contexto y entorno matemático. La información está conformada por los datos provistos cuantitativos o cualitativos que se dan explícita o implícitamente en el problema (Malaspina y Torres, 2019). El requerimiento, generalmente expresado a través de una pregunta, que determina lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones (Malaspina y Torres, 2019). El contexto puede ser intra-matemático, y por tanto circunscrito a lo matemático, o extra-matemático, y por tanto vinculado a una situación real (Malaspina y Torres, 2019, Malaspina, 2015 y 2021), realista (Skovsmose, 2000) o de fantasía. El contexto será intra-matemático, cuando haga referencia exclusivamente a objetos matemáticos. El contexto será real si se produce en la realidad y compromete al alumno a actuar. El contexto será realista, cuando sea susceptible de producirse realmente, pudiendo ser una simulación de la realidad o de una parte de ella. El contexto será fantástico cuando sea fruto de la imaginación y carezca de fundamento en la realidad. El entorno matemático es entendido como el marco matemático global en el que se ubican los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema (Malaspina y Torres, 2019, y Malaspina, 2015 y 2021).

A pesar de que la designación de los elementos estructurales de un problema sea distinta, no apreciamos ninguna diferencia entre la aproximación de Baumanns y Rott (2020) y Malaspina (2021), salvo la consideración del contexto por parte del segundo autor. En adelante, emplearemos la terminología de Malaspina (2021) para hacer referencia a los elementos estructurales de un problema matemático (Figura 4).

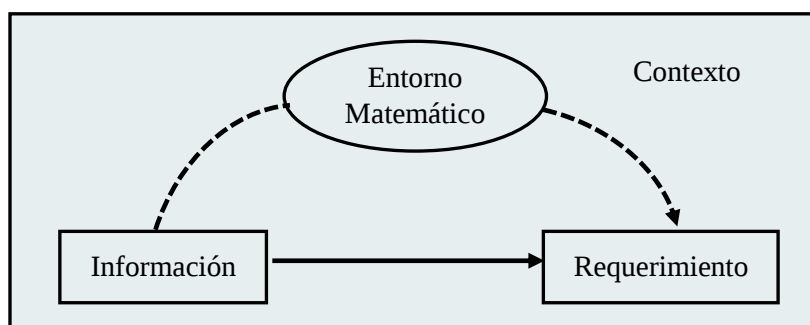


Figura 4. Elementos estructurales de un problema matemático (Malaspina, 2021)

En general, en Educación Matemática, el esfuerzo de categorizar la noción de problema ha sido dirigido a segmentar el espectro que va desde el ejercicio hasta las situaciones-problema (Butts, 1980; Borasi, 1986; Noda et al., 1999).

Dada la prevalencia de la resolución de problemas respecto a la formulación de problemas tanto en el ámbito investigativo como en el ámbito educativo (Carrillo y Cruz, 2016) (currículo, planes de estudio, instrucción en aula, etc.), la mayoría de las características que se emplean para definir y caracterizar la noción de problema matemático aluden a aspectos inherentes a su resolución (Butts, 1980; Schoenfeld, 1985; Charnay, 2002; Resnick, 1987; Resnick y Ford, 1990; Simon 1973). Aunque la noción de problema se sigue empleando para designar una variedad de significados (Schoenfeld, 1992), los estudios recientes cuando aluden a problemas matemáticos lo hacen para designar problemas no rutinarios (Baumanns y Rott, 2020). En adelante, cuando empleemos la noción de problema matemático en un contexto de resolución de problemas, aludiremos a problemas no rutinarios, asumiendo que un problema matemático no queda configurado por una tarea, sino por una relación que se establece entre el sujeto y la tarea (Mason, 2016b), que implica una confrontación cognitiva, que es percibida como un reto intelectual que requiere autorregulación, y para la que no se dispone de procedimientos inmediatos que permitan su resolución (Schoenfeld, 1985; Charnay, 2002; Resnick, 1987; Resnick y Ford, 1990; Simon 1973, Baumanns y Rott, 2020).

Dado que nuestro interés radica en la formulación de problemas y no en la resolución, nos apoyaremos en la noción de tarea asumida, para evidenciar qué entendemos por problema en el contexto de formulación. Al contrario que en la resolución de problemas, según Baumanns y Rott (2020) la noción de problema en el contexto de formulación de problemas se refiere a cualquier tipo de tarea matemática. En adelante, cuando empleemos la noción de problema matemático en un contexto de formulación de problemas, aludiremos a todo tipo de tareas con diferentes grados de rutina (Noda et al., 1999; Cai y Hwang, 2020; Baumanns y Rott, 2020), entendiendo que la distinción entre tarea rutinaria y no rutinaria es relativa a la relación que establece el sujeto con la tarea (Mason, 2016b) (es decir, una tarea puede ser un problema rutinario para una persona y no serlo para otra persona que no conoce un esquema de solución adecuado (Schoenfeld, 1985; Rott, 2014; Baumanns y Rott, 2020).

2.3. La naturaleza de la formulación de problemas matemáticos

A la actividad de formular problemas matemáticos se la designa empleando distintos términos, como búsqueda de problemas (problem finding), detección de problemas (problem sensing), descubrimiento de problemas (problem discovering), creación de problemas (problem creating), problematización (problematizing), invención de problemas (problem inventing), etc. (Singer y Voica, 2015). Entre todas ellas, las más usadas en la literatura de investigación en Educación Matemática son formulación de problemas (problem formulation) (Kilpatrick, 1987), planteamiento de problemas (problem posing) (Brown y Walter, 1990) y generación de problemas (problem generation) (Silver, 1994). En el presente trabajo emplearemos el término de Kilpatrick.

La literatura de investigación en Educación Matemática muestra que, al igual que existen diversas denominaciones, también existen una gran variedad de definiciones y puntos de vista sobre la formulación de problemas (Duncker, 1945; Dillon, 1982; Kilpatrick, 1987; Brown y Walter, 1990; Mamona-Downs, 1993; Shukkwon, 1993; Leung 1994; Silver, 1994; Stoyanova y Ellerton 1996; Christou et al., 2005; Pelczer et al., 2008; Koichu y Kontorovich, 2013; Baumanns y Rott, 2022; Cai, 2022). A pesar de que existen numerosas definiciones sobre la formulación de problemas (Cai y Hwang 2020; Baumanns y Rott, 2022b), para caracterizar dicha actividad hay dos cuestiones fundamentales: quién formula los problemas y con qué propósito (Kilpatrick, 1987; Silver, 2013). Con respecto a quién formula los problemas, compartimos con Cai et al. (2019), que en la actividad de formulación de problemas pueden participar profesores, profesores y alumnos o sólo los alumnos a instancias de su profesor.

Dado que la investigación sobre esta área en Educación Matemática se ha edificado esencialmente sobre dos definiciones clásicas, la conceptualización de Silver (1994) y la de Stoyanova y Ellerton (1996), a las que se hace referencia en la mayoría de estudios sobre el tema, comenzaremos la conceptualización de la formulación de problemas ahondando en ambas.

2.3.1. Generar y reformular problemas

Silver (1994) conceptualiza la formulación de problemas como la actividad de generar nuevos problemas y reformular problemas dados que, en consecuencia, puede ocurrir antes, durante o después de un proceso de resolución de problemas. Leung (2013) añade tres características inherentes a la formulación de problemas matemáticos en el sentido de Silver (1994): (1) es un proceso idiosincrático, (2) es un procedimiento de razonamiento plausible, y, por último, (3) un problema formulado que aún no está resuelto puede estar insuficientemente especificado o incluso no tener solución.

La caracterización de Silver (1994) se organiza en torno a dos interrogantes, cómo se formulan los problemas y cuándo se formulan. Atendiendo a cómo se origina su construcción, resulta

interesante distinguir dos procesos, la formulación problemas a partir de una situación dada, que en adelante denominaremos generación de problemas, y la formulación de problemas matemáticos a partir de un problema conocido, que en adelante denominaremos reformulación de problemas (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; Silver y Cai, 1996; English, 1997). Tomando como referencia el momento temporal en el que se produce la formulación y su relación con la resolución del problema, resulta interesante distinguir tres situaciones significativas, que implican distintas actividades cognitivas: cuando la formulación de problemas acontece antes de la resolución del problema, cuando tiene lugar durante la resolución del problema y, cuando ocurre después de resolver el problema (Silver, 1994; Leung, 2013).

En los procesos de generación de problemas, es decir, cuando la formulación de problemas se produce a partir de una situación dada, la formulación del problema tiene lugar antes de la resolución del problema, en tal caso el objetivo pretendido no es la resolución del problema, sino la propia formulación del problema (Silver, 1994). Los problemas emergen de la exploración de la situación, a la que se le da una formulación matemática (Kilpatrick, 1987). El detonante es una situación determinada de naturaleza artificial, realista o real, como, por ejemplo, la presentación de un hecho real o figurado (Silver, 1994, Malaspina, 2021), una situación cotidiana (Kilpatrick, 1987), como, por ejemplo, una situación de compra-venta (Castro, 2011), o la modelización matemática de una situación proporcionada por el profesor (Kilpatrick, 1987). Por tanto, el contexto viene determinado por dicha situación (Malaspina, 2013a, 2016a y 2021; Malaspina y Vallejo, 2014). La información empleada se obtiene mediante la selección o modificación de la información percibida en la situación dada (Malaspina, 2013a, 2016 y 2021; Malaspina y Vallejo, 2014), siendo, por tanto, el sujeto que formula el problema un proveedor de información (Leung, 2013). El requerimiento es una consecuencia de relaciones lógicas y matemáticas establecidas o encontradas entre los elementos de la información especificada, que están implícitas en el enunciado, dentro de un cierto entorno matemático (Malaspina, 2013a, 2016 y 2021; Malaspina y Vallejo, 2014). El entorno matemático, en contextos educativos, estará en estrecha relación con los conocimientos que se pretenden movilizar, que en función del propósito didáctico podrá estar vinculado con conocimientos que ya han sido tratados previamente o no.

Cuando la formulación de problemas se produce a partir de un problema conocido, los problemas matemáticos se convierten en la fuente de nuevos problemas (Kilpatrick, 1987). En tal caso, el problema matemático se construye mediante la reformulación del problema original, modificando al menos uno de los cuatro elementos fundamentales de un problema: información, requerimiento, contexto y entorno matemático (Malaspina, 2013a y 2013b). Los procesos de reformulación de problemas están estrechamente relacionados con la resolución de problemas (Kilpatrick, 1987; Mason, 2016a) y pueden acontecer en dos momentos clave, durante el proceso de resolución, donde la reformulación del problema puede convertirse en un trampolín hacia la solución del problema, y una vez que el problema está resuelto, donde el problema

reformulado puede convertirse en un problema de considerable interés (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994).

Cuando la formulación del problema matemático tiene lugar durante la resolución del problema la formulación se pone al servicio de la resolución del problema (Kilpatrick, 1987; Silver et al., 1996). Es decir, a medida que el resolutor implementa estrategias para su resolución, puede ocurrir que no sepa proceder o que lo haya resuelto de manera incompleta o incorrecta, entonces la reformulación se emplea como un recurso para hacer más accesible la solución del problema o llevarlo a una mejor solución (Kilpatrick, 1987), tal como sugiere la fase de Polya (1989) “Idear un plan” o la fase de “Exploración” de Schoenfeld (1985). La pregunta operativa que estimula la formulación del problema es ¿cómo puede formular este problema para que pueda ser resuelto? (Silver, 1994). Puede implicar la reformulación personalizada del enunciado (como, por ejemplo, eliminar datos o elementos del contexto innecesarios). También puede implicar la búsqueda de problemas secundarios en el sentido del consejo heurístico de Polya (1989) en el que se trata de transformar la estructura del problema original con la intención de obtener problemas más accesibles y comprender mejor el problema para buscar su solución (Kilpatrick, 1987; Espinoza et al., 2014). De este modo, los problemas más simples conformados mediante la reformulación del problema original, variando alguna o todas las condiciones del problema para estudiar un caso particular o modificando el tamaño de los números, se convierten en peldaños que favorecen la solución final (Kilpatrick, 1987).

Este proceso de reformulación de problemas matemáticos coincide con la visión de Kilpatrick (1987) y Duncker (1945). El primero afirma que todos los problemas matemáticos se reformulan continuamente a medida que están siendo resueltos, mientras que el segundo va más allá e incide en que la resolución de problemas consiste en la reformulación sucesiva de un problema inicial. Según los estudios de psicología cognitiva sobre la resolución de problemas, un problema matemático se resuelve estableciendo una serie de sucesivas representaciones del problema cada vez más refinadas, que incorporan relaciones entre la información dada y el objetivo deseado, y en el que se agrega nueva información (Silver, 1994). En este sentido Davis (1985) añade que la “formulación de problemas y la solución del problema van de la mano, cada uno provocando al otro a medida que avanza la investigación” (p. 23).

Cuando la formulación del problema matemático tiene lugar después de la resolución del problema, la solución o el problema en sí mismo pueden sugerir nuevos problemas (Kilpatrick, 1987). Tanto Polya (1989) como Brown y Walter (1993 y 2005) y Silver et al. (1996) han estudiado formas en las que los problemas resueltos pueden actuar de detonante para construir nuevos problemas. El proceso de reformulación se asocia con la fase “mirar hacia atrás” de Polya (1989), donde el resolutor puede mirar hacia atrás y examinar las condiciones del problema y efectuar modificaciones para generar problemas alternativos relacionados (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; Malaspina, 2013a). Brown y Walter (1993 y 2005) han documentado extensamente acerca de cómo reformular nuevos problemas, mediante la

modificación de las condiciones y restricciones del problema matemático resuelto, empleando la estrategia ¿Qué pasaría si no...? La estrategia consta de tres niveles, en el primer nivel hay que enumerar todos los atributos incluidos en el enunciado del problema (datos y pregunta), en el segundo nivel hay que negar cada uno de los atributos enumerados preguntando “¿qué pasaría si no es el atributo x?” y elaborar una lista de alternativas a cada uno de los atributos negados. Por último, en el tercer nivel, se plantean nuevos problemas y preguntas inspiradas en cada una de las alternativas y, para ello, es necesario preguntarse si es un problema matemático válido y si se puede resolver o no (Lavy y Bershadsky, 2003; Lavy y Shriki, 2010).

Por último, Silver et al. (1996) sugieren cuatro estrategias que permiten reformular problemas mediante la modificación de las variables estructurales del problema: (1) modificación de la información, (2) modificación del requerimiento, (3) simetría (intercambio simétrico entre la información y el requerimiento) y (4) encadenamiento (expandir un problema existente, para que la solución al nuevo problema exija resolver primero el problema inicial). La pregunta operativa que impulsa este tipo de formulación de problemas es: ¿Qué nuevos problemas interesantes se pueden formular modificando las condiciones de este problema? (Silver, 1994).

La conceptualización de Silver (1994) nos ha permitido categorizar los procesos de formulación de problemas atendiendo a cómo se origina la formulación, y cuándo acontece con respecto a la resolución del problema, y además explicitar el propósito y la pregunta operativa que orienta la formulación (Tabla 3).

Tabla 3. Los procesos de formulación de problemas (Elaboración propia basada en Silver (1994))

Tipos de tareas	Detonante	Momento temporal	Propósito	Pregunta operativa
Generación de problemas	Situación dada	Antes	Formular un problema	¿Qué problemas interesantes se pueden genera empleando la información proporcionada?
Reformulación de problemas	Problema conocido	Durante	Resolver un problema	¿Cómo se puede reformular este problema para que pueda ser resuelto?
		Después	Formular un problema	¿Qué nuevos problemas interesantes se pueden formular modificando las condiciones de este problema?

Compartimos con Baumanns y Rott (2020), la importancia de resaltar que, en cada uno de estos casos, la formulación de problemas siempre requiere desarrollar un problema que exige una solución.

2.3.2. Niveles de estructuración de las tareas de formulación de problemas

En cuanto a la segunda definición, Stoyanova y Ellerton (1996) se refieren al planteamiento de problemas como el "proceso por el cual, basándose en la experiencia matemática, los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos significativos" (p. 518). Según Stoyanova (1998), el término "situación" en la definición se emplea como sinónimo de problema no estructurado, en el sentido de que el estado final no está bien definido (Reitman, 1965).

En primer lugar, la definición establece que la actividad de formular problemas es patrimonio exclusivo del alumnado, sin hacer referencia alguna al profesorado. Atendiendo a la diversidad de actividades centradas en el profesor, que actualmente se asumen bajo el marco de la formulación de problemas, podemos afirmar que dicha definición no tiene un carácter inclusivo.

En segundo lugar, la definición señala que la formulación de problemas siempre requiere desarrollar un problema que exige una solución. Sin embargo, la falta de precisión acerca de qué es un problema matemático genera cierta ambigüedad en la definición; uno tiene que decidir en qué sentido el producto generado por el alumnado es un problema y para quién. Así pues, si empleamos la noción de problema extendida en el ámbito de la resolución de problemas (problema no rutinario), la definición de Stoyanova y Ellerton (1996) podría interpretarse de tres formas, atendiendo a quién atribuye el estatus de problema: (1) Los estudiantes formulan problemas matemáticos cuando construyen un problema no rutinario, es decir, cuando el propio formulador no tiene acceso a un esquema de solución fácil (Schoenfeld, 1985). (2) Los estudiantes formulan problemas matemáticos cuando construyen un problema no rutinario a juicio del profesor. (3) Los estudiantes formulan problemas matemáticos cuando construyen un problema no rutinario para otros alumnos. Si, por el contrario, empleamos una noción de problema más amplia, sinónima de tarea, incluida en el espectro rutinaria-no rutinaria, la ambigüedad con respecto a quién valora si el producto final es o no un problema desaparece, y la definición de Stoyanova y Ellerton (1996) podría interpretarse como: (4) Los estudiantes formulan problemas matemáticos cuando construyen tareas matemáticas contenidas en el espectro rutinario-no rutinario.

En tercer lugar, compartimos con Koichu y Kontorovich (2013) y Klinshtern et al. (2015), que el descriptor "significativo" empleado en la definición amplifica el grado de ambigüedad, y dificulta la operatividad para identificar si la formulación de un problema constituye una actividad de formulación de problemas. Al respecto, Voica et al. (2013) señalan, que el carácter subjetivo de la definición es evidente, ya que, en la interpretación de la definición, es el lector el que debe decidir en qué sentido el problema es significativo y para quién.

Atendiendo al nivel de estructuración de la propia tarea en la que se propone la formulación de problemas y, por tanto, al nivel de apertura que esta tarea otorga al formulador, Stoyanova y Ellerton (1996) y Stoyanova, (1998) distinguen tres tipos de estructuras que permiten promover

la formulación de problemas: libre, semiestructurada y estructurada. La caracterización de Stoyanova y Ellerton (1996) hace hincapié en la relación entre quién formula el problema y el grado de estructuración de la tarea, organizando las tareas de formulación en un espectro con dos extremos: libre (tareas abiertas) y estructurado (tareas cerradas), en las que tanto las restricciones como la información suministrada se incrementan (Figura 5).

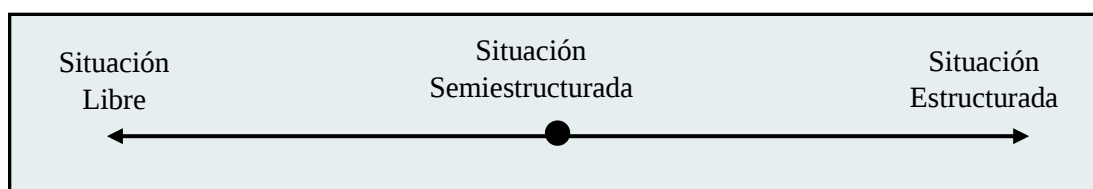


Figura 5. Caracterización de las tareas de formulación de problemas según Stoyanova y Ellerton (1996)

La tarea es libre cuando se pide a los estudiantes que formulen problemas a partir de una situación abierta (Silber y Cai, 2016), naturalista o construida, sin que exista ninguna condición o restricción para formular el problema (Stoyanova 2003; English y Watson, 2015; Baumanns y Rott, 2018). A continuación, se muestran ejemplos de tareas libres que han sido recogidos en la literatura de investigación (Tabla 4).

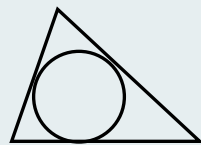
Tabla 4. Ejemplo relativos a las tareas de formulación de problemas libres según sus autores (Elaboración propia)

Tareas Libres
(1) Escribe (o cuéntame) un problema de matemáticas que te gustaría resolver (Lowrie, 2002, p. 91).
(2) Inventa algunos problemas relacionados con el triángulo rectángulo (van Harper y Sriraman, 2013, p. 205).
(3) Considera el enunciado $x + 3 = 5$. Inventa un problema que pueda resolverse utilizando dicha afirmación (Cañadas et al., 2018, p. 5).
(4) Hay 10 chicas y 10 chicos en fila. Inventa tantos problemas como pueda que utilicen la información de alguna manera (van Harper y Presmeg, 2013, p. 3).
(5) Inventa un problema difícil (Bonotto, 2013, p. 39).
(6) Escribe problemas para que los resuelvan tus amigos (Lowrie, 1999, p.330)

La tarea es semiestructurada cuando se proporciona información más detallada que en las tareas libres, y se invita a los estudiantes a formular problemas, en base a la información que suministra la situación dada, empleando conocimientos, habilidades, conceptos y relaciones matemáticas que han aprendido previamente (Stoyanova, 2003; Yuan y Sriraman, 2011;

Baumanns y Rott, 2022b). A continuación, se muestran ejemplos de tareas semiestructuradas que han sido recogidos en la literatura de investigación (Tabla 5).

Tabla 5. Ejemplo relativos a las tareas de formulación de problemas semiestructuradas según sus autores (Elaboración propia)

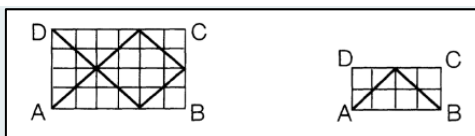
Tareas Semiestructuradas	
(1) Sally celebra una fiesta. La primera vez que suena el timbre, entra un invitado. La segunda vez que suena el timbre, entran tres invitados. La tercera vez que suena el timbre, entran cinco invitados. La cuarta vez que suena el timbre, entran siete invitados. Continúa de la misma manera. En el siguiente timbre, entra un grupo que tiene dos personas más que el grupo que entró en el timbre anterior. Escribe un problema fácil, un problema moderadamente difícil y un problema difícil utilizando la información de la situación (Singer et al., 2011, pág.157).	
(2) Plantea un problema a la siguiente situación: Un trozo de tarta se corta en 8 partes iguales. Wah comió $\frac{4}{8}$ pedazos, Ming comió $\frac{2}{8}$ pedazos, Kong comió $\frac{2}{8}$ pedazos (Leung, 2013, pág. 108).	
(3) Considera el enunciado $x + 3 = 5$. Inventa un problema en el que se relacionen las edades de distintas personas (Cañadas et al., 2018, pág. 5).	
(4) En la siguiente imagen (Fig. 1), hay un triángulo y su circunferencia inscrita. Inventa tantos problemas como pueda que estén relacionados de alguna manera con esta imagen. (van Harper y Presmeg, 2013, pág. 3)	

La tarea es estructurada cuando se pide a los estudiantes que formulen problemas a partir de un problema previamente resuelto, mediante la modificación de alguno de sus elementos estructurales (información, contexto, requerimiento o entorno matemático) (Stoyanova 2003; van Harpen y Presmeg, 2013; Bonotto y Dal Santo, 2015). A continuación, se muestran ejemplos de tareas semiestructuradas que han sido recogidos en la literatura de investigación (Tabla 6).

Tabla 6. Ejemplo relativos a las tareas de formulación de problemas estructuradas según sus autores (Elaboración propia)

Tareas Estructuradas
(1) Imagina unas mesas de bolas de billar como las que se muestran a continuación. Supongamos que se lanza una bola con un ángulo de 45° desde la esquina inferior izquierda (A) de la Mesa. Cuando la bola golpea un lado de la Mesa, rebota con un ángulo de 45° . En la Mesa 1, la bola viaja en una Mesa de 4×6 y termina en la tronera B, después de 3 impactos en los lados. En la Tabla 2, la bola se desplaza sobre una Mesa de 2×4 y termina en la tronera B, después de 1 golpe en el costado. En cada una de las figuras que se muestran a continuación, la bola golpea los lados varias veces y finalmente cae en una tronera de esquina.

Tareas Estructuradas



Basándose en la situación dada, plantee tantos problemas matemáticos interesantes como pueda. (Koichu y Kontorovich, 2013, pág. 72)

(2) Considera que la edad de dos hermanos tiene una diferencia de 3 años, donde el hermano mayor tiene 5 sería $x + 3 = 5$. Haz todas las preguntas que puedas que estén relacionadas de alguna manera con este problema (Cañadas et al., 2018, pág. 5).

La caracterización de Stoyanova y Ellerton (1996) nos ha permitido categorizar los procesos de formulación de problemas atendiendo al grado de estructuración de las tareas. A continuación (Tabla 7), se sintetizan los elementos más importantes.

Tabla 7. Los procesos de formulación de problemas (Elaboración propia según Stoyanova y Ellerton (1996))

Tipos de tareas	Detonante	Grado de estructura	Pregunta operativa
Libres	Situación dada	No existe ninguna condición o restricción para formular el problema	¿Qué problemas interesantes se pueden generar empleando la información proporcionada?
Semiestructuradas		El problema se formula en base a la información suministrada	
Estructuradas	Problema conocido	El problema se formula mediante la variación de alguno de los elementos estructurales de un problema previamente resuelto	¿Qué nuevos problemas interesantes se pueden formular modificando las condiciones de este problema?

Debido a que tanto las tareas libres como las semiestructuradas se originan a partir de una situación dada, los elementos estructurales del problema se revelan de forma similar a la generación de problemas de Silver (1994). El contexto viene determinado por la situación, cuya naturaleza puede ser matemática, realista o real; la información empleada se obtiene mediante la selección o modificación percibida en la situación dada y el requerimiento está implícito en el enunciado. La única diferencia reseñable acontece, ante la elaboración libre de problemas, ya que el entorno matemático es impredecible (Malaspina, 2021), en cualquier caso, estará en

estrecha relación con los conocimientos previos del alumnado. De igual modo, la similitud existente entre las tareas estructuradas y la reformulación de problemas que acontece después de la resolución de un problema (Silver, 1994), implica que los elementos estructurales del problema se revelan de forma similar en ambos casos.

No hay duda de que el marco de Stoyanova y Ellerton (1996) ha supuesto una contribución valiosa para el avance en la comprensión de la formulación de problemas en Educación Matemática y, aunque compartimos con English y Watson (2015) que los supuestos centrales del marco de Stoyanova y Ellerton (1996) siguen siendo pertinentes, consideramos que la organización de las tareas que proporciona (libre, semiestructurada y estructurada), es más rica que la propia definición de formulación de problemas (Kontorovich et al., 2012). Actualmente se requiere una definición que sea más inclusiva y, que además aporte unos criterios más objetivos que permitan estandarizar cuáles son las actividades que se enmarcan bajo la designación de “formulación de problemas”.

2.3.3. Caracterización de las tareas de formulación de problemas

El interés por la investigación sobre la formulación de problemas matemáticos en Educación Matemática ha crecido de manera considerable en los últimos años (Cai y Hwang, 2020). Fruto de este interés han surgido numerosos estudios y, junto a ellos han aflorado distintas perspectivas sobre la formulación de problemas. En la actualidad, el ámbito de investigación sobre FPM en Educación Matemática sigue siendo muy diverso y carece de estructura (Singer et al., 2013; Baumanns y Rott, 2018; Cai et al., 2015). Según Baumanns y Rott (2018), un ejemplo de esta falta de estructura se evidencia a través de la propia definición de la noción de “formulación de problemas”. La comparación entre las diversas situaciones que se categorizan como formulación de problemas, revela que dicho término se emplea para una variedad de situaciones que poseen características diferentes. Tanto las revisiones bibliográficas realizadas por Baumanns y Rott (2018 y 2020) y Cai et al. (2015), como en el estudio de Cai y Hwang (2020), evidencian que el término “planteamiento o formulación de problemas” se emplea para denominar situaciones distintas que difieren sustancialmente entre sí, e incluso se emplean para denominar situaciones en la que es discutible que provoquen una actividad de formulación de problemas.

La acumulación de investigaciones sobre la formulación de problemas ha permitido un indudable crecimiento del ámbito, esencialmente sobre una serie de resultados empíricos (Cai y Hwang, 2020). Sin embargo, la diversidad de perspectivas empleadas, en cuanto a forma, contexto y participantes, está generando la necesidad de construir marcos teóricos cohesivos que permitan comprender el fenómeno general de la formulación de problemas (Cai et al., 2015; Ellerton et al., 2015). En este sentido Silver (2013) afirmó:

¿Ha llegado el momento de que el campo haga distinciones más nítidas entre las diversas manifestaciones de la formulación de problemas como fenómeno? ¿En qué

medida es la actividad de plantear problemas que hace un profesor para proporcionar una tarea apropiada a sus alumnos similar o diferente de la actividad de planteamiento de problemas que hace un profesor cuando se plantea problemas a sí mismo, o la actividad de planteamiento de problemas cuando sus alumnos plantean problemas a sus compañeros? (pág. 159)

Existe una clara necesidad de contribuir a una construcción teórica más sólida, ya que como advierte Ruthven (2020), la falta de definición del término “formulación de problemas”, podría convertirse en un obstáculo para el ámbito de investigación, y subraya que el término “formulación de problemas” puede llegar a ser “tan difuso que socave su poder analítico y lo reduzca a un signo efímero” (pág.6).

Según Cai et al. (2015), el ámbito de investigación está maduro para el desarrollo de marcos teóricos integradores que puedan organizar y dar sentido a los diversos estudios empíricos. Por tanto, el reto actual subyace en el desarrollo de marcos teóricos apropiados que ayuden al análisis e interpretación de los distintos modelos de formulación de problemas y que sirvan de guía para poder adaptar y aplicar los diferentes modelos en una amplia gama de contextos (Ellerton et al., 2015; Silver, 2013; Cai et al., 2015, Singer et al., 2013).

Según Cai et al. (2015), esto no implica necesariamente un llamado a la construcción de una única teoría general sobre la formulación de problemas, dado que el interés de los investigadores se ha dirigido hacia muchas formas potencialmente distintas de formular problemas. Es posible que sean necesarios múltiples marcos para comprender la formulación de problemas en todos sus aspectos.

A continuación, se presentan dos marcos conceptuales que pretenden satisfacer las necesidades teóricas del campo de investigación.

2.3.3.1. Elementos estructurales de las tareas: Situación problemática y prompt

La definición de Cai et al. (2019) y Cai y Hwang (2020) enfatiza que la actividad de formulación de problemas también es un aspecto crítico del trabajo de los docentes (Cai et al., 2015, Peng et al., 2022) y caracteriza la formulación de problemas en los profesores, a través de tres actividades propias del aula:

Nos referimos a las tareas de formulación de problemas en Educación matemática, como aquellas que requieren que los profesores o los alumnos generen y expresen nuevos problemas y preguntas a partir de situaciones problemáticas dadas, que pueden incluir expresiones o diagramas matemáticos (Cai et al., 2019, p. 2).

El primer aspecto destacable de la definición de Cai et al. (2019) y Cai y Hwang (2020) subyace en la inclusión tanto de los alumnos como de los profesores como formuladores de problemas. El segundo aspecto interesante está vinculado a la caracterización de la tarea atendiendo a la

naturaleza de la información suministrada (situaciones dadas, expresiones y diagramas matemáticos).

Dentro del marco de definición establecido por Cai et al. (2019) y Cai y Hwang (2020) se señala que las actividades de formulación de problemas por parte de los profesores y alumnos poseen una naturaleza distinta, tanto en su intención como en su ejecución, y añaden una definición específica separando la actividad de formulación en profesores y alumnos:

En el caso de los estudiantes, definimos la formulación de problemas matemáticos como la realización de las siguientes actividades intelectuales específicas: (a) Los estudiantes plantean problemas matemáticos a partir de situaciones problemáticas dadas que pueden incluir expresiones matemáticas o diagramas. (b) los alumnos plantean problemas modificando (es decir, reformulando) problemas existentes (Cai y Hwang, 2020, p. 3).

Esta primera parte de la definición de la actividad de formulación problemas centrada en el alumnado de Cai et al. (2019) y Cai y Hwang (2020), no aporta un valor añadido respecto a la definición de Silver (1994), ya que sigue señalando la generación y reformulación como fuente de los problemas. Sin embargo, los trabajos posteriores de Cai et al. (2022 y 2023) y Cai y Hwang (2022) suponen un esfuerzo alentador para caracterizar los tipos de tareas de formulación de problemas. La modelización de Cai y Hwang (2022 y 2023) y Cai et al. (2022) sugiere que las tareas de formulación de problemas constan de dos partes: la situación del problema y la consigna (“prompt” en términos de Cai).

La situación problemática (Figura 6) es lo que proporciona el contexto y la información que el alumnado puede emplear para la formulación de los problemas, además de sus propias experiencias vitales y conocimiento (Cai et al. 2022; Cai y Hwang, 2022). Según Cai y Hwang (2022 y 2023) las situaciones problemáticas pueden estar basadas en referentes del mundo real (contexto real) o matemáticos o abstractos (contexto matemático). La información proporcionada por la situación problemática puede incluir palabras, imágenes, gráficos, patrones, tablas y expresiones matemáticas (Cai y Hwang, 2022 y 2023) (Figura 6).

Cai y Hwang (2022 y 2023) añaden que una tarea de formulación de problemas requiere, además, de una consigna, que permita a los formuladores saber lo que se espera que hagan. Para una misma situación problemática, puede haber muchos tipos de consignas. Esta, puede incluir referencia al número de problemas (como, por ejemplo, “*Formula tres problemas*” o “*Formula tantos problemas como sea posible*”), a la dificultad (como, por ejemplo, “*Formula un problema difícil*” o “*Formula problemas de diferentes niveles de dificultad*”), al destinatario del problema formulado (como, por ejemplo, “*Formula un problema para que lo resuelva un compañero*” o “*Formula un problema para que lo resuelva toda la clase*”), a los elementos estructurales del problema, cuando se parte de un problema dado (como, por ejemplo, “*Formula un problema similar*” o “*Formula un problema estructuralmente diferente*”), o puede ser un

combinación entre ellas (como, por ejemplo, “*Formula tres problemas diferentes con los que puedas desafiar a tus compañeros de clase*”).

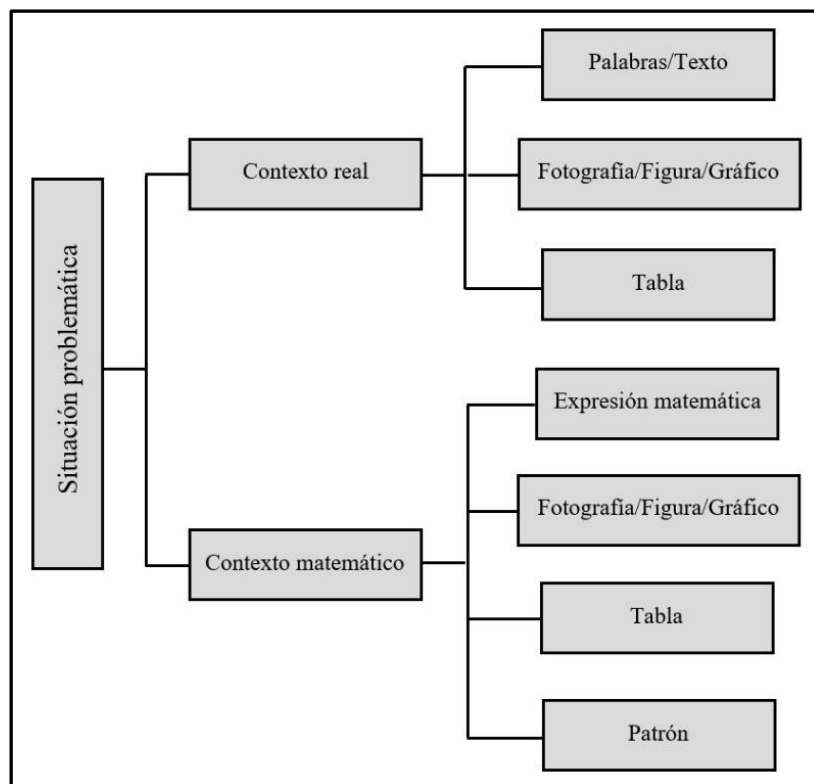


Figura 6. Situación problemática de una tarea de FPM según Cai et al. (2022) y Cai y Hwang (2022 y 2023)

La caracterización de Cai et al. (2022), Cai y Hwang (2022 y 2023) permite organizar una amplia gama de tareas de formulación de problemas entorno a dos constructos: situación problemática (contexto e información) y consigna.

Para el caso de los profesores:

En el caso de los profesores, definimos el "planteamiento de problemas" como la realización de tres actividades intelectuales específicas: (a) Los propios profesores plantean problemas matemáticos a partir de situaciones problemáticas dadas, que pueden incluir expresiones o diagramas matemáticos, (b) los profesores predicen los tipos de problemas que los alumnos pueden plantear a partir de situaciones problemáticas dadas, que pueden incluir expresiones y diagramas matemáticos, o problemas existentes, y (c) los profesores diseñan tareas de formulación de problemas matemáticos para que los alumnos planteen problemas (Cai et al., 2019, pág. 2).

La conceptualización de Cai et al. (2019 y Cai y Hwang, 2020) supone una ampliación acerca de lo que se consideraba una actividad de formulación de problemas desde la perspectiva del profesor, ya que, en la literatura sobre formulación de problemas, tradicionalmente solo se ha solido considerar la primera actividad (English, 1998; Silver, 1994). Las componentes (b) y (c)

de la definición integran actividades, dentro de los límites de la disciplina, en las que los problemas se formulan como respuesta a una necesidad profesional inherente a la Educación Matemática, y en las que el énfasis puede ser matemático o didáctico-matemático (Montes et al., 2024).

A diferencia de las conceptualizaciones de Silver (1994) y Stoyanova y Ellerton (1996), en las que se enfatiza que la actividad de formulación implica desarrollar un problema que exige una solución, la definición de Cai et al. (2019) subraya, que en la actividad de formulación centrada en el profesor no se precisa que los alumnos resuelvan el problema.

Es importante señalar que en este marco definitorio Cai et al. (2019), Cai y Hwang (2020) y Cai (2022) adoptan los términos tarea, problema y contexto en un sentido amplio, alejándose de la noción de problema y tarea que predomina en la literatura científica, en relación a los procesos subyacentes a la resolución de problemas. La consideración amplia de la noción de tarea, permite integrar a cualquier pregunta matemática que se pueda plantear y a cualquier tarea matemática que pueda realizarse basándose en la situación problemática. Desde esta perspectiva, se asume que una tarea de formulación de problemas, atendiendo al nivel de apertura que se le ofrece al formulador del problema, puede ser libre, semiestructurada o estructurada (Stoyanova y Ellerton, 1996) y puede dar lugar a la construcción de problemas en cualquier punto a lo largo del espectro (rutinario- no rutinario). Por tanto, se asume en este marco las nociones de tareas y problemas como sinónimos. La interpretación amplia de la noción de contexto permite incluir tanto situaciones intra-matemáticas, o contextos formales en términos de English (1998), como extra-matemáticas, o contextos informales en términos de English (1998), procedentes de la vida real o de otras disciplinas (Cai y Hwang, 2020).

Una de las bondades de la definición de Cai et al. (2019) y Cai y Hwang (2020) es la posibilidad de integrar y organizar distintos aspectos vinculados a la formulación de problemas matemáticos que han sido destacados en la literatura de investigación.

2.3.3.2. Situaciones estructuradas Vs situaciones no estructurada

En el estudio de Baumanns y Rott (2020) se caracterizaron 271 tareas de formulación de problemas extraídas de la literatura mediante el análisis de los niveles de apertura (Stoyanova y Ellerton, 1996) y, para el caso de las tareas estructuradas, además se categorizaron en problemas rutinarios y no rutinarios.

A pesar del uso extendido que la caracterización de Stoyanova y Ellerton (1996) ha tenido en la literatura de investigación, los estudios de Baumanns y Rott (2020 y 2022a) revelan la dificultad existente para distinguir en la práctica entre las tareas libres y semiestructuradas, y proponen una adaptación de la categorización de Stoyanova y Ellerton (1996), distinguiendo entre tareas de planteamiento de problemas estructuradas y no estructuradas. De modo que las tareas libres y semiestructuradas se fusionan, dando lugar a las tareas no estructuradas y

conforman un espectro, cuyos extremos son: tareas no estructuradas y tareas estructuradas, en el que se incrementan tanto las restricciones como la información (Figura 7). Mientras que en las tareas no estructuradas los problemas se desarrollan a partir de una situación dada y existen diversos grados de restricciones, desde casi ninguna información hasta situaciones abiertas con números e información; en las tareas estructuradas los problemas se desarrollan a partir de un problema específico, variando sus elementos estructurales.

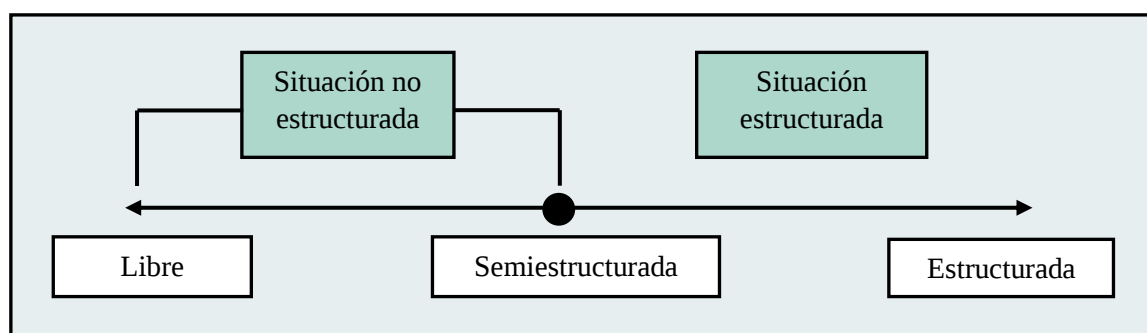


Figura 7. Tipos de tareas de formulación de problemas (Elaboración propia según Baumanns y Rott (2020 y 2022a))

En el estudio de Baumanns y Rott (2022a) los autores proponen un marco para la caracterización de las actividades de planteamiento de problemas basado en tres dimensiones que se apoyan en constructos inherentes a la formulación de problemas, la resolución de problemas y la psicología. La primera dimensión, denominada “generar y formular” emplea conjuntamente las definiciones de Silver (1994) y Stoyanova y Ellerton (1996) y se presentan criterios más objetivos tanto para la generación como la formulación (Tabla 8).

Tabla 8. Los procesos de formulación de problemas (Elaboración propia según Silver (1994) y Stoyanova y Ellerton (1996))

Actividad	Criterios
Generación	Proceso de planteamiento de un problema mediante la construcción de condiciones (nuevas) para un problema (dado o ya planteado) o la adición de condiciones a un problema libre o semiestructurado.
Reformulación	Proceso de plantear un problema variando u omitiendo una o varias condiciones de un problema (dado o ya planteado).

La segunda dimensión “problemas rutinarios y problemas no rutinarios”, caracteriza las tareas en el espectro entre problemas rutinario y no rutinarios, entendiendo, que dichos atributos son atributos de estado entre un sujeto y la tarea. Por último, la tercera dimensión denominada “comportamiento metacognitivo” donde se aporta una lista no exhaustiva y se describen los comportamientos metacognitivos vinculados a la regulación de la cognición (planificar, supervisar y evaluar) en los procesos de formulación de problemas (Tabla 9).

Tabla 9. Criterios de identificación de la regulación de la cognición como conducta metacognitiva en la formulación de problemas (Baumanns y Rott, 2022a)

Regulación de la cognición	Descripción del comportamiento
Planificación	- Centrarse en un punto de partida de la situación problemática para generar nuevos problemas - Captar las condiciones e identificar las restricciones de la situación problemática dada - Reflejar los conocimientos necesarios - Expresar el procedimiento general para plantear problemas
Controlar	- Controlar el procedimiento general de planteamiento de problemas - Controlar la notación o representación de los problemas planteados - Evaluar las consecuencias en la estructura del problema a través de las condiciones modificadas o nuevas construidas
Evaluar	- Evaluar y reflexionar sobre las características de los problemas planteados (por ejemplo, si se trata de un problema rutinario o no, si es apropiado para un grupo destinatario específico, si se puede resolver, si es interesante, si está bien definido, etc.) - Reflexionar sobre posibles modificaciones de los problemas planteados

Cabe destacar que esta dicotomía entre situaciones estructuradas y no estructuradas no solo facilita una caracterización operativa de las tareas de formulación, sino que también revela diferencias significativas en los procesos cognitivos y metacognitivos que los estudiantes movilizan al enfrentarse a una u otra. Tal como demuestran Baumanns y Rott (2020, 2022a, 2022b), las situaciones estructuradas tienden a favorecer estrategias de reformulación basadas en la manipulación de condiciones dadas, mientras que las no estructuradas promueven procesos más abiertos de generación, en los que la exploración del contexto y la construcción del requerimiento adquieren un rol central. Además, la investigación de estos autores evidencia que las situaciones no estructuradas, aunque más demandantes desde el punto de vista cognitivo, pueden estimular con mayor intensidad comportamientos metacognitivos vinculados a la planificación, el control y la evaluación del proceso de formulación, lo que contribuye a un conocimiento más profundo de la actividad matemática. En este sentido, más que una clasificación cerrada, la distinción entre situaciones estructuradas y no estructuradas debe entenderse como un continuo que permite orientar tanto el diseño de tareas como el análisis de los procesos implicados en la formulación de problemas matemáticos.

2.3.3.3. Actividades que no son formulación de problemas

Las caracterizaciones de Cai et al. (2022), Cai y Hwang (2022) y Baumanns y Rott (2022a) son más inclusivas que las caracterizaciones de Silver (1994) y Stoyanova y Ellerton (1996) y permiten organizar una amplia gama de actividades que se han abordado en la literatura de investigación desde una variedad de perspectivas (Cai, 2022). Sin embargo, autores como Cai

et al. (2019), Cai y Hwang (2020), Ruthven (2020) y Baumanns y Rott (2021, 2022a) han manifestado su preocupación acerca de que una definición demasiado amplia de la actividad de formulación de problemas pueda repercutir en una pérdida de significado. En aras de contribuir a una mayor claridad acerca de la actividad de FPM nos apoyaremos en la literatura científica, para identificar que actividades relativas a estudiantes y profesores no pueden ser consideradas formulación de problemas.

Cuando la formulación de problemas está centrada en el alumnado, tanto las definiciones de Silver (1994) como de Stoyanova y Ellerton (1996), asumían que la actividad de formulación debe conducir necesariamente a la construcción de un problema que exige una solución. Las caracterizaciones de Cai et al. (2022), Cai y Hwang (2022) y Baumanns y Rott (2022a) centradas en el alumnado también asumen este supuesto. El estudio de Baumanns y Rott (2020) realizó un análisis de 241 artículos sobre FPM, y concluyó que el 35% de las tareas que se emplean para movilizar la FPM, son tareas invertidas, y estas no son tareas de formulación de problemas, ya que no conducen necesariamente a la construcción de un problema que exige una solución.

En matemáticas, una tarea invertida según Bruder (2000) y Leuders (2015) es una tarea en la que el estado inicial (o información) puede ser conocido o desconocido, los operadores (o entorno matemático) son desconocidos y el estado final (requerimiento) es conocido (Tabla 10). En coherencia con el criterio adaptado en este trabajo, emplearemos la nomenclatura de Malaspina (2021).

Tabla 10. Tareas matemáticas invertidas según el conocimiento (C) o desconocimiento (D) de sus elementos estructurales:(1) información, (2) entorno matemático, (3) requerimiento y (4) contexto (Elaboración propia)

Tipos de tareas	Información	Entorno matemático	Requerimiento	Contexto
Formular una pregunta consistente con el resultado y el contexto proporcionado	C	C/D	C	C
Formular un contexto y una pregunta consistente con la información y el resultado proporcionado	C	C/D	C	D
Aportar información y formular una pregunta consistente con el contexto y la respuesta proporcionada	D	C/D	C	C
Aportar información, formular un contexto y una pregunta consistente con el resultado proporcionado	D	C/D	C	D

Este tipo de tareas ha sido recogido habitualmente en la literatura de investigación sobre formulación de problemas como tareas de formulación de problemas. Así, por ejemplo, en estudio de Tsubota (1987) (citado en Leung, 2013) se reportaron seis categorías ligadas a las tareas de formulación de problemas atendiendo a la información proporcionada: problema conocido (1), algoritmo (2), texto (3), figura, tabla o imagen (4), tema matemático (5) y respuesta (6). El último caso, cuando se proporciona la respuesta, es un ejemplo de tarea invertida que ha sido empleado en el ámbito de la formulación de problemas.

Compartimos con Baumanns y Rott (2020 y 2022a) que ninguna de las tareas que se pueden considerar invertidas deben ser etiquetadas como tareas de formulación de problemas (Tabla 11). Aunque es cierto que, independientemente de que la información sea conocida (tareas 1, 2 y 3, Tabla 10) o no (tarea 4), el requerimiento sea proporcionado a través de un resultado numérico (tareas 1 y 3) o una operación aritmética (tarea 2 y 4), y se proporcione un contexto (tareas 1 y 3) o no (tareas 2 y 4), todas las tareas conducen a formular un problema, sin embargo, como la respuesta es conocida, el problema ya se ha resuelto y, por tanto, la tarea no moviliza una actividad de formulación de problemas.

Compartimos con Ruthven (2020) que, pedir a los alumnos que formulen problemas mediante tareas invertidas conlleva el riesgo de una interpretación superficial de la formulación de problemas.

Cuando la formulación de problemas está centrada en el profesor la literatura de investigación es más difusa en cuanto a qué actividades del profesor pueden ser designadas o no como formulación de problemas. La definición de Cai et al. (2019) asume que en la actividad de formulación centrada en el profesor no se precisa que los alumnos resuelvan el problema. La indudable capacidad integradora de dicha definición se confronta con la posibilidad de que, bajo esa definición amplia, se amparen actividades que nada tienen que ver con la formulación de problemas, lo que, sin duda, tendría un efecto negativo para la investigación (Papadopoulos et al., 2022).

Cai et al (2019) definen la formulación de problemas como la realización de tres actividades específicas cognitivas, Cai y Hwang (2020) lo hacen a través de cinco actividades y Cai (2022) lo hace a través de dos (Tabla 12). Esta variabilidad acerca de lo que es una actividad de formulación en un mismo autor, en un período relativamente corto de tiempo, muestra la dificultad de conceptualizar el constructo “formulación de problemas”, relativo a la actividad del profesor y el peligro que supone un uso laxo de dicho constructo (Baumanns y Rott, 2022a). Como afirma Ruthven (2020):

"Parece que una gama cada vez más diversa de cuestiones están encontrando cabida bajo el paraguas de la formulación de problemas, de modo que el sentido original de la formulación de problemas matemáticos, se ha ampliado para abarcar un espectro de consideraciones pedagógicas relacionadas con el diseño de tareas, la organización

del aula, la planificación de las clases y la formulación de preguntas del profesor. Existe entonces el peligro de que el uso del término se vuelva tan difuso que socave su poder analítico y lo reduzca a un eslogan nebuloso". (Ruthven, 2020, pp.6)

Tabla 11. Ejemplos de tareas invertidas empleadas en la literatura de investigación sobre formulación de problemas (Elaboración propia)

(Tarea 1) Escribe una pregunta para la siguiente historia de modo que la respuesta al problema sea "75 libras". "Jason tenía 150 libras. Su madre le dio algunas más. Después de comprar un libro por 25 libras tenía 200 libras". (Christou et al., 2005, p. 152)

(Tarea 2)



a) Genere un escenario de división coherente con la imagen dada y la ecuación numérica $12/3 =$



b) Genere un escenario de división coherente con la imagen dada y la ecuación numérica $12/3 =$ (Kinda, 2013, p. 193)

(Tarea 3) Jerome, Elliot y Arturo se turnaron para conducir de vuelta a casa después de un viaje. Arturo condujo 120 millas menos que Elliot. Elliot condujo 12 veces más kilómetros que Jerónimo. Jerónimo condujo 80 kilómetros. Escribe un problema que tenga como respuesta "1130 millas". (Silber y Cai, 2016, p. 168)

(Tarea 4) Plantee un problema oral para $14 + 8 = ?$ (Cai y Jiang, 2017, p.1526)

Tabla 12. La actividad de formulación de problemas relativa al profesor según Cai et al. (2019), Cai y Hwang (2020) y Cai (2022)

Variaciones en la definición de formulación de problemas centrada en el profesor

- (a) Los propios profesores plantean problemas matemáticos a partir de situaciones problemáticas dadas, que pueden incluir expresiones o diagramas matemáticos.
- (b) Los profesores predicen los tipos de problemas que los alumnos pueden plantear a partir de situaciones problemáticas dadas, que pueden incluir expresiones y diagramas matemáticos, o problemas existentes.

Variaciones en la definición de formulación de problemas centrada en el profesor

(c) Los profesores diseñan tareas de planteamiento de problemas matemáticos para que los alumnos planteen problemas (Cai et al., 2019).

(a) Los propios docentes plantean problemas matemáticos basados en situaciones problemáticas dadas que pueden incluir expresiones o diagramas matemáticos.

(b) Los profesores predicen los tipos de problemas que los estudiantes pueden plantear basándose en situaciones problemáticas dadas.

(c) Los profesores plantean problemas cambiando problemas existentes.

(d) Los profesores generar situaciones de planteamiento de problemas matemáticos para que los estudiantes planteen problemas.

(e) Los profesores plantean problemas matemáticos para que los estudiantes los resuelvan (Cai y Hwang, 2020).

(a) Los profesores generan situaciones de formulación de problemas matemáticos para que los estudiantes formulen problemas.

(b) Los profesores predicen los tipos de problemas que los estudiantes pueden plantear basándose en situaciones problemáticas dadas (Cai, 2022).

Compartimos con Cai et al (2019) y Ruthven (2020), que las preguntas formuladas por el profesor como parte del discurso del aula no constituyen una actividad de formulación de problemas. Consideramos que las actividades (c) y (e) de la definición de Cai y Hwang (2020) asociadas a la formulación de problemas son discutibles, ya que en ambos escenarios los estudiantes están relacionados con la resolución de problemas (Cai, 2022).

No cabe duda que tanto las caracterizaciones de Cai et al. (2019), Cai y Hwang (2020), Cai (2022) como las de Baumanns y Rott (2020 y 2022a) suponen un avance significativo por su capacidad integradora y analítica, sin embargo, todavía no existe un marco sólido para la formulación de problemas matemáticos análogo a los marcos bien establecidos para la resolución de problemas (Cai et al., 2022).

2.4. Estudios previos sobre la formulación de problemas matemáticos en Educación Infantil

Algunos autores, como Chen et al. (2013) y Silver (1994), han cuestionado la viabilidad de la FPM en edades tempranas, argumentando que se trata de una actividad compleja que exige habilidades cognitivas y metacognitivas aún no plenamente desarrolladas en los estudiantes. Sin embargo, los estudios disponibles confirman que los estudiantes de entre 4 y 7 años son capaces de formular problemas matemáticos (Chang, 2007; Cheeseman, 2019; Jastrzębowska, 2023; Kalmpourtzis, 2019; Lowrie, 2002; Palmér y van Bommel, 2020 y 2023; Possamai et al., 2023; van Bommel y Palmér, 2021; van Bommel et al., 2024; Yamamoto *et al.*, 2012), incluso en etapas tempranas de su desarrollo (Codes et al., 2020; Fosse et al., 2020; Martín-Díaz et al., 2020; Martín-Díaz y Montes, 2022).

Diversos estudios han explorado el potencial didáctico-matemático de la FPM en la primera infancia, evidenciando su valor para promover el desarrollo del pensamiento matemático, para evaluar la comprensión matemática del alumnado y para promover la autonomía, la motivación y la creatividad. Igualmente, se ha investigado acerca de la importancia del diseño y gestión de las tareas de FPM, la dimensión afectiva y las dificultades de los estudiantes. Este apartado pretende establecer una revisión amplia y crítica sobre lo que se ha investigado en el ámbito de la FPM en la primera infancia (0-6 años), presentando las principales líneas de investigación, autores, teorías y resultados relevantes, con el fin de destacar los avances, vacíos y tendencias. Pondremos especial interés en lo que se refiere a la gestión de aula y a las dificultades del alumnado, ya que estos dos aspectos son vertebrales en la presente tesis doctoral.

La revisión de la literatura de investigación sobre FPM en la primera infancia revela, que esta puede organizarse en dos grandes aproximaciones. Por un lado, encontramos casos que la estudian en contextos en los que existe una intencionalidad didáctica explícita para promover la FPM en el aula y, por otro lado, las basadas en el juego libre, la indagación, la resolución de problemas o el diseño de juegos, donde la FPM no es un objetivo didáctico explícito, y emerge de manera espontánea a partir de las experiencias de exploración y la curiosidad infantil.

2.4.1. Estudios en los que existe una intencionalidad didáctica explícita para el tratamiento de la FPM

Los estudios revisados muestran una notable heterogeneidad en las formas de introducir la FPM en el aula en la primera infancia. Esta diversidad se manifiesta en el tipo de tareas utilizadas (situación problemática y prompt), en el grado de estructuración, el papel de los docentes, y en la preparación previa del alumnado. Dado que estas diferencias pueden influir significativamente en la interpretación de los resultados (producciones del alumnado, naturaleza de las dificultades observadas, etc.), resulta pertinente organizarlos en función de algún criterio que permita valorar con mayor precisión los resultados que se desprenden de dichos estudios. El análisis de los estudios nos ha permitido organizarlos en tres categorías emergentes atendiendo a la secuencia didáctica adoptada para introducir la FPM en el aula: (i) modelos de doble ciclo resolución-formulación; (ii) formulación directa y; (iii) formulación de triple ciclo resolución-instrucción-formulación.

Los modelos de doble ciclo resolución-formulación contienen los estudios que integran la FPM en el aula a través de una secuencia didáctica compuesta por una primera fase de resolución de problemas, seguida de una fase de formulación, que generalmente implica la consigna “formula un problema similar”. Este modelo es especialmente útil para analizar cómo los estudiantes se apropian de la estructura del problema resuelto y qué comprensiones trasladan a la formulación.

La formulación directa previa incluye los estudios que introducen una tarea de FPM sin actividades previas de resolución ni enseñanza explícita. Este enfoque permite explorar la noción espontánea de problema del alumnado y cómo formulan problemas en situaciones con

un mayor nivel de apertura desde sus conocimientos matemáticos previos y su experiencia como resolutor.

Los modelos de triple ciclo resolución-instrucción-formulación atienden a los estudios que incluyen una tarea de resolución como fase inicial, una fase de enseñanza sobre la estructura de los problemas matemáticos y, una fase final de formulación. Esta aproximación se orienta a guiar la formulación del alumnado mediante herramientas conceptuales que favorecen la coherencia y completitud de los problemas formulados. Este escenario permite explorar la formulación de problemas en entornos con un nivel bajo de apertura.

2.4.1.1. Modelos de doble ciclo resolución-formulación

El estudio de Chang (2007) explora las responsabilidades que debe asumir el docente en la enseñanza de la resolución y formulación de problemas, y cómo organizar una secuencia de aprendizaje que permita a un niño resolver y formular problemas matemáticos de manera autónoma. El trabajo detalla una secuencia de enseñanza-aprendizaje compuesta por tres sesiones, con un niño (6-7 años) y un profesor en un contexto de educación personalizada en EE.UU. En la primera sesión el profesor formula un problema de estructura aritmética (suma y resta) contextualizado en la recolección de manzanas, proporciona materiales concretos (manzanas y material de dibujo) e invita al niño a resolverlo. En la segunda sesión se repite el mismo proceso aumentando la complejidad del problema. En ambos casos, el niño resuelve el problema usando los mismos materiales y dibujos. En la tercera sesión el profesor invita al niño a formular un problema basado en la misma estructura de los anteriores problemas (structured prompt) y, por tanto, el mismo entorno matemático (estructuras aditivas). El niño representa el problema, lo resuelve y verifica la solución. El análisis de las responsabilidades docentes se realiza a partir del modelo de ciclo armónico de enseñanza propuesto por Charlesworth y Lind (2007), que incluye seis focos de observación: preevaluar, elegir el objetivo, planificar la experiencia, seleccionar materiales, enseñar y evaluar.

Los trabajos de Palmér y van Bommel (2020 y 2023), van Bommel y Palmér (2021) y van Bommel et al. (2024) forman parte de un proyecto de investigación más amplio, cuyo objetivo general investigar las posibilidades y limitaciones de la enseñanza-aprendizaje a través de la resolución y formulación de problemas en alumnos de 6 años que aún no han desarrollado la lectoescritura, en el contexto educativo sueco. En todos los estudios se implementa un ciclo de diseño que consta de dos sesiones, en la primera sesión el alumnado resuelve un problema sobre un contenido específico; y en la segunda sesión se solicita al alumnado que formule un problema similar para un compañero de clase (prompt). Este enfoque permite analizar cómo los niños y niñas comprenden los conceptos matemáticos a través de sus propias producciones problemáticas. En los estudios de Palmér y van Bommel (2020) y van Bommel y Palmér (2021), el entorno matemático lo constituyen la geometría tridimensional, la visualización espacial y los procedimientos de cuantificación (conteo y suma). En el primer trabajo, se indaga cómo el

alumnado interpreta el “prompt”, incidiendo en cómo interpretan la noción de similar y en qué medida los problemas formulados por el alumnado pueden revelar información respecto al aprendizaje del alumnado. En el segundo, el foco se desplaza hacia las experiencias afectivas y cognitivas que viven los estudiantes en las tareas de resolución y formulación, comparando sus respuestas en ambas situaciones para examinar las similitudes y diferencias de dichas experiencias.

En el estudio de Palmér y van Bommel (2023) el propósito principal fue investigar cómo los estudiantes comprenden y exploran conceptos de medición a través de actividades de resolución y formulación de problemas. El estudio analiza qué tipos de problemas formulan los estudiantes y qué aspectos sobre la medición relacionados con la tarea inicial de resolución se ven reflejados en los problemas formulados por el alumnado. Por último, en el estudio de van Bommel et al. (2024), el foco se sitúa en examinar cómo los estudiantes comprenden y trabajan el concepto de división a través de actividades de resolución y formulación de problemas, analizando qué aspectos de la división se evidencian en los problemas formulados por el alumnado. Cabe señalar que en los primeros estudios (Palmér y van Bommel, 2020; van Bommel y Palmér, 2021) el alumnado no tenía experiencia previa con la actividad de formulación de problemas, lo que aporta una perspectiva inicial sobre la apropiación de este tipo de tareas en edades tempranas. A continuación (Tabla 13), se organiza la información de los estudios atendiendo a la muestra, objetivo y enfoque metodológico.

Tabla 13. Estudios que introducen la FPM mediante un ciclo doble resolución-formulación (Elaboración propia)

Estudio	Muestra	Objetivo	Enfoque metodológico
Chang (2007)	1 profesor y 1 niño (6-7 años) en un contexto de educación personalizada en EE.UU. (1º de primaria)	Explorar las responsabilidades docentes y analizar cómo organizar una secuencia didáctica que favorezca la formulación autónoma	Estudio de caso
Palmér y van Bommel (2020)	Alumnado de 6 años en Suecia (1º de primaria)	Explorar qué implica para los alumnos formular una tarea similar después de haber resuelto un problema de geometría tridimensional. Indagar qué aspectos del aprendizaje pueden revelar los problemas formulados	Diseño experimental con ciclo de diseño
Palmér y van Bommel (2021)	Alumnado de 6 años en Suecia (1º de primaria)	Explorar las percepciones de los alumnos sobre la resolución y la formulación de problemas matemáticos, con el fin de identificar similitudes y diferencias en sus experiencias afectivas y cognitivas respecto a ambas actividades	Diseño experimental con ciclo de diseño

Estudio	Muestra	Objetivo	Enfoque metodológico
Palmér y van Bommel (2023)	Alumnado de 6 años en Suecia (1º de primaria)	Investigar cómo los estudiantes comprenden y exploran conceptos de medición a través de actividades de resolución y formulación de problemas	Diseño experimental con ciclo de diseño
van Bommel et al. (2024)	Alumnado de 6 años en Suecia (1º de primaria)	Comprender qué aspectos de la división distinguen los estudiantes de en relación con la resolución y formulación de problemas	Diseño experimental con ciclo de diseño

Todos los estudios que emplean un modelo de doble ciclo, introducen la FPM mediante la reformulación de problemas anteriormente resueltos con un prompt que orienta al alumnado a formular un problema similar. A continuación (Tabla 14), se organiza la información de los estudios atendiendo tanto a los problemas previos resueltos previamente como al prompt.

Tabla 14. Problemas previos y prompts empleados en los estudios que introducen la FPM mediante un doble ciclo resolución-formulación (Elaboración propia)

Estudio	Problemas previos	Prompt
Chang (2007)	Dos problemas aritméticos de estructura aditiva contextualizados en la recolección de manzanas	“Formula un problema similar a los problemas resueltos anteriormente”
Palmér y van Bommel (2020)	Un problema de geometría tridimensional, dada la imagen de un edificio construido con cubos se les preguntó: “¿Cuántos bloques necesitas para construir el edificio?”	“Formula un problema similar para un compañero de clase”
Palmér y van Bommel (2021)		
Palmér y van Bommel (2023)		
van Bommel et al. (2024)	Dos problemas aritméticos sobre división. Primera sesión: Cada grupo de tres estudiantes recibió 15 galletas de arcilla y se le invitó a repartir de manera equitativa las galletas entre los integrantes del grupo. Segunda sesión: la maestra se incorpora al grupo y solicita que se repartan las galletas en partes iguales entre tres personas	

A continuación, se presentan los resultados más importantes sobre la FPM en Educación Infantil que se extraen de los estudios que implican modelos de doble ciclo (resolución-formulación).

♦ *¿Qué sabemos sobre la viabilidad de la FPM a través de tareas de doble ciclo en la primera infancia?*

Los estudios de Chang (2007), van Bommel y Palmér (2021), van Bommel et al. (2024) y Palmér y van Bommel (2020 y 2023) refuerzan que la formulación de problemas es una práctica viable con niños y niñas de 6 años cuando se combina con una tarea previa de resolución de problemas. Los trabajos del grupo de investigación sueco proporcionan evidencia de que incluso en ausencia de lectoescritura consolidada, los niños pueden implicarse activamente en tareas complejas de formulación. Los estudios muestran que los niños son capaces de formular problemas matemáticos incluso sin haber tenido una experiencia previa con este tipo de tareas (Chang, 2007; Palmér y van Bommel, 2020; y van Bommel y Palmér, 2021).

En los estudios del grupo de investigación sueco se destacan tres elementos claves para la viabilidad de la FPM: (i) la necesidad de un diseño adecuado, en su caso combinando resolución y formulación; (ii) la experiencia del profesorado en la enseñanza basada en problemas; y (iii) la necesidad de que los estudiantes hayan tenido experiencia previa con la resolución de problemas. Chang (2007), por su parte, señala que los niños pueden avanzar hacia la formulación de problemas más sofisticados y no rutinarios con el apoyo y la estimulación adecuada.

Los estudios de Chang (2007), Palmér y van Bommel (2020 y 2023), van Bommel y Palmér (2021) y van Bommel et al. (2024) revelan que los niños son capaces de formular problemas sobre estructuras aditivas, la división, la medida, la geometría tridimensional y la visualización espacial.

♦ *¿Qué sabemos sobre el potencial de la FPM a través de tareas de doble ciclo para promover el desarrollo del pensamiento matemático?*

Los estudios de Palmér y van Bommel (2020), van Bommel y Palmér (2021), van Bommel et al. (2024) evidencian el valor de la FPM como vía para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático y la comprensión conceptual del alumnado. Al respecto, Palmér y van Bommel (2020) señalan que formular un problema similar tras haber resuelto un problema requiere una reflexión profunda sobre el contenido matemático trabajado previamente. Así, por ejemplo, el trabajo de van Bommel et al. (2024) refleja que la FPM no sólo permitió reforzar la comprensión de distintos aspectos de la división que se habían movilizado previamente durante la tarea de resolución, sino que, además, favoreció la comprensión emergente de un nuevo concepto, el número racional. Por su parte, Chang (2007) concluye que además de favorecer la comprensión matemática, la formulación de problemas contribuyó al desarrollo metacognitivo del estudiante, ya que permitió interiorizar la estructura de los problemas aditivos de transformación, así como la representación simbólica de las situaciones.

Los estudios de van Bommel y Palmér (2021), van Bommel et al. (2024) y Palmér y van Bommel (2020 y 2023) destacan la importancia de integrar la formulación de problemas de

manera continuada en la enseñanza de las matemáticas desde edades tempranas. van Bommel y Palmér (2021) argumentan que su integración puede diversificar las oportunidades de aprendizaje y apoyar una visión más rica de las matemáticas escolares.

♦ *¿Qué sabemos sobre el potencial de la FPM a través de tareas de doble ciclo como medio para evaluar la comprensión matemática del alumnado?*

Los estudios de van Bommel y Palmér (2021), van Bommel et al. (2024) y Palmér y van Bommel (2020 y 2023) concluyen que la FPM ofrece una ventana única para evaluar la comprensión matemática del alumnado, permitiendo identificar qué aspectos matemáticos han comprendido los niños en actividades previas de resolución de problemas, cómo interpretaron y comprendieron el problema original, qué aspectos fueron más significativos o accesibles para ellos durante la resolución y cómo comprenden y se apropian de los conceptos trabajados. Así, por ejemplo, en el estudio de Palmér y van Bommel (2023), los estudiantes identificaron y utilizaron distintos aspectos matemáticos de la medición, como forma, tamaño, distancia y cantidad de medida durante la resolución. Sin embargo, al formular sus propios problemas, solo reaparecieron los aspectos de tamaño y cantidad de medida, lo cual sugiere que la formulación puede revelar qué comprensiones ha desarrollado el alumnado.

♦ *¿Qué sabemos sobre el potencial de la FPM a través de tareas de doble ciclo como medio para promover la autonomía, la motivación y la creatividad del alumnado?*

Los estudios de van Bommel y Palmér (2021), van Bommel et al. (2024) y Palmér y van Bommel (2020 y 2023) evidencian el valor de la FPM como medio para fomentar el sentido de autonomía y la creatividad.

Los estudios de Palmér y van Bommel (2023) y van Bommel et al. (2024) muestran que los problemas formulados por los estudiantes variaron considerablemente en su conexión con el problema inicial resuelto, evidenciando creatividad, flexibilidad y apropiación de las estructuras matemáticas. Así, por ejemplo, en ambos estudios los estudiantes formularon problemas empleando contextos similares, pero introdujeron nuevos contenidos matemáticos no presentes en la tarea inicial. Por otro lado, el estudio de Palmér y van Bommel (2020) evidencia una interpretación activa y creativa del prompt “Formula un problema similar”. Por último, el estudio de van Bommel et al. (2024) muestra que la FPM fomenta la motivación y el compromiso de los estudiantes con el aprendizaje matemático.

♦ *¿Qué impacto tiene el diseño de las tareas de FPM de doble ciclo en el desempeño del alumnado?*

El estudio de Chang (2007) enfatiza que el conocimiento profundo del docente sobre el niño y su contexto (intereses, experiencias y conocimientos previos) es clave para diseñar tareas motivadoras y accesibles. Si los problemas o situaciones están estrechamente relacionados con

sus conocimientos y experiencias, los niveles de confianza y motivación de los niños tienden a aumentar.

♦ *¿Qué impacto tiene la gestión docente de las tareas de FPM de doble ciclo en el desempeño del alumnado?*

Palmér y van Bommel (2023) y van Bommel et al. (2024) señalan la importancia del diseño instruccional y del rol docente. Destacan que la experiencia del profesorado tanto en el diseño de tareas, como en la enseñanza basada en problemas incidieron significativamente en la calidad de los problemas formulados por los estudiantes. Asimismo, Palmér y van Bommel (2023), sugieren incorporar discusiones colectivas que ayuden a visibilizar y articular los aspectos clave del objeto de aprendizaje antes de la formulación de problemas. En cuanto al prompt empleado en todos los estudios “formula un problema similar”, Palmér y van Bommel (2023) resaltan la necesidad de orientar de forma más explícita el significado de “tarea similar”, explicitando el tipo de semejanza que se espera.

Por su parte, Chang (2007) señala que el maestro desempeña múltiples roles: diagnóstico, planificador, modelador, facilitador, evaluador, y acompañante reflexivo. Enfatiza que la fuente de poder que impulsa a los niños a resolver y plantear problemas es su curiosidad, y en este sentido, afirma que las tareas de FPM deben llevarse a cabo en un clima de aula donde la curiosidad pueda crecer y desarrollarse. Su estudio destaca que la intervención sensible del maestro, el apoyo emocional, el andamiaje progresivo, el empleo de materiales concretos y la representación pictórica de los problemas fueron claves para la viabilidad de la tarea.

♦ *¿Qué sabemos sobre los problemas que formula el alumnado en tareas de doble ciclo?*

Los estudios de van Bommel y Palmér (2021), van Bommel et al. (2024) y Palmér y van Bommel (2020 y 2023) muestran que, aunque la mayoría de los estudiantes formulan problemas que implican el mismo contenido matemático (entorno matemático) que el problema resuelto, los estudiantes también formulan otros tipos de problemas. Los estudios de Palmér y van Bommel (2020) y van Bommel y Palmér (2021) organizaron los problemas formulados por los estudiantes en tres categorías o tipos de problemas: (i) problemas similares a los resueltos previamente; (ii) problemas diferentes, pero con contenido matemático; y (iii) problemas sin contenido matemático.

♦ *¿Qué sabemos sobre la dimensión afectiva y autonomía del alumnado en la FPM a través de tareas de doble ciclo?*

El estudio de van Bommel y Palmér (2021) muestra que la mayoría de los estudiantes pensaban que un problema formulado sólo se completa si alguien lo resuelve, lo cual indica una concepción de la formulación aún ligada a la resolución y probablemente asociada a su falta de experiencia previa con la actividad.

El estudio de van Bommel y Palmér (2021) muestra que los estudiantes no siempre percibían la FPM como una actividad matemática. A diferencia de la resolución, que fue ampliamente reconocida como una actividad matemática, menos estudiantes identificaron la formulación como tal, y algunos ni siquiera la consideraron un tipo de problema. Lo cual podría explicarse por su falta de experiencia previa en este tipo de tareas. Se destaca la necesidad de que los docentes ofrezcan oportunidades recurrentes de formulación de problemas para naturalizarla como parte de la actividad matemática.

El estudio de van Bommel y Palmér (2021) muestra que los niños manifestaron emociones positivas hacia la formulación de problemas, similar a lo que ocurre con la resolución. Las emociones y creencias de los estudiantes influyen significativamente en su disposición hacia estas prácticas. Así, por ejemplo, si bien la mayoría de los estudiantes destacaron el desafío cognitivo y la autonomía como aspectos positivos de la formulación, también se identificó que para algunos estudiantes la libertad de elección supuso un reto cognitivo adicional.

♦ *¿Qué sabemos sobre las dificultades del alumnado durante la FPM?*

Acerca de la percepción de dificultad del alumnado, van Bommel y Palmér (2021) indican que, aunque consideraron que formular problemas era ligeramente más difícil que resolverlos, muchos mostraron persistencia y apreciaron la autonomía que conlleva decidir por sí mismos el contenido del problema. No obstante, para otros esa autonomía fue vista como un desafío excesivo.

Como ya hemos señalado antes, algunos estudiantes formularon problemas con otros contenidos matemáticos o sin contenido matemático, van Bommel et al. (2024) sugieren que puede estar influido por la forma en la que interpretaron el prompt “formula un problema similar”.

2.4.1.2. Formulación directa

El estudio de Lowrie (2002) explora individualmente las capacidades de formulación de problemas de estudiantes de 6 años (1º curso de Educación Primaria) en Australia, y de qué manera las intervenciones del docente inciden en la naturaleza de los problemas formulados. Se tomó como muestra a 25 estudiantes que no habían estado expuestos previamente a situaciones de enseñanza-aprendizaje que fomentara la formulación de problemas, y cuyas actividades de resolución de problemas habituales en el aula procedían exclusivamente de libros de texto de matemáticas tradicionales. El estudio se llevó a cabo en cinco sesiones de una hora, creando un entorno individual de aprendizaje intencional para la formulación de problemas, promoviendo el descubrimiento guiado bajo un modelo de indagación activa. En todas las sesiones se motivó a los estudiantes a formular problemas, de forma escrita o verbal, a partir de una situación no estructurada, en la que la consigna (free prompt) invita a formular un problema que le gustaría resolver. En la primera sesión, tras resolver el problema formulado se realizaron

preguntas que animaban a los estudiantes a: (i) reflexionar sobre la forma en la que resolvieron el problema; y (ii) expresar por qué les gustaban resolver los problemas concretos que habían formulado. Durante la segunda sesión el debate con el alumnado se focalizó entre el problema que habían formulado y sus posibles soluciones. En particular, la discusión giraba en torno a en qué medida los estudiantes disfrutaban resolviendo el problema, lo que les gustaba y lo que no le gustaba con respecto a la estructura de este tipo de problema, y cómo podrían hacer para resolverlo. Durante el resto de sesiones el profesor desempeñó un papel más activo en dos aspectos: ayudar a los estudiantes a formular problemas resolubles y animar a formular problemas que disfrutaran resolviendo. Aunque los entornos de aprendizaje individualizados que se describen en el estudio de Lowrie (2002) no pueden reproducirse en situaciones típicas de clase, dicho trabajo proporciona hallazgos significativos sobre las capacidades de formulación de problemas en la primera infancia.

Los trabajos de Martín-Díaz et al. (2020), Codes et al. (2020) y Martín-Díaz y Montes (2022) forman parte de un proyecto de investigación más amplio que nace en el contexto de un grupo de investigación colaborativo orientado al desarrollo profesional de matemáticas. En dicho proyecto de investigación colaborativo (PIC) participan profesionales de la enseñanza de las matemáticas de los distintos niveles educativos e investigadores. El eje central del proyecto es el diseño, implementación y análisis de propuestas didácticas en torno a la resolución y/o formulación de problemas que se llevan al aula de educación infantil, primaria y secundaria. Los estudios a los que aluden las referencias citadas, implican dos sesiones de formulación de problemas que se desarrollan en un centro educativo en España, con una muestra de 24 estudiantes de entre 4 y 5 años. La primera sesión se lleva a cabo en gran grupo e implica una tarea no estructurada (free prompt), en la que la situación problemática se proporciona a través de un mural, de carácter realista que evoca la actividad cotidiana que acontece en un barrio. La segunda sesión se organiza en cuatro escenarios manipulativos, las situaciones problemáticas son proporcionadas a través de distintos materiales familiares para los estudiantes: (i) muñecos y caramelos; (ii) medios de transporte de distintos colores; (iii) pelotas variadas en color, tamaño y textura; y (iv) sólidos geométricos de distintos colores. Se trata de una tarea no estructurada (free prompt) en la que cada situación problemática pretende inducir la formulación de problemas en distintos entornos matemáticos (aritmética, clasificación, y ordenación). Cada estudiante debe formular individualmente un problema a partir de cada escenario, representándolo con un dibujo. La maestra acompaña el proceso a través de preguntas abiertas y mediadoras, orientadas a favorecer la identificación de los elementos estructurales de los problemas (información, contexto y pregunta) y verificar su coherencia. El estudio de Martín-Díaz et al. (2020) analiza la práctica de una maestra de Educación Infantil que promueve la formulación de problemas en el aula durante la segunda sesión. El objetivo principal del estudio es caracterizar el papel de la maestra en el diseño e implementación de dicha sesión. El estudio adopta un enfoque de estudio de caso instrumental, y se centra en analizar los elementos didácticos y organizativos que fundamentan tanto el diseño de la tarea como su gestión en el

aula. El estudio de Codes et al. (2020) se enfoca en evidenciar la viabilidad de la formulación de problemas en este nivel educativo, analizando los problemas formulados por el alumnado durante la segunda sesión. La investigación de Martín-Díaz y Montes (2022) analiza el conocimiento especializado que moviliza la maestra al implementar ambas sesiones de formulación de problemas, atendiendo con especial énfasis al conocimiento implicado en el diseño y puesta en práctica de las sesiones. El análisis se realiza utilizando el modelo MTSK (Mathematics Teachers' Specialized Knowledge) (Carrillo et al., 2018).

El trabajo de Possamai et al. (2023) explora las relaciones entre los elementos estructurales de las tareas de formulación de problemas (situación problemática y prompt) y los problemas formulados por los estudiantes. El estudio tiene lugar en un aula de educación primaria de Brasil, con una muestra de 19 niños y niñas de entre 6 y 7 años, y se inscribe en la línea de investigaciones que analizan cómo el diseño de las tareas impacta en los problemas formulados por el alumnado. El propósito del estudio es comprender cómo los elementos que conforman la tarea influyen en la forma en la que el alumnado interpreta la tarea y formula sus propios problemas. Para ello, se emplea una tarea de carácter estructurado, diseñada con el propósito de provocar la formulación de problemas aditivos. La situación problemática se proporciona a través de una imagen que representa una escena de compra-venta (peces-pecera), y se acompaña de un prompt que proporciona datos numéricos: “Crea una situación-problema a partir de las escenas en la que el personaje pague con (imagen de un billete de 10 reales) y reciba cambio (imagen de un billete de 5 reales). Después, resuelve la situación-problema”. El análisis se orienta a comprender cómo el alumnado integra los elementos de la tarea (imagen y datos numéricos), para construir una situación problemática coherente y significativa. Se examinan las estrategias de construcción empleadas, atendiendo a las elecciones que realizan los estudiantes con respecto al uso de la información disponible, la organización del enunciado y la coherencia estructural de los problemas formulados.

A continuación, se organiza la información de los estudios atendiendo a la muestra, objetivo y enfoque metodológico (Tabla 15) y a los elementos estructurales de las tareas de FPM (Tabla 16).

Tabla 15. Características de los estudios que introducen la FPM mediante formulación directa (Elaboración propia)

Estudio	Muestra	Objetivo	Enfoque metodológico
Lowrie (2002)	25 alumnos (6 años) en Australia (1º de primaria)	Explorar las capacidades de formulación de problemas en entornos de aprendizaje individualizados e intencionales	Estudio de casos

Estudio	Muestra	Objetivo	Enfoque metodológico
Martín-Díaz et al. (2020)	24 alumnos (4-5 años) en España (Educación Infantil)	Caracterizar el diseño e implementación de una maestra que promueve la FPM	Estudios de caso en proyecto colaborativo
Codes et al. (2020)		Mostrar la viabilidad de la FPM con niños y niñas de 4-5 años, a partir de una experiencia de aula diseñada en el marco de un proyecto de investigación colaborativa	
Martín-Díaz y Montes (2022)		Analizar el conocimiento especializado que moviliza una maestra al diseñar e implementar una sesión de FPM	
Possamai et al. (2023)	19 alumnos (6-7 años) en Brasil (1° de primaria)	Analizar cómo los elementos de la tarea influyen en la formulación	Análisis de producciones

Tabla 16. Características de las tareas de FPM en los estudios de formulación directa (Elaboración propia)

Estudio	Situación problemática	Prompt	Nivel de apertura
Lowrie (2002)	----	“Formula un problema que te gustaría resolver” (free prompt)	No estructurada
Martín-Díaz et al. (2020)	Cuatro escenarios conformados con material manipulativo. <u>Escenario 1</u> : muñecos y caramelos. <u>Escenario 2</u> : medios de transporte de distintos colores <u>Escenario 3</u> : pelotas variadas en color, tamaño y textura <u>Escenario 4</u> : sólidos geométricos de distintos colores	“Formula un problema” (free prompt)	No estructurada
Codes et al. (2020)			
Martín-Díaz y Montes (2022)			
	Un mural, de carácter realista que evoca la actividad cotidiana que acontece en un barrio	“Vamos a buscar algún problema que haya en el mural”	No estructurada

Estudio	Situación problemática	Prompt	Nivel de apertura
Possamai et al. (2023)	Una imagen que representa una escena de compra-venta (peces-pecera)	“Crea una situación-problema a partir de las escenas en la que el personaje pague con (imagen de un billete de 10 reales) y reciba cambio (imagen de un billete de 5 reales)” (structured prompt)	Estructurada

♦ *¿Qué sabemos sobre la viabilidad de la FPM a través de tareas de formulación directa en la primera infancia?*

Los estudios de Codes et al. (2020), Lowrie (2002), Martín-Díaz y Montes (2022), y Martín-Díaz et al. (2020) muestran que los niños pueden implicarse con éxito en la FPM incluso sin experiencia previa en esta práctica. Además, los trabajos de Codes et al. (2020), Martín-Díaz y Montes (2022), y Martín-Díaz et al. (2020) ponen de manifiesto que dicha participación es posible aun cuando los niños no han alcanzado un dominio pleno de la lectoescritura, lo que refuerza la idea de que la FPM es una actividad accesible desde edades tempranas.

Todos los estudios coinciden en señalar que tanto el diseño como la gestión de las tareas de FPM son factores clave para su viabilidad en la primera infancia (Codes et al., 2020; Lowrie, 2002; Martín-Díaz y Montes, 2022; Martín-Díaz et al., 2020; Possamai et al., 2023). Por tanto, el profesorado juega un papel crucial en la viabilidad de la FPM, pues se requiere capacidad para diseñar tareas adecuadas, preparar al alumnado y guiar el proceso de formulación. En este sentido, el estudio de Martín-Díaz y Montes (2022) afirma que la integración de la FPM en el aula requiere un conocimiento profesional sólido y profundo, destacando dos dimensiones, el conocimiento matemático (MK) y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK).

Los estudios de Codes et al. (2020), Martín-Díaz y Montes (2022), y Martín-Díaz et al. (2020) que implican a niños de entre 4 y 5 años, subrayan que la FPM resulta accesible siempre que el diseño de la tarea y su gestión se adapten a las características del contexto infantil. El estudio de Codes et al. (2020) incide en que un factor importante en la viabilidad de las tareas subyace en fomentar la formulación de problemas a partir de situaciones manipulativas. En la misma línea, Martín-Díaz et al. (2020) destacan que los niños son capaces de formular problemas significativos cuando las tareas están debidamente contextualizadas, se emplean materiales cercanos y se permite la expresión de los problemas a través del dibujo o el lenguaje oral.

No obstante, otros trabajos como el de Possamai et al. (2023) matizan la viabilidad, al mostrar que, si bien la mayoría de los estudiantes participó activamente en la tarea, solo unos pocos

lograron formular problemas completos (4 de los 19 estudiantes). Este estudio apunta que emplear una tarea altamente estructurada no garantiza, por sí sola, una formulación exitosa, destacando: (i) la necesidad de un acompañamiento más sostenido para alcanzar este objetivo; (ii) la importancia de que el alumnado cuente con experiencias previas en la resolución de problemas y; (iii) la necesidad de que los docentes anticipen posibles problemas, analicen críticamente los productos, y diseñen prompts adecuados a su objetivo didáctico.

Aunque Possamai et al. (2023) destacan la necesidad de integrar la resolución y formulación de forma sistémica, diversos estudios (Codes et al., 2020; Lowrie, 2002; Martín-Díaz y Montes, 2022; Martín-Díaz et al., 2020) demuestran la viabilidad de introducir la formulación de problemas de forma directa en el aula. En particular, el estudio de Codes et al. (2020) enfatiza que la introducción directa de la FPM fue viable gracias a la existencia de una cultura de resolución de problemas previamente consolidada en el aula, la cual había permitido que los niños se familiarizaran con los elementos estructurales de los problemas matemáticos. En la misma línea, el estudio de Lowrie (2002) muestra que la formulación directa es factible en entornos de aprendizaje individualizados con el acompañamiento pedagógico adecuado, incluso cuando la experiencia previa del alumnado se limita a la resolución de problemas típicos de libros de texto. Si bien los entornos de aprendizaje individualizados descritos en este estudio no son fácilmente replicables en situaciones habituales de aula, los resultados muestran cuán rápidamente los niños pequeños comienzan a formular problemas más complejos y difíciles de resolver, que se alejan considerablemente de los formatos rutinarios que suelen trabajar en clase.

♦ *¿Qué sabemos sobre el potencial de la FPM a través de tareas de formulación directa para promover el desarrollo del pensamiento matemático?*

Los estudios de Codes et al. (2020), Lowrie (2002), Martín-Díaz y Montes (2022), Martín-Díaz et al., (2020) y Possamai et al. (2023) evidencian el valor formativo de la FPM en la primera infancia, destacando su potencial para fomentar la comprensión matemática, el pensamiento creativo y el compromiso con el alumnado. En concreto, el estudio de Codes et al. (2020) aporta evidencia empírica sobre cómo la FPM permite movilizar los conocimientos previos del alumnado y favorece la comprensión de los elementos estructurales de un problema. Además, pone de relieve que promover la FPM en contextos lúdicos y manipulativos impulsa el desarrollo de capacidades como la originalidad, la flexibilidad y el gusto por las matemáticas desde edades tempranas. En una línea similar, Martín-Díaz y Montes (2022) subrayan que esta práctica no solo facilita el abordaje de diversos contenidos matemáticos, sino que también fomenta el razonamiento, la creatividad y la expresión de ideas matemáticas.

El trabajo de Lowrie (2002), contribuye con una visión complementaria, al mostrar que involucrar a los estudiantes en tareas de FPM incrementa su conciencia sobre los procesos implicados en esta práctica, que pueden describirse en tres fases: (i) comprensión de la tarea; (ii) construcción del problema; y (iii) expresión del problema (Zhang et al., 2022). El estudio

revela que a medida que los estudiantes desarrollan mayor comprensión sobre estos procesos, los problemas que formulan tienden a ser más abiertos, creativos y alejados de las estructuras rutinarias habituales en el aula. Aunque esto puede dificultar la identificación de una solución directa, tal como señala Silver (1994), fomenta el pensamiento investigativo, la exploración, la formulación de conjeturas y una comunicación más rica que no era posible en situaciones más rutinarias.

Asimismo, el estudio de Lowrie (2002) señala que la FPM promueve habilidades metacognitivas fundamentales en edades tempranas, al exigir que los estudiantes reflexionen sobre la estructura del problema, los datos necesarios y las posibles estrategias de solución. En este sentido, el vínculo entre formulación y resolución actúa como catalizador del pensamiento metacognitivo, favoreciendo una comprensión más profunda de las operaciones matemáticas y de su sentido.

Según Lowrie (2002) es importante señalar que no es necesario que quien plantea el problema sea capaz de resolverlo para que se produzcan resultados educativos positivos. Su estudio, pone de manifiesto que, incluso para los niños que no pudieron resolver los problemas por sí mismos, los entornos de formulación de problemas construidos en este estudio ampliaron sus percepciones sobre las situaciones matemáticas y mejoraron su desarrollo de la resolución de problemas.

Por su parte, Possamai et al. (2023) destacan que la participación en tareas de formulación también contribuyó al desarrollo de habilidades comunicativas vinculadas a la expresión oral y escrita de contenidos matemáticos. Esta dimensión lingüística constituye un valor añadido de la FPM en edades tempranas, especialmente en contextos donde la expresión formal aún se encuentra en construcción.

En conjunto, estos estudios consolidan la idea de que la FPM no solo es una práctica viable en la infancia, sino que posee un alto potencial didáctico para enriquecer el desarrollo del pensamiento matemático en sus múltiples dimensiones: cognitiva, metacognitiva, creativa y comunicativa.

♦ *¿Qué sabemos sobre el potencial de la FPM a través de tareas de formulación directa como medio para evaluar la comprensión matemática del alumnado?*

Tanto el estudio de Codes et al. (2020) como el de Martín-Díaz et al. (2020) coinciden en señalar que la FPM constituye una herramienta valiosa de evaluación diagnóstica en Educación Infantil. En particular, Codes et al. (2020) destacan que la actividad del alumnado permitió a la maestra no solo identificar si los estudiantes comprendían determinados contenidos matemáticos, sino también cómo los comprendían. De manera complementaria, Martín-Díaz et al. (2020) concluyen que la FPM ofrece a la docente la posibilidad de valorar la comprensión matemática del alumnado en función de los problemas que son capaces de formular, así como de acceder a las conexiones y estructuras lógicas que el alumnado pone en juego durante esta actividad. Estos

hallazgos refuerzan el valor de la FPM como práctica evaluativa significativa en etapas tempranas.

♦ *¿Qué sabemos sobre el potencial de la FPM a través de tareas de formulación directa como medio para promover la autonomía, la motivación y la creatividad del alumnado?*

El estudio de Codes et al. (2020) muestra que los niños formularon problemas con distintos grados de completitud: algunos con enunciado completo (historia y pregunta), otros con enunciado incompleto (sólo pregunta o sólo historia) y otros con datos inventados. La diversidad en la formulación entorno a una misma situación problemática, evidencia creatividad, flexibilidad y diferentes niveles de comprensión de la estructura del problema.

♦ *¿Qué impacto tiene el diseño de las tareas de FPM de formulación directa en el desempeño del alumnado?*

Los estudios de Codes et al. (2020), Lowrie (2002), Martín-Díaz y Montes (2022), Martín-Díaz et al. (2020) y Possamai et al. (2023) coinciden en señalar que el diseño de las tareas y, por tanto, la configuración de los elementos estructurales (situación problemática y prompt), tienen un impacto tanto en el desempeño matemático, como en la naturaleza de los problemas que formula el alumnado.

Al respecto, el estudio de Martín-Díaz y Montes (2022) alertan que el diseño de las tareas no es una cuestión baladí, destacando que esta práctica profesional requiere un conocimiento profesional sólido y profundo en relación a dos dimensiones, destacando dos dimensiones, el conocimiento matemático (MK) y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK). Con respecto al conocimiento matemático (MK), se destaca la necesidad de un dominio profundo de los contenidos matemáticos que se pretenden movilizar (como, por ejemplo, la clasificación, seriación o reparto), así como un uso adecuado de dicho contenido (fenómenos, representaciones, estructura, etc.). En cuanto al conocimiento pedagógico del contenido (PCK), enfatizan la importancia de diseñar recursos adaptados a la edad y anticipar posibles estrategias, respuestas y dificultades del alumnado. Al respecto, los autores destacan la necesidad de incluir en la formación inicial elementos que fortalezcan el conocimiento especializado para diseñar estas tareas.

En cuanto a la configuración de la situación problemática, los estudios de Codes et al. (2020), Lowrie (2002), Martín-Díaz y Montes (2022) y Martín-Díaz et al. (2020) hacen hincapié en la importancia de realizar un diseño cuidadoso de las tareas, acorde al aprendizaje previo del alumnado y poniendo el énfasis en el valor del contexto de la situación problemática. Sus estudios muestran que los niños son más propensos a formular problemas cuando se le presentan contextos significativos y cercanos a su experiencia vital. Al respecto Lowrie (2002) añade que la consideración de este tipo de contextos aumenta su motivación y compromiso con la tarea.

La selección de los materiales es fundamental tanto para la idoneidad de la tarea, como para potenciar la implicación del alumnado. Los materiales deben estar alineados con el propósito didáctico, es decir, con los diferentes problemas que se quieren promover (lógicos, numérico-aritméticos, espaciales-geométricos, magnitudinales-medida o estocásticos) y, además deben invitar a la exploración. En este sentido, Codes et al. (2020) y Martín-Díaz y Montes (2022) señalan que la práctica de formular problemas se ve favorecida cuando las tareas involucran materiales significativos para los niños. Al respecto, Codes et al. (2020) y Martín-Díaz y Montes (2022) reportan que la selección de los materiales es fundamental impacta en la naturaleza de los problemas formulados por el alumnado. El estudio de Codes et al. (2020) revela la elección de los materiales favoreció una gama diversa de problemas formulados, relacionados con distintos entornos matemáticos (reparto, clasificación, medida, comparación, etc.), y concluyen que el uso de materiales manipulativos adecuados potencia la comprensión, expresión, la formulación y la resolución de problemas.

En cuanto a la elección del prompt, el estudio de Lowrie (2002), revela que los elementos estructurales de la tarea (situación problemática y prompt) tienen un impacto en la naturaleza de los problemas que formula el alumnado. En particular, la elección de la consigna (free prompt) “formula un problema que te gustaría resolver” implicó que la mayoría de los niños formularan problemas que confiaban en poder resolver correctamente. Este estudio pone de manifiesto que el alumnado no sólo formula problemas de forma mecánica, sino que lo hace considerando que sean resolubles, lo cual sugiere que esta práctica estimula procesos de pensamiento más profundos (metacognitivos) al integrar la formulación con la anticipación de posibles estrategias de resolución.

En referencia al nivel de estructuración de la tarea, el estudio de Possamai et al. (2023) evidencia que el diseño de la tarea es vital para la viabilidad de la FPM, poniendo de manifiesto que cuando los niños se enfrenten por primera vez a esta práctica una tarea excesivamente estructurada (contexto, entorno matemático, información, una respuesta esperada) puede resultar demasiado complejo. El estudio infiere que, en lugar de fomentar la creatividad, esto podría haber saturado cognitivamente a los estudiantes y limitado su capacidad para generar una pregunta matemática coherente. En coherencia con los resultados obtenidos, Possamai et al. (2013) sugieren que comenzar con una tarea menos estructurada y un prompt más abierto puede reducir la carga cognitiva y favorecer una mayor conexión con el contexto vital del alumnado. Los autores sugieren que en las primeras experiencias de formulación es preferible usar tareas no estructuradas (free prompt), que permitan a los niños mayor autonomía expresiva y conceptual. A medida que se avanza, podrían introducirse progresivamente estructuras más definidas. En este sentido, Lowrie (2002) afirma que las tareas abiertas expusieron a los niños a una mayor diversidad de estructuras problemáticas, lo que les animó a hablar sobre matemáticas de una forma más sofisticada. Al respecto, subraya que la apertura de las tareas

brindó a los niños la oportunidad de plantearse problemas cuya resolución suponía un reto y un placer mayor que las tareas que solían presentarse en los contextos de clase.

Por último, el estudio de Martín-Díaz et al. (2020) identifica cuatro factores clave en la fase de diseño de las tareas: (i) el uso de materiales familiares y manipulables; (ii) la selección de escenarios que promuevan la formulación en distintos entornos matemáticos (clasificación, ordenación, reparto, etc.); (iii) la consideración de las características del alumnado (como, por ejemplo, las limitaciones en lectoescritura) y; (iv) la posibilidad de expresar los problemas mediante dibujos, que actúan como puente entre la comprensión y la formulación verbal.

♦ *¿Qué impacto tiene la gestión docente de las tareas de FPM directas en el desempeño del alumnado?*

Todos los estudios coinciden en señalar que la gestión de las tareas de FPM es un factor clave para su viabilidad, y que además ejerce un impacto determinante tanto en la naturaleza de los problemas que formulan los estudiantes, como en su desempeño matemático (Codes et al., 2020; Lowrie, 2002; Martín-Díaz y Montes, 2022; Martín-Díaz et al., 2020; Possamai et al., 2023).

El estudio de Martín-Díaz y Montes (2022) enfatiza que la gestión de las tareas en el aula representa un desafío profesional que requiere un conocimiento profesional por parte del profesorado. Gestionar adecuadamente una tarea de FPM implica tomar decisiones didácticas en tiempo real, interpretar las producciones del alumnado y ajustar la intervención docente. Con respecto al conocimiento matemático (MK), al igual que para el diseño de las tareas, se destaca la necesidad de un dominio profundo de los contenidos matemáticos que se pretenden movilizar (como, por ejemplo, la clasificación, seriación o reparto), así como un uso adecuado de dicho contenido (fenómenos, representaciones, estructura, etc.). En cuanto al conocimiento pedagógico del contenido (PCK), resaltan la importancia de emplear estrategias eficaces de andamiaje, como, por ejemplo, adecuar el lenguaje para facilitar la formulación en los niños, emplear preguntas abiertas y escenarios significativos y hacer uso de apoyos visuales. En el mismo sentido, Codes et al. (2020) indican que la intervención docente es crucial para el andamiaje del pensamiento matemático incipiente. Por un lado, destacan la importancia de adaptar los elementos estructurales del problema (información, contexto, entorno matemático y requerimiento) a un lenguaje más accesible (historia y pregunta). Por otro lado, inciden tanto en la necesidad de proporcionar apoyo individualizado para que los niños identifiquen y verbalicen dichos elementos estructurales, como en el empleo de patrones lingüísticos (“la historia de este problema es... y la pregunta es...”) que faciliten su progresiva apropiación. Al respecto, Martín-Díaz y Montes (2022) destacan la necesidad de incluir en la formación inicial elementos que fortalezcan el conocimiento especializado para implementar estas tareas.

Los trabajos de Codes et al. (2020) y Lowrie (2002) subrayan que la intervención docente a través de la guía, la retroalimentación y la ayuda pedagógica desempeña un papel esencial en

los procesos de formulación del alumnado. En este sentido, Lowrie (2002) sostiene que cuando los docentes actúan como mediadores activos, los niños tienden a alejarse de estructuras repetitivas o cerradas y se animan a proponer problemas más elaborados y personales que inciden en la complejidad, apertura u originalidad de los problemas formulados.

El estudio de Lowrie (2002) concluye que la evolución hacia la formulación de problemas más sofisticados por parte de los niños estuvo fuertemente vinculada a cuatro aspectos: (i) la involucración de los niños en tareas de FPM; (ii) las acciones pedagógicas de andamiaje, esencialmente a través de preguntas orientadoras, que aumentaban la conciencia y comprensión de los niños sobre la formulación de problemas; (iii) la validación del interés personal a través de la creación de entornos de aprendizaje sensibles a los intereses de los estudiantes y; (iv) la reflexión conjunta sobre las estrategias de resolución. Lowrie (2002) indica que los niños apreciaban poder pedir ayuda al profesor, y sugiere que contar con la ayuda personalizada e inmediata del profesor favoreció que algunos niños se sintieran cómodos formulando y resolviendo problemas difíciles.

Por su parte, el estudio de Martín-Díaz et al. (2020) identificó tres aspectos claves ligados a la gestión de la tarea: (i) la organización en etapas progresivas: comprensión de la situación problemática, identificación de datos, formulación del problema y validación del problema; (ii) el grado de libertad: la docente regula la estructuración de la tarea en función del tipo de problema que busca promover; y (iii) el rol de los dibujos: los dibujos se emplean como evidencia del problema formulado y permiten acceder a los elementos constitutivos del mismo (datos, pregunta, contexto, etc.).

♦ *¿Qué sabemos sobre los problemas que formula el alumnado a través de tareas de formulación directa?*

Los estudios revisados revelan que los problemas formulados por los niños en Educación Infantil presentan una amplia diversidad en cuanto a estructura, contenido y grado de completitud, lo que permite obtener indicios tanto de su creatividad como de su comprensión matemática.

El estudio de Codes et al. (2020) muestra que los niños formularon problemas con distintos grados de completitud: algunos con enunciado completo (historia y pregunta), otros con enunciado incompleto (sólo pregunta o sólo historia) y otros con datos inventados. La diversidad de problemas matemáticos formulados observados en el estudio a partir de una misma tarea (situación problemática y prompt), evidencia un notable grado de creatividad y flexibilidad, así como diferentes niveles de comprensión de la tarea.

En la misma línea, Possamai et al. (2023) destacan que los problemas matemáticos formulados por el alumnado (4 de 19) se apoyaron en vivencias reales del alumnado, como situaciones cotidianas de compra-venta. Este hallazgo pone de relieve el valor pedagógico de conectar las tareas de formulación con el mundo vivido por los niños, como vía para facilitar la construcción

de problemas con sentido para ellos. No obstante, también se observó que en la mayoría de los casos (15 de 19) los niños produjeron descripciones narrativas sin formular una pregunta explícita, lo que indica que la FPM aún no estaba consolidada como práctica en ese contexto.

Por su parte, el estudio de Lowrie (2002) subraya que es poco probable que los niños, en sus primeras aproximaciones a la formulación, se aventuren fuera de los esquemas que les son familiares. En este sentido, se observa una clara correspondencia entre los problemas que formulan los estudiantes y los tipos de problemas que estaban habituados a resolver en el aula. La mayoría de las tareas creadas eran problemas cerrados basados en estructuras aditivas, cuya resolución requería un único paso (sumar o restar). Solo en unos pocos casos emergieron problemas vinculados al concepto de medida. Estos hallazgos refuerzan la idea de que los problemas que formulan los estudiantes reflejan, en buena medida, el tipo de enseñanza matemática que reciben, lo que subraya la importancia de diversificar los modelos de tarea si se desea ampliar el repertorio de formulaciones infantiles. Sin embargo, el mismo estudio evidencia que siempre que los estudiantes reciban una estimulación y acompañamiento adecuado y se les ofrezca un entorno propicio para la FPM, los estudiantes pueden avanzar hacia formas más sofisticadas y no rutinarias de formulación.

♦ *¿Qué sabemos sobre la dimensión afectiva y autonomía del alumnado en la FPM a través de tareas de formulación directa?*

Possamai et al. (2023) señalan que permitir a los niños formular sus propios problemas, promueve el desarrollo de una identidad matemática más positiva, con mayor implicación y sentido de pertenencia respecto a la actividad matemática.

♦ *¿Qué sabemos sobre las dificultades del alumnado durante la FPM a través de tareas de formulación directa?*

Según Lowrie (2002) es bastante difícil que los niños y niñas puedan formular problemas matemáticos apropiados sin una cantidad sustancial de práctica, instrucción específica o andamiaje progresivo. Así lo confirma el estudio de Possamai et al., (2023), donde se observa que la mayoría del alumnado (15 de 19) se limitó a describir la situación o narrar una historia sin formular una pregunta matemática. El mismo estudio subraya que la escasa experiencia previa de los niños con la resolución de problemas podría haber dificultado la estructuración de los problemas propuestos. Esto sugiere la necesidad de que los estudiantes se familiaricen progresivamente con la resolución de problemas antes de enfrentarse a la formulación, como base para interiorizar paulatinamente sus componentes estructurales y desarrollar el pensamiento matemático necesario para formular problemas matemáticos por sí mismos.

El estudio de Codes et al. (2020) identifica tres dificultades recurrentes: (i) dificultad para identificar todos los elementos estructurales de un problema; (ii) dificultad para redactar y/o expresar el problema con claridad; y (iii) la diferenciación entre situaciones con o sin contenido matemático. Los autores destacan que la mayoría del alumnado necesita la mediación activa de

la maestra para lograr formular problemas completos, coherentes y de naturaleza matemática. En una línea similar, Martín-Díaz y Montes (2022) reportan que dos de las dificultades más frecuentes son la formulación incompleta de los problemas (ya sea por omisión de la historia, los datos o la pregunta), así como las limitaciones en el uso del lenguaje matemático. Estos hallazgos evidencian la necesidad de un acompañamiento docente cuidadoso que facilite tanto la apropiación progresiva de la estructura de los problemas matemáticos, como el desarrollo de un lenguaje adecuado para expresarlos.

2.4.1.3. Modelos de triple ciclo resolución-instrucción-formulación

El estudio de Yamamoto et al. (2012) analiza cómo el alumnado de primer curso de primaria (6-7 años) desarrolla su capacidad para formular problemas aritméticos aditivos utilizando una herramienta digital interactiva denominada MONSAKUN Touch. Esta herramienta guía al alumnado a construir problemas de suma o resta mediante la combinación de oraciones en tarjetas, siguiendo la lógica de tres fases: (i) estado inicial, (ii) cambio y (iii) estado final. La investigación se llevó a cabo en Japón con 40 estudiantes durante nueve sesiones de clase de 45 minutos en un período de tres semanas, empleando como enfoque metodológico un diseño instruccional (pre-test/post-test). Tras recibir enseñanza sobre la resolución de problemas aritméticos, el alumnado fue instruido explícitamente en la estructura interna de los problemas aditivos, organizada en cinco componentes: (i) una oración simple incluye un objeto, un evento, un atributo cuantificable y su cantidad; (ii) un problema está compuesto por dos oraciones de existencia y una de relación; (iii) las oraciones se organizan en una historia con un orden lógico; (iv) existe una estructura de operación de cálculo; y (v) una estructura de operación de la historia (ej. combinación, cambio o comparación). Tras la enseñanza, el alumnado practicó la formulación de problemas utilizando MONSAKUN Touch, que les proponía construir problemas coherentes seleccionando y ordenando tarjetas. Aunque los estudiantes no inventaban libremente historias o preguntas, sí tomaban decisiones en torno a las estructuras necesarias para que el problema tuviera sentido. En este sentido, se trataba de una formulación estructurada, y el prompt implícito podría formularse como: “construye un problema resoluble con los elementos proporcionados”. El uso de MONSAKUN implicaba que los estudiantes debían realizar cuatro tareas: (i) decidir la estructura de cálculo (suma o resta); (ii) decidir la estructura narrativa del problema (por ejemplo, combinación o comparación); (iii) elegir una historia de contexto; y (iv) seleccionar tres oraciones (dos de existencia y una de relación) y ordenarlas correctamente. Estas tareas no debían realizarse en un orden fijo, lo que permitía cierta flexibilidad en la exploración. La herramienta incluía seis niveles de dificultad y proporcionaba retroalimentación inmediata mediante un botón de diagnóstico: el sistema indicaba si el problema estaba bien formulado y señalaba las tarjetas incorrectas. Los estudiantes podían revisar y ajustar su selección hasta construir un problema coherente. En resumen, MONSAKUN Touch facilitó un entorno controlado pero exploratorio para que el

alumnado desarrollara habilidades de formulación de problemas, comprendiendo su estructura interna a través de la experiencia guiada y el uso del error como herramienta de aprendizaje.

A continuación, se muestra un ejemplo propio para ilustrar la estructura de los problemas aritméticos aditivos empleada por Yamamoto et al. (2012) (Tabla 17).

Tabla 17. Ejemplificación de los cinco componentes estructurales de los problemas aritméticos aditivos (Elaboración propia)

Estructura problema aditivo	Ejemplificación
Oraciones simples	Cada oración simple contiene: • Un objeto o evento: canicas/dar • Un atributo cuantificable: cantidad de canicas • Una cantidad de medida: 3, 2, 5 Las oraciones simples son: • “Omar tenía 3 canicas” • “Su primo Mario le dio 2 más” • “Ahora Omar tiene 5 canicas”
Composición del problema	El problema está compuesto por dos oraciones de existencia: • “Omar tenía 3 canicas” • “Ahora Omar tiene 5 canicas” Y una oración de relación: • “Su primo Mario le dio 2 más”
Historia del problema (contexto)	La historia representa una transformación de medida, donde una cantidad inicial se incrementa por una acción (dar), y se llega a una nueva cantidad de medida. El orden adecuado de la oración es: • Oración de existencia inicial (3 canicas) • Oración de relación (le dieron 2) • Oración de existencia final (5 canicas)
Estructura de la operación de cálculo	El cálculo que permite hallar la cantidad de medida inicial o final: $3 + 2 = 5$
Estructura de la operación de la historia	La relación numérica que se narra en la historia: Transformación (aumento) = Resultado Es decir: 3 (tenía) + 2 (le dieron) = 5 (tiene ahora)

El estudio de Yamamoto et al. (2012) es único en su naturaleza, por un lado, integra la FPM en el aula mediante un ciclo triple que no ha sido replicado en ningún otro estudio, y, por otro lado, es el único estudio que combina la FPM con una herramienta digital (MONSAKUN Touch).

♦ *¿Qué sabemos sobre la viabilidad de la FPM a través de tareas de triple ciclo en la primera infancia?*

El estudio de Yamamoto et al. (2012) confirma que los estudiantes de primer curso (6-7 años) son capaces de formular problemas aritméticos simples en contextos estructurados y mediados tecnológicamente. Tras una fase previa de resolución y una enseñanza explícita sobre la estructura interna de los problemas aritméticos aditivos, los estudiantes lograron formular problemas coherentes utilizando la herramienta digital MONSAKUN Touch. Esta evidencia empírica no solo respalda la viabilidad de la FPM en edades tempranas, sino que, también valida el uso de la herramienta digital MONSAKUN Touch.

♦ *¿Qué sabemos sobre el potencial de la FPM a través de tareas de triple ciclo para promover el desarrollo del pensamiento matemático?*

El estudio muestra que, mediante la FPM, el alumnado no solo mejora su capacidad para construir problemas coherentes, sino que también profundiza en su comprensión de las operaciones aritméticas y las estructuras narrativas subyacentes. A lo largo de las sesiones, se observó un progreso sostenido en la capacidad de los estudiantes para reconocer y manipular estructuras semánticas propias de los problemas verbales, así como en su uso del lenguaje técnico, como “historia” y “expresión de cálculo”. Esta práctica, incluso cuando se lleva a cabo en entornos guiados, favorece el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y del sentido de las operaciones, y facilita la transferencia de aprendizajes hacia la resolución de problemas.

A través de esta práctica, hemos comprobado que el alumnado de primer grado fue capaz de formular problemas en el entorno, y que la enseñanza combinada con el uso del entorno de aprendizaje mejoró su capacidad tanto para formular como para resolver problemas, especialmente en los problemas de pensamiento inverso.

♦ *¿Qué impacto tiene el diseño de las tareas de triple ciclo de FPM en el desempeño del alumnado?*

La estructura de las tareas resultó ser un elemento clave para el éxito de la FPM. El uso de MONSAKUN, con sus apoyos visuales y progresivos niveles de dificultad, permitió a los estudiantes avanzar gradualmente en la comprensión y producción de problemas matemáticos. La enseñanza explícita sobre la composición de los problemas (tipos de oraciones, estructura narrativa y operación) fue determinante para que los estudiantes lograran formular problemas con sentido. El estudio valida esta aproximación instruccional y destaca su valor como recurso accesible, efectivo y motivador, tanto para docentes como para estudiantes.

♦ *¿Qué impacto tiene la gestión docente de las tareas de FPM de triple ciclo en el desempeño del alumnado?*

El uso de feedback inmediato en MONSAKUN ayudó a los estudiantes a corregir errores y a desarrollar estrategias de autorevisión.

♦ *¿Qué sabemos sobre las dificultades del alumnado durante la FPM a través de tareas de triple ciclo?*

Entre las dificultades más frecuentes se encuentran los problemas para integrar de forma coherente los distintos elementos estructurales de los problemas, como, por ejemplo, elegir un dato que no se correspondía con la pregunta o el contexto. Igualmente, se identificaron dificultades recurrentes en la formulación de tareas inversas, donde se requiere una transformación conceptual de las estructuras narrativas y operativas del problema. El desempeño de los estudiantes en este tipo de tareas se redujo considerablemente, lo que evidencia la complejidad de este tipo de formulación en los primeros años de escolarización.

2.4.2. Estudios en los que no existe una intencionalidad didáctica explícita para el tratamiento de la FPM

Los trabajos de Cheeseman, (2019), Fosse et al. (2020), Jastrzębowska, (2023) y Kalmpourtzis (2019) revelan que la FPM puede emerger de manera espontánea en contextos de juego libre, indagación, resolución de problemas y diseño de juegos, sin necesidad de una intencionalidad didáctica explícita centrada en esta práctica.

El trabajo de Cheeseman (2019) explora cómo los estudiantes formulan y resuelven problemas matemáticos de manera espontánea durante sesiones con distintos niveles de estructuración. El trabajo aborda tres casos independientes de niños y niñas de 6 años, detallando el contexto, el problema formulado y las estrategias puesta en marcha para su resolución. En los tres casos, la formulación de problemas no es un objetivo didáctico previsto, sino que emerge del interés y curiosidad de los propios niños y niñas. Por ello, entendemos que no hay ni situación problemática ni consigna (prompt). El primero de los casos, transcurre en un jardín de infancia en Alemania y se detona en un contexto de juego libre, donde una niña juega espontáneamente con un conjunto de materiales manipulativos (baldosas numéricas), sin ninguna consigna previa ni intervención directa del adulto. Los otros dos casos transcurren en Australia, en el marco de clases de matemáticas en la escuela. En el segundo caso, la formulación y resolución acontece cuando un niño explora espontáneamente balanzas suspendidas y materiales de pesaje en un espacio de exploración para favorecer la indagación diseñado por los investigadores, donde no hay ninguna consigna específica. En el tercer caso, una niña participa en una sesión en la que la maestra propone un problema (“ordenar frutas y verduras de mayor a menor peso”). La formulación de los problemas emerge a partir del problema inicial, cuando la niña lo reformula explorando nuevas preguntas, como, por ejemplo, ¿quién tiene la zanahoria más pesada de la clase?

El estudio de Kalmpourtzis (2019) explora la relación entre el diseño de juegos y la formulación de problemas matemáticos, en el marco de una intervención educativa llevada a cabo con estudiantes de 5 a 6 años en una escuela infantil. El trabajo se inscribe en una metodología de investigación basada en el diseño y parte de la hipótesis de que el diseño de juegos, como actividad creativa, estructurada y situada, puede entenderse también como una forma de formulación de problemas. En este sentido, se plantea que la participación de los niños en procesos de diseño de juegos puede favorecer el desarrollo del pensamiento matemático desde

edades tempranas. La intervención se desarrolla durante tres meses e involucra a 34 estudiantes, distribuidos en un grupo experimental (18) y un grupo de control (16). El grupo experimental participa en 24 sesiones de diseño de juegos, concebidas como situaciones de formulación de problemas. Estas sesiones se clasifican en tres tipos, en función del grado de estructuración de la tarea: estructuradas (a partir de juegos conocidos que debían modificarse), semiestructuradas (con materiales o ideas iniciales que debían completarse) y libres (diseño de juegos desde cero sin apoyo previo). Las actividades emplean prototipos de baja tecnología (papel, cartón, plastilina, lápices, etc.), lo que permite a los niños centrarse en los procesos de diseño y no en herramientas digitales. Cada sesión sigue una secuencia de cuatro fases: comprensión del reto, diseño, implementación y presentación/reflexión, y se realiza en pequeños grupos. En estas sesiones, los niños deben tomar decisiones sobre la estructura del juego, sus reglas, componentes y objetivos, entendiendo este proceso como una forma natural de formular problemas. El diseño del estudio incluye un pretest y un postest para evaluar tanto las habilidades de diseño de juegos como las de formulación de problemas matemáticos. En ambas pruebas, los estudiantes deben crear, sin apoyo externo, un juego y un problema matemático vinculados a patrones prealgebraicos. La evaluación se basa en una batería de indicadores comunes a ambas competencias: precisión, corrección, originalidad, dificultad, fluidez y flexibilidad, permitiendo identificar posibles conexiones entre ambos procesos y resultados desde una perspectiva compartida.

El estudio de Fosse et al. (2020) tiene por objetivo analizar cómo los docentes de educación infantil en Noruega perciben e interpretan las prácticas de formulación y resolución de problemas matemáticos que emergen espontáneamente durante el juego de niños y niñas de entre 1 y 5 años. Aunque las observaciones y relatos de los docentes que se recogen en el trabajo están referidos a esta franja etaria, no se especifica la edad específica de los protagonistas en cada caso. El enfoque de la educación matemática en esta etapa se basa en el juego como eje articulador del aprendizaje, y el currículum noruego otorga un mayor énfasis a la resolución de problemas que a su formulación. Los contenidos matemáticos se enmarcan en las seis actividades matemáticas universales propuestas por Bishop (1999), que ofrece una base cultural y conceptual para interpretar las experiencias infantiles. La investigación se desarrolla a partir de los testimonios de 16 docentes, y se focaliza en identificar cómo describen, de manera explícita o implícita, las acciones de los niños y niñas relacionadas con la formulación y resolución de problemas, en relación con las actividades universales de explicar y jugar, consideradas fundamentales en las experiencias matemáticas según el marco teórico adoptado.

El estudio de Jastrzębowska (2023) se enmarca en un proyecto más amplio de investigación basada en el diseño, cuyo propósito es investigar la relación entre un ambiente de aula dialógico y la propensión de los estudiantes a formular y resolver sus propios problemas. Con respecto a la formulación de problemas, el objetivo específico del estudio es explorar qué estrategias de enseñanza favorecen una formulación de problemas productiva. La investigación se lleva a cabo

en el contexto educativo polaco e involucra a una profesora y a 76 alumnos pertenecientes a los tres primeros cursos de educación primaria. No obstante, dado el interés de nuestro estudio, se atiende únicamente a los elementos del estudio que implican a los 27 alumnos de primer curso (6-7 años). El estudio examina tres intervenciones didácticas en las que se proponen situaciones-problemas centradas en el sentido numérico. El estudio describe tanto las estrategias puestas en marcha por el alumnado para la resolución de los problemas, como las intervenciones de la docente orientadas a promover el diálogo, la discusión y la negociación en torno a la resolución de los problemas. En lo que respecta al alumno del primer curso, el énfasis de las situaciones-problemas se sitúa en su resolución. Los procesos de formulación de problemas aparecen espontáneamente en el alumnado como un medio para avanzar hacia la resolución del problema, es decir, a través de reformulaciones del problema original.

♦ *¿Qué revelan los estudios que investigan la FPM emergente en contextos de juego libre?*

Las situaciones descritas en los estudios de Cheeseman (2019) y Fosse et al. (2020) reivindican el papel central del juego como motor de la actividad matemática infantil. Sus trabajos evidencian que la FPM puede surgir de forma espontánea como parte de una exploración lúdica sin necesidad de directrices.

Según Cheeseman (2019), los entornos de aprendizaje que mejor promueven la formulación de problemas en la primera infancia son aquellos que estimulan la curiosidad natural de los niños y permiten el desarrollo de su creatividad a través del juego. En este tipo de contexto se revela una profunda conexión entre el interés personal y el compromiso matemático. De hecho, los niños muestran una notable persistencia al intentar resolver los problemas que ellos mismos han formulado, lo que evidencia la fuerza motivadora que tiene la autoría sobre sus propios desafíos.

A continuación (Tabla 18), se organiza la información de los estudios atendiendo a la muestra, objetivo y enfoque metodológico:

Tabla 18. Características de los estudios que estudian la FPM emergente sin la existencia explícita de tareas (Elaboración propia)

Estudio	Muestra	Objetivo	Enfoque metodológico
Cheeseman (2019)	3 alumnos (6 años) en Alemania (Jardín de infancia) y Australia (1º de primaria)	Explorar la formulación espontánea de problemas en contextos donde no existe una intencionalidad didáctica sobre la formulación	Estudio de casos
Kalmpourtzis (2019)	34 alumnos (5-6 años) en Grecia Educación Infantil	Explorar la relación entre el diseño de juegos y la formulación de problemas	Diseño experimental con grupo control y experimental

Estudio	Muestra	Objetivo	Enfoque metodológico
Fosse et al. (2020)	16 docentes (1-5 años) en Noruega en Educación Infantil	Explorar percepciones docentes sobre la formulación y resolución emergente en el juego.	Análisis cualitativo de entrevistas
Jastrzębowska (2023)	27 alumnos (6-7 años) en Polonia (1º de primaria)	Explorar estrategias docentes que favorezcan la formulación productiva.	Investigación basada en diseño

A continuación (Tabla 19), se describen las situaciones de juego libre que detonan la formulación de problemas, junto con los problemas formulados por el alumnado que implican distintos entornos matemáticos (clasificación de objetos por tamaño, distancias y posiciones, volumen y la capacidad).

Tabla 19. Situaciones de juego libre que detonan la FPM junto con los problemas formulados por los estudiantes (Elaboración propia)

Estudio	Detonante	Problemas formulados
Cheeseman (2019)	Juego libre con material manipulativo (baldosas numéricas) en el rincón de matemáticas del aula	Ordenar horizontalmente las baldosas numéricas (1-9).
		Ordenar las baldosas numéricas (1-9) reorganizando y adaptando la disposición de las piezas a una alfombra con forma de rayuela.
		Ordenar las baldosas numéricas (0-9) reorganizando y adaptando la disposición de las piezas a una alfombra con forma de rayuela.
Fosse et al. (2020)	Juego libre con una caja llena de objetos (cucharas, camas, tazones, sillas, mesas, etc., de distinto tamaño) relacionados con el cuento Ricitos de Oro	Clasificar los objetos en conjuntos coherentes atendiendo al atributo tamaño (pequeño, mediano, grande)
	Juego libre con trenes de madera y piezas para construir circuitos	Construir un circuito para que un tren atravesase un túnel y caiga en una caja. Reformulaciones del problema modificando distancias, posiciones y recorrido del tren
	Juego libre con un coche de policía y objetos (muñecos, piezas de distinto tamaño y forma)	¿Cómo meter la mayor cantidad de objetos posibles dentro de un coche sin que se caigan?

La FPM en contextos de juego libre presentan los siguientes desafíos para el profesorado: (i) proporcionar materiales que favorezcan la exploración y despierten el interés de los estudiantes;

(ii) brindar tiempo suficiente para jugar y explorar; (iii) ser capaz de reconocer explícitamente la participación de los estudiantes en actividades de FPM; (iv) un cambio profundo en el rol del profesorado.

Según Cheeseman (2019), los entornos de aprendizaje que favorecen la emergencia de la FPM durante el juego libre implican que el profesorado debe: a) proporcionar una presencia atenta pero no invasiva; b) crear las condiciones para que la curiosidad matemática de los estudiantes florezca de manera natural y significativa; c) centrarse en observar, escuchar activamente y evitar intervenir de forma prematura o directiva tanto en el desarrollo de los juegos como del pensamiento matemático; y d) apoyar y facilitar los procesos de exploración y construcción matemática sin condicionar las ideas de los estudiantes.

Por su parte, el estudio de Fosse et al. (2020) revela que los docentes tienen dificultad para reconocer explícitamente la participación de los niños en actividades de FPM. El estudio sugiere que, para fomentar la formulación de problemas en la primera infancia, es esencial apoyar a las docentes en: a) desarrollar un metalenguaje que les permita discutir y reflexionar sobre las prácticas matemáticas de los niños; y b) promover el uso del lenguaje verbal por parte de los niños para explicar sus procesos de formulación de problemas.

♦ *¿Qué revelan los estudios que investigan la FPM emergente en otros contextos lúdicos?*

Los trabajos de Cheeseman (2019), Fosse et al. (2020) y Jastrzębowska (2023) revelan que el juego libre no es el único escenario lúdico que favorece la FPM. Los estudiantes también pueden jugar con las matemáticas del profesor, explorando, transformando e interpretando a su manera las acciones, preguntas o tareas propuestas por el profesor.

A continuación (Tabla 20), se describen las situaciones que detonan la formulación de problemas, junto con los problemas formulados por el alumnado que implican distintos entornos matemáticos (magnitud-medida: masa; conteo, decenas y unidades).

Los estudios de Cheeseman (2019) y Jastrzębowska (2023) enfatizan la importancia de ofrecer tareas desafiantes e interesantes que inviten a los niños a interactuar activamente con los contenidos matemáticos. Los resultados de ambos estudios sugieren, que el profesorado enfrenta dos grandes desafíos: (i) diseñar experiencias de aprendizaje matemático desafiantes que fomenten la experimentación y la exploración; y (ii) generar un clima de aula que preserve el espíritu de curiosidad, juego y autonomía característicos de la primera infancia.

En este sentido, el estudio de Jastrzębowska (2023) muestra que las tareas de resolución de problemas en el contexto de un aula dialógica que fomenta un aprendizaje colaborativo y la normalización del error como un medio para aprender, favorecen la reformulación de problemas. En cuanto al rol docente, además de señalar que la responsabilidad docente es proporcionar tareas desafiantes, apoyar el esfuerzo y animar la participación de los niños, incide en la importancia de proporcionar tanto andamiaje para el desarrollo lingüístico como ligado a

generar adherencia a las normas de un aula de indagación. Por otro lado, Cheeseman (2019) señala que el profesor debe respetar el ritmo y la lógica infantil, y dirigir sus intervenciones a la realización de preguntas que favorezcan la autonomía del estudiante y el surgimiento de conexiones matemáticas, en lugar de explicar o corregir. Ambos enfoques resaltan que la intervención docente debe orientarse a profundizar en el pensamiento infantil, promoviendo la reflexión y la matematización a través de preguntas abiertas que inviten a los niños a describir, argumentar o extender sus propias ideas, sin imponer soluciones ni caminos únicos.

Tabla 20. Situaciones lúdicas que detonan la FPM junto con los problemas formulados por los estudiantes (Elaboración propia)

Estudio	Detonante	Problemas Formulados
Cheeseman (2019)	Espacio de juego creado para favorecer la exploración de equipos de pesaje (balanzas suspendidas) y material (pequeños peluches, cubos, juegos de pesas de distinta forma y material) Resolución de un problema: Dada una colección conformada por una patata, una zanahoria, una cebolla y una naranja y una balanza, ordenar la colección en función de su masa y registrar sus hallazgos	Equilibrar objetos
		Construir una estructura para sostener las balanzas
		¿Quién tiene la zanahoria más pesada?
Fosse et al. (2020)	La maestra cuenta los gajos de naranja que le quedan por comer a un niño	¿Cuántos quedan? El niño se apropia del problema y cada vez que se come un gajo cuenta las que le quedan
Jastrzębowska (2023)	Resolución de un problema: $54 - 27 = 57 - 24$?	$4 - 7 = 7 - 4$?

Cheeseman (2019) alerta sobre los posibles efectos negativos de ofrecer experiencias matemáticas excesivamente estructuradas y, basándose en Clements y Sarama (2018), advierte que este tipo de prácticas puede restar a los niños la alegría y el asombro que caracterizan el descubrimiento matemático, además de limitar las oportunidades de enriquecer su juego a medida que amplían su conocimiento matemático.

Otro aporte significativo lo encontramos en el estudio de Jastrzębowska (2023), concluyendo que la FPM no sólo fortalece la comprensión conceptual, sino que también impulsa el desarrollo del lenguaje matemático.

Por último, la investigación de Kalmpourtzis (2019), única en su enfoque, revela que el diseño de juegos puede ser una estrategia didáctica eficaz para promover la FPM en niños y niñas de 5 y 6 años. El estudio demuestra que participar en el diseño de juegos, empleando materiales

simples (cartón, papel, plastilina, etc.), mejora las habilidades de FPM en la infancia y que existe una correlación positiva entre las habilidades de diseño de juegos y las habilidades de FPM. Al igual que el estudio de Jastrzębowska (2023), destaca la importancia del entorno participativo y del rol docente como pieza clave para promover la colaboración y la reflexión en los niños. El estudio organizó las sesiones en situaciones de diseño con distinto nivel de estructuración, partiendo de situaciones estructuradas y finalizando con situaciones libres; al respecto, el estudio concluye que los entornos de aprendizaje estructurados y progresivos son clave para favorecer que los niños avancen gradualmente en su autonomía.

2.4.3. Avances, vacíos y tendencias

La investigación sobre FPM en Educación Infantil ha experimentado una expansión reciente, aunque todavía limitada, que comienza a dar respuesta a preguntas clave sobre la viabilidad de esta práctica en edades tempranas, los desafíos que supone su implementación y las tendencias emergentes que perfilan nuevas líneas de indagación. A continuación, se analizan los avances, los retos aún abiertos y las proyecciones de futuro, atendiendo a la diversidad de contextos en los que se investiga la FPM y al grado de intencionalidad didáctica con que se introduce en el aula.

FPM con intencionalidad didáctica: avances y retos en la modalidad de doble ciclo

La modalidad de doble ciclo, en la que el alumnado resuelve un problema y, a continuación, formula uno similar, ha sido abordada en investigaciones como las de Chang (2007), Palmér y van Bommel (2020 y 2023), van Bommel y Palmér (2021) y van Bommel et al. (2024). Sin embargo, los estudios que exploran esta modalidad siguen siendo escasos y, hasta la fecha, solo se han documentado cuatro tareas implementadas con éxito, todas ellas con niños de entre 6 y 7 años. Esta situación evidencia un doble desafío: por un lado, la necesidad de diseñar propuestas viables específicamente orientadas a la primera infancia, y por otro, la de extender esta línea de investigación a niños menores de seis años, un grupo hasta ausente en este enfoque.

Un aspecto común en todos estos trabajos es el uso del prompt “formula un problema similar” como desencadenante de la tarea. Esta reiteración señala la conveniencia de diversificar los diseños y analizar cómo distintos tipos de prompts pueden incidir en la viabilidad de la tarea, en la calidad de los problemas formulados y en el desempeño matemático del alumnado. Pese a su limitada presencia, estas investigaciones ofrecen una contribución relevante al mostrar que la FPM puede integrarse como una prolongación reflexiva de la resolución, ampliando el repertorio de prácticas posibles en el aula. En particular, aportan indicios sobre el valor añadido que puede tener la combinación de resolución y formulación en la construcción del pensamiento matemático, el rol del docente en el acompañamiento de la tarea y la especificidad del uso del prompt como mediador didáctico.

Sin embargo, la replicabilidad de estas experiencias en contextos escolares habituales plantea desafíos importantes. En el caso de los estudios desarrollados por el grupo de investigación sueco, las tareas fueron diseñadas de forma colaborativa por maestras e investigadoras con amplia experiencia en la enseñanza basada en resolución y formulación de problemas, lo que presupone un conocimiento especializado no generalizable. Por su parte, el trabajo de Chang (2007), aunque exitoso, se sitúa en un entorno de enseñanza individualizada, lo que limita su transferencia a contextos colectivos. Estas características ponen de relieve la necesidad de avanzar hacia condiciones de implementación que favorezcan la integración sostenible de esta modalidad en aulas reales, lo cual requiere tanto de la formación docente como del desarrollo de modelos de diseño y gestión que guíen su aplicación.

Un riesgo asociado a la aplicación poco reflexiva del doble ciclo reside en su potencial para generar formulaciones excesivamente próximas al problema resuelto. En ausencia de una intervención docente intencionada, la actividad corre el peligro de convertirse en un ejercicio de reproducción estructural, más que en una práctica auténtica de construcción de significado. Esta tendencia puede restringir la creatividad, la autonomía y la apertura que caracterizan a la FPM como práctica formativa.

Finalmente, la escasa cantidad de investigaciones, junto con su concentración geográfica e institucional, subraya la necesidad de ampliar el estudio de esta modalidad en contextos diversos y con muestras más heterogéneas. Ello permitiría avanzar en el conocimiento sobre su viabilidad, impacto didáctico y condiciones necesarias para su implementación efectiva en la primera infancia.

FPM con intencionalidad didáctica: avances y retos en la modalidad de formulación directa

La formulación directa, en la que el alumnado plantea un problema a partir de una situación dada, sin haber resuelto previamente uno similar, ha sido explorada en investigaciones como las de Codes et al. (2020), Lowrie (2002), Martín-Díaz y Montes (2022), Martín-Díaz et al. (2020) y Possamai et al. (2023). Sin embargo, los estudios que abordan esta modalidad son aún muy escasos. Hasta la fecha, solo se han encontrado tres tareas que han sido diseñadas e implementadas con éxito con niños de entre 4 y 6 años, lo que pone de manifiesto uno de los principales desafíos del campo: la necesidad de diseñar e implementar tareas de formulación de problemas que sean viables para la primera infancia.

Además, las investigaciones disponibles coinciden en señalar que la viabilidad alcanzada en dichas experiencias no garantiza su replicabilidad en contextos ordinarios de aula, ya que dependen de un diseño minucioso y de un acompañamiento pedagógico altamente especializado. En particular, los trabajos desarrollados por el grupo de investigación español (Codes et al., 2020; Martín-Díaz y Montes, 2022; Martín-Díaz et al., 2020) han sido gestados en el marco de proyectos colaborativos entre docentes e investigadores, lo cual ha permitido un

ajuste fino entre la tarea, las características contextuales del aula y las intervenciones de la maestra.

En consecuencia, otro de los retos que debe afrontar la investigación en este ámbito no solo consiste en ampliar el repertorio de tareas viables para la primera infancia, sino también en avanzar hacia propuestas que puedan ser transferidas y sostenidas en contextos reales de aula. Esto implica trabajar, por un lado, en la formación inicial y continua del profesorado para su capacitación en el diseño e implementación de tareas de FPM; y, por otro, en la construcción de marcos teóricos y modelos prácticos que orienten estos procesos y faciliten su replicabilidad en escenarios educativos diversos.

En esta línea, el estudio de Martín-Díaz et al. (2020) representa un avance prometedor, ya que ofrece un marco analítico para guiar tanto el diseño como la gestión de las tareas de FPM mediante formulación directa. Si bien existen propuestas recientes que modelizan los procesos de FPM en etapas superiores (Zhang, et al., 2022; Baumanns y Rott, 2022b), ningún estudio previo lo ha hecho específicamente en la educación temprana. Por ello, el estudio de Martín-Díaz et al. (2020) puede ser una herramienta útil para la formación de futuros docentes de Infantil interesados en integrar la formulación de problemas en su práctica.

Dada la limitada cantidad de estudios, resulta difícil establecer conclusiones generalizables. No obstante, un hallazgo común de todos los estudios mencionados (Codes et al., 2020; Lowrie, 2002; Martín-Díaz y Montes, 2022; Martín-Díaz et al., 2020; Possamai et al., 2023) apunta a que la viabilidad de esta modalidad se apoya fuertemente en la existencia previa de una cultura de resolución de problemas en el aula, lo que sugiere que la FPM directa solo puede consolidarse si se inserta en un entorno didáctico que ya valora y promueve el pensamiento matemático abierto

FPM con intencionalidad didáctica: avances y retos en la modalidad de triple ciclo

El estudio de Yamamoto et al. (2012) constituye una aportación singular en el panorama investigativo sobre la formulación de problemas matemáticos en la primera infancia. Es el único trabajo identificado que implementa un modelo de triple ciclo, resolución, instrucción y formulación, e integra el uso de una herramienta digital como medio de apoyo al aprendizaje. Si bien sus resultados ponen de manifiesto la viabilidad de la FPM en edades tempranas y destacan el potencial de esta práctica para promover el desarrollo del pensamiento matemático, conviene señalar que se trata de un estudio asilado en la literatura. La ausencia de estudios que repliquen este enfoque limita aún la posibilidad de extraer conclusiones generalizables. No obstante, el trabajo de Yamamoto et al. (2012) abre una vía prometedora para seguir explorando el impacto que pueden tener las tecnologías digitales, combinadas con una enseñanza explícita, en la comprensión estructural de los problemas y en la capacidad del alumnado infantil para formularlos.

FPM sin intencionalidad didáctica: espontaneidad y límites interpretativos

Una línea de investigación incipiente, pero relevante, ha explorado la formulación de problemas matemáticos en contextos en los que no se persigue explícitamente su enseñanza. Dentro de esta perspectiva, algunos estudios documentan la emergencia espontánea de formulaciones durante el juego libre (Cheeseman, 2019; Fosse et al., 2020), mientras que otros reportan su aparición en situaciones de exploración o resolución de problemas generadas por el profesorado, aunque sin una consigna directa orientada a la FPM (Cheeseman, 2019; Fosse et al., 2020; Jastrzębowska, 2023).

En conjunto, estas investigaciones muestran que los niños y niñas son capaces de generar y reformular preguntas con estructura de problema, especialmente cuando interactúan con materiales significativos, contextos narrativos o situaciones simbólicas que despiertan su curiosidad. Aportan así evidencia del potencial del alumnado infantil para involucrarse en prácticas próximas a la FPM desde entornos lúdicos, creativos y exploratorios. No obstante, estos trabajos también presentan ciertas limitaciones interpretativas, ya que no siempre distinguen con claridad entre la producción de preguntas espontáneas y la formulación consciente de problemas matemáticos. En particular, suelen quedar difusos elementos clave como la identificación de los componentes estructurales del problema (contexto, datos, pregunta, requerimiento) o el tipo de pensamiento matemático que subyace a las formulaciones.

Pese a ello, estos estudios ofrecen indicios valiosos para reconocer que la FPM no es una práctica exclusiva de contextos formalizados, sino una actividad humana que puede emerger de manera natural cuando se cultiva la curiosidad infantil en entornos ricos y se proporciona tiempo para explorar con autonomía. Revelan, además, que los niños no solo juegan con situaciones cotidianas, sino también con el saber escolar: algunos estudios muestran cómo el alumnado puede incorporar de forma lúdica las matemáticas aprendidas en clase y utilizarlas para crear sus propios problemas en escenarios de juego.

La principal limitación de esta línea de investigación radica en su carácter puntual, la escasa sistematización metodológica y la ausencia de diseños replicables en el aula ordinaria. Esto dificulta su aprovechamiento pedagógico y la construcción de orientaciones didácticas claras. Por ello, uno de los desafíos de futuro consiste en avanzar hacia estudios que profundicen en las condiciones que favorecen o restringen la emergencia espontánea de la FPM en estos contextos, así como en propuestas formativas que capaciten al profesorado para identificar, acompañar y dar sentido educativo a dichas formulaciones, integrándolas de manera más intencionada en la dinámica del aula.

Conclusiones finales sobre las distintas modalidades de investigación sobre FPM en la primera infancia

En conjunto, los estudios revisados muestran que la FPM es una práctica viable en la primera infancia bajo múltiples formas de implementación, aunque no exenta de importantes desafíos en términos de diseño, replicabilidad y gestión docente. Mientras que los enfoques espontáneos

permiten visibilizar el potencial natural del alumnado para plantearse retos y construir significados, las modalidades con intencionalidad didáctica ofrecen marcos más estructurados y sistemáticos, pero también más exigentes en lo que respecta a las condiciones necesarias para su implementación efectiva. Estos hallazgos refuerzan la necesidad de seguir investigando cómo introducir esta práctica de manera sostenible en la primera infancia, mediante propuestas que equilibren la complejidad didáctica con la realidad del aula.

Más allá de la modalidad empleada, se identifica una tendencia creciente a estudiar la FPM desde una perspectiva situada, que contemple de forma articulada el diseño de las tareas, la gestión docente durante su desarrollo y la actividad del alumnado. Desde esta mirada, enseñar a formular problemas no se reduce a ofrecer una consigna adecuada, sino que implica saber cuándo intervenir, cómo acompañar los procesos emergentes y qué dificultades pueden anticiparse en función del contexto. En esta línea, diversos estudios (Codes et al., 2020; Fosse et al., 2020; Martín-Díaz et al., 2020; Martín-Díaz y Montes, 2022; Palmér y van Bommel, 2020, 2023; van Bommel y Palmér, 2021; van Bommel et al., 2024) coinciden en mostrar que los estudiantes, incluso en ausencia de un dominio consolidado de la lectoescritura, pueden participar activamente en tareas de FPM. Este conjunto de evidencias pone de manifiesto que la competencia para formular problemas no depende exclusivamente de la capacidad para leer y escribir, sino que puede desarrollarse y expresarse a través de otros registros, como el lenguaje oral, el gesto, el dibujo o el uso de materiales manipulativos. Todo ello invita a repensar los supuestos tradicionales sobre las condiciones necesarias para introducir esta práctica en la Educación Infantil, abriendo nuevas posibilidades para su integración significativa y accesible en las aulas desde las primeras edades.

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

La idea de una metodología fija y universal para la ciencia es una ilusión. El progreso científico ha dependido más de romper reglas que de seguirlas.

Inspirado en Feyerabend (2007)

3.1. Introducción

3.2. La construcción del conocimiento científico y su dimensión paradigmática

3.3. Selección del paradigma

3.3.1. Cuestión ontológica

3.3.2. Cuestión epistemológica

3.3.3. Cuestión metodológica

3.4. Diseño de investigación: Estudio de caso

3.5. Selección del caso

3.6. Fases de la investigación

3.7. Técnicas e instrumentos de recogida de información y análisis de datos

3.1. Introducción

En este capítulo se desarrolla el marco metodológico que orienta la presente tesis doctoral. En primer lugar, se abordan los fundamentos epistemológicos de la investigación, reflexionando sobre la construcción del conocimiento científico y su dimensión paradigmática. A continuación, se justifica la selección del paradigma interpretativo, desglosando las cuestiones ontológicas, epistemológicas y metodológicas que lo sustentan. En el siguiente apartado se describe el diseño de la investigación, caracterizado como un estudio de caso único que atiende tanto al diseño como a la gestión de tareas de FPM en un aula de Educación Infantil. Asimismo, este capítulo incluye una descripción del caso de estudio y del contexto en el que se enmarca, así como una delimitación de las fases del proceso investigativo. Por último, se detallan las técnicas e instrumentos empleados para la recogida y el análisis de la información en los tres artículos que conforman la tesis, incluyendo los criterios de validación empleados.

En conjunto, este capítulo permite comprender la coherencia interna entre los objetivos de investigación, el enfoque adoptado y las decisiones metodológicas que orientan cada una de las fases del estudio.

3.2. La construcción del conocimiento científico y su dimensión paradigmática

En el marco de esta tesis, partimos del supuesto fundamental de que toda forma de conocimiento, incluido el científico, es una actividad intelectual profundamente humana, lo que implica, cómo señala Fourez (2010), decidir con qué ojos mirar el mundo. En consecuencia, conocer no es una actividad neutra mecánica, sino un proceso que implica elecciones, interpretaciones y posicionamientos. Toda práctica científica se encuentra inevitablemente impregnada de dimensiones éticas, políticas, sociales y psicológicas, y no puede comprenderse al margen de la historicidad, la cultura y los intereses humanos que la atraviesan.

Esta concepción se encuentra en consonancia con las reflexiones de autores como Fourez (2008, 2010) y Bronowski (1968, 1978), quienes advierten de que la ciencia no debe entenderse como una realidad objetiva, fija o ajena a quienes la construyen, sino como una producción histórica elaborada por seres humanos y para seres humanos. Como sostiene Maslow (1991), “sus orígenes están en las motivaciones del hombre; sus objetivos son humanos, y es creada, renovada y mantenida por seres humanos” (p. 277). Las teorías científicas, los modelos que generan y las estructuras organizativas que configuran, no descansan exclusivamente en una naturaleza externa o dada, sino también en la naturaleza humana que, en diálogo con el mundo, les da forma. En este sentido, resulta ilusorio, y hasta anticientífico, pensar en la ciencia como una empresa neutral, desinteresada y autorregulada, regida por reglas fijas e inmutables (Maslow, 1991).

Desde esta perspectiva, resulta necesario comprender que el conocimiento científico se organiza en torno a marcos de referencia compartidos, histórica y culturalmente situados, que orientan qué se considera objeto de estudio, cómo debe investigarse y bajo qué criterios se valida el conocimiento producido. A estos marcos estructurales y orientadores se les denomina paradigmas de investigación. El término paradigma ha sido objeto de diversas aproximaciones teóricas. A continuación, vamos a explorar algunas de ellas con el ánimo de captar matices complementarios que enriquezcan su comprensión.

El concepto de paradigma fue introducido por Thomas S. Kuhn (1971), quien lo definió como la “constelación de creencias, valores, técnicas, etc., que comparten los miembros de una comunidad dada” (p. 269). Desde esta perspectiva, un paradigma puede entenderse como el marco común que da cohesión a una comunidad científica, determinando tanto sus intereses como sus modos de investigar. Inversamente, una comunidad científica se constituye precisamente como tal en la medida en que comparte un mismo paradigma, lo que le permite la construcción colectiva del conocimiento.

En una línea complementaria, Fourez et al. (1997) conciben el paradigma como una grilla de lectura: es decir, como el conjunto de presupuestos teóricos, prácticos e ideológicos que han sido asumidos históricamente por una disciplina o corriente dentro de ella, y que permiten seleccionar y organizar lo que resulta relevante estudiar. Esta idea subraya que ningún conocimiento se produce al margen de una visión previa del mundo; por el contrario, todo acto de investigar está mediado por filtros que orientan nuestra mirada, delimitan el objeto de estudio y configuran el sentido mismo de lo investigado.

Carrillo y Muñoz-Catalán (2011) enfatizan que situarse en un paradigma implica adoptar una determinada concepción sobre el mundo y sobre cómo es posible conocerlo. Esta elección conlleva necesariamente una triple toma de posición: ontológica, al definir cómo se concibe la realidad; epistemológica, al precisar qué se considera conocimiento válido y cómo se accede a él; y metodológica, al determinar qué procedimientos son coherentes con dichas concepciones.

Por su parte, Páramo y Otálvaro (2006) definen el paradigma como el conjunto de supuestos filosóficos que orientan la búsqueda del conocimiento, incluyendo la noción de realidad y de verdad que se adopta, el rol que se asigna al investigador y la manera en que se concibe al sujeto de estudio. Esta definición pone de relieve que el paradigma no sólo afecta al marco conceptual desde el que se produce el conocimiento, sino también a las relaciones éticas y epistemológicas que se establecen entre quien investiga y aquello o aquellos que son objeto de estudio.

En síntesis, el paradigma de investigación constituye un entramado complejo que articula supuestos ontológicos, epistemológicos y metodológicos. No se trata de un simple enfoque técnico, sino de una cosmovisión que informa y condiciona todas las decisiones del proceso investigativo, desde la formulación del problema hasta la interpretación de los resultados. Reconocer esta dimensión paradigmática de la investigación no solo aporta claridad teórica y

coherencia metodológica, sino que permite asumir con responsabilidad y conciencia crítica las implicaciones del conocimiento que se genera.

3.3. Selección del paradigma

En algunas disciplinas científicas, como la física, la biología molecular, la informática o las matemáticas, existe un paradigma dominante o hegemónico que orienta de manera generalizada la producción de conocimiento. En estos campos, las cuestiones ontológicas, epistémicas y metodológicas presentan un alto grado de consenso, y la filosofía de base que los sustenta rara vez es objeto de disputa dentro de la comunidad científica. Sin embargo, en las disciplinas sociales y humanas, como la educación, la sociología o la psicología, la situación es diferente, ya que coexisten múltiples paradigmas que responden a concepciones diversas sobre la realidad, la construcción del conocimiento y el papel del investigador, lo que genera tensiones, diálogos y contrastes entre enfoques alternativos. En este contexto, y dado que la presente investigación se enmarca en el campo de la educación, una de las decisiones más relevantes en el proceso de la investigación educativa es la elección consciente de un paradigma que garantice la coherencia interna entre las dimensiones ontológica, epistemológica y metodológica que fundamentan el estudio (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2011; García-González, 2016).

Considerando la clasificación tradicional de paradigmas (Latorre et al., 1996), entendemos que, al acercarnos a la realidad educativa objeto de nuestra investigación, no pretendemos explicar, controlar y predecir, tal y como pretende el paradigma positivista. Tampoco aspiramos a conseguir una emancipación y transformación de la realidad, como pretende el paradigma crítico. Nuestro interés reside en identificar, describir, comprender e interpretar la gestión de una maestra durante una tarea de formulación de problemas. El objetivo es comprender qué dificultades emergentes del alumnado detonan la gestión de la maestra, cómo las interpreta la maestra, qué estrategias pone en marcha para atender y sostener dichas dificultades, y cómo promueve el desempeño del alumnado para promover que la consecución de la tarea llegue a buen término.

Por estos motivos consideramos que nuestra investigación está enmarcada en el paradigma interpretativo.

3.3.1. Cuestión ontológica

La cuestión ontológica, dentro del marco paradigmático de la investigación, se refiere a la forma y naturaleza de la realidad observada, así como a lo que se considera posible conocer de ella (Lincoln y Guba, 1985; Santos, 2002). En esta investigación, el objeto de estudio es la gestión de aula que una maestra de Educación Infantil realiza durante una sesión de formulación de problemas matemáticos. Esta gestión se concibe como una práctica compleja que articula, por un lado, las dificultades emergentes del alumnado al enfrentarse a la tarea, y por otro, las

demandas y estrategias desplegadas por la maestra para favorecer la comprensión y el progreso de los niños en el proceso de formulación.

En consonancia con los planteamientos de Fourez (2008) y Maslow (1979), se descarta la existencia de información “pura”, ya que todo conocimiento está inevitablemente filtrado por los marcos de interpretación del sujeto que observa. Como argumentan Fourez et al. (1997), toda observación es ya una forma de modelización, una representación de la realidad influida por el contexto del observador, sus proyectos, sus conocimientos previos e incluso por los destinatarios a quienes va dirigida esa observación.

Esta visión ontológica se alinea con la concepción interpretativa de la realidad defendida por Lincoln y Guba (1985), quienes sostienen que en este paradigma la realidad es múltiple, construida, holística y contextual, y que el investigador no puede separarse del fenómeno estudiado, ya que forma parte de él y contribuye activamente a su construcción. En esta línea, se reconoce que el conocimiento generado en el marco de esta investigación no busca acceder a una verdad única, sino a una comprensión situada y densa de la experiencia educativa tal y como es vivida por sus protagonistas.

En definitiva, la postura ontológica de este estudio asume que los fenómenos educativos deben entenderse como construcciones sociales que emergen de las interacciones entre sujetos en contextos específicos. Se reconoce, por tanto, la existencia de múltiples realidades, la imposibilidad de una objetividad absoluta y la necesidad de comprender lo educativo desde dentro, atendiendo a los significados, relaciones y condiciones que le dan forma.

3.3.2. Cuestión epistemológica

La cuestión epistemológica hace referencia a cómo concebimos el conocimiento, cómo se produce, qué se considera válido conocer y cuál es la relación entre el investigador y el objeto de estudio. Según Ritchie et al. (2013) y Snape y Spencer (2003), las discusiones epistemológicas en el ámbito de la investigación social se organizan habitualmente en torno a tres aspectos clave: la relación entre el investigador y el investigado, las teorías de la verdad y el modo en que se adquiere el conocimiento. A continuación, se desarrolla el posicionamiento epistemológico de esta investigación atendiendo a esta triple dimensión, en coherencia con la perspectiva socioconstructivista que se adopta.

a) Relación entre el investigador y el investigado

Desde esta perspectiva, el conocimiento no se concibe como algo externo al sujeto, que pueda descubrirse desde una posición de neutralidad, sino como un proceso relacional y situado en el que el investigador forma parte activa de la construcción del saber. Lejos de considerarse un observador externo, quien investiga se implica en el proceso, interactúa con los participantes y contribuye, con su presencia, decisiones y marcos interpretativos, a dar forma a lo que se investiga (Álvarez-Gayou, 2003; Snape y Spencer, 2003). Esta implicación es reconocida como

una condición necesaria para acceder a comprensiones profundas y contextualizadas de los fenómenos educativos, más que como una amenaza a la objetividad.

b) Teorías de la verdad

Esta investigación se orienta desde una noción intersubjetiva de la verdad, según la cual el conocimiento se valida por su capacidad de ser compartido, comprendido y consensuado entre sujetos en contextos específicos (Snape y Spencer, 2003; Bisquerra, 2004). En este sentido, se asume que lo que puede considerarse “verdadero” en el marco de la investigación social es el resultado de procesos de negociación, validación contextual y coherencia interpretativa, más que de verificación empírica universal.

En esta línea, y en consonancia con Latour (1992), se reconoce que la actividad científica no puede desvincularse de sus condiciones sociales de producción. Toda teoría, modelo o representación del mundo es el resultado de procesos de negociación, en los que intervienen relaciones de poder, grados diversos de certidumbre, tensiones epistemológicas y decisiones tomadas en contextos marcados por el riesgo y la contingencia. La ciencia, por tanto, no produce verdades absolutas ni inmutables, sino saberes provisionales y perfectibles, sujetos a revisión constante y sostenidos por comunidades epistémicas activas.

En esta misma dirección, Feynman (1990) afirma que el conocimiento científico se compone de afirmaciones con grados diversos de certidumbre: algunas altamente confiables, otras más inciertas, pero ninguna absolutamente cierta. Esta perspectiva invita a asumir una actitud de prudencia y apertura epistémica, propia de una ciencia entendida como práctica humana en construcción permanente.

En el marco de esta investigación, la búsqueda de consenso y validación no se limita a la mirada individual de quien investiga, sino que se extiende a través de espacios de discusión y contraste de interpretaciones, en los que participan distintos agentes implicados en el proceso de investigación. En particular, las interpretaciones de los datos han sido contrastadas en diálogo con la directora de este trabajo, así como con un investigador que ha participado en la elaboración de uno de los artículos incluidos en la tesis. Además, los procesos de revisión ciega por pares a los que se han sometido dichos artículos han propiciado negociaciones conceptuales y metodológicas con expertos en el área, lo que ha contribuido significativamente a afinar y validar las interpretaciones presentadas. Estos intercambios han constituido una instancia valiosa de evaluación intersubjetiva, que refuerza el compromiso con una verdad construida colectivamente y situada.

En definitiva, la verdad, en esta investigación, no se busca como una correspondencia definitiva con una realidad objetiva, sino como una representación construida, discutida y validada en el seno de una comunidad académica, con el propósito de aportar comprensiones significativas, coherentes y éticamente responsables sobre los fenómenos estudiados.

c) Modo en que se adquiere el conocimiento

El conocimiento en esta investigación se adquiere a través de un proceso de indagación inductiva para construir interpretaciones significativas y contextualizadas. Siguiendo a Snape y Spencer (2003), se busca identificar “patrones y asociaciones derivadas de las observaciones del mundo” (p. 14), partiendo de una situación educativa concreta: la gestión de aula que realiza una maestra de Educación Infantil durante una tarea de formulación de problemas matemáticos.

La construcción del conocimiento se fundamenta en un análisis detallado de las prácticas observadas, a partir del cual se elaboran indicadores, descriptores y categorías emergentes, con el objetivo de identificar qué acciones del alumnado detonan la gestión de la maestra, y qué rasgos caracterizan dicha gestión. Esta orientación metodológica, basada en la teoría emergente de los datos, permite captar la complejidad, dinamismo y singularidad del fenómeno educativo estudiado, sin imponer a priori categorías interpretativas externas.

No obstante, en la última fase del análisis, la investigación integra estrategias de naturaleza deductiva, que permiten poner en diálogo los hallazgos con la literatura previa en el campo de la educación matemática y, en particular, con investigaciones relacionadas con la gestión de aula y la formulación de problemas. Este proceso de contraste teórico no solo enriquece la interpretación de los resultados, sino que contribuye a la articulación de aportes significativos al conocimiento científico especializado en el área.

3.3.3. Cuestión metodológica

La cuestión metodológica hace referencia a las estrategias, técnicas y procedimientos que permiten investigar la realidad desde el posicionamiento ontológico y epistemológico adoptado. Tal como afirman Carrillo y Muñoz-Catalán (2011), esta dimensión no puede entenderse de manera aislada, sino como parte de una relación jerárquica articulada en tres niveles: la ontología delimita qué tipo de realidad se considera posible investigar; la epistemología define qué se considera conocimiento válido sobre esa realidad y cómo se puede acceder a él; y, por último, la metodología concreta el modo en que se desarrollará el proceso investigativo de manera coherente con las anteriores.

Desde esta articulación, la metodología de esta investigación se configura como una prolongación lógica y necesaria de nuestra postura ontológica y epistemológica. Al concebir la realidad educativa como una construcción social, múltiple y contextual, y el conocimiento como una elaboración intersubjetiva, situada y relacional, asumimos una metodología que permita comprender los significados que los actores atribuyen a sus prácticas en contextos reales y no controlados.

En coherencia con esta perspectiva, se recurre a una metodología de corte cualitativo, que permite acceder a la complejidad de las experiencias vividas y comprenderlas desde dentro. Como indica Grbich (2013), los procedimientos cualitativos son especialmente adecuados

cuando se pretende acercarse a un fenómeno con el fin de interpretar situaciones reales con profundidad, atendiendo a las múltiples dimensiones y significados que lo configuran. La elección de este enfoque no responde únicamente a una preferencia técnica, sino a la necesidad de respetar la naturaleza del objeto de estudio, la gestión de aula durante una tarea de formulación de problemas matemáticos, y de generar conocimiento significativo sobre él, en diálogo con los sujetos y los contextos en los que dicho fenómeno se produce.

Así, las decisiones metodológicas que guían esta investigación se derivan directamente de nuestra manera de entender la realidad, el conocimiento y el papel del investigador. Esta coherencia estructural refuerza la legitimidad del proceso indagador y orienta el uso de herramientas analíticas flexibles, capaces de capturar la riqueza, densidad y singularidad de los datos recogidos en el contexto educativo.

3.4. Diseño de investigación: Estudio de caso

Esta investigación adopta el diseño metodológico de estudio de caso, una estrategia ampliamente utilizada en las ciencias sociales y especialmente relevante en el campo de la Educación Matemática, por su potencial para comprender fenómenos educativos en su complejidad, singularidad y contexto natural (Bassey, 1999; Stake, 1995, 2020; Muñoz-Catalán, 2021; Yin, 2009).

En línea con la concepción de Stake (1995, 2020), entendemos el estudio de caso como “el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (Stake, 1995, p. 11). Mertens (2005) lo define como una investigación sobre una entidad concreta —sea un individuo, grupo, organización o comunidad— vista como una unidad holística cuya comprensión requiere un análisis extensivo en su contexto. Asimismo, Bassey (1999) lo caracteriza como una investigación conducida en profundidad en escenarios naturales, orientada a comprender una singularidad en su propio entorno. Esta perspectiva se alinea con un paradigma interpretativo que reconoce que los fenómenos educativos se desarrollan de forma holística y contextual, y que prioriza la comprensión profunda sobre la generalización estadística (Bonache, 1998; Muñoz-Catalán, 2009; Simons, 2011).

En este marco, el estudio de caso se concibe como un diseño metodológico en sí mismo, no como una mera técnica de recogida de datos, ya que ofrece una estructura global para guiar la investigación desde la formulación de la pregunta hasta el análisis e interpretación de los resultados (Bonache, 1998; Muñoz-Catalán, 2009). Como señala Simons (2011), este diseño resulta especialmente pertinente en el ámbito educativo porque permite estudiar “de forma natural” a los sujetos en acción, en sus escenarios reales de práctica. Además, Yin (2009) subraya su utilidad para captar significados en contextos auténticos, donde los fenómenos cobran sentido.

Concretamente, esta investigación se inscribe en la categoría de estudio de caso intrínseco (Stake, 1995, 2020) y único (Yin, 2009), dado que el interés principal radica en comprender en profundidad un caso particular que, por sus características, resulta relevante en sí mismo, y no tanto en ilustrar o desarrollar una teoría generalizable. Tal como indica Stake (2000), el estudio de caso intrínseco se justifica cuando el caso presenta una oportunidad única de aprendizaje, no porque sea representativo, sino por su potencial para ofrecer una visión rica y contextualizada del fenómeno. El caso lo constituye una maestra de Educación Infantil que implementa una tarea de FPM en su aula. El fenómeno educativo que se pretende comprender es la FPM en Educación Infantil, y el foco del estudio de caso está puesto en la gestión de aula de dicha tarea. La unidad de análisis la conforma la sesión de aula correspondiente a la implementación de la tarea.

La singularidad de este caso se configura por diversos factores: (i) el contexto educativo, una clase de Educación Infantil con niños y niñas de 4 a 5 años; (ii) la singularidad de la FPM en dicha etapa educativa; y (iii) la participación de una maestra experimentada en un proceso de co-diseño e implementación colaborativa con el equipo de investigación. Como subraya Muñoz-Catalán (2009), es fundamental delimitar el caso, explicitar sus límites temporales y contextuales, así como justificar su selección no en términos de representatividad estadística, sino de su capacidad para generar conocimiento profundo y significativo sobre el fenómeno estudiado.

Por último, en coherencia con la lógica del estudio de caso y el paradigma cualitativo que lo sustenta, esta investigación no persigue la generalización estadística, sino la generación de “generalizaciones difusas”, en el sentido propuesto por Bassey (1999) y desarrollado por Muñoz-Catalán (2009). Estas permiten ofrecer afirmaciones plausibles, abiertas a ser contrastadas o ampliadas en otros contextos, pero que no pretenden afirmar certezas universales. Como advierten ambos autores, el valor del estudio de caso no reside en la representatividad de su muestra, sino en la calidad del informe, la riqueza interpretativa y la posibilidad de iluminar la práctica y la teoría desde una comprensión situada y profundamente contextualizada del fenómeno educativo.

3.5. Selección del caso

La selección del caso respondió a circunstancias excepcionales derivadas del contexto de la pandemia por COVID-19. En el momento en que se preveía iniciar la recogida de datos en el aula, las restricciones sanitarias impidieron el acceso a los centros educativos, generando una situación de incertidumbre respecto a los plazos en los que sería posible realizar observaciones en condiciones normales. Ante esta situación, y con el objetivo de garantizar la viabilidad del estudio sin comprometer su calidad metodológica, se optó por analizar un caso previamente videograbado. Este material había sido empleado en una tesis doctoral anterior (Martín-Díaz, 2022), y fue puesto a disposición de la presente investigación con la conformidad del otro

doctorando y su director, al comprobarse que los objetivos y el problema de investigación de ambos estudios eran independientes y no se solapaban (en aquel caso se refería al conocimiento especializado de la maestra).

El estudio se enmarca en un proyecto de investigación colaborativa (en adelante PIC), constituido por docentes de diferentes niveles educativos (Educación Infantil, Primaria y Secundaria, profesorado universitario, estudiantes de máster y doctorado), todos ellos comprometidos con la mejora de la enseñanza y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas, entre los que se encuentra la directora de la tesis. El PIC tiene como eje la mejora de la práctica a través de la resolución y formulación de problemas. En este contexto colectivo, se propuso dedicar un curso académico a la indagación sobre la formulación de problemas matemáticos, con el objetivo de diseñar e implementar propuestas didácticas innovadoras que permitieran explorar este tipo de actividad en el aula.

Dentro del grupo PIC se seleccionó como informante a una maestra de Educación Infantil. Para preservar el anonimato de la maestra participante, a lo largo de las distintas publicaciones derivadas de esta investigación se han empleado distintos seudónimos (Beatriz, Gema y Elena). En todos los casos, dichos nombres hacen referencia a la misma maestra que protagoniza el estudio aquí descrito. En el presente documento, se utilizará de forma unificada el seudónimo de Beatriz. A continuación (Tabla 21), se describen los motivos por los que Beatriz fue seleccionada como informante principal:

Tabla 21. Criterios que justifican la selección de Beatriz como informante (Elaboración propia)

Criterio	Justificación
Experiencia profesional en Educación Infantil	En el momento del estudio Beatriz contaba con 15 años de experiencia docente en el segundo ciclo de Educación Infantil. Esta experiencia le otorga una comprensión profunda de las dinámicas del aula infantil y del desarrollo del alumnado a estas edades.
Participación en un proyecto de investigación colaborativa (PIC)	Durante su carrera Beatriz ha participado de forma activa y constante en espacios de formación continua y proyectos colaborativos. Su pertenencia activa al PIC durante más de 15 años le ha permitido estar inmersa en un entorno que favorece el diálogo entre práctica e investigación, la reflexión crítica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la apertura a propuestas innovadoras.
Disposición para la colaboración y reflexión profesional	Beatriz muestra disposición y compromiso con la innovación pedagógica, una actitud abierta hacia el desarrollo profesional, la experimentación en el aula y la construcción colaborativa del conocimiento desde la práctica.
Compromiso con propuestas didácticas no rutinarias (FPM)	Beatriz evidencia un compromiso con la enseñanza no rutinaria, orientada a fomentar el razonamiento, la reflexión y la expresión del alumnado. Muestra un interés particular por incorporar la FPM

Criterio	Justificación
	en el aula, actividad que consideraba a la vez estimulante y desafiante en el contexto de la Educación Infantil.
Conocimiento del alumnado y de su contexto sociocultural	Beatriz había sido tutora del grupo desde su ingreso en la escuela. En el momento del diseño e implementación de la propuesta, se trataba del segundo año en que tutorizaba al mismo alumnado, lo que había permitido consolidar una dinámica de trabajo estable, así como vínculos afectivos significativos entre la maestra y el alumnado. Esta continuidad favoreció tanto el diseño de una tarea ajustada a las características del grupo como su posterior implementación en el aula.

El diseño de la propuesta didáctica partió de un proceso colectivo de lectura y discusión en el seno del PIC, donde se identificó la escasa disponibilidad de literatura específica sobre formulación de problemas en Educación Infantil. Esta ausencia, lejos de desincentivar, supuso una motivación adicional para Beatriz, quien asumió el reto de diseñar una sesión original para su aula. Antes de implementarla, se realizó una simulación parcial en el grupo de trabajo, con el objetivo de anticipar posibles dificultades y mejorar su diseño.

La sesión se llevó a cabo en el aula habitual de Beatriz durante el curso 2017-18, en un colegio público del suroeste de España, en una localidad de aproximadamente 13.000 habitantes. El grupo estaba conformado por 20 niños y niñas de 4 años, a quienes Beatriz acompañaba como tutora desde su incorporación a la etapa escolar. Se trataba de un grupo cohesionado, habituado a las dinámicas de trabajo colectivo y respetuoso con las intervenciones de sus compañeros, lo que facilitó el desarrollo de la propuesta. Si bien no se detectaban necesidades educativas específicas, se señalaba la existencia de dos estudiantes que requerían especial atención por sus dificultades de aprendizaje y conducta.

La sesión fue íntegramente videograbada y transcrita para su posterior análisis. El objetivo pedagógico de Beatriz era que el alumnado aprendiera a formular problemas a partir de situaciones planteadas en diferentes escenarios. La presente tesis se enfoca en una de las tareas. La tarea de formulación de problemas implementada en el aula se diseñó a partir de un mural (Figura 8).

La actividad comenzó con la agrupación del alumnado en asamblea, momento en el que Beatriz recordó las normas básicas de participación en el aula y compartió una breve historia sobre las medallas Fields, con el propósito de contextualizar y dar sentido a la actividad matemática que se iba a desarrollar.

Inicialmente, el mural permaneció cubierto por una tela, lo que generó expectación y curiosidad en el grupo. Al descubrirlo, se presentó la consigna de la tarea y se invitó a los niños y niñas a identificar y comentar libremente los elementos que observaban en la imagen. Esta fase inicial

dio lugar a múltiples intervenciones espontáneas, en las que el alumnado compartió aquello que les resultaba llamativo o familiar. Una vez satisfecha esta necesidad de observación y expresión, se dio paso a la fase central de la tarea. En este momento, Beatriz retomó la consigna y puso el foco en el objetivo principal: formular problemas matemáticos. Para ello, explicó que debían inventar una historia basada en el mural y formular una pregunta cuya respuesta no fuera evidente y exigiera pensar.



Figura 8. Situación problemática presentada mediante un mural como punto de partida para la formulación de problemas (Carmona-Medeiro et al., 2024)

Con la ayuda de Beatriz, las contribuciones del alumnado evolucionan progresivamente hasta formar una historia coherente acompañada de una pregunta adecuada. La tarea transcurre durante una hora aproximadamente, una vez que la mayoría del alumnado ha tenido la oportunidad de formular un problema, se da por concluida la actividad.

3.6. Fases de la investigación

Antes de abordar en detalle las fases que han estructurado el desarrollo de la presente investigación, resulta pertinente recordar la pregunta de investigación, así como el objetivo general y los subobjetivos que guían este estudio (Tabla 22). Aunque estos elementos han sido presentados previamente en el epígrafe 1.3 del capítulo inicial, su recuperación en este punto resulta fundamental para favorecer la coherencia del discurso y facilitar la lectura comprensiva del marco metodológico.

La definición de las fases de investigación no puede comprenderse de manera aislada, sino que debe interpretarse en estrecha relación con el propósito general que orienta el estudio y con las decisiones metodológicas que se derivan de dicha orientación. Tal como señala Maxwell (2013), los distintos componentes de un diseño cualitativo (objetivos, preguntas, métodos, marco teórico y procedimientos) constituyen un sistema interconectado, en el que cada elemento cobra sentido en función del conjunto. En esta línea, traer nuevamente al primer plano

los elementos centrales del diseño investigativo permitirá al lector situar adecuadamente cada fase dentro del entramado general de la investigación.

Tabla 22. Pregunta de investigación y objetivos del estudio (Elaboración propia)

Pregunta de investigación	Objetivo general	Objetivos específicos
¿Qué desafíos implica la integración de la formulación de problemas matemáticos en el aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la gestión de aula?	Analizar cómo una maestra gestiona una tarea de FPM en un aula de Educación Infantil (4-5 años) desde una perspectiva relacional, en la que las acciones de la maestra se configuran en respuesta a las necesidades, dificultades y acciones del alumnado.	Objetivo 1.- Caracterizar los dilemas que la maestra enfrenta durante el diseño y gestión de una tarea de FPM. Objetivo 2.- Caracterizar la gestión docente durante la implementación de una tarea de FPM, con especial atención a las demandas matemáticas que se establecen y las acciones del alumnado que las detonan. Objetivo 3.- Identificar y analizar las dificultades emergentes que experimenta el alumnado durante las distintas fases de la tarea de FPM.

La investigación se ha llevado a cabo a través de cuatro fases. La primera fase fue previa a la configuración de los objetivos específicos y al diseño y elaboración de los tres estudios que conforman la presente tesis por compendio.

Durante esta fase se hizo un primer abordaje al objetivo general de la tesis, permitiendo caracterizar tanto las acciones de la maestra como las del alumnado. Las distintas categorías, subcategorías, indicadores y descriptores emergentes permitieron decidir sobre qué aspectos específicos situar el foco de la investigación. De este modo, se obtuvo una primera visión general de la sesión desde la perspectiva de la gestión de la maestra. Los resultados de esta primera fase no forman parte del cuerpo de la tesis, pues fueron resultados preliminares que sirvieron de base a los tres estudios que constituyen esta tesis por compendio de publicaciones.

Las siguientes fases, ligadas al diseño y elaboración de los tres estudios que componen la tesis, permitió conformar nuevos interrogantes, más concretos, y delimitar los objetivos específicos de la tesis (Tabla 23).

Durante la segunda fase (Estudio 1) se abordan las variables implicadas en el diseño y gestión de una tarea de FPM, mostrando los dilemas inherentes al diseño y gestión, y cómo en la interacción con el alumnado la maestra aborda decisiones que implican modificaciones en la tarea. Durante la tercera fase (Estudio 2) se profundiza en la caracterización de las demandas

matemáticas formuladas por la maestra, las acciones del alumnado que las detonan y las relaciones entre ambas. Por último, en la cuarta fase (Estudio 3) se sitúa la mirada en el alumnado para examinar sus dificultades durante las distintas fases de la FPM.

Tabla 23. Interrogantes de los estudios y su relación con los objetivos específicos de la tesis (Elaboración propia)

Estudio	Interrogantes	Objetivos específicos
Estudio 1	¿Qué variables deben tenerse en cuenta en el diseño y la realización de una tarea de planteamiento de problemas en educación infantil?	Objetivo 1.- Caracterizar los dilemas que la maestra enfrenta durante el diseño y gestión de una tarea de FPM.
Estudio 2	¿Cuándo y cómo interviene la maestra durante la gestión de la FPM (en relación con la demanda matemática)?	Objetivo 2.- Caracterizar la gestión docente durante la implementación de una tarea de FPM, con especial atención a las demandas matemáticas que se establecen y las acciones del alumnado que las detonan.
Estudio 3	¿Cuáles son las dificultades que se presentan al alumnado de Educación Infantil en los procesos de FPM?	Objetivo 3.- Identificar y analizar las dificultades emergentes que experimenta el alumnado durante las distintas fases de la tarea de FPM.

3.7. Técnicas e instrumentos de recogida de información y análisis de datos

El proceso de análisis de los datos recogidos en esta investigación se inició describiendo las acciones de la maestra. En un primer momento, centré la atención en identificar, describir, caracterizar y comprender las acciones de la maestra de manera aislada, considerando exclusivamente su discurso y sus intervenciones pedagógicas en el aula. La dificultad experimentada durante el análisis me llevó a replantear el enfoque inicial adoptado, haciéndose evidente que las acciones de la maestra no podían comprenderse al margen de las acciones, comportamientos e iniciativas del alumnado. La gestión de la maestra, lejos de responder a una planificación estática, se configuraba como un entramado de decisiones contingentes (Rowland y Zazkis, 2013), profundamente influido por las contribuciones previas del alumnado. Esta constatación me llevó a reconocer la necesidad de reorganizar las unidades de análisis, considerando de manera conjunta cada acción de la maestra con las acciones inmediatamente anteriores del alumnado que la motivaban o condicionaban (Tabla 24). Esta decisión metodológica se encuentra respaldada por investigaciones que subrayan la naturaleza relacional y dialógica de la enseñanza (Karasova y Nehyba, 2023; McCarthy et al., 2016; Tatsis y Koleza, 2008).

Tabla 24. Ejemplo de la estructura de análisis efectuada sobre las unidades de información durante la fase 1 (Elaboración propia)

Intervención de la maestra		
M_{95,3}: “Pero dímelo con palabras... ¿Dónde está? ¿en qué parte está la mujer? [Señalando todo el mural] Porque mira, ese sí que tiene un problema, porque dice que quiere ir a comprar a todos los sitios y nada más que tiene una bolsa pequeña... A ver, Agustín ¿Dónde está esa mujer?”		
Interpretación de la acción docente		
Valora la respuesta del alumno como insuficiente (GE1-2). No admite como válido el empleo de lenguaje gestual para localizar al personaje en el mural (GE2). Establece un andamiaje, solicitando la revisión de la respuesta (DM3), un cambio de registro (gestual → estandarizado) (DM4 y GE4-2), y solicitando precisión en la localización de la mujer (DM2, DM7-2 y GE4-1). Recopila toda la información del problema proporcionada por el alumno hasta el momento, favoreciendo la integración del alumnado en la discusión (MI1).		
Categorías	Subcategorías	Indicadores
C2. Gestión del Aprendizaje	C2-1. Demandas Matemáticas (DM)	DM2. Solicitar precisión en las respuestas dadas
		DM3. Solicitar la verificación de las respuestas dadas
		DM4. Solicitar cambio de registro representativo
		DM7. Solicitar la exploración de la situación problemática
		Descriptor
	C2-3. Gestión del Error (GE)	DM7-2. Solicitar la identificación y reconocimiento de los atributos de los elementos del mural
		GE1. Identificar un error, obstáculo o dificultad
		GE2. No admitir como válida una intervención o respuesta
		GE4. Establecer un andamiaje o refuerzo social
		Descriptor
		GE1-2. Identificar una respuesta como insuficiente o ineficaz
		GE4-1. Establecer preguntas que favorezcan el avance en la exploración de la situación problemática
		GE4-2. Proporcionar información/ explicación/recurso para favorecer el avance en la exploración de la situación problemática
	C2-5. Motivación e Implicación (MI)	MI1. Favorecer la integración de toda la clase ante una intervención y/o respuesta de un alumno
Intervención previa del alumnado		
A_{100,3}: “Ahí [Señalando con el dedo el mural desde su sitio]”		
Interpretación de la acción del alumno		
El alumno (Agustín) emplea un lenguaje gestual para indicar desde su sitio la posición del personaje al que se refiere. Su respuesta no es comprensible ni para la maestra ni para el resto del alumnado (D5 y D8).		
Detonantes		
D8. La respuesta del alumnado es insuficiente o ineficaz		
D5. Intervención no comprensible del alumnado		

McCarthy et al. (2016), en un estudio de caso centrado en el análisis de las estrategias de cuestionamiento del profesorado en clases de matemáticas, sostienen que la comprensión de las decisiones docentes requiere atender no solo a las preguntas que se plantean, sino también a las respuestas que el alumnado genera durante el discurso en el aula. Su trabajo muestra cómo las

estrategias de seguimiento y sondeo se configuran como respuestas ajustadas a las ideas emergentes de los estudiantes, y permite identificar prácticas de enseñanza eficaces o ineficaces en función de dicha interacción. En esta misma línea, Karasova y Nehyba (2023), a partir de una revisión sistemática sobre gestión de aula, advierten que el análisis de la acción docente de manera aislada puede ofrecer una visión fragmentada de los procesos educativos. Las autoras defienden que las respuestas del profesorado deben comprenderse en relación con las conductas previas del alumnado, dado el carácter dinámico e interdependiente que define la interacción pedagógica.

Ambos estudios refuerzan el planteamiento adoptado en esta tesis, en la que se propone una mirada analítica que vincula cada intervención docente con las acciones del alumnado que la preceden, permitiendo así captar con mayor precisión la lógica situada de la gestión didáctica y el modo en que esta se construye en el flujo continuo de la interacción en el aula.

La presente investigación, estructurada como tesis por compendio, se compone de tres estudios de carácter cualitativo que comparten una misma unidad de análisis, una sesión de FPM implementada en un aula de Educación Infantil, pero que abordan distintos focos analíticos y emplean estrategias metodológicas diferenciadas. En todos los casos, la videograbación de la sesión constituye la fuente principal de información, si bien en el primer artículo se incorpora también el análisis de las reuniones del grupo colaborativo como fuente complementaria.

En el primer estudio (Carmona-Medeiro et al., 2024), el objetivo es analizar el diseño e implementación de una tarea de FPM desde la perspectiva de los dilemas profesionales (Sullivan et al., 2015). Para ello, se recurre a una estrategia metodológica de análisis de contenido (Krippendorff, 2004), desarrollada en varias fases y apoyada en una tabla de criterios construida a partir del marco teórico (Tabla 25).

La información relativa al diseño de la tarea proviene del análisis de las transcripciones de las reuniones del grupo colaborativo, mientras que la información de la gestión de aula proviene de la videograbación y transcripción de la sesión de aula. La codificación se realiza de forma individual por tres investigadores, seguida de un proceso de triangulación y discusión para alcanzar un informe consensuado. Esta estrategia permite explorar las decisiones docentes desde la planificación hasta la implementación de la tarea, así como los desplazamientos en las posiciones de la maestra frente a los dilemas identificados.

El segundo artículo (Carmona-Medeiro y Climent, 2024) se centra en caracterizar la gestión docente durante la tarea de FPM. Para ello, se emplea una estrategia de análisis basada en la teoría fundamentada (Grounded Theory), mediante un proceso de codificación abierta y comparación constante (Bryman, 2001; Charmaz, 2008). La información proviene de la videograbación y transcripción literal de la sesión de aula. La construcción de categorías, subcategorías, indicadores y descriptores emergentes (Tabla 26) se realiza siguiendo un enfoque inductivo y es validada mediante triangulación de expertos (Flick, 2007).

Tabla 25. Variables empleadas para el análisis del diseño y gestión de una tarea de FPM (Carmona-Medeiro et al, 2024)

Variables	Tipos	
Contexto	Matemático	Proporcionado por (a) una expresion matemática; (b) imágenes, figuras u otros gráficos; (c) una tabla; o (d) un patrón
	Realista	Proporcionado por (a) palabras o texto; (b) imágenes, figuras u otros gráficos; o (c) una tabla
	Real	
Lenguaje	Lenguaje matemático formal	
	Lenguaje coloquial	
Estructura	Estructurado	
	No estructurado	
Enfoque	La formulación de problemas matemáticos como medio	
	La formulación de problemas matemáticos como medio y fin	
	La formulación de problemas matemáticos como fin	
Nivel de interacción	Organización individual	
	Organización individual y grupal	
	Organización grupal	

Tabla 26. Categorías y subcategorías emergentes vinculadas a la gestión del aula matemática durante una tarea de FPM (Carmona-Medeiro y Climent, 2024)

Categorías	Subcategorías
C1. Control	C1-1. Normas Sociales
	C1-2. Flujo de la Clase
C2. Gestión del aprendizaje	C2-1. Demandas Matemáticas
	C2-2. Variables de la Tarea
	C2-3. Gestión del Error
	C2-4. Normas Sociomatemáticas
	C2-5. Motivación e Implicación

El análisis final permite delimitar con precisión las demandas matemáticas formuladas por la docente (Tabla 27), las acciones del alumnado que las detonan (Tabla 28), así como su distribución dentro de la categoría general de gestión del aprendizaje.

Tabla 27. Indicadores emergentes (DM1-DM9) relativos a la subcategoría Demandas Matemáticas (DM) (Carmona-Medeiro y Climent, 2024)

Demandas matemáticas
DM1. Solicitar la modificación del problema
DM2. Solicitar el desarrollo del contexto del problema
DM3. Solicitar el planteamiento de una pregunta para el problema
DM4. Solicitar la resolución de un problema
DM5. Solicitar la representación de un problema
DM6. Solicitar argumentación
DM7. Solicitar cambio de registro representativo
DM8. Solicitar precisión en las respuestas dadas
DM9. Solicitar la verificación de una respuesta dada

Tabla 28. Indicadores emergentes relativos a la acción del alumno (D1-D7) que detona la acción docente (DM1-DM9) (Carmona-Medeiro y Climent, 2024)

Acción previa del alumnado
D1. El alumnado tiene dificultades para proseguir con el desarrollo del contexto del problema
D2. La respuesta del alumnado es insuficiente o ineficaz
D3. La respuesta del alumnado se orienta hacia la formulación de un problema no matemático
D4. La respuesta del alumnado es incorrecta
D5. El alumnado no está conforme con la respuesta/aportación de la maestra
D6. La respuesta del alumnado no ha sido comprensible para la maestra
D7. La respuesta del alumnado es correcta

El tercer artículo (Carmona-Medeiro y Climent, 2025) explora las dificultades emergentes del alumnado durante la tarea de FPM. Al igual que en el estudio anterior, se recurre a un enfoque inductivo sustentado en la teoría fundamentada (Charmaz, 2008), mediante un proceso de codificación abierta, sin recurrir a categorías predefinidas. El análisis se desarrolla a partir de la transcripción detallada de la sesión videograbada, prestando atención tanto a los datos verbales como gestuales. A través del agrupamiento por unidades de significado, se construyen indicadores asociados a las dificultades del alumnado tanto en la fase de exploración como en la fase de formulación del problema (Tabla 29). Este análisis se complementa con la caracterización de los problemas formulados por los estudiantes en función de tres variables: naturaleza matemática, completitud y coherencia.

Tabla 29. Indicadores emergentes vinculados a las dificultades del alumnado (D1-D5) durante la tarea de formulación de problemas (Carmona-Medeiro y Climent, 2025)

Indicadores
D1. Dificultad para reconocer los elementos de la situación problema
D2. Dificultad para nombrar/comunicar los elementos de la situación problema
D3. Formulación de problemas de naturaleza no matemática
D4. Formulación de problemas incompletos
D5. Formulación de problemas inconsistentes

Cabe destacar que los procesos de validación de los marcos analíticos empleados han sido reforzados no solo mediante triangulación de expertos, sino también a través de los procesos de revisión por pares de las revistas científicas en las que se han publicado los tres artículos que integran esta tesis. La adaptación del marco de dilemas profesionales de Sullivan et al. (2015), así como la construcción de categorías, subcategorías, descriptores e indicadores emergentes en los artículos segundo y tercero, han sido objeto de revisión rigurosa por parte de evaluadores especialistas no solo en Educación Matemática, sino en el ámbito específico de la formulación de problemas matemáticos. Estas contribuciones externas han permitido refinar los instrumentos de análisis, fortalecer la validez del estudio y consolidar la solidez metodológica del trabajo.

En la siguiente tabla (Tabla 30), complementaria de la Tabla 23, que presentaba los objetivos de cada estudio y sus preguntas de investigación, resume la relación entre las técnicas empleadas, los instrumentos utilizados y las estrategias de análisis:

Tabla 30. Estudio, técnicas e instrumentos de recogida de información y análisis de datos (Elaboración propia)

Estudio	Técnica	Instrumento	
		Recogida de la información	Análisis de la información
Estudio 1	Análisis de contenido	Videograbación y transcripción de la sesión de aula; grabación de audio y transcripción de las reuniones del grupo colaborativo (PIC)	Codificación según marco de dilemas profesionales (Sullivan et al., 2015); triangulación de investigadores
Estudio 2	Codificación abierta (Grounded Theory)	Videograbación y transcripción de la sesión de aula	Codificación abierta y categorización inductiva (Grounded Theory); triangulación de expertos
Estudio 3			

Dentro del capítulo de resultados se presenta de manera más detallada el tipo de estudio, la técnica de categorización empleada, la descripción de los instrumentos de recogida de información y el proceso seguido para el análisis de los datos.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

“El observador es parte de la naturaleza que observa. Encaja en ella, pertenece a ella y se halla en ella como en su casa. Es parte de la escena, no el espectador de un diorama. Puede decirse que estudia a su madre mientras está en sus brazos” (Maslow, 1979, p. 103).

4.1. Introducción

4.2. Breve descripción del contenido de los artículos

4.2.1. Artículo 1

4.2.2. Artículo 2

4.2.3. Artículo 3

4.3. Comprensión de la gestión de la FPM: articulación de los estudios

4.4. Artículo 1: Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education

4.5. Artículo 2: Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en un aula de educación infantil

4.6. Artículo 3: Students’ difficulties with problem posing in early childhood education

4.1. Introducción

Este capítulo presenta los principales resultados obtenidos en el marco de esta tesis doctoral, estructurada como una tesis por compendio de publicaciones. En línea con los objetivos planteados, los tres estudios incluidos en esta investigación se han centrado en explorar cómo una maestra gestiona una tarea de FPM. Aunque cada estudio aborda una dimensión específica del fenómeno, en conjunto ofrecen una mirada complementaria que permite avanzar en la comprensión de la gestión de las tareas de FPM como una práctica didáctica compleja y situada.

A continuación, se sintetiza el contenido de cada artículo y, posteriormente, se ofrece un epígrafe que establece el nexo de unión entre ellos, destacando su coherencia interna y su contribución conjunta al campo de estudio.

4.2. Breve descripción del contenido de los artículos

4.2.1. Artículo 1

Artículo 1. Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education (Journal of Mathematical Behavior)

Este estudio explora las variables implicadas en el diseño y gestión de una tarea de FPM en un aula de Educación Infantil (4-5 años). A través de un estudio de caso único, se identifican cinco variables críticas que afectan tanto al diseño como a la gestión de la tarea: el contexto de la tarea, el lenguaje, el nivel de apertura de la tarea, el enfoque de formulación y los niveles de interacción. Los resultados muestran que estas variables no son estáticas, sino que se redefinen durante la implementación en función de las decisiones docentes y las dinámicas del aula. El estudio propone un marco de análisis útil para interpretar el diseño y gestión de tareas de FPM como procesos dinámicos y contingentes, aportando orientaciones relevantes para la formación docente.

4.2.2. Artículo 2

Artículo 2. Demandas matemáticas para el desarrollo de la FPM en Educación Infantil (PNA)

Este artículo se centra en el análisis de la gestión del aula durante una tarea de FPM, con el objetivo de identificar las demandas matemáticas formuladas por la maestra, las acciones del alumnado que las detonan y las relaciones entre ambas. La investigación se basa en un estudio de caso único, en una clase de 4-5 años, y emplea el análisis cualitativo de videgrabaciones. Se identifican nueve tipos de demandas, siendo las más frecuentes aquellas orientadas al desarrollo del contexto del problema. El estudio evidencia que las intervenciones docentes están estrechamente ligadas a las manifestaciones del alumnado y se configuran como respuestas situadas que buscan sostener la actividad matemática. Los resultados subrayan la importancia del acompañamiento pedagógico y del conocimiento especializado del profesorado para favorecer la FPM desde una perspectiva situada y dialógica.

4.2.3. Artículo 3

Artículo 3. Dificultades emergentes del alumnado en tareas de FPM (Education Sciences)

Este trabajo analiza las dificultades que enfrentan niños y niñas de 4-5 años al formular problemas matemáticos a partir de una situación dada. Mediante un estudio de caso único, se observan dos tipos principales de dificultades: (i) aquellas vinculadas a la exploración de la situación y (ii) las relacionadas con el planteamiento del problema en sí. El análisis muestra que estas dificultades no son homogéneas, sino que responden a trayectorias diversas dentro del aula, lo que refuerza la necesidad de considerar tanto el proceso como el producto en la evaluación de la FPM en la infancia. Este estudio contribuye al conocimiento sobre los retos cognitivos y expresivos que enfrenta el alumnado infantil y proporciona una mirada comprensiva que permite interpretar los problemas formulados como manifestaciones legítimas del pensamiento personal y matemático de los niños.

4.3. Comprensión de la gestión de la FPM: articulación de los estudios

Los tres artículos que conforman esta tesis comparten una preocupación común: explorar las condiciones que hacen posible la implementación de tareas de FPM en la Educación Infantil.

El primer artículo resalta la naturaleza dinámica de las tareas de FPM, mostrando los dilemas inherentes al diseño y gestión, y cómo en la interacción con el alumnado la maestra aborda decisiones que implican modificaciones en la tarea. El estudio muestra cómo la maestra modifica las variables de la tarea para favorecer su viabilidad. El segundo artículo caracteriza las dimensiones profesionales inherentes a la gestión de las tareas de FPM, centrando su atención en la dimensión relativa las demandas matemáticas. El estudio muestra la gestión docente como respuesta a la actividad del alumnado, evidenciando la centralidad del saber profesional para sostener el avance en la formulación. Finalmente, el tercer artículo visibiliza las dificultades del alumnado, lo que refuerza la necesidad de propuestas que integren apoyos pedagógicos específicos desde una comprensión situada del aprendizaje. Refiriéndose los tres artículos a la gestión del aula durante una sesión de FPM en Educación Infantil, el objeto de estudio del primer artículo es la tarea de formulación de problemas y cómo se va transformando, el del segundo es fundamentalmente las acciones de la maestra en relación con las demandas matemáticas que solicita al alumnado (entendidas como respuesta a acciones del alumnado), y, en el caso del tercero, el foco es el estudiantado y las dificultades del que este da muestras durante la interacción.

Los tres estudios adoptan un enfoque cualitativo, centrado en el análisis de la práctica en contextos reales de aula, lo que permite captar la complejidad inherente a la FPM en la Educación Infantil. Esta mirada situada se traduce en aportaciones útiles tanto para la teoría como para la práctica, al ofrecer herramientas de análisis, marcos interpretativos y ejemplos de implementación que pueden orientar la formación docente. Además, consideran la práctica de

aula como un proceso interactivo entre profesorado y alumnado, donde las acciones de cada uno se explican, en parte, como reacción a las acciones de los otros. Por otro lado, en los tres estudios se comparte una visión dinámica de la práctica de aula y los elementos que la constituyen (en este caso consideramos la tarea, las demandas que solicita la maestra y las dificultades que experimentan los estudiantes).

Por último, los artículos convergen en la idea de que la FPM no puede entenderse únicamente como una consigna o técnica, sino como una práctica cultural que requiere del profesorado un conocimiento especializado y una disposición a observar, interpretar y acompañar la actividad del alumnado. Esta tesis, por tanto, no solo documenta experiencias exitosas de FPM en Infantil, sino que contribuye a construir un conocimiento estructurado sobre cómo hacerlas posibles, sostenibles y formativas. La consideración de las características singulares de la Educación Infantil y del alumnado de esta etapa está muy presente en nuestra sensibilidad en el análisis e interpretación de los datos.

En el apartado que sigue, cuando consideremos de manera relacionada los resultados de los tres estudios y cómo dan respuesta a los objetivos de la tesis, podremos seguir poniendo de relieve como estos se complementan y relacionan.

Por otro lado, además de los distintos focos antes señalados, los tres estudios son de distinto corte. Así, si bien el primero, centrado en las variables de una tarea de FPM, tiene datos empíricos para argumentar y ejemplificar la propuesta, su orientación es más teórica, hacia un posible marco que permita analizar la FPM en Educación Infantil, con el foco puesto en la tarea que se propone y cómo se va modificando desde el diseño y durante la implementación. Así, la pregunta que orienta este artículo es: ¿Qué variables deben tenerse en cuenta en el diseño y la realización de una tarea de formulación de problemas en educación infantil? En los otros dos estudios partimos de los datos de las interacciones durante la sesión para intentar comprender: cuándo y cómo interviene la maestra durante la gestión de la FPM (en relación con la demanda matemática), y cuáles son las dificultades que se presentan al alumnado de Educación Infantil en los procesos de FPM. La pregunta a cuándo y cómo intervenir nos lleva a fijarnos, en primer término, en las acciones de la maestra y, para explicar estas acciones, las de los estudiantes que las detonan. La mirada en los estudiantes nos lleva a percibir dificultades en las que profundizamos en el tercer estudio.

Las perspectivas teóricas de los tres presentan también diferencias, si bien se enmarcan en el marco teórico de la propia tesis, presentado en el capítulo 2, sobre la formulación de problemas en Educación Infantil. En el primer artículo, intentamos comprender las decisiones de la maestra en relación con las modificaciones de la tarea como resultado de las tensiones o dilemas que experimenta durante la implementación de la tarea. Por eso nos es útil el marco de Sullivan et al. (2015), quienes a su vez se apoyan en Barbosa y de Oliveira (2013) sobre dilemas del profesorado en el diseño de tareas, que adaptamos para una tarea de FPM. A través de estos dilemas, intentamos aproximarnos también a la perspectiva de la maestra sobre la propia FPM

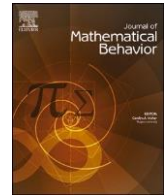
(por ejemplo, la finalidad que le atribuye en esta sesión), de una forma más general que sus acciones en sí, hacia lo que de estas se trasluce. En el caso del segundo estudio, sobre las demandas matemáticas de la maestra en relación con las acciones del alumnado, a partir de un marco base sobre la gestión de la FPM identificamos indicadores, emergentes de los datos, que nos permiten describir dichas demandas y las acciones del alumnado. Para el desarrollo del tercer estudio, necesitamos una mirada teórica sobre los problemas que se formulan en el aula como indicadores de las dificultades que enfrentan los estudiantes.

Los datos, en todos los casos, vienen dados fundamentalmente por la transcripción de la sesión de FPM. Sin embargo, en el primer artículo extraemos de aquí, para su análisis, la tarea de FPM que se va conformando en los distintos momentos de la sesión. En los otros dos estudios, serán las propias interacciones de los estudiantes y la maestra el material de análisis.



Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Journal of Mathematical Behavior



4.4. Artículo 1: Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education

Carmona-Medeiro, E., Martín-Díaz, J.P. & Climent, N. (2024). Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education, *Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101131. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101131>

Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education

Enrique Carmona-Medeiro ^a, Juan Pedro Martín-Díaz ^b, Nuria Climent ^b

^a Department of Didactics, Faculty of Education, Area of Didactic of Mathematic, University of Cádiz, Spain

^b Department of Integrated Didactics, COIDESO, University of Huelva, Huelva, Spain

Abstract: This research focused on understanding the variables inherent in the design and implementation of a mathematical problem-posing task. We developed a single case study of a problem-posing lesson by an Early Childhood Education teacher in a classroom with 4 to 5 year-old children who were unfamiliar with such activities. The results of this study show the potential of considering five variables serving as critical points that pose dilemmas linked to the design and implementation of problem-posing tasks. We found that the task changed from its original design during implementation, implying that the choices the teacher made about the variables were not static and were strongly linked to the purpose of the problem-posing task as well as to the contextual characteristics of the early childhood classroom. This study provides a potentially useful framework for analyzing the design and implementation of problem-posing tasks as a dynamic process.

Keywords: Problem posing, Task design, Early childhood education, Teaching, Case study

1. Introduction

Despite being foregrounded as a fundamental tool for mathematics education in classic works (Freudenthal, 1973), problem posing has only relatively recently attracted the attention of researchers (Cai & Hwang, 2020; Silver, 1994). This attention has been seen across educational stages, including primary (English, 1997), secondary (Koichu, 2020), and graduate (Rosli et al., 2015) levels, but to date little has been done in the sphere of early childhood education (Palmér & van Bommel, 2020).

Early childhood pupils tend to have a more open outlook, are attentive to detail, and are often more sensitive to context than older children (Kwon & Capraro, 2021). Hence, by incorporating problem posing at this stage, teachers can help to establish an early association of mathematics with real situations (Quintero, 2004). At the same time, problems posed by primary pupils can be more complex than teachers expect (as in Xu et al., 2019), suggesting that the approach could be adopted at the early childhood stage.

Because incorporating problem posing is challenging for teachers (Barlow & Cates, 2006), additional research is necessary to better understand the obstacles teachers face when designing

and managing problem-posing tasks (Harel et al., 2006). The effective implementation of a problem-posing task requires the effective involvement of the pupils, and the development of both problem-posing abilities and positive attitudes towards problem posing (Cai et al., 2022). In this paper, we consider a mathematical task to be any kind of structured environment (Watson et al., 2013) which the students are invited to explore with the purpose of focusing their attention on a specific idea or mathematical process. Further, we consider that tasks, in both their pre-active and active phases (Jackson, 1968), constitute a dynamic process that develops and changes during the lesson.

To explore the life cycle of a task from the teacher's perspective, this study considered variables along the timeline of the design and implementation of a problem-posing task, throughout which tensions or, as we shall call them, dilemmas are produced. A dilemma can be defined as a critical point at which the teacher is obliged to choose from a range of options (Sullivan et al., 2015).

In this study, we show how an experienced early childhood teacher planned and executed a problem-posing task with pupils who had no previous experience of this kind of activity. We give particular attention to what can be learned from the dilemmas that emerged at both the planning and implementation stages of the task.

Thus, the subject of this paper is the management of a problem-posing mathematics task with a particular focus on the way it develops from its design to its implementation. In doing so, we aim to answer the following research question: What variables should be taken into consideration in the design and implementation of a problem-posing task in early childhood education? With this study, we aim to contribute to the construction of theoretical frameworks for analyzing problem-posing teaching, the scarcity of which has been highlighted (Zhang & Cai, 2021). We also provide examples of teaching through problem posing in early childhood education, which can serve to counteract the lack of familiarity among teachers regarding how to put this approach into practice (Lee et al., 2018). We hope the study is of relevance to teacher education in terms of the implementation of problem posing in early childhood education.

2. Theoretical framework

2.1. Problem posing

There are numerous definitions of problem posing (Baumanns & Rott, 2022). We consider the posing of mathematical problems by pupils themselves either based on a given problem situation or generated by modifying existing problems (Cai & Hwang, 2020; Silver, 1994). Our focus henceforth will be on problems based on a given problem situation. In these cases, posing the problem occurs before attempts to solve it are made, and the aim is in the posing more than in the solution (Silver, 1994).

Cai and Hwang (2023) and Cai et al. (2022) divided problem-posing tasks into two parts: the problem situation and the prompt. The problem situation provides the context and the data that pupils can employ to create a problem, whereas the prompt provides instructions for guiding the pupils' posed problems, making them aware of what the task expects of them (for example, “pose as many problems as you can”; Fig. 1). According to Cai et al. (2022), the problem situation can be purely mathematical or real. The data provided can be qualitative or quantitative and can include mathematical expressions and diagrams (Cai & Hwang, 2020). In addition, a problem-posing task can be structured or unstructured (Baumanns & Rott, 2020, 2022) according to the level of openness made available to the problem poser.

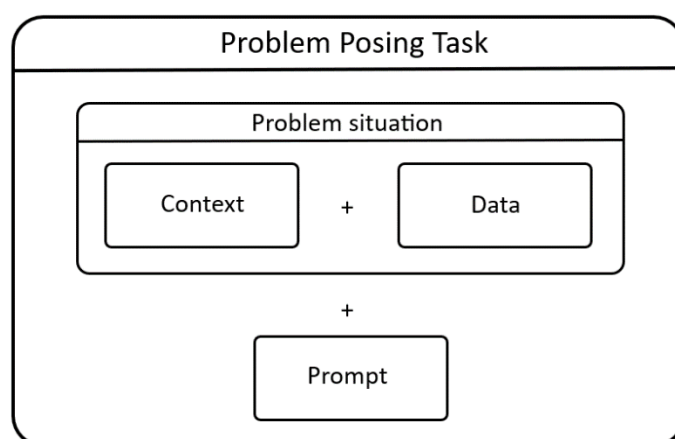


Fig. 1. Schematic representation of problem-posing tasks based on Cai and Hwang (2023).

Following Cai (2022), we use the terms “task” and “problem” in a broad sense. This allows any mathematical question and any mathematical task based on the problem situation to be deemed problem posing, giving rise to the posing of problems along any point of the routine-nonroutine continuum (Baumanns y Rott, 2020). Therefore, we will not differentiate between an exercise (or routine task, where the learner knows what to do to solve it) and a genuine problem (for which the learner has not immediate answer).

2.2. Dilemmas in the planning and execution of a problem-posing task

Sullivan et al. (2015), drawing on Barbosa & de Oliveira (2013) underlined five dilemmas facing the teacher at the planning stage of tasks. Applying these dilemmas to a problem-posing task can provide insights into the configuration of key aspects of problem posing from design to implementation. In what follows, we describe the five dilemmas differentiated by Sullivan et al. (2015) and how we reinterpret them in relation to problem-posing tasks.

2.3. Dilemma related to the context variable

For Barbosa and de Oliveira (2013), one of the dilemmas a teacher faces in designing a task is whether to situate it in a real or mathematical context. The context of the problem situation in a problem-posing task can be based on real-world referents or, at the other extreme, purely mathematical or abstract referents (Cai & Hwang, 2023). An intermediate alternative is to locate

the problema situation in a semi-real-life context (Ponte & Quaresma, 2012), which, unlike the real context, allows the incorporation of imprecisions that are not fully consistent with reality (Fig. 2).

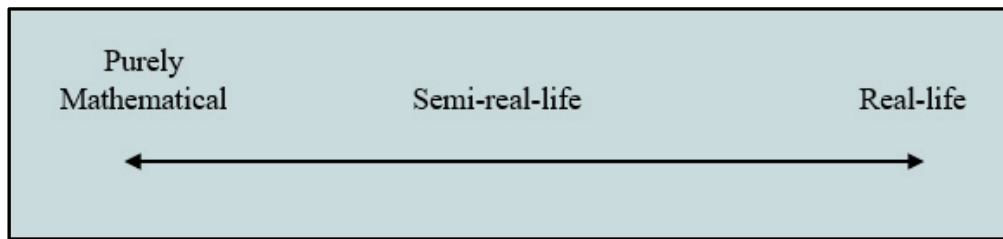


Fig. 2. The context dilemma in the design and implementation of a problem-posing task.

A problem-posing task in a purely mathematical context might request connections to real-life contexts, as in the case of asking pupils to create story problems to go with mathematical expressions (Cai & Hwang, 2023). Nevertheless, the context and data provided in such tasks remain purely mathematical. With respect to the context dilemma, we would say that teachers tend towards the mathematical end of the continuum and set their pupils to pose problems considering given mathematical contexts.

The real-life context in which the problem situation is located can be provided in terms of (a) words or text; (b) pictures, figures, or other graphical material; or (c) a table. Conversely, a purely mathematical context can be provided by (a) a mathematical expression; (b) pictures, figures, or other graphics; (c) a table; or (d) a pattern (Cai and Hwang, 2023).

2.4. Dilemma related to the language variable

Sociocultural perspectives of human learning are founded on the idea that humans construct and comprehend knowledge in a social and cultural context through interactions promoting communication, discussion, and negotiation (Vygotsky et al., 1978). Language is placed at the heart of learning (Lee, 2010), and communication, thought, and learning are interrelated processes shaped by culture (Mercer, 2004, p. 138). The dilemma for the teacher in planning a task arises from the need to consider, on the one hand, that an essential part of learning is mathematical precision and, on the other hand, that there is a need for language to be accessible for the pupils if it is to promote learning (Sullivan et al., 2015).

In terms of a task, the language includes the language promoted (i.e. the one the teacher ask for his or her students) as well as the language used by the teacher in setting and managing the task. The teacher can use and promote precision and formality in terms of mathematical language when they use and promote a linguistic register that prizes mathematical rigor above student comprehension.

Conversely, using and promoting a conversational or colloquial register can be recognized in the teacher's use of terms that are accessible to their pupils. We can conceptualize these

registers as comprising a continuum with invariable modes at the extremes, one involving a high and the other a low degree of mathematical precision (Fig. 3):



Fig. 3. The language dilemma in the design and implementation of a problem-posing task.

2.5. Dilemma related to the structure variable

As with language above, the structure of a task the degree of liberty it confers can be placed on a continuum from closed to open ended (Barbosa & de Oliveira, 2013). In this respect, Stoyanova and Ellerton (1996) identified three types of structures in problem-posing tasks: free when pupils pose problems based on an open mathematical situation (Silber & Cai, 2016) with no restrictions placed on how they go about this activity (Baumanns & Rott, 2020); semi-structured when the task provides more detailed information than free tasks and requires the posers to create problems using knowledge, skills, concepts, and mathematical relationships that have been previously learned (Baumanns & Rott, 2022); and structured when the task requires the new problems to be based on a previously solved problem. Considering the difficulty in distinguishing between free and semi-structured problem-posing tasks, we will adopt Baumanns & Rott's (2020) adaptation in which free and semi-structured are located at the end of a continuum running from open-ended (unstructured) to more structured tasks as the restrictions increase (Fig. 4).

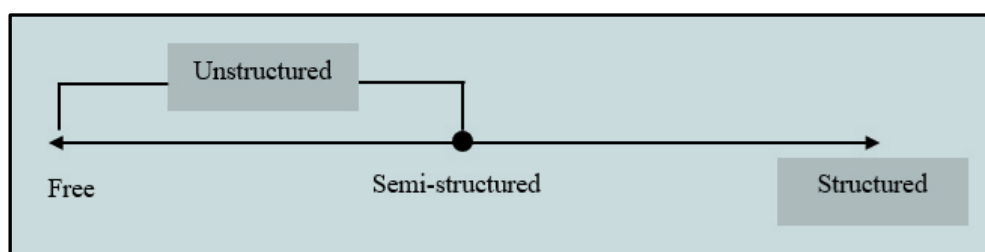


Fig. 4. The structure dilemma in the design and implementation of a problem-posing task.

Here, the dilemma in determining the structure of the task lies in the trade-off between taking account of the pupils' developmental stage and the learning goals. Settling on a free problem-posing task could be fruitful in terms of stimulating pupils' mathematical creativity (Silver, 2013), providing opportunities to make strategic decisions on routes and destinations (Sullivan et al., 2015). At the same time, however, such tasks necessitate a greater cognitive load than do semi-structured and structured tasks (Ngah et al., 2016). By contrast, opting to increase the structure can provide scaffolding to support pupils through each stage of the task (Barbosa &

de Oliveira, 2013) and can allow the teacher to focus pupils' attention on the mathematical elements.

The structure variable is heavily dependent on the problem situation and prompt provided by the teacher (Cai & Hwang, 2023).

This is because imposing or modifying a problem situation (the context or data) can shift the situation towards the structured end of the continuum (without it necessarily becoming fully structured); the prompt can likewise introduce a greater degree of structuring.

2.6. Dilemma related to the content focus variable

Barbosa and de Oliveira (2013) noted another dilemma in the choice of content focused on by the task, which is connected to the cognitive demand it involves. The dilemma for the teacher is judging the appropriate cognitive load, which can range from memorization at one extreme to doing mathematics at the other. Doing mathematics requires complex and non-algorithmic thinking, exploration and understanding of the nature of mathematical concepts, processes or relationships (Stein & Smith, 1998).

Problem-posing tasks have high cognitive demands, requiring creativity and a proactive attitude towards mathematics (Chico et al., 2022; Silver, 1994). In terms of the choice of content on which the problem-posing task focuses, problem posing can be oriented as a means, where the objective is to mobilize mathematical content linked to any area of mathematical knowledge, for example, to use a problem posing task to learn a determinate mathematical content such as when students are asked to posed a problem to show the application of $3/4 \div 1/2$, or as an goal in itself, where the objective focuses on the posing process and on the notion and nature of a mathematical problem, for example, to learn the different parts that a problem statement have (English, 1997). Working on problema posing as both a means and goal implies that the objective has a twin focus, that of mobilizing knowledge on the problem posing process and other mathematical knowledge. Hence, when a teacher is planning a problem-posing task, their dilemma can be understood to consist of deciding which goal to prioritize (Fig. 5).

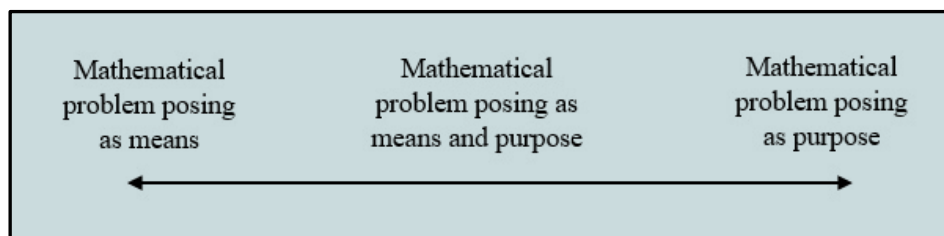


Fig. 5. The content focus dilemma in the design and implementation of a problem-posing task.

2.7. Dilemma related to the levels of interaction variable

The levels of interaction concerning a task refer to the interactions between the teacher and pupils as the latter seek to find the solution (Sullivan et al., 2015). In problem-posing tasks,

interaction is largely determined by how the pupils are organized (Cai, 2022) and by the teacher's role. The pupils can be organized in different ways to tackle the task (individually, in pairs, in small and large groups), and this can change as they work their way through the task. The teacher's role in managing the lesson implies different actions (when to intervene, how to intervene, how much to guide the flow of discussion, etc.) that modulate the levels of interaction (Leiß & Wiegand, 2005). Establishing roles can be done, in some cases, via the prompts, which can have a significant influence on the levels of interaction. Hence, for example, the prompts “pose a problem for a classmate to solve” and “pose a difficult problem for the whole class to think about” configure two roles, those of emitter and receiver, whereas another prompt might give all the pupils the same role. The teacher's dilemma in planning (including implementing) a problem-posing task lies in determining which kind of interactions to prioritize (Fig. 6).

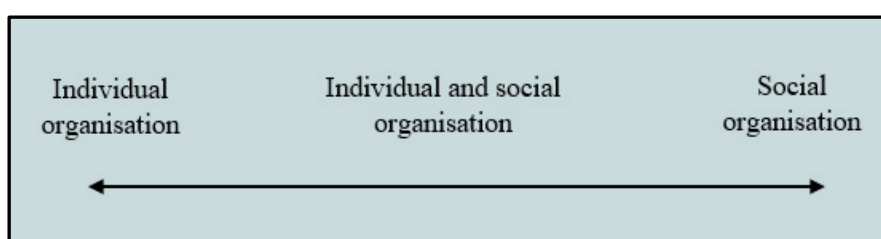


Fig. 6. The dilemma of the levels of interaction in the design and implementation of a problem-posing task.

3. Methodology

To explore the teaching of problem posing with early childhood pupils, a case study was carried out based on a single case design (Yin, 2009). The unit of analysis for this study was the planning and carrying out of a problem-posing lesson. The case study approach was suitable for this research because the locus of interest was a learning environment in which the researchers aimed to achieve a detailed account of the teacher's task management. The specific design was an intrinsic case study (Stake, 1995). The case was of interest in itself due to the uniqueness of using a problem-posing approach at the early childhood stage of education. Allied to this was the expertise of the teacher in question, who had training in the use of problem-posing methodology and was an active participant in a collaborative research group involving study of and reflection on mathematical problem-posing literature.

3.1. Context and participants

The case selected is that of an early childhood teacher, Beatriz for the purposes of this paper, because of the insights she provided into teaching the mathematical content in question (Yin, 2009). At the time of the study, Beatriz, a 39 year-old female, had 15 years' experience of teaching in the early childhood phase (ages 3–5). Her initial training had been in primary education, although all her teaching experience had been in early childhood education. The lesson observed (described in the following section) was Beatriz's designated class at the state

school where she worked. The class consisted of 20 pupils between 4 and 5 years of age. There were no children with specific needs among her pupils, although two required special attention on account of their behavior and learning difficulties. Beatriz had been their class teacher since they started school. The school was a state-run early childhood and primary school located in a small town of around 13,000 inhabitants in southwest Spain.

3.2. Data collection and analysis

With respect to lesson planning (prior to implementation), we drew on Beatriz's original handwritten lesson plan along with audio transcripts from three sessions of a Collaborative Research Project (known as the PIC based on its initials in Spanish). These sessions, in which Beatriz and two of the authors participated (in addition to another researcher and six teachers), involved discussion of the task design (Sessions 29/11, 17/01, and 31/01¹). Specifically, Session 29/11 involved discussion of problem posing with early education pupils and the possible ways this could be achieved. In the following session (17/01), Beatriz went through her lesson plan and the group shared their thoughts, whereas in the last session (31/01), the group rehearsed the plan, with Beatriz carrying out her intended lesson and the other participants taking the role of the pupils. There then followed a discussion of the task design based on the runthrough.

Beatriz also informed the PIC members that prior to the lesson on which this study is focused, she had carried out some preliminary work with her class on problem posing ([TP 29/11 8–10²]). A videorecording of the lesson (as described below) was also made by one of the members of the PIC (in the capacity of nonparticipating observer) and subsequently transcribed. All data pertaining to the lesson implementation was drawn from this source.

In preparation for the analysis, the authors undertook a careful reading of the dilemmas proposed by Sullivan et al. (2015) (based on Barbosa & de Oliveira, 2013) and discussed how these could be applied to problem-posing tasks. The discussion led to the incorporation of the dilemmas in Sullivan et al. (2015) guided by the theoretical principles of problem posing, as outlined in the theoretical framework and summarised in Table 1. As noted in the theoretical framework, instantiations of the variables should be seen as located along a continuum, rather than as discrete categories, with a view to capturing the development of the task over time.

Once all the information had been collated and the criteria for analyzing the dilemmas had been agreed on, the three authors carefully went over the transcriptions of the PIC meetings and watched the lesson recording with the corresponding transcription. This task served a dual purpose: It familiarized the researchers with the data that had been collected for the research and provided an opportunity for them to identify and interpret the dilemmas, based on Sullivan et al. (2015), that Beatriz encountered in planning and delivering the problem-posing lesson.

¹ The sessions took place on the 29th of November and 17th and 31st of January.

² TP29/11 8–10 indicates that this is the transcription of the 29/11 PIC meeting between lines 8 and 10. (Idem for the 17/01 and 31/01 meetings).

Each of the authors then carried out an individual content analysis (Krippendorff, 2004) of the transcriptions, identifying aspects of the complete problem-posing cycle, from planning to execution, linked to the five dilemmas described by Sullivan et al. (2015) and falling within the scope of the theoretical framework of this study. The purpose of this analysis was to identify units of information in which evidence could be identified for Beatriz's position with respect to one of the dilemmas.

Table 1

Summary of variables used for analysing the design and management of the problem posing tasks.

Variables	Types	
Context	Purely mathematical (provided by (a) a mathematical expression; (b) pictures, figures, or other graphics; (c) a table; or (d) a pattern).	
	Semi-real-life	(provided by (a) words or text; (b) pictures, figures, or
	Real-life	other graphical material; or (c) a table)
Language	Formal mathematical language	
	Colloquial language	
Structure	Structured	
	Unstructured	
Content focus	Mathematical Problem posing as means	
	Mathematical Problem posing as means and purpose	
	Mathematical Problem posing as purpose	
Level of interaction	Individual organization	
	Individual and Social organization	
	Social organization	

The three individual analyses were then jointly discussed by the three authors until a single analysis was agreed on, which became the analysis report. We first analyzed and agreed on the documentation relating to the lesson plan and then repeated the process for the transcription of the videorecording of the actual lesson. Once all information had been analyzed, a new document was written, incorporating results from both the planning and execution stages with respect to each dilemma and noting any possible shifts in these with time. During the joint analysis, it was noted that Beatriz adapted her original problem-posing task during the lesson. In total, five points of variance were identified, which are considered in the data analysis reported in the results section below.

3.3. Description of the lesson

Beatriz settled on an open-ended problem-posing task based on a large poster (Fig. 7). The task carried out during the problem-posing session lasted around an hour. The lesson followed a whole-class format throughout (with all the pupils sitting in a U shape so they could see the teacher and each other). The lesson evolved as follows (times are approximate):

First part (0–3 min): Beatriz reminds students of the assembly rules and tells them the story of the Fields Medal, which served to introduce and contextualize the mathematical activity they were about to do.



Fig. 7. Poster shown to pupils at the start of the problem-posing task (Martín-Díaz et al., 2020).

Second part (3–11 min): Beatriz uncovers the poster, letting the pupils see what was to serve as the first prompt for the problema posing task (“Let’s look for any problems that might be in the poster”), and invites the pupils to name the items they recognize in the poster (“First we have to look very closely at the poster and all the different things here”). The pupils spontaneously name the items that attract their attention. The children begin to identify details in the poster, occasionally prompted by Beatriz. Exchanges such as the

31 ³	P	<i>I can see a firefighter... and a ladder</i>
32	T	<i>Where is the firefighter?</i> [Taking a plastic rod]
33	P	<i>There</i> [Pointing at the poster from their place]
34	T	<i>Not there, where is he?</i>
35	P	[The pupil attempts to develop their reply but is interrupted]
36	T	<i>On the left or on the right? Up or down?</i> [Using the rod to indicate the relative positions on the poster]
42	T	<i>Let’s see, Adrián, your turn.</i>
43	P	<i>I can see a traffic sign</i>
44	T	<i>Adrián sees a traffic sign. Where is it?</i>
45	P	<i>Up</i>
46	T	<i>Up. Where? Here?</i> [Pointing to the roof of a house with the rod]
47	P	<i>No, next to the firefighter.</i>
48	T	<i>Next to the firefighter, oh yes, that’s right</i> [in a surprised tone]. <i>And what is the traffic sign like? What’s it like?</i>

³ The transcription records are labelled as follows: the number of each turn in sequential order; the speaker (T for teacher and P for pupil); the transcription of each speaker’s utterance; accompanying gestures in square brackets.

Third part (12–50 min): Beatriz commences the problem-posing task itself:

-
- 149 T *Now we're going to look for problems... let's think of some stories we can make up ... and questions we can ask... [...] Let's make up some problems that come from here [pointing to the poster] from what we can see here... OK?*
-

The pupils who come up with problems raise their hands and say them out loud. They are unable to formulate their problems in one go and require various attempts, supported by numerous interventions on the part of the teacher and their classmates. Each problem is posed collectively. The following excerpts illustrate the problem-posing processes.

-
- 155 T *Let's see, who can think of a problem? Come on Luis... Let's all listen to Luis.*
 156 P *A lady is walking along with a bag [pointing to the relevant part of the poster] ... she starts running and she gets hit by a car ...*
But this is a story... you have to tell the story and then ask a question which we have to think about to get the answer ... come on... this woman is going along with a dog [points to the poster with the rod] ... and now what happens? The question is which one is it?
-

The previous problem develops such that the woman wants to find her way home. The pupils pose the question, “Which street does she need to take?” and between them all identify the route.

-
- 169 T *You see? It's here [pointing to the starting point on the poster] ... and then you have to go round the corner and take this road here, and here [pointing out on the poster the route given by a pupil to the yellow house] ... OK?... And if...? Let's see, Lucía, and if...?*
-

At a later point, Beatriz tries again to elicit problems:

-
- 309 T *... And if I say a word ... and you all have to invent a problem for me with the word ... inside*
-
- 312 T *Invent a problem, Thiago, using the word 'inside'...*
 313 P [Seven seconds go by without an answer]
 314 T *Can you think of one?*
 315 P *It's really difficult [Another pupil calls out]*
 316 T *¿Can you think of one?... Or another problem that you can think of... come on... look, notice, for example, that there's a fruit and veg shop here...
 ... look closely, for example, here there are some things with a shape... there's a square shape, a circle... [Pointing on the poster to the windows in the house and some traffic signs].*
 317 T *Rectangle [Another pupils answers]*
 318 P *...which is in the shape of a rectangle... come on, let's make up a problem with the shapes...*
-

Multiple turns follow in which the pupils pose problems based on situations which for them represent problems, such as the following:

-
- 396 P *I've got a problem now.*
 397 T *You've got a problem now.*
 398 P *A car goes to the barber's... and a police car is right behind him*
-

Beatriz then tries another strategy to get the pupils to pose problems.

-
- 413 T *... I'm going to begin telling a story and you all ask me questions, OK? Otherwise this is going to be tragic, everyone is going to end up being run over by cars, falling out of trees ...*
-

-
- 424 T *Come on, I'm going to start a new problem, come and look... look, this mother wants to buy her son...*
 425 P *Some fruit*
 426 T *And what happens, María?*
 427 P *He wants an Apple, a grape and a pear [Pointing to the greengrocer's on the poster]*
 428 T *They want an apple, a grape and a pear ... so the question is...*
 429 P *How many pears, grapes and apples will there be?*
-

At this point in the lesson, Beatriz uses a drawing to take the posing of a problem further.

-
- 487 T *So come on, say it again... let's draw it because I haven't understood very well [Taking a small blackboard and placing it next to the poster as she speaks]*
-

-
- 491 P *There's only an apple, a pear, an orange and a grape*
 492 T *An apple, a pear, an orange [drawing on the board]*
 493 T *One bunch of grapes or one grape?*
 494 P *Just one*
 495 T *One grape...*
 496 T *And now what? What is the question?*
 497 P *How many fruits are there?*
 498 T *How many fruits are there? Very well, how many are there?*
-

-
- 516 T *One, two, three and four... it makes four... [Going over the fruit drawn on the board and the operation underneath] You all remember that it's written like this? [pointing to the operation written on the board] An apple, plus a pear, plus an orange, plus a grape makes four [going over the fruit drawn on the board and the operation underneath] (Figure 9)]*
-

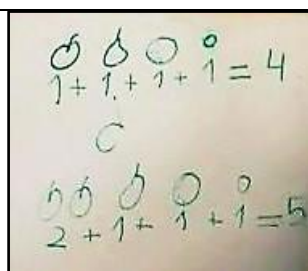


Figure 8. The teacher's representation of one of the posed problems

517	P	Two
518	T	Two, no?... and if, for example, there were two apples [Draws another apple on the board] and now a pear, an orange and a grape... now what have we got, how many are there here [Going over the fruit drawn on the board] (Figure 9)
519	P	Five

With some scaffolding on the part of Beatriz, the contributions on the part of the pupils gradually develop into a coherent story together with an appropriate question. Once most pupils have had a turn at posing a problem, the task is brought to a close.

4. Results

The data was analyzed by pinpointing variations in and developments to Beatriz's original design (which was designated Task 0) in terms of any substantive modification to the problem situation, the prompt, or both. In Task 0, the problem situation was supplied by the poster and the prompt by the instruction to "look for any problems that could be in the poster."

In the first modification to the original task, which we will designate Task 1, Beatriz invites the pupils to pose their own problems based on a problem she has just set them. In the first instance, this involves identifying and explaining a short journey ("And if...? Let's see, Lucía. And if...?" Turn 169). In the second instance, towards the end of the lesson, the problem consists of counting items of fruit ("And if, for example, there were two apples and now a pear, an orange and a grape...?" Turn 518). In both instances, the invitation to pose a problem follows directly from a problem that has just been solved, with the teacher eliciting an extension or new condition for the problem in keeping with the what-if-not strategy noted by Brown and Walter (1993). In the latter case, the teacher herself models the formulation of the new conditions.

In the second modification (Task 2), the teacher invites the pupils to pose problems based on a word evoking a mathematical object ("to invent a problem with the word 'inside'"; Turn 312). In this instance, the problem situation is the whole poster and the locus of the modification is the prompt, which is reformulated to introduce a new condition.

A third modification occurs (Task 3) when Beatriz invites the pupils to pose problems based on a specific item in the poster, in this case the fruit shop (Turn 316). In this instance, the problem situation is still provided by the poster, but only a designated section is relevant to the task whereas the prompt remains to pose a problem.

In the fourth modification of the task (Task 4), the teacher invites the pupils to pose problems based on a mathematical concept (“like a rectangle”; Turns 317, 318, and 319). The problem situation is again provided by the poster, from which context and problema data can be derived. However, the prompt is modified with the addition of a new condition to the problem in the form of the phrase “like a rectangle.”

Finally, in the fifth modification (Task 5), the teacher invites the pupils to pose problems based on a story which she herself begins (Turns 413 and 424). In this instance, the problem situation is supplied by a combination of the unfinished story and the poster (as this provides the source of elements with which the pupils can complete the story). The prompt is to “finish the story to make a story problem.”

Although the original task was adapted and modified to such an extent that it generated five variations, these do not represent the totality of the lesson. Between the points at which she introduced these modifications, Beatriz attempted to direct her pupils’ efforts towards posing problems. Hence, in addition to the problem-posing tasks, it is important to consider below various aspects of the variables that emerged during the lesson. In like fashion, we also consider points of decision-making regarding the lesson plan and task management.

4.1. Real-life or purely mathematical context

The problem situation from which the task started was a poster depicting a stylized real-life scene of a local neighborhood with people going about their daily business (traffic flow, buying and selling, and other professional activities; Fig. 7). The decision to use this problem situation had been made at the planning stage (“The pupils all go to their places at the start of the lesson and a poster is set up”; LP33). This particular poster was chosen, rather than others that were considered, because it embodied various mathematical elements connected with the current teaching unit (such as larger-smaller, the same-different, inside-outside, first-second-last, problem-solving, addition, and flat shapes [TP17/01 39–43]). Thus, from the start, in terms of this dilemma, Beatriz located the problem-posing task in a semi-real-life context, with both the context and the data provided via a poster (problem posing based on an picture, semi-real-life context). It is interesting to note that in making the choice of picture to use, she considered its potential for drawing out mathematics.

In the lesson itself, Beatriz’s opening gambit for the task is to invite the pupils to pose problems based on the poster (problem posing based on an picture, semi-real-life context; see Turn 149 in the lesson excerpts). Her utterance clearly requests the pupils to pose a story-problem given that she refers to a story and questions (“let’s think of some stories we can make up ... and questions we can ask...”). The reference to the story continues throughout the lesson, situating her turn as the first step in the problem-posing process.

At first, the pupils’ responses diverge from the intended mathematical orientation, as they direct their attention towards identifying accidents (e.g., a car running over a pedestrian⁴—Turn 398).

In response to this, Beatriz redirects their attention to new tasks that will enable the pupils to pose problems.

Nevertheless, in terms of the dichotomy between purely mathematical and real-life contexts, the context is invariable throughout the lesson. This is because the problem situations of all the tasks are provided by the poster. For example, in Task 1 the problem derives from one they have just solved and hence retains the poster as the source of the problem context, whereas in Task 3 the problema requires the pupils to focus on the fruit shop depicted in the poster.

The other variation of the task that we associate with the variable context is found in Task 5, when Beatriz asks the students to continue the story she has started (Turns 413 and 424). In this variation, she models the posing of a story problem, changing the mode of presentation of the problem situation (text instead of picture), although the type of context remains semi-real-life. Fig. 9 summarizes the development of this dilemma over the course of the lesson.

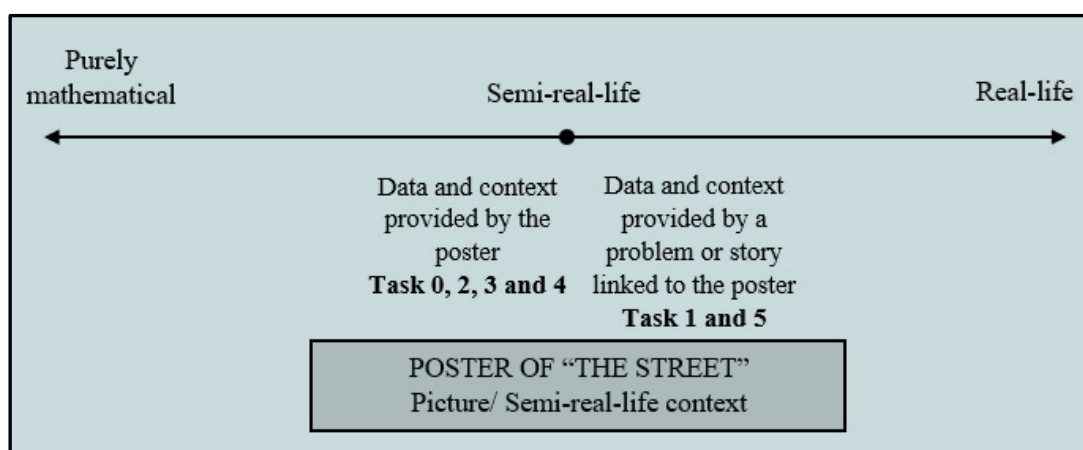


Fig. 9. The context dilemma in the design and implementation of the lesson.

4.2. Formal mathematical or colloquial language

Considering further the task modifications, it can be noted that Beatriz used a colloquial register most of the time. In Task 0, this can be seen clearly when she employs the notion of a problem (Turn 149). She introduces this notion to her pupils using an informal register carefully modulated to be comprehensible to them and approaching the concept through a story and “a question which we have to think about to get the answer” (Turn 157). Likewise, in Task 1, building on the fact that the pupils have posed a problem, she invites them to develop it with a familiar expression (“and if...?”). Again, in Task 3, Beatriz draws on situations familiar to the pupils when she suggests they pose a problem based on the fruit shop depicted in the poster.

By contrast, we can identify dilemmas governing the kind of language used in two adaptations of the task: Task 2 and Task 4. These modulations occur when Beatriz uses slightly more mathematical language to help the pupils focus their problem posing on basic mathematical

concepts (using the words “inside” and “rectangle,” which are associated with concepts appropriate to early childhood education).

Although, in general, Beatriz’s classroom voice can be located in the colloquial register, mathematical language can be identified at the points at which Beatriz considers the use of more rigorous language to be compatible with her pupils’ knowledge and stage of development. Hence, in both the language used by the teacher and that required by the task, a demand can be observed for the pupils to identify and communicate the logical attributes of the elements in the poster and their position.

Thus, in the first phase of the lesson when she is encouraging the pupils to identify and recognize items in the poster (objects, people, action), Beatriz repeatedly uses a procedure in which she asks each child who correctly identifies an item for one or more of its logical attributes (e.g., its position and shape in Turn 48). Also, Beatriz uses and encourages mathematical language when talking about relative positions and going from one point to another in the poster, employing topological relations (inside-outside) (Turn 36), projective spatial relations (left-right, above-below) (Turn 46), and metric relations (near-far; Turn 48).

Beatriz also uses mathematical language when she designates discrete quantities using different representative registers (spoken, pictorial, conventional symbols) and additive operations. A significant episode occurs while solving one of the problems posed about quantifying the amount of fruit. Although the pupils use counting as their basic strategy, Beatriz attempts to encourage the use of addition as a strategy to solve the problem, using formal and precise language in both the spoken and written modes. This enables her to introduce the concept of addition and its attendant symbols (+, =), articulating this alongside the strategies used by the pupils (Turn 516). Fig. 10 summarizes the development of this dilemma over the course of the lesson.

Formal mathematical language			Colloquial language	
←			→	
In relation to logical attributes (colour, shape, size, etc.)	In relation to topological, projective spatial and metric relations	In relation to discrete quantities and to the algebraic symbols for addition (+, =)	In relation to the notion of problem and concepts requiring a certain degree of abstraction	In relation to the pictorial representation of quantifiable discrete amounts

Fig. 10. The language dilemma in the design and implementation of the lesson.

Thus, there is evidence of a flexible use of language employed and encouraged by the teacher. The precision and rigor of mathematical language is employed alongside a colloquial and

mathematically imprecise language in situations requiring the teacher to attempt to make certain concepts comprehensible to the pupils even though these are still inaccessible.

4.3. *Unstructured or structured problem-posing task*

The main criterion for determining the structure to give the problem-posing task during the design phase arose in one of the PIC sessions. Here, Beatriz seemed especially concerned not to give her pupils too much information on which to base their problems, fearing that this might overload them and stifle their creativity [TP31/01 637–646].

Given that, in Task 0, Beatriz provides her pupils with the context and specific data for the problems they are to pose via the poster while also providing a free prompt, this original task can be considered an unstructured task. The five adaptations that the task underwent indicate how the degree of structuring was gradually increased, though it predominantly remained an unstructured problem-posing task.

The task with the greatest degree of structure which can be located on the fringes of a structured task, is Task 1 (Turn 169), in which Beatriz asks the pupils to pose a problem based on one they have just completed. Some of the adaptations the variable structure underwent were the result of introducing new prompts. For example, in Task 2, Beatriz modifies the task prompt, asking the pupils to “invent a problem with the word ‘inside’” (Turn 309). The prompt does not in itself convert the task into a structured situation, but it does constrain the kind of problems that can be posed because they must necessarily incorporate the term. Hence, the degree of structuring of the task increased compared to Task 0. The same occurred when the pupils were invited to pose a problem using the Word “rectangle” in Task 4.

Elsewhere, the task structuring increased due to a narrowing of the problem situation. This was the case in Task 3 (Turn 316), in which, although the poster continues to supply the frame of reference, it is the fruit shop which is considered the context and potential source of data. The original free prompt (pose a problem) remains unchanged.

Finally, in Task 5 (Turns 413 and 424), an increased degree of task structuring is achieved by modifying both the problem situation and the prompt: The context was narrowed to a shopping activity, thus constraining the complete poster to only the retail locations (the fruit shop, the clothing store, and the pharmacy). Furthermore, compared to posing a problem, the task is more tightly restricted by the addition of the instruction to start from the beginning of the given story. In this respect, this second prompt (pose a problem by completing the story) is more structured than the first (pose a problem). Fig. 11 summarizes the development of this dilemma.

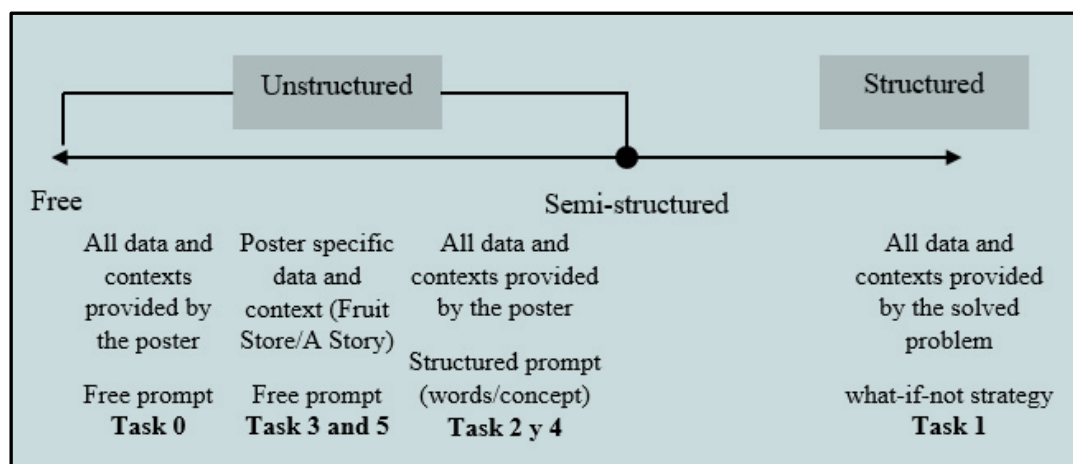


Fig. 11. The structure dilemma in the design and implementation of the lesson.

4.4. Mathematical problem posing as a means or as a purpose

This dilemma reflects Beatriz's position on whether problem posing should be a purpose in itself or a means through which the pupils can explore other mathematical content. This position can be seen clearly in her lesson plan and in the run-through with the PIC group prior to executing the plan in class. Her lesson plan makes it explicit that she considers problem posing a purpose in itself.

Indeed, she gives the plan the title of "Strategies for facilitating problem posing using a complex picture" [LP1].

In both the run-through with the PIC group and the actual lesson itself, it can be seen that Beatriz's emphasis is for the pupils to identify what a problem is and how to pose one, stressing the need to "ask a question" (Turns 149, 157, and 413). After the run-through has been completed, Beatriz makes it clear that her priority is for her pupils to pose a variety of mathematical problems rather than focusing attention on other mathematical content: "What I want is not to teach anything, or even try to ... what I want is a variety of problems" [TP31/01 1143–1144].

The set of objectives listed at the start of the lesson plan ([LP42–48] Fig. 12), reiterates the emphasis on problem posing as a purpose in itself. Although the approach is also recognized as a means of tackling content beyond problem posing and problem solving, it is clear that this is focused on "to a lesser extent."

Beatriz herself notes a variety of content items that could be tackled through problem posing based on the poster (quantity, which is larger, inside and outside, ordinals, problem solving, addition, flat shapes; [TP46–49]), but underlines that her chief interest in noting these areas is above all to ensure that a variety of problems are posed ("not all arithmetical, like 'How many?'" in her own words; [TP31/01 674–688]).

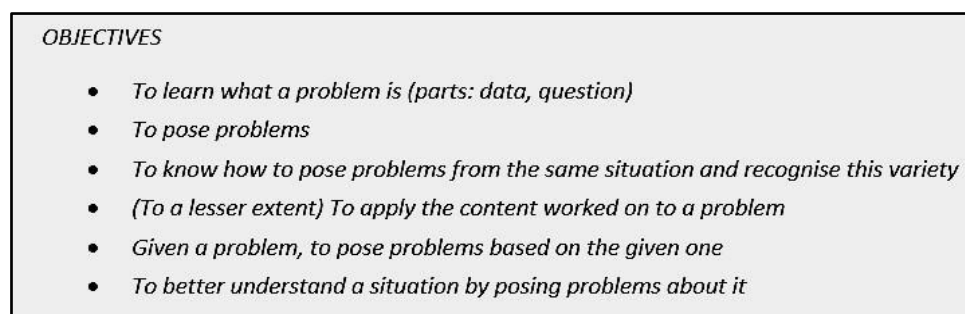


Fig. 12. The teacher's objectives as listed in her lesson plan.

Across the five adaptations, it can be seen that the content focus is problem posing as the purpose, especially in the case of Tasks 0, 1, 3, and 5, in that Beatriz is highly focused on her pupils managing to produce problems irrespective of the content they might have.

Nevertheless, in both Task 2 and Task 4, it is possible that the aim of the task, to a much lesser extent than the posing in itself, was to activate certain mathematical content the pupils had worked on previously. This change could have been due to the teacher's intention mentioned in the previous paragraph in which she stated that she did not want all the problems to be of an arithmetic type. For this reason, we have located the focus of the problem-posing lesson to be on purpose although in some cases it shifts towards problema posing as both a means and a purpose. Fig. 13 summarizes the development of this dilemma.

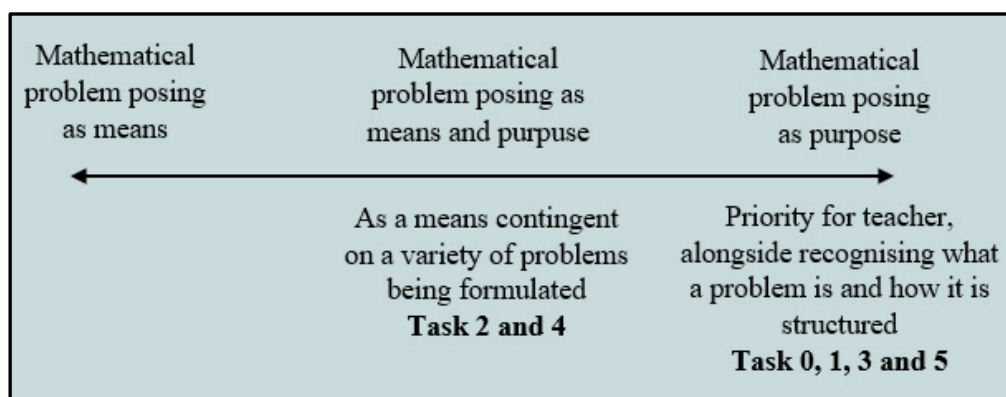


Fig. 13. The content focus dilemma in the design and implementation of the lesson.

4.5. Individual or social organization

In terms of class organization, the lesson was conducted at the whole-class level (Cai et al., 2022), with the pupils seated in a U-shaped “assembly” formation and the poster positioned in front of them to ensure everybody had a good view so as to pose a problema or comment on the contributions of their classmates.

Two roles established by the pupils were identified: emitters and receivers. The framework established by the task was for each pupil in turn to pose a problem for the rest of the class to solve (Turn 157).

With a view to encouraging the pupils to solve the task together, Beatriz listened actively to their contributions and carefully monitored what they said. She responded to almost every pupil's intervention so as to involve the others in the discussion, encouraging them to amplify their responses (e.g. Turns 32, 34, 36) and eliciting from them the elements constituting the problem (Turns 157, 428).

In this regard, teacher-pupil interaction was directed towards the whole class, such as when Beatriz proposed a different version of the task being suggested (e.g. Turns 149, 155, 309) or elaborated on a pupil intervention for the benefit of the group as a whole.

5. Development of the problem-posing task

Table 2 summarizes the developments that the original task underwent with respect to the variables used in the study. It includes the five variables (context, language, structure, content focus, and levels of interaction) and the tasks described above. Each variable is shaded according to the variations it underwent with each task. The darker shades are associated with one end of the continuum and the lighter shades with the other.

The table reads from left to right, starting with the original task presented in the form of a poster (Task 0) to the final adaptation (Task 5). As can be seen, the task did not always maintain the same constitution regarding the variables but rather underwent modifications as a result of the dilemmas inherent in each of the variables. These dilemmas were not linear but rather zigzagged according to the teacher's intentions.

Table 2

Development of the lesson by task and variable

Variables	Task 0	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5
Context	Semi Real (picture)	Semi Real (problem)	Semi Real (picture)	Semi Real (picture)	Semi Real (picture)	Semi Real (text/picture)
Structure	Un-structured	Structured	Un-structured	Un-structured	Un-structured	Un-structured
Language	Colloquial	Colloquial	Colloquial / Mathematical	Colloquial	Colloquial / Mathematical	Colloquial
Level of interaction	Social	Social	Social	Social	Social	Social
Content Focus	Purpose	Purpose	Means / Purpose	Purpose	Means / Purpose	Purpose

6. Conclusions

This study contributes to our understanding of how a problem-posing task is planned and carried out. In this sense, it aligns with the need to enrich our understanding of the design and implementation of problem-posing tasks (Yao et al., 2021), given that the greater part of

research into problem-posing tasks focuses on the results of the task—that is, on the characteristics of the resultant problems—and to a much lesser degree on the actual design of the problem-posing task itself (Lee, 2021).

This research has demonstrated that the adaptation of Barbosa and de Oliveira's (2013) dilemmas to the field of problem posing can be linked to variables (context, language, structure, levels of interaction, and content focus) which could be useful with respect to analyzing the design and management of mathematical problem-posing tasks.

The analysis has shown that the variables are not static but rather can fluctuate and undergo changes depending on the teacher's choices or intentions at different stages of the lesson. The most significant modifications were in response to the structure variable. The difficulty the students encountered in posing mathematically oriented problems within the parameters of the original task (semi-reallife context, unstructured, free prompt) resulted in new tasks being improvised with a concomitant modification of the structure. The teacher's starting hypothesis that an unstructured problem-posing task would elicit a greater diversity of problems was reconsidered in favor of more structured tasks. This greater structuring was achieved both through more structured prompts (as referred to in Cai & Hwang, 2023), more constrained problem situations, or both.

One variable which provided interesting results was that of context, which underwent various adaptations in terms of its representation (whether an illustration, a previous problem, or text). The element that remained constant throughout these reformulations was the poster, to which the variations made slight adaptations in order to provide support for the pupils in their problem-posing.

Although the problem situation of the original task underwent some adaptations, it remained a semi-real-life context throughout, chiefly because the poster was used as the reference during the whole lesson.

In general, with the exception of the variable levels of interaction, although the location of the dilemmas on their respective continuums never reached extremes, there were some shifts. These shifts, and consequently the decisions they represented with respect to the dilemmas, did seem related. Thus, some ways of increasing the degree of structure provided for the task, in task 0, were achieved by using more mathematically oriented language in the prompt (e.g. in tasks 2 and 4, which included words evoking mathematical objects such as “inside” and “rectangle”). These new prompts brought an additional focus on learning certain mathematical concepts to that of learning to pose problems. On the other hand, other means of providing the task with greater structure, such as narrowing its context or formulating it as a text rather than an illustration, maintained the focus on problem posing and invited more colloquial language.

Further, this study shows the importance of considering a problem-posing task from a dynamic perspective (or an emergent design; Bikner-Ahsbahs & Janßen, 2013) in which the problem

situation and prompt anticipated in the design stage are adapted as the task is put into action. This is another possible contribution of this study in contrast with others in which this kind of contingency was not contemplated (Silber & Cai, 2021; Singer & Voica, 2013).

Given the scarcity of research on this topic in early childhood education (Cai & Hwang, 2020; Martín-Díaz et al., 2020) this case study is especially valuable and could contribute to our understanding of how the characteristics of this educational stage constrain the manner in which the dilemmas are solved. In addition, this paper provides an analytical description of a problem-posing lesson at the classroom level (Cai et al., 2022) and thus offers a valuable case study for teaching problem posing (Liljedahl & Cai, 2021).

One of the most critical factors shaping Beatriz's position vis-a-vis dilemmas are the contextual characteristics of the early childhood classroom.

On the one hand, although problem solving is a mainstay of Beatriz's teaching, this lesson represented the pupils' first encounter with mathematical problem posing and therefore represented an interruption to their familiar classroom routines (Herbst, 2012). Her decision to orient problem posing as a purpose in itself underlies the need to encourage the understanding of the notion and nature of mathematical problems (English, 1997). The pupils' first attempts evoked an incipient manifestation of the notion of problem that was closer to real life than to mathematics. The initial choice to attempt the activity with the pupils via an unstructured problem-posing task (Baumanns & Rott, 2020) with a free prompt (Cai & Hwang, 2023) might have had a greater impact in stimulating a personal conception among the pupils of what constitutes a problem. Our experience in this study suggests that the notion of a problema constituted by a story with a question could be particularly appropriate for early childhood education. Nevertheless, the effectiveness of the task with respect to the notion of the problem involved requires further study.

On the other hand, the pupils' developmental stage, making it impossible to provide written information and imperative to use spoken language and visual cues to support the posing process, constricted the teacher's choice of task design regarding the context in which to locate the problem situation and the means of presenting the contextual information. In addition, the levels of interaction established among the pupils to encourage the problem posing were determined by the teacher's need to mediate the dialogue, discussion, and negotiation involved (Palmér & Bommel, 2020), leading her to introduce problem posing as a whole-class activity (Kwon & Capraro, 2021).

Given that the study focused on early childhood education, future research should serve not only to corrate and uncover the workings of these variables in the planning and carrying out of problem-posing tasks at different levels (Guo et al., 2021) but also to find out whether any additional variables arise at other educational stages.

Declaration of Competing Interest

The authors of the manuscript, Enrique Carmona Medeiro, Juan Pedro Martín-Díaz and Nuria Climent, declare that: They have not received any financial or non-financial support provided by a third party for the reported work. They have no interest or financial relationship, within the last 3 years, related to the subject or the manuscript.

Data availability

Data will be made available on request.

Acknowledgements

To the projects PID2021–122180OB-I00 of the Ministry of Science and Innovation of Spain. To the project ProyExcel_00297 of the Regional Ministry of Economic Transformation, Industry, Knowledge, and Universities of Andalusia. To the teams of the researches groups DESYM (HUM-168) and Teacher Professional Development (HUM-462). To the Research Centre COIDESO of the University of Huelva and to the Red MTSK, funded by AUIP. Funding for open access charge: Universidad de Huelva / CBUA.

References

- Barlow, A., & Cates, J. (2006). The impact of problem posing on elementary teachers' beliefs about mathematics and mathematics teaching. *School Science and Mathematics*, 106, 64–73. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18136.x>
- Barbosa, J.C., & de Oliveira, A.M. (2013). Collaborative groups and their conflicts in designing tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 541–548). Oxford, UK. Available from <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054>
- Baumanns, L., & Rott, B. (2020). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning*, 13(2), 59–76. <https://doi.org/10.1080/19477503.2020.1841501>
- Baumanns, L., & Rott, B. (2022). Developing a framework for characterising problem-posing activities: a review. *Research in Mathematics Education*, 24(1), 28–50.
- Bikner-Ahsbabs, A.A., & Janßen, T. (2013). Emergent tasks—spontaneous design supporting in-depth learning. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 153–162), Oxford, UK. Available from <http://hal.archivesouvertes.fr/hal-00834054>
- Brown, S. I. Y., & Walter, M. I. (1993). *Problem Posing: Reflections and Applications*. Lawrence Erlbaum Associates.

- Cai, J. (2022). What research says about teaching mathematics through problem posing. *Education & didactique*, (16), 31–50. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642>
- Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Cai, J., & Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. In R. Leikin (Ed.), *Mathematical Challenges for All*. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R., & Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: tasks variables, processes, and products. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119–145). PME.ss.
- Chico, J., Montes, M., & Badillo, E. (2022). Teachers' professional competence to pose school problems: the case of transformation of existing problems. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 4395–4402). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.
- English, L. D. (1997). The Development of Fifth-Grade Children's Problem-Posing Abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 183–217. <https://doi.org/10.1023/A:1002963618035>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel.
- Guo, Y., Yan, J., & Men, T. (2021). Chinese junior high school students' mathematical problem-posing performance. *ZDM Mathematics Education*, 53, 905–917. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01240-7>
- Harel, G., Koichu, B., & Manaster, A. (2006). Algebra teachers' ways of thinking characterizing the mental act of problem posing. In I. J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 241–248). PME.
- Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (1), 5–22.
- Jackson, P. W. (1968). *Life in the Classrooms*. Rinehart and Winston, Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. *International*

- Journal of Educational Research, 102, Article 101428.
<https://doi.org/10.1016/j.jjer.2019.05.001>
- Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to its Methodology*. Sage, Kwon, H., & Capraro, M. (2021). Nurturing Problem Posing in Young Children: Using Multiple Representation within Students' Real-World Interest. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3), em0648.
<https://doi.org/10.29333/iejme/11066>
- Lee, C. K. (2010). An overview of language learning strategies. *Annual Review of Education, Communication and Language Sciences*, 7, 132–152.
- Lee, S. Y. (2021). Research Status of Mathematical Problem Posing in Mathematics Education Journals. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 1677–1693.
<https://doi.org/10.1007/s10763-020-10128-z>
- Lee, Y., Capraro, R., & Capraro, M. (2018). Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(2), 75–90. <https://doi.org/10.12973/iejme/2698>
- Leiß, D., & Wiegand, B. (2005). A classification of teacher interventions in mathematics teaching. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 37(3), 240–245.
<https://doi.org/10.1007/s11858-005-0015-3>
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 53, 723–735.
<https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Martín-Díaz, J. P., Montes, M., Codes, M., & Carrillo, J. (2020). Characterisers of Teaching in a Mathematics Problem Posing Lesson in Preschool Education. *Sustainability*, 12(15), 6148. <https://doi.org/10.3390/su12156148>
- Mercer, N. (2004). Sociocultural discourse analysis: Analysing classroom talk as a social mode of thinking. *Journal of Applied Linguistics*, 1(2), 137–168.
<https://doi.org/10.1558/japl.2004.1.2.137>
- Ngh, N., Ismail, Z., Tasir, Z., & Mohamad Said, M. N. H. (2016). Students' ability in free, semi-structured and structured problem posing situations. *Advanced Science Letters*, 22(12), 4205–4208.
- Palmér, H., & van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: what does posing a similar task imply to students? *ZDM Mathematics Education*, 52, 743–752.
<https://doi.org/10.1007/s11858-020-01129-x>

- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções*, 8(22), 196–216. <https://doi.org/10.25755/int.1542>
- Quintero, E. (2004). *Problem Posing with Multicultural Children's Literature*. Peter Lang.
- Rosli, R., Capraro, M. M., Goldsby, D., Gonzalez, E. G., Onwuegbuzie, A. J., & Capraro, R. M. (2015). Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education* (pp. 333–354). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_16.
- Silber, S., & Cai, J. (2016). Pre-service teachers' free and structured mathematical problem posing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(2), 163–184. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1232843>
- Silber, S., & Cai, J. (2021). Exploring underprepared undergraduate students' mathematical problem posing. *ZDM—Mathematics Education*, 53(4), 877–889. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01272-z>
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.
- Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157–162. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3>
- Singer, F. M., & Voica, C. A. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 9–26. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9422-x>
- Stake, R. (1995). *The Art of Case Study Research*. Sage Publications.
- Stoyanova, E., & Ellerton, N. (1996). A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education* (pp. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Sullivan, P., Knott, L., & Yang, Y. (2015). The Relationships Between Task Design, Anticipated Pedagogies, and Student Learning. In A. Watson, & M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 83–104). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_13
- Vygotsky, L. S. (1978). Interaction between learning and development. In M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman (Eds.), *Mind in Society: Development of Higher Psychological Processes* (pp. 79–91). Harvard University Press.

- Stein, M.K., & Smith, M.S. (1998). *Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice*. Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Bolite, J., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Margolinas, C., Sullivan, P., Thompson, D., & Yang, Y. (2013). Introduction. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 7–14), Oxford, UK. Available from <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054>
- Xu, B., Cai, J., Liu, Q., & Hwang, S. (2019). Teachers' predictions of students' mathematical thinking related to problem posing. *International Journal of Educational Research*, 102, Article 101427. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.005>
- Yao, Y., Hwang, S., & Cai, J. (2021). Preservice teachers' mathematical understanding exhibited in problem posing and problem solving. *ZDM Mathematics Education*, 53, 937–949. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01277-8>
- Yin, R. K. (2009). *Case Study Research. Design and Methods* (4.^a ed.). SAGE Publications.
- Zhang, H., & Cai, J. (2021). Teaching mathematics through problem posing: insights from an analysis of teaching cases. *ZDM Mathematics Education*, 53, 961–973. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01260-3>



4.5. Artículo 2: Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en un aula de educación infantil

Carmona-Medeiro, E. & Climent, N. (2024). Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en un aula de educación infantil. PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 19(1), 25-51. <https://doi.org/10.30827/pna.v19i1.28408>

Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en un aula de educación infantil

Enrique Carmona-Medeiro ^a, Nuria Climent ^b

^a Departamento de Didáctica, Facultad de Educación, Área de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Cádiz, España

^b Departamento de Didácticas Integradas, COIDESO, Universidad de Huelva, España

Resumen: Esta investigación se centró en la gestión de aula que una maestra realiza durante una tarea de formulación de problemas con alumnado de Educación Infantil (4-5 años). Mediante un estudio de caso único, nos enfocamos en identificar las demandas matemáticas que la maestra establece para favorecer el avance en la formulación de un problema, la actividad del alumnado que las detona y las relaciones entre ambas. Los resultados indican que la mayoría de las demandas matemáticas están orientadas a favorecer el desarrollo del contexto del problema y revelan que las dificultades que las detonan están ligadas al significado no matemático de problema que prevalece en el alumnado.

Términos clave: Demandas Matemáticas; Educación Infantil; Formulación de problemas; Gestión de aula

La investigación ha repercutido en que la resolución de problemas matemáticos haya recibido mucha atención, tanto en el currículum escolar (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2003) como en la actividad de aula (Silver, 1994). El desarrollo de habilidades para la resolución de problemas se ha tornado central (Ellerton et al., 2015; Lester y Cai, 2016). Aunque la formulación de problemas también ha sido reconocida como esencial en el avance de las matemáticas (Polya, 1985), la investigación sobre formulación de problemas es relativamente reciente en el ámbito de la Educación Matemática (Aktaş, 2022; Cai y Hwang, 2020). Hasta los años 80 y 90 no se resalta su importancia (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994) ni encontramos las primeras investigaciones (Brown y Walter, 2005; Ellerton, 1986; Silver y Cai, 1996; Stoyanova y Ellerton, 1996).

A pesar de que la formulación de problemas no ha caracterizado en general la enseñanza de las matemáticas (Singer et al., 2013), su importancia dentro de los procesos de resolución (Polya, 1985) ha favorecido la atención de la comunidad investigadora y su inclusión curricular (NCTM, 2003). Más allá del acuerdo acerca de su potencial para ayudar al alumnado a mejorar como resolutor (Cai et al., 2015), la formulación de problemas se ha ganado un lugar propio como línea de investigación en Educación Matemática por su valor para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. La formulación de problemas matemáticos (en adelante FPM) es una actividad genuinamente matemática que implica una alta demanda cognitiva (Cai y Hwang, 2023; Silver, 1994), por lo que se puede emplear en cualquier nivel escolar para promover el desarrollo del pensamiento y las habilidades matemáticas (Cai y Hwang, 2023; Lee et al., 2018;

Singer et al., 2013). El hecho de que las tareas de FPM puedan implicar múltiples soluciones (Martín-Díaz, 2022), junto con la posibilidad que ofrece al alumnado de integrar sus propias experiencias y conocimientos de la vida (Cai et al., 2022), contribuye al desarrollo de la creatividad, la flexibilidad mental y el razonamiento lógico (Leikin y Elgrably, 2019; Silver, 1994).

En los últimos años, muchos países han establecido la formulación de problemas como un objetivo importante de aprendizaje para los estudiantes (Cai, 2022; Li et al., 2022). Así, en el documento curricular en el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Infantil en la Comunidad Autónoma de Andalucía, donde se desarrolla este estudio (Decreto 100/2023, de 9 de mayo) la formulación de problemas es mencionada en uno de los descriptores operativos que deben emplearse para medir el grado de adquisición de la competencia clave STEAM tras finalizar dicha etapa. Asimismo, en el documento curricular por el que se establece la evaluación del proceso de aprendizaje y se determinan los procesos de tránsito entre las etapas de infantil y primaria en la misma comunidad autónoma (Orden del 30 de mayo de 2023), en la caracterización de la competencia STEAM se hace referencia explícita a la “capacidad para formular, representar y resolver problemas mediante una secuencia de acciones” (p. 36).

A pesar de los avances de investigación y el interés que la FPM ha despertado en los últimos años tanto en educadores como investigadores, existe una clara necesidad de construir una teoría más sólida que permita comprender el fenómeno general de la FPM (Baumanns y Rott, 2022; Cai et al., 2015). Por otro lado, se necesitan estudios empíricos que ayuden a comprender el fenómeno de la FPM en Educación Infantil. El estado de la investigación sobre formulación de problemas elaborado por Lee (2021) revela que hasta 2019 inclusive, no existen estudios que involucren a la primera infancia.

Entre las muchas líneas abiertas de investigación sobre FPM centraremos la atención en los procesos de instrucción. Implementar prácticas efectivas que integren la FPM en el aula no es una cuestión baladí (Leung, 2013). De hecho, cómo diseñar, gestionar y evaluar situaciones de enseñanza que ayuden al alumnado a aprender a formular problemas matemáticos, es en sí mismo un problema que necesita una formulación más completa (Li et al., 2022; Kilpatrick, 1987). Sin restar importancia al diseño y evaluación de situaciones de enseñanza que favorezcan el aprendizaje significativo de la FPM, fijaremos el foco en la gestión de aula, atendiendo a dos interrogantes inherentes a la integración de la FPM en el aula: ¿cuándo intervenir? y ¿cómo intervenir? Así, el objetivo de este estudio es comprender cómo una maestra gestiona una tarea de FPM en Educación Infantil.

MARCO TEÓRICO

La noción de problema

Para caracterizar los procesos de FPM, es necesario partir de las características y estructura de los problemas matemáticos. Definir la noción de problema matemático implica cierta dificultad, dado que un problema no es inherente a una tarea matemática, sino que más bien es una relación particular entre un sujeto y la tarea (Mason, 2016; Schoenfeld, 1985). Charnay (2002) caracteriza la noción de problema como una terna situación-sujeto-entorno y añade tres características esenciales de los problemas: (a) sólo hay problema si el sujeto percibe una dificultad, (b) existe una motivación que impulsa a franquear la dificultad, (c) una situación puede constituir un problema para un sujeto y no para otro sujeto que o bien puede resolver la situación inmediatamente o no sentirlo como un desafío intelectual propio.

Dada la prevalencia de la resolución de problemas respecto a la FPM tanto en la investigación como en el ámbito educativo (Carrillo y Cruz, 2016), la mayoría de las características que se emplean para definir problema matemático aluden a aspectos inherentes a su resolución (Charnay, 2002; Schoenfeld, 1985).

Mientras que los estudios recientes en el contexto de resolución aluden a problemas no rutinarios, en el contexto de formulación de problemas un problema se refiere a cualquier tipo de tarea matemática (Baumanns y Rott, 2020). En este estudio emplearemos en este último sentido la noción de problema matemático.

Según Malaspina (2021), todo problema matemático posee cuatro elementos estructurales: información, contexto, requerimiento y entorno matemático. La información está conformada por los datos, cuantitativos o cualitativos, que se dan explícita o implícitamente en el problema. El contexto queda configurado a través de la exploración de una situación (Kilpatrick, 1987), que puede ser matemática, realista o real. El requerimiento, generalmente expresado a través de una pregunta, determina lo que se pide que se encuentre, examine o concluya. El entorno matemático se refiere al marco matemático global en el que se ubican los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema.

Formulación de problemas matemáticos

La literatura de investigación en Educación Matemática muestra que existe una gran variedad de definiciones sobre la formulación de problemas (Baumanns y Rott, 2022; Cai, 2022). La investigación sobre esta área, en Educación Matemática, se ha edificado esencialmente sobre dos definiciones clásicas, la conceptualización de Silver (1994) y la de Stoyanova y Ellerton (1996). En cualquier caso, para caracterizar los procesos de FPM es fundamental quién formula los problemas (Kilpatrick, 1987; Silver, 2013). En la actividad de formulación de problemas pueden participar docentes, docentes y alumnado, o sólo alumnado a instancias de sus docentes (Cai et al., 2019). En adelante, nos centraremos en situaciones en las que el alumnado formula el problema.

Atendiendo a cómo se origina su construcción, resulta interesante distinguir: la formulación de problemas a partir de una situación dada (o “formulación de nuevos problemas”) o a partir de

un problema conocido (o “reformulación de problemas”, Silver, 1994). Por otro lado, resulta interesante distinguir cuando la formulación de problemas acontece antes, durante o después de la resolución del problema (Leung, 2013; Silver, 1994). Nos centraremos en la formulación de problemas a partir de una situación dada, que acontece antes de su resolución.

Las tareas de FPM constan de dos partes: la situación problemática y la consigna (o “prompt”) (Cai y Hwang, 2022, 2023; Cai et al., 2022). La situación problemática es lo que proporciona el contexto y la información que el alumnado puede emplear para la formulación de los problemas, además de sus propias experiencias vitales y conocimiento. La consigna proporciona instrucciones para guiar las formulaciones del alumnado, haciéndoles conscientes de lo que la tarea espera de ellos (por ejemplo, “formula tres problemas de diferente nivel de dificultad”). La información proporcionada por la situación problemática puede incluir palabras, imágenes, gráficos, patrones, tablas y expresiones matemáticas.

Las situaciones problemáticas pueden estar basadas en referentes del mundo real (contexto real) o matemáticos (contexto matemático). Atendiendo al nivel de apertura que la tarea de FPM otorga al formulador, Baumanns y Rott (2022) distinguen dos tipos de situaciones: no estructuradas y estructuradas. Las tareas de FPM son estructuradas cuando se pide al alumnado que formule problemas a partir de un problema previamente resuelto, mediante la modificación de alguno de sus elementos estructurales. Las tareas son no estructuradas cuando el alumnado formula problemas a partir de una situación dada que puede proporcionar o no información detallada. De este modo, las tareas de FPM conforman un espectro, en los que se incrementan tanto las restricciones como la información suministrada y, cuyos extremos son: tareas no estructuradas y tareas estructuradas. Fijaremos la atención en las tareas no estructuradas.

La gestión de aula: cómo y cuándo intervenir

Compartimos con Cai et al. (2015) y Singer et al. (2013) que la FPM es una característica esencial de la enseñanza de las matemáticas orientada a la indagación. Su integración en las prácticas de aula implica, por un lado, un cambio profundo en los roles del profesorado y el alumnado (Cai y Hwang, 2022; García-García et al. 2019). Por otro lado, requiere de un cambio de mentalidad en el profesorado, que permita tomar el problema como objeto central de la actividad matemática y no sólo su resolución (Ellerton et al., 2015), en un ambiente educativo en el que la responsabilidad de la FPM no recaiga exclusivamente en fuentes externas al alumnado (Cai y Hwang, 2022; Kilpatrick, 1987).

La implementación efectiva en el aula de la tarea prevista es compleja (Cai et al., 2015) y requiere de habilidades y capacidades específicas que permitan manejar dichas complejidades (Singer et al., 2013). Según Font (2008) la gestión de las tareas matemáticas puede llegar a ser más importante que las propias tareas. Así, por ejemplo, una tarea de FPM bien diseñada, terminará movilizand una actividad pobre en el alumnado si no es sostenida por una gestión eficiente.

Una de las cuestiones esenciales de la gestión del aula durante la FPM radica en discernir cuándo y cómo intervenir (Godino et al., 2015; Mason, 2016). Cómo se afronten dichos interrogantes dependerá en gran medida de la naturaleza de la tarea, del propósito didáctico-matemático, del contexto y los destinatarios. Y además estará necesariamente influenciada por la epistemología del profesor, su propia comprensión de las matemáticas involucradas y sus creencias sobre las capacidades de su alumnado (Weber y Leikin, 2016). Debido a la complejidad de la gestión del aula durante la FPM, compartimos con Mason (2016) que elegir cuándo y cómo intervenir, depende de la situación, y, por tanto, no existe una respuesta “correcta” predeterminada. Se trata de una decisión que compete al profesor, quien deberá ofrecer un determinado tratamiento a la diversidad de su alumnado, atendiendo sus distintos estados cognitivo-afectivos durante la FPM (Godino et al., 2015). Existe un amplio consenso acerca de que generar un clima apropiado en el aula es clave para favorecer que el alumnado participe en el acto creativo de la FPM (Mason, 2016; Kilpatrick, 1987). Asumimos al docente como un agente dinamizador cuyos patrones de prácticas, normas, valores e ideas pueden influir en el aprendizaje del alumnado (Cai et al., 2015) y tienen un potencial transformador sobre el alumnado y las instituciones (Carmona-Medeiro y Cardeñoso, 2021). Por ello, el docente es una pieza clave en la conformación de un ambiente enriquecido (Kilpatrick, 1987). Tal ambiente debe ser promovido activamente durante la gestión de aula, y requiere el establecimiento de normas sociomatemáticas sobre la FPM (Çakır y Akkoç, 2020), la reestructuración del sistema de recompensas (Kilpatrick, 1987) y el uso de estrategias que favorezcan la involucración efectiva del alumnado (Cai et al., 2015). En este trabajo entenderemos las normas sociomatemáticas como los “aspectos normativos de las discusiones matemáticas específicas de la actividad matemática de los estudiantes” (Yackel y Cobb, 1996, p. 461). En el ámbito de las FPM el estudio de Çakır y Akkoc (2020) revela la necesidad de negociar normas sociomatemáticas respecto a qué se considera reformular un problema, generar nuevos problemas y cómo evaluar y corregir los problemas formulados. El trabajo de Crespo y Sinclair (2008) evidencia la necesidad de negociar qué se considera como un problema matemáticamente interesante.

Entre todos los aspectos que conforman la gestión de aula, nos centraremos en las demandas matemáticas. Entenderemos demandas matemáticas, por parte de la maestra, como la solicitud de alguna acción que atañe a la actividad matemática del alumnado, que pretende promover su avance en el proceso de FP.

En situaciones donde el alumnado tiene dificultades, mediante solicitudes y/o preguntas la maestra puede dirigir la actividad del alumno hacia un foco matemático general (argumentar, precisar, validar, aportar información, resolver, etc., Lerman, 2010) o vinculado a la propia FPM (modificar un problema, desarrollar el contexto del problema, formular una pregunta, Singer et al., 2013).

Estas demandas por lo general son respuesta a alguna intervención o manifestación del alumnado, a las que denominaremos detonantes de la demanda.

Entre los estudios recientes sobre FPM en Educación Infantil centrados en el profesor (Fosse et al., 2020; Martín-Díaz, 2022; Pálmer y van Bommel, 2020) solo Martín-Díaz (2022) aborda de manera explícita cuestiones relativas a la gestión de aula. En dicho estudio, modelizan la gestión de aula a través de tres categorías emergentes: (i) etapas en la ejecución de la tarea, relativa a las fases en las que los docentes estructuran la actividad de FPM; (ii) grado de libertad, relativa a la posibilidad o no de emplear información que no estaba incluida en la configuración inicial de la tarea y; (iii) papel de los dibujos, relativa a su importancia para determinar el tipo de problemas y los elementos empleados por el alumnado.

En la investigación sobre FPM se aprecia escasa concreción, tanto en la etapa de Educación Infantil (Lee, 2021; Palmér y van Bommel, 2020) como, sobre su gestión en un aula (Cai y Hwang, 2020). En este sentido nuestro trabajo pretende contribuir al avance en dicha concreción, en una etapa, además, la Educación Infantil, donde la FPM es escasa en las aulas (Martín-Díaz, 2022).

METODOLOGÍA

Método

Esta investigación se enmarca en el paradigma interpretativo (Husén, 1988). Dado que el propósito es comprender e interpretar una realidad singular, emplearemos métodos y técnicas de carácter cualitativo (Basse, 1999), mediante un estudio basado en un diseño de caso único (Yin, 2009), que considera como unidad de análisis la gestión de aula de una tarea sobre FPM. Atendiendo a los criterios de Stake (1995), estamos ante un estudio de caso intrínseco, orientado a avanzar en la caracterización de la gestión del aula de una maestra que facilita una tarea de FPM, con la finalidad de lograr una mejor comprensión acerca de la praxis relativa a la enseñanza de la FPM en el aula de Educación Infantil. El interés del caso reside en la singularidad de la FPM en dicha etapa educativa.

Objetivos de la investigación

En este trabajo nos centramos en comprender cómo una maestra gestiona una tarea de FPM en un aula de Educación Infantil (4-5 años). Pretendemos describir con detalle dicha gestión, con el propósito de evidenciar aspectos ligados tanto a la actividad matemática de FPM, como a la idiosincrasia de la etapa educativa.

Para dicha descripción hemos fijado el foco en un aspecto particular de la gestión de la maestra, las demandas matemáticas que establece para favorecer el avance en la tarea. Hemos establecido los siguientes subobjetivos:

O1. Describir las demandas matemáticas que realiza una maestra en una clase de infantil sobre FPM

O2. Identificar las acciones del alumnado que detonan dichas demandas

O3. Explorar posibles relaciones entre las demandas matemáticas que establece la maestra y las acciones previas del alumnado

Los subobjetivos señalados nos permitirán avanzar en la caracterización de las demandas matemáticas que establece la maestra para favorecer el avance en la FPM, así como las acciones del alumnado que originan las acciones de la maestra y las relaciones entre ambas. La atención a las demandas, detonantes y sus relaciones pone el foco en cuándo intervenir y cómo.

Participantes y contexto

La gestión de aula que describimos en este artículo implica a una maestra de Educación Infantil, Gema (seudónimo), y a 20 infantes de 4-5 años, pertenecientes al segundo curso del segundo ciclo de Educación Infantil de un colegio público. En el momento del estudio Gema tenía 15 años de experiencia.

Su selección como informante descansa en que es un caso revelador con respecto a la enseñanza del contenido matemático seleccionado (Yin, 2009) y, posee un carácter de maestra experta según las cualidades que establece Chi (2011).

Gema fue la tutora de este grupo durante el curso anterior, por lo que, en el momento de la implementación de la tarea, curso académico 2017-2018, ya se había consolidado una dinámica de trabajo y lazos afectivos entre la maestra y el alumnado. El alumnado se había familiarizado con la resolución de problemas durante todo el curso académico anterior y, además, había iniciado un primer acercamiento a la FPM a través de preguntas que invitan a ampliar o modificar un problema resuelto.

Descripción de la tarea de formulación de problemas

La tarea de FPM desarrollada en el aula emplea como punto de partida una ilustración (Figura 1). Una vez distribuido el alumnado en asamblea da comienzo la tarea, recordando Gema las normas básicas de la asamblea y contando una pequeña historia sobre las medallas Fields que sirve para introducir y contextualizar la actividad matemática que se va a desarrollar. El mural permanece oculto con una tela, despertando la curiosidad del alumnado. A continuación, se descubre el mural, se presenta la consigna de la actividad y se favorece la identificación y reconocimiento de los elementos del mural. El alumnado espontáneamente expresa los elementos que le llaman la atención o le resultan familiares. Una vez que todos han saciado su necesidad de expresar lo que ven, comienza la fase de acción. Gema retoma la consigna de la actividad, incidiendo en que el objetivo es crear problemas, y para ello, “hay que inventar una

historia relacionada con el mural y buscar una pregunta cuya respuesta no sea evidente y requiera pensar”.

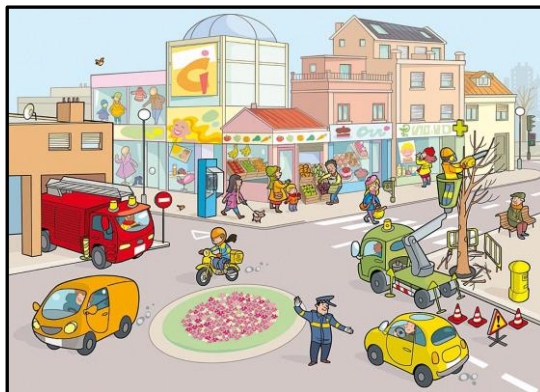


Figura 1. Mural proporcionado al alumnado para la formulación de problemas matemáticos

La tarea transcurre durante una hora aproximadamente, implicando más de 700 intervenciones significativas para el estudio de la gestión de aula⁴. Por ello, fijaremos el foco de la presente investigación en un evento que acontece durante la fase de acción, y que denominaremos “El problema de Agustín”. Dicho evento ocurre de manera inesperada cuando Gema ha dado por finalizada la tarea e intenta cerrarla, reconduciendo al alumnado hacia otra actividad. En este fragmento, Agustín expresa su necesidad de contar el problema que ha pensado, iniciándose un proceso interactivo en un contexto de asamblea que concluye con la formulación y resolución de un problema matemático.

Recogida, tratamiento y análisis de la información

Debido a la complejidad que supone estudiar la gestión de aula decidimos emplear la videograbación como instrumento de recogida de información, ya que nos permite recoger tanto datos verbales como visuales de la acción de la maestra y el alumnado. La sesión que analizamos se diseña por parte de la maestra con el apoyo de un grupo de investigación colaborativa en la que participa junto con profesorado de otros niveles educativos y formadores de Didáctica de la Matemática, entre los que se encuentra uno de los autores de este artículo. Su implementación es observada de forma no participante por los miembros del citado proyecto y grabada en vídeo con una cámara situada al final del aula, intentando alterar lo mínimo el curso de la misma.

El análisis de la información comienza con la transcripción de la videograbación. Las transcripciones se realizaron reproduciendo literalmente las intervenciones de todos los participantes, incluyéndose elementos descriptivos que atienden a aspectos ligados al lenguaje gestual o al tono de voz empleado.

⁴ Estas intervenciones suponen todas las que realizan maestra y alumnado, contada cada vez que uno interviene expresando algo, salvo las que no tienen ningún interés en relación con la actividad matemática del aula.

Antes de proceder al análisis de la información procedente de la videograbación, hemos seleccionado entre las intervenciones de Gema y el alumnado, la información relevante para nuestro propósito, entendiendo como unidad de información “la unidad de significación que se ha de codificar” siendo “esta de naturaleza y tamaño muy variables” (Bardin, 1986, p. 79). Esto ha permitido constituir 73 unidades de información, 37 (Gi) relativas a intervenciones de Gema y 36 relativas a intervenciones de Agustín (Ai).

Para llevar a cabo el análisis de los datos, hemos procedido a codificar de modo libre, sin emplear ningún instrumento y sin partir de categorías a priori, más que la sensibilización dada por el marco teórico. Esto nos ha permitido construir categorías emergentes y agrupar las acciones en dichas categorías siguiendo un proceso iterativo de codificación en el que se ha empleado el método de comparación constante (Bryman, 2001). El análisis emergente de los datos ha seguido la teoría fundamentada (Grounded Theory), método habitual en investigaciones de corte cualitativo (Charmaz, 2008). Durante el proceso de codificación, a través del agrupamiento por unidades de significado, emergieron en primera instancia diferentes categorías e indicadores que fueron refinados durante y tras el posterior análisis (Strauss y Corbin, 1990), siguiendo el enfoque de condensación de significados propuesto por Kvale (1996), que fue validado a través de la triangulación por expertos (Flick, 2007). De este modo, el análisis pormenorizado hasta la primera obtención de categorías fue realizado por el primer autor del artículo, en el marco de su tesis doctoral, y discutido con el segundo autor. A este primer refinamiento siguieron otros dos siguiendo el mismo proceso, con sus correspondientes reanálisis de la información, hasta llegar a 2 categorías (C1-C2), 12 subcategorías (C1-1, C2-6) y 52 indicadores entre las dos categorías (Tabla 1). En este artículo nos vamos a centrar en la subcategoría Demandas matemáticas, dentro de la categoría Gestión del aprendizaje.

Tabla 1

Categorías y subcategorías emergentes vinculadas a la gestión del aula matemática durante una tarea de formulación de problemas matemáticos

Categorías	Subcategorías
C1. Control	C1-1. Normas sociales
	C1-2. Normas relativas al aprendizaje
	C1-3. Objetivos
	C1-4. Monitoreo
	C1-5. Flujo de la clase
C2. Gestión del aprendizaje	C2-1. Normas sociomatemáticas
	C2-2. Demandas matemáticas
	C2-3. Motivación e implicación del alumnado
	C2-4. Gestión del error
	C2-5. Explicación y/o información
	C2-6. Conexiones intra y extra-matemáticas
	C2-7. Recursos

RESULTADOS

Organizamos los resultados en tres epígrafes, cada uno dando respuesta a cada objetivo planteado. Así, en el primer epígrafe describimos las demandas matemáticas identificadas, en el segundo los detonantes de dichas demandas, y en el tercero presentamos posibles relaciones entre demandas y detonantes.

Demandas matemáticas

El análisis de las acciones de Gema revela que la categoría Demandas Matemáticas (DM) está presente en 26 de las 37 (70,3%) unidades de información relativas a sus intervenciones. Durante la formulación del problema de Agustín, se han evidenciado 9 indicadores emergentes (DM1-DM9) relativos a las demandas matemáticas que Gema establece para favorecer el avance en la formulación del problema. A continuación (Tabla 2), se muestran dichos indicadores, junto al número de intervenciones (n_i) en las que se ha identificado esa demanda.

Las cuatro primeras demandas (DM1-DM4) se refieren directamente a la FPM. La primera (DM1) corresponde a solicitar la reformulación de un problema; las dos siguientes se refieren al contexto (DM2) y al requerimiento del problema (DM3); la cuarta (DM4) a resolver el problema tras su formulación. Las restantes, por su parte, aluden a cuestiones matemáticas generales: la representación de la situación (DM5 y DM7) y la solicitud de argumentaciones y comunicación precisa (DM6, DM8 y DM9).

Tabla 2

Indicadores emergentes (DM1-DM9) relativos a la categoría Demandas Matemáticas (DM)

Demandas matemáticas	n_i
DM1. Solicitar la modificación del problema	1
DM2. Solicitar el desarrollo del contexto del problema	13
DM3. Solicitar el planteamiento de una pregunta para el problema	1
DM4. Solicitar la resolución de un problema	3
DM5. Solicitar la representación de un problema	1
DM6. Solicitar argumentación	2
DM7. Solicitar cambio de registro representativo	1
DM8. Solicitar precisión en las respuestas dadas	3
DM9. Solicitar la verificación de una respuesta dada	1

Si nos fijamos en la frecuencia de estas demandas, se puede apreciar cómo la demanda matemática más empleada por Gema para favorecer el avance en la formulación del problema se corresponde con el indicador Solicitar el desarrollo del contexto del problema (DM2). Un

análisis más detallado de este indicador ha permitido identificar dos descriptores que evidencian acciones de Gema de distinta naturaleza (Tabla 3).

Tabla 3

Descriptores emergentes (DM2-1 y DM2-2) relativos al indicador DM2

DM2. Solicitar el desarrollo del contexto del problema	n_i
DM2-1. Preguntar al alumnado por información de la historia del problema que no ha sido explicitada/desarrollada/atendida	6
DM2-2. Solicitar el avance en el desarrollo de la historia del problema	7

Con respecto al descriptor DM2-1, las demandas de Gema se orientan a solicitar al alumnado explicitar algún aspecto concreto del contexto del problema con la intención de favorecer el avance en su desarrollo. Ejemplos de este tipo de demanda se pueden observar cuando Gema solicita a Agustín que explicita la acción que realizan los personajes de la historia al entrar en una tienda de ropa (G247: “Venga... y ahora qué tiene que hacer”), cuánto cuesta un objeto de una tienda (G252: “Y ese cuánto vale”) o cuánto dinero posee un personaje de la historia (G254: “¿Cuánto tiene la mujer?”). Con respecto al descriptor DM2-2, las demandas de Gema se dirigen a invitar al alumnado a proseguir con el desarrollo del contexto del problema, sin establecer ningún tipo de ayuda (G245: “Venga y ahora qué pasa”).

A continuación, se muestra una parte del diálogo con la finalidad de ilustrar la diferencia entre los descriptores DM2-1 y DM2-2 (A se refiere a un/a alumno/a y G a Gema):

A236: Quiere ir... [Silencio: 4 segundos]

G236: ¿Quiere ir a...?

A237: A comprar ropa

G237: A comprar ropa, muy bien... sigue

A238: Y no hay

G238: Y no hay qué

A239: No hay ropa

A través del diálogo se evidencia que mediante la intervención G236, Gema establece una ayuda para que Agustín continúe con el desarrollo del contexto del problema, completando la acción que realizan los personajes mediante la solicitud del lugar que da sentido a la acción (DM2-1). Mientras que mediante la intervención G237 únicamente devuelve a Agustín la responsabilidad de continuar con el desarrollo del contexto del problema mediante una invitación (DM2-2).

Acciones del alumnado que detonan la acción de Gema

El análisis de las acciones del alumnado efectuado sobre las unidades de información en las que se evidencian indicadores relativos a DM1-DM9, han permitido la identificación de 7 indicadores emergentes (D1-D7) ligado a la acción previa del alumnado que detona la acción docente. A continuación (Tabla 4), se presentan dichos indicadores junto al número de intervenciones (n_i) en las que se ha identificado dicha acción.

Tabla 1

Indicadores emergentes relativos a la acción del alumno (D1-D7) que detona la acción docente (DM1-DM9)

Acción previa del alumnado	n_i
D1. El alumnado tiene dificultades para proseguir con el desarrollo del contexto del problema	3
D2. La respuesta del alumnado es insuficiente o ineficaz	9
D3. La respuesta del alumnado se orienta hacia la formulación de un problema no matemático	6
D4. La respuesta del alumnado es incorrecta	1
D5. El alumnado no está conforme con la respuesta/aportación de la maestra	2
D6. La respuesta del alumnado no ha sido comprensible para la maestra	4
D7. La respuesta del alumnado es correcta	3

Los cuatro primeros indicadores (D1-D4) se refieren directamente a la dificultad que el alumnado presenta durante el proceso de formulación del problema. El primer indicador (D1) corresponde con momentos específicos durante el desarrollo del contexto, donde el alumnado se expresa despacio y con dificultad y/o permanece en silencio; el segundo (D2) se relaciona con momentos en los que el alumnado produce un avance en el desarrollo del contexto y/o pregunta, pero el contexto sigue estando incompleto; el tercero (D3) hace referencia a situaciones en las que el alumnado orienta el desarrollo del contexto o la pregunta hacia la formulación de un problema no matemático; y el cuarto (D4) acontece cuando el alumnado emplea, durante la formulación del problema, información discordante con la que proporciona el mural. Los restantes indicadores, por su parte, aluden a cuestiones más generales, como discrepar de la aportación de la maestra porque no coincide con sus intereses o gustos (D5), dar una respuesta contradictoria o poco comprensible (D6), o responder correctamente a una pregunta de la maestra (D7).

Se puede apreciar cómo las acciones del alumnado con mayor frecuencia de aparición se corresponden con los indicadores D2 y D3.

Con respecto al indicador D2, cuatro de las nueve unidades de información, están vinculadas con la incompletitud del contexto del problema, en las que el alumnado proporciona un avance parcial en el desarrollo del contexto (Tabla 5).

Tabla 5

Unidades de información relativas al indicador (D2) relacionadas con la incompletitud del contexto del problema

Acción previa del alumnado	Interpretación
A ₂₃₅ : “Una mujer con un perro...” [Silencio: 3s]	Agustín comienza el desarrollo del contexto del problema, identifica los personajes de su historia, pero no aporta más elementos del contexto
A ₂₃₆ : “Quiere ir...” [Silencio: 4s]	Agustín avanza en el desarrollo del contexto del problema, identificando parcialmente la acción de los personajes, pero no indica de manera completa la acción que realizan
A ₂₃₇ : “A comprar ropa”	Agustín avanza en el desarrollo del contexto del problema, delimitando la acción que realizan los personajes, pero el contexto sigue incompleto
A ₂₄₅ : “Ese”	Agustín señala el chaleco que la mujer quiere comprar en el mural, el contexto sigue estando incompleto

En menor medida, en una unidad de información, además de la incompletitud del contexto se observa dificultad en relación con la formulación de una pregunta.

A₂₄₁: Comprar ropa

G₂₄₁: Comprar ropa... y qué le pasa

A₂₄₂: ¿Cuál quiere comprar?

A través del diálogo se evidencia que, aunque Agustín formula una pregunta (A₂₄₂) que guarda relación con la historia, el contexto sigue estando incompleto, faltan datos y una pregunta que establezca una demanda matemática que exija pensar.

Mientras que las restantes unidades de información se refieren a dificultades de precisión, como, por ejemplo, expresar una cantidad de medida sin especificar que se está cuantificando (A₂₃₈: “Y no hay”), o realizar una estimación sensorial sobre una cantidad de dinero sin cuantificar (A₂₆₅: “Mucho”).

Con respecto al indicador D3, cinco de las seis unidades de información identificadas están vinculadas a intervenciones en las que el avance en el desarrollo del contexto del problema de Agustín se orienta hacia situaciones no matemáticas. Las intervenciones Agustín evidencian una prevalencia de su noción de problema personal con respecto a la noción de problema

matemático, aún incipiente. La Tabla 6 muestra distintas formulaciones parciales del problema que ilustran cómo la formulación se orienta hacia situaciones no matemáticas, vinculadas a circunstancias en la que la dificultad u obstáculo impide la consecución de lo pretendido.

Tabla 6

Formulaciones parciales del problema de Agustín orientadas hacia situaciones no matemáticas (D3)

Formulación parcial del problema	Interpretación
<i>“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa y no hay”</i>	Para Agustín, querer ir a comprar ropa y que no haya ropa representa un problema. En sus intervenciones (A ₂₃₉ “No hay ropa” y A ₂₄₀ “Que la mujer no puede comprar porque no hay ropa”) se evidencia que su noción de problema está ligada a circunstancias que dificultan o imposibilitan la consecución de un fin.
<i>“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa. ¿Cuál quiere comprar?”</i>	Para Agustín, ir a comprar ropa y tener que elegir ropa que le guste representa un problema. En su intervención (A ₂₄₂ “¿Cuál quiere comprar?”) se evidencia que su noción de problema está ligada a circunstancias que dificultan o imposibilitan la consecución de un fin.
<i>“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa, quiere comprar un chaleco, pero [la dependienta] no le deja”</i>	Para Agustín ir a comprar ropa y que la dependienta no quiera vender ropa representa un problema. En su intervención (A ₂₄₆ “Que no le deja”) se evidencia que su noción de problema está ligada a circunstancias que dificultan o imposibilitan la consecución de un fin.
<i>“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa, quiere comprar un chaleco, pero no le gusta”</i>	Para Agustín, querer ir a comprar ropa y que no haya ropa que le guste representa un problema. En su intervención (A ₂₄₈ “Que no le gusta”) se evidencia que su noción de problema está ligada a circunstancias que dificultan o imposibilitan la consecución de un fin.

Aunque Gema articula habitualmente su práctica docente alrededor de la resolución de problemas, la presente tarea representa la primera aproximación del alumnado a los procesos de formulación a partir de una situación dada. La noción de problema que Agustín ha construido mediante su experiencia vital emerge.

Relaciones entre las demandas matemática y la acción previa del alumnado

Todas las acciones de la maestra vinculadas a los indicadores DM1-DM9 surgen como respuesta a una acción previa del alumno (D1-D7). A continuación (Figura 2), se muestran las relaciones evidenciadas entre las acciones de la maestra y las acciones del alumnado que detonan su intervención.

Como se puede observar, las relaciones que se establecen con mayor frecuencia son las que implican las acciones docentes DM2-1 y DM2-2 y las acciones del alumnado D1-D6. Para el caso de DM2-1, resulta significativo que hay evidencias de esta acción de la maestra como respuesta a todas las acciones del alumnado excepto cuando su respuesta es correcta (D7). Mientras que para el caso de DM2-2, hay evidencias de relaciones con cuatro de las acciones del alumnado (D1, D2, D3 y D5). A continuación (Tablas 7, 8 y 9), se describen las relaciones más significativas.

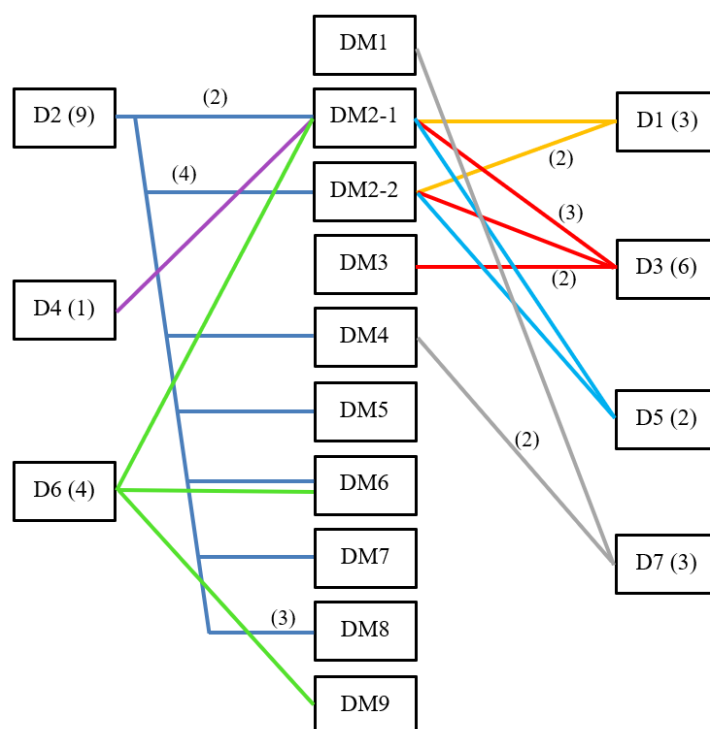


Figura 2. Relaciones entre las demandas matemáticas y las acciones previas del alumnado

Tabla 7

Relaciones entre las demandas matemáticas (DM2-1 y DM2-2) y las acciones previas del alumno que manifiestan dificultad durante el proceso de formulación del problema (D1-D2)

Acción previa del alumno (D1-D4)	Demandas matemáticas (DM2-1 y DM2-2)
Cuando el alumno tiene dificultades para proseguir con el desarrollo del contexto del problema (D1) y permanece en silencio (A ₂₄₄ ; A ₂₅₀).	La maestra otorga un tiempo de espera (3-5 segundos) e invita al alumno a proseguir con el desarrollo del contexto (G ₂₄₄ “Venga... ¿Y qué?”, G ₂₅₀ “... y ahora qué pasa”) (DM2-2).
Cuando la respuesta del alumno es insuficiente o ineficaz (D2), y su intervención supone un avance parcial en el desarrollo del contexto del problema, como, por ejemplo, delimitar la acción que realizan los personajes (A ₂₃₇ “A comprar ropa”, A ₂₄₁ “Comprar ropa”), o señalar en el mural la	La maestra invita al alumno a proseguir con el desarrollo del contexto del problema (G ₂₃₇ “... sigue”, G ₂₄₁ “... y qué le pasa”, G ₂₄₅ “Venga y ahora qué pasa”) (DM2-2).

Acción previa del alumno (D1-D4)	Demandas matemáticas (DM2-1 y DM2-2)
prenda de ropa que quieren comprar los personajes (A₂₄₅ “Ese”). Cuando la respuesta del alumno es insuficiente o ineficaz (D2), y su intervención supone un avance parcial en el desarrollo del contexto del problema, como, por ejemplo, no indicar de manera completa la acción que realizan los personajes (A₂₃₆ “<i>Quiere ir ...</i>”), y además se evidencia una dificultad para proseguir con su intervención (D1) y el alumno permanece en silencio.	La maestra en primera instancia otorga un tiempo de espera (3-5 segundos) y, a continuación, establece una ayuda, a través de una pregunta, para favorecer el avance en el desarrollo del contexto, como, por ejemplo, solicitar al alumno que explicita el lugar donde acontece la acción que realizan los personajes (G₂₃₆ “<i>Quiere ir a...</i>”) (DM2-1)
Cuando la respuesta del alumno es insuficiente e ineficaz (D2), y a la incompletitud del contexto se suma la dificultad para elaborar la pregunta del problema, como, por ejemplo, establecer una pregunta que dirige la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3) (A₂₄₂ “<i>¿Cuál quiere comprar?</i>”).	La maestra reorienta el problema hacia una situación matemática de compra-venta (G₂₄₂ “<i>Pues yo digo que va a comprar... dos chalecos</i>”) y formula una pregunta (G₂₄₂ “<i>Y qué le pasa</i>”) invitando al alumno a proseguir con el desarrollo del contexto del problema (DM2-2).
Cuando el alumno orienta la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3), y en su avance parcial del contexto se evidencia una falta de precisión en su respuesta (D2) (A₂₃₈ “<i>Y no hay</i>”).	La maestra solicita precisión en la respuesta (DM8), invitando al alumno a completar el contexto del problema, explicitando el elemento que ha cuantificado (DM2-1) (G₂₃₈ “<i>Y no hay qué</i>”).
Cuando el alumno orienta la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3) (A₂₃₉ “<i>No hay ropa</i>”) y su respuesta es precisa.	La maestra solicita al alumno que formule la pregunta del problema (DM3) (G₂₃₉ “<i>¿Y cuál es tu pregunta?</i>”) (DM3)
Cuando el alumno orienta la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3) (A₂₄₀ “<i>Que la mujer no puede comprar porque no hay ropa</i>”) y su respuesta es incorrecta (D4), porque contradice la información proporcionada por el mural.	La maestra contrargumenta la respuesta del alumno apoyándose en el mural (G₂₄₀ “<i>mira en la tienda de aquí si hay ropa</i>”) y, solicita al alumno explicitar la acción (DM2-1) (G₂₄₀ “<i>¿Y qué hace allí?</i>”).
Cuando el alumno continúa orientando la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3) de forma reiterada (A₂₄₆ “<i>Que no le deja...</i>”, A₂₄₈ “<i>Que no le gusta...</i>”).	La maestra emplea distintas estrategias para reorientar el problema hacia situaciones matemáticas. En primera instancia trata de aportar información o argumentos para deshacer las circunstancias que dificultan o imposibilitan la consecución de la compra-venta. Como, por ejemplo, apoyarse en la lógica de las situaciones de compra-venta (G₂₄₆ “<i>Si le deja... ella quiere vender</i>”), o resolviendo la insatisfacción del comprador (G₂₄₈ “<i>Venga pues que compre solo la gorra</i>”).

Acción previa del alumno (D1-D4)	Demandas matemáticas (DM2-1 y DM2-2)
	En segunda instancia, establece preguntas para favorecer el avance en el desarrollo del contexto (DM2-1), solicitando al alumno que explicité las acciones (G ₂₄₆ “ <i>Venga y qué tiene que hacer ahora</i> ”) o invita al alumno a proseguir con el desarrollo del contexto (DM2-2) (G ₂₄₈ “ <i>Venga y ahora qué pasa</i> ”).

Tabla 8

Relaciones entre las demandas matemáticas (DM2-1 y DM2-2) y las acciones previas del alumno que manifiestan dificultad durante el proceso de formulación del problema (D2-D3)

Acción previa del alumnado	Demandas Matemáticas
Cuando su respuesta es insuficiente e ineficaz (D2), y a la incompletitud del contexto se suma la dificultad para elaborar la pregunta del problema. Por ejemplo, establecer una pregunta que no supone un problema matemático (D3) (A242: “¿Cuál quiere comprar?”).	La maestra reorienta el problema hacia una situación matemática de compraventa (G242: “Pues yo digo que va a comprar... dos chalecos”) y formula una pregunta (G242: “Y qué le pasa”) invitando al alumno a proseguir con el desarrollo del contexto del problema (DM2-2).
Cuando orienta la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3), y en su avance parcial del contexto se evidencia falta de precisión en su respuesta (D2) (A238: “Y no hay”).	La maestra solicita precisión en la respuesta (DM8), invitando al alumno a completar el contexto del problema, explicitando el elemento que ha cuantificado (DM2-1) (G238: “Y no hay qué”).
Cuando el alumno continúa orientando la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3) de forma reiterada (A246: “Que no le deja...” o A248: “Que no le gusta”).	La maestra emplea distintas estrategias para reorientar el problema hacia situaciones matemáticas. En primera instancia trata de aportar información o argumentos para deshacer las circunstancias que dificultan o imposibilitan la consecución de la compraventa. Como, por ejemplo, apoyarse en la lógica de las situaciones de compraventa (G246: “Si le deja... ella quiere vender”), o resolviendo la insatisfacción del comprador (G248: “Venga pues que compre solo la gorra”). En segunda instancia, establece preguntas para favorecer el avance en el desarrollo del contexto (DM2-1), solicitando al alumno que explicité las acciones (G246: “Venga y qué tiene que hacer ahora”) o invita al alumno a proseguir con el desarrollo del contexto (DM2-2) (G248: “Venga y ahora qué pasa”).

Tabla 9

Relaciones entre las demandas matemáticas (DM2-1 y DM2-2) y las acciones previas del alumno que manifiestan dificultad durante el proceso de formulación del problema (D3-D4)

Acción previa del alumnado	Demandas Matemáticas
Cuando el alumno orienta la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3) (A239: “No hay ropa”) y su respuesta es precisa.	La maestra solicita al alumno que formule la pregunta del problema (DM3) (G239: “¿Y cuál es tu pregunta?”).
Cuando el alumno orienta la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3) (A240: “Que la mujer no puede comprar porque no hay ropa”) y su respuesta es incorrecta (D4), porque contradice la información proporcionada por el mural.	La maestra contrargumenta la respuesta del alumno apoyándose en el mural (G240: “mira en la tienda de aquí si hay ropa”) y, solicita al alumno explicitar la acción (DM2-1) (G240: “¿Y qué hace allí?”).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Atendiendo a las demandas matemáticas que establece, la gestión de la maestra se centra en promover el desarrollo del contexto del problema, animando su avance o preguntando explícitamente por información sobre algún aspecto del contexto (Martín-Díaz, 2022). A través de ambas intervenciones, la maestra promueve un ambiente de aula positivo para la FPM, generando un clima de seguridad, respeto y apoyo, devolviendo la responsabilidad de la formulación de los problemas al alumnado desde la confianza en sus capacidades (Li et al., 2022). Sus ayudas, generalmente a través de preguntas, acontecen cuando el alumnado no puede avanzar por sí mismo. En su mayoría estas intervenciones vienen motivadas por la detección de dificultades en el alumnado para la determinación de dicho contexto, en parte por su noción de problema. En este sentido se observa cómo la gestión en el aula de Infantil de la FPM debe considerar, por una parte, que para el alumnado de este nivel un problema está asociado a su significado natural (dificultad u obstáculo que impide conseguir lo pretendido), y, por otra, sus dificultades de expresión y precisión.

El tratamiento de la FPM a través de una situación no estructurada (Baumanns y Rott, 2022), el empleo de un mural de carácter realista para proporcionar los datos y el contexto, junto al empleo de una consigna libre (“free prompt”) (Cai y Hwang, 2022, 2023), puede haber potenciado en mayor medida que emerja la concepción personal del alumnado sobre la noción de problema.

Esto puede ser beneficioso de cara a que se desarrolle la capacidad de los alumnos para formular problemas junto con su noción de problema (que parecen indisolubles).

Un resultado que nos parece destacable es cómo a través de la formulación de problemas los niños de este nivel desarrollan su concepción sobre qué es un problema matemático y, por tanto, la gestión de aula implica el establecimiento de normas sociomatemáticas sobre qué es un problema matemático. Esta norma sociomatemática no ha sido recogida en los estudios sobre FPM (Çakır y Akkoç, 2020; Crespo y Sinclair, 2008) en otros niveles educativos. En este caso, la noción de problema quedó institucionalizado como “una historia y una pregunta que nos obliga a pensar”. Esta noción de problema coincide con la acuñada en la investigación en Educación Matemática, recogiendo la característica de reto o tarea no rutinaria (Charnay, 2002) y destacando dos de los elementos estructurales de Malaspina (2021): el contexto y el requerimiento.

En los datos analizados la concreción del contexto del problema recibe más atención que la formulación del requerimiento. Nos preguntamos si esto se debe, más que a que lo primero sea más problemático para los estudiantes, a que la maestra vio necesario terminar con la tarea. En este sentido, se aprecian algunas dificultades de los estudiantes con la determinación del requerimiento del problema; porque su concepción de problema hace que no sea necesaria una pregunta (“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa y no hay”); porque la pregunta no establece una demanda matemática, lo que puede estar también relacionado con su concepción de problema (“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa. ¿Cuál quiere comprar?”); o porque la pregunta no guarda relación con el contexto. Estas dificultades son esperables, dado que establecer el requerimiento supone identificar relaciones lógicas y matemáticas, percibiendo la situación dentro de un entorno matemático (Malaspina, 2021). La segunda dificultad ha sido evidenciada tanto en el estudio de Martín-Díaz (2022), como en el estudio de Ayllón et al. (2010) con alumnos del primer curso de Primaria, en los que se concluye que el conocimiento informal del alumnado no considera necesario emplear datos numéricos ni en el problema formulado ni en su resolución. Por tanto, el requerimiento del problema puede responder a una lógica natural y su solución puede ser inventada.

Se aprecia la escasa atención que se ha prestado en nuestro caso a la resolución de los problemas formulados. Esto es coherente con situar el problema como objeto central de la actividad matemática y no sólo su resolución, lo que es central para abordar la enseñanza de la formulación de problemas (Ellerton et al., 2015). Al igual que en el estudio de Martín-Díaz (2022), parece claro que para la maestra la finalidad de la sesión es la formulación de problemas, de la mano de la propia noción de problema matemático.

Nuestra investigación muestra tanto la complejidad como la viabilidad de la actividad de formulación de problemas en Educación Infantil (Fosse et al., 2020; Martín-Díaz, 2022; Pálmer y van Bommel, 2020), aportando, además, luz sobre posibles dificultades esperables y posibilidades en su gestión por parte de los maestros. En ese sentido, consideramos que puede ser de interés tanto para maestros como en su formación.

El hecho de haber centrado el análisis en un fragmento de una lección ha posibilitado, por un lado, el detalle en el mismo que ha permitido la emergencia de las categorías e indicadores propuestos y, a su vez, puede ser considerada una limitación que invita a que estas categorías/subcategorías/indicadores sean usadas y contrastadas en otras investigaciones sobre la formulación de problemas en Educación Infantil.

Finalmente, la forma en la que distintas gestiones de aula impactan en la eficacia de las tareas de FPM es un punto clave que necesita más estudio y, por tanto, cuestiones como, ¿qué estrategias docentes favorecen la implicación y el desempeño del alumnado en la FPM? ¿cómo favorecer un clima de aula enriquecido para la FPM? ¿qué normas sociomatemáticas favorecen un clima de aula propicio para la FPM? ¿cómo aproximar dichas normas al alumnado de Educación Infantil?, requieren ser atendidas en futuros estudios. Nuestra experiencia en esta investigación sugiere que las tareas de FPM también son potencialmente interesantes para revelar información útil sobre el pensamiento del alumnado; en este sentido, consideramos que podría ser fructífero ahondar en la noción de problema informal que posee el alumnado de Educación Infantil.

¿Constituye la noción de problema un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de problema matemático? ¿Cuál es el valor añadido que los procesos de FPM aportan a la comprensión de la noción de problema matemático? Todas estas cuestiones requieren ser abordadas en futuras investigaciones empíricas.

AGRADECIMIENTOS

A los equipos de los grupos de investigación DESYM (HUM-168) y DPD (HUM-462), los proyectos PID2021-122180OB-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, y al Centro de Investigación COIDESO de la Universidad de Huelva.

REFERENCIAS

- Aktaş, M. C. (2022). Problem-posing research in mathematics education: A bibliometric analysis. *Journal of Pedagogical Research*, 6(4), 217-233.
<https://doi.org/10.33902/JPR.202217414>
- Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 223-233). SEIEM.
- Bardin, L. (1986). *El Análisis del Contenido*. Akal.
- Baumanns, L. y Rott B. (2020). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning* 13(2), 59-76.
<https://doi.org/10.1080/19477503.2020.1841501>

- Baumanns, L. y Rott, B. (2022). Developing a framework for characterising problem-posing activities: a review. *Research in Mathematics Education*, 24(1), 28-50. <https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1897036>
- Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open University Press.
- Brown, S. I. y Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing* (3rd edition). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Bryman, A. (2001). *Social Research Methods*. Oxford University Press.
- Cai, J. (2022). What Research Says About Teaching Mathematics Through Problem Posing. *Éducation & didactique*, 16(3), 31-50. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642>
- Cai, J., Chen, T., Li, X., Xu, R., Zhang, S., Hu, Y., Zhang, L. y Song, N. (2019). Exploring the impact of a problem-posing workshop on elementary school mathematics teachers' conceptions on problem posing and lesson design. *International Journal of Educational Research*, 102, 101404. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.02.004>
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. En F. M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1
- Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Cai, J. y Hwang, S. (2022). Seeing Algebra in Arithmetic Through Mathematical Problem Posing. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 32(3), 309-329. <https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.309>
- Cai, J. y Hwang, S. (2023). Making Mathematics Challenging Through Problem Posing in the Classroom. En R. Leikin (Ed.), *Mathematical Challenges for All* (pp. 115-145). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: tasks variables, processes, and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1) (pp. 119-145). PME.

- Çakır, A. y Akkoc, H. (2020). Examining socio-mathematical norms related to problem posing: A case of gifted and talented mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 105(1), 19-34. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09965-0>
- Carmona-Medeiro, E. y Cardeñoso, J. M. (2021). Social interaction: A crucial means to promote sustainability in initial teacher training. *Sustainability*, 13(15), 8666. <https://doi.org/10.3390/su13158666>
- Carrillo, J. y Cruz, J. (2016). Problem-Posing and Questioning: Two Tools to Help Solve Problems. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advance and new perspectives* (pp. 23-36). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3>
- Charmaz, K. (2008). Reconstructing Grounded Theory. En P. Alasuutari, L. Bickman y J. Brannen (Eds.), *The Sage Handbook of Social Research Methods* (pp. 447-460). SAGE.
- Charnay, R. (2002). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Eds.), *Didáctica de matemáticas: Aportes y reflexiones* (pp. 51-63). Paidós.
- Chi, M. (2011). Theoretical Perspectives, Methodological Approaches, and Trends in the Study of Expertise. En Y. Li y G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction* (pp.17-39). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7707-6_2
- Crespo, S. y Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(5), 395-415. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9081-0>
- Decreto 100/2023, de 9 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Infantil en la Comunidad Autónoma de Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, núm. 90 (2023).
- Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems—A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261-271. <https://doi.org/10.1007/BF00305073>
- Ellerton, N. F., Singer, F. M. y Cai, J. (2015). Problem Posing in Mathematics: Reflecting on the Past, Energizing the Present, and Foreshadowing the Future. En F. M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 547-556). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_26
- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa* (2ª ed.). Morata.
- Fosse, T., Lange, T. y Meaney, T. (2020). Kindergarten Teachers' Stories About Young Children's Problem Posing and Problem Solving. En M. Carlsen, I. Erfjord y P. S.

- Hundeland (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 351-368). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_21
- Font, V. (2008). Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. En C. Gaita (Ed.), *Actas del III Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 21-62).
- Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En B. D'Amore y M. I. Fandiño-Pinilla (Eds.), *Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 249-269). Universidad de la Sabana.
- Husén, T. (1988). Paradigmas de la investigación en educación: un informe del estado de la cuestión. En I. Dendaluce (Ed.), *Aspectos metodológicos de la investigación cualitativa* (pp. 46-59). Narcea.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kvale, S. (1996). *Interviews: An Introduction to Qualitative Research Interviewing*. SAGE Publications.
- Lee, SY. (2021). Research Status of Mathematical Problem Posing in Mathematics Education Journals. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(8), 1677-1693. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10128-z>
- Lee, Y., Capraro, R. y Capraro, M. (2018). Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(2). <https://doi.org/10.12973/iejme/2698>
- Lerman, S. (2010). Theories of mathematics education: Is plurality a problem? En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education* (pp. 99-109). Springer.
- Lester, F. y Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8
- Leung, S. S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 103-116. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9436-4>

- Leikin, R. y Elgrably, H. (2019). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, 101424. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.002>
- Li, X., Sun, X. y Cai, J. (2022). Integrating problem posing into the mathematics classroom: current advances and future directions of research. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 48(1). <https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2022.101213>
- Malaspina, U. (2021). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(1), 1-17. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2021.1-17>
- Martín-Díaz, J. P. (2022). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en contextos de formulación de problemas [Tesis doctoral]. Universidad de Huelva, España.
- Mason, J. (2016). When Is a Problem...? “When” Is Actually the Problem! En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advance and new perspectives* (pp. 263-286). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_16
- National Council of Teachers of Mathematics (2003). Principios y estándares para la educación matemática. SAEM Thales.
- Orden de 30 de mayo de 2023, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Infantil en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, núm. 104 (2023).
- Palmér, H. y van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: what does posing a similar task imply to students? *ZDM Mathematics Education*, 52, 743-752. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01129-x>
- Polya, G. (1985). *How to solve it* (2ª ed.). Princeton University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157-162. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3>

- Silver, E. A. y Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539. <https://doi.org/10.2307/749846>
- Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 1-7. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2>
- Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.
- Stoyanova, E. y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. En P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Strauss, A. L. y Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Techniques*. SAGE Publications.
- Weber, K. y Leikin, R. (2016). Recent advances in research on problem solving and problem posing. En A. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 353-382). Sense Publishers
- Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477. <https://doi.org/10.2307/749877>
- Yin, R. K. (2009). *Case study research. Design and methods* (4.^a ed.). SAGE Publications.

4.6. Artículo 3: Students' Difficulties with Problem Posing in Early Childhood Education

Carmona-Medeiro, E., & Climent, N. (2025). Students' Difficulties with Problem Posing in Early Childhood Education, *Education Science*, 15(5), 630.
<https://doi.org/10.3390/educsci15050630>

Students' Difficulties with Problem Posing in Early Childhood Education

Enrique Carmona-Medeiro ^a, Nuria Climent ^b

^a Department of Didactics, Faculty of Education, Area of Didactic of Mathematic, University of Cádiz, Spain

^b Department of Integrated Didactics, COIDESO, University of Huelva, Huelva, Spain

Abstract: This study focuses on exploring students' emerging difficulties during a problem posing task in an early childhood education classroom (4-5 years old). Through a single case study, and by considering the problems posed as an indicator of the students' mathematical performance level, the difficulties inherent in the process of posing problems based on a given situation are characterised. The results reveal the existence of difficulties both in the exploration phase of the problem situation and in posing the problems themselves. This shows the main difficulties are related to a lack of accuracy in language, which is typical of this stage, and to the notion of non-mathematical problem that prevails in the students.

Keywords: problem posing; early childhood education; learning difficulties

1. Introduction

Mathematical problem posing (hereafter MPP) has emerged as a recent area of interest in mathematics education (Aktaş, 2022; Cai and Hwang, 2020). It is considered a key element to foster the development of mathematical thinking (Cai et al., 2022; Singer et al., 2015). This growing interest is explained both by the importance curricula attribute to it (Cai, 2022; Li et al., 2022; NCTM, 2003), and by the benefits it brings to mathematics teaching and learning processes (Cai & Hwang, 2023; Lee et al., 2018; Leikin & Elgrably, 2019; Li et al., 2022).

Research into MPP has been carried out at different educational levels, including primary (Bonotto & Santo, 2015; Possamai & Allevato, 2024), secondary (Cai et al., 2023; Krawitz et al., 2024), and university education (Baumanns & Rott, 2024; Montes et al., 2024). However, early childhood education (henceforth ECE), the educational stage for children under the age of 6, remains largely under-explored (Carmona-Medeiro et al., 2024; van Bommel et al., 2024).

Despite the progress made in research, there is a clear need to build a more robust theory to understand the general phenomenon of MPP (Baumanns and Rott, 2021; Cai et al., 2015). One of the lines of research that requires attention from the research community concerns how to implement and manage MPP tasks to help students learn how to pose mathematical problems (Carmona-Medeiro & Climent, 2024; English, 2020; Li et al., 2022). In this regard, Cai (2022) points out three challenges teachers encounter during the implementation of MPP tasks that need to be addressed through empirical studies: (i) how to manage problems of a non-

mathematical nature posed by students, (ii) how to manage problems students pose that are not related to the objectives of the task, and (iii) how to manage situations inherent to the open nature of MPP tasks.

This study aims to contribute to filling the existing gap about ECE students' difficulties in problem posing processes. It lays the foundations for future research and didactic proposals that seek to integrate MPP into the classroom at this educational stage. In doing so, it addresses both the processes involved in the task implementation—through the analysis of students' difficulties—and the products generated—through the characterisation of the problems posed. The context is a lesson with 4-5-year-olds, in which the problem situation is presented as a complex poster showing daily life in a neighbourhood. Given the paucity of studies conducted on ECE, there is no evidence as to whether the challenges outlined by Cai (2022) can be applied to this educational stage. It is understood that characterising problems posed by students is an indicator of both their level of performance and of the difficulties they face (Xu et al., 2020). Exploring students' difficulties is therefore useful to understand the challenges an ECE teacher faces during task implementation. This study aims to contribute to filling the existing gap about ECE students' difficulties in problem posing processes. It lays the foundations for future research and didactic proposals that seek to integrate MPP into the classroom at this educational stage.

2. Theoretical framework

2.1. Problem posing

The research literature in mathematics education reflects a wide variety of approaches and definitions of what constitutes MPP (Baumanns & Rott, 2021; Cai, 2022). In the case of students, and from a broad perspective, MPP can be understood as performing two activities: (i) posing a problem based on a given situation, or (ii) posing a problem by modifying an existing problem (Silver, 1994). Henceforth, the focus of this study will be on MPP based on a given situation. Taking into account the level of openness the task grants to the problem poser, Baumanns and Rott (2020, 2021) distinguish between structured and unstructured MPP tasks. MPP tasks are structured when students are asked to pose problems based on a previously solved problem by modifying some of its structural elements. Tasks are unstructured when students pose problems based on a given situation that may or may not provide detailed information. Thus, MPP tasks form a spectrum, in which both the restrictions and the information provided increase, and whose extremes are unstructured and structured tasks. This study focuses on unstructured tasks.

The defining framework assumed (Cai 2022; Baumanns and Rott, 2020) implies the activity of formulating necessarily leads to the construction of a problem that requires a solution. When recent studies within the framework of problem solving refer to mathematical problems, they do so to describe non-routine problems (Baumanns and Rott, 2020). However, it is important

to note that the terms “task” and “problem” are used in a broad sense in the framework of problem posing, and an MPP task can hence lead to the construction of problems at any point along the routine/non-routine spectrum.

MPP tasks have been conceptualised in the literature as consisting of two fundamental elements: the problem situation and the prompt (Cai & Hwang, 2023; Cai et al., 2022). The problem situation sets the context and provides the background information for problem posing. Depending on whether the problem situation is based on real-world or on mathematical references, it concerns a real-world or a mathematical context. The information provided by the problem situation can be qualitative or quantitative, and may include words, pictures, graphs, patterns, tables, and mathematical expressions (Cai and Hwang, 2023). The prompt guides the problem posing process by delimiting the expectations of the task. For the same problem situation, there can be numerous types of prompts, which may include a reference to the number of problems, the difficulty, the person the problem posed is intended for, or a combination of those prompts.

An MPP task can become more or less structured by making modifications in the problem situation and/or the prompt (Carmona-Medeiro et al., 2024). The choice of problem situation, and therefore of the context and the amount of information provided, influences the nature of the problems students can generate and the complexity of the mathematical work to be activated (Montes et al., 2024). Different studies have shown the type of prompt has a direct impact on the characteristics of the problems students pose (Cai et al., 2023).

We know that the cognitive processes involved in problem posing have their own specific nature and, therefore, cannot be effectively described using traditional phase models of problem solving (Cai & Rott, 2024; Pelczer & Gamboa, 2009). Although there is still no general descriptive model of phases for problem posing comparable to Pólya's four-step problem-solving model (1985), several studies have attempted to characterise its phases (Baumanns & Rott, 2022; Cai, 2022; Cruz, 2006; Koichu & Kontorovich, 2013; Pelczer & Gamboa, 2009; Zhang et al., 2022).

In particular, Zhang et al. (2022) propose that the processes involved in problem posing can be framed in three phases: (i) understanding the task, (ii) constructing the problem, and (iii) expressing the problem. Given the nature of this study, focused on identifying students' difficulties during a problem posing task, attention is placed on two of these phases: the students' understanding of the task and the oral expression of the posed problem.

The understanding of the task phase constitutes a key moment in the problem posing process, as it does not merely involve interpreting instructions but requires an active exploration of the problem situation to identify its mathematical potential. According to Baumanns and Rott (2022), this initial phase, which they call situation analysis, is crucial for generating mathematically meaningful problems, as it allows students to establish connections between

the elements present in the problem situation and the underlying mathematical structures. Moreover, Zhang et al. (2022) note that cognitive conflicts arising during this phase act as creative triggers in the process of posing problems. Other studies (Cai & Rott, 2024; Crespo & Sinclair, 2008) highlight the importance of students becoming familiar with the task in order to recognise its limitations and possibilities, concluding that a prior and thorough exploration of the problem situation positively impacts the quality of the problems posed. However, identifying the opportunities the task offers, considering its conditions, constraints, and mathematical potential, is neither immediate nor self-evident, but requires deliberate interpretation and selection by the students (Pelczer & Gamboa, 2009). In the case of early childhood education, several studies (Martín-Díaz et al., 2020; Carmona-Medeiro et al., 2024) reveal that exploring the problem situation is essential for the viability of the task.

The problem expression phase, on the other hand, requires students to organise their ideas and articulate the language needed to shape the problem they have devised clearly and precisely (Baumanns & Rott, 2022). Crespo and Sinclair (2008) point out that the ability to express mathematical problems not only reflects understanding of the content but also the ability to communicate mathematical ideas effectively. In the case of students under the age of six, studies indicate that limitations inherent to the development of literacy and linguistic skills (Carmona-Medeiro et al., 2024; van Bommel et al., 2024) affect the written or oral formulation of the problem. Thus, the expression phase becomes particularly sensitive in early childhood education, where communication difficulties may influence the quality of the problem posed, regardless of the students' level of mathematical understanding.

2.2. Characteristics of the problems posed: an indicator of students' difficulties

MPP is a cognitively demanding activity (Cai and Hwang, 2023; Silver, 1994). Unlike problem solving, MPP, in general, is an activity that is far removed from the usual classroom habits (Chen & Cai, 2020; Singer et al., 2013). Its integration in the classroom is a challenge for both teachers and students, as it involves a disruption of prevailing rules and expectations of teaching and learning mathematics (Cai et al., 2015). To make progress in understanding how to integrate MPP in the classroom, it is necessary to understand which factors influence its implementation (Cai et al., 2015; Carmona-Medeiro & Climent, 2024). Although studies focused on ECE indicate the feasibility of introducing MPP (Carmona-Medeiro et al., 2024; Fosse et al., 2020; Martín-Díaz et al., 2020; van Bommel et al., 2024), little is known about the difficulties experienced by ECE students during MPP. The study conducted by Carmona-Medeiro & Climent (2024) on understanding how a teacher manages an MPP task in an ECE classroom (4-5 years), can be considered a direct antecedent of this study. The study reveals that most of the students' difficulties involving teacher scaffolding are related to the students' prevailing non-mathematical meaning of problem.

It should be noted that, at this age, children are in the process of learning how to read and write, reason for which the problem situation should provide information in a register other than the

written one. Therefore, the choice of the register to be used to provide the problem situation is not random. Obtaining information from the students may represent a potential difficulty linked to the different registers that can be used for the choice of the problem situation. Most of the studies on MPP in ECE (Carmona-Medeiro et al., 2024; Martín-Díaz et al. 2020; van Bommel et al., 2024) provide the problem situation using registers that encourage manipulation and/or visualisation. It is known that manipulative and visual experiences are essential as a basis for verbal and cognitive development at these ages (Smith et al., 2011). However, little is known about the difficulties students experience in obtaining and communicating information from the problem situation.

Analysing problems posed by students is not only an avenue for assessing mathematical performance. It can also be an indicator of their emerging difficulties (Cai et al., 2015). Multiple approaches that analyse problems posed by students (Cai & Hwang, 2003; Carrillo & Cruz, 2016; Leavy & Hourigan, 2022; Palmer & van Bommel, 2020) have been considered in this study. Adaptations were made because of the peculiarities of children. Thus, with the focus on children's difficulties, three variables are considered to characterise the problems posed (Fig. 1): (i) mathematical nature; (ii) incomplete problems; and (iii) inconsistent problems.

The “mathematical nature” variable is in line with the difficulty Cai (2022) mentions, and refers to whether the problem posed is set in a framework in which the mathematical concepts or procedures necessary to solve the (mathematical or non-mathematical) problem are located. The “incomplete problems” variable refers to the absence of some of the structural elements of the problem posed (information and/or question) (Carmona-Medeiro & Climent, 2024). Finally, the “inconsistent problems” variable addresses both the problems posed in which there is no logical relationship between the information and the question, and those that are unrelated to the current problem situation and/or prompt (Cai, 2022).

In light of recent studies (Baumanns & Rott, 2022; Cai & Rott, 2024), it is relevant to distinguish between the processes involved in MPP and the products resulting from it. The former refer to the cognitive, linguistic, and interactional actions students perform throughout the problem posing activity, whereas the latter concern the structure and mathematical quality of the posed problems. This study considers both dimensions: the analysis of the posed problems, and the emerging difficulties identified during the activity, each offering a complementary perspective on students' engagement with MPP.

3. Methodology

This study uses the single case design as a methodological approach (Yin, 2009), considering the implementation of an MPP task as the unit of analysis. It is an intrinsic case study (Stake, 1995) that consists of a group of students in a problem posing lesson in an ECE classroom. It allowed exploring and characterising students' emerging difficulties during problem posing. The interest of the case lies in: (i) the uniqueness of the sample, 4-5 year-old children; (ii) the

distance, in relation to the usual classroom habits, with respect to MPP based on a given situation and; (iii) the lack of research on the difficulties of students under the age of six.

This paper explores the emerging difficulties of students related to posing mathematical problems based on a given situation. The study seeks to characterise the problems posed with the aim of highlighting difficulties linked both to the mathematical activity of MPP and to the idiosyncrasies of the educational stage. In line with recent research (Baumanns & Rott, 2022; Cai & Rott, 2024), the analysis considers both the processes students engage in during the task—through the observation of difficulties as they unfold—and the products they generate—through the problems they manage to pose. This dual perspective enables a more comprehensive understanding of their engagement with MPP.

3.1. Context and participants

The classroom analysed in this study involves a teacher, referred to as Elena (pseudonym), and 20 children aged between 4 and 5 in the second year of ECE in a public school in a small town in south-western Spain. At the time of the study, Elena had 15 years of experience, and was well acquainted with the problem-based learning (PBL) approach, as she was an active member of a collaborative research group with a particular interest in the reflection on and implementation of learning situations related to PBL. Although the PBL approach was common practice in the classroom, MPP based on a given situation was a practice that was far removed from the usual classroom habits.

3.2. Description of the lesson

The starting point of the MPP task implemented is a problem situation provided by means of a poster (Figure 1). The problem situation presented in the poster represents daily life in a neighbourhood. The information the poster provides includes individuals (pedestrians, workers, a policeman, vendors, customers, drivers, animals, etc.), objects (vehicles, clothes, fruit, urban infrastructure, safety elements, elements of nature), actions (buying and selling, moving around, directing traffic, tree pruning, etc.), spaces (shops, houses, urban spaces, green areas, etc.).

The activity begins with gathering the students in an assembly in which Elena reminds them of the basic rules of participation and tells them a brief story about the Fields medal to contextualise the mathematical activity. The poster, initially covered with a cloth, is used as a resource to arouse curiosity in the students. Once the poster has been uncovered, Elena gives the instructions of the activity and guides the students in identifying and recognising the elements that make up the poster. The students participate spontaneously, naming the aspects of the poster that are interesting or familiar to them. After the initial exploration of the problem situation, Elena returns to the instructions, stressing that the aim of the task is to invent problems based on the poster.

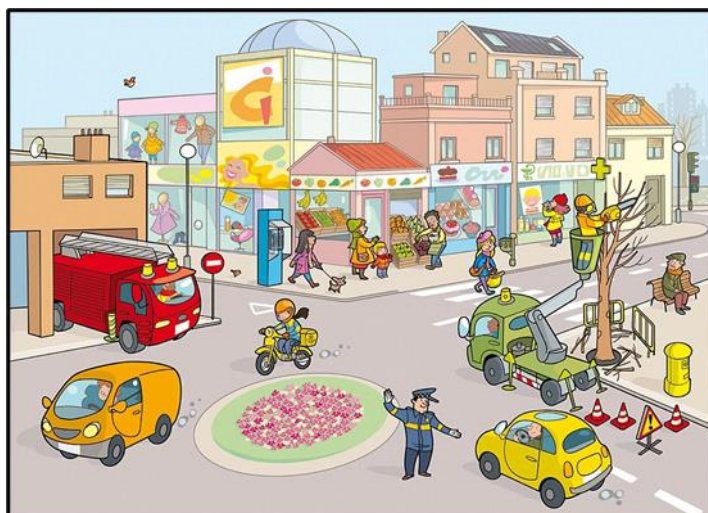


Figure 1. Poster shown to the students for mathematical problem posing.

Throughout the session, although the problem situation remains unchanged, the teacher makes several modifications to the prompt. The original task, referred to as Task 0, thus evolves because of the modifications the teacher makes to the prompt, giving rise to eight tasks. Table 1 provides the tasks shown according to the type of prompt used.

Table 1. Types of tasks according to the prompt used.

Prompt	Tasks
Posing a problem related to the poster	Task 0
Posing a problem related to the poster different to the previous ones	Task 1
Posing a problem continuing a story	Tasks 2 and 7
Posing a problem based on a question	Task 3
Posing a problem using a word	Tasks 4 and 8
Posing a problem using a quantity	Task 5
Posing a problem based on a specific part of the poster	Task 6

With Elena's help, the students' contributions progressively evolve into a coherent story, together with an appropriate question. The task runs for approximately an hour, and once most of the students have had a chance to pose a problem, the activity is considered completed.

3.3. Data collection and analysis

As the students are in the process of learning how to read and write and posing problems is done orally, video-recording was chosen as an instrument to collect data. It allows collecting both verbal and gestural data from the students. The session analysed was designed by the teacher with the support of a collaborative research group in which she participates together with teachers from other educational levels and educators in Didactics of Mathematics, including one of the authors of this paper. The implementation of the session is observed in a non-participant manner. It is video-recorded, placing a camera in the back of the classroom so as not to interfere with the classroom activity.

In order to analyse the students' emerging difficulties during the exploration phase of the problem situation, coding was performed freely, without using any instrument or recurring to a priori categories other than the perspective provided by the theoretical framework. This allowed grouping the students' difficulties and constructing emergent categories following an iterative coding process using the constant comparative method (Bryman, 2001). The emergent analysis of the data followed the grounded theory approach, a method commonly used in qualitative research (Charmaz, 2008). During the coding process, through grouping by units of meaning, different categories and indicators emerged. They were refined during and after the subsequent analysis (Strauss and Corbin, 1990), following the meaning condensation approach proposed by Kvale (1996). It was validated through investigator triangulation (Flick, 2007). The detailed analysis up to the first elicitation of categories was performed by the first author of this paper within the framework of his doctoral thesis, and was then discussed with the second author. The analysis of the students' actions led to the identification of two emergent indicators linked to the students' difficulties in exploring the problem situation (Table 2).

Table 2. Emergent indicators (D1 and D2) related to students' difficulties in exploring the problem situation.

Indicators
D1. Difficulty in recognising the elements of the problem situation
D2. Difficulty in naming/ communicating the elements of the problem situation

The problems formulated by the students were transcribed and subjected to an analysis of the three variables described: mathematical nature (yes/no), incomplete problems (absence of information/absence of question), and inconsistent problems (there is no logical relationship between the information and the question/the problem posed is not related to the problem situation and/or current prompt). This led to the identification of three other difficulties, this time associated with the problem posing phase itself (Table 3).

Table 3. Characterisation of problems posed by the students related to difficulties (D3, D4, and D5) during problem posing.

Indicators
D3. Posing problems of a non-mathematical nature
D4. Posing incomplete problems
D5. Posing inconsistent problems

4. Results

The problem posing session takes place in three phases: (i) presentation and contextualisation of the activity, (ii) exploration of the problem situation, and (iii) problem posing. Table 4 shows

the students' difficulties in the last two phases, as Elena, the teacher, plays the main role in the first phase.

The analysis of the students' actions performed on the information units allowed identifying five indicators (D1-D5) linked to the difficulties the students experienced during the problem posing task. The first two indicators (D1 and D2) refer to the difficulties the students experience during the exploration of the problem situation, while the remaining indicators (D3-D5) refer directly to the difficulties they experience during the problem posing process. The frequency of occurrences (n_i) in which each type of difficulty was identified is presented below (Table 4):

Table 4. Emergent indicators linked to student's difficulties (D1-D5) during the problem posing task, together with their frequency of occurrence (n_i).

Indicators	n_i
D1. Difficulty in recognising the elements of the problem situation	10
D2. Difficulty in naming/communicating the elements of the problem situation	39
D3. Posing problems of a non-mathematical nature	32
D4. Posing incomplete problems	81
D5. Posing inconsistent problems	6

4.1. Students' difficulties during the exploration of the problem situation

Difficulties related to the recognition of the elements that make up the problem situation (D1) occur in three situations: (i) difficulty in distinguishing between objects that have some similarity in form or function ($n_i=6$); (ii) difficulty in recognising the specific meanings of road signs ($n_i=2$); and (iii) difficulty in recognising the gender of people ($n_i=2$). Some examples are shown below:

63⁵ **P** "I see a drawing of a child"

72 **P** "Here is another one" [the student says there is another traffic light while she points to a street lamp]

49 **P** "I see a red circle"

198 **P** "A woman with a small bag..."

The first two examples correspond to the difficulty in distinguishing between objects that have a certain similarity in form or function (i). In the first case, when the student confuses an advertisement with a drawing, the difficulty comes from not understanding the communicative intention of the advertisement. In the second case, when the student confuses a street lamp with a traffic light, the difficulty arises from not identifying the functional difference (one illuminates, the other regulates traffic). In the third example, there is a difficulty in recognising

⁵ The transcription records are labeled as follows: the number of each turn; the speaker (T for teacher and P for pupil); the transcription of each speaker's utterance; accompanying gestures in square brackets.

the specific meanings of traffic signs (ii). In this case, the student sees the “no entry” sign only as a red circle without understanding its specific meaning. The last example shows the difficulty in recognising the gender of people (iii). The student confuses an older man with a woman, showing that, at this age, they do not yet have a clear outline of the subtle physical differences between men and women. Factors such as clothing, hairstyle, or posture may influence their perceptions.

Difficulties related to naming or communicating the elements of the problem situation (D2) are manifested in the lack of accuracy in the use of language. Some examples are given below:

- 13 P “I see a truck cutting a tree.”
- 25 P “It is not allowed there.”
- 40 P “It is a post...for the light.”
- 62 P “He is telling him he cannot pass.”
- 149 P “Because it can blow very hard.”
- 501 P “There are four.”
- 551 P “There are none.”
- 50 P “There, there” [pointing to the poster] [Joint reply]
- 19 P “Down”
- 20 P “On the left”

In the first case, the student attributes the action of cutting the branch to the truck instead of to the worker. The child observes the crane truck and the worker with a saw, but does not notice the truck only holds the platform. In the second case, the student expresses the impossibility of performing an action without specifying it. In the third case, the student describes the object by looking at one of its parts and its function, but does not know the appropriate word for the object (“street lamp”). In the fourth and fifth examples, the student expresses an action without specifying who performs it. In the sixth and seventh cases, the student expresses a quantity of measurement without specifying which number and/or unit of measurement the quantity of measurement refers to. The last three examples correspond to students' difficulties in communicating the position of an element on the poster. This difficulty is significant because of its frequency of occurrence ($n_i = 24$). The first example corresponds to the use of gestural language to communicate the position ($n_i=11$), while the remaining examples correspond to the use of relative positions (“up-down, right-left”), which are insufficient to locate the element on the poster ($n_i = 11$).

4.2. Students' difficulties during the problem posing process

The following section deals with the students' emerging difficulties with regard to each of the three variables used.

4.2.1. Posing non-mathematical problems

The analysis of the units of information related to indicator D3 led to the identification of three emergent descriptors (D3-1, D3-2, and D3-3). These descriptors are presented below (Table 5) together with their frequency of occurrence (n_i):

Table 5. Emergent descriptors linked to posing non-mathematical problems (D4-1 and D4-2), together with their frequency of occurrence (n_i).

Descriptors	n_i
D3-1. Orienting problem posing towards accidents or catastrophes	11
D3-2. Orienting problem posing towards situations that make it difficult or impossible to achieve an end	17
D3-3. Orienting problem posing towards enquiring into motivations or reasons for an action	4

The problems posed by the students are successively oriented towards non-mathematical situations, showing that, at this age, the notion of mathematical problem is still incipient, and the notion of personal problem prevails. In the first two cases (D3-1 and D3-2), the logic underlying the notion of personal problem implies it is not necessary to provide a question or information of a mathematical nature. Some examples of non-mathematical problems posed by students are provided below. The first three examples correspond to situations in which the students orient posing the problem towards accidents or catastrophes (D3-1), while the remaining ones correspond to situations where the students orient posing the problem towards situations that make it difficult or impossible to achieve an end (D3-2):

79 P “A woman walking around with a bag... she runs away and gets hit by a car.”

161 P “The firemen over there... want to get out of the fire station and they're going to damage that corner because they're going to hit it with the ladder.”

211 P “What if the man who is cutting the tree drops a branch and it accidentally hits the head of the man sitting?”

156 P “A woman walking around with a bag... She has to get home and doesn't know the way.”

123 P “This woman wants to go somewhere ... but the policeman won't let her pass... because the road is blocked. So she can't get through.”

281 P “A woman with a dog wants to go shopping for clothes. She wants to buy a waistcoat, but she doesn't like it.”

In the last case (D3-3), although the students provide partial information of a mathematical nature and/or a question, the problems seem to be oriented towards exploring reasons or motives behind an action:

123 **P** “The girl has two loaves of bread, why did she buy two loaves of bread?”

146 **P** “The paper is flying away... Why is that boy's paper flying away? [pointing to the sign in the pharmacy window]”

156 **P** “A woman with a dog wants to go shopping for clothes. What does she want to buy?”

In all cases the students identify an action or situation and formulate a question that invites to connect the action with a reasonable reason (cause and effect relationship). The evolution from Task 0 to the subsequent tasks was a response to the students’ emerging difficulties (D3-1, D3-2, and D3-3) and the need to create a viable environment for problem posing. The teacher’s strategy focused on modifying the level of structuring of the initial task (free prompt), by progressively increasing both the constraints and the information provided, through new prompts (structured prompts) that guided the tasks toward more structured situations. The modifications made to the initial task (Task 0) had an impact on the problems posed by the students, significantly reducing the emerging difficulties (D3-1, D3-2, and D3-3).

4.2.2. Posing incomplete problems

The analysis of the units of information related to indicator D4 led to the identification of three emergent descriptors (D4-1 and D4-2). These descriptors are presented below (Table 6) together with their frequency of occurrence (n_i):

Table 6. Emergent descriptors linked to posing incomplete problems (D4-1 and D4-2), together with their frequency of occurrence (n_i).

Descriptors	n_i
D4-1. Incompleteness of information in the problem posed	33
D4-2. Absence of a question in the problem posed	48

Throughout the session, numerous situations are identified in which it is clear the problems the students pose are incomplete, either because the information of the problem is incomplete, because data are missing (D4-1), or because there is no question that requires mathematical thinking (D4-2). In general, these are partial advances in posing problems.

Incompleteness of information in the problem (D4-1) occurs when the students make partial progress in formulating the information of the problem. In all cases where incompleteness of information is identified, the absence of a question (D4-2) is simultaneously observed. Some examples in which it is clear the students have difficulties in formulating a mathematical

problem (information and question) and in which their interventions reflect only partial progress in the development of the information of the problem are provided below:

214 P “That man wants to go to all the shops over there...”

270 P “A woman with a dog... wants to go shopping for clothes...”

424 P “That mum wants to buy fruit for her son.”

491 P “There is only one apple, one pear, one orange, and one grape.”

The absence of a question in the problem posed (D4-2), in addition to being observed in cases where only a partial advance of the information of the problem is produced ($n_i=33$), occurs in situations where the information of the problem is incomplete ($n_i = 15$). Some examples are shown below:

137 P “The woman bought two loaves of bread and wanted to buy three...because there were...no more loaves of bread in the shop.”

427 P “That mum wants to buy fruit for her son. She wants an apple, a pear, and a grape.”

474 P “That window has the shape of a square.”

608 P “A woman with a dog wants to buy a hat. The hat costs 10€ and the woman only has 1€.”

In all cases, the students give the information of the problem, providing a story (buying and selling), and/or data relating to mathematical quantities (discrete quantities or shapes). However, they do not ask any questions. The various modifications made by the teacher to the initial task (Task 0) had no impact on the emerging difficulties (D5-1 and D5-2).

4.2.3. Posing inconsistent problems

The analysis of the units of information related to the problems the students pose led to the identification of two descriptors (D5-1 and D5-2) linked to the inconsistency of the problems (D5). These descriptors are presented below (Table 7), together with their frequency of occurrence (n_i):

Table 7. Emergent descriptors linked to posing inconsistent problems (D5-1, D5-2 and D5-3), together with their frequency of occurrence (n_i).

Descriptors	n_i
D5-1. There is no logical relationship between the information and the question	1
D5-2. Initiate posing a problem that is not related to the current prompt	5

The absence of a logical relationship between the information and the problem question (D5-1) occurs when the students make partial progress in the development of the information of the problem and formulate a question that is inconsistent with the story elements developed:

248 **P** “A woman goes to buy bread...How many cars are there?”

Throughout the session, although the problem situation remains unchanged, the teacher makes several modifications to the prompt. These modifications to the original task (Task 0) represent a difficulty for the students. This shows that, although the teacher modifies the prompt and considers the previous tasks as completed, the students continue to initiate the posing of problems in relation to previous prompts (D5-2). This was observed, for instance, during Task 2, where the prompt is given by the instruction to pose a problem based on a story that has already started:

118 **T** “...Let's help Adrian with the first part of the problem: a woman goes to buy bread Can anyone think of any questions or stories we need to consider?”

The students start posing a problem that is related to previous prompts:

123 **P** “The car goes...”

5. Conclusions

The results obtained in this study provide evidence of the difficulties experienced by ECE students (4-5 years) in posing mathematical problem based on a given situation. Five key indicators of difficulty were identified and characterised. Two of the difficulties occur during the exploration phase of the problem situation: difficulty in recognising the elements of the problem situation (D1), and difficulty in naming and communicating these elements (D2). The remaining three occur during the formulation phase: posing problems of a non-mathematical nature (D3), posing incomplete problems (D4), and posing inconsistent problems (D5).

With regard to the exploration phase of the problem situation, the data show that students find it difficult to accurately communicate the elements (objects, subjects, actions, spaces, etc.) they observe in the problem situation (D2). This difficulty can be explained by the fact that, at this age, they are still developing their language skills and, therefore, still consolidating their vocabulary, their ability to categorise, and their accuracy in the use of language. Previous research (Cai, 2022; van Bommel et al., 2024) pointed out that the representational register used in providing the problem situation may influence the students' understanding. The findings of this study suggest that providing the problem situation by means of a complex picture may be a significant factor for exploring difficulties. The difficulties observed during this phase (D1 and D2) stress the need to include the exploration phase of the problem situation as an inherent phase of problem posing (Zhang et al., 2022) in ECE, as indicated in previous studies by Carmona-Medeiro et al. (2024) and Martín-Díaz et al. (2020).

In the problem posing phase, it was observed that a significant number of students posed problems of a non-mathematical nature (D3). This difficulty has been reported in research on other educational levels, and has been identified as one of the challenges that need to be investigated in task management (Cai, 2022). In addition to confirming that this difficulty is also prevalent in ECE, the study characterises the problems posed, which enables analysing children's logic in greater depth. The tendency of students to pose non-mathematical problems reinforces the idea that the notion of personal problem prevails at this age (Carmona-Medeiro & Climent, 2024). When posing problems is oriented towards accidents or catastrophes (D3-1), or towards situations that make it difficult or impossible to achieve an end (D3-2), the prevailing children's logic does not consider it necessary to use information of a mathematical nature or a question to be answered (Carmona-Medeiro & Climent, 2024). When problem posing is oriented towards enquiring into motivations or reasons for an action (D3-3), the underlying logic implies that the question can respond to a natural logic, and its solution can be invented (Ayllón et al., 2010; Carmona-Medeiro & Climent, 2024).

Another relevant finding is the high number of incomplete problems (D4). This suggests that the students have difficulties in including all the structural elements of a problem (Malaspina, 2021). In most cases, initial formulations were fragmentary and represented only a partial advance in the development of the information of the problem (D4-1), and therefore did not include any questions. Even when students develop a story, the formulation of the question is not clear. The data show the need for teacher scaffolding to complete the story/information, or to formulate a question. All the mathematical problems the students pose went through previous formulations in which some of the structural elements of the problem are not addressed. They evolved thanks to the pedagogical help of the teacher, essentially through questions, and to the collaboration of the students. This difficulty has been pointed out in previous studies on MPP tasks at early ages, where the role of the teacher in the co-construction of problems together with students (Palmér & van Bommel, 2020), the establishment of mathematical demands (Carmona-Medeiro & Climent, 2024), or the modification of the variables of the task (problem situation and/or prompt) (Carmona-Medeiro et al., 2024) to encourage the students' progress in problem posing are highlighted.

Finally, the low number of inconsistent problems (D5) indicates that most students managed to maintain a certain degree of coherence between the information and the question. This suggests that, despite the difficulties, students have an intuitive understanding of the basic structure of a problem (Lowrie, 2002), although they still require support to make mathematical relationships explicit in their statements.

The modifications made to the task, aimed at increasing its level of structuring, proved useful for redirecting students' problem posing towards mathematically meaningful situations. However, these adjustments had no impact on students' difficulties in formulating complete problems. This suggests that, while increasing task structuring can promote the mathematical

nature of the posed problems, overcoming challenges related to the inclusion of all the structural elements of a problem requires additional interventions. In this regard, we concur with Jastrzębowska (2023) and Chang (2007) that problem posing is viable within an environment of dialogue, emotional support, and progressive scaffolding, where teacher mediation plays a key role in consolidating the necessary competencies. Furthermore, Lowrie's study (2002) demonstrates that first-grade children (6 years old) are capable of generating mathematically meaningful problems when provided with a supportive and stimulating environment, reinforcing the importance of pedagogical context in fostering problem posing abilities from early ages.

Our analysis also suggests that starting from a non-structured situation accompanied by a free prompt can be a powerful didactic strategy when the aim is to access and understand students' prevailing notions of what constitutes a problem.

This study identifies and characterises the emerging difficulties of ECE students during the activity of posing problems based on a given situation. It is believed that the indicators and descriptors provided in this study may be useful in other research on problem posing in ECE. Although further studies on how to implement and manage MPP tasks are needed (Cai, 2022; Carmona-Medeiro & Climent, 2024; English, 2020; Li et al., 2022), this study could provide teachers with guidance on the obstacles and opportunities inherent in teaching and learning through MPP (Cai et al., 2015; Zhang & Cai, 2021).

Author Contributions:

Funding:

Institutional Review Board Statement: Ethical review and approval were waived for this study, since the study focused on observations and analyses without direct interventions that could pose a risk to participants, and considering the national regulations in force in [country name].

Informed Consent Statement: Informed consent was obtained from all subjects involved in the study.

Data Availability Statement: The original contributions presented in this study are included in the article. Further inquiries can be directed to the corresponding author.

Acknowledgments:

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Abbreviations.

The following abbreviations are used in this manuscript:.

MPP Mathematical problem posing

ECE Early childhood education

References

- (Aktaş, 2022) Aktaş, M. C. (2022). Problem-posing research in mathematics education: A bibliometric analysis. *Journal of Pedagogical Research*, 6(4), 217-233. <https://doi.org/10.33902/JPR.202217414>
- (Baumanns & Rott, 2020) Baumanns, L. & Rott, B. (2020). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning*, 13(2), 59-76. <https://doi.org/10.1080/19477503.2020.1841501>
- (Baumanns & Rott, 2021) Baumanns, L. & Rott, B. (2021). Developing a framework for characterising problem-posing activities: a review. *Research in Mathematics Education*, 24(1), 28-50. <https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1897036>
- (Baumanns & Rott, 2022) Baumanns, L. & Rott, B. (2022). The process of problem posing: development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 251–269. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y>
- (Baumanns & Rott, 2024) Baumanns, L. & Rott, B. (2024). Problem-posing tasks and their influence on pre-service teachers' creative problem-posing performance and self-efficacy. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101130. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101130>
- (Bonotto & Santo, 2015) Bonotto, C. & Santo, L.D. (2015). On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School. In Singer, F., F. Ellerton, N., Cai, J. (Eds.), *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education* (pp. 103–123). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_5
- (Bryman, 2001) Bryman, A. (2001). *Social Research Methods*. Oxford University Press.
- (Cai, 2022) Cai, J. (2022). What Research Says About Teaching Mathematics Through Problem Posing. *Éducation & didactique*, 16(3), 31-50. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642>
- (Cai & Hwang, 2020) Cai, J. & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- (Cai & Hwang, 2023) Cai, J. & Hwang, S. (2023). Making Mathematics Challenging Through Problem Posing in the Classroom. In R. Leikin (Ed.), *Mathematical Challenges for All* (pp. 115-145). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7

- (Cai et al., 2015) Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. In F. M. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1
- (Cai et al., 2022) Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. & Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: tasks variables, processes, and products. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1) (pp. 119-145). PME.
- (Cai et al., 2023) Cai, J., Ran, H., Hwang, S., Ma, Y., Han, J. & Muirhead, F. (2023). Impact of prompts on students' mathematical problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, 72, 101087. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101087>
- (Cai & Rott, 2024) Cai, J. & Rott, B. (2024). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM–Mathematics Education*, 56(1), 61–71. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01536-w>
- (Çakır & Akkoc, 2020) Çakır, A. y Akkoc, H. (2020). Examining socio-mathematical norms related to problem posing: A case of gifted and talented mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 105(1), 19-34. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09965-0>
- (Carmona-Medeiro & Climent, 2024) Carmona-Medeiro, E. & Climent, N. (2024). Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en un aula de educación infantil. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 19(1), 25-51. <https://doi.org/10.30827/pna.v19i1.28408>
- (Carmona-Medeiro et al., 2024) Carmona-Medeiro, E.; Martín-Díaz, J.P. & Climent, N. (2024). Variables in planning and carrying out a problem posing task in early childhood education, *Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101131. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101131>
- (Carrillo & Cruz, 2016) Carrillo, J. & Cruz, J. (2016). Problem-Posing and Questioning: Two Tools to Help Solve Problems. In P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick. (Eds.) *Posing and Solving Mathematical Problems: Advance and new perspectives* (pp. 23-36). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3>
- (Chang, 2007) Chang, N. (2007). Responsibilities of a Teacher in a Harmonic Cycle of Problem Solving and Problem Posing. *Early Childhood Education Journal*, 34(4), 265–271. <https://doi.org/10.1007/s10643-006-0117-8>

- (Charmaz, 2008) Charmaz, K. (2008). Reconstructing Grounded Theory. In P. Alasuutari, L. Bickman & J. Brannen (Eds.), *The Sage Handbook of Social Research Methods* (pp. 447-460). SAGE.
- (Chen & Cai, 2020) Chen, T. & Cai, J. (2020). An elementary mathematics teacher learning to teach using problem posing: A case of the distributive property of multiplication over addition. *International Journal of Educational Research*, 102, 101420. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.03.004>
- (Crespo & Sinclair, 2008) Crespo, S. & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(5), 395–415. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9081-0>
- (Cruz, 2006) Cruz, M. (2006). A mathematical problem-formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 79–90.
- (English, 2020) English, L. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: Commentary. *International Journal of Educational Research*, 102, 1–5. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.06.014>
- (Flick, 2007) Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa* (2ª ed.). Morata.
- (Fosse et al., 2020) Fosse, T., Lange, T. y Meaney, T. (2020). Kindergarten Teachers' Stories About Young Children's Problem Posing and Problem Solving. In Carlsen, M., Erfjord, I., Hundeland, P.S. (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 351-368). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_21
- (Jastrzębowska, 2023) Jastrzębowska, K. (2023). What is the area of a pig? Problem posing and problem solving in early childhood education. *PROBLEMY WCZESNEJ EDUKACJI*, 2 (57). <https://doi.org/10.26881/pwe.2023.57.09>
- (Koichu & Kontorovich, 2013) Koichu, B. & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the billiard task. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 71–86. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9431-9>
- (Krawitz et al., 2024) Krawitz, J., Hartmann, L. & Schukajlow, S. (2024). Do task variables of self-generated problems influence interest? Authenticity, openness, complexity, and students' interest in solving self-generated modelling problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101129. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101129>
- (Kvale, 1996) Kvale, S. (1996). *Interviews: An Introduction to Qualitative Research Interviewing*. SAGE Publications.

- (Leavy & Hourigan, 2024) Leavy, A. & Hourigan, M. (2024). Attending to task variables when engaging in group problem posing for elementary level mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101128. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101128>
- (Lee et al., 2018) Lee, Y., Capraro, R. & Capraro, M. (2018). Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(2), 75–90. <https://doi.org/10.12973/iejme/2698>
- (Leikin & Elgrably, 2019) Leikin, R. & Elgrably, H. (2019). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, 101424. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.002>
- (Li et al., 2022) Li, X., Sun, X. & Cai, J. (2022). Integrating problem posing into the mathematics classroom: current advances and future directions of research. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 48(1), 101213. <https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2022.101213>
- (Lowrie, 2002) Lowrie, T. (2002). Designing a framework for problem posing: Young children generating open-ended tasks. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 3(3), 354–363. <https://doi.org/10.2304/ciec.2002.3.3.4>
- (Malaspina, 2021) Malaspina, U. (2021). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(1), 1-17. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2021.1-17>
- (Martín-Díaz et al., 2020) Martín-Díaz, J. P., Montes, M., Codes, M. & Carrillo, J. (2020). Characterisers of Teaching in a Mathematics Problem Posing Lesson in Preschool Education. *Sustainability*, 12(15), 6148. <https://doi.org/10.3390/su12156148>
- (Montes et al., 2024) Montes, M., Chico, J., Martín-Díaz, J.P. & Badillo, E. (2024). Mathematics teachers' specialized knowledge mobilized through problem transformation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101132. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101132>
- (NCTM, 2003) National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales.
- (Palmér & van Bommel, 2020) Palmér, H. & van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: what does posing a similar task imply to students? *ZDM Mathematics Education*, 52, 743-752. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01129-x>
- (Pelczer & Gamboa, 2009) Pelczer, I. & Gamboa, F. (2009). Problem posing: Comparison between experts and novices. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.),

- Proceedings of the 33th conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 4 (pp. 353–360). PME.
- (Possamai & Allevato, 2024) Possamai, J.P. & Allevato, N.S.G. (2024). Teaching mathematics through problem posing: Elements of the task. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101133. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101133>
- (Polya, 1985) Polya, G. (1985). *How to solve it* (2^a ed.). Princeton University Press.
- (Silver, 1994) Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.
- (Singer et al., 2013) Singer, F. M., Ellerton, N., y Cai, J. (2013). Problem posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 1-7. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2>
- (Singer et al., 2015) Singer, F. M., Ellerton, N. & Cai, J. (2015). *Mathematical problem posing: From research to effective practice*. Springer.
- (Smith et al., 2011) Smith, L. B., Yu, C. & Pereira, A. F. (2011). Not your mother's view: The dynamics of toddler visual experience. *Developmental Science*, 14(1), 9–17. <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2009.00947.x>
- (Stake, 1995) Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.
- (Strauss & Corbin, 1990) Strauss, A. L. & Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Techniques*. SAGE Publications.
- (van Bommel et al., 2024) van Bommel, J., Palmér, H. & Ebbelind, A. (2024). Division i förskoleklassen genom problemlösning och problemformulering. *Forskning Om Undervisning Och lärande*, 12(2), 46–67. <https://doi.org/10.61998/forskul.v12i2.23893>
- (Yin, 2009) Yin, R. K. (2009). *Case study research*. Design and methods (4.^a ed.). SAGE Publications.
- (Xu et al., 2020) Xu, B., Cai, J., Liu, Q. & Hwang, S. (2020). Teachers' predictions of students' mathematical thinking related to problem posing. *International Journal of Educational Research*, 102,101427. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.005>
- (Zhang et al., 2022) Zhang, L., Cai, J., Song, N., Zhang, H., Chen, T., Zhang, Z. & Guo, F. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: the impact of task format and its relationship to problem solving. *ZDM-Mathematics Education*, 54(3), 497–512. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01324-4>

CAPÍTULO 5

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

“Cada uno de los proyectos para los cuales se busca una representación lleva consigo una definición del rigor y de la precisión: no se es riguroso de una manera general, sino en función de un proyecto y de una manera de ser y de pensar. Así el conocimiento de la ciudad para un comisario de policía reclamará otra precisión que la necesaria para un guía turístico. No es que el uno tenga que ser más preciso que el otro: tienen que serlo de otra manera. Tienen que seleccionar otros puntos de vista y otros resultados” (Fourez, 2008. p. 63).

5.1. Introducción

5.2. Dilemas inherentes al diseño de una tarea de FPM

5.2.1. ¿Qué actividad matemática se pretende movilizar con la FPM?

5.2.2. ¿Cómo se planifica y organiza una tarea de FPM para favorecer la actividad matemática que se pretende movilizar?

5.2.2.1. Dilema relacionado con la variable contexto

5.2.2.2. Dilema relacionado con la variable estructura

5.2.2.3. Dilema relacionado con la variable lenguaje

5.2.2.4. Dilema relacionado con la variable niveles de interacción

5.2.3. ¿Qué conclusiones podemos extraer de la posición de la maestra antes los dilemas inherentes al diseño de una tarea de FPM para un aula de Educación Infantil?

5.3. Dificultades del alumnado durante la formulación de problemas

5.3.1. ¿Qué dificultades tiene el alumnado durante la exploración de la situación problemática?

5.3.2. ¿Qué dificultades se evidencian en los problemas formulados por el alumnado?

5.3.2.1. ¿Qué aspectos del pensamiento infantil revelan los problemas de naturaleza no matemática formulados por el alumnado?

5.3.2.2. ¿Qué dificultades revelan los problemas incompletos formulados por el alumnado?

5.3.2.3. ¿Qué dificultades revelan los problemas inconsistentes formulados por el alumnado?

5.3.3. ¿Qué conclusiones podemos extraer de las dificultades del alumnado a través de los problemas que formula?

5.4. Dilemas inherentes a la gestión de una tarea de FPM

5.4.1. ¿Modifica la maestra su postura ante los dilemas durante la implementación de la tarea con respecto a su posición durante el diseño?

5.4.1.1. Dilema relacionado con la variable foco del contenido

5.4.1.2. Dilema relacionado con la variable contexto

5.4.1.3. Dilema relacionado con la variable estructura

5.4.1.4. Dilema relacionado con la variable lenguaje

5.4.1.5. Dilema relacionado con la variable niveles de interacción

5.4.2. Cuándo y cómo intervenir: Una aproximación a los dilemas de intervención y adecuación desde la perspectiva de las demandas matemáticas

5.4.2.1. Cuándo intervenir: un dilema contingente en la gestión de la FPM

5.4.2.2. Cómo intervenir: ajustar el tipo y grado de andamiaje en la formulación de problemas

5.1. Introducción

La principal pretensión de esta investigación era profundizar en la comprensión sobre cómo se implementan las tareas de FPM en el aula de Educación Infantil, atendiendo a los desafíos que su incorporación al aula plantea tanto para docentes como alumnado. En el marco de esta tesis, la pregunta que ha guiado la investigación es: “¿Qué desafíos implica la integración de la FPM en el aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la gestión de aula?”. Para responderla, se han desarrollado tres estudios que, desde perspectivas complementarias, abordan distintos aspectos de la práctica de una maestra en contextos reales de un aula de Educación Infantil. La discusión de los resultados se articulará entorno en torno a los hallazgos de los tres estudios que conforman la presente tesis por compendio. Se buscará, de esta manera, ofrecer una comprensión profunda de los desafíos inherentes al diseño y gestión de una tarea de FPM en el contexto de Educación Infantil, haciendo especial hincapié en los dilemas y dificultades identificadas, y conectándolos con los retos y necesidades de investigación previamente establecidos en la literatura.

5.2. Dilemas inherentes al diseño de una tarea de FPM

El diseño de tareas de FPM representa un punto crítico en la labor docente. Por un lado, dado que la FPM permite organizar una amplia gama de actividades (Cai, 2022), exige discernir qué tipo de actividad matemática se pretende movilizar. Por otro lado, requiere identificar y configurar las variables de la tarea (situación problemática y prompt) de manera que estén alineadas con la actividad matemática que se desea promover, así como con el contexto del aula a la que va dirigida. Este aspecto es especialmente crítico, dado que la comunidad científica aún no ha clarificado cómo dichas variables impactan en el desarrollo del pensamiento matemático ni en qué medida promueven o no una formulación productiva (Baumanns y Rott, 2022b; Cai et al., 2024; Xu et al., 2020). Por último, cabe señalar el riesgo de trivializar la actividad de FPM mediante tareas invertidas que no exigen una solución, reduciendo así su potencial formativo (Baumanns y Rott, 2022a; Cai y Hwang, 2022; Ruthven, 2020).

El estudio de Carmona-Medeiro et al. (2024) considera la existencia de cinco variables que intervienen cuando un docente planifica, organiza e implementa una tarea de FPM. Dichas variables representan dilemas donde el docente debe discernir entre distintas opciones para conformar una tarea alineada con su propósito didáctico-matemático y las características contextuales del aula (Tabla 31).

A continuación, se emplearán las preguntas operativas y las variables asociadas para organizar la discusión sobre los dilemas que emergen durante el diseño de la tarea.

Tabla 31. Variables utilizadas para analizar el diseño y la gestión de las tareas de formulación de problemas (Carmona-Medeiro et al., 2024)

Pregunta operativa	Variable	Dilemas
¿Qué actividad matemática se pretende movilizar con la FPM?	Foco del contenido	FPM como un medio
		FPM como un fin en sí mismo
		FPM como medio y fin
¿Cómo se planifica y organiza una tarea de FPM para favorecer la actividad matemática que se pretende movilizar?	Contexto	Matemático
		Semi-real
		Real
	Estructura	Estructurado
		No estructurado
	Lenguaje	Matemático
		Coloquial
	Niveles de interacción	Organización individual
		Organización individual y social
		Organización social

5.2.1. ¿Qué actividad matemática se pretende movilizar con la FPM?

Esta pregunta se vincula con el dilema relacionado con la variable “foco del contenido”. El estudio de Carmona-Medeiro et al. (2024) pone de manifiesto que cuando un docente planifica una tarea de FPM, el dilema relacionado con el foco del contenido puede entenderse como la decisión sobre qué objetivos priorizar, pudiendo orientar la FPM como: (i) un medio donde el objetivo es movilizar contenido matemático vinculado a cualquier ámbito del conocimiento; (ii) un fin en sí mismo, donde el objetivo se centra en el proceso de formulación y en la comprensión de la noción y naturaleza de los problemas matemáticos o; (iii) medio y fin, donde el doble foco implica atender la movilización de conocimientos sobre el proceso de formulación de problemas y otros saberes matemáticos. Esta elección no es trivial, pues incide directamente en la forma en que se configura la actividad matemática y en el tipo de pensamiento que se promueve en el aula (English, 1997; Silver, 1994).

La postura de Beatriz ante el dilema es establecer la formulación de problemas como un propósito en sí mismo. Esta postura se evidencia claramente tanto en su planificación didáctica como en el ensayo previo realizado en el seno del grupo colaborativo (PIC) antes de llevar a cabo la sesión en el aula. En su planificación, Beatriz explicita esta orientación al titular su propuesta como “Estrategias para facilitar la formulación de problemas a partir de una imagen compleja” [LP1], dejando entrever que el énfasis de la sesión se sitúa en aprender a formular, más que en utilizar la formulación para movilizar conceptos concretos. Durante el ensayo, Beatriz insiste repetidamente en que lo importante es que los niños y niñas identifiquen qué es un problema matemático y cómo se puede formular, destacando reiteradamente la necesidad de hacer una pregunta (Turnos 149, 157 y 413 del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis,

correspondiente al artículo de Carmona-Medeiro et al., 2024). Aunque Beatriz reconoce el potencial de la FPM como medio para abordar contenidos matemáticos [TP46-49], tras el ensayo deja claro que su prioridad es que el alumnado formule una variedad de problemas matemáticos, más allá de que se trabaje o no un contenido matemático específico: “Lo que yo quiero no es enseñar nada, ni siquiera intentarlo... lo que quiero es una variedad de problemas” [TP31/01 1143–1144; TP31/01 674-688].

Desde esta perspectiva, el foco de la tarea reside en el reconocimiento, estructuración y producción de problemas, es decir, en la activación de una actividad metamatemática centrada en el proceso de construcción de situaciones problemáticas y su reflexión sobre lo que supone, más que en la aplicación de conocimientos matemáticos preestablecidos. Esta decisión puede vincularse con la necesidad de desarrollar en edades tempranas una noción de problema que no esté supeditada exclusivamente a esquemas operativos, sino que promueva la comprensión de lo que significa problematizar una situación (English, 1997; Liljedahl y Cai, 2021).

5.2.2. ¿Cómo se planifica y organiza una tarea de FPM para favorecer la actividad matemática que se pretende movilizar?

5.2.2.1. Dilema relacionado con la variable contexto

Uno de los dilemas fundamentales que enfrenta el profesorado en el diseño de tareas de FPM es la elección del tipo de contexto en el que situar la situación problemática. El dilema se presenta como una tensión entre utilizar un contexto real o uno puramente matemático, siendo posible también una opción intermedia: el contexto semirreal (Carmona-Medeiro et al., 2024). Este continuo, que va del realismo a la abstracción, implica decisiones didácticas críticas, ya que el contexto no es neutro: condiciona la accesibilidad, la interpretación y el tipo de actividad matemática que el alumnado puede desplegar (Cai y Hwang, 2023).

En el caso analizado, Beatriz resuelve este dilema situando la tarea en un contexto semirreal, proporcionando tanto el contexto como los datos a través de un mural que evoca la actividad típica de un barrio (circulación del tráfico y viandantes, situaciones de compraventa y otras actividades profesionales). La elección del mural es consistente con su propósito de favorecer la emergencia de variedad de problemas matemáticos. Su elección frente a otros posibles murales se justifica por su potencial para activar los contenidos matemáticos más relevantes trabajados durante el curso, tales como relaciones topológicas (dentro-fuera), proyectivas (izquierda-derecha, arriba-abajo), de orden lógicas (más grande-más pequeño), el número en sentido ordinal y cardinal, u operaciones como la suma o la resolución de problemas ([TP17/01 39-43] del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis, correspondiente al artículo de Carmona-Medeiro et al., 2024).

Desde una perspectiva de diseño, esta elección revela una toma de decisiones consciente que atiende a dos finalidades clave: (i) contextualizar la tarea en un entorno culturalmente significativo para el alumnado, aumentando la implicación y el sentido de la actividad (Lee,

2010; Vygotsky, 1978); y (ii) configurar un escenario suficientemente rico como para permitir la emergencia de diferentes tipos de problemas matemáticos, sin predeterminarlos.

5.2.2.2. Dilema relacionado con la variable estructura

Uno de los dilemas clave a los que se enfrenta el profesorado durante el diseño de una tarea de FPM se refiere al grado de estructuración de la misma. Este dilema implica discernir sobre el grado de apertura de la tarea y, por tanto, decidir entre conferir mayor libertad al alumnado o imponer restricciones. Según Carmona et al. (2024), la dificultad del discernimiento subyace en encontrar el equilibrio entre considerar el nivel de desarrollo del alumnado y los objetivos de aprendizaje. Las tareas no estructuradas pueden ser fructíferas en términos de estimular el pensamiento matemático; sin embargo, implican una mayor demanda cognitiva que las tareas con un mayor grado de estructuración (Nghah et al., 2016). Por el contrario, aumentar el grado de estructuración de las tareas puede proporcionar un andamiaje que apoye al alumnado en cada fase de la tarea (Barbosa y de Oliveira, 2013), y permite al docente enfocar la atención del grupo en los elementos matemáticos.

La variable estructura depende en gran medida de las variables que configuran la propia tarea, en particular, la situación problemática y el prompt planteado por el docente (Cai y Hwang, 2023). Según Carmona et al. (2024),

esta dependencia se explica porque cualquier intervención sobre la situación problemática, ya sea en el contexto y/o en los datos disponibles, o sobre el prompt, que orienta la formulación, puede desplazar la tarea a lo largo del continuo abierto-cerrado, modificando sustancialmente su grado de estructuración sin necesidad de convertirla en una tarea completamente estructurada.

En el caso analizado, la posición de Beatriz frente al dilema está marcada por su necesidad de alinear la tarea a su propósito (“Lo que yo quiero no es enseñar nada, ni siquiera intentarlo... lo que quiero es una variedad de problemas” ([TP31/01 1143–1144; TP31/01 674–688] del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis, correspondiente al artículo de Carmona-Medeiro et al., 2024) y, por tanto, por su posición ante el dilema relativo al foco del contenido. Esta posición se revela durante una reunión del grupo colaborativo (PIC), donde Beatriz mostró una especial preocupación por no proporcionar demasiada información al alumnado para que formulara sus problemas, temiendo que esto pudiera sobrecargarlos y coartar su creatividad ([TP31/01 637–646] del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis, correspondiente al artículo de Carmona-Medeiro et al., 2024).

En este sentido, el diseño de la tarea ilustra una decisión consciente de minimizar el grado de estructuración a través del uso de una situación problemática proporcionada a través de un mural con múltiples elementos matematizables y un prompt completamente abierto (“vamos a pensar en algunas historias que podamos inventar... y en preguntas que podamos hacer...” (Turno 157 del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis, correspondiente al artículo de

Carmona-Medeiro et al., 2024), sin restricciones explícitas que condicionen el tipo de problema a formular. Esta doble configuración buscó maximizar la apertura de la tarea y facilitar la emergencia de una pluralidad de formulaciones desde la experiencia y la interpretación infantil. Desde la perspectiva de la clasificación propuesta por Baumanns y Rott (2020), esta combinación de las variables de la tarea configura claramente una tarea no estructurada.

Esta opción no estructurada refleja una intención pedagógica explícita: crear condiciones que favorezcan la generación autónoma de problemas desde las experiencias, conocimientos previos y percepciones del alumnado, permitiendo la movilización de diversos contenidos matemáticos de forma exploratoria y la construcción compartida de la noción de problema matemático.

El análisis llevado a cabo por Carmona-Medeiro et al. (2024) apunta que la estructura de una tarea no es un atributo aislado, sino un efecto emergente de cómo se configuran sus variables clave, lo que sitúa el diseño didáctico en el centro de las decisiones estratégicas del profesorado cuando se pretende favorecer una actividad matemática creativa, flexible y situada.

5.2.2.3. Dilema relacionado con la variable lenguaje

Desde una perspectiva sociocultural del aprendizaje (Vygotsky et al., 1978), el lenguaje cumple un papel central en el desarrollo del pensamiento matemático, al funcionar como mediador en los procesos de construcción de significados y negociación de ideas (Lee, 2010; Mercer, 2004). El dilema para el profesorado, al planificar una tarea, surge de la necesidad de considerar, por un lado, que una parte esencial del aprendizaje es la precisión matemática y, por otro, que el lenguaje debe ser accesible para el alumnado, si se pretende que favorezca su aprendizaje (Sullivan et al., 2015).

En el contexto de una tarea, el lenguaje incluye tanto el lenguaje que se promueve (es decir, el que el docente espera o solicita que use el alumnado) como el lenguaje que utiliza el propio docente al presentar y gestionar la tarea (Carmona-Medeiro et al., 2024). El docente puede utilizar y promover la precisión y formalidad del lenguaje matemático cuando adopta un registro lingüístico que prioriza el rigor matemático por encima de la comprensión del alumnado. Por el contrario, el uso y la promoción de un registro conversacional o coloquial puede reconocerse en el empleo de términos accesibles para el alumnado. Podemos conceptualizar estos registros como un continuo cuyos extremos representan modos opuestos: uno implica un alto grado de precisión matemática, y el otro, un bajo grado de precisión.

La posición de la maestra ante el dilema no se manifiesta hasta la implementación de la tarea.

5.2.2.4. Dilema relacionado con la variable niveles de interacción

Uno de los aspectos clave en el diseño de tareas de formulación de problemas matemáticos (FPM) es la anticipación de los niveles de interacción que se desea fomentar en el aula (Carmona-Medeiro et al., 2024). Tal como señalan Sullivan et al. (2015), los niveles de

interacción aluden al tipo y frecuencia de los intercambios entre docente y alumnado durante el desarrollo de la tarea, e influyen directamente en la calidad de la experiencia matemática que esta propicia. En las tareas de FPM, esta variable se ve determinada principalmente por dos elementos interrelacionados: la organización del grupo y el rol del docente en la dinámica interactiva (Cai, 2022; Leiß y Wiegand, 2005). El dilema del docente al planificar una tarea de formulación de problemas radica en determinar qué tipo de interacciones se desea priorizar.

El estudio de Carmona-Medeiro et al. (2024) revela que la posición de Beatriz ante el dilema se orienta a promover una organización social. En el diseño de la tarea, se observa una planificación explícita para favorecer la interacción a nivel de grupo-clase (Cai et al., 2022), con el alumnado sentado en forma de “asamblea” con disposición en U y el cartel situado al frente para garantizar que todos y todas tuvieran una buena visión, de modo que pudieran formular un problema o comentar las aportaciones de sus compañeros y compañeras.

Esta configuración física y simbólica anticipa un entorno de formulación colectiva donde cada niño o niña interviene por turnos, asumiendo el rol de emisor, mientras que el resto del grupo actúa como receptor y potencial resolutor del problema planteado. Esta organización, lejos de ser una cuestión logística, forma parte del diseño didáctico de la tarea y permite una circulación del conocimiento entre pares en la que las ideas de unos se convierten en objeto de reflexión para todos.

El prompt (“vamos a pensar en algunas historias que podamos inventar... y en preguntas que podamos hacer...”) está alienado con la intención de Beatriz de configurar una dinámica interactiva abierta en la que se espera no solo la participación individual sino la construcción conjunta del significado de “problema” a través del diálogo y la recontextualización de las contribuciones del grupo. En este sentido, el diseño promueve no solo la emisión de ideas, sino también la escucha activa, la reformulación y la expansión de las propuestas, prácticas que son fundamentales para el desarrollo del pensamiento matemático en la infancia.

Asimismo, el diseño de la tarea permite prever un rol docente altamente activo, en el que la maestra se reserva el espacio para intervenir, modelar, matizar o reconducir las producciones del alumnado. Estas decisiones, que emergen ya en el diseño inicial, reflejan una clara apuesta por estructurar la interacción como una herramienta de andamiaje cognitivo y colectivo, en lugar de limitarla a un mecanismo de control del aula.

En definitiva, el análisis de la tarea evidencia que el diseño de la actividad contempló de manera cuidadosa los niveles de interacción deseados, estableciendo las condiciones para un trabajo cooperativo, centrado en la participación secuencial y compartida. Esta planificación, que articula la organización del espacio, el tipo de consigna y el rol del docente, constituye una base sólida para movilizar la formulación de problemas como una práctica social y comunicativa en el aula de Educación Infantil.

5.2.3. ¿Qué conclusiones podemos extraer de la posición de la maestra antes los dilemas inherentes al diseño de una tarea de FPM para un aula de Educación Infantil?

El estudio de Carmona-Medeiro et al. (2024) pone de manifiesto que la posición de Beatriz frente a los distintos dilemas inherentes al diseño de la tarea está fuertemente influenciada por dos factores interrelacionados: las características contextuales del aula y el momento evolutivo del alumnado de 4-5 años.

Por un lado, aunque la resolución de problemas forma parte habitual de la práctica docente de Beatriz, y el alumnado había tenido experiencias previas con la reformulación de problemas previamente resueltos, esta sesión representaba su primer contacto con la FPM a partir de una situación dada. La conciencia de Beatriz acerca de que la tarea supondría una ruptura de las rutinas habituales del aula (Herbst, 2012) orientó su posición ante el dilema vinculado a la variable foco del contenido y a los niveles de interacción. En este sentido, Beatriz optó por orientar la formulación como un objetivo en sí mismo, priorizando una aproximación inicial a la comprensión de la noción y naturaleza del problema matemático (English, 1997). En cuanto a los niveles de interacción, Beatriz descartó la viabilidad de la tarea en cualquier tipo de organización que no implicara a todo el grupo simultáneamente.

Este posicionamiento no se produjo de manera aislada. Los resultados del estudio de Carmona-Medeiro et al. (2024) permiten identificar una relación jerárquica entre los dilemas enfrentados por la maestra, ya que su decisión en torno al foco del contenido condicionó su postura frente a los dilemas asociados a las variables contexto, estructura y lenguaje. En coherencia con su intención de favorecer un acercamiento experiencial a la noción de problema, Beatriz alineó su postura ante dichos dilemas. Optó por una tarea no estructurada (Baumanns y Rott, 2020), proporcionando la situación problemática a través de una imagen compleja con información que favorece la formulación de problemas variados a través de un contexto realista cercano a las vivencias del alumnado y un prompt libre (Cai y Hwang, 2023). Estas elecciones, junto con el empleo de un lenguaje coloquial, parecen estar orientadas a evitar restricciones que coarten la formulación de problemas y creatividad del alumnado.

Por otro lado, el momento evolutivo del alumnado (4-5 años) implica que aún no ha conquistado la lectoescritura, tiene dificultades para comunicar ideas de manera fluida y que las experiencias visuales son esenciales como base para el desarrollo verbal y cognitivo (Smith et al, 2011). La imposibilidad de ofrecer información escrita obligó a Beatriz a conformar un escenario de formulación regido por una práctica discursiva apoyada en elementos visuales (mural) para sostener el proceso de formulación de problemas. La posición adoptada por Beatriz concuerda con los estudios que recomiendan el empleo de elementos narrativos y visuales para introducir la formulación de problemas en la educación temprana (Codes et al., 2020; Martín-Díaz et al., 2020). Este factor también influyó en la configuración de los niveles de interacción, ya que Beatriz prevé que la mediación con el alumnado para promover la comunicación, la discusión

y la negociación en torno a la formulación de problemas será indispensable para la viabilidad de la tarea.

En suma, la posición de la maestra ante los dilemas del diseño de la tarea refleja una toma de decisiones sensible a las características del grupo, que prioriza el acceso del alumnado a la experiencia de formular problemas matemáticos por primera vez, modulando cuidadosamente las variables del diseño para crear un entorno accesible, estimulante y compartido.

5.3. Dificultades del alumnado durante la formulación de problemas

La comprensión del pensamiento matemático y los desafíos que enfrenta el alumnado durante la FPM constituye un elemento clave para la integración efectiva y significativa de la FPM en el aula. Comprender las dificultades emergentes del alumnado resulta indispensable para diseñar tareas accesibles y ofrecer un acompañamiento ajustado a sus necesidades. En este sentido, Xu et al. (2020), Li et al., (2020) y Ran et al. (2025) señalan que uno de los mayores obstáculos para una integración sostenida de la FPM radica en las dificultades del profesorado para comprender el pensamiento matemático del alumnado y anticipar los desafíos que este enfrenta.

Aunque no se ha encontrado ningún estudio cuyo foco específico sean las dificultades del alumnado en la primera infancia, diversos estudios recientes han comenzado a documentar las dificultades que experimenta el alumnado de Educación Infantil durante la FPM (Codes et al., 2020; Lowrie, 2002; Martín-Díaz y Montes, 2022; Possamai et al., 2023; van Bommel y Palmér, 2021, van Bommel et al., 2024).

La etapa de la educación infantil (0-6 años) constituye un contexto singular dentro del ámbito de la formulación de problemas matemáticos, debido a que el alumnado, en estas edades, se encuentra aún en proceso de adquirir las habilidades básicas de lectoescritura y de desarrollar sus competencias comunicativas. Además, sus primeros contactos con la práctica de formular problemas suelen producirse cuando todavía tienen una experiencia muy limitada en la resolución de problemas, lo que añade complejidad a la tarea y requiere un enfoque didáctico especialmente cuidadoso.

El estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2025) explora las dificultades emergentes del alumnado de Educación Infantil (4-5 años) atendiendo a dos fases (Tabla 32).

Mediante la fase de exploración de la situación problemática se accede a las dificultades del alumnado a través de los procesos de reconocimiento, designación y comunicación de los elementos de la situación problemática, atendiendo a las acciones cognitivas, lingüísticas e interaccionales que se ponen en juego. Por su parte, el análisis de los problemas formulados por el alumnado permite explorar sus dificultades en relación con la completitud de los elementos estructurales y la naturaleza matemática de los problemas formulados. Esta doble aproximación resulta consistente con estudios recientes (Baumanns y Rott, 2022b; Cai y Rott, 2023), que

señalan la necesidad de distinguir entre los procesos implicados en la FPM y los productos que se derivan de ella.

Tabla 32. Dificultades emergentes del alumnado durante la sesión de FPM

Fase	Dificultad
Exploración de la situación problemática	D1. Reconocimiento de los elementos de la situación problemática
	D2. Designación y comunicación de los elementos de la situación problemática
Formulación del problema	D3. Formulación de problemas de naturaleza no matemática
	D4. Formulación de problemas incompletos
	D5. Formulación de problemas inconsistentes

5.3.1. ¿Qué dificultades tiene el alumnado durante la exploración de la situación problemática?

El estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2025) identifica cuatro dificultades emergentes durante la fase de exploración de la situación problemática en torno a dos aspectos de la exploración: (i) el reconocimiento de los elementos (objetos, acciones, atributos o propiedades, relaciones, etc.) que componen la situación problemática y; (ii) la designación y/o comunicación de los elementos de la situación problemática (Tabla 33).

Tabla 33. Dificultades emergentes durante la exploración de la situación problemática

Aspecto de la exploración	Dificultades observadas
Reconocimiento de los elementos que componen la situación problemática (D1)	D1.1. Dificultad para distinguir entre objetos que tienen cierta similitud en la forma o función
	D1.2. Dificultad para reconocer los significados específicos de las señales de tráfico
	D1.3. Dificultad para reconocer el género de las personas
Designación y comunicación de los elementos de la situación problemática (D2)	D2.1. Falta de precisión en el uso del lenguaje

En general, sabemos que antes de formular un problema, el alumnado necesita comprender qué elementos componen la situación problemática, interpretar el contexto, reconocer lo relevante y diferenciar lo accesorio. Además, explorar implica designar, describir y comunicar elementos.

Para comprender las dificultades emergentes vinculadas a este aspecto de la exploración es fundamental introducir matices específicos propios de la Educación Infantil, ya que el

desarrollo cognitivo, lingüístico y simbólico del alumnado en esta etapa presenta características particulares que afectan profundamente la función y el sentido de la fase de exploración en la FPM.

Por un lado, autores como Alsina (2011), Canals (2001) y Chamorro (2005) organizan el conocimiento matemático de esta etapa educativa en torno a tres capacidades del ser humano: (i) identificar, describir y definir cualidades (sensoriales, numérico-aritméticas, espaciales-geométricas, magnitudinales-medida y estocásticas); (ii) establecer relaciones entre dichas cualidades (clasificación, ordenación, correspondencias y seriaciones) y; (iii) identificar y/o producir operaciones en relación a dichas cualidades. Reconocer los elementos que componen la situación problemática (D1) implica identificar objetos, acciones, atributos o propiedades de tales objetos o acciones, así como el establecimiento de relaciones de semejanza (agrupar, clasificar y categorizar) y diferencia (ordenaciones).

Por ello, en Educación Infantil, la fase de exploración no debe entenderse solo como una fase para preparar la formulación, sino también como un espacio de aprendizaje matemático en sí mismo. Es decir, el proceso de explorar, identificar, designar, ubicar, comparar y describir ya moviliza competencias matemáticas, como la orientación espacial, la estimación, la medida, la clasificación o la cuantificación.

El trabajo de Carmona-Medeiro y Climent (2025) pone de manifiesto que el reconocimiento de los elementos que componen la situación problemática puede suponer un reto para el alumnado (D1), ya que sus representaciones mentales están aún en formación. Los niños y niñas de esta etapa están en pleno desarrollo de las relaciones de clasificación y categorización (Ruiz-Higueras, 2005) y, por tanto, aún no han consolidado muchas estructuras categoriales ni representaciones sociales o matemáticas. Por ello, confusiones entre objetos similares (farola vs. semáforo, hombre vs. mujer) o interpretaciones literales o erróneas de símbolos y acciones pueden ser recurrentes.

En relación con la designación y/o comunicación de los elementos de la situación problemática (D2), el estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2025) evidencia que el alumnado de Educación Infantil presenta dificultades para expresar con precisión los objetos, acciones, espacios o relaciones presentes en la situación representada. Esta dificultad puede explicarse, en parte, por el momento evolutivo en el que se encuentran: a estas edades, los niños y niñas están en pleno desarrollo de la función simbólica, es decir, la capacidad de representar y designar objetos, atributos, acciones o relaciones mediante signos o palabras (Vecino, 2005). En este proceso, la construcción del lenguaje matemático avanza paralelamente al desarrollo del lenguaje natural, por lo que aún están consolidando su vocabulario, su capacidad de categorización y la precisión en el uso del lenguaje, tanto en términos generales como en lo que respecta al lenguaje específico que permite matematizar una situación.

5.3.2. ¿Qué dificultades se evidencian en los problemas formulados por el alumnado?

Para avanzar en la comprensión de cómo integrar la FPM en el aula, resulta fundamental identificar los factores que condicionan su implementación (Carmona-Medeiro y Climent, 2024). En este marco, los problemas formulados por el alumnado no solo permiten valorar su desempeño matemático, sino que también constituyen una herramienta clave para detectar y analizar sus dificultades emergentes (Cai et al., 2015; Xu et al., 2020). Sin embargo, tal como señalan Ran et al. (2025), la mayoría de las investigaciones se han focalizado en las respuestas esperadas, es decir, en problemas matemáticos válidos y resolubles, dejando en un segundo plano aquellos problemas que se desvían de dicha norma, ya sea por su naturaleza no matemática, por ser incompletos, inconsistentes con las variables de la tarea, o simplemente inesperados. Esta perspectiva ha limitado el análisis de este tipo de problemas a un simple recuento de fallos, sin explorar el potencial cognitivo y creativo de estas respuestas alternativas (Ran et al., 2025)

Los estudios previos centrados en la primera infancia identifican las dificultades más recurrentes que se evidencian en los problemas formulados por el alumnado (Tabla 34).

Tabla 34. Tipos de problemas documentados en la literatura sobre FPM en la primera infancia que evidencian dificultades del alumnado (Elaboración propia)

Descriptor	Estudios
Problemas sin contenido matemático	Palmér y van Bommel, 2020; van Bommel y Palmér 2021; van Bommel et al. 2024
Problemas incompletos (sólo pregunta o sólo historia)	Codes et al., 2020; Martín-Díaz y Montes, 2022; Possamai et al., 2023
Problemas con datos inventados	Codes et al., 2020
Problemas que presentan incoherencias entre sus elementos estructurales (datos, contexto, pregunta, etc.)	Codes et al., 2020; Yamamoto et al., 2012

En general, los estudios sugieren que la aparición de este tipo de problemas se debe a factores como la falta de experiencia del alumnado en la formulación de problemas matemáticos (Lowrie, 2002; Possamai et al., 2023), una escasa familiaridad con la resolución de problemas (Lowrie, 2002; Possamai et al., 2023), las dificultades para expresar o redactar sus ideas con precisión (Codes et al., 2020; Martín-Díaz y Montes, 2022), una falta de andamiaje progresivo (Lowrie, 2002) o a la interpretación del alumnado de la tarea (van Bommel et al. 2024). Estas explicaciones, aunque plausibles, responden en su mayoría a una visión deficitaria, que tiende a considerar las producciones del alumnado como errores o desviaciones respecto a un modelo normativo de problema matemático. Sin embargo, sabemos aún muy poco sobre la lógica infantil que subyace en dichas formulaciones. Es posible que, en algunos casos, los problemas no matemáticos, incompletos o incoherentes que plantea el alumnado respondan a formas legítimas de pensamiento infantil, que no hemos logrado comprender en profundidad y que

podrían aportar información valiosa sobre sus procesos de interpretación, simbolización y estructuración de situaciones problemáticas.

Compartimos con Ran et al. (2025) que uno de los desafíos más importantes para la investigación en FPM consiste en explorar de manera sistemática las respuestas inesperadas del alumnado incorporando una visión más analística e inclusiva de los problemas formulados. En este marco, entendemos que estos problemas no deben considerarse únicamente como errores a corregir, sino como ventanas que permiten comprender cómo el alumnado interpreta las tareas, cómo piensa matemáticamente y cómo puede adaptarse la enseñanza a su diversidad cognitiva.

En los siguientes apartados, se analizan las principales dificultades que emergen en las formulaciones del alumnado de Educación Infantil, clasificadas según su naturaleza (problemas no matemáticos, incompletos o inconsistentes). Esta lectura se realiza no con una mirada correctiva, sino con el propósito de comprender cómo piensan los niños y niñas, cómo interpretan las situaciones problemáticas y qué retos enfrentan al formular problemas matemáticos.

5.3.2.1. ¿Qué aspectos del pensamiento infantil revelan los problemas de naturaleza no matemática formulados por el alumnado?

En esta línea, los estudios de Carmona-Medeiro et al. (2024) y Carmona-Medeiro y Climent (2024) señalan que, cuando el alumnado se enfrenta por primera vez a la FPM a partir de una situación dada, mediante una tarea no estructurada (Baumanns y Rott, 2020) con un prompt libre, las primeras formulaciones tienden a reflejar una noción incipiente de lo que constituye un problema, más vinculada a lo cotidiano o personal que a lo matemático.

El estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2025) identifica tres descriptores emergentes (D3-1, D3-2, D3-3) vinculados a la formulación de problemas no matemáticos (D3). Dichos descriptores permiten identificar tres tipos de problemas no matemáticos (Tabla 35).

Además de confirmar la tendencia significativa del alumnado de Educación Infantil a formular problemas no matemáticos, el estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2025) caracteriza los problemas no matemáticos formulados, posibilitando un análisis más profundo de la lógica infantil subyacente. Los tres tipos de problemas evidencian que, a estas edades, la noción de problema matemático aún es incipiente, y prevalece la noción de problema personal.

Cuando la formulación se orienta hacia accidentes o catástrofes (P1) o hacia situaciones que dificultan o imposibilitan alcanzar un objetivo (P2), la lógica infantil dominante no contempla la necesidad de incorporar información de carácter matemático ni una pregunta que deba ser respondida (Carmona-Medeiro y Climent, 2024 y 2025). Cuando la formulación se orienta hacia la indagación sobre los motivos o razones de una acción (P3), el alumnado identifica una acción o situación y formula una pregunta que invita a establecer una relación causal entre la

acción y un motivo razonable. En tal caso, la lógica infantil dominante implica la idea de que la pregunta puede responder a una lógica natural y que su solución puede ser inventada (Ayllón et al., 2010; Carmona-Medeiro y Climent, 2024 y 2025).

Tabla 35. Tipos de problemas de naturaleza no matemática emergentes (Elaboración propia)

Tipos de problemas no matemáticos formulados por el alumnado	Ejemplos
P1. Problemas relacionados con accidentes o catástrofes	“Una mujer va caminando con un bolso... se escapa y la atropella un coche” “¿Y si el hombre que está cortando el árbol deja caer una rama y sin querer le da en la cabeza al hombre que está sentado?”
P2. Problemas/Situaciones que dificultan o imposibilitan alcanzar un objetivo	“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa. Quiere comprar un chaleco, pero no le gusta” “Esta mujer quiere ir a un sitio... pero el policía no la deja pasar... porque la carretera está cortada. Entonces no puede pasar”
P3. Problemas que requieren la indagación sobre los motivos o razones de una acción	“La niña tiene dos barras de pan, ¿por qué ha comprado dos barras de pan?” “Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa. ¿Qué quiere comprar?”

En suma, los problemas de naturaleza no matemática formulados por el alumnado de Educación Infantil no deben ser interpretados como errores o desviaciones, sino como manifestaciones legítimas del pensamiento infantil y de su noción personal de problema, construida a partir de su experiencia vital. Tal como señala Ran et al. (2025), estos problemas representan ventanas de acceso privilegiado para comprender cómo los niños interpretan las tareas, cómo piensan matemáticamente y cómo se relacionan con el entorno simbólico que les ofrece la escuela. Desde esta perspectiva, los problemas no matemáticos no son evidencia de ignorancia, sino expresiones de una lógica propia, coherente en sí misma, que revela formas incipientes de organización, simbolización e interpretación de situaciones.

Analizar estas producciones desde una lógica adulta, centrada exclusivamente en la identificación de carencias estructurales (falta de datos, de pregunta o de coherencia contextual), corre el riesgo de invisibilizar el potencial cognitivo y creativo que encierran. La noción de problema matemático no emerge desde el vacío, sino que se construye progresivamente en contra de nociones previas más intuitivas y personales, que el alumnado ya ha desarrollado en su vida cotidiana. De ahí que resulte imprescindible generar una transición respetuosa desde la noción de problema personal hacia la noción de problema matemático,

acogiendo y acompañando estas producciones infantiles en lugar de corregirlas prematuramente.

5.3.2.2. ¿Qué dificultades revelan los problemas incompletos formulados por el alumnado?

El estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2025) identifica dos descriptores emergentes (D4-1 y D4-2) vinculados a la formulación de problemas incompletos (D4). Basándonos en los descriptores de Carmona-Medeiro y Climent (2025), a continuación (Tabla 36), se muestran los tipos de problemas incompletos que confirman la tendencia del alumnado a formular este tipo de problemas, ya sea porque la información está incompleta o por la ausencia de una pregunta.

El trabajo de Carmona-Medeiro y Climent (2025) pone de manifiesto que la incompletitud de la información en el problema formulado (P4) se produce cuando el alumnado realiza un avance parcial en la formulación del problema, especialmente en relación con los datos o el contexto. En todos los casos en que se identificó incompletitud de la información, también se observó de manera simultánea la ausencia de una pregunta (P5).

Tabla 36. Tipos de problemas incompletos emergentes (Elaboración propia)

Tipos de problemas incompletos formulados por el alumnado	Ejemplos
P4. Problemas con incompletitud de la información	“Ese señor quiere ir a todas las tiendas que hay allí...”
	“Esa mamá quiere comprar fruta para su hijo”
	“Una mujer con un perro... quiere ir a comprar ropa...”
P5. Problemas con ausencia de pregunta	“Esa mamá quiere comprar fruta para su hijo. Quiere una manzana, una pera y una uva”
	“Esa ventana tiene forma de cuadrado”
	“Una mujer con un perro quiere comprar un sombrero. El sombrero cuesta 10 € y la mujer solo tiene 1 €”

La ausencia de una pregunta en el problema formulado (P5), se observa en mayor medida en los casos en los que la información del problema es incompleta (P4). En un menor número de ocasiones, la ausencia de pregunta (P5) también se produce en situaciones en las que el alumnado proporciona la información, presentando una historia (compra y venta) y/o datos relacionados con cantidades matemáticas (cantidades discretas o figuras geométricas). Sin embargo, no formulan ninguna pregunta.

Los problemas incompletos formulados por el alumnado, ya sea por falta de información relevante (P4) o por la ausencia de una pregunta (P5), evidencian un conjunto de dificultades asociadas a la formulación de problemas matemáticos. Estas dificultades no sólo remiten a la coordinación de los elementos estructurales del problema (información, contexto y pregunta), sino que deben comprenderse a la luz de varios factores interrelacionados.

En primer lugar, las características de la tarea desempeñan un papel relevante, dado que se trata de una tarea no estructurada con un prompt libre. Sabemos que este tipo de tareas puede resultar fructífero para estimular el pensamiento matemático del alumnado (Ngh et al., 2016), pero también implica una mayor exigencia cognitiva en comparación con tareas más guiadas o estructuradas.

En segundo lugar, el alumnado se enfrenta por primera vez a la práctica de formular un problema a partir de una situación dada, lo que conlleva inevitablemente un proceso de exploración inicial y de acomodación a una nueva forma de actividad matemática.

En tercer lugar, las propias características del desarrollo cognitivo y lingüístico de esta etapa inciden directamente en el desempeño del alumnado. Tal como señala Carmona-Medeiro y Climent (2024), se observaron episodios en los que el alumnado se detenía, permanecía en silencio o mostraba dificultades para expresar la historia del problema, manifestando una expresión oral lenta o entrecortada. Estos indicios apuntan a que la actividad de formular un problema representa un verdadero reto para el alumnado, y que, como subraya Lowrie (2002), requiere del andamiaje constante por parte del profesorado para que el alumnado pueda avanzar en la estructuración de sus ideas.

Finalmente, debe tenerse en cuenta que la noción de problema matemático y el desempeño en la formulación de problemas están estrechamente vinculados (Carmona-Medeiro y Climent, 2024). Si el alumnado aún no ha consolidado una noción de problema matemático y prevalece en él una noción más personal o cotidiana, tendrá mayores dificultades para identificar y coordinar los elementos que configuran un problema matemático. En este sentido, la incompletitud de los problemas formulados no refleja la ausencia de pensamiento, sino un momento evolutivo en el que la construcción de la noción de problema matemático se encuentra aún en una fase emergente.

Tal como reflejan los ejemplos analizados, el alumnado es capaz de construir relatos que incluyen situaciones cotidianas reconocibles y, en ocasiones, datos matemáticos relevantes. Sin embargo, dichas formulaciones no siempre culminan en la inclusión de una pregunta que active el pensamiento matemático. Esta ausencia no debe interpretarse únicamente como un descuido o un error, sino como un indicio del momento evolutivo y experiencial en el que se encuentra el alumnado. En esta etapa, su representación de las situaciones está aún anclada en lo narrativo, lo descriptivo y lo personal, sin que haya consolidado aún una noción funcional de lo que implica un problema matemático.

Desde esta perspectiva, los problemas incompletos, ya sea por ausencia de información clave o por falta de una pregunta, deben comprenderse como manifestaciones legítimas del pensamiento infantil en construcción. Reflejan avances parciales que, aunque no ajustados a los cánones formales de la matemática escolar, revelan procesos significativos de apropiación y de transición desde una noción personal de problema hacia estructuras más complejas y articuladas.

Numerosos estudios han señalado la relevancia del rol docente en este proceso de tránsito. A través del andamiaje progresivo basado en preguntas, reformulaciones o sugerencias, el profesorado puede acompañar estas producciones emergentes y facilitar que el alumnado identifique y coordine los elementos estructurales que configuran un problema matemático (Carmona-Medeiro y Climent, 2024; Lowrie, 2002; Palmér y van Bommel, 2020). Este acompañamiento no sólo permite completar los enunciados, sino que contribuye a la progresiva interiorización de los rasgos que definen un problema en clave matemática.

5.3.2.3. *¿Qué dificultades revelan los problemas inconsistentes formulados por el alumnado?*

El estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2025) identifica dos descriptores emergentes (D5-1 y D5-2) ligados a la formulación de problemas inconsistentes (D5). Basándonos en dichos descriptores, a continuación (Tabla 37) se muestran los tipos de problemas inconsistentes:

Tabla 37. Tipos de problemas inconsistentes emergentes

Tipos de problemas inconsistentes formulados por el alumnado	Ejemplos
P6. Problemas en los que no existe una relación lógica entre la información y la pregunta	“Una mujer va a comprar pan... ¿Cuántos coches hay?”
P7. Problemas que no están relacionados con el prompt vigente	Prompt vigente: “...Vamos a ayudar a Adrián con la primera parte del problema: una mujer va a comprar pan... ¿A alguien se le ocurre alguna pregunta o historia que tengamos que pensar?”
	“El coche va...”

El trabajo de Carmona-Medeiro y Climent (2025) confirma la tendencia del alumnado a formular problemas que presentan incoherencias lógicas entre sus elementos estructurales (P6), tal como reflejan los estudios de Codes et al. (2020) y Yamamoto et al. (2012). Sin embargo, este tipo de problemas sólo se ha evidenciado una vez en el estudio de Carmona-Medeiro et al. (2025). La baja frecuencia de problemas en los que la relación entre la información y la pregunta

es inconsistente (P6) indica que la mayoría del alumnado fue capaz de mantener cierta coherencia entre los elementos estructurales del problema. No obstante, cuando emergen producciones en las que se observa una disociación entre la información, contexto o pregunta, como en el ejemplo que se ilustra en la tabla anterior, no deben interpretarse simplemente como errores o muestras de desconocimiento, sino como indicios de una noción incipiente de problema matemático. Estas formulaciones evidencian que el niño o niña comienza a reconocer que un problema incluye una información inicial y una pregunta, aunque todavía no comprenda plenamente la relación lógica que debe articular ambos componentes. Desde esta perspectiva, tales inconsistencias constituyen oportunidades valiosas para afianzar progresivamente el vínculo semántico y lógico entre los elementos que configuran un problema (Carmona-Medeiro, 2025; Lowrie, 2002).

El estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2025) también evidencia que las distintas modificaciones del prompt a lo largo de la sesión suponen una dificultad para el alumnado. Aunque la maestra modifique el prompt y dé por cerradas las tareas anteriores, los estudiantes continúan iniciando la formulación de problemas en relación con prompts anteriores (P7). Los estudios previos sobre FPM en la educación temprana no han hecho referencia a este tipo de dificultad, quizás porque en la mayoría de ellos las variables de la tarea (situación problemática y prompt) permanecen invariables (Chang, 2007; Lowrie, 2002; Martín-Díaz et al., 2020; Palmér y van Bommel, 2020, 2021, 2023; Possamai et al., 2023; van Bommel et al. 2024). El estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2025), por tanto, corrobora que en la educación temprana el alumnado tiende a formular problemas que no se ajustan al objetivo de la tarea tal como afirma Cai (2022) en otras etapas educativas, en concreto problemas que no se ajustan al prompt vigente (P7).

5.3.3. ¿Qué conclusiones podemos extraer de las dificultades del alumnado a través de los problemas que formula?

Estas evidencias invitan a reflexionar sobre la necesidad de acompasar los tiempos de la tarea con los tiempos de pensamiento del alumnado. En educación infantil, los ritmos cognitivos y atencionales de los niños y niñas no siempre coinciden con las decisiones de cierre que adopta el docente. Así, aunque la maestra considere concluida una fase de la actividad e introduzca un nuevo prompt, ello no garantiza que el alumnado haya finalizado su propio proceso de comprensión, reflexión o formulación. En este sentido, la persistencia de referencias a prompts anteriores puede entenderse no como una falta de comprensión, sino como una expresión del tiempo prolongado que requieren algunos niños y niñas para apropiarse de la tarea y dar respuesta desde su propio marco de sentido.

Asimismo, estos resultados subrayan la importancia de insistir en el prompt vigente durante la sesión, ofreciendo andamiaje y recordatorios continuos. A estas edades, la capacidad de mantener la atención sostenida en un prompt determinado aún está en construcción, por lo que las reformulaciones, las interrupciones o los cambios de foco pueden dificultar seriamente la

conexión entre lo que se les pide hacer y lo que efectivamente formulan. Desde esta perspectiva, la gestión docente del prompt no debe entenderse como un simple acto de enunciación inicial, sino como un proceso dinámico que requiere ser sostenido, reiterado y reforzado a lo largo del tiempo para favorecer la comprensión y el compromiso del alumnado con la tarea de formulación.

En esta misma línea, conviene señalar que un uso excesivo de cambios de prompt durante la misma sesión puede tener un efecto contraproducente. Introducir nuevos prompts de manera continua puede generar confusión en el alumnado y dificultar la conexión entre la consigna actual y las producciones formuladas, especialmente cuando parte del grupo sigue pensando o actuando en relación con situaciones anteriores. Esta desconexión puede dar lugar a problemas que no guarden relación con la tarea vigente, no tanto por falta de comprensión, sino por un desfase entre el momento de cierre que establece la maestra y el ritmo de apropiación del alumnado.

5.4. Dilemas inherentes a la gestión de una tarea de FPM

La gestión de las tareas de FPM constituye un eje crítico para su integración efectiva en el aula. En el ámbito educativo, existe una distancia inevitable entre el diseño de una tarea y su implementación en contextos reales. Tal como sugiere la célebre expresión atribuida a von Moltke, “Ningún plan sobrevive al contacto con el enemigo”, y que ha sido ampliamente reinterpretada en diversos contextos estratégicos, incluso la planificación más cuidada se ve invariablemente transformada por la singularidad y complejidad del entorno en el que se implementa. En el caso del aula, ese “enemigo” no es una fuerza opuesta, sino el entramado único y cambiante que conforman los diversos ritmos de aprendizaje, las interpretaciones imprevisibles, las dificultades emergentes, las necesidades cognitivas y afectivas y las dinámicas sociales, exigiendo a los docentes una actuación situada y flexible. En este sentido, diversos estudios (Cai et al., 2015; Martín-Díaz y Montes, 2022; Singer et al., 2013) coinciden en que el éxito de una tarea de FPM no depende exclusivamente de su diseño, sino, en gran medida, de la capacidad del profesorado para tomar decisiones situadas durante su implementación.

En el ámbito específico de la educación infantil, investigaciones recientes (Codes et al., 2020; Lowrie, 2002; Martín-Díaz et al., 2020; Palmér y van Bommel, 2023; Possamai et al., 2023) han evidenciado que el rol docente incide significativamente en la calidad y complejidad de los problemas formulados por el alumnado. Estas investigaciones destacan la importancia de: (i) organizar la tarea en etapas progresivas; (ii) ofrecer andamiaje mediante preguntas abiertas; (iii) adaptar el lenguaje a la edad de los niños y; (iv) emplear apoyos visuales y representaciones pictóricas como herramientas para facilitar la expresión de los elementos estructurales del problema (datos, contexto, pregunta).

Asimismo, la inclusión de espacios de discusión colectiva antes de la formulación (Palmér y van Bommel, 2023) y la regulación del grado de estructuración de la tarea según el tipo de producción deseada (Martín-Díaz et al., 2020) se reconocen como estrategias clave. La evidencia sugiere que, cuando el profesorado genera un clima de aula donde se validan los intereses del alumnado, se fomenta la curiosidad y se ofrece ayuda personalizada, los niños y niñas formulan problemas más elaborados, creativos y ajustados al sentido matemático (Lowrie, 2002).

Así, el diseño de una tarea de FPM no puede concebirse como un objeto cerrado ni como una receta replicable, sino como una propuesta abierta que cobra sentido en su realización situada (Carmona et al., 2024). Asumir el carácter dinámico de las tareas de FPM implica considerar que su implementación constituye una práctica contingente (Rowland y Zazkis, 2013), en constante redefinición, sujeta a variaciones, adaptaciones e improvisaciones necesarias en función de las producciones infantiles y las dinámicas emergentes del aula (Martín-Díaz et al., 2025). En este proceso el papel del docente resulta decisivo: gestionar no solo implica sostener, reorientar o amplificar el potencial formativo de la tarea, sino también interpretar las formulaciones del alumnado, responder a sus dificultades incipientes, crear condiciones que favorezcan la viabilidad de la tarea y propiciar el desarrollo de su desempeño matemático (Cai, 2022; Carmona-Medeiro y Climent, 2024, 2025).

El estudio de Carmona-Medeiro et al. (2024) identifica cinco variables que inciden en los procesos de planificación, organización e implementación de una tarea de FPM por parte del docente. Estas variables configuran dilemas que requieren que el profesorado tome decisiones entre diversas alternativas, con el fin de diseñar una tarea coherente con sus objetivos didáctico-matemáticos y ajustada al contexto del aula.

Por otro lado, el estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2024) aborda la gestión de aula atendiendo un aspecto particular de la gestión de la maestra, las demandas matemáticas que establece para favorecer el avance en la tarea. Mediante el análisis de las demandas matemáticas, las acciones del alumnado que detonan dichas demandas y las relaciones entre ambas el estudio pone el foco en otro dilema inherente a la gestión de aula: cómo y cuándo intervenir.

A continuación, se presentan las preguntas operativas y las variables asociadas que servirán para estructurar la discusión en torno a los dilemas que enfrenta la maestra durante la gestión de la tarea, en su intento de responder a las situaciones de contingencia y garantizar la viabilidad de la tarea de FPM (Tablas 38 y 39).

Tabla 38. Variables utilizadas para analizar la gestión de las tareas de formulación de problemas según Carmona-Medeiro et al. (2024)

Preguntas operativas	Variables	Dilemas
¿Modifica la maestra su posición inicial ante los dilemas durante la implementación de la tarea?	Foco del contenido	FPM como un medio
		FPM como un fin en sí mismo
		FPM como medio y fin
	Contexto	Matemático
		Semi-real
		Real
	Estructura	Estructurado
		No estructurado
	Lenguaje	Matemático
		Coloquial
	Niveles de interacción	Organización individual
		Organización individual y social
		Organización social

Tabla 39. Variables utilizadas para analizar la gestión de las tareas de formulación de problemas según Carmona-Medeiro y Climent (2024)

Preguntas operativas	Variables	Dilemas
¿Cuándo y cómo intervenir?	Demandas matemáticas	DM1. Solicitar la modificación del problema
		DM2. Solicitar el desarrollo del contexto del problema
		DM3. Solicitar el planteamiento de una pregunta para el problema
		DM4. Solicitar la resolución de un problema
		DM5. Solicitar la representación de un problema
		DM6. Solicitar argumentación
		DM7. Solicitar cambio de registro representativo
		DM8. Solicitar precisión en las respuestas dadas
		DM9. Solicitar la verificación de una respuesta dada

5.4.1. ¿Modifica la maestra su postura ante los dilemas durante la implementación de la tarea con respecto a su posición durante el diseño?

Los estudios de Carmona-Medeiro y Climent (2025) y Carmona-Medeiro et al. (2024) identifican las variaciones de la tarea respecto al diseño original de Beatriz (designado como Tarea 0), atendiendo a cualquier modificación sustancial en las variables de la tarea: situación problemática, prompt o en ambos. Los estudios de Carmona-Medeiro y Climent (2025) y Carmona-Medeiro et al. (2024) muestran que, durante la implementación, la tarea diseñada por la maestra evoluciona dando lugar a nueve tareas emergentes y siete tipos de prompts. Todas las tareas se configuran a partir de sucesivas modificaciones del prompt, mientras que la situación problemática permanece invariable. A continuación (Tabla 40), se muestran dichas tareas según el tipo de prompt utilizado.

Tabla 40. Tipos de tareas según el prompt empleado (Elaboración propia)

Prompts	Ejemplos
Formula un problema relacionado con el mural (Tarea 0)	“Muy bien, pues mira... ahora que ya hemos visto un montón de cosas... [...] Ahora vamos a buscar problemas... vamos a pensar en historias que podemos inventarnos... y preguntas que podemos hacer...”
Formular un problema relacionado con el mural, diferente a los anteriores (Tarea 1)	“Muy bien, a ver vamos a pensar en otro problema que no sea que tiene que ir a su casa... que lo atropella un coche... o que tiene que dar la vuelta... vamos a pensar otros problemas de otras cosas, ¿Vale? ...”
Formular un problema continuando una historia (Tareas 2, 7 y 9)	“...Venga vamos ayudarle con la primera parte del problema de Adrián, una mujer va a comprar el pan ... ¿A alguien se le ocurre alguna pregunta o alguna historia que tengamos que pensar?” “... Venga voy a empezar un problema nuevo, venga a ver... mira, esta mamá le quiere comprar a su hijo... [Señalando una mujer en el mural]” “... Venga... en una casa hay ventanas...”
Formular un problema a partir de una pregunta (Tarea 3)	“...Venga para la pregunta de cuántos coches hay, que hizo Adrián... ¿Os podéis inventar una historia que vaya antes de la pregunta? ...”
Formular un problema utilizando una palabra (Tareas 4 y 8)	“... Y si... Y si digo yo una palabra... y me tenéis que inventar un problema con la palabra... dentro” “... Tienes que pensar un problema donde digas la palabra cuadrado... venga... piensa... Fíjate en el mural, en los cuadrados que tu veas y haz una pregunta...”
Formular un problema que atienda a un atributo (Tarea 5)	“... venga vamos a inventarnos un problema con las formas...”

Prompts	Ejemplos
Formular un problema a partir de una parte específica del cartel (Tarea 6)	“... Muy bien... Ahora... vamos a ver esto de aquí [Mientras rodea con rotulador una zona del mural]” “... Vamos a fijarnos en el hombre que está cortando la rama...”

Para comprender por qué la maestra realiza modificaciones sobre la tarea original nos vamos a apoyar en dos elementos: en el impacto que las distintas tareas tienen en los problemas formulados por el alumnado y en las modificaciones de la postura de la maestra ante los dilemas durante la implementación de la tarea con respecto a su posición durante el diseño (que se extraen del estudio de Carmona-Medeiro et al., 2024).

5.4.1.1. Dilema relacionado con la variable foco del contenido

A lo largo de las nueve adaptaciones, puede observarse que la postura de la maestra frente a la variable foco del contenido no sufre ninguna variación con respecto a su postura inicial, que era tratar la formulación de problemas como propósito (Carmona-Medeiro et al., 2024). Las distintas tareas muestran un alto grado de implicación en favorecer que el alumnado consiga formular problemas, independientemente del contenido matemático que estos contengan. En las distintas modificaciones de la tarea, se aprecia un énfasis especial en favorecer problemas variados, tal como reflejaba durante el diseño. Así, por ejemplo, en la Tarea 1 emplea un prompt para restringir que sigan emergiendo problemas vinculados a desplazamientos sobre el mural. El hecho de que la maestra oriente la formulación de problemas hacia ciertos contenidos matemáticos que el alumnado había trabajado previamente (Tareas 4, 5 y 8), evidencia que su propósito no estaba dirigido al tratamiento del conocimiento matemático a través de la formulación de problemas.

5.4.1.2. Dilema relacionado con la variable contexto

En relación con el dilema relacionado con la variable contexto, que implica el posicionamiento entre los extremos: contextos puramente matemáticos y contextos reales, la postura de la maestra permanece invariable durante toda la sesión, ya que en todas las tareas la situación problemática viene dada por el mural (contexto semi-realista). Sin embargo, se aprecia una variación relacionada con dicha variable (Tareas 2, 7 y 9), cuando la maestra solicita al alumnado que continúe una historia. En esta variación, se aprecia una modificación en el registro en el que se proporciona la situación problemática. En dichas tareas, la información y el contexto de la situación problemática se proporcionan mediante un registro verbal (Carmona-Medeiro et al., 2024).

5.4.1.3. Dilema relacionado con la variable estructura

En cuanto al dilema vinculado a la variable estructura las distintas modificaciones de las tareas evidencian una modificación en el posicionamiento de la maestra. La Tarea 0 puede

considerarse una tarea no estructurada (Baumanns y Rott, 2020 y 2022a) dado que la información y el contexto se proporciona a través de un mural, y además plantea un prompt libre. Las nueve adaptaciones que la tarea experimentó durante la implementación muestran un aumento en el nivel de estructuración.

En la primera modificación de la tarea (Tarea 1), el prompt viene dado por la instrucción de formular un problema que esté presente en el mural, distinto a los problemas que ya han salido (recorridos y accidentes). La Tarea 1 aumenta el nivel de estructuración con respecto a la Tarea 0, ya que el prompt empleado impone una restricción en cuanto a los tipos de problemas que el alumnado puede formular (entorno matemático), excluyendo los problemas que implican desplazamientos en el mural.

En la segunda modificación (Tarea 2), el prompt consiste en formular un problema a partir de una historia. La maestra emplea para ello un problema inconsistente previamente planteado por un alumno (“Una mujer va a comprar pan... ¿Cuántos coches hay?”), con el objetivo de que el alumnado utilice la información provista por el mural para completar la historia y convertirla en un problema coherente.

En la séptima modificación (Tarea 7), el prompt vuelve a proponer la formulación de un problema a partir de una historia que empieza la propia maestra, esta vez orientado explícitamente hacia contextos de compra-venta. En la novena modificación (Tarea 9), la historia inicial también parte de la maestra, pero en este caso con la finalidad de centrar la atención del alumnado en un elemento concreto del mural: las ventanas.

Las Tareas 2, 7 y 9, al requerir la continuación de una historia, suponen un aumento del nivel de estructuración respecto a la Tarea 0, que presentaba un prompt completamente libre (“Formula un problema”). Mientras que la Tarea 0 no imponía restricciones contextuales, permitiendo al alumnado orientar los problemas formulados hacia cualquier contexto provisto por el mural, las Tareas 2, 7 y 9 implican una restricción contextual. En este sentido, las Tareas 2 y 7 acotan el contexto a situaciones de compra-venta. En particular, la Tarea 2 restringe el contexto a una situación de compra venta de pan, excluyendo otras situaciones de compra venta plausibles en otros establecimientos (farmacia, frutería, tienda de ropa). Por otro lado, la Tarea 9 aumenta la restricción del contexto obligando al alumnado a la formulación de problemas vinculados a un elemento específico del mural: las ventanas de las viviendas. Además, frente al prompt libre de la Tarea 0 (“Formula un problema”), las Tareas 2, 7 y 9 emplean un prompt que restringe aún más la tarea al imponer la necesidad de partir del inicio de una historia dada.

Por último, es interesante señalar que la Tarea 0 no imponía ninguna restricción ligada al entorno matemático en el que podrían ubicarse los problemas formulados, pudiendo explotar el alumnado todo el potencial matemático inherente al mural (ámbito lógico, ámbito numérico-aritmético, ámbito espacial-geométrico y ámbito magnitudinal-medida). Sin embargo, la imposición del contexto de compra venta de las Tareas 2 y 7 restringe el entorno matemático al

ámbito numérico-aritmético (estructuras aditivas) y magnitudinal-medida (pseudomagnitud dinero). Por su parte, la Tarea 9 dirige la formulación hacia un componente específico del mural, las ventanas, delimitando de este modo el entorno matemático a la identificación y el establecimiento de relaciones vinculadas a los atributos forma, tamaño y cantidad.

En conjunto, las Tareas 2, 7 y 9 introducen un grado de estructuración superior no solo en comparación con la Tarea 0, sino también con la Tarea 1, en la que el alumnado seguía disponiendo de mayor libertad a la hora de formular problemas.

En la tercera modificación (Tarea 3), el prompt viene dado por la instrucción de formular un problema a partir de una pregunta. La pregunta seleccionada por la maestra proviene de un problema previo de un alumno en el que no existía una relación lógica entre la información y la pregunta (“Una mujer va a comprar pan... ¿Cuántos coches hay?”). En este caso, el propósito es que el alumnado emplee la situación problemática (mural) como fuente para extraer la información y el contexto necesarios para construir una historia coherente con la pregunta planteada. Este prompt introduce restricciones tanto en la información que puede considerarse como el entorno matemático (ámbito numérico-aritmético), por lo que esta tarea presenta un nivel de estructuración superior al de las Tareas 0 y 1.

En la cuarta y octava modificación, el prompt consiste en formular un problema empleando las palabras “dentro” (Tarea 4) y “cuadrado” (Tarea 8). Aunque la intención de la maestra es favorecer la formulación de problemas variados, la inclusión de estos prompts no implica necesariamente que el entorno matemático esté restringido. Así, por ejemplo, en el caso de la Tarea 4, el uso de la palabra “dentro” no fuerza necesariamente a orientar el problema hacia relaciones de tipo topológico, ya que puede emplearse como un elemento meramente descriptivo dentro en la narrativa del problema.

En ambos casos (Tareas 4 y 8), el prompt introduce una condición lingüística que, si bien no convierte estas tareas en plenamente estructuradas, sí supone un incremento en el grado de estructuración respecto a las Tareas 0 y 1. La necesidad de incorporar las palabras “dentro” y “cuadrado”, ya sea en la historia o en la pregunta del problema, dirige la atención del alumnado hacia elementos del mural que posean dichos atributos (cualidades continuas no cuantificables), ya sea atendiendo la forma o las relaciones topológicas.

En la quinta modificación (Tarea 5), el prompt queda configurado por la instrucción de formular un problema que emplee el atributo forma. En este caso, el prompt sí parece alinearse de manera más eficaz con el propósito de la maestra de favorecer la emergencia de problemas matemáticos variados, ya que la restricción impuesta por el prompt restringe el entorno matemático y dirige la atención del alumnado hacia un atributo matemático específico: las formas contenidas en la situación problemática (mural). Desde esta perspectiva, la Tarea 5 presenta un mayor grado de estructuración en comparación con las Tareas 0 y 1.

En la sexta modificación (Tarea 6), el prompt viene dado por la instrucción formular un problema atendiendo a una parte específica del mural (Figura 9). Aunque la situación problemática sigue siendo el mural, el prompt introduce una restricción en contextual, al requerir que el problema formulado involucrando al operario que está cortando una rama. En consecuencia, la Tarea 6 muestra un nivel de estructuración más elevado que el de las Tareas 0 y 1.



Figura 9. Parte específica del mural a la que se hace referencia en la Tarea 6

El análisis efectuado sobre la variable estructura muestra que la postura de la maestra ante el dilema relacionado con el grado de apertura de la tarea fluctúa durante la implementación en el aula (Carmona-Medeiro et al., 2024). La aparición de nuevas tareas mediante modificaciones del prompt implica un aumento del grado de estructuración con respecto a la tarea diseñada (Tarea 0). El aumento del grado de estructuración de las distintas tareas se logró mediante prompts más específicos (Cai y Hwang, 2023), que restringen alguno de los elementos estructurales del problema (información, contexto, entorno matemático, pregunta) o una combinación de ellos.

Siguiendo la propuesta de Baumanns y Rott (2020, 2022a), todas las tareas diseñadas e implementadas en este estudio se sitúan en el espectro de tareas no estructuradas, ya que los problemas se desarrollan a partir de una situación dada (el mural), y los prompts no proporcionan un problema específico que deba ser reformulado. Sin embargo, los diferentes prompts introducen restricciones de distinta naturaleza, léxicas, contextuales, en la narrativa, en la pregunta o en el entorno matemático, que generan un continuo en el grado de apertura de las tareas. Este continuo no constituye una categorización rígida, sino que refleja la variación progresiva en la cantidad y el tipo de restricciones e información aportada al alumnado. La Tabla 41 sintetiza esta gradación, mostrando qué aspectos de la tarea quedan restringidos y cuáles permanecen abiertos en cada modificación.

Tabla 41. Gradación en el espectro de tareas no estructuradas según el tipo de restricciones introducidas por el prompt (Elaboración propia)

Tareas	Tipo de restricciones introducidas por el prompt	Grado de restricción	Elementos libres de restricciones
Tarea 0	Prompt libre, sin restricciones explícitas	Máxima apertura	Información, contexto, entorno matemático, pregunta
Tarea 1	Exclusión de ciertas temáticas (recorridos, accidentes)	Restricción contextual	Información, entorno matemático, pregunta
Tarea 4	Inclusión de la palabra “dentro”	Restricción léxica puntual (afecta a la información)	Contexto, entorno matemático, pregunta
Tarea 8	Inclusión de la palabra “cuadrado”	Restricción léxica puntual (afecta a la información)	Contexto, entorno matemático, pregunta
Tarea 5	Inclusión del atributo “forma”	Restricción léxica (información) y en entorno matemático	Contexto, pregunta
Tarea 6	Focalización en personaje y acción concreta (operario cortando rama)	Restricción contextual e información	Entorno matemático, pregunta
Tarea 3	Partir de una pregunta dada	Restricción en pregunta, narrativa e información	Contexto, entorno matemático (parcialmente libres)
Tarea 2	Continuación de una historia proporcionada (historia inconsistente)	Restricción en contexto e información	Pregunta, entorno matemático (parcialmente libres)
Tarea 7	Historia proporcionada + contexto compra-venta definido	Restricción en contexto, información y entorno matemático	Pregunta (parcialmente libre)
Tarea 9	Focalización en elemento concreto del mural (ventanas)	Restricción en contexto, información y entorno matemático	Pregunta (parcialmente libre)

5.4.1.4. Dilema relacionado con la variable lenguaje

El análisis realizado en el estudio de Carmona-Medeiro et al. (2024) muestra que la postura de la maestra ante el dilema inherente a la variable lenguaje no es homogénea a lo largo de la implementación de la tarea. Aunque se observa que la maestra empleó predominantemente un lenguaje coloquial su postura presenta matices significativos, ya que es posible identificar

momentos en los que recurre al lenguaje matemático en la medida en que considera que su uso es compatible con el nivel de conocimiento y desarrollo del alumnado.

Durante la fase de exploración de la situación problemática, en la que la maestra promueve que el alumnado identifique y comunique los elementos del mural (objetos, personas, acciones, etc.), adopta de manera clara un registro predominantemente coloquial. Esta elección parece responder a la necesidad de garantizar que todo el alumnado pueda acceder a la tarea y participar activamente en la construcción de una comprensión compartida de la situación. El uso de un lenguaje informal, acompañado de expresiones familiares y referencias cercanas al mundo de los niños, actúa como mediador fundamental para facilitar la interpretación de los elementos representados. No obstante, incluso dentro de este registro coloquial, tanto en el lenguaje que emplea la maestra como en el que promueve en el alumnado, se evidencia una exigencia implícita para que los niños identifiquen y comuniquen atributos lógicos de los elementos del mural, así como su disposición espacial. Beatriz fomenta de manera deliberada el uso del lenguaje matemático cuando lo considera accesible para el grupo, recurriendo ocasionalmente a términos específicos vinculados a relaciones topológicas, proyectivas y métricas, tales como dentro-fuera (Turno 36 del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis, correspondiente al artículo de Carmona-Medeiro et al., 2024), izquierda-derecha, arriba-abajo (Turno 46 del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis, correspondiente al artículo de Carmona-Medeiro et al., 2024), y cerca-lejos (Turno 48 del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis, correspondiente al artículo de Carmona-Medeiro et al., 2024), contribuyendo así a la progresiva construcción de significados matemáticos desde los intercambios cotidianos.

Durante la fase de formulación de problemas, los estudios de Carmona-Medeiro y Climent (2024) y Carmona-Medeiro et al. (2024) evidencian el uso del lenguaje coloquial para institucionalizar la noción de problema matemático. La maestra introduce esta noción al alumnado utilizando un lenguaje informal cuidadosamente ajustado para resultar comprensible, aproximándose al concepto mediante una historia y “una pregunta sobre la que tenemos que pensar para encontrar la respuesta” (Turno 157 del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis, correspondiente al artículo de Carmona-Medeiro et al., 2024). La noción de problema que se promueve aquí se alinea con la definición adoptada en la investigación en Educación Matemática, en la que se enfatiza su carácter de reto o situación no rutinaria (Charnay, 2002), y se subrayan dos de los elementos estructurales señalados por Malaspina (2021): el contexto y el requerimiento.

En cambio, en dos de las modificaciones de la tarea (Tareas 2 y 4), emergen matices en el uso del lenguaje, ya que la maestra introduce un registro algo más matemático con el propósito de orientar la formulación del alumnado hacia conceptos básicos propios de la educación infantil, mediante el uso de términos como “dentro” y “cuadrado” vinculados a nociones matemáticas tempranas.

La maestra también recurre al lenguaje matemático al designar cantidades discretas mediante distintos registros representativos (oral, pictórico, simbólico convencional) y operaciones aditivas. Un episodio significativo ocurre al resolver uno de los problemas planteados que implica la cuantificación de piezas de fruta. Aunque los alumnos utilizan el conteo como estrategia principal, la maestra trata de fomentar el uso de la suma como estrategia de resolución, empleando un lenguaje formal y preciso tanto en su forma oral como escrita. Esto le permite introducir el concepto de adición y sus símbolos asociados (+, =), articulando este conocimiento junto con las estrategias utilizadas por los niños (Turno 516 del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis, correspondiente al artículo de Carmona-Medeiro et al., 2024). La Figura 10 resume el desarrollo de este dilema a lo largo de la sesión.

Lenguaje Matemático Formal			Lenguaje Coloquial	
En relación con atributos lógicos (color, forma, tamaño, etc.)	En relación con la localización espacial y el empleo de relaciones topológicas, proyectivas y métricas	En relación con la resolución de problemas aditivos y el empleo de símbolos algebraicos (+,=)	En relación con la noción de problema y conceptos que requieren cierto grado de abstracción	En relación con la representación pictórica de cantidades discretas cuantificables

Figura 10. El dilema del lenguaje durante el desarrollo de la sesión de FPM

Estos resultados evidencian un uso flexible y estratégico del lenguaje por parte de la maestra, tanto en sus propias intervenciones como en las producciones que promueve en el alumnado. La precisión y el rigor del discurso matemático se combinan intencionadamente con expresiones coloquiales e imprecisas desde el punto de vista formal, especialmente en aquellos momentos en que la docente busca hacer accesibles ciertos conceptos que todavía resultan lejanos para los niños y niñas. Esta elección refleja una clara priorización de la comprensión y de la participación activa del alumnado por encima del rigor terminológico.

Así, el recurso al lenguaje coloquial no supone una renuncia al contenido matemático, sino que constituye una estrategia para facilitar un acceso progresivo a él. El diseño mismo de la tarea, que permite al alumnado formular problemas a partir de un mural, sin exigir desde el inicio el uso de un vocabulario técnico, pone de manifiesto la intención de no forzar una formalización prematura del lenguaje asociado a la FPM: información, requerimiento, contexto y entorno matemático (Malaspina, 2021).

Este enfoque se alinea con la concepción de un continuo de registros lingüísticos (Sullivan et al., 2015), en el cual el extremo más formal y preciso del lenguaje puede ser introducido gradualmente, conforme el alumnado va construyendo familiaridad con los objetos y relaciones matemáticas implicadas. De hecho, aunque la tarea no tiene como objetivo explícito promover un discurso matemático riguroso desde el inicio, su diseño deja abierta la posibilidad de que el

docente vaya incorporando paulatinamente términos más precisos, de manera natural y sin que ello represente un obstáculo inicial para la participación del alumnado.

5.4.1.5. Dilema relacionado con la variable niveles de interacción

Los resultados (Carmona-Medeiro et al., 2024) muestran que la maestra adopta de manera consistente un posicionamiento claramente orientado hacia la organización social del trabajo, gestionando la tarea como una actividad compartida en el seno del grupo-clase (Cai et al., 2022). La disposición espacial de los alumnos en formato de “asamblea” en U, con el mural visible para todos, refuerza esta opción metodológica, ya que facilita tanto la observación conjunta de la situación problemática como la circulación de ideas entre los niños y niñas.

En cuanto a la gestión de las interacciones, la organización promovida por la maestra integra tanto momentos de participación individualizada, cuando cada alumno formula su problema por turnos, como fases de construcción colectiva, en las que se fomenta el diálogo y la elaboración conjunta de significados. La estrategia de escuchar activamente, responder a casi todas las intervenciones, y animar a los niños a ampliar o matizar sus respuestas (por ejemplo, Turnos 32, 34, 36 del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis, correspondiente al artículo de Carmona-Medeiro et al., 2024), evidencia una clara intención de propiciar una dinámica dialógica de grupo (Leiß y Wiegand, 2005).

Además, aunque algunos turnos de palabra se dirigen a interlocutores individuales, la intervención de la docente tiende a reconducir esas aportaciones hacia el conjunto del grupo (por ejemplo, Turnos 149, 155, 309 del estudio presentado en el apartado 4.4 de la tesis, correspondiente al artículo de Carmona-Medeiro et al., 2024), de modo que las respuestas individuales se convierten en oportunidades de aprendizaje colectivo. Este enfoque se manifiesta tanto en la gestión de las reformulaciones de los problemas planteados como en las intervenciones explicativas que la maestra introduce con valor formativo para toda la clase.

5.4.2. Cuándo y cómo intervenir: Una aproximación a los dilemas de intervención y adecuación desde la perspectiva de las demandas matemáticas

La gestión de tareas de FPM en Educación Infantil plantea al profesorado dilemas complejos que van más allá de la selección de tareas abiertas (Zhang et al., 2022). La literatura ha mostrado que los niños y niñas en estas etapas requieren un acompañamiento docente cuidadosamente calibrado, tanto por las dificultades que presentan en la identificación y expresión de los elementos estructurales del problema, como por la frecuente confusión entre situaciones de naturaleza matemática o no (Codes et al., 2020; Lowrie, 2002; Martín-Díaz y Montes, 2022). La intervención del profesorado, mediante ayudas ajustadas y preguntas orientadoras, resulta fundamental para promover avances significativos en la formulación (Lowrie, 2002; Codes et al., 2020; Zhang et al., 2022). Sin embargo, decidir cuándo intervenir y cómo intervenir constituye un reto permanente, dado que una intervención prematura puede limitar la emergencia de significados personales, mientras que una intervención tardía puede derivar en

bloqueos o desorientación (Cai, 2022; Lowrie, 2002). Además, el tipo de intervención, más directiva o más abierta, y en particular el grado y la naturaleza del andamiaje que se proporciona, condiciona tanto el desarrollo de la tarea como la evolución de las concepciones matemáticas del alumnado.

A partir de estas premisas, en el presente apartado se analizan los resultados relativos a los dilemas de intervención y adecuación que enfrenta el profesorado en el contexto de la FPM, atendiendo a las evidencias recogidas en torno a las demandas matemáticas, las acciones previas del alumnado que las detonan, y las relaciones que se establecen entre ambas.

Los resultados del estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2024) permiten profundizar en la comprensión de estos dilemas, en particular en las decisiones que adopta la maestra a la hora de determinar cuándo intervenir y cómo hacerlo en la gestión de tareas de FPM, así como en la naturaleza de las ayudas que establece y su relación con las producciones previas del alumnado. Dentro de los múltiples aspectos que configuran la gestión de aula, dicho estudio se centra en un componente específico: las demandas matemáticas.

Se entiende por demandas matemáticas aquellas solicitudes que realiza la maestra con el fin de promover el avance del alumnado en la actividad matemática, específicamente en el proceso de formulación de problemas (Carmona-Medeiro y Climent, 2024). En situaciones en las que el alumnado experimenta dificultades, estas demandas, expresadas habitualmente en forma de preguntas o indicaciones, buscan orientar su actividad hacia un foco matemático, ya sea de carácter general (argumentar, precisar, validar, aportar información, resolver, etc. - Lerman, 2010) o directamente relacionado con la FPM (modificar un problema, desarrollar el contexto, formular una pregunta - Singer et al., 2013). Por lo general, estas demandas surgen como respuesta a determinadas intervenciones o producciones del alumnado, que denominamos detonantes de la demanda.

5.4.2.1. Cuándo intervenir: un dilema contingente en la gestión de la FPM

Respecto a cuándo intervenir, las evidencias muestran (Tabla 28) que las intervenciones de la maestra se producen de manera altamente contingente (Rowland y Zazkis, 2013), en respuesta a indicadores específicos en las producciones del alumnado (D1-D7), que detonan su acción (Carmona-Medeiro y Climent, 2024).

Estos indicadores reflejan tanto dificultades en la construcción del contexto matemático del problema (D1-D4) como cuestiones más generales vinculadas a la interacción y comprensión (D5-D7). Los cuatro primeros indicadores (D1-D4) recogen distintos tipos de dificultades que el alumnado experimenta durante el proceso de formulación del problema. El primer indicador (D1) corresponde con momentos específicos durante el desarrollo del contexto, donde el alumnado se expresa despacio y con vacilación y/o permanece en silencio; el segundo (D2) se relaciona con momentos en los que el alumnado, a pesar de avanzar en la construcción del contexto o plantear preguntas, la información aportada resulta incompleta; el tercero (D3) hace

referencia a situaciones en las que el desarrollo del contexto o la pregunta se desvía hacia la formulación de problemas no matemáticos; y el cuarto (D4) acontece cuando el alumnado introduce información que contradice los datos proporcionados por el mural. Los indicadores restantes (D5-D7), en cambio, reflejan aspectos de interacción más generales, como el desacuerdo del alumnado con las aportaciones de la maestra por motivos personales (D5), respuestas ambiguas o difíciles de interpretar (D6), o bien respuestas correctas a las preguntas de la maestra (D7).

Tabla 28 (reproducida). Indicadores emergentes relativos a la acción del alumno (D1-D7) que detona la acción docente (Demanda matemática)

Acción previa del alumnado (Detonantes)
D1. El alumnado tiene dificultades para proseguir con el desarrollo del contexto del problema
D2. La respuesta del alumnado es insuficiente o ineficaz
D3. La respuesta del alumnado se orienta hacia la formulación de un problema no matemático
D4. La respuesta del alumnado es incorrecta
D5. El alumnado no está conforme con la respuesta/aportación de la maestra
D6. La respuesta del alumnado no ha sido comprensible para la maestra
D7. La respuesta del alumnado es correcta

Nota. Tabla reproducida de la Tabla 28 (Capítulo 3)

El estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2024) señala que las acciones del alumnado que tienen un peso más significativo durante el desarrollo de la sesión son: (i) respuestas insuficientes o ineficaces (D2); y (ii) formulaciones orientadas hacia problemas no matemáticos (D3) y, por ende, la mayoría de las intervenciones de la maestra están vinculadas a atender estos dos tipos de acciones del alumnado. Esto coincide con la literatura de investigación sobre FPM en la primera infancia y corrobora que los problemas incompletos, que presentan solo la historia o solo la pregunta, son habituales durante la actividad del alumnado (Codes et al., 2020; Martín-Díaz y Montes, 2022; Possamai et al., 2023). Asimismo, la alta frecuencia de formulaciones orientadas hacia problemas no matemáticos (D3) es coherente con los desafíos identificados en estudios previos, que subrayan la dificultad que experimenta el alumnado para distinguir entre situaciones de naturaleza matemática y aquellas que no lo son (Codes et al., 2020; Martín-Díaz y Montes, 2022), así como la tendencia a formular enunciados vinculados a situaciones personales o narrativas sin contenido matemático (Cai, 2022).

Con respecto al indicador D2, el estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2024) muestra que, en la mayoría de los casos, estas respuestas insuficientes o ineficaces se deben a la

incompletitud de la historia del problema (información y contexto), donde el alumnado proporciona solo un avance parcial en el desarrollo de la historia del problema. En ocasiones, esta incompletitud (D2) se combina con la dificultad para proseguir la historia, lo que se manifiesta en pausas o silencios prolongados (D1).

Resulta significativo que en las respuestas insuficientes o ineficaces apenas haya situaciones en las que la dificultad del alumnado esté vinculada con la formulación de la pregunta del problema. Esta ausencia no sugiere que la formulación de la pregunta sea menos problemática para el alumnado que la elaboración de la historia (información y contexto), sino que la propia construcción de un contexto narrativo en referencia a la situación problemática representó ya un desafío considerable (D1). En consecuencia, mientras el alumnado no logra formular una historia completa, no puede manifestarse su dificultad para construir la pregunta asociada al problema.

En cuanto al indicador D3, los trabajos de Carmona-Medeiro y Climent (2024, 2025) y de Carmona-Medeiro et al. (2024) corroboran que uno de los momentos críticos que requieren intervención docente son precisamente las formulaciones de problemas de naturaleza no matemática (Cai, 2022; Codes et al., 2020; Martín-Díaz y Montes, 2022; Lowrie, 2002). En este sentido, Carmona-Medeiro y Climent (2024) subrayan que el uso de una tarea no estructurada, basada en una situación problemática abierta y un prompt libre, favorece la emergencia de concepciones personales del alumnado sobre qué constituye un problema.

En este contexto, en el que el alumnado se enfrenta a la FPM a partir de una situación dada mediante una tarea no estructurada, las intervenciones de la maestra se producen esencialmente como respuesta a tres necesidades emergentes: (i) la incompletitud de la historia (información y contexto) (D2); la dificultad del alumnado para proseguir con la historia del problema (D1) y; (iii) los problemas de naturaleza no matemática (D3). Así, el momento de intervenir no está predefinido, sino que emerge de la interpretación en tiempo real que la maestra realiza de las producciones y necesidades del alumnado, en interacción con su propósito de sostener la viabilidad de la tarea.

5.4.2.2. Cómo intervenir: ajustar el tipo y grado de andamiaje en la formulación de problemas

Si bien la decisión sobre cuándo intervenir en la gestión de tareas de FPM se manifiesta como un dilema contingente que responde a las producciones emergentes del alumnado (Carmona-Medeiro y Climent, 2024; Rowland y Zazkis, 2013), la cuestión de cómo intervenir plantea al profesorado otro nivel de complejidad: ajustar el tipo y grado de andamiaje que facilite avances significativos sin limitar la autonomía ni el desarrollo personal de las ideas matemáticas del alumnado. Este dilema resulta especialmente relevante en Educación Infantil, dado el carácter incipiente de las concepciones matemáticas y las dificultades propias de estas edades para

gestionar la estructura de un problema matemático (Codes et al., 2020; Lowrie, 2002; Martín-Díaz y Montes, 2022).

El estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2024) identifica un repertorio diversificado de demandas matemáticas que la maestra emplea como estrategias de ayuda (Tabla 27).

Tabla 27 (reproducida). Indicadores emergentes (DM1-DM9) relativos a la subcategoría Demandas Matemáticas (DM) (Carmona-Medeiro y Climent, 2024)

Demandas matemáticas
DM1. Solicitar la modificación del problema
DM2. Solicitar el desarrollo del contexto del problema
DM3. Solicitar el planteamiento de una pregunta para el problema
DM4. Solicitar la resolución de un problema
DM5. Solicitar la representación de un problema
DM6. Solicitar argumentación
DM7. Solicitar cambio de registro representativo
DM8. Solicitar precisión en las respuestas dadas
DM9. Solicitar la verificación de una respuesta dada

Nota. Tabla reproducida de la Tabla 27 (Capítulo 3)

Estos indicadores reflejan distintas estrategias de intervención para orientar la actividad del alumnado durante la FPM. Las tres primeras (DM1-DM3) se vinculan directamente con la FPM, desde solicitar la reformulación de un problema previamente resuelto (DM1), el desarrollo del contexto del problema (DM2), hasta la formulación de la pregunta (DM3). Las demandas restantes (DM4-DM9) abordan aspectos matemáticos más generales, como la resolución, representación, argumentación o validación.

Particularmente relevante es el hecho de que la demanda más frecuente en el repertorio de la maestra corresponde a solicitar el desarrollo del contexto del problema (DM2). Un análisis más fino de este indicador realizado por Carmona-Medeiro y Climent (2024) revela dos descriptores que evidencian dos tipos de actuaciones por parte de la maestra con distinto nivel de directividad (Tabla 42).

Este ajuste fino en el tipo de intervención muestra cómo la maestra regula de forma dinámica el grado de andamiaje en función de las acciones emergentes del alumnado (Tabla 28). Cuando la respuesta del alumnado es insuficiente e ineficaz (D2), y su producción muestra un avance parcial en el desarrollo de la historia del problema (información y contexto) la maestra

privilegia un andamiaje más abierto (DM2-2), que devuelve al alumnado la responsabilidad de continuar la producción. Por el contrario, cuando a la incompletitud de la historia (D2) el alumnado permanece en silencio, evidenciando dificultad para proseguir con el desarrollo de la historia (D1), la maestra opta por ayudas específicas de carácter más directivo (DM2-1), orientadas a hacer explícito un elemento necesario para la formulación de la historia del problema.

Tabla 42. Descriptores emergentes (DM2-1 y DM2-2) relativos al indicador DM2

DM2. Solicitar el desarrollo del contexto del problema
DM2-1. Preguntar al alumnado por información de la historia del problema que no ha sido explicitada/desarrollada/atendida
DM2-2. Solicitar el avance en el desarrollo de la historia del problema

Los resultados de Carmona-Medeiro y Climent (2024) muestran que en el 70,3% de las intervenciones, la maestra recurre a algún tipo de demanda matemática para favorecer el avance en la tarea y que además dichas demandas están en estrecha relación con las acciones previas del alumnado, mostrando cómo la intervención docente se ajusta de manera sensible y contingente a las necesidades que emergen en el proceso de formulación.

La Figura 11, muestra como durante un evento dentro de la sesión de FPM (“El problema de Agustín”), las demandas DM2-1 y DM2-2, centradas en promover el desarrollo del contexto del problema, se articulan con una amplia gama de dificultades del alumnado (D1-D6), y en particular con aquellas vinculadas a la incompletitud del contexto (D2) y a las orientaciones hacia problemas no matemáticos (D3).

Los resultados del estudio de Carmona-Medeiro y Climent (2024) permiten profundizar en la comprensión del tipo y grado de andamiaje que la maestra despliega. Por un lado, cuando detecta que el alumnado tiene dificultades para proseguir con el desarrollo del contexto (D1) o sus respuestas son insuficientes o ineficaces (D2), la maestra opta habitualmente por intervenciones de tipo DM2-2, que consisten en invitaciones abiertas a continuar, dejando espacio para la autonomía del alumnado. Por otro lado, cuando las dificultades son mayores, por ejemplo, cuando la intervención del alumnado combina falta de precisión (D2) o contradicción con los datos del mural (D4), la maestra incrementa el grado de andamiaje, recurriendo a intervenciones más directivas (DM2-1, DM6, DM8 y DM9).

Cuando el alumnado orienta la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3), la maestra despliega un repertorio de intervenciones que combinan reorientación conceptual, ajuste del contexto y regulación del andamiaje. En primer lugar, su actuación se adapta al tipo de respuesta y al grado de dificultad que evidencia el alumnado: si la producción es imprecisa (D2 y D3), recurre a demandas más directivas (DM2-1), solicitando precisiones

que ayuden a reconstruir el contexto desde una perspectiva matemática. Si la respuesta es más completa, pero sigue enmarcada en un contexto no matemático, la maestra plantea preguntas abiertas (DM2-2) o solicita explícitamente la formulación de la pregunta (DM3), buscando conducir al alumnado hacia la explicitación de una demanda que implique un reto matemático (Charnay, 2002).

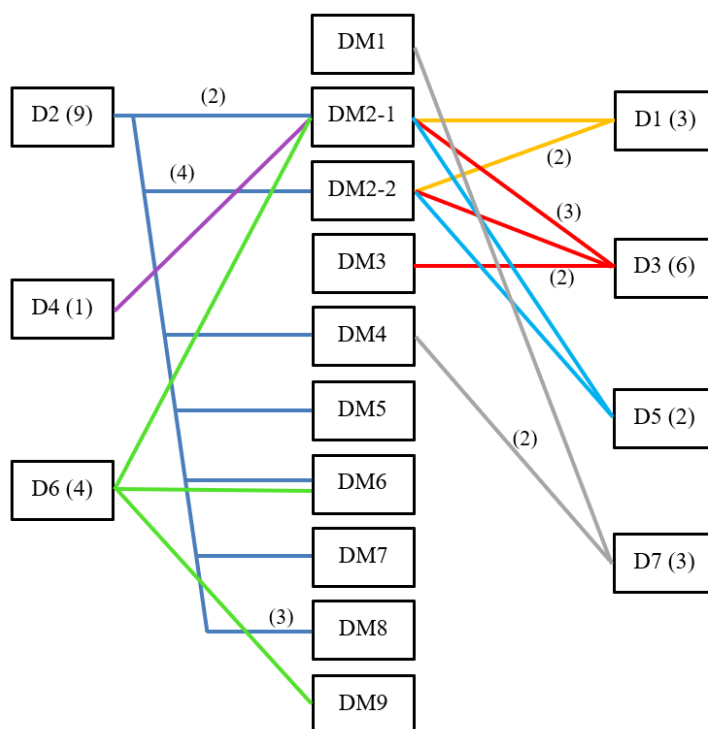


Figura 11. Relaciones entre las demandas matemáticas y las acciones previas del alumnado durante el evento ("Formulación del problema de Agustín") (Carmona-Medeiro y Climent, 2024)

En casos de contradicción con los datos del mural (D4), la maestra introduce contrargumentaciones basadas en la información visual disponible, reforzando así el anclaje de la tarea en un marco de realismo matemático. Cuando la orientación no matemática se mantiene de forma reiterada, recurre a estrategias adicionales: aporta información o introduce argumentos que restauran la lógica de la situación matemática (por ejemplo, apelando a las dinámicas de compraventa) y, en paralelo, plantea nuevas preguntas para sostener el avance del contexto (DM2-1 y DM2-2).

Estos resultados ponen de manifiesto la existencia de tensiones inherentes en la gestión de tareas de FPM en Educación Infantil; por un lado, la necesidad de dejar espacio para respetar y acoger las nociones personales de problema que emergen en las producciones del alumnado, las cuales constituyen un valioso y necesario punto de partida para promover una progresiva apropiación de una noción compartida de problema matemático (Carmona-Medeiro y Climent, 2025), y por otro, la exigencia de asegurar que el desarrollo de la tarea conduzca efectivamente a la

construcción de problemas con sentido matemático. El tipo de intervención que despliega la maestra refleja un intento constante por equilibrar estas dos necesidades, modulando el tipo y grado de andamiaje en función de las acciones y/o producciones emergentes del alumnado (Carmona-Medeiro y Climent, 2024).

Este tipo de gestión no responde a la aplicación de un repertorio fijo de ayudas, sino que se configura como un proceso dinámico, adaptativo y altamente contextualizado que requiere de una interpretación continua, tanto de la naturaleza de las dificultades del alumnado como de la evolución de la tarea.

Este patrón de actuación es coherente con las recomendaciones de la literatura, que subraya la importancia de un andamiaje graduado que permita sostener el avance sin sustituir la actividad del alumnado (Lowrie, 2002; Zhang et al., 2022; Codes et al., 2020). De hecho, el equilibrio entre intervenciones que ofrecen una orientación explícita sobre cómo avanzar en la tarea y aquellas que favorecen que el alumnado explore, pruebe ideas o exprese su propio pensamiento se revela como un aspecto crítico en la gestión de la FPM, particularmente cuando se emplean tareas no estructuradas, como en este estudio, puesto que, según Carmona-Medeiro y Climent (2024, 2025) este tipo de tareas potencia la emergencia de concepciones personales del alumnado sobre qué es un problema.

Estos hallazgos contribuyen a una comprensión más profunda de los dilemas que enfrentan los docentes en la gestión de FPM en Educación Infantil y subrayan la necesidad de promover, en la formación del profesorado, competencias específicas para una gestión dialógica, adaptativa y reflexiva de estas tareas. Tal como plantean Li et al. (2022), solo desde este tipo de gestión es posible crear un ambiente de aula que respete la voz del alumnado, al tiempo que favorezca la construcción de significados matemáticos cada vez más ricos y elaborados.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

“La formulación de un problema a menudo es más esencial que su solución, que puede ser simplemente una cuestión de habilidad matemática o experimental. Plantear nuevas preguntas, nuevas posibilidades, mirar viejos problemas desde un nuevo ángulo, requiere imaginación creativa y marca un avance real en la ciencia.” (Einstein e Infeld, 1938, p. 95)

6.1. Introducción

6.2. Valoración del cumplimiento de los objetivos de investigación

6.3. Contribuciones al campo de investigación sobre la FPM

6.3.1. Aportaciones específicas al estudio de la FPM en Educación Infantil

6.3.1.1. Comprensión del diseño y gestión de tareas de FPM

6.3.1.2. Comprensión de las dificultades del alumnado

6.4. Limitaciones y líneas de investigación futuras

6.1. Introducción

Esta tesis doctoral se ha centrado en el estudio de la FPM en Educación Infantil, abordando esta práctica desde la perspectiva de la gestión docente. El propósito ha sido explorar los desafíos que conlleva su integración en el aula, tanto en la fase de diseño como en el momento de su implementación, en estrecha interacción con el alumnado. De forma específica, se ha tratado de dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Qué desafíos implica la integración de la FPM en el aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la gestión de aula?

Para ello, se ha adoptado un enfoque cualitativo a través de un estudio de caso intrínseco centrado en una maestra de segundo ciclo de Educación Infantil (4-5 años), en el marco de una experiencia de innovación situada en un contexto de aula real. Como parte de una tesis por compendio, se articulan tres estudios publicados que analizan, desde perspectivas complementarias, las decisiones docentes antes y durante la implementación de una tarea no estructurada de FPM, las dificultades que manifiesta el alumnado al formular problemas, y las estrategias que la maestra pone en juego para gestionar la actividad y sostener el pensamiento matemático infantil.

El análisis integra tanto las producciones de los niños y niñas como las intervenciones de la docente, permitiendo así una aproximación relacional entre las acciones de la maestra y el alumnado. La mirada situada y contextualizada ha resultado clave para captar la complejidad de esta práctica en edades tempranas, una etapa en la que los primeros contactos del alumnado con la FPM coinciden con un momento especialmente sensible del desarrollo, caracterizado por la adquisición incipiente de la lectoescritura, el despliegue progresivo de habilidades comunicativas, la predominancia de los sentidos como fuente primaria para la adquisición del conocimiento, y una experiencia aún limitada en resolución de problemas.

Este capítulo final presenta una síntesis de los principales hallazgos y aportaciones de la tesis. En primer lugar, se valora el grado de cumplimiento de los objetivos de investigación (6.2). A continuación, se desarrollan las contribuciones al campo de estudio sobre FPM (6.3), con un apartado específico centrado en la etapa de Educación Infantil (6.3.1). Finalmente, se exponen las limitaciones del estudio y se proponen futuras líneas de investigación (6.4).

6.2. Valoración del cumplimiento de los objetivos de investigación

La pregunta que guía esta tesis ha sido abordada de manera progresiva a través de los tres estudios que componen el compendio, aportando evidencia empírica relevante sobre cómo una maestra de Educación Infantil diseña, implementa y gestiona una tarea de FPM, y cómo estas decisiones se articulan con las producciones infantiles y las dificultades emergentes durante la actividad.

En relación con el primer objetivo, orientado a identificar los dilemas que enfrenta la maestra durante el diseño y gestión de una tarea de FPM, la tesis ha logrado caracterizar cinco variables didácticas: foco del contenido, contexto, estructura, lenguaje y niveles de interacción, que permiten caracterizar las decisiones adoptadas por la maestra tanto en la planificación como en el desarrollo de la tarea. Estas variables contribuyen a conceptualizar el diseño de tareas de FPM como un proceso dinámico y situado (Bikner-Ahsbahs y Janßen, 2013), en el que las decisiones se ajustan a las contingencias del aula y al desarrollo del alumnado, y ofrecen un marco analítico que permite describir con precisión los dilemas que emergen en torno a cada una. Este enfoque representa una aportación significativa para avanzar en la comprensión de cómo el profesorado configura las tareas y toma decisiones a lo largo de todo el proceso de enseñanza. La investigación muestra que estas variables no son estáticas, sino que fluctúan a lo largo de la implementación, revelando la dimensión emergente del diseño en situaciones reales (Silber y Cai, 2021; Yao et al., 2021).

Respecto al segundo objetivo, centrado en analizar cómo se gestiona la actividad durante su implementación, los resultados muestran que las intervenciones de la maestra no adoptan la forma de instrucciones predefinidas, sino que se configuran como respuestas situadas y contingentes a las acciones del alumnado. Las demandas matemáticas que establece la maestra actúan como estrategias de andamiaje progresivo que facilitan el avance del pensamiento infantil sin imponer una solución, evidenciando una gestión dialógica y ajustada que sostiene el sentido matemático de la tarea sin neutralizar la agencia infantil. Este hallazgo contribuye a enriquecer la comprensión del rol docente en contextos de enseñanza abierta y con alta indeterminación, como es el caso de la FPM en la infancia a partir de tareas no estructuradas. Además, es especialmente relevante si se considera la novedad de la práctica para los niños y niñas implicados, que no habían participado previamente en tareas de FPM a partir de una situación dada (Herbst, 2012; Palmer y van Bommel, 2020).

En cuanto al tercer objetivo, que buscaba identificar las dificultades que enfrentan los niños y niñas al formular problemas, el estudio permite identificar dos grandes categorías de obstáculos: los relacionados con la comprensión y exploración de la situación problemática, y aquellos vinculados con la formulación del enunciado. Lejos de considerar estas producciones como errores a corregir, la tesis adopta una lectura comprensiva, reconociéndolas como manifestaciones legítimas del pensamiento matemático en desarrollo. Esta perspectiva, centrada en el proceso y no solo en el producto final, permite avanzar hacia una evaluación de la FPM más inclusiva y coherente con las características de la etapa infantil.

En conjunto, la tesis pone de relieve tanto la viabilidad como la complejidad de integrar la FPM en la Educación Infantil. Muestra que su implementación requiere un diseño y una gestión flexibles y sensibles a las características evolutivas del alumnado, así como un conocimiento profesional capaz de sostener tareas abiertas en un entorno de alta incertidumbre. Asimismo, permite identificar las condiciones didácticas que favorecen el desarrollo de esta práctica con

niños y niñas de 4-5 años sin experiencia previa en formulación de problemas, lo que representa una contribución relevante al campo de la Didáctica de la Matemática en la educación temprana.

6.3. Contribuciones al campo de investigación sobre la FPM

Esta tesis doctoral realiza una aportación significativa al avance del conocimiento en el ámbito de la FPM, un campo que, pese a su consolidación progresiva, continúa enfrentando importantes desafíos teóricos, metodológicos y prácticos (Baumanns y Rott, 2022a; Cai y Hwang, 2023; Lee, 2021; Ran et al., 2025). El estudio responde a varias de las necesidades urgentes señaladas por la literatura especializada, y proporciona aportes originales de carácter conceptual, analítico y empírico que enriquecen la comprensión de la FPM como práctica educativa y objeto de investigación.

En primer lugar, la tesis contribuye al escaso conjunto de estudios que documentan la implementación de tareas de FPM en contextos reales de aula (Cai, 2022; Chen y Cai, 2020; Li et al., 2022; Liljedahl y Cai, 2021). Frente a la tendencia predominante de investigar esta práctica en entornos controlados o en fases de diseño (Baumanns y Rott, 2022a; Zhang et al., 2022), esta investigación se adentra en la dinámica del aula, revelando la complejidad inherente a la gestión de la FPM y los múltiples factores que condicionan su desarrollo. En este sentido, Cai et al. (2024) destacan el carácter pionero del estudio de Carmona-Medeiro et al. (2024), al aportar evidencia empírica sobre cómo se lleva a cabo la FPM con niños y niñas pequeños en el contexto del aula.

En segundo lugar, la tesis avanza en la conceptualización de la gestión de la FPM como una práctica situada, que articula las decisiones docentes con las producciones del alumnado. A diferencia de enfoques más instrumentales o prescriptivos, este estudio adopta una mirada dialógica, relacional y adaptativa, que permite reconocer la enseñanza como un proceso de ajuste continuo a las contingencias del aula (Martín-Díaz et al., 2025). En consonancia con los planteamientos de Çakır y Akkoc (2020), Zhang y Cai (2021) y Martín-Díaz y Montes (2022), la investigación pone en valor el rol activo del profesorado en la construcción compartida de significados matemáticos y en el sostenimiento del sentido epistémico de la tarea.

En tercer lugar, se aporta una lectura renovada de las producciones infantiles, al reconocer el valor epistémico de las respuestas inesperadas y no matemáticas. Esta perspectiva desafía los enfoques deficitarios aún presentes en buena parte de la literatura, y se alinea con planteamientos recientes que abogan por una interpretación más comprensiva de las formulaciones infantiles (Ran et al., 2025). La tesis amplía así el campo de observación e interpretación, al incorporar categorías que permiten analizar las respuestas del alumnado más allá de su corrección formal o resolubilidad.

En cuarto lugar, la tesis ofrece una aportación relevante para el análisis didáctico del diseño e implementación de tareas de FPM. Frente a uno de los retos más señalados por la literatura, la

necesidad de clarificar cómo las variables del diseño inciden en el tipo de formulaciones generadas y en el desarrollo del pensamiento matemático (Baumanns y Rott, 2022a, 2022b; Cai et al., 2024; Xu et al., 2020), el estudio propone un marco analítico ampliado y original que permite abordar esta complejidad desde una perspectiva integrada. Basado en la adaptación del modelo de Sullivan et al. (2015), el marco desarrollado articula cinco variables clave: foco del contenido, contexto, estructura, lenguaje y niveles de interacción, permitiendo analizar el diseño y la implementación como procesos dinámicos e interdependientes.

La importancia de este modelo analítico ha sido señalada por Cai et al. (2024), quienes reconocen su utilidad para explorar cómo distintas configuraciones de las variables de diseño influyen en la FPM más estructurados y complejos. Asimismo, Johnson y Othani (2025), destacan su potencial para guiar futuros estudios que analicen cómo las decisiones docentes en torno a las variables foco del contenido, contexto, estructura lenguaje y niveles de interacción, interactúan para favorecer la formulación de problemas lógicamente estructurados y de múltiples pasos.

Así, esta propuesta no solo enriquece la comprensión del diseño desde una lógica situada y relacional, sino que proporciona una herramienta analítica versátil, aplicable tanto en la investigación como en la formación docente, favoreciendo una aproximación crítica y fundamentada a la FPM como práctica educativa en contextos reales.

6.3.1. Aportaciones específicas al estudio de la FPM en Educación Infantil

Más allá de sus contribuciones generales, esta tesis representa un avance especialmente relevante en el ámbito de la formulación de problemas matemáticos (FPM) en Educación Infantil, una etapa aún, escasamente explorada en la literatura internacional (Cai y Hwang, 2020; Lee, 2021; Martín-Díaz et al., 2020; van Bommel et al., 2024). El trabajo responde a un vacío significativo en el campo, al documentar con detalle la implementación de una tarea de FPM con niños y niñas de 4-5 años en un contexto real de aula, y al analizar tanto las producciones infantiles como la gestión docente que las sostiene.

Frente a la tendencia predominante a investigar la FPM en estudiantes de 6 años en adelante (Lowrie, 2002; Chang, 2007; Cheeseman, 2019; Jastrzębowska, 2023; Palmér y van Bommel, 2020, 2023; Possamai et al., 2023; van Bommel y Palmér, 2021; van Bommel et al., 2024; Yamamoto et al., 2012), esta tesis aporta evidencia empírica valiosa sobre las posibilidades, dificultades y condiciones que caracterizan esta práctica en una etapa previa al desarrollo pleno de la lectoescritura y del razonamiento formal (Codes et al., 2020; Martín-Díaz et al., 2020; Martín-Díaz y Montes, 2022).

Más allá de los resultados obtenidos en el estudio empírico, esta tesis también contribuye al campo de investigación sobre la formulación de problemas matemáticos (FPM) en Educación Infantil a través de un análisis profundo y sistemáticamente organizado de la literatura existente. Aunque no se ha llevado a cabo una revisión sistemática formal, el trabajo ha permitido

identificar y clasificar los estudios previos en torno a cuatro categorías emergentes de elaboración propia: (i) estudios de doble ciclo (resolución–formulación); (ii) estudios de formulación directa; (iii) estudios de triple ciclo (resolución–instrucción–formulación); y (iv) estudios sobre FPM emergente, es decir, aquellos que recogen prácticas no intencionadas desde el punto de vista didáctico. Esta organización conceptual ofrece una panorámica clara y estructurada del estado del conocimiento, permitiendo visualizar las distintas formas en que se ha abordado la FPM en la etapa infantil, en términos de objetivos investigativos, características de la muestra, rango etario, aproximaciones metodológicas, y variables implicadas en las tareas de formulación. De este modo, la tesis no solo genera conocimiento empírico, sino que también proporciona una herramienta analítica que puede servir de base para futuras investigaciones en el área.

6.3.1.1. Comprensión del diseño y gestión de tareas de FPM

Una contribución central de esta investigación es la aplicación del marco analítico adaptado de Sullivan et al. (2015) al diseño y gestión de tareas en la etapa de Educación Infantil. Este marco ha permitido identificar los dilemas que enfrenta la maestra durante la planificación y puesta en práctica de la tarea, poniendo de manifiesto el carácter idiosincrático que adquiere la FPM en la primera infancia. En particular, el estudio muestra que la posición de la maestra ante dichos dilemas está profundamente condicionada por las características evolutivas del alumnado: la comprensión se apoya en lo sensorial y lo concreto, la lectoescritura y las habilidades comunicativas están en pleno desarrollo, y la construcción de significados requiere interacción social. Por ello, la maestra introduce la situación problemática a través de un mural de carácter complejo, seleccionado deliberadamente por su cercanía con las vivencias del alumnado. Esta elección permite ofrecer un contexto significativo desde el que partir. Asimismo, emplea un lenguaje coloquial que presenta el problema como una historia acompañada de una pregunta que invita a pensar, favoreciendo así la comprensión. Finalmente, opta por una organización grupal para el desarrollo de la tarea, convencida de que esta modalidad se ajusta mejor a las posibilidades reales del alumnado en esta etapa.

La investigación también documenta dos estrategias clave para sostener la viabilidad de la tarea: (1) la modulación del grado de estructuración mediante prompts que ajustan la complejidad de la tarea, y (2) el uso de demandas matemáticas como forma de andamiaje en tiempo real. Estas estrategias ponen de relieve una concepción dinámica del diseño y ofrecen orientaciones concretas para sostener la actividad matemática sin reducir su complejidad epistemológica. Algunos de los prompts identificados representan en sí mismos una aportación novedosa respecto a estudios previos, ampliando el repertorio de recursos docentes disponibles en la literatura sobre FPM.

La tesis contribuye así a consolidar una mirada más flexible y sensible a la complejidad de la enseñanza de la FPM en Infantil, ofreciendo herramientas analíticas útiles tanto para la investigación como para la práctica educativa.

6.3.1.2. Comprensión de las dificultades del alumnado

En paralelo, el estudio realiza una sistematización empírica de las dificultades que enfrentan los niños y niñas durante la FPM, organizadas en torno a aspectos estructurales (falta de requerimiento, incoherencia) y expresivos (narrativas no matemáticas, respuestas ininteligibles). A diferencia de enfoques centrados en la detección de errores, se propone una lectura comprensiva que valora estas producciones como expresiones legítimas del pensamiento matemático incipiente (Ran et al., 2025).

La clasificación de las respuestas infantiles permite avanzar hacia marcos evaluativos más inclusivos, alineados con las demandas de Zhang et al. (2022) y Cai y Rott (2023). Asimismo, el análisis arroja luz sobre los procesos cognitivos, metacognitivos y lingüísticos implicados en esta práctica (Cai y Leikin, 2020; Chen y Cai, 2020), y visibiliza la necesidad de valorar tanto el proceso como el producto, especialmente en edades donde el lenguaje y la simbolización matemática se están construyendo.

6.4. Limitaciones y líneas futuras de investigación

Esta tesis ha permitido avanzar en la comprensión de la formulación de problemas matemáticos (FPM) en la educación infantil, en particular desde la perspectiva de la gestión docente en contextos reales de aula. No obstante, como toda investigación, presenta limitaciones que abren nuevas líneas de indagación.

Una primera limitación reside en el carácter intensivo del estudio de caso único, centrado en una docente con experiencia y alta implicación en un contexto de colaboración investigadora. Aunque este diseño ha permitido acceder a una comprensión profunda y situada del fenómeno, es necesario ampliar la base empírica a través de estudios comparativos que contemplen distintos perfiles docentes, niveles de experiencia, y contextos socioculturales. Además, la participación de una sola maestra impide explorar la variabilidad en las formas de gestionar las tareas de FPM. La incorporación de múltiples casos podría ampliar el espectro de estrategias docentes y enriquecer la comprensión de los factores contextuales que condicionan su implementación. Del mismo modo, futuros estudios podrían incluir al profesorado novel o no familiarizado con propuestas de innovación, lo que permitiría explorar con mayor diversidad los desafíos reales de implementación de la FPM.

Por otro lado, el análisis se ha centrado en una única tarea de FPM, diseñada e implementada en una única sesión. Esto impide observar el desarrollo longitudinal de la práctica, tanto en términos de aprendizaje del alumnado como de evolución de las estrategias docentes. La inclusión de estudios de mayor duración permitiría analizar trayectorias de aprendizaje y de profesionalización docente en torno a esta práctica.

Aunque el estudio caracteriza la gestión docente atendiendo a distintos aspectos de la gestión de aula, sólo aborda el análisis de un aspecto específico de la gestión de la maestra, las

demandas matemáticas. Si bien en el estudio de los datos surgieron otro tipo de demandas, por la necesidad de acotar más el estudio decidimos centrarlo exclusivamente en las matemáticas. La consideración de otro tipo de demandas y de elementos de la gestión del aula (como la gestión del error, la gestión de la motivación e implicación del alumnado o la creación de un clima enriquecido para la indagación) y las relaciones de estos elementos con la gestión de la demanda matemática plantean una línea de estudio novedosa.

Otra línea de investigación prometedora se refiere a la necesidad de desarrollar marcos formativos y herramientas pedagógicas que ayuden al profesorado a interpretar y valorar las producciones del alumnado durante la FPM, especialmente aquellas que no se ajustan a las expectativas curriculares o que presentan estructuras poco convencionales. En esta línea, es fundamental seguir investigando cómo los docentes toman decisiones en tiempo real para acompañar estas formulaciones, evitando interpretaciones deficitarias y reconociendo su valor epistémico y expresivo.

El análisis de las normas sociomatemáticas permite comprender cómo el alumnado va ajustando sus formulaciones a las expectativas que percibe en la docente y en sus pares, y cómo estas expectativas, a su vez, son moduladas, modeladas o incluso desafiadas por las intervenciones del profesorado

Además, comprender la FPM desde esta perspectiva permite abordar con mayor profundidad la dimensión cultural, discursiva y relacional de la enseñanza de las matemáticas, así como explorar cómo los significados matemáticos emergen, se estabilizan o se transforman en función de las interacciones y las decisiones pedagógicas.

En síntesis, la incorporación del enfoque de las normas sociomatemáticas a la investigación sobre FPM representa una vía poderosa para ampliar la mirada sobre esta práctica, reconociendo su carácter situado, social y negociado. Se sugiere como línea prioritaria de investigación futura el desarrollo de estudios que articulen el análisis del contenido matemático, las prácticas discursivas y las normas sociales y epistémicas que configuran la experiencia escolar de la FPM.

Esta línea de investigación no solo enriquece el análisis didáctico, sino que también proporciona claves para el diseño de entornos de aprendizaje más dialógicos, inclusivos y sensibles a la diversidad de formas de expresión matemática.

En cuanto a las líneas de investigación futuras, el estudio abre otras posibilidades relevantes. En primer lugar, resulta pertinente continuar explorando la FPM en rangos etarios poco estudiados, como el de 3-4 años, así como en contextos no escolares, como los hogares o las escuelas infantiles de primer ciclo. En segundo lugar, sería valioso desarrollar estudios que integren el análisis del discurso infantil y las producciones materiales (dibujos, gestos, construcciones), para captar con mayor precisión los modos de expresión del pensamiento matemático en edades tempranas. En tercer lugar, sería conveniente que en futuras

investigaciones se continuara explorando sobre el funcionamiento de las variables identificadas en el diseño e implementación de tareas de FPM en otros niveles educativos y la posible emergencia de nuevas variables. Igualmente, sería conveniente seguir usando y contrastando en otras investigaciones en educación Infantil las categorías e indicadores de análisis de las demandas de la gestión y sus detonantes.

Se requieren investigaciones, por otra parte, que aborden el desarrollo profesional docente en relación con la FPM, analizando cómo los y las maestras aprenden a diseñar, implementar y sostener estas tareas en su práctica cotidiana. En esta línea, el estudio sugiere la necesidad de generar modelos de formación situados, centrados en el análisis de casos reales, que permitan trabajar sobre los dilemas reales que emergen en el aula durante la implementación de tareas abiertas.

Por último, una línea emergente de investigación, en la que esta tesis ha comenzado a incidir, apunta a la necesidad de resignificar las respuestas no convencionales del alumnado. El análisis de formulaciones incompletas, narrativas no matemáticas o problemas inesperados ofrece una vía prometedora para comprender el pensamiento infantil desde una perspectiva más inclusiva y menos prescriptiva. Esta mirada puede contribuir a un enfoque más comprensivo y transformador de la enseñanza de las matemáticas en la primera infancia, en el que la FPM se conciba como una práctica legítima desde los primeros años de escolaridad. Asimismo, resulta necesario profundizar en la exploración de la noción de problema que posee el alumnado de Educación Infantil, no solo para identificar posibles obstáculos en la construcción de la noción de problema matemático, sino también para reconocer las oportunidades que dicha noción puede ofrecer como punto de partida para su desarrollo progresivo.

6.5. Conclusión general

En conjunto, esta tesis contribuye de forma clara y original a la consolidación de la FPM como una práctica educativa viable, significativa y formativa en Educación Infantil. Desde una perspectiva situada, el estudio visibiliza la complejidad del rol docente en la gestión de tareas abiertas, aporta un marco conceptual para analizar el diseño e implementación de la FPM, y reivindica una lectura respetuosa y comprensiva del pensamiento matemático emergente. La investigación responde a vacíos documentados en la literatura internacional al:

- ♦ Incorporar al rango etario de 4-5 años dentro del campo de estudio de la FPM.
- ♦ Proponer herramientas analíticas para el estudio del diseño y la gestión docente.
- ♦ Explorar empíricamente las dificultades infantiles desde una lógica no deficitaria.
- ♦ Documentar intervenciones situadas que sostienen la actividad matemática en contextos reales.

Así, la tesis no solo aporta respuestas a los retos teóricos, metodológicos y prácticos identificados en el campo, sino que abre nuevas líneas de investigación fundamentadas en la práctica escolar, contribuyendo al desarrollo de un conocimiento pedagógico más inclusivo, situado y transformador.

CAPÍTULO 7

FACTOR DE IMPACTO DE LAS PUBLICACIONES PRESENTADAS

7.1. Introducción

7.2. Journal of Mathematical Behavior

7.3. PNA

7.4. Education Science

7.1. Introducción

En esta sección justificamos el factor de impacto de las revistas en las que han sido publicadas las investigaciones. Tal y como se expone en el artículo 35 del reglamento del programa de doctorado de la Universidad de Huelva, esta tesis se compone de un conjunto de aportaciones científicas, en este caso 3, sobre un mismo campo de conocimiento científico. En este caso, el nexo común de las investigaciones es, como se ha mencionado anteriormente, la formulación de problemas y su gestión por parte del profesorado de las primeras etapas de la educación.

Las publicaciones deben estar, según la normativa de la Universidad de Huelva, indexadas en alguna de las bases de datos con mayor impacto (Science Citation Index, Social Science Citation Index, Art & Humanities Citation Index) o que se considere para la Comisión Nacional Evaluadora de la Actividad Investigadora (CNEAI) como de valoración precedente para cada campo de investigación en particular. Mostramos a continuación los distintos indicios de calidad vinculados a cada una de las publicaciones y, en particular, los datos de indexación correspondientes al año de publicación de cada artículo. Los tres artículos se han publicado en las revistas *The Journal of Mathematical Behavior*, *PNA* y *Education Science*.

La revista *The Journal of Mathematical Behavior* es una revista científica internacional, doblemente anónima y revisada por pares, dedicada al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Su objetivo fundamental es publicar investigaciones de la más alta calidad que amplíen la comprensión de cómo las personas construyen, retienen, comunican, aplican y comprenden ideas matemáticas. La revista aúna la investigación teórica y empírica desde diversas metodologías y paradigmas. Su foco se centra en la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a todas las edades, tanto en contextos formales como informales. El público objetivo de esta revista incluye investigadores especializados en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, científicos del aprendizaje, matemáticos, educadores, profesores de matemáticas, científicos cognitivos y lingüistas. Esta revista es seleccionada entre las 10 principales de Educación Matemática a nivel internacional en Julius et al. (2021), quien estudia las revistas del área con más artículos incluidos en Scopus, y es incluida en la lista Tier 1 de las revistas más prestigiosas del campo (Nivens y Otten, 2017).

PNA es una publicación científica internacional, revisada por pares y de acceso abierto, editada por el Grupo de Investigación "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" (FQM-193) de la Universidad de Granada. *PNA* publica tanto estudios empíricos, como estudios teóricos en Didáctica de la Matemática, con amplio abanico de metodologías y diseños de investigación.

La revista *Education Science* es una revista internacional revisada por pares con carácter multidisciplinar. Su objetivo es compartir hallazgos de investigación oportunos y de alta calidad entorno a la educación. La revista aúna la investigación teórica y empírica desde diversas metodologías y paradigmas.

A continuación, se presentan tanto los datos generales de cada revista como los datos que evidencian su impacto científico (Tablas 43, 44, 45, 46, 47 y 48).

7.2. Journal of Mathematical Behavior

Tabla 43. Información de la revista The Journal of Mathematical Behavior (Elaboración propia)

Título	The Journal of Mathematical Behavior
Editorial	Elsevier Inc.
Referencia	Carmona, E., Martín-Díaz, J. P. y Climent, N. (2024). Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education. The Journal of Mathematical Behavior, 73, 101131.
Identificadores	https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101131 http://hdl.handle.net/10498/33193
ISSN	Versión impresa ISSN: 0732-3123; Versión on-line ISSN: 1873-8028
País	Reino Unido
URL	https://www.sciencedirect.com/journal/the-journal-of-mathematical-behavior
Contenidos	Matemáticas Aplicadas, Psicología Aplicada, Educación
Indexada en	Emerging Sources Citation Index (Clarivate), Scopus (ELSEVIER), Academic Search Ultimate (EBSCO), Education Source Ultimate (EBSCO), Educational research abstracts - ERA (Taylor & Francis Online), Psycinfo (American Psychological Association - APA)
Evaluada en	ERIHPlus (Norwegian Directorate for Higher Education and Skills), JUFO Portal - Levels 1, 2, 3 (Federation of Finnish Learned Societies), The Register for Scientific Journals, Series and Publishers - Levels 1, 2 (Norwegian Directorate for Higher Education and Skills)

Tabla 44. Factor de impacto de la revista The Journal of Mahematical Behavior (Elaboración propia)

Journal Impact Factor – JIF (JCR) Año 2023	
Factor de impacto de la revista: 1.0; Factor de impacto sin autocitas: 0.9	
Cuartil mayor: Q3	Área: EDUCATION & EDUCATIONAL RESEARCH
	Posición en el área: 429/760 (ESCI)
Journal Citation Indicator – JCI (JCR) Año 2023	
JCI de la revista: 0.76	
Cuartil mayor: Q2	Área: EDUCATION & EDUCATIONAL RESEARCH
	Posición en el área: 326/760
Article Influence Score (JCR) Año 2023	
Article influence score: 0.549	
SCImago Journal Rank Año 2024	
Impacto SJR de la revista: 1.235	
Cuartil mayor: Q1	Applied Mathematics; Posición en el área: 73/664
	Área: Applied Psychology; Posición en el área: 65/267
	Área: Education; Posición en el área: 155/1597
Scopus CiteScore Año 2023	
CiteScore de la revista: 2.7	Área: Mathematics (miscellaneous) Posición: 19 Percentil: 79
	Área: Education Posición: 610 Percentil: 60
	Área: Applied Mathematics Posición: 262 Percentil: 58
CIRC (Clasificación Integrada de Revistas Científicas)	
Ciencias Sociales: A	

7.3. PNA

Tabla 45. Información de la revista PNA (Elaboración propia)

Título	PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática
Editorial	Grupo "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" FQM-193 de la Universidad de Granada
Referencia	Carmona-Medeiro, E. y Climent, N. (2024). Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en Educación Infantil. <i>PNA</i> , 19(1), 25-51.
Identificadores	http://doi.org/10.30827/pna.v19i1.28408 http://hdl.handle.net/10498/33653
ISSN	Versión on-line ISSN: 1887-3987
País	España
URL	https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/index
Contenidos	Didáctica de la Matemática, Educación Matemática
Indexada en	Emerging Sources Citation Index (Clarivate), Scopus (ELSEVIER), Academic Search Ultimate (EBSCO), Fuente Academica Plus (EBSCO), DIALNET (Universidad de la Rioja), DOAJ, Educational research abstracts - ERA (Taylor & Francis Online), Psicodoc (Colegio Oficial de la Psicología de Madrid) [EBSCO]
Evaluada en	LATINDEX. Catálogo v2.0 (2018-), Sello de calidad FECYT, Directory of Open Access Journals, ERIHPlus (Norwegian Directorate for Higher Education and Skills), JUFO Portal - Levels 1, 2, 3 (Federation of Finnish Learned Societies), The Register for Scientific Journals, Series and Publishers - Levels 1, 2 (Norwegian Directorate for Higher Education and Skills)

Tabla 46. Factor de impacto de la revista PNA (Elaboración propia)

Journal Impact Factor – JIF (JCR) Año 2023	
Factor de impacto de la revista: 0.8; Factor de impacto sin autocitas: 0.7	
Cuartil mayor: Q3	Área: EDUCATION, SCIENTIFIC DISCIPLINES
	Posición en el área: 60/86 (ESCI)
Journal Citation Indicator – JCI (JCR) Año 2023	
JCI de la revista: 0.36	Área: EDUCATION, SCIENTIFIC DISCIPLINES
Cuartil mayor: Q3	Posición en el área: 60/86
Article Influence Score (JCR) Año 2023	
Article influence score: 0.146	
SCImago Journal Rank Año 2024	
Impacto SJR de la revista: 0.312	Área: Mathematics (miscellaneous); Posición en el área: 302/499
Cuartil mayor: Q3	Área: Education; Posición en el área: 920/1597
Scopus CiteScore Año 2023	
CiteScore de la revista: 1.1	Área: Mathematics (miscellaneous); Posición: 50 Percentil: 45
	Área: Education; Posición: 1074 Percentil: 30
Índice Dialnet de Revistas Año 2023	
Impacto de la revista: 0.490	Ámbito: EDUCACIÓN; Posición en el ámbito: 71/233
Cuartil: 2	
FECYT-167/2024	
Puntuación: 22.95	Categoría: Ciencias de la Educación; Posición: 67/85
Cuartil: Q4	
CIRC (Clasificación Integrada de Revistas Científicas)	
Ciencias Sociales: B	

7.4. Education Science

Tabla 47. Información de la revista Education Science (Elaboración propia)

Título	Education Science
Editorial	MDPI
Referencia	Carmona-Medeiro, E., y Climent, N. (2025). Students' Difficulties with Problem Posing in Early Childhood Education. <i>Education Sciences</i> , 15(5), 630.
Identificadores	https://doi.org/10.3390/educsci15050630
ISSN	Versión on-line ISSN: 2227-7102
País	Suiza
URL	https://www.mdpi.com/journal/education
Contenidos	Educación
Indexada en	Emerging Sources Citation Index (Clarivate), Scopus (ELSEVIER), Social Science Premium Collection (ProQuest), DOAJ, Agricultural & Environmental Science Collection (ProQuest), Education Collection (ProQuest), Education Source Ultimate (EBSCO), Educational research abstracts - ERA (Taylor & Francis Online), Psycinfo (American Psychological Association - APA)
Evaluada en	Directory of Open Access Journals, ERIHPlus (Norwegian Directorate for Higher Education and Skills), The Register for Scientific Journals, Series and Publishers - Levels 1, 2 (Norwegian Directorate for Higher Education and Skills)

Tabla 48. Factor de impacto de la revista Education Science (Elaboración propia)

Journal Impact Factor – JIF (JCR) Año 2023	
Factor de impacto de la revista: 2.5; Factor de impacto sin autocitas: 2.1	
Cuartil mayor: Q1	Área: EDUCATION & EDUCATIONAL RESEARCH
	Posición en el área: 133/760 (ESCI)
Journal Citation Indicator – JCI (JCR) Año 2023	
JCI de la revista: 1.46	
Cuartil mayor: Q1	Área: EDUCATION & EDUCATIONAL RESEARCH
	Posición en el área: 120/760
Article Influence Score (JCR) Año 2023	
Article influence score: 0.521	
SCImago Journal Rank Año 2024	
Impacto SJR de la revista: 0.73	
Cuartil mayor: Q1	Área: Education; Posición en el área: 377/1597
Scopus CiteScore Año 2023	
CiteScore de la revista: 4.8	Área: Education Posición: - Percentil: 81

REFERENCIAS

“La investigación científica está organizada, es cooperativa e interactiva, crea visiones del mundo compartidas y las observaciones se interpretan de acuerdo con esas visiones del mundo.” (Oreskes, 2019, p. 32)

- Alsina, A. (2011). *Educación Matemática en contexto: de 3 a 6 años*. Horsori.
- Álvarez-Gayou, J. L. (2003). Introducción a la investigación cualitativa. En J. L. Álvarez-Gayou (Ed.), *Cómo hacer investigación educativa. Fundamentos y metodología* (pp. 10–22). Paidós Ecuador.
- Arbaugh, F., Herbel-Eisenmann, B., Ramirez, N., Knuth, E., Kranendonk, H., y Quander, J. R. (2010). *Linking research & practice: The NCTM research agenda conference report*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Australian Education Council. (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools: A joint project of the States, Territories and the Commonwealth of Australia initiated by the Australian Education Council*. Curriculum Corporation.
- Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico* (23ª ed.). Siglo veintiuno editores.
- Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 21(7), 633–636.
- Barbosa, J.C., y de Oliveira, A.M. (2013). Collaborative groups and their conflicts in designing tasks. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 541–548). Oxford, UK. Recuperado a partir de: <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054>
- Bassey, M. (1999). *Case Study Research in Educational Settings*. Open University Press.
- Baumanns, L. y Rott, B. (2018). Is problem posing about posing “problems”? A terminological framework for research into problem posing and problem solving. En A. Kuzle, I. Gebel y B. Rott (Eds.), *Proceedings of the 2018 Joint Conference of ProMath and the GDM Working Group on Problem Solving* (pp. 21–31). WTM
- Baumanns, L., y Rott B. (2020). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning*, 13(2), 59–76. <https://doi.org/10.1080/19477503.2020.1841501>
- Baumanns, L., y Rott, B. (2022a). Developing a framework for characterising problem-posing activities: a review. *Research in Mathematics Education*, 24(1), 28–50. <https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1897036>
- Baumanns, L., y Rott, B. (2022b). The process of problem posing: development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 251–269. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y>
- Baumanns, L., y Rott, B. (2024). Problem-posing tasks and their influence on pre-service teachers’ creative problem-posing performance and self-efficacy. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101130. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101130>

- Bikner-Ahsbahr, A.A., y Janßen, T. (2013). Emergent tasks—spontaneous design supporting in-depth learning. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 153–162), Oxford, UK. Recuperado a partir de: <http://hal.archivesouvertes.fr/hal-00834054>
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática*. Paidós.
- Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la Investigación Educativa*. La Muralla.
- Blanco, L., Cárdenas, J., y Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de Matemáticas*. Universidad de Extremadura.
- Bonache, J. (1998). *Los estudios de casos como estrategia de investigación: características, críticas y defensas*. Universidad de Carlos III.
- Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 37–55. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7>
- Bonotto, C., y Dal Santo, L. (2015). On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 103–124). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_5
- Borasi, R. (1986). On the Nature of Problems. *Educational Studies on Mathematics*, 17, 125–141. <https://doi.org/10.1007/BF00311517>
- Bransford, J., y Stein, B. (1986). *Solución ideal de problemas*. Editorial labor
- Bryman, A. (2001). *Social Research Methods*. Oxford University Press.
- Bronowski, J. (1968). *Ciencia y valores humanos*. Lumen.
- Bronowski, J. (1978). *El sentido común de la ciencia*. Península.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.
- Brown, S., y Walter, M. (1990). *The Art of problem posing*. Lawrence Erlbaum Associates
- Brown, S. I., y Walter, M. I. (1993). *Problem posing: Reflections and applications*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Brown, S. I., y Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing (3rd edition)*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Bruder, R. (2000). Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen – Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle. En L. Flade y W. Herget (Eds.),

- Mathematik. Lehren und Lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen* (pp. 69–78). Volk und Wissen.
- Burcin, B. (2005). *The Effect of instruction with problem posing on tenth grades student's probability achievement and attitudes toward probability* [Master's thesis, Middle East Technical University, Ankara].
- Butts, T. (1980) Posing problems properly. En S. Krulik y R.E. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 23–33). NCTM.
- Cai, J. (2022). What Research Says About Teaching Mathematics Through Problem Posing. *Éducation & didactique*, 16(3), 31–50. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642>
- Cai, J., y Cifarelli, V. (2005). Exploring mathematical exploration: how do two college students formulate and solve their own mathematical problems? *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 27(3), 43–72.
- Cai, J. y Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), 401–421. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(02\)00142-6](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00142-6)
- Cai, J., y Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Cai, J., y Hwang, S. (2021). Teachers as redesigners of curriculum to teach mathematics through problem posing: conceptualization and initial findings of a problem-posing project. *ZDM Mathematics Education*, 53, 1403–1416. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01252-3>
- Cai, J., y Hwang, S. (2022). Seeing Algebra in Arithmetic Through Mathematical Problem Posing. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 32(3), p. 309–329. <https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.309>
- Cai, J., y Hwang, S. (2023). Making Mathematics Challenging Through Problem Posing in the Classroom. In R. Leikin, R. (Ed.), *Mathematical Challenges For All. Research in Mathematics Education* (pp. 115–14). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7
- Cai, J., y Jiang, C. (2017). An Analysis of Problem-Posing Tasks in Chinese and US Elementary Mathematics Textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(8), 1521–1540. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9758-2>

- Cai, J., y Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, 105(3), 287–201. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10008-x>
- Cai, J., y Mamlok-Naaman, R. (2020). Posing researchable questions in mathematics and science education: Purposefully questioning the questions for investigation. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 1–7. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10079-5>
- Cai, J., y Rott, B. (2023). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM Mathematics Education* 56, 61–71. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01536-w>
- Cai, J., Chen, T., Li, X., Xu, R., Zhang, S., Hu, Y., Zhang, L. y Song, N. (2019). Exploring the impact of a problem-posing workshop on elementary school mathematics teachers' conceptions on problem posing and lesson design. *International Journal of Educational Research*, 102, 101404. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.02.004>
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., y Silber, S. (2015). Problem posing research in mathematics: Some answered and unanswered questions. En F.M. Singer, N. Ellerton, y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3–34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B. y Jiang, C. (2024). Advances in research on mathematical problem posing: Focus on task variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 101186. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101186>
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R., y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: tasks variables, processes, and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119–145). PME.
- Cai, J., Moyer, J.C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., y Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 57–69. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9429-3>
- Cai, J., Ran, H., Hwang, S., Ma, Y., Han, J., y Muirhead, F. (2023). Impact of prompts on students' mathematical problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, 72, 101087. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101087>
- Çakır, A. y Akkoc, H. (2020). Examining socio-mathematical norms related to problem posing: A case of gifted and talented mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 105(1), 19–34. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09965-0>
- Canals, M. A. (2001). *Vivir las matemáticas*. Octaedro.

- Cantor, G. (1867). *De aequationibus secundi gradus indeterminatis*. Schultz.
- Cañadas, M.C., Molina, M., y del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics*, 98(1), 19–37. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9>
- Carmona-Medeiro, E., y Cardeñoso, J. M. (2021). Social interaction: A crucial means to promote sustainability in initial teacher training. *Sustainability*, 13(15), 8666. <https://doi.org/10.3390/su13158666>
- Carmona-Medeiro, E., y Climent, N. (2024). Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en un aula de educación infantil. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 19(1), 25–51. <https://doi.org/10.30827/pna.v19i1.28408>
- Carmona-Medeiro, E., y Climent, N. (2025). Students' Difficulties with Problem Posing in Early Childhood Education. *Education Science*, 15(5), 630. <https://doi.org/10.3390/educsci15050630>
- Carmona Medeiro, E., Martín-Díaz, J.P., y Climent, N. (2024). Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education. *Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101131. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101131>
- Carrillo, J., y Cruz, J. (2016). Problem-Posing and Questioning: Two Tools to Help Solve Problems. In: Felmer, P., Pehkonen, E., Kilpatrick, J. (eds) *Posing and Solving Mathematical Problems. Research in Mathematics Education* (pp. 23-36). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_2
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M. C. (2011). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín Rodríguez, G. Fernández García, L. J. Blanco Nieto y M. Palarea Medina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 77–98). SEIEM.
- Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 1–15). Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

- Chamorro, M. C. (2005). *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil*. Pearson Prentice Hall
- Chang, N. (2007). Responsibilities of a Teacher in a Harmonic Cycle of Problem Solving and Problem Posing. *Early Childhood Education Journal*, 34(4), 265–271. <https://doi.org/10.1007/s10643-006-0117-8>
- Charlesworth, R., y Lind, K. K. (2013). *Math & Science for Young Children* (7th ed.). Wadsworth Cengage Learning.
- Charmaz, K. (2008). Reconstructing Grounded Theory. En P. Alasuutari, L. Bickman y J. Brannen (Eds.). *The Sage Handbook of Social Research Methods* (pp. 447–460). SAGE.
- Charnay, R. (2002). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra, C. y Saiz, I. (Eds.), *Didáctica de matemáticas: Aportes y reflexiones* (pp. 51–63). Paidós.
- Cheeseman, J. (2009). Young children are natural inquirers: Posing and solving mathematical problems. *Waikato Journal of Education*, 24(2), 11–22. <https://doi.org/10.15663/wje.v%vi%i.664>
- Chen, T., y Cai, J. (2020). An elementary mathematics teacher learning to teach using problem posing: A case of the distributive property of multiplication over addition. *International Journal of Educational Research*, 102, 101420. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.03.004>
- Chinese Ministry of Education. (2003). *Curriculum standards of high school mathematics* (Trial version). People's Education Press.
- Christiansen, B., y Walther, G. (1986). Task and Activity. En B. Christiansen, G. Howson y M. Otte. (Eds.) *Perspectives in Mathematics Education* (p.243–307). Reidel.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., y Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM Mathematics Education*, 37(3), 149–158. <https://doi.org/10.1007/s11858-005-0004-6>
- Codes, M., Martín-Díaz, J. P., y Pérez, R. (2020). *Formulación de problemas en un aula de educación infantil: un reto desde la resolución de problemas*, APEduC Journal, 1(1), 87–99.
- Crespo, S., y Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(5), 395–415. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9081-0>
- Davis, P. J. (1985). What do I know? A study of mathematical self-awareness. *The College Mathematics Journal*, 16(1), 22–41. <https://doi.org/10.1080/07468342.1985.11972847>

- Decreto 100/2023, de 9 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Infantil en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, núm. 90 (2023).
- Dickerson, V. M. (1999). The impact of problem-posing instruction on the mathematical problem solving achievement of seventh-graders [Tesis doctoral, Universidad de Emory, Atlanta]
- Dillon, J. T. (1982). Problem finding and solving. *The Journal of Creative Behavior*, 16(2), 97–111. <https://doi.org/10.1002/j.2162-6057.1982.tb00326.x>
- Doyle, W. (1986). Classroom management techniques and student discipline. Washington, DC: Office of Educational Research and Improvement.
- Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23, 167–180.
- Dunker, K. (1945). On problem-solving. *Psychological Monographs*, 58(5), 85–101. <https://doi.org/10.1037/h0093599>
- Einstein, A., y Infeld, L. (1938). The evolution of physics. Simon & Schuster.
- Ellerton, N. F. (1986). Children's made up mathematics problems: a new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 261–271. <https://doi.org/10.1007/BF00305073>
- Ellerton, N. F., Singer, F. M., y Cai, J. (2015). Problem Posing in Mathematics: Reflecting on the Past, Energizing the Present, and Foreshadowing the Future. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 547–556). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_26
- English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 183–217. <https://doi.org/10.1023/A:1002963618035>
- English, L. D. (1998). Children's Problem Posing within Formal and Informal Contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83–106. <http://www.jstor.org/stable/749719>
- English, L. D., y Watson, J.M. (2015). Statistical Literacy in the Elementary School: Opportunities for Problem Posing. En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 241–256). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_11

- Espinoza, J. (2018). Caracterización de estudiantes con talento en matemática mediante tareas de invención de problemas [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/10481/54709>
- Espinoza, J., Lupiáñez J. L., y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en Educación Matemática. *Revista digital Matemática, Educación e Internet* 14(2), 1–12. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i2.1664>
- Feyerabend, P. K. (2007). *Tratado contra el método: esquema de una teoría anarquista del conocimiento*. Tecnos
- Feynman, R. P. (1990). *¿Qué te importa lo que piensen los demás?*. Alianza Editorial.
- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa* (2ª ed.). Morata.
- Font, V. (2008). Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. En C. Gaita (Ed.), *Actas del III Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 21–62). Pontificia Universidad Católica del Perú
- Fosse, T., Lange, T., y Meaney, T. (2020). Kindergarten Teachers' Stories About Young Children's Problem Posing and Problem Solving. En Carlsen, M., Erfjord, I., Hundeland, P.S. (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 351–368). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_21
- Fourez, G, Englebert-Lecompte, V., y Mathy, P. (1997). *Saber sobre nuestros saberes*. Ediciones Colihue
- Fourez, G. (2008). *Cómo se elabora el conocimiento*. Narcea
- Fourez, G. (2010). *La construcción del conocimiento científico* (4ª ed.). Narcea
- Freire, P., y Faundez, A. (2013). *Por una pedagogía de la pregunta: crítica a una educación basada en respuestas a preguntas inexistentes* (5ª ed.). Buenos Aires: Siglo XXI
- Frederiksen, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. *Review of Educational Research*, 54, 363–407.
- García-González, E. (2016). *Análisis de la presencia de los principios de sostenibilidad en propuestas metodológicas universitarias. Estudio de propuestas concretas en la Universidad de Cádiz*. [Tesis doctoral, Universidad de Cádiz, España].
- Getzels, J.W., y Jackson, P.W. (1962). *Creativity and intelligence: exploration with gifted students*. Wiley
- Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En B. D'Amore y M. I. Fandiño-Pinilla (Eds.), *Congreso Internacional*

- Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 249–269). Universidad de la Sabana.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada]. <http://hdl.handle.net/1992/40549>
- Greet, B., y McCann, M. (1991). Children's word problems matching multiplication and division calculations. En F. Furinghetti (Ed.) *Proceedings of the fifteenth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 80–87). Assisi, Italy
- Grbich, C. (2013). *Qualitative data analysis: An introduction*. Sage.
- Hadamard, J. W. (1945). *Essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press.
- Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519–524. <https://doi.org/10.2307/2321415>
- Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics*. John Murray.
- Haylock, D.W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 59–74. <https://doi.org/10.1007/BF00367914>
- Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (1), 5–22. Recuperado a partir de <https://aiem.es/article/view/3830>
- Hiebert, J., y Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–404). Information Age.
- Jastrzębowska, K. (2023). What is the area of a pig? Problem posing and problem solving in early childhood education. *Issues in Early Education*, 57(2), 114–132. <https://doi.org/10.26881/pwe.2023.57.09>
- Johnson, H.L., Ohtani, M. (2025). *Advances in Task Design in Mathematics Education*. ZDM Mathematics Education, (Advance online publication). <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01690-3>
- Julius, R., Abd Halim, M. S., Abdul Hadi, N., Alias, A. N., Mohd Khalid, M. H., Mahfodz, Z., y Ramli, F. F. (2021). Bibliometric Analysis of Research in Mathematics Education using Scopus Database. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(12), em2040. <https://doi.org/10.29333/ejmste/11329>

- Kalmpourtzis, G. (2019). Connecting game design with problem posing skills in early childhood. *British Journal of Educational Technology*, 50(2), 846–860. <https://doi.org/10.1111/bjet.12607>
- Karasova, L., y Nehyba, J. (2023). Teacher Responses to Student Behavior: A Systematic Review of Research. *Frontiers in Education*, 8, 1156530. <https://doi.org/10.3389/educ.2023.1156530>
- Kennedy, D. (2005). Editorial Science, 310(5749), 787. <https://doi.org/10.1126/science.310.5749.787b>
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Eds.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–147). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kinda, S. (2013). Generating Scenarios of Division as Sharing and Grouping: A Study of Japanese Elementary and University Students. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(3), 190–200. <https://doi.org/10.1080/10986065.2013.794256>
- Klamkin, M. S. (1968). On the teaching of mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1–2), 126–160. <https://doi.org/10.1007/BF00426240>
- Klinshtern, M., Koichu, B., y Berman, A. (2015). What do high school teachers mean by saying “I pose my own problems”? En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.) *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 449–467). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_22
- Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. *International Journal of Educational Research*, 102, 101428. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.001>
- Koichu, B., y Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 71–86. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9431-9>
- Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., y Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 149–161. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.002>
- Kotsopoulos, D., y Cordy, M. (2009). Investigating imagination as a cognitive space for learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 70, 259–274. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9154-0>

- Krawitz, J., Hartmann, L., y Schukajlow, S. (2024). Do task variables of self-generated problems influence interest? Authenticity, openness, complexity, and students' interest in solving self-generated modelling problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101129. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101129>
- Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to its Methodology*. Sage.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Universidad de Chicago Press.
- Kuhn, T. S. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas* (2.^a ed., A. Capdevila, Trad.). Fondo de Cultura Económica.
- Latorre, A., del Rincón, D., y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa* (1^o edición). Hurtado ediciones.
- Latour, B. (1992). *Ciencia en acción: Cómo seguir a los científicos e ingenieros a través de la sociedad*. Editorial Labor.
- Lavy, I., y Bershadsky, I. (2003). Problem posing via “what if not?” strategy in solid geometry — a case study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22 (4), 369–387. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.007>
- Lavy, I., y Shriki, A. (2010). Engaging in problema posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29 (1), 11–24. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.12.002>
- Leavy, A., y Hourigan, M. (2024). Attending to task variables when engaging in group problem posing for elementary level mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101128. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101128>
- Lee, C. K. (2010). An overview of language learning strategies. *Annual Review of Education, Communication and Language Sciences*, 7, 132–152. Recuperado a partir de: https://research.ncl.ac.uk/media/sites/researchwebsites/arecls/lee_vol7.pdf
- Lee, SY. (2021). Research Status of Mathematical Problem Posing in Mathematics Education Journals. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(8), 1677–1693. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10128-z>
- Lee, Y., Capraro, R. y Capraro, M. (2018). Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13. <https://doi.org/10.12973/iejme/2698>

- Leiß, D., y Wiegand, B. (2005). A classification of teacher interventions in mathematics teaching. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 37(3), 240–245. <https://doi.org/10.1007/s11858-005-0015-3>
- Leikin, R., y Elgrably, H. (2019). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, 101424. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.002>
- Lerman, S. (2010). Theories of mathematics education: Is plurality a problem? En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education* (pp. 99-109). Springer.
- Lester, F. y Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117–135). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8
- Leuders, T. (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, y H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 435–460). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_16
- Leung, S.S. (1993). *The relation of mathematical knowledge and creative thinking to the mathematical problem posing of prospective Elementary school teachers on tasks differing in numerical information content* [Unpublished doctoral dissertation, University of Pittsburgh].
- Leung, S. S. (1994). On analyzing problem-posing processes: A study of prospective elementary teachers differing in mathematics knowledge. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. X, pp. 168–175). PME
- Leung, Sk. S. (1997). On the role of creative thinking in problem posing. *ZDM Mathematics Education*, 29(3), 81–85. <https://doi.org/10.1007/s11858-997-0004-9>
- Leung, Sk. S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 103–116 <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9436-4>
- Levine, P. A. (2013). *Sanar el trauma*. Neo Person.
- Li, X., Song, N., Hwang, S., y Cai, J. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: teachers' beliefs and performance on problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 105(3), 325–347. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09981-0>

- Li, X., Sun, X. y Cai, J. (2022). Integrating problem posing into the mathematics classroom: current advances and future directions of research. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 48. <https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2022.101213>
- Liljedahl, P., y Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art, *ZDM Mathematics Education*, 53(4), 723–735. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Lincoln, Y.S. y Guba, E. (1985). *Naturalistic Inquiry*. SAGE.
- Lowrie, T. (1999). Posing problems and solving problems. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 4(4), 28–31.
- Lowrie, T. (2002). Young children posing problems: The influence of teacher invention on the type of problems children pose. *Mathematics Education Research Journal*, 14 (2), 87–98. <https://doi.org/10.1007/BF03217355>
- Malaspina, U. (2013a). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. En Sociedad de Educación Matemática Uruguay (Eds.), *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM)* (pp. 129–140). Sociedad de Educación Matemática Uruguay
- Malaspina, U. (2013b). Creación de problemas. Un caso con probabilidades. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*, 9 (33), pp. 119–124.
- Malaspina, U., y Vallejo, E. (2014). Creación de problemas en la docencia e investigación. En U. Malaspina (Eds.), *Reflexiones y propuestas en Educación Matemática* (pp. 7–54). Moshera S.R.L.
- Malaspina, U. (2015). Los niños crean problemas de matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION*, 11 (42), 235–241
- Malaspina, U. (2016). Creación de Problemas. Avances y Desafíos en la Educación Matemática. *REMATEC*, 11(21), 79–90.
- Malaspina, U., y Torres, C. (2019). Teaching of discontinuous functions of one or two variables: A didactic experience using problem posing and levels of cognitive demand. In Jankvist, U. T., van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2578–2586). CERME
- Malaspina, U. (2021). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(1), 1–17. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2021.1-17>

- Mamona-Downs, J. (1993). On analyzing problem posing. En I. Hirabayashi, N. Nohada, K. Shigematsu y F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 41–47). PME.
- Martín-Díaz, J. P. (2022). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en contextos de formulación de problemas* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva, España].
- Martín-Díaz, J.P., Carmona-Medeiro, E., Montes, M. y Climent, N. (En prensa). Teaching mathematics through problem posing in early childhood: Exploring the relationship between a task and the problems posed by students. En J. Cai y R. Leikin (Eds.), *Research in Mathematical Problem Posing: New Advances and Directions*. Springer.
- Martín-Díaz, J. P., Montes, M., Codes, M. y Carrillo, J. (2020). Characterisers of Teaching in a Mathematics Problem Posing Lesson in Preschool Education. *Sustainability*, 12(15), 6148. <https://doi.org/10.3390/su12156148>
- Martín-Díaz, J. P., y Montes, M. (2022). Conocimiento especializado para la enseñanza a través de la formulación de problemas en educación infantil, *Uniciencia*, 36(1), 1–19. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.37>
- Maslow, A. H. (1979). *La psicología de la ciencia*. EDAMEX
- Maslow A. H. (1991). *Motivación y personalidad* (3ª ed.). Ediciones Díaz de Santos, S.A.
- Maslow A. H. (2008). *La personalidad creadora*. Barcelona: Kairos.
- Maslow, A. H. (2009). *El hombre autorrealizado* (18a ed.). Kairós.
- Mason, J. (2016). When Is a Problem...? “When” Is Actually the Problem! En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advance and new perspectives* (pp. 263–286). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_16
- Mason, J., y Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks* (2nd ed.). Tarquin Publications.
- Mason J. (2016a). When Is a Problem...? “When” Is Actually the Problem! En Felmer P., Pehkonen E., Kilpatrick J. (Eds.). *Posing and Solving Mathematical Problems. Research in Mathematics Education* (pp. 263-286). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_16
- Mason, J. (2016b). Part 1 Reaction: Problem Posing and Solving Today. En Felmer, P., Pehkonen, E., Kilpatrick, J. (Eds) *Posing and Solving Mathematical Problems. Research in Mathematics Education* (pp. 109–113). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_7

- Maxwell, J. A. (2013). *Qualitative research design: An interactive approach* (3rd ed.). SAGE Publications.
- McCarthy, P., Sithole, A., McCarthy, P., Cho, J. P., y Gyan, E. (2016). Teacher questioning strategies in mathematical classroom discourse: A case study of two grade eight teachers in Tennessee, USA. *Journal of Education and Practice*, 7(21), 80–89. Recuperado a partir de: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1109439.pdf>
- Mercer, N. (2004). Sociocultural discourse analysis: Analysing classroom talk as a social mode of thinking. *Journal of Applied Linguistics*, 1(2), 137–168. <https://doi.org/10.1558/japl.2004.1.2.137>
- Mertens, D.M. (2005). *Research and evaluation in Education and Psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative and mixed methods*. Thousand Oaks: Sage.
- Montes, M., Chico, J., Martín-Díaz, J.P., y Badillo, E. (2024). Mathematics teachers' specialized knowledge mobilized through problem transformation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101132. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101132>
- Muñoz-Catalán, M.C. (2009). El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel [Tesis Doctoral, Universidad de Huelva]. <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2949>.
- Muñoz-Catalán, M. C. (2021). Reflexiones para una fundamentación del estudio de caso como diseño metodológico en Educación Matemática. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 65–80). SEIEM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*.
- National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales.
- Newell, A., y Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
- Ngh, N., Ismail, Z., Tasir, Z., y Mohamad Said, M. N. H. (2016). Students' ability in free, semi-structured and structured problem posing situations. *Advanced Science Letters*, 22(12), 4205–4208. <https://doi.org/10.1166/asl.2016.8106>

- Nivens, R. A., y Otten, S. (2017). Assessing journal quality in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(4), 348–368. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.48.4.0348>
- Noda, A., Hernández, J., y Socas, M. M. (1999). Estudio del comportamiento de alumnos de Magisterio en la resolución de problemas mal definidos. *El Guiniguada*.
- Noda, M. A. (2000). *Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación* [Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna]. <http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/12339>
- Oreskes, N. (2019). Why Trust Science? Perspectives from the History and Philosophy of Science. En S. Macedo (Ed.), *Why Trust Science?* (pp. 15–68). Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9780691189932-003>
- Orden de 30 de mayo de 2023, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Infantil en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, núm. 104 (2023).
- Palmér, H., y van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: what does posing a similar task imply to students? *ZDM Mathematics Education*, 52(4), 743–752. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01129-x>
- Palmér, H., y van Bommel, J. (2023). Young Students Exploring Measurement Through Problem Solving and Problem Posing, *The Mathematics Educator*, 31(1), 30–54. <https://doi.org/10.63301/tme.v31i1.2477>
- Papadopoulos, I., Patsiala, N., Baumanns, L, y Rott, B. (2022). Multiple Approaches to Problem Posing: Theoretical Considerations Regarding its Definition, Conceptualisation, and Implementation. *CEPS Journal*, 12(1), 13–34. <https://doi.org/10.26529/cepsj.878>
- Páramo, P., y Otálvaro, G. (2006). Investigación Alternativa: Por una distinción entre posturas epistemológicas y no entre métodos. Cinta De Moebio. *Revista De Epistemología De Ciencias Sociales*, (25). Recuperado a partir de <https://cintademoebio.uchile.cl/index.php/CDM/article/view/25953>
- Pelczer, I., Voica, C., y Gamboa, F. (2008). Problem posing strategies of first year mathematics students. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, y A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 97–104). PME.
- Peng, A., Li, M., Lin, L. Cao, L., y Cai, J. (2022). Problem Posing and Its Relationship with Teaching Experience of Elementary School Mathematics Teachers from Ethnic

- Minority Area in Southwest China, *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(2). <https://doi.org/10.29333/ejmste/11534>
- Poincaré, H. (1913). *The foundations of science: science and hypothesis, the value of science, science and method*. The Science Press. Recuperado de: <https://www.gutenberg.org/files/39713/39713-h/39713-h.htm>
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.
- Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. In J. Giménez, L. Santos, y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Graó.
- Popper, K. R., y Eccles, J. A. (1977). *The self and its brain: An argument for interactionism*. Springer.
- Possamai, J.P. y Allevato, N.S.G. (2024). Teaching mathematics through problem posing: Elements of the task. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101133. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101133>
- Possamai, J. P., Allevato, N. S. G., y Strelow, S. B. (2023). Proposição de problemas nos anos iniciais: reflexões sobre elementos disparadores e prompt. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 12(27), 139–157. <https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.27.139-157>
- Ran, H., Cai, J., Muirhead, F., y Hwang, S. (2025). An analysis of unexpected responses in middle school students' mathematical problem posing from the perspective of problem-posing processes. *Educational Studies in Mathematics*, (Advance online publication). <https://doi.org/10.1007/s10649-025-10399-9>
- Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil.
- Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.
- Real Decreto 217/2022, de 9 de marzo, que establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.
- Reitman, W.R. (1964). Heuristic decision procedures, open constraints, and the structure of ill-defined problems. En M.W. Shelley y G.L. Bryan (Eds.), *Human Judgments and Optimality* (pp. 282–315). Wiley.
- Reitman, W. R. (1965). *Cognition and Thought: an Information-Processing Approach*. Wiley.

- Resnick, L.B. (1987). *Education and Learning to Think*. The National Academies Press.
<https://doi.org/10.17226/1032>
- Resnick, L. B., y Ford, W. W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós.
- Ritchie, J., Ormston, R., McNoughton, N., y Lewis, J. (2013). *Qualitative research practice: A guide for social science students and researchers*. Sage Publications.
- Rosli, R., Capraro, M. M., Goldsby, D., Gonzalez, E. G., Onwuegbuzie, A. J., y Capraro, R. M. (2015). Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing. En F. M. Singer, N. Ellerton, y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education* (pp. 333–354). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_16.
- Rott, B. (2014). Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern—Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35 (2), 251–282. <https://doi.org/10.1007/s13138-014-0069-2>
- Rowland, T., y Zazkis, R. (2013). Contingency in the Mathematics Classroom: Opportunities taken and opportunities missed. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 137–153.
<https://doi.org/10.1080/14926156.2013.784825>
- Ruiz-Higueras, M. L. (2005). La actividad lógica en la escuela infantil. En M. C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 101-140). Pearson Prentice Hall
- Ruthven, K. (2020). Problematising learning to teach through mathematical problem posing. *International Journal of Educational Research*, 102, 101455.
<https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.07.004>
- Santos, L. (2002). A investigação e os seus implícitos: Contributos para uma discussão. En J. Murillo, P. Arnal, R. Escolao, J. Gairín y L. Blanco (Eds), *Investigación en Educación matemática VI* (pp. 157–170). SEIEM.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving* (1st ed.). Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense – making in mathematics. En D. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). MacMillan.
- Sheets, C., y Cifarelli, V. (2009). Problem posing and problem solving: A dynamic connection. *School Science and Mathematics*, 109(5), 245–247. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.tb18089.x>

- Shukkwun, S. L. (1993). Mathematical problem posing: The influence of task formats, mathematics knowledge, and creative thinking. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, y F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 33–40). PME.
- Silber, S., y Cai, J. (2016). Pre-service teachers' free and structured mathematical problem posing, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(2), 163–184. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1232843>
- Singer, F. M., Ellerton, N., y Cai, J. (2013). *Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions*. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 1–7. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2>
- Singer, F. M., Ellerton, N., y Cai, J. (2015). *Mathematical problem posing: From research to effective practice*. Springer.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.
- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 29(3), 75–80. <https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x>
- Silver, E. A., y Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521–539. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.27.5.0521>
- Silver, E.A., y Mamona, J. (1989). Problem posing by middle school teachers. In C.A. Maher, G.A. Goldin, y R.B. Davis (Eds.) *Proceedings of the eleventh annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 263–269). New Brunswick, NJ
- Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S., y Kenney, P. (1996). Posing mathematical problem: an exploratory study. *Journal for research in mathematics education*, 27(3), 293–309. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.27.3.0293>
- Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157–162. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3>
- Simon, H. A. (1973). The structure of ill structured problems. *Artificial Intelligence*, 4, 181–201.
- Simon, M. A. (1993). Prospective Elementary Teachers' Knowledge of Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 233–254. <https://doi.org/10.2307/749346>

- Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Moratá.
- Singer, F. M., Ellerton, N., y Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 1–7. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2>
- Singer, F. M., Ellerton, N., Cai, J., y Leung, E. C. K. (2011). Problem posing in mathematics learning and teaching: a research agenda. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 137–166). PME.
- Singer, F.M., y Voica, C. (2015). Is Problem Posing a Tool for Identifying and Developing Mathematical Creativity? En F.M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 141–176). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_7
- Schön, D. A. (1979). Generative metaphor: A perspective on problem-setting in social policy. En A. Ortony (Ed.), *Metaphor and thought* (pp. 254–283). Cambridge University Press.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 13 (14), 66–91.
- Smith, L. B., Yu, C., y Pereira, A. F. (2011). Not your mother's view: The dynamics of toddler visual experience. *Developmental Science*, 14(1), 9–17. <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2009.00947.x>
- Snape D., y Spencer L. (2003). The foundations of qualitative research. En Ritchie J., Lewis J. (Eds.), *Research practice: A guide for social science students and researchers* (pp. 1–23). Sage.
- Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.
- Stake, R. (2000). Case Studies. En Denzin, N.K. y Lincoln, Y. (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 435–454). Thousand Oaks: Sage Publications.
- Stake, R. (2020). *Investigación con estudios de casos*. Morata.
- Stein, M. K., Grover, B. W., y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33 (2), 455–488. <https://doi.org/10.3102/00028312033002455>
- Stoyanova E., y Ellerton N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. En P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia.

- Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective* (pp. 164–185). MASTEC.
- Stoyanova, E. (2003). Extending students' understanding of mathematics via problem posing. *The Australian Mathematics Teacher*, 59(2), 32–40.
- Sullivan, P., Knott, L., y Yang, Y. (2015). The Relationships Between Task Design, Anticipated Pedagogies, and Student Learning. En A. Watson, y M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 83–104). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_13
- Sweller, J., Mawcr, R.F. y Ward, M.R. (1983). Development of expertise in mathematical problem solving. *Journal of Experimental Psychology*, 112(4), 639–661. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.112.4.639>
- Tatsis, K., y Koleza, E. (2008). Social and socio-mathematical norms in collaborative problem-solving, *European Journal of Teacher Education*, 31(1), 89–100. <https://doi.org/10.1080/02619760701845057>
- Tichá, M., y Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 133–143. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9455-1>
- Torrance, E. P. (1966). *Torrance tests of creative thinking: norms technical manual research edition*. Personnel Pres. Inc.
- Tsubota, E. (1987). *On children's problem posing (grade 1 to 3)*. Japan Society of Mathematics Education.
- van Bommel, J., y Palmér, H. (2021). Young students' views on problem solving versus problem posing. *Journal of Childhood, Education & Society*, 2(1), 1–13. <https://doi.org/10.37291/2717638X.20212165>
- van Bommel, J., Palmér, H., y Ebbelind, A. (2024). Division i förskoleklassen genom problemlösning och problemformulering. *Forskning om undervisning och lärande*, 12(2), 46–67. <https://doi.org/10.61998/forskul.v12i2.23893>
- Van Harpen, X. Y., y Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 117–132. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9456-0>
- Van Harpen, X., y Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA.

- Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 201–221. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9419-5>
- Vecino, F. (2005). Desarrollo del pensamiento simbólico en el niño. En M. C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 63-99). Pearson Prentice Hall
- Voica, C., y Singer, F. M. (2012). Creative contexts as ways to strengthen mathematics learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 33, 538–542. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.01.179>
- Voica, C., Pelczer, I., Singer, F. M., y Cullen, C. (2013). What do high school mathematics teachers mean by saying “i pose my own problems”? En Lindmeier, A. M. y Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, No. 1, pp. 185–192). PME.
- Voica, C., y Singer, F. M. (2013). Problem modification as a tool for detecting cognitive flexibility in school children. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 45(2), 267–279. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0492-8>
- Vygotsky, L. S. (1978). Interaction between learning and development. En M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, y E. Souberman (Eds.), *Mind in Society: Development of Higher Psychological Processes* (pp. 79–91). Harvard University Press.
- Xu, B., Cai, J., Liu, Q., y Hwang, S. (2020). Teachers’ predictions of students’ mathematical thinking related to problem posing. *International Journal of Educational Research*, 102, 101427. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.005>
- Yamamoto, S., Shibuya, M., Matsuzaki, A., y Sugiyama, Y. (2012). A case study of learning by problem-posing in introductory phase of arithmetic word problems. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 7(2), 21–40. <https://doi.org/10.58459/icce.2012.542>
- Yao, Y., Hwang, S., y Cai, J. (2021). Preservice teachers’ mathematical understanding exhibited in problem posing and problem solving. *ZDM Mathematics Education*, 53, 937–949. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01277-8>
- Yin, R. K. (2009). *Case study research. Design and methods* (4.^a ed.). SAGE Publications.
- Yuan, X., y Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students’ creativity and mathematical problem-posing abilities. En B. Sriraman y K. H. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (pp. 5–28). Sense Publishers.

- Whitin, P. (2004). Promoting problem-posing explorations. *Teaching Children Mathematics*, 11(4), 180–186.
- Wickelgren, W. A. (1974). *How to solve problems*. W. H. Freeman; Company.
- Zhang, H. y Cai, J. (2021). Teaching mathematics through problem posing: insights from an analysis of teaching cases. *ZDM Mathematics Education*, 53(4), 961–973. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01260-3>
- Zhang, L., Cai, J., Song, N., Zhang, H., Chen, T., Zhang, Z., y Guo, F. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: the impact of task format and its relationship to problem solving. *ZDM-Mathematics Education*, 54(3), 497–512. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01324-4>

ANEXOS

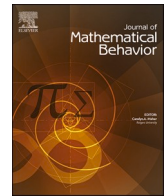
Anexo 1. Artículo 1: Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education

Anexo 2. Artículo 2: Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en un aula de educación infantil

Anexo 3. Artículo 3: Students' difficulties with problem posing in early childhood education

Anexo 1. Artículo 1

Carmona Medeiro, E., Martín-Díaz, J.P., y Climent, N. (2024). Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education. *Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101131. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101131>



Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education

Enrique Carmona-Medeiro^a, Juan Pedro Martín-Díaz^{b,*}, Nuria Climent^b

^a Department of Didactics, Faculty of Education, Area of Didactic of Mathematic, University of Cádiz, Spain

^b Department of Integrated Didactics, COIDESO, University of Huelva, Huelva, Spain

ARTICLE INFO

Keywords:

Problem posing
Task design
Early childhood education
Teaching
Case study

ABSTRACT

This research focused on understanding the variables inherent in the design and implementation of a mathematical problem-posing task. We developed a single case study of a problem-posing lesson by an Early Childhood Education teacher in a classroom with 4- to 5-year-old children who were unfamiliar with such activities. The results of this study show the potential of considering five variables serving as critical points that pose dilemmas linked to the design and implementation of problem-posing tasks. We found that the task changed from its original design during implementation, implying that the choices the teacher made about the variables were not static and were strongly linked to the purpose of the problem-posing task as well as to the contextual characteristics of the early childhood classroom. This study provides a potentially useful framework for analyzing the design and implementation of problem-posing tasks as a dynamic process.

1. Introduction

Despite being foregrounded as a fundamental tool for mathematics education in classic works (Freudenthal, 1973), problem posing has only relatively recently attracted the attention of researchers (Cai & Hwang, 2020; Silver, 1994). This attention has been seen across educational stages, including primary (English, 1997), secondary (Koichu, 2020), and graduate (Rosli et al., 2015) levels, but to date little has been done in the sphere of early childhood education (Palmér & van Bommel, 2020).

Early childhood pupils tend to have a more open outlook, are attentive to detail, and are often more sensitive to context than older children (Kwon & Capraro, 2021). Hence, by incorporating problem posing at this stage, teachers can help to establish an early association of mathematics with real situations (Quintero, 2004). At the same time, problems posed by primary pupils can be more complex than teachers expect (as in Xu et al., 2019), suggesting that the approach could be adopted at the early childhood stage.

Because incorporating problem posing is challenging for teachers (Barlow & Cates, 2006), additional research is necessary to better understand the obstacles teachers face when designing and managing problem-posing tasks (Harel et al., 2006). The effective implementation of a problem-posing task requires the effective involvement of the pupils, and the development of both problem-posing abilities and positive attitudes towards problem posing (Cai et al., 2022). In this paper, we consider a mathematical task to be any kind of structured environment (Watson et al., 2013) which the students are invited to explore with the purpose of focusing their attention on a specific idea or mathematical process. Further, we consider that tasks, in both their pre-active and active

* Corresponding author.

E-mail address: juan.martin@ddcc.uhu.es (J.P. Martín-Díaz).

phases (Jackson, 1968), constitute a dynamic process that develops and changes during the lesson.

To explore the life cycle of a task from the teacher's perspective, this study considered variables along the timeline of the design and implementation of a problem-posing task, throughout which tensions—or, as we shall call them, *dilemmas*—are produced. A dilemma can be defined as a critical point at which the teacher is obliged to choose from a range of options (Sullivan et al., 2015).

In this study, we show how an experienced early childhood teacher planned and executed a problem-posing task with pupils who had no previous experience of this kind of activity. We give particular attention to what can be learned from the dilemmas that emerged at both the planning and implementation stages of the task.

Thus, the subject of this paper is the management of a problem-posing mathematics task with a particular focus on the way it develops from its design to its implementation. In doing so, we aim to answer the following research question: What variables should be taken into consideration in the design and implementation of a problem-posing task in early childhood education? With this study, we aim to contribute to the construction of theoretical frameworks for analyzing problem-posing teaching, the scarcity of which has been highlighted (Zhang & Cai, 2021). We also provide examples of teaching through problem posing in early childhood education, which can serve to counteract the lack of familiarity among teachers regarding how to put this approach into practice (Lee et al., 2018). We hope the study is of relevance to teacher education in terms of the implementation of problem posing in early childhood education.

2. Theoretical framework

2.1. Problem posing

There are numerous definitions of problem posing (Baumanns & Rott, 2022). We consider the posing of mathematical problems by pupils themselves either based on a given problem situation or generated by modifying existing problems (Cai & Hwang, 2020; Silver, 1994). Our focus henceforth will be on problems based on a given problem situation. In these cases, posing the problem occurs before attempts to solve it are made, and the aim is in the posing more than in the solution (Silver, 1994).

Cai and Hwang (2023) and Cai et al. (2022) divided problem-posing tasks into two parts: the *problem situation* and the *prompt*. The problem situation provides the context and the data that pupils can employ to create a problem, whereas the prompt provides instructions for guiding the pupils' posed problems, making them aware of what the task expects of them (for example, "pose as many problems as you can"; Fig. 1). According to Cai et al. (2022), the problem situation can be purely mathematical or real. The data provided can be qualitative or quantitative and can include mathematical expressions and diagrams (Cai & Hwang, 2020). In addition, a problem-posing task can be structured or unstructured (Baumanns & Rott, 2020, 2022) according to the level of openness made available to the problem poser.

Following Cai (2022), we use the terms "task" and "problem" in a broad sense. This allows any mathematical question and any mathematical task based on the problem situation to be deemed problem posing, giving rise to the posing of problems along any point of the routine-nonroutine continuum (Baumanns & Rott, 2020). Therefore, we will not differentiate between an exercise (or routine task, where the learner knows what to do to solve it) and a genuine problem (for which the learner has not immediate answer).

2.2. Dilemmas in the planning and execution of a problem-posing task

Sullivan et al. (2015), drawing on Barbosa & de Oliveira (2013) underlined five dilemmas facing the teacher at the planning stage of tasks. Applying these dilemmas to a problem-posing task can provide insights into the configuration of key aspects of problem posing from design to implementation. In what follows, we describe the five dilemmas differentiated by Sullivan et al. (2015) and how we reinterpret them in relation to problem-posing tasks.

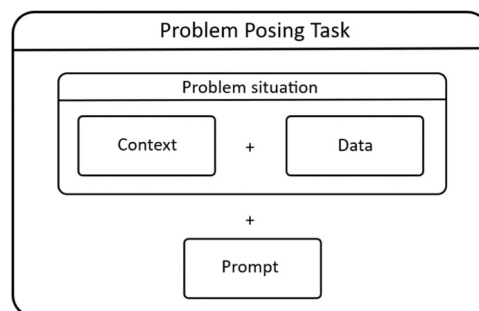


Fig. 1. Schematic representation of problem-posing tasks based on Cai and Hwang (2023).

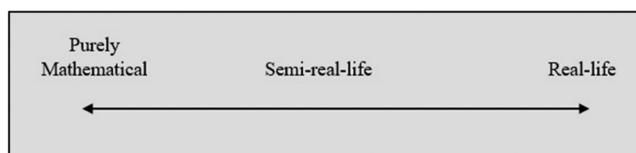


Fig. 2. The context dilemma in the design and implementation of a problem-posing task.

2.3. Dilemma related to the context variable

For Barbosa and de Oliveira (2013), one of the dilemmas a teacher faces in designing a task is whether to situate it in a real or mathematical context. The context of the problem situation in a problem-posing task can be based on real-world referents or, at the other extreme, purely mathematical or abstract referents (Cai & Hwang, 2023). An intermediate alternative is to locate the problem situation in a semi-real-life context (Ponte & Quaresma, 2012), which, unlike the real context, allows the incorporation of imprecisions that are not fully consistent with reality (Fig. 2).

A problem-posing task in a purely mathematical context might request connections to real-life contexts, as in the case of asking pupils to create story problems to go with mathematical expressions (Cai & Hwang, 2023). Nevertheless, the context and data provided in such tasks remain purely mathematical. With respect to the context dilemma, we would say that teachers tend towards the mathematical end of the continuum and set their pupils to pose problems considering given mathematical contexts.

The real-life context in which the problem situation is located can be provided in terms of (a) words or text; (b) pictures, figures, or other graphical material; or (c) a table. Conversely, a purely mathematical context can be provided by (a) a mathematical expression; (b) pictures, figures, or other graphics; (c) a table; or (d) a pattern (Cai and Hwang, 2023).

2.4. Dilemma related to the language variable

Sociocultural perspectives of human learning are founded on the idea that humans construct and comprehend knowledge in a social and cultural context through interactions promoting communication, discussion, and negotiation (Vygotsky et al., 1978). Language is placed at the heart of learning (Lee, 2010), and communication, thought, and learning are interrelated processes shaped by culture (Mercer, 2004, p. 138). The dilemma for the teacher in planning a task arises from the need to consider, on the one hand, that an essential part of learning is mathematical precision and, on the other hand, that there is a need for language to be accessible for the pupils if it is to promote learning (Sullivan et al., 2015).

In terms of a task, the language includes the language promoted (i.e. the one the teacher ask for his or her students) as well as the language used by the teacher in setting and managing the task. The teacher can use and promote precision and formality in terms of mathematical language when they use and promote a linguistic register that prizes mathematical rigor above student comprehension. Conversely, using and promoting a conversational or colloquial register can be recognized in the teacher's use of terms that are accessible to their pupils. We can conceptualize these registers as comprising a continuum with invariable modes at the extremes, one involving a high and the other a low degree of mathematical precision (Fig. 3):

2.5. Dilemma related to the structure variable

As with language above, the structure of a task—the degree of liberty it confers—can be placed on a continuum from closed to open ended (Barbosa & de Oliveira, 2013). In this respect, Stoyanova and Ellerton (1996) identified three types of structures in problem-posing tasks: *free* when pupils pose problems based on an open mathematical situation (Silber & Cai, 2016) with no restrictions placed on how they go about this activity (Baumanns & Rott, 2020); *semi-structured* when the task provides more detailed information than free tasks and requires the posers to create problems using knowledge, skills, concepts, and mathematical relationships that have been previously learned (Baumanns & Rott, 2022); and *structured* when the task requires the new problems to be based on a previously solved problem. Considering the difficulty in distinguishing between free and semi-structured problem-posing tasks, we will adopt Baumanns & Rott's (2020) adaptation in which free and semi-structured are located at the end of a continuum running from open-ended (unstructured) to more structured tasks as the restrictions increase (Fig. 4).

Here, the dilemma in determining the structure of the task lies in the trade-off between taking account of the pupils' developmental stage and the learning goals. Settling on a free problem-posing task could be fruitful in terms of stimulating pupils' mathematical

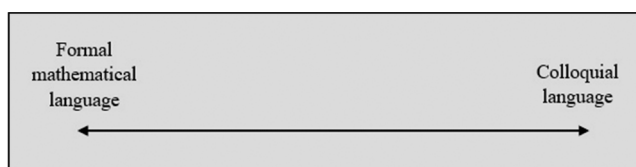


Fig. 3. The language dilemma in the design and implementation of a problem-posing task.

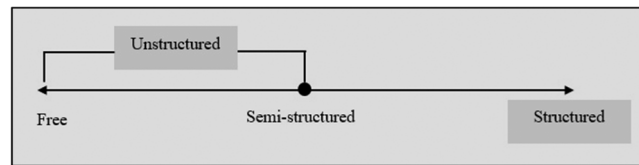


Fig. 4. The structure dilemma in the design and implementation of a problem-posing task.

creativity (Silver, 2013), providing opportunities to make strategic decisions on routes and destinations (Sullivan et al., 2015). At the same time, however, such tasks necessitate a greater cognitive load than do semi-structured and structured tasks (Ngah et al., 2016). By contrast, opting to increase the structure can provide scaffolding to support pupils through each stage of the task (Barbosa & de Oliveira, 2013) and can allow the teacher to focus pupils' attention on the mathematical elements.

The structure variable is heavily dependent on the problem situation and prompt provided by the teacher (Cai & Hwang, 2023). This is because imposing or modifying a problem situation (the context or data) can shift the situation towards the structured end of the continuum (without it necessarily becoming fully structured); the prompt can likewise introduce a greater degree of structuring.

2.6. Dilemma related to the content focus variable

Barbosa and de Oliveira (2013) noted another dilemma in the choice of content focused on by the task, which is connected to the cognitive demand it involves. The dilemma for the teacher is judging the appropriate cognitive load, which can range from memorization at one extreme to doing mathematics at the other. Doing mathematics requires complex and non-algorithmic thinking, exploration and understanding of the nature of mathematical concepts, processes or relationships (Stein & Smith, 1998).

Problem-posing tasks have high cognitive demands, requiring creativity and a proactive attitude towards mathematics (Chico et al., 2022; Silver, 1994). In terms of the choice of content on which the problem-posing task focuses, problem posing can be oriented as a means, where the objective is to mobilize mathematical content linked to any area of mathematical knowledge, for example, to use a problem posing task to learn a determinate mathematical content such as when students are asked to posed a problem to show the application of $3/4 \div 1/2$, or as an goal in itself, where the objective focuses on the posing process and on the notion and nature of a mathematical problem, for example, to learn the different parts that a problem statement have (English, 1997). Working on problem posing as both a means and goal implies that the objective has a twin focus, that of mobilizing knowledge on the problem posing process and other mathematical knowledge. Hence, when a teacher is planning a problem-posing task, their dilemma can be understood to consist of deciding which goal to prioritize (Fig. 5).

2.7. Dilemma related to the levels of interaction variable

The levels of interaction concerning a task refer to the interactions between the teacher and pupils as the latter seek to find the solution (Sullivan et al., 2015). In problem-posing tasks, interaction is largely determined by how the pupils are organized (Cai, 2022)

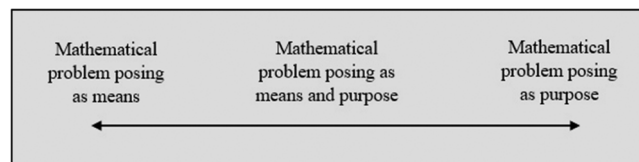


Fig. 5. The content focus dilemma in the design and implementation of a problem-posing task.

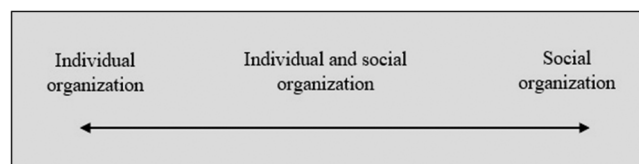


Fig. 6. The dilemma of the levels of interaction in the design and implementation of a problem-posing task.

and by the teacher’s role. The pupils can be organized in different ways to tackle the task (individually, in pairs, in small and large groups), and this can change as they work their way through the task. The teacher’s role in managing the lesson implies different actions (when to intervene, how to intervene, how much to guide the flow of discussion, etc.) that modulate the levels of interaction (Leiß & Wiegand, 2005). Establishing roles can be done, in some cases, via the prompts, which can have a significant influence on the levels of interaction. Hence, for example, the prompts “pose a problem for a classmate to solve” and “pose a difficult problem for the whole class to think about” configure two roles, those of emitter and receiver, whereas another prompt might give all the pupils the same role. The teacher’s dilemma in planning (including implementing) a problem-posing task lies in determining which kind of interactions to prioritize (Fig. 6).

3. Methodology

To explore the teaching of problem posing with early childhood pupils, a case study was carried out based on a single case design (Yin, 2009). The unit of analysis for this study was the planning and carrying out of a problem-posing lesson. The case study approach was suitable for this research because the locus of interest was a learning environment in which the researchers aimed to achieve a detailed account of the teacher’s task management. The specific design was an intrinsic case study (Stake, 1995). The case was of interest in itself due to the uniqueness of using a problem-posing approach at the early childhood stage of education. Allied to this was the expertise of the teacher in question, who had training in the use of problem-posing methodology and was an active participant in a collaborative research group involving study of and reflection on mathematical problem-posing literature.

3.1. Context and participants

The case selected is that of an early childhood teacher, Beatriz for the purposes of this paper, because of the insights she provided into teaching the mathematical content in question (Yin, 2009). At the time of the study, Beatriz, a 39-year-old female, had 15 years’ experience of teaching in the early childhood phase (ages 3–5). Her initial training had been in primary education, although all her teaching experience had been in early childhood education. The lesson observed (described in the following section) was Beatriz’s designated class at the state school where she worked. The class consisted of 20 pupils between 4 and 5 years of age. There were no children with specific needs among her pupils, although two required special attention on account of their behavior and learning difficulties. Beatriz had been their class teacher since they started school. The school was a state-run early childhood and primary school located in a small town of around 13,000 inhabitants in southwest Spain.

3.2. Data collection and analysis

With respect to lesson planning (prior to implementation), we drew on Beatriz’s original handwritten lesson plan along with audio transcripts from three sessions of a Collaborative Research Project (known as the PIC based on its initials in Spanish). These sessions, in which Beatriz and two of the authors participated (in addition to another researcher and six teachers), involved discussion of the task design (Sessions 29/11, 17/01, and 31/01¹). Specifically, Session 29/11 involved discussion of problem posing with early education pupils and the possible ways this could be achieved. In the following session (17/01), Beatriz went through her lesson plan and the group shared their thoughts, whereas in the last session (31/01), the group rehearsed the plan, with Beatriz carrying out her intended lesson and the other participants taking the role of the pupils. There then followed a discussion of the task design based on the run-

Table 1
Summary of variables used for analysing the design and management of the problem posing tasks.

Variables	Types
Context	Purely mathematical (provided by (a) a mathematical expression; (b) pictures, figures, or other graphics; (c) a table; or (d) a pattern). Semi-real-life (provided by (a) words or text; (b) pictures, figures, or other graphical material; or (c) a table) Real-life
Language	Formal mathematical language Colloquial language
Structure	Structured Unstructured
Content focus	Mathematical Problem posing as means Mathematical Problem posing as means and purpose Mathematical Problem posing as purpose
Level of interaction	Individual organization Individual and Social organization Social organization

through.

¹ The sessions took place on the 29th of November and 17th and 31st of January.



Fig. 7. Poster shown to pupils at the start of the problem-posing task (Martín-Díaz et al., 2020).

Beatriz also informed the PIC members that prior to the lesson on which this study is focused, she had carried out some preliminary work with her class on problem posing ([TP 29/11 8–10²]). A videorecording of the lesson (as described below) was also made by one of the members of the PIC (in the capacity of nonparticipating observer) and subsequently transcribed. All data pertaining to the lesson implementation was drawn from this source.

In preparation for the analysis, the authors undertook a careful reading of the dilemmas proposed by Sullivan et al. (2015) (based on Barbosa & de Oliveira, 2013) and discussed how these could be applied to problem-posing tasks. The discussion led to the incorporation of the dilemmas in Sullivan et al. (2015) guided by the theoretical principles of problem posing, as outlined in the theoretical framework and summarised in Table 1. As noted in the theoretical framework, instantiations of the variables should be seen as located along a continuum, rather than as discrete categories, with a view to capturing the development of the task over time.

Once all the information had been collated and the criteria for analyzing the dilemmas had been agreed on, the three authors carefully went over the transcriptions of the PIC meetings and watched the lesson recording with the corresponding transcription. This task served a dual purpose: It familiarized the researchers with the data that had been collected for the research and provided an opportunity for them to identify and interpret the dilemmas, based on Sullivan et al. (2015), that Beatriz encountered in planning and delivering the problem-posing lesson.

Each of the authors then carried out an individual content analysis (Krippendorff, 2004) of the transcriptions, identifying aspects of the complete problem-posing cycle, from planning to execution, linked to the five dilemmas described by Sullivan et al. (2015) and falling within the scope of the theoretical framework of this study. The purpose of this analysis was to identify units of information in which evidence could be identified for Beatriz's position with respect to one of the dilemmas.

The three individual analyses were then jointly discussed by the three authors until a single analysis was agreed on, which became the analysis report. We first analyzed and agreed on the documentation relating to the lesson plan and then repeated the process for the transcription of the videorecording of the actual lesson. Once all information had been analyzed, a new document was written, incorporating results from both the planning and execution stages with respect to each dilemma and noting any possible shifts in these with time. During the joint analysis, it was noted that Beatriz adapted her original problem-posing task during the lesson. In total, five points of variance were identified, which are considered in the data analysis reported in the results section below.

3.3. Description of the lesson

Beatriz settled on an open-ended problem-posing task based on a large poster (Fig. 7).

The task carried out during the problem-posing session lasted around an hour. The lesson followed a whole-class format throughout (with all the pupils sitting in a U shape so they could see the teacher and each other). The lesson evolved as follows (times are approximate):

First part (0–3 min): Beatriz reminds students of the assembly rules and tells them the story of the Fields Medal, which served to introduce and contextualize the mathematical activity they were about to do.

Second part (3–11 min): Beatriz uncovers the poster, letting the pupils see what was to serve as the first prompt for the problem-posing task (“Let’s look for any problems that might be in the poster”), and invites the pupils to name the items they recognize in the poster (“First we have to look very closely at the poster and all the different things here”). The pupils spontaneously name the items that attract their attention. The children begin to identify details in the poster, occasionally prompted by Beatriz. Exchanges such as the

² TP29/11 8–10 indicates that this is the transcription of the 29/11 PIC meeting between lines 8 and 10. (Idem for the 17/01 and 31/01 meetings).

following occur:

31 ^a	P	<i>I can see a firefighter... and a ladder</i>
32	T	<i>Where is the firefighter?</i> [Taking a plastic rod]
33	P	<i>There</i> [Pointing at the poster from their place]
34	T	<i>Not there, where is he?</i>
35	P	[The pupil attempts to develop their reply but is interrupted]
36	T	<i>On the left or on the right? Up or down?</i> [Using the rod to indicate the relative positions on the poster]

^a The transcription records are labelled as follows: the number of each turn in sequential order; the speaker (T for teacher and P for pupil); the transcription of each speaker's utterance; accompanying gestures in square brackets.

42	T	<i>Let's see, Adrián, your turn.</i>
43	P	<i>I can see a traffic sign</i>
44	T	<i>Adrián sees a traffic sign. Where is it?</i>
45	P	<i>Up</i>
46	T	<i>Up. Where? Here?</i> [Pointing to the roof of a house with the rod]
47	P	<i>No, next to the firefighter.</i>
48	T	<i>Next to the firefighter, oh yes, that's right</i> [in a surprised tone]. <i>And what is the traffic sign like? What's it like?</i>

Third part (12–50 min): Beatriz commences the problem-posing task itself:

149	T	<i>Now we're going to look for problems... let's think of some stories we can make up ... and questions we can ask... [...] Let's make up some problems that come from here</i> [pointing to the poster] <i>from what we can see here... OK?</i>
-----	---	--

The pupils who come up with problems raise their hands and say them out loud. They are unable to formulate their problems in one go and require various attempts, supported by numerous interventions on the part of the teacher and their classmates. Each problem is posed collectively. The following excerpts illustrate the problem-posing processes.

155	T	<i>Let's see, who can think of a problem? Come on Luis... Let's all listen to Luis.</i>
156	P	<i>A lady is walking along with a bag</i> [pointing to the relevant part of the poster] <i>... she starts running and she gets hit by a car ...</i>
157	T	<i>But this is a story... you have to tell the story and then ask a question which we have to think about to get the answer ... come on... this woman is going along with a dog</i> [points to the poster with the rod] <i>... and now what happens? The question is which one is it?</i>

The previous problem develops such that the woman wants to find her way home. The pupils pose the question, “Which street does she need to take?” and between them all identify the route.

169	T	<i>You see? It's here</i> [pointing to the starting point on the poster] <i>... and then you have to go round the corner and take this road here, and here</i> [pointing out on the poster the route given by a pupil to the yellow house] <i>... OK?. And if...? Let's see, Lucía, and if...?</i>
-----	---	--

At a later point, Beatriz tries again to elicit problems:

309	T	<i>... And if I say a word ... and you all have to invent a problem for me with the word ... inside</i>
-----	---	---

312	T	<i>Invent a problem, Thiago, using the word 'inside'...</i>
313	P	[Seven seconds go by without an answer]
314	T	<i>Can you think of one?</i>
315	P	<i>It's really difficult</i> [Another pupil calls out]
316	T	<i>Can you think of one?. Or another problem that you can think of... come on... look, notice, for example, that there's a fruit and veg shop here...</i>
317	T	<i>... look closely, for example, here there are some things with a shape... there's a square shape, a circle...</i> [Pointing on the poster to the windows in the house and some traffic signs].
318	P	<i>Rectangle</i> [Another pupils answers]
319	T	<i>...which is in the shape of a rectangle... come on, let's make up a problem with the shapes...</i>

Multiple turns follow in which the pupils pose problems based on situations which for them represent problems, such as the following:

396	P	<i>I've got a problem now.</i>
397	T	<i>You've got a problem now.</i>
398	P	<i>A car goes to the barber's... and a police car is right behind him</i>

Beatriz then tries another strategy to get the pupils to pose problems.

413	T	<i>... I'm going to begin telling a story and you all ask me questions, OK? Otherwise this is going to be tragic, everyone is going to end up being run over by cars, falling out of trees ...</i>
-----	---	--

424	T	<i>Come on, I'm going to start a new problem, come and look... look, this mother wants to buy her son...</i>
425	P	<i>Some fruit</i>
426	T	<i>And what happens, María?</i>
427	P	<i>He wants an Apple, a grape and a pear [Pointing to the greengrocer's on the poster]</i>
428	T	<i>They want an apple, a grape and a pear ... so the question is...</i>
429	P	<i>How many pears, grapes and apples will there be?</i>

At this point in the lesson, Beatriz uses a drawing to take the posing of a problem further.

487	T	<i>So come on, say it again... let's draw it because I haven't understood very well [Taking a small blackboard and placing it next to the poster as she speaks]</i>
-----	---	---

491	P	<i>There's only an apple, a pear, an orange and a grape</i>
492	T	<i>An apple, a pear, an orange [drawing on the board]</i>
493	T	<i>One bunch of grapes or one grape?</i>
494	P	<i>Just one</i>
495	T	<i>One grape...</i>
496	T	<i>And now what? What is the question?</i>
497	P	<i>How many fruits are there?</i>
498	T	<i>How many fruits are there? Very well, how many are there?</i>

516	T	<i>One, two, three and four... it makes four... [Going over the fruit drawn on the board and the operation underneath] You all remember that it's written like this? [pointing to the operation written on the board] An apple, plus a pear, plus an orange, plus a grape makes four [going over the fruit drawn on the board and the operation underneath] (Fig. 8)]</i>
-----	---	---

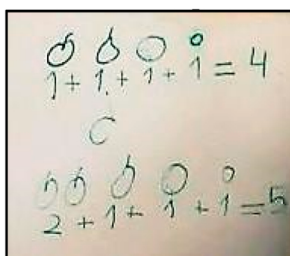


Fig. 8. The teacher's representation of one of the posed problems.

517	P	<i>Two</i>
518	T	<i>Two, no?... and if, for example, there were two apples [Draws another apple on the board] and now a pear, an orange and a grape... now what have we got, how many are there here [Going over the fruit drawn on the board] (Fig. 8)</i>
519	P	<i>Five</i>

With some scaffolding on the part of Beatriz, the contributions on the part of the pupils gradually develop into a coherent story together with an appropriate question. Once most pupils have had a turn at posing a problem, the task is brought to a close.

4. Results

The data was analyzed by pinpointing variations in and developments to Beatriz's original design (which was designated Task 0) in terms of any substantive modification to the problem situation, the prompt, or both. In Task 0, the problem situation was supplied by the poster and the prompt by the instruction to "look for any problems that could be in the poster."

In the first modification to the original task, which we will designate Task 1, Beatriz invites the pupils to pose their own problems

based on a problem she has just set them. In the first instance, this involves identifying and explaining a short journey (“And if...? Let’s see, Lucía. And if...?” Turn 169). In the second instance, towards the end of the lesson, the problem consists of counting items of fruit (“And if, for example, there were two apples and now a pear, an orange and a grape...?” Turn 518). In both instances, the invitation to pose a problem follows directly from a problem that has just been solved, with the teacher eliciting an extension or new condition for the problem in keeping with the what-if-not strategy noted by Brown and Walter (1993). In the latter case, the teacher herself models the formulation of the new conditions.

In the second modification (Task 2), the teacher invites the pupils to pose problems based on a word evoking a mathematical object (“to invent a problem with the word ‘inside’”; Turn 312). In this instance, the problem situation is the whole poster and the locus of the modification is the prompt, which is reformulated to introduce a new condition.

A third modification occurs (Task 3) when Beatriz invites the pupils to pose problems based on a specific item in the poster, in this case the fruit shop (Turn 316). In this instance, the problem situation is still provided by the poster, but only a designated section is relevant to the task whereas the prompt remains to pose a problem.

In the fourth modification of the task (Task 4), the teacher invites the pupils to pose problems based on a mathematical concept (“like a rectangle”; Turns 317, 318, and 319). The problem situation is again provided by the poster, from which context and problem data can be derived. However, the prompt is modified with the addition of a new condition to the problem in the form of the phrase “like a rectangle.”

Finally, in the fifth modification (Task 5), the teacher invites the pupils to pose problems based on a story which she herself begins (Turns 413 and 424). In this instance, the problem situation is supplied by a combination of the unfinished story and the poster (as this provides the source of elements with which the pupils can complete the story). The prompt is to “finish the story to make a story problem.”

Although the original task was adapted and modified to such an extent that it generated five variations, these do not represent the totality of the lesson. Between the points at which she introduced these modifications, Beatriz attempted to direct her pupils’ efforts towards posing problems. Hence, in addition to the problem-posing tasks, it is important to consider below various aspects of the variables that emerged during the lesson. In like fashion, we also consider points of decision-making regarding the lesson plan and task management.

4.1. Real-life or purely mathematical context

The problem situation from which the task started was a poster depicting a stylized real-life scene of a local neighborhood with people going about their daily business (traffic flow, buying and selling, and other professional activities; Fig. 7). The decision to use this problem situation had been made at the planning stage (“The pupils all go to their places at the start of the lesson and a poster is set up”; LP3³). This particular poster was chosen, rather than others that were considered, because it embodied various mathematical elements connected with the current teaching unit (such as larger-smaller, the same-different, inside-outside, first-second-last, problem-solving, addition, and flat shapes [TP17/01 39–43]). Thus, from the start, in terms of this dilemma, Beatriz located the problem-posing task in a semi-real-life context, with both the context and the data provided via a poster (problem posing based on an picture, semi-real-life context). It is interesting to note that in making the choice of picture to use, she considered its potential for drawing out mathematics.

In the lesson itself, Beatriz’s opening gambit for the task is to invite the pupils to pose problems based on the poster (problem posing based on an picture, semi-real-life context; see Turn 149 in the lesson excerpts). Her utterance clearly requests the pupils to pose a story-problem given that she refers to a story and questions (“let’s think of some stories we can make up ... and questions we can ask...”). The reference to the story continues throughout the lesson, situating her turn as the first step in the problem-posing process.

At first, the pupils’ responses diverge from the intended mathematical orientation, as they direct their attention towards identifying accidents (e.g., a car running over a pedestrian⁴—Turn 398). In response to this, Beatriz redirects their attention to new tasks that will

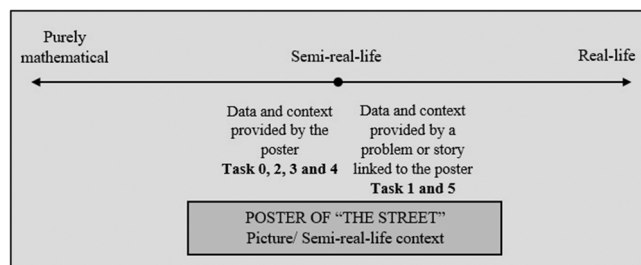


Fig. 9. The context dilemma in the design and implementation of the lesson.

³ LP*i* refers to line *i* of the lesson plan, and LP*i*-*j* to an excerpt from the lesson plan consisting of lines *i* to *j*.

⁴ At this point, the pupils activate their notion of “problem,” which they understand as a difficulty with negative connotations.

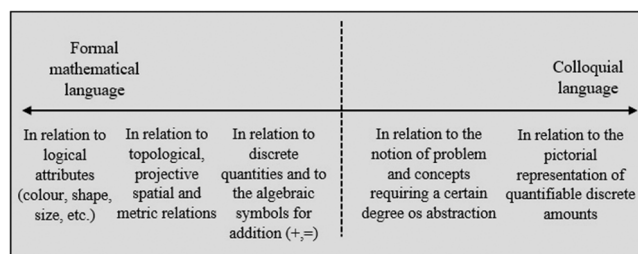


Fig. 10. The language dilemma in the design and implementation of the lesson.

enable the pupils to pose problems.

Nevertheless, in terms of the dichotomy between purely mathematical and real-life contexts, the context is invariable throughout the lesson. This is because the problem situations of all the tasks are provided by the poster. For example, in Task 1 the problem derives from one they have just solved and hence retains the poster as the source of the problem context, whereas in Task 3 the problem requires the pupils to focus on the fruit shop depicted in the poster.

The other variation of the task that we associate with the variable context is found in Task 5, when Beatriz asks the students to continue the story she has started (Turns 413 and 424). In this variation, she models the posing of a story problem, changing the mode of presentation of the problem situation (text instead of picture), although the type of context remains semi-real-life. Fig. 9 summarizes the development of this dilemma over the course of the lesson.

4.2. Formal mathematical or colloquial language

Considering further the task modifications, it can be noted that Beatriz used a colloquial register most of the time. In Task 0, this can be seen clearly when she employs the notion of a problem (Turn 149). She introduces this notion to her pupils using an informal register carefully modulated to be comprehensible to them and approaching the concept through a story and “a question which we have to think about to get the answer” (Turn 157). Likewise, in Task 1, building on the fact that the pupils have posed a problem, she invites them to develop it with a familiar expression (“and if...?”). Again, in Task 3, Beatriz draws on situations familiar to the pupils when she suggests they pose a problem based on the fruit shop depicted in the poster.

By contrast, we can identify dilemmas governing the kind of language used in two adaptations of the task: Task 2 and Task 4. These modulations occur when Beatriz uses slightly more mathematical language to help the pupils focus their problem posing on basic mathematical concepts (using the words “inside” and “rectangle,” which are associated with concepts appropriate to early childhood education).

Although, in general, Beatriz’s classroom voice can be located in the colloquial register, mathematical language can be identified at the points at which Beatriz considers the use of more rigorous language to be compatible with her pupils’ knowledge and stage of development. Hence, in both the language used by the teacher and that required by the task, a demand can be observed for the pupils to identify and communicate the logical attributes of the elements in the poster and their position.

Thus, in the first phase of the lesson when she is encouraging the pupils to identify and recognize items in the poster (objects, people, action), Beatriz repeatedly uses a procedure in which she asks each child who correctly identifies an item for one or more of its logical attributes (e.g., its position and shape in Turn 48). Also, Beatriz uses and encourages mathematical language when talking about relative positions and going from one point to another in the poster, employing topological relations (inside-outside) (Turn 36), projective spatial relations (left-right, above-below) (Turn 46), and metric relations (near-far; Turn 48).

Beatriz also uses mathematical language when she designates discrete quantities using different representative registers (spoken, pictorial, conventional symbols) and additive operations. A significant episode occurs while solving one of the problems posed about quantifying the amount of fruit. Although the pupils use counting as their basic strategy, Beatriz attempts to encourage the use of addition as a strategy to solve the problem, using formal and precise language in both the spoken and written modes. This enables her to introduce the concept of addition and its attendant symbols (+, =), articulating this alongside the strategies used by the pupils (Turn 516). Fig. 10 summarizes the development of this dilemma over the course of the lesson.

Thus, there is evidence of a flexible use of language employed and encouraged by the teacher. The precision and rigor of mathematical language is employed alongside a colloquial and mathematically imprecise language in situations requiring the teacher to attempt to make certain concepts comprehensible to the pupils even though these are still inaccessible.

4.3. Unstructured or structured problem-posing task

The main criterion for determining the structure to give the problem-posing task during the design phase arose in one of the PIC sessions. Here, Beatriz seemed especially concerned not to give her pupils too much information on which to base their problems, fearing that this might overload them and stifle their creativity [TP31/01 637–646].

Given that, in Task 0, Beatriz provides her pupils with the context and specific data for the problems they are to pose via the poster while also providing a free prompt, this original task can be considered an unstructured task. The five adaptations that the task

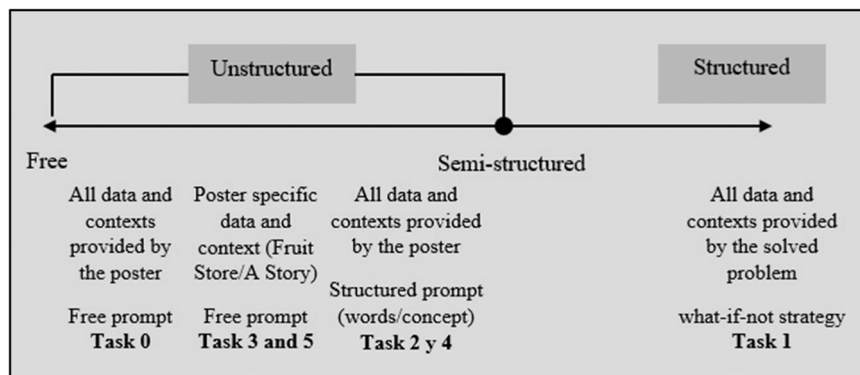


Fig. 11. The structure dilemma in the design and implementation of the lesson.

underwent indicate how the degree of structuring was gradually increased, though it predominantly remained an unstructured problem-posing task.

The task with the greatest degree of structure which can be located on the fringes of a structured task, is Task 1 (Turn 169), in which Beatriz asks the pupils to pose a problem based on one they have just completed. Some of the adaptations the variable structure underwent were the result of introducing new prompts. For example, in Task 2, Beatriz modifies the task prompt, asking the pupils to “invent a problem with the word ‘inside’” (Turn 309). The prompt does not in itself convert the task into a structured situation, but it does constrain the kind of problems that can be posed because they must necessarily incorporate the term. Hence, the degree of structuring of the task increased compared to Task 0. The same occurred when the pupils were invited to pose a problem using the word “rectangle” in Task 4.

Elsewhere, the task structuring increased due to a narrowing of the problem situation. This was the case in Task 3 (Turn 316), in which, although the poster continues to supply the frame of reference, it is the fruit shop which is considered the context and potential source of data. The original free prompt (pose a problem) remains unchanged.

Finally, in Task 5 (Turns 413 and 424), an increased degree of task structuring is achieved by modifying both the problem situation and the prompt: The context was narrowed to a shopping activity, thus constraining the complete poster to only the retail locations (the fruit shop, the clothing store, and the pharmacy). Furthermore, compared to posing a problem, the task is more tightly restricted by the addition of the instruction to start from the beginning of the given story. In this respect, this second prompt (pose a problem by completing the story) is more structured than the first (pose a problem). Fig. 11 summarizes the development of this dilemma.

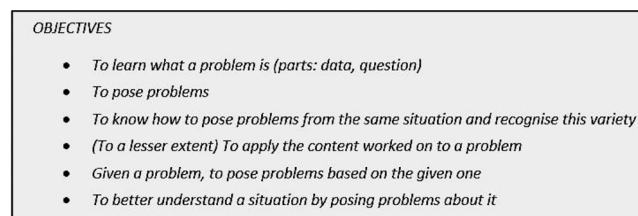


Fig. 12. The teacher's objectives as listed in her lesson plan.

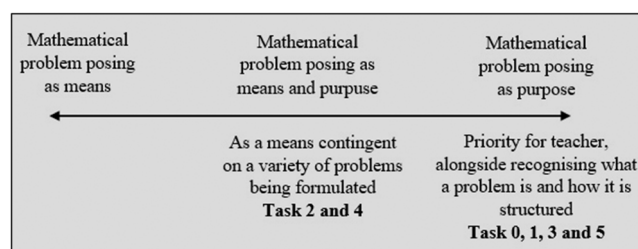


Fig. 13. The content focus dilemma in the design and implementation of the lesson.

4.4. Mathematical problem posing as a means or as a purpose

This dilemma reflects Beatriz's position on whether problem posing should be a purpose in itself or a means through which the pupils can explore other mathematical content. This position can be seen clearly in her lesson plan and in the run-through with the PIC group prior to executing the plan in class. Her lesson plan makes it explicit that she considers problem posing a purpose in itself. Indeed, she gives the plan the title of "Strategies for facilitating problem posing using a complex picture" [LP1].

In both the run-through with the PIC group and the actual lesson itself, it can be seen that Beatriz's emphasis is for the pupils to identify what a problem is and how to pose one, stressing the need to "ask a question" (Turns 149, 157, and 413). After the run-through has been completed, Beatriz makes it clear that her priority is for her pupils to pose a variety of mathematical problems rather than focusing attention on other mathematical content: "What I want is not to teach anything, or even try to ... what I want is a variety of problems" [TP31/01 1143–1144].

The set of objectives listed at the start of the lesson plan ([LP42–48] Fig. 12), reiterates the emphasis on problem posing as a purpose in itself. Although the approach is also recognized as a means of tackling content beyond problem posing and problem solving, it is clear that this is focused on "to a lesser extent."

Beatriz herself notes a variety of content items that could be tackled through problem posing based on the poster (quantity, which is larger, inside and outside, ordinals, problem solving, addition, flat shapes; [TP46–49]), but underlines that her chief interest in noting these areas is above all to ensure that a variety of problems are posed ("not all arithmetical, like 'How many?'" in her own words; [TP31/01 674–688]).

Across the five adaptations, it can be seen that the content focus is problem posing as the purpose, especially in the case of Tasks 0, 1, 3, and 5, in that Beatriz is highly focused on her pupils managing to produce problems irrespective of the content they might have. Nevertheless, in both Task 2 and Task 4, it is possible that the aim of the task, to a much lesser extent than the posing in itself, was to activate certain mathematical content the pupils had worked on previously. This change could have been due to the teacher's intention mentioned in the previous paragraph in which she stated that she did not want all the problems to be of an arithmetic type. For this reason, we have located the focus of the problem-posing lesson to be on purpose although in some cases it shifts towards problem posing as both a means and a purpose. Fig. 13 summarizes the development of this dilemma.

4.5. Individual or social organization

In terms of class organization, the lesson was conducted at the whole-class level (Cai et al., 2022), with the pupils seated in a U-shaped "assembly" formation and the poster positioned in front of them to ensure everybody had a good view so as to pose a problem or comment on the contributions of their classmates.

Two roles established by the pupils were identified: emitters and receivers. The framework established by the task was for each pupil in turn to pose a problem for the rest of the class to solve (Turn 157).

With a view to encouraging the pupils to solve the task together, Beatriz listened actively to their contributions and carefully monitored what they said. She responded to almost every pupil's intervention so as to involve the others in the discussion, encouraging them to amplify their responses (e.g. Turns 32, 34, 36) and eliciting from them the elements constituting the problem (Turns 157, 428). In this regard, teacher-pupil interaction was directed towards the whole class, such as when Beatriz proposed a different version of the task being suggested (e.g. Turns 149, 155, 309) or elaborated on a pupil intervention for the benefit of the group as a whole.

5. Development of the problem-posing task

Table 2 summarizes the developments that the original task underwent with respect to the variables used in the study. It includes

Table 2
Development of the lesson by task and variable.

Variables	Task 0	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5
Context	Semi Real (picture)	Semi Real (problem)	Semi Real (picture)	Semi Real (picture)	Semi Real (picture)	Semi Real text/picture
Structure	Un-structured	Structured	Un-structured	Un-structured	Un-structured	Un-structured
Language	Colloquial	Colloquial	Colloquial / Mathematical	Colloquial	Colloquial / Mathematical	Colloquial
Level of interaction	Social	Social	Social	Social	Social	Social
Content Focus	Purpose	Purpose	Means / Purpose	Purpose	Means / Purpose	Purpose

the five variables (context, language, structure, content focus, and levels of interaction) and the tasks described above. Each variable is shaded according to the variations it underwent with each task. The darker shades are associated with one end of the continuum and the lighter shades with the other.

The table reads from left to right, starting with the original task presented in the form of a poster (Task 0) to the final adaptation (Task 5). As can be seen, the task did not always maintain the same constitution regarding the variables but rather underwent modifications as a result of the dilemmas inherent in each of the variables. These dilemmas were not linear but rather zigzagged according to the teacher's intentions.

6. Conclusions

This study contributes to our understanding of how a problem-posing task is planned and carried out. In this sense, it aligns with the need to enrich our understanding of the design and implementation of problem-posing tasks (Yao et al., 2021), given that the greater part of research into problem-posing tasks focuses on the results of the task—that is, on the characteristics of the resultant problems—and to a much lesser degree on the actual design of the problem-posing task itself (Lee, 2021).

This research has demonstrated that the adaptation of Barbosa and de Oliveira's (2013) dilemmas to the field of problem posing can be linked to variables (context, language, structure, levels of interaction, and content focus) which could be useful with respect to analyzing the design and management of mathematical problem-posing tasks.

The analysis has shown that the variables are not static but rather can fluctuate and undergo changes depending on the teacher's choices or intentions at different stages of the lesson. The most significant modifications were in response to the structure variable. The difficulty the students encountered in posing mathematically oriented problems within the parameters of the original task (semi-real-life context, unstructured, free prompt) resulted in new tasks being improvised with a concomitant modification of the structure. The teacher's starting hypothesis that an unstructured problem-posing task would elicit a greater diversity of problems was reconsidered in favor of more structured tasks. This greater structuring was achieved both through more structured prompts (as referred to in Cai & Hwang, 2023), more constrained problem situations, or both.

One variable which provided interesting results was that of context, which underwent various adaptations in terms of its representation (whether an illustration, a previous problem, or text). The element that remained constant throughout these reformulations was the poster, to which the variations made slight adaptations in order to provide support for the pupils in their problem-posing.

Although the problem situation of the original task underwent some adaptations, it remained a semi-real-life context throughout, chiefly because the poster was used as the reference during the whole lesson.

In general, with the exception of the variable levels of interaction, although the location of the dilemmas on their respective continuums never reached extremes, there were some shifts. These shifts, and consequently the decisions they represented with respect to the dilemmas, did seem related. Thus, some ways of increasing the degree of structure provided for the task, in task 0, were achieved by using more mathematically oriented language in the prompt (e.g. in tasks 2 and 4, which included words evoking mathematical objects such as "inside" and "rectangle"). These new prompts brought an additional focus on learning certain mathematical concepts to that of learning to pose problems. On the other hand, other means of providing the task with greater structure, such as narrowing its context or formulating it as a text rather than an illustration, maintained the focus on problem posing and invited more colloquial language.

Further, this study shows the importance of considering a problem-posing task from a dynamic perspective (or an emergent design; Bikner-Ahsbabs & Janßen, 2013) in which the problem situation and prompt anticipated in the design stage are adapted as the task is put into action. This is another possible contribution of this study in contrast with others in which this kind of contingency was not contemplated (Silber & Cai, 2021; Singer & Voica, 2013).

Given the scarcity of research on this topic in early childhood education (Cai & Hwang, 2020; Martín-Díaz et al., 2020) this case study is especially valuable and could contribute to our understanding of how the characteristics of this educational stage constrain the manner in which the dilemmas are solved. In addition, this paper provides an analytical description of a problem-posing lesson at the classroom level (Cai et al., 2022) and thus offers a valuable case study for teaching problem posing (Liljedahl & Cai, 2021).

One of the most critical factors shaping Beatriz's position vis-a-vis dilemmas are the contextual characteristics of the early childhood classroom.

On the one hand, although problem solving is a mainstay of Beatriz's teaching, this lesson represented the pupils' first encounter with mathematical problem posing and therefore represented an interruption to their familiar classroom routines (Herbst, 2012). Her decision to orient problem posing as a purpose in itself underlies the need to encourage the understanding of the notion and nature of mathematical problems (English, 1997). The pupils' first attempts evoked an incipient manifestation of the notion of problem that was closer to real life than to mathematics. The initial choice to attempt the activity with the pupils via an unstructured problem-posing task (Baumanns & Rott, 2020) with a free prompt (Cai & Hwang, 2023) might have had a greater impact in stimulating a personal conception among the pupils of what constitutes a problem. Our experience in this study suggests that the notion of a problem constituted by a story with a question could be particularly appropriate for early childhood education. Nevertheless, the effectiveness of the task with respect to the notion of the problem involved requires further study.

On the other hand, the pupils' developmental stage—making it impossible to provide written information and imperative to use spoken language and visual cues to support the posing process—constricted the teacher's choice of task design regarding the context in

which to locate the problem situation and the means of presenting the contextual information. In addition, the levels of interaction established among the pupils to encourage the problem posing were determined by the teacher's need to mediate the dialogue, discussion, and negotiation involved (Palmér & Bommel, 2020), leading her to introduce problem posing as a whole-class activity (Kwon & Capraro, 2021).

Given that the study focused on early childhood education, future research should serve not only to corrate and uncover the workings of these variables in the planning and carrying out of problem-posing tasks at different levels (Guo et al., 2021) but also to find out whether any additional variables arise at other educational stages.

Declaration of Competing Interest

The authors of the manuscript, Enrique Carmona Medeiro, Juan Pedro Martín-Díaz and Nuria Climent, declare that: They have not received any financial or non-financial support provided by a third party for the reported work. They have no interest or financial relationship, within the last 3 years, related to the subject or the manuscript.

Data availability

Data will be made available on request.

Acknowledgements

To the projects PID2021-122180OB-I00 of the Ministry of Science and Innovation of Spain. To the project ProyExcel_00297 of the Regional Ministry of Economic Transformation, Industry, Knowledge, and Universities of Andalusia. To the teams of the researches groups DESYM (HUM-168) and Teacher Professional Development (HUM-462). To the Research Centre COIDESO of the University of Huelva and to the Red MTSK, funded by AUIP. Funding for open access charge: Universidad de Huelva / CBUA.

References

- Barlow, A., & Cates, J. (2006). The impact of problem posing on elementary teachers' beliefs about mathematics and mathematics teaching. *School Science and Mathematics*, 106, 64–73. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18136.x>
- Barbosa, J.C., & de Oliveira, A.M. (2013). Collaborative groups and their conflicts in designing tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 541–548). Oxford, UK. Available from (<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054>).
- Baumanns, L., & Rott, B. (2020). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning*, 13(2), 59–76. <https://doi.org/10.1080/19477503.2020.1841501>
- Baumanns, L., & Rott, B. (2022). Developing a framework for characterising problem-posing activities: a review. *Research in Mathematics Education*, 24(1), 28–50.
- Bikner-Ahsbahr, A.A., & Janßen, T. (2013). Emergent tasks—spontaneous design supporting in-depth learning. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 153–162), Oxford, UK. Available from (<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054>).
- Brown, S. I. Y., & Walter, M. I. (1993). *Problem Posing: Reflections and Applications*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Cai, J. (2022). What research says about teaching mathematics through problem posing. *Éducation & didactique*, (16), 31–50. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642>
- Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Cai, J., & Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. In R. Leikin (Ed.), *Mathematical Challenges for All*. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7.
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R., & Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: tasks variables, processes, and products. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119–145). PME.ss.
- Chico, J., Montes, M., & Badillo, E. (2022). Teachers' professional competence to pose school problems: the case of transformation of existing problems. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME12) (pp. 4395–4402). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.
- English, L. D. (1997). The Development of Fifth-Grade Children's Problem-Posing Abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 183–217. <https://doi.org/10.1023/A:1002963618035>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel.
- Guo, Y., Yan, J., & Men, T. (2021). Chinese junior high school students' mathematical problem-posing performance. *ZDM Mathematics Education*, 53, 905–917. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01240-7>
- Harel, G., Koichu, B., & Manaster, A. (2006). Algebra teachers' ways of thinking characterizing the mental act of problem posing. In I. J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 241–248). PME.
- Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances Délelött Investigación Eno'sis Educación Matemática*, (1), 5–22.
- Jackson, P. W. (1968). *Life in the Classrooms*. Rinehart and Winston.
- Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. *International Journal of Educational Research*, 102, Article 101428. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.001>
- Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to its Methodology*. Sage.
- Kwon, H., & Capraro, M. (2021). Nurturing Problem Posing in Young Children: Using Multiple Representation within Students' Real-World Interest. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3), em0648. <https://doi.org/10.29333/iejme/11066>
- Lee, C. K. (2010). An overview of language learning strategies. *Annual Review of Education, Communication and Language Sciences*, 7, 132–152.
- Lee, S. Y. (2021). Research Status of Mathematical Problem Posing in Mathematics Education Journals. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 1677–1693. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10128-z>
- Lee, Y., Capraro, R., & Capraro, M. (2018). Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(2), 75–90. <https://doi.org/10.12973/iejme/2698>

- Leiß, D., & Wiegand, B. (2005). A classification of teacher interventions in mathematics teaching. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 37(3), 240–245. <https://doi.org/10.1007/s11858-005-0015-3>
- Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 53, 723–735. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Martín-Díaz, J. P., Montes, M., Codes, M., & Carrillo, J. (2020). Characterisers of Teaching in a Mathematics Problem Posing Lesson in Preschool Education. *Sustainability*, 12(15), 6148. <https://doi.org/10.3390/su12156148>
- Mercer, N. (2004). Sociocultural discourse analysis: Analysing classroom talk as a social mode of thinking. *Journal of Applied Linguistics*, 1(2), 137–168. <https://doi.org/10.1558/japl.2004.1.2.137>
- Ngah, N., Ismail, Z., Tasir, Z., & Mohamad Said, M. N. H. (2016). Students' ability in free, semi-structured and structured problem posing situations. *Advanced Science Letters*, 22(12), 4205–4208.
- Palmer, H., & van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: what does posing a similar task imply to students? *ZDM Mathematics Education*, 52, 743–752. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01129-x>
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. *Interacções*, 8(22), 196–216. <https://doi.org/10.25755/int.1542>
- Quintero, E. (2004). *Problem Posing with Multicultural Children's Literature*. Peter Lang.
- Rosli, R., Capraro, M. M., Goldsby, D., Gonzalez, E. G., Onwuegbuzie, A. J., & Capraro, R. M. (2015). Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education* (pp. 333–354). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_16
- Silber, S., & Cai, J. (2016). Pre-service teachers' free and structured mathematical problem posing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(2), 163–184. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1232843>
- Silber, S., & Cai, J. (2021). Exploring underprepared undergraduate students' mathematical problem posing. *ZDM—Mathematics Education*, 53(4), 877–889. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01272-z>
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.
- Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157–162. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3>
- Singer, F. M., & Voica, C. A. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 9–26. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9422-x>
- Stake, R. (1995). *The Art of Case Study Research*. Sage Publications.
- Stoyanova, E., & Ellerton, N. (1996). A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics. In P. Clarskson (Ed.), *Technology in Mathematics Education* (pp. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Sullivan, P., Knott, L., & Yang, Y. (2015). The Relationships Between Task Design, Anticipated Pedagogies, and Student Learning. In A. Watson, & M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 83–104). Springer. (https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_13).
- Vygotsky, L. S. (1978). Interaction between learning and development. In M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman (Eds.), *Mind in Society: Development of Higher Psychological Processes* (pp. 79–91). Harvard University Press.
- Stein, M.K., & Smith, M.S. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice.
- Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Bolite, J., Doorman, M., Kieran, C., Leung, A., Margolinas, C., Sullivan, P., Thompson, D., & Yang, Y. (2013). Introduction. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education* (Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, pp. 7–14), Oxford, UK. Available from (<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054>).
- Xu, B., Cai, J., Liu, Q., & Hwang, S. (2019). Teachers' predictions of students' mathematical thinking related to problem posing. *International Journal of Educational Research*, 102, Article 101427. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.005>
- Yao, Y., Hwang, S., & Cai, J. (2021). Preservice teachers' mathematical understanding exhibited in problem posing and problem solving. *ZDM Mathematics Education*, 53, 937–949. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01277-8>
- Yin, R. K. (2009). *Case Study Research. Design and Methods* (4.th ed.). SAGE Publications.
- Zhang, H., & Cai, J. (2021). Teaching mathematics through problem posing: insights from an analysis of teaching cases. *ZDM Mathematics Education*, 53, 961–973. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01260-3>

Anexo 2. Artículo 2

Carmona-Medeiro, E., y Climent, N. (2024). Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en un aula de educación infantil. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 19(1), 25–51.
<https://doi.org/10.30827/pna.v19i1.28408>

DEMANDAS MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO DE LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS EN UN AULA DE EDUCACIÓN INFANTIL

Enrique Carmona Medeiro y Nuria Climent Rodríguez

Esta investigación se centró en la gestión de aula que una maestra realiza durante una tarea de formulación de problemas con alumnado de Educación Infantil (4-5 años). Mediante un estudio de caso único, nos enfocamos en identificar las demandas matemáticas que la maestra establece para favorecer el avance en la formulación de un problema, la actividad del alumnado que las detona y las relaciones entre ambas. Los resultados indican que la mayoría de las demandas matemáticas están orientadas a favorecer el desarrollo del contexto del problema y revelan que las dificultades que las detonan están ligadas al significado no matemático de problema que prevalece en el alumnado.

Términos clave: Demandas Matemáticas; Educación Infantil; Formulación de problemas; Gestión de aula

Mathematical demands for the development of problem formulation in the early childhood classroom

This research focused on the classroom management that a teacher performs during a problem formulation task with students in Early Childhood Education (4-5 years old). By means of a single case study, we focused on identifying the mathematical demands that the teacher establishes to favor progress in the formulation of a problem, the students' activity that triggers them and the relationships between both. The results indicate that most of the mathematical demands are oriented to favor the development of the context of the problem and reveal that the difficulties that trigger them are linked to the non-mathematical meaning of problem that prevails in the students.

Keywords: Classroom management; Early childhood Education; Mathematical demands; Problem posing

Carmona Medeiro, E y Climent, N. (2024). Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en Educación Infantil. *PNA*, 19(1), 25-51. <http://doi.org/10.30827/pna.v19i1.28408>

Demandas Matemáticas para o desenvolvimento da formulação de problemas na sala de aula da Primeira Infância

Esta investigação centrou-se na gestão da sala de aula que um professor realiza durante uma tarefa de formulação de problemas com alunos da Educação Infantil (4-5 anos de idade). Através de um estudo de caso único, procurámos identificar as exigências matemáticas que o professor estabelece para favorecer o progresso na formulação de um problema, a atividade do aluno que as desencadeia e as relações entre ambas. Os resultados indicam que a maioria das exigências matemáticas são orientadas para favorecer o desenvolvimento do contexto do problema e revelam que as dificuldades que as desencadeiam estão ligadas ao significado não matemático de problema que prevalece nos alunos.

Palavras-chave: Demandas Matemáticas; Educação Infantil; Formulação de problemas; Gestão da sala de aula

La investigación ha repercutido en que la resolución de problemas matemáticos haya recibido mucha atención, tanto en el currículum escolar (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2003) como en la actividad de aula (Silver, 1994). El desarrollo de habilidades para la resolución de problemas se ha tornado central (Ellerton et al., 2015; Lester y Cai, 2016). Aunque la formulación de problemas también ha sido reconocida como esencial en el avance de las matemáticas (Polya, 1985), la investigación sobre formulación de problemas es relativamente reciente en el ámbito de la Educación Matemática (Aktaş, 2022; Cai y Hwang, 2020). Hasta los años 80 y 90 no se resalta su importancia (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994) ni encontramos las primeras investigaciones (Brown y Walter, 2005; Ellerton, 1986; Silver y Cai, 1996; Stoyanova y Ellerton, 1996).

A pesar de que la formulación de problemas no ha caracterizado en general la enseñanza de las matemáticas (Singer et al., 2013), su importancia dentro de los procesos de resolución (Polya, 1985) ha favorecido la atención de la comunidad investigadora y su inclusión curricular (NCTM, 2003). Más allá del acuerdo acerca de su potencial para ayudar al alumnado a mejorar como resolutor (Cai et al., 2015), la formulación de problemas se ha ganado un lugar propio como línea de investigación en Educación Matemática por su valor para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. La formulación de problemas matemáticos (en adelante FPM) es una actividad genuinamente matemática que implica una alta demanda cognitiva (Cai y Hwang, 2023; Silver, 1994), por lo que se puede emplear en cualquier nivel escolar para promover el desarrollo del pensamiento y las habilidades matemáticas (Cai y Hwang, 2023; Lee et al., 2018; Singer et al., 2013). El hecho de que las tareas de FPM puedan implicar múltiples soluciones (Martín-Díaz, 2022), junto con la posibilidad que

ofrece al alumnado de integrar sus propias experiencias y conocimientos de la vida (Cai et al., 2022), contribuye al desarrollo de la creatividad, la flexibilidad mental y el razonamiento lógico (Leikin y Elgrably, 2019; Silver, 1994).

En los últimos años, muchos países han establecido la formulación de problemas como un objetivo importante de aprendizaje para los estudiantes (Cai, 2022; Li et al., 2022). Así, en el documento curricular en el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Infantil en la Comunidad Autónoma de Andalucía, donde se desarrolla este estudio (Decreto 100/2023, de 9 de mayo) la formulación de problemas es mencionada en uno de los descriptores operativos que deben emplearse para medir el grado de adquisición de la competencia clave STEAM tras finalizar dicha etapa. Asimismo, en el documento curricular por el que se establece la evaluación del proceso de aprendizaje y se determinan los procesos de tránsito entre las etapas de infantil y primaria en la misma comunidad autónoma (Orden del 30 de mayo de 2023), en la caracterización de la competencia STEAM se hace referencia explícita a la “capacidad para formular, representar y resolver problemas mediante una secuencia de acciones” (p. 36).

A pesar de los avances de investigación y el interés que la FPM ha despertado en los últimos años tanto en educadores como investigadores, existe una clara necesidad de construir una teoría más sólida que permita comprender el fenómeno general de la FPM (Baumanns y Rott, 2022; Cai et al., 2015). Por otro lado, se necesitan estudios empíricos que ayuden a comprender el fenómeno de la FPM en Educación Infantil. El estado de la investigación sobre formulación de problemas elaborado por Lee (2021) revela que hasta 2019 inclusive, no existen estudios que involucren a la primera infancia.

Entre las muchas líneas abiertas de investigación sobre FPM centraremos la atención en los procesos de instrucción. Implementar prácticas efectivas que integren la FPM en el aula no es una cuestión baladí (Leung, 2013). De hecho, cómo diseñar, gestionar y evaluar situaciones de enseñanza que ayuden al alumnado a aprender a formular problemas matemáticos, es en sí mismo un problema que necesita una formulación más completa (Li et al., 2022; Kilpatrick, 1987). Sin restar importancia al diseño y evaluación de situaciones de enseñanza que favorezcan el aprendizaje significativo de la FPM, fijaremos el foco en la gestión de aula, atendiendo a dos interrogantes inherentes a la integración de la FPM en el aula: ¿cuándo intervenir? y ¿cómo intervenir? Así, el objetivo de este estudio es comprender cómo una maestra gestiona una tarea de FPM en Educación Infantil.

MARCO TEÓRICO

La noción de problema

Para caracterizar los procesos de FPM, es necesario partir de las características y estructura de los problemas matemáticos. Definir la noción de problema matemático implica cierta dificultad, dado que un problema no es inherente a una tarea matemática, sino que más bien es una relación particular entre un sujeto y la tarea (Mason, 2016; Schoenfeld, 1985). Charnay (2002) caracteriza la noción de problema como una terna situación-sujeto-entorno y añade tres características esenciales de los problemas: (a) sólo hay problema si el sujeto percibe una dificultad, (b) existe una motivación que impulsa a franquear la dificultad, (c) una situación puede constituir un problema para un sujeto y no para otro sujeto que o bien puede resolver la situación inmediatamente o no sentirlo como un desafío intelectual propio.

Dada la prevalencia de la resolución de problemas respecto a la FPM tanto en la investigación como en el ámbito educativo (Carrillo y Cruz, 2016), la mayoría de las características que se emplean para definir problema matemático aluden a aspectos inherentes a su resolución (Charnay, 2002; Schoenfeld, 1985). Mientras que los estudios recientes en el contexto de resolución aluden a problemas no rutinarios, en el contexto de formulación de problemas un problema se refiere a cualquier tipo de tarea matemática (Baumanns y Rott, 2020). En este estudio emplearemos en este último sentido la noción de problema matemático.

Según Malaspina (2021), todo problema matemático posee cuatro elementos estructurales: información, contexto, requerimiento y entorno matemático. La información está conformada por los datos, cuantitativos o cualitativos, que se dan explícita o implícitamente en el problema. El contexto queda configurado a través de la exploración de una situación (Kilpatrick, 1987), que puede ser matemática, realista o real. El requerimiento, generalmente expresado a través de una pregunta, determina lo que se pide que se encuentre, examine o concluya. El entorno matemático se refiere al marco matemático global en el que se ubican los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema.

Formulación de problemas matemáticos

La literatura de investigación en Educación Matemática muestra que existe una gran variedad de definiciones sobre la formulación de problemas (Baumanns y Rott, 2022; Cai, 2022). La investigación sobre esta área, en Educación Matemática, se ha edificado esencialmente sobre dos definiciones clásicas, la conceptualización de Silver (1994) y la de Stoyanova y Ellerton (1996). En cualquier caso, para caracterizar los procesos de FPM es fundamental quién formula los problemas (Kilpatrick, 1987; Silver, 2013). En la actividad de

formulación de problemas pueden participar docentes, docentes y alumnado, o sólo alumnado a instancias de sus docentes (Cai et al., 2019). En adelante, nos centraremos en situaciones en las que el alumnado formula el problema.

Atendiendo a cómo se origina su construcción, resulta interesante distinguir: la formulación de problemas a partir de una situación dada (o “formulación de nuevos problemas”) o a partir de un problema conocido (o “reformulación de problemas”, Silver, 1994). Por otro lado, resulta interesante distinguir cuando la formulación de problemas acontece antes, durante o después de la resolución del problema (Leung, 2013; Silver, 1994). Nos centraremos en la formulación de problemas a partir de una situación dada, que acontece antes de su resolución.

Las tareas de FPM constan de dos partes: la situación problemática y la consigna (o “prompt”) (Cai y Hwang, 2022, 2023; Cai et al., 2022). La situación problemática es lo que proporciona el contexto y la información que el alumnado puede emplear para la formulación de los problemas, además de sus propias experiencias vitales y conocimiento. La consigna proporciona instrucciones para guiar las formulaciones del alumnado, haciéndoles conscientes de lo que la tarea espera de ellos (por ejemplo, “formula tres problemas de diferente nivel de dificultad”). La información proporcionada por la situación problemática puede incluir palabras, imágenes, gráficos, patrones, tablas y expresiones matemáticas. Las situaciones problemáticas pueden estar basadas en referentes del mundo real (contexto real) o matemáticos (contexto matemático).

Atendiendo al nivel de apertura que la tarea de FPM otorga al formulador, Baumanns y Rott (2022) distinguen dos tipos de situaciones: no estructuradas y estructuradas. Las tareas de FPM son estructuradas cuando se pide al alumnado que formule problemas a partir de un problema previamente resuelto, mediante la modificación de alguno de sus elementos estructurales. Las tareas son no estructuradas cuando el alumnado formula problemas a partir de una situación dada que puede proporcionar o no información detallada. De este modo, las tareas de FPM conforman un espectro, en los que se incrementan tanto las restricciones como la información suministrada y, cuyos extremos son: tareas no estructuradas y tareas estructuradas. Fijaremos la atención en las tareas no estructuradas.

La gestión de aula: cómo y cuándo intervenir

Compartimos con Cai et al. (2015) y Singer et al. (2013) que la FPM es una característica esencial de la enseñanza de las matemáticas orientada a la indagación. Su integración en las prácticas de aula implica, por un lado, un cambio profundo en los roles del profesorado y el alumnado (Cai y Hwang, 2022; García-García et al. 2019). Por otro lado, requiere de un cambio de mentalidad en el profesorado, que permita tomar el problema como objeto central de la actividad matemática y no sólo su resolución (Ellerton et al., 2015), en un ambiente educativo en el que la responsabilidad de la FPM no recaiga

exclusivamente en fuentes externas al alumnado (Cai y Hwang, 2022; Kilpatrick, 1987).

La implementación efectiva en el aula de la tarea prevista es compleja (Cai et al., 2015) y requiere de habilidades y capacidades específicas que permitan manejar dichas complejidades (Singer et al., 2013). Según Font (2008) la gestión de las tareas matemáticas puede llegar a ser más importante que las propias tareas. Así, por ejemplo, una tarea de FPM bien diseñada, terminará movilizand una actividad pobre en el alumnado si no es sostenida por una gestión eficiente.

Una de las cuestiones esenciales de la gestión del aula durante la FPM radica en discernir cuándo y cómo intervenir (Godino et al., 2015; Mason, 2016). Cómo se afronten dichos interrogantes dependerá en gran medida de la naturaleza de la tarea, del propósito didáctico-matemático, del contexto y los destinatarios. Y además estará necesariamente influenciada por la epistemología del profesor, su propia comprensión de las matemáticas involucradas y sus creencias sobre las capacidades de su alumnado (Weber y Leikin, 2016). Debido a la complejidad de la gestión del aula durante la FPM, compartimos con Mason (2016) que elegir cuándo y cómo intervenir, depende de la situación, y, por tanto, no existe una respuesta “correcta” predeterminada. Se trata de una decisión que compete al profesor, quien deberá ofrecer un determinado tratamiento a la diversidad de su alumnado, atendiendo sus distintos estados cognitivo-afectivos durante la FPM (Godino et al., 2015). Existe un amplio consenso acerca de que generar un clima apropiado en el aula es clave para favorecer que el alumnado participe en el acto creativo de la FPM (Mason, 2016; Kilpatrick, 1987). Asumimos al docente como un agente dinamizador cuyos patrones de prácticas, normas, valores e ideas pueden influir en el aprendizaje del alumnado (Cai et al., 2015) y tienen un potencial transformador sobre el alumnado y las instituciones (Carmona-Medeiro y Cardeñoso, 2021). Por ello, el docente es una pieza clave en la conformación de un ambiente enriquecido (Kilpatrick, 1987). Tal ambiente debe ser promovido activamente durante la gestión de aula, y requiere el establecimiento de normas sociomatemáticas sobre la FPM (Çakır y Akkoç, 2020), la reestructuración del sistema de recompensas (Kilpatrick, 1987) y el uso de estrategias que favorezcan la involucración efectiva del alumnado (Cai et al., 2015). En este trabajo entenderemos las normas sociomatemáticas como los “aspectos normativos de las discusiones matemáticas específicas de la actividad matemática de los estudiantes” (Yackel y Cobb, 1996, p. 461). En el ámbito de las FPM el estudio de Çakır y Akkoc (2020) revela la necesidad de negociar normas sociomatemáticas respecto a qué se considera reformular un problema, generar nuevos problemas y cómo evaluar y corregir los problemas formulados. El trabajo de Crespo y Sinclair (2008) evidencia la necesidad de negociar qué se considera como un problema matemáticamente interesante.

Entre todos los aspectos que conforman la gestión de aula, nos centraremos en las demandas matemáticas. Entenderemos demandas matemáticas, por parte de la maestra, como la solicitud de alguna acción que atañe a la actividad

matemática del alumnado, que pretende promover su avance en el proceso de FP. En situaciones donde el alumnado tiene dificultades, mediante solicitudes y/o preguntas la maestra puede dirigir la actividad del alumno hacia un foco matemático general (argumentar, precisar, validar, aportar información, resolver, etc., Lerman, 2010) o vinculado a la propia FPM (modificar un problema, desarrollar el contexto del problema, formular una pregunta, Singer et al., 2013). Estas demandas por lo general son respuesta a alguna intervención o manifestación del alumnado, a las que denominaremos detonantes de la demanda.

Entre los estudios recientes sobre FPM en Educación Infantil centrados en el profesor (Fosse et al., 2020; Martín-Díaz, 2022; Pálmer y van Bommel, 2020) solo Martín-Díaz (2022) aborda de manera explícita cuestiones relativas a la gestión de aula. En dicho estudio, modelizan la gestión de aula a través de tres categorías emergentes: (i) etapas en la ejecución de la tarea, relativa a las fases en las que los docentes estructuran la actividad de FPM; (ii) grado de libertad, relativa a la posibilidad o no de emplear información que no estaba incluida en la configuración inicial de la tarea y; (iii) papel de los dibujos, relativa a su importancia para determinar el tipo de problemas y los elementos empleados por el alumnado.

En la investigación sobre FPM se aprecia escasa concreción, tanto en la etapa de Educación Infantil (Lee, 2021; Palmér y van Bommel, 2020) como, sobre su gestión en un aula (Cai y Hwang, 2020). En este sentido nuestro trabajo pretende contribuir al avance en dicha concreción, en una etapa, además, la Educación Infantil, donde la FPM es escasa en las aulas (Martín-Díaz, 2022).

METODOLOGÍA

Método

Esta investigación se enmarca en el paradigma interpretativo (Husén, 1988). Dado que el propósito es comprender e interpretar una realidad singular, emplearemos métodos y técnicas de carácter cualitativo (Bassegy, 1999), mediante un estudio basado en un diseño de caso único (Yin, 2009), que considera como unidad de análisis la gestión de aula de una tarea sobre FPM. Atendiendo a los criterios de Stake (1995), estamos ante un estudio de caso intrínseco, orientado a avanzar en la caracterización de la gestión del aula de una maestra que facilita una tarea de FPM, con la finalidad de lograr una mejor comprensión acerca de la praxis relativa a la enseñanza de la FPM en el aula de Educación Infantil. El interés del caso reside en la singularidad de la FPM en dicha etapa educativa.

Objetivos de la investigación

En este trabajo nos centramos en comprender cómo una maestra gestiona una tarea de FPM en un aula de Educación Infantil (4-5 años). Pretendemos describir

con detalle dicha gestión, con el propósito de evidenciar aspectos ligados tanto a la actividad matemática de FPM, como a la idiosincrasia de la etapa educativa.

Para dicha descripción hemos fijado el foco en un aspecto particular de la gestión de la maestra, las demandas matemáticas que establece para favorecer el avance en la tarea. Hemos establecido los siguientes sub-objetivos:

- O1. Describir las demandas matemáticas que realiza una maestra en una clase de infantil sobre FPM
- O2. Identificar las acciones del alumnado que detonan dichas demandas
- O3. Explorar posibles relaciones entre las demandas matemáticas que establece la maestra y las acciones previas del alumnado

Los sub-objetivos señalados nos permitirán avanzar en la caracterización de las demandas matemáticas que establece la maestra para favorecer el avance en la FPM, así como las acciones del alumnado que originan las acciones de la maestra y las relaciones entre ambas. La atención a las demandas, detonantes y sus relaciones pone el foco en cuándo intervenir y cómo.

Participantes y contexto

La gestión de aula que describimos en este artículo implica a una maestra de Educación Infantil, Gema (seudónimo), y a 20 infantes de 4-5 años, pertenecientes al segundo curso del segundo ciclo de Educación Infantil de un colegio público. En el momento del estudio Gema tenía 15 años de experiencia. Su selección como informante descansa en que es un caso revelador con respecto a la enseñanza del contenido matemático seleccionado (Yin, 2009) y, posee un carácter de maestra experta según las cualidades que establece Chi (2011).

Gema fue la tutora de este grupo durante el curso anterior, por lo que, en el momento de la implementación de la tarea, curso académico 2017-2018, ya se había consolidado una dinámica de trabajo y lazos afectivos entre la maestra y el alumnado. El alumnado se había familiarizado con la resolución de problemas durante todo el curso académico anterior y, además, había iniciado un primer acercamiento a la FPM a través de preguntas que invitan a ampliar o modificar un problema resuelto.

Descripción de la tarea de formulación de problemas

La tarea de FPM desarrollada en el aula emplea como punto de partida una ilustración (Figura 1). Una vez distribuido el alumnado en asamblea da comienzo la tarea, recordando Gema las normas básicas de la asamblea y contando una pequeña historia sobre las medallas *Fields* que sirve para introducir y contextualizar la actividad matemática que se va a desarrollar. El mural permanece oculto con una tela, despertando la curiosidad del alumnado. A continuación, se descubre el mural, se presenta la consigna de la actividad y se favorece la identificación y reconocimiento de los elementos del mural. El alumnado espontáneamente expresa los elementos que le llaman la atención o le resultan familiares. Una vez que todos han saciado su necesidad de expresar lo

que ven, comienza la fase de acción. Gema retoma la consigna de la actividad, incidiendo en que el objetivo es crear problemas, y para ello, “hay que inventar una historia relacionada con el mural y buscar una pregunta cuya respuesta no sea evidente y requiera pensar”.



Figura 1. Mural proporcionado al alumnado para la formulación de problemas matemáticos

La tarea transcurre durante una hora aproximadamente, implicando más de 700 intervenciones significativas para el estudio de la gestión de aula¹. Por ello, fijaremos el foco de la presente investigación en un evento que acontece durante la fase de acción, y que denominaremos “El problema de Agustín”. Dicho evento ocurre de manera inesperada cuando Gema ha dado por finalizada la tarea e intenta cerrarla, reconduciendo al alumnado hacia otra actividad. En este fragmento, Agustín expresa su necesidad de contar el problema que ha pensado, iniciándose un proceso interactivo en un contexto de asamblea que concluye con la formulación y resolución de un problema matemático.

Recogida, tratamiento y análisis de la información

Debido a la complejidad que supone estudiar la gestión de aula decidimos emplear la videograbación como instrumento de recogida de información, ya que nos permite recoger tanto datos verbales como visuales de la acción de la maestra

¹ Estas intervenciones suponen todas las que realizan maestra y alumnado, contada cada vez que uno interviene expresando algo, salvo las que no tienen ningún interés en relación con la actividad matemática del aula.

y el alumnado. La sesión que analizamos se diseña por parte de la maestra con el apoyo de un grupo de investigación colaborativa en la que participa junto con profesorado de otros niveles educativos y formadores de Didáctica de la Matemática, entre los que se encuentra uno de los autores de este artículo. Su implementación es observada de forma no participante por los miembros del citado proyecto y grabada en vídeo con una cámara situada al final del aula, intentando alterar lo mínimo el curso de la misma.

El análisis de la información comienza con la transcripción de la videograbación. Las transcripciones se realizaron reproduciendo literalmente las intervenciones de todos los participantes, incluyéndose elementos descriptivos que atienden a aspectos ligados al lenguaje gestual o al tono de voz empleado. Antes de proceder al análisis de la información procedente de la videograbación, hemos seleccionado entre las intervenciones de Gema y el alumnado, la información relevante para nuestro propósito, entendiendo como unidad de información “la unidad de significación que se ha de codificar” siendo “esta de naturaleza y tamaño muy variables” (Bardin, 1986, p. 79). Esto ha permitido constituir 73 unidades de información, 37 (G_i) relativas a intervenciones de Gema y 36 relativas a intervenciones de Agustín (A_i).

Para llevar a cabo el análisis de los datos, hemos procedido a codificar de modo libre, sin emplear ningún instrumento y sin partir de categorías *a priori*, más que la sensibilización dada por el marco teórico. Esto nos ha permitido construir categorías emergentes y agrupar las acciones en dichas categorías siguiendo un proceso iterativo de codificación en el que se ha empleado el método de comparación constante (Bryman, 2001). El análisis emergente de los datos ha seguido la teoría fundamentada (*Grounded Theory*), método habitual en investigaciones de corte cualitativo (Charmaz, 2008). Durante el proceso de codificación, a través del agrupamiento por unidades de significado, emergieron en primera instancia diferentes categorías e indicadores que fueron refinados durante y tras el posterior análisis (Strauss y Corbin, 1990), siguiendo el enfoque de condensación de significados propuesto por Kvale (1996), que fue validado a través de la triangulación por expertos (Flick, 2007). De este modo, el análisis pormenorizado hasta la primera obtención de categorías fue realizado por el primer autor del artículo, en el marco de su tesis doctoral, y discutido con el segundo autor. A este primer refinamiento siguieron otros dos siguiendo el mismo proceso, con sus correspondientes re-análisis de la información, hasta llegar a 2 categorías (C1-C2), 12 subcategorías (C1-1, C2-6) y 52 indicadores entre las dos categorías (Tabla 1). En este artículo nos vamos a centrar en la subcategoría *Demandas matemáticas*, dentro de la categoría *Gestión del aprendizaje*.

Tabla 1

Categorías y subcategorías emergentes vinculadas a la gestión del aula matemática durante una tarea de formulación de problemas matemáticos

Categorías	Subcategorías
C1. Control	C1-1. Normas sociales
	C1-2. Normas relativas al aprendizaje
	C1-3. Objetivos
	C1-4. Monitoreo
	C1-5. Flujo de la clase
C2. Gestión del aprendizaje	C2-1. Normas sociomatemáticas
	C2-2. Demandas matemáticas
	C2-3. Motivación e implicación del alumnado
	C2-4. Gestión del error
	C2-5. Explicación y/o información
	C2-6. Conexiones intra y extra-matemáticas
	C2-7. Recursos

RESULTADOS

Organizamos los resultados en tres epígrafes, cada uno dando respuesta a cada objetivo planteado. Así, en el primer epígrafe describimos las demandas matemáticas identificadas, en el segundo los detonantes de dichas demandas, y en el tercero presentamos posibles relaciones entre demandas y detonantes.

Demandas matemáticas

El análisis de las acciones de Gema revela que la categoría Demandas Matemáticas (DM) está presente en 26 de las 37 (70,3%) unidades de información relativas a sus intervenciones. Durante la formulación del problema de Agustín, se han evidenciado 9 indicadores emergentes (DM1-DM9) relativos a las demandas matemáticas que Gema establece para favorecer el avance en la formulación del problema. A continuación (Tabla 2), se muestran dichos indicadores, junto al número de intervenciones (n_i) en las que se ha identificado esa demanda.

Las cuatro primeras demandas (DM1-DM4) se refieren directamente a la FPM. La primera (DM1) corresponde a solicitar la reformulación de un problema; las dos siguientes se refieren al contexto (DM2) y al requerimiento del problema (DM3); la cuarta (DM4) a resolver el problema tras su formulación.

Las restantes, por su parte, aluden a cuestiones matemáticas generales: la representación de la situación (DM5 y DM7) y la solicitud de argumentaciones y comunicación precisa (DM6, DM8 y DM9).

Tabla 2

Indicadores emergentes (DM1-DM9) relativos a la categoría Demandas Matemáticas (DM)

Categorías	n _i
DM1. Solicitar la modificación del problema	1
DM2. Solicitar el desarrollo del contexto del problema	13
DM3. Solicitar el planteamiento de una pregunta para el problema	1
DM4. Solicitar la resolución de un problema	3
DM5. Solicitar la representación de un problema	1
DM6. Solicitar argumentación	2
DM7. Solicitar cambio de registro representativo	1
DM8. Solicitar precisión en las respuestas dadas	3
DM9. Solicitar la verificación de una respuesta dada	1

Si nos fijamos en la frecuencia de estas demandas, se puede apreciar cómo la demanda matemática más empleada por Gema para favorecer el avance en la formulación del problema se corresponde con el indicador *Solicitar el desarrollo del contexto del problema* (DM2). Un análisis más detallado de este indicador ha permitido identificar dos descriptores que evidencian acciones de Gema de distinta naturaleza (Tabla 3).

Tabla 3

Descriptores emergentes (DM2-1 y DM2-2) relativos al indicador DM2

DM2. Solicitar el desarrollo del contexto del problema	n _i
DM2-1. Preguntar al alumnado por información de la historia del problema que no ha sido explicitada/desarrollada/atendida	6
DM2-2. Solicitar el avance en el desarrollo de la historia del problema	7

Con respecto al descriptor DM2-1, las demandas de Gema se orientan a solicitar al alumnado explicitar algún aspecto concreto del contexto del problema con la intención de favorecer el avance en su desarrollo. Ejemplos de este tipo de demanda se pueden observar cuando Gema solicita a Agustín que explicita la acción que realizan los personajes de la historia al entrar en una tienda de ropa (G₂₄₇: “Venga... y ahora qué tiene que hacer”), cuánto cuesta un objeto de una tienda (G₂₅₂: “Y ese cuánto vale”) o cuánto dinero posee un personaje de la

historia (G₂₅₄: “¿Cuánto tiene la mujer?”). Con respecto al descriptor DM2-2, las demandas de Gema se dirigen a invitar al alumnado a proseguir con el desarrollo del contexto del problema, sin establecer ningún tipo de ayuda (G₂₄₅: “Venga y ahora qué pasa”).

A continuación, se muestra una parte del diálogo con la finalidad de ilustrar la diferencia entre los descriptores DM2-1 y DM2-2 (A se refiere a un/a alumno/a y G a Gema):

A₂₃₆: Quiere ir... [Silencio: 4 segundos]

G₂₃₆: ¿Quiere ir a...?

A₂₃₇: A comprar ropa

G₂₃₇: A comprar ropa, muy bien... sigue

A₂₃₈: Y no hay

G₂₃₈: Y no hay qué

A₂₃₉: No hay ropa

A través del diálogo se evidencia que mediante la intervención G₂₃₆, Gema establece una ayuda para que Agustín continúe con el desarrollo del contexto del problema, completando la acción que realizan los personajes mediante la solicitud del lugar que da sentido a la acción (DM2-1). Mientras que mediante la intervención G₂₃₇ únicamente devuelve a Agustín la responsabilidad de continuar con el desarrollo del contexto del problema mediante una invitación (DM2-2).

Acciones del alumnado que detonan la acción de Gema

El análisis de las acciones del alumnado efectuado sobre las unidades de información en las que se evidencian indicadores relativos a DM1-DM9, han permitido la identificación de 7 indicadores emergentes (D1-D7) ligado a la acción previa del alumnado que detona la acción docente. A continuación (Tabla 4), se presentan dichos indicadores junto al número de intervenciones (n_i) en las que se ha identificado dicha acción.

Los cuatro primeros indicadores (D1-D4) se refieren directamente a la dificultad que el alumnado presenta durante el proceso de formulación del problema. El primer indicador (D1) corresponde con momentos específicos durante el desarrollo del contexto, donde el alumnado se expresa despacio y con dificultad y/o permanece en silencio; el segundo (D2) se relaciona con momentos en los que el alumnado produce un avance en el desarrollo del contexto y/o pregunta, pero el contexto sigue estando incompleto; el tercero (D3) hace referencia a situaciones en las que el alumnado orienta el desarrollo del contexto o la pregunta hacia la formulación de un problema no matemático; y el cuarto (D4) acontece cuando el alumnado emplea, durante la formulación del problema, información discordante con la que proporciona el mural. Los restantes indicadores, por su parte, aluden a cuestiones más generales, como discrepar de

la aportación de la maestra porque no coincide con sus intereses o gustos (D5), dar una respuesta contradictoria o poco comprensible (D6), o responder correctamente a una pregunta de la maestra (D7).

Tabla 4

Indicadores emergentes relativos a la acción del alumno (D1-D7) que detona la acción docente (DM1-DM9)

Acción previa del alumnado	n _i
D1. El alumnado tiene dificultades para proseguir con el desarrollo del contexto del problema	3
D2. La respuesta del alumnado es insuficiente o ineficaz	9
D3. La respuesta del alumnado se orienta hacia la formulación de un problema no matemático	6
D4. La respuesta del alumnado es incorrecta	1
D5. El alumnado no está conforme con la respuesta/aportación de la maestra	2
D6. La respuesta del alumnado no ha sido comprensible para la maestra	4
D7. La respuesta del alumnado es correcta	3

Se puede apreciar cómo las acciones del alumnado con mayor frecuencia de aparición se corresponden con los indicadores D2 y D3.

Con respecto al indicador D2, cuatro de las nueve unidades de información, están vinculadas con la incompletitud del contexto del problema, en las que el alumnado proporciona un avance parcial en el desarrollo del contexto (Tabla 5).

Tabla 5

Unidades de información relativas al indicador (D2) relacionadas con la incompletitud del contexto del problema

Acción previa del alumnado	Interpretación
A ₂₃₅ : “Una mujer con un perro...” [Silencio: 3s]	Agustín comienza el desarrollo del contexto del problema, identifica los personajes de su historia, pero no aporta más elementos del contexto
A ₂₃₆ : “Quiere ir...” [Silencio: 4s]	Agustín avanza en el desarrollo del contexto del problema, identificando parcialmente la acción de los personajes, pero no indica de manera completa la acción que realizan
A ₂₃₇ : “A comprar ropa”	Agustín avanza en el desarrollo del contexto del problema, delimitando la acción que realizan los personajes, pero el contexto sigue incompleto
A ₂₄₅ : “Ese”	Agustín señala el chaleco que la mujer quiere

Tabla 5

Unidades de información relativas al indicador (D2) relacionadas con la incompletitud del contexto del problema

Acción previa del alumnado	Interpretación
	comprar en el mural, el contexto sigue estando incompleto

En menor medida, en una unidad de información, además de la incompletitud del contexto se observa dificultad en relación con la formulación de una pregunta.

A_{241} : Comprar ropa

G_{241} : Comprar ropa... y qué le pasa

A_{242} : ¿Cuál quiere comprar?

A través del diálogo se evidencia que, aunque Agustín formula una pregunta (A_{242}) que guarda relación con la historia, el contexto sigue estando incompleto, faltan datos y una pregunta que establezca una demanda matemática que exija pensar.

Mientras que las restantes unidades de información se refieren a dificultades de precisión, como, por ejemplo, expresar una cantidad de medida sin especificar que se está cuantificando (A_{238} : “Y no hay”), o realizar una estimación sensorial sobre una cantidad de dinero sin cuantificar (A_{265} : “Mucho”).

Con respecto al indicador D3, cinco de las seis unidades de información identificadas están vinculadas a intervenciones en las que el avance en el desarrollo del contexto del problema de Agustín se orienta hacia situaciones no matemáticas. Las intervenciones Agustín evidencian una prevalencia de su noción de problema personal con respecto a la noción de problema matemático, aún incipiente. La Tabla 6 muestra distintas formulaciones parciales del problema que ilustran cómo la formulación se orienta hacia situaciones no matemáticas, vinculadas a circunstancias en la que la dificultad u obstáculo impide la consecución de lo pretendido.

Tabla 6

Formulaciones parciales del problema de Agustín orientadas hacia situaciones no matemáticas (D3)

Acción previa del alumnado	Interpretación
“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa y no hay”	Para Agustín, querer ir a comprar ropa y que no haya representa un problema. En sus intervenciones (A_{239} : “No hay ropa” y A_{240} : “Que la mujer no puede comprar porque no hay ropa”) se evidencia que su noción de problema está ligada a circunstancias que dificultan o

Tabla 6

Formulaciones parciales del problema de Agustín orientadas hacia situaciones no matemáticas (D3)

Acción previa del alumnado	Interpretación
	imposibilitan la consecución de un fin.
“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa. ¿Cuál quiere comprar?”	Para Agustín, ir a comprar ropa y tener que elegir ropa que le guste representa un problema. En su intervención (A_{242} : “¿Cuál quiere comprar?”) se evidencia que su noción de problema está ligada a circunstancias que dificultan o imposibilitan la consecución de un fin.
“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa, quiere comprar un chaleco, pero [la dependienta] no le deja”	Para Agustín ir a comprar ropa y que la dependienta no quiera vender ropa representa un problema. En su intervención (A_{246} : “Que no le deja”) se evidencia que su noción de problema está ligada a circunstancias que dificultan o imposibilitan la consecución de un fin.
“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa, quiere comprar un chaleco, pero no le gusta”	Para Agustín, querer ir a comprar ropa y que no haya ropa que le guste representa un problema. En su intervención (A_{248} : “Que no le gusta”) se evidencia que su noción de problema está ligada a circunstancias que dificultan o imposibilitan la consecución de un fin.

Aunque Gema articula habitualmente su práctica docente alrededor de la resolución de problemas, la presente tarea representa la primera aproximación del alumnado a los procesos de formulación a partir de una situación dada. La noción de problema que Agustín ha construido mediante su experiencia vital emerge.

Relaciones entre las demandas matemática y la acción previa del alumnado

Todas las acciones de la maestra vinculadas a los indicadores DM1-DM9 surgen como respuesta a una acción previa del alumno (D1-D7). A continuación (Figura 2), se muestran las relaciones evidenciadas entre las acciones de la maestra y las acciones del alumnado que detonan su intervención.

Como se puede observar, las relaciones que se establecen con mayor frecuencia son las que implican las acciones docentes DM2-1 y DM2-2 y las acciones del alumnado D1-D6. Para el caso de DM2-1, resulta significativo que hay evidencias de esta acción de la maestra como respuesta a todas las acciones del alumnado excepto cuando su respuesta es correcta (D7). Mientras que para el caso de DM2-2, hay evidencias de relaciones con cuatro de las acciones del alumnado (D1, D2, D3 y D5). A continuación (Tablas 7, 8 y 9), se describen las relaciones más significativas.

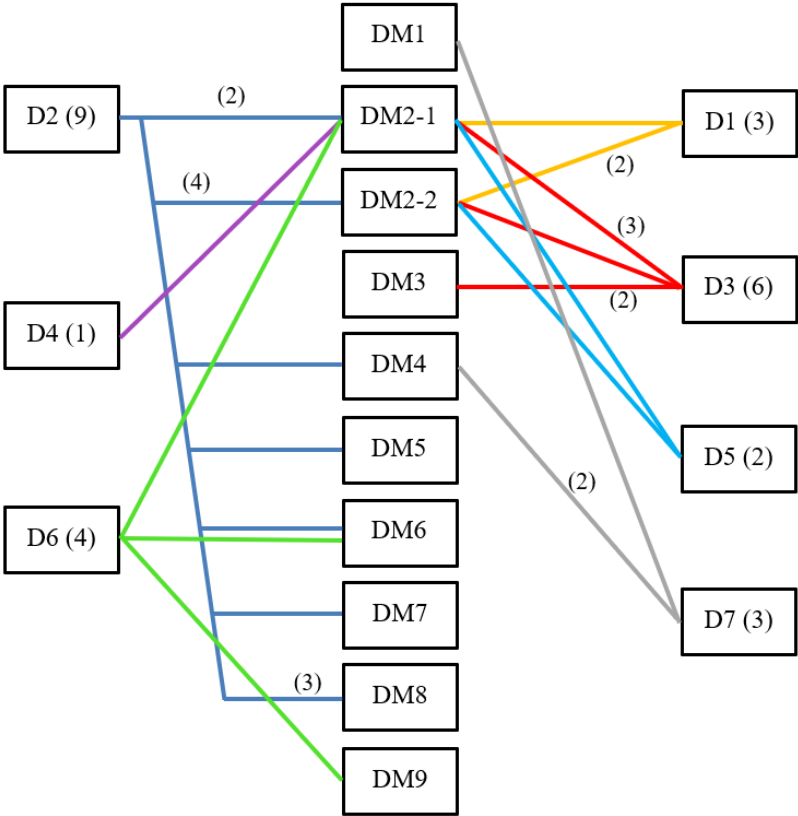


Figura 2. Relaciones entre las demandas matemáticas y las acciones previas del alumnado

Tabla 7
Relaciones entre las demandas matemáticas (DM2-1 y DM2-2) y las acciones previas del alumno que manifiestan dificultad durante el proceso de formulación del problema (D1-D2)

Acción previa del alumnado	Demandas Matemáticas
Cuando el alumno tiene dificultades para proseguir con el desarrollo del contexto del problema (D1) y permanece en silencio (A ₂₄₄ ; A ₂₅₀).	La maestra otorga un tiempo de espera (3-5 segundos) e invita al alumno a proseguir con el desarrollo del contexto (G ₂₄₄ : “Venga... ¿Y qué?”, G ₂₅₀ : “... y ahora qué pasa”) (DM2-2).
Cuando la respuesta del alumno es insuficiente o ineficaz (D2), y su intervención supone un avance parcial en el desarrollo del contexto del problema, como, por ejemplo, delimitar la acción que realizan los personajes (A ₂₃₇ : “A comprar ropa”, A ₂₄₁ : “Comprar ropa”), o señalar en el mural la prenda de ropa que	La maestra invita al alumno a proseguir con el desarrollo del contexto del problema (G ₂₃₇ : “... sigue”, G ₂₄₁ : “... y qué le pasa”, G ₂₄₅ : “Venga y ahora qué pasa”) (DM2-2).

Tabla 7

Relaciones entre las demandas matemáticas (DM2-1 y DM2-2) y las acciones previas del alumno que manifiestan dificultad durante el proceso de formulación del problema (D1-D2)

Acción previa del alumnado	Demandas Matemáticas
quieren comprar los personajes (A ₂₄₅ : “Ese”).	
Cuando la respuesta del alumno es insuficiente o ineficaz (D2), y su intervención supone un avance parcial en el desarrollo del contexto del problema, como, por ejemplo, no indicar de manera completa la acción que realizan los personajes (A ₂₃₆ : “Quiere ir ...”), y además se evidencia una dificultad para proseguir con su intervención (D1) y el alumno permanece en silencio.	La maestra en primera instancia otorga un tiempo de espera (3-5 segundos) y, a continuación, establece una ayuda, a través de una pregunta, para favorecer el avance en el desarrollo del contexto, como, por ejemplo, solicitar al alumno que explicita el lugar donde acontece la acción que realizan los personajes (G ₂₃₆ : “Quiere ir a...”) (DM2-1)

Tabla 8

Relaciones entre las demandas matemáticas (DM2-1 y DM2-2) y las acciones previas del alumno que manifiestan dificultad durante el proceso de formulación del problema (D2-D3)

Acción previa del alumnado	Demandas Matemáticas
Cuando su respuesta es insuficiente e ineficaz (D2), y a la incompletitud del contexto se suma la dificultad para elaborar la pregunta del problema. Por ejemplo, establecer una pregunta que no supone un problema matemático (D3) (A ₂₄₂ : “¿Cuál quiere comprar?”).	La maestra reorienta el problema hacia una situación matemática de compraventa (G ₂₄₂ : “Pues yo digo que va a comprar... dos chalecos”) y formula una pregunta (G ₂₄₂ : “Y qué le pasa”) invitando al alumno a proseguir con el desarrollo del contexto del problema (DM2-2).
Cuando orienta la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3), y en su avance parcial del contexto se evidencia falta de precisión en su respuesta (D2) (A ₂₃₈ : “Y no hay”).	La maestra solicita precisión en la respuesta (DM8), invitando al alumno a completar el contexto del problema, explicitando el elemento que ha cuantificado (DM2-1) (G ₂₃₈ : “Y no hay qué”).
Cuando el alumno continúa orientando la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3) de forma reiterada (A ₂₄₆ : “Que no le deja...” o A ₂₄₈ :	La maestra emplea distintas estrategias para reorientar el problema hacia situaciones matemáticas. En primera instancia trata de aportar información o

Tabla 8

Relaciones entre las demandas matemáticas (DM2-1 y DM2-2) y las acciones previas del alumno que manifiestan dificultad durante el proceso de formulación del problema (D2-D3)

Acción previa del alumnado	Demandas Matemáticas
“Que no le gusta”).	argumentos para deshacer las circunstancias que dificultan o imposibilitan la consecución de la compraventa. Como, por ejemplo, apoyarse en la lógica de las situaciones de compraventa (G ₂₄₆ : “Si le deja... ella quiere vender”), o resolviendo la insatisfacción del comprador (G ₂₄₈ : “Venga pues que compre solo la gorra”). En segunda instancia, establece preguntas para favorecer el avance en el desarrollo del contexto (DM2-1), solicitando al alumno que explicita las acciones (G ₂₄₆ : “Venga y qué tiene que hacer ahora”) o invita al alumno a proseguir con el desarrollo del contexto (DM2-2) (G ₂₄₈ : “Venga y ahora qué pasa”).

Tabla 9

Relaciones entre las demandas matemáticas (DM2-1 y DM2-2) y las acciones previas del alumno que manifiestan dificultad durante el proceso de formulación del problema (D3-D4)

Acción previa del alumnado	Demandas matemáticas
Cuando el alumno orienta la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3) (A ₂₃₉ : “No hay ropa”) y su respuesta es precisa.	La maestra solicita al alumno que formule la pregunta del problema (DM3) (G ₂₃₉ : “¿Y cuál es tu pregunta?”).
Cuando el alumno orienta la formulación del problema hacia situaciones no matemáticas (D3) (A ₂₄₀ : “Que la mujer no puede comprar porque no hay ropa”) y su respuesta es incorrecta (D4), porque contradice la información proporcionada por el mural.	La maestra contrargumenta la respuesta del alumno apoyándose en el mural (G ₂₄₀ : “mira en la tienda de aquí si hay ropa”) y, solicita al alumno explicitar la acción (DM2-1) (G ₂₄₀ : “¿Y qué hace allí?”).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Atendiendo a las demandas matemáticas que establece, la gestión de la maestra se centra en promover el desarrollo del contexto del problema, animando su avance o preguntando explícitamente por información sobre algún aspecto del contexto (Martín-Díaz, 2022). A través de ambas intervenciones, la maestra promueve un ambiente de aula positivo para la FPM, generando un clima de seguridad, respecto y apoyo, devolviendo la responsabilidad de la formulación de los problemas al alumnado desde la confianza en sus capacidades (Li et al., 2022). Sus ayudas, generalmente a través de preguntas, acontecen cuando el alumnado no puede avanzar por sí mismo. En su mayoría estas intervenciones vienen motivadas por la detección de dificultades en el alumnado para la determinación de dicho contexto, en parte por su noción de problema. En este sentido se observa cómo la gestión en el aula de Infantil de la FPM debe considerar, por una parte, que para el alumnado de este nivel un problema está asociado a su significado natural (dificultad u obstáculo que impide conseguir lo pretendido), y, por otra, sus dificultades de expresión y precisión.

El tratamiento de la FPM a través de una situación no estructurada (Baumanns y Rott, 2022), el empleo de un mural de carácter realista para proporcionar los datos y el contexto, junto al empleo de una consigna libre (*“free prompt”*) (Cai y Hwang, 2022, 2023), puede haber potenciado en mayor medida que emerja la concepción personal del alumnado sobre la noción de problema. Esto puede ser beneficioso de cara a que se desarrolle la capacidad de los alumnos para formular problemas junto con su noción de problema (que parecen indisolubles).

Un resultado que nos parece destacable es cómo a través de la formulación de problemas los niños de este nivel desarrollan su concepción sobre qué es un problema matemático y, por tanto, la gestión de aula implica el establecimiento de normas sociomatemáticas sobre qué es un problema matemático. Esta norma sociomatemática no ha sido recogida en los estudios sobre FPM (Çakır y Akkoç, 2020; Crespo y Sinclair, 2008) en otros niveles educativos. En este caso, la noción de problema quedó institucionalizado como “una historia y una pregunta que nos obliga a pensar”. Esta noción de problema coincide con la acuñada en la investigación en Educación Matemática, recogiendo la característica de reto o tarea no rutinaria (Charnay, 2002) y destacando dos de los elementos estructurales de Malaspina (2021): el contexto y el requerimiento.

En los datos analizados la concreción del contexto del problema recibe más atención que la formulación del requerimiento. Nos preguntamos si esto se debe, más que a que lo primero sea más problemático para los estudiantes, a que la maestra vio necesario terminar con la tarea. En este sentido, se aprecian algunas dificultades de los estudiantes con la determinación del requerimiento del problema; porque su concepción de problema hace que no sea necesaria una pregunta (“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa y no hay”); porque

la pregunta no establece una demanda matemática, lo que puede estar también relacionado con su concepción de problema (“Una mujer con un perro quiere ir a comprar ropa. ¿Cuál quiere comprar?”); o porque la pregunta no guarda relación con el contexto. Estas dificultades son esperables, dado que establecer el requerimiento supone identificar relaciones lógicas y matemáticas, percibiendo la situación dentro de un entorno matemático (Malaspina, 2021). La segunda dificultad ha sido evidenciada tanto en el estudio de Martín-Díaz (2022), como en el estudio de Ayllón et al. (2010) con alumnos del primer curso de Primaria, en los que se concluye que el conocimiento informal del alumnado no considera necesario emplear datos numéricos ni en el problema formulado ni en su resolución. Por tanto, el requerimiento del problema puede responder a una lógica natural y su solución puede ser inventada.

Se aprecia la escasa atención que se ha prestado en nuestro caso a la resolución de los problemas formulados. Esto es coherente con situar el problema como objeto central de la actividad matemática y no sólo su resolución, lo que es central para abordar la enseñanza de la formulación de problemas (Ellerton et al., 2015). Al igual que en el estudio de Martín-Díaz (2022), parece claro que para la maestra la finalidad de la sesión es la formulación de problemas, de la mano de la propia noción de problema matemático.

Nuestra investigación muestra tanto la complejidad como la viabilidad de la actividad de formulación de problemas en Educación Infantil (Fosse et al., 2020; Martín-Díaz, 2022; Pálmer y van Bommel, 2020), aportando, además, luz sobre posibles dificultades esperables y posibilidades en su gestión por parte de los maestros. En ese sentido, consideramos que puede ser de interés tanto para maestros como en su formación.

El hecho de haber centrado el análisis en un fragmento de una lección ha posibilitado, por un lado, el detalle en el mismo que ha permitido la emergencia de las categorías e indicadores propuestos y, a su vez, puede ser considerada una limitación que invita a que estas categorías/subcategorías/indicadores sean usadas y contrastadas en otras investigaciones sobre la formulación de problemas en Educación Infantil.

Finalmente, la forma en la que distintas gestiones de aula impactan en la eficacia de las tareas de FPM es un punto clave que necesita más estudio y, por tanto, cuestiones como, ¿qué estrategias docentes favorecen la implicación y el desempeño del alumnado en la FPM? ¿cómo favorecer un clima de aula enriquecido para la FPM? ¿qué normas sociomatemáticas favorecen un clima de aula propicio para la FPM? ¿cómo aproximar dichas normas al alumnado de Educación Infantil?, requieren ser atendidas en futuros estudios. Nuestra experiencia en esta investigación sugiere que las tareas de FPM también son potencialmente interesantes para revelar información útil sobre el pensamiento del alumnado; en este sentido, consideramos que podría ser fructífero ahondar en la noción de problema informal que posee el alumnado de Educación Infantil. ¿Constituye la noción de problema un obstáculo epistemológico para el

desarrollo de la noción de problema matemático? ¿Cuál es el valor añadido que los procesos de FPM aportan a la comprensión de la noción de problema matemático? Todas estas cuestiones requieren ser abordadas en futuras investigaciones empíricas.

AGRADECIMIENTOS

A los equipos de los grupos de investigación DESYM (HUM-168) y DPD (HUM-462), los proyectos PID2021-122180OB-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, y al Centro de Investigación COIDESO de la Universidad de Huelva.

REFERENCIAS

- Aktaş, M. C. (2022). Problem-posing research in mathematics education: A bibliometric analysis. *Journal of Pedagogical Research*, 6(4), 217-233. <https://doi.org/10.33902/JPR.202217414>
- Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 223-233). SEIEM.
- Bardin, L. (1986). *El Análisis del Contenido*. Akal.
- Baumanns, L. y Rott B. (2020). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning* 13(2), 59-76. <https://doi.org/10.1080/19477503.2020.1841501>
- Baumanns, L. y Rott, B. (2022). Developing a framework for characterising problem-posing activities: a review. *Research in Mathematics Education*, 24(1), 28-50. <https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1897036>
- Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open University Press.
- Brown, S. I. y Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing* (3rd edition). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Bryman, A. (2001). *Social Research Methods*. Oxford University Press.
- Cai, J. (2022). What Research Says About Teaching Mathematics Through Problem Posing. *Éducation & didactique*, 16(3), 31-50. <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642>
- Cai, J., Chen, T., Li, X., Xu, R., Zhang, S., Hu, Y., Zhang, L. y Song, N. (2019). Exploring the impact of a problem-posing workshop on elementary school mathematics teachers' conceptions on problem posing and lesson design. *International Journal of Educational Research*, 102, 101404. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.02.004>

- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C. y Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. En F. M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3-34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1
- Cai, J. y Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.01.001>
- Cai, J. y Hwang, S. (2022). Seeing Algebra in Arithmetic Through Mathematical Problem Posing. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 32(3), 309-329. <https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.309>
- Cai, J. y Hwang, S. (2023). Making Mathematics Challenging Through Problem Posing in the Classroom. En R. Leikin (Ed.), *Mathematical Challenges for All* (pp. 115-145). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: tasks variables, processes, and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1)* (pp. 119-145). PME.
- Çakır, A. y Akkoc, H. (2020). Examining socio-mathematical norms related to problem posing: A case of gifted and talented mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 105(1), 19-34. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09965-0>
- Carmona-Medeiro, E. y Cardeñoso, J. M. (2021). Social interaction: A crucial means to promote sustainability in initial teacher training. *Sustainability*, 13(15), 8666. <https://doi.org/10.3390/su13158666>
- Carrillo, J. y Cruz, J. (2016). Problem-Posing and Questioning: Two Tools to Help Solve Problems. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advance and new perspectives* (pp. 23-36). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3>
- Charmaz, K. (2008). Reconstructing Grounded Theory. En P. Alasuutari, L. Bickman y J. Brannen (Eds.), *The Sage Handbook of Social Research Methods* (pp. 447-460). SAGE.
- Charnay, R. (2002). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Eds.), *Didáctica de matemáticas: Aportes y reflexiones* (pp. 51-63). Paidós.
- Chi, M. (2011). Theoretical Perspectives, Methodological Approaches, and Trends in the Study of Expertise. En Y. Li y G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction* (pp.17-39). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7707-6_2
- Crespo, S. y Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of*

- Mathematics Teacher Education*, 11(5), 395-415. <https://doi.org/10.1007/s10857-008-9081-0>
- Decreto 100/2023, de 9 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la etapa de Educación Infantil en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, núm. 90 (2023).
- Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems—A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261-271. <https://doi.org/10.1007/BF00305073>
- Ellerton, N. F., Singer, F. M. y Cai, J. (2015). Problem Posing in Mathematics: Reflecting on the Past, Energizing the Present, and Foreshadowing the Future. En F. M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 547-556). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_26
- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa* (2ª ed.). Morata.
- Fosse, T., Lange, T. y Meaney, T. (2020). Kindergarten Teachers' Stories About Young Children's Problem Posing and Problem Solving. En M. Carlsen, I. Erfjord y P. S. Hundeland (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 351-368). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-34776-5_21
- Font, V. (2008). Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. En C. Gaita (Ed.), *Actas del III Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 21-62). Pontificia Universidad Católica del Perú
- García-García, F. J., Quesada-Armenteros, A., Romero, M. y Abril, A. M. (2019). Promover la indagación en matemáticas y ciencias: desarrollo profesional docente en primaria y secundaria. *Educación XXI*, 22(2), 335-359. <https://doi.org/10.5944/educXXI.23513>
- Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En B. D'Amore y M. I. Fandiño-Pinilla (Eds.), *Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 249-269). Universidad de la Sabana.
- Husén, T. (1988). Paradigmas de la investigación en educación: un informe del estado de la cuestión. En I. Dendaluce (Ed.), *Aspectos metodológicos de la investigación cualitativa* (pp. 46-59). Narcea.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kvale, S. (1996). *Interviews: An Introduction to Qualitative Research Interviewing*. SAGE Publications.
- Lee, SY. (2021). Research Status of Mathematical Problem Posing in Mathematics Education Journals. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(8), 1677-1693. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10128-z>

- Lee, Y., Capraro, R. y Capraro, M. (2018). Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(2). <https://doi.org/10.12973/iejme/2698>
- Lerman, S. (2010). Theories of mathematics education: Is plurality a problem? En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education* (pp. 99-109). Springer.
- Lester, F. y Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8
- Leung, S. S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 103-116. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9436-4>
- Leikin, R. y Elgrably, H. (2019). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, 101424. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.002>
- Li, X., Sun, X. y Cai, J. (2022). Integrating problem posing into the mathematics classroom: current advances and future directions of research. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 48(1). <https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2022.101213>
- Malaspina, U. (2021). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(1), 1-17. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2021.1-17>
- Martín-Díaz, J. P. (2022). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en contextos de formulación de problemas* [Tesis doctoral]. Universidad de Huelva, España.
- Mason, J. (2016). When Is a Problem...? "When" Is Actually the Problem! En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems: Advance and new perspectives* (pp. 263-286). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_16
- National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales.
- Orden de 30 de mayo de 2023, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Infantil en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, núm. 104 (2023).
- Palmér, H. y van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: what does posing a similar task imply to students? *ZDM Mathematics Education*, 52, 743-752. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01129-x>
- Polya, G. (1985). *How to solve it* (2ª ed.). Princeton University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157-162. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3>
- Silver, E. A. y Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 521-539. <https://doi.org/10.2307/749846>
- Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 1-7. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2>
- Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.
- Stoyanova, E. y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. En P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Strauss, A. L. y Corbin, J. (1990). *Basics of Qualitative Research: Grounded Theory Procedures and Techniques*. SAGE Publications.
- Weber, K. y Leikin, R. (2016). Recent advances in research on problem solving and problem posing. En A. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 353-382). Sense Publishers
- Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477. <https://doi.org/10.2307/749877>
- Yin, R. K. (2009). *Case study research. Design and methods* (4.^a ed.). SAGE Publications.

Enrique Carmona Medeiro
Universidad de Cádiz, España
enrique.carmona@uca.es

Nuria Climent Rodríguez
Universidad de Huelva, España
climent@ddcc.uhu.es

Recibido: junio de 2023. Aceptado: diciembre de 2023

doi: 10.30827/pna.v19i1.28408



ISSN: 1887-3987

MATHEMATICAL DEMANDS FOR DEVELOPING PROBLEM FORMULATION IN EARLY CHILDHOOD EDUCATION

Enrique Carmona Medeiro and Nuria Climent Rodríguez

While the potential of problem formulation for mathematical learning is recognised, more research is needed on its implementation in the classroom. We start from the characteristics and structure of a mathematical problem. Among its characteristics we highlight the need for there to be a difficulty for the solver that he/she feels the need to overcome, and in relation to its structure we differentiate between information, context, requirement and mathematical environment. The integration of mathematical problem posing in the classroom implies a profound change in the roles of teachers and students, and that the teacher gives the problem, and not only its resolution, a central role.

We focus on situations in which students formulate problems based on a given situation before solving it, using a realistic mural as a trigger.

We intend to explore when and how an expert teacher intervenes during a problem posing session in Early Childhood Education, by means of an intrinsic case study. The interest of the case lies in the singularity of the formulation of mathematical problems in this educational stage. In order to specify our objective, we describe the mathematical demands made by the teacher, identify the triggers of these demands and explore possible relationships between the two. The data were collected by videotaping the session and then transcribed and analysed by means of emergent categorisation.

As results of the analysis, we found that the teacher's management focuses on promoting the development of the context of the problem, motivated by the detection of difficulties in the students to determine it, partly because of their notion of problem. The development of the notion of problem is shown to be inseparable from the formulation process. The fact that in the formulation of problems the starting point was an unstructured situation given by a realistic mural may have favoured the emergence of pupils' conceptions of the notion of problem. In the data analysed, the concreteness of the context of the problem receives more attention than the formulation of the requirement; however, difficulties are observed in the students in relation to the determination of the requirement. Our study provides possible categories of analysis for further research and leaves other questions open, such as whether the notion of problem constitutes an epistemological obstacle to the development of the notion of mathematical problem at this stage.

Anexo 3. Artículo 3

Carmona-Medeiro, E., y Climent, N. (2025). Students' Difficulties with Problem Posing in Early Childhood Education. *Education Science*, 15(5), 630.
<https://doi.org/10.3390/educsci15050630>

Article

Students' Difficulties with Problem Posing in Early Childhood Education

Enrique Carmona Medeiro ^{1,*}  and Nuria Climent ² 

¹ Department of Didactics of Mathematics, Faculty of Educational Sciences, University of Cadiz, 11510 Cádiz, Spain

² Department of Integrated Didactics, Center for Research in Contemporary Thought and Innovation for Social Development (COIDESO), University of Huelva, 21071 Huelva, Spain; climent@ddcc.uhu.es

* Correspondence: enrique.carmona@uca.es

Abstract: This study focuses on exploring students' emerging difficulties during a problem posing task in an early childhood education classroom (4–5 years old). Through a single case study, and by considering the problems posed as an indicator of the students' mathematical performance level, the difficulties inherent in the process of posing problems based on a given situation are characterised. The results reveal the existence of difficulties both in the exploration phase of the problem situation and in posing the problems themselves. This shows that the main difficulties are related to a lack of accuracy in language, which is typical of this stage, and to the notion of a non-mathematical problem that prevails in the students.

Keywords: problem posing; early childhood education; learning difficulties



Academic Editor: Vasilis Grammatikopoulos

Received: 7 March 2025

Revised: 25 April 2025

Accepted: 17 May 2025

Published: 21 May 2025

Citation: Carmona Medeiro, E., & Climent, N. (2025). Students' Difficulties with Problem Posing in Early Childhood Education. *Education Sciences*, 15(5), 630. <https://doi.org/10.3390/educsci15050630>

Copyright: © 2025 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

Mathematical problem posing (hereafter MPP) has emerged as a recent area of interest in mathematics education (Aktaş, 2022; Cai & Hwang, 2020). It is considered a key element to foster the development of mathematical thinking (Cai et al., 2022; Singer et al., 2015). This growing interest is explained both by the importance that curricula attribute to it (Cai, 2022; Li et al., 2022; NCTM, 2003), and by the benefits it brings to mathematics teaching and learning processes (Cai & Hwang, 2023; Lee et al., 2018; Leikin & Elgrably, 2019; Li et al., 2022).

Research into MPP has been carried out at different educational levels, including primary (Bonotto & Santo, 2015; Possamai & Allevato, 2024), secondary (Cai et al., 2023; Krawitz et al., 2024), and university education (Baumanns & Rott, 2024; Montes et al., 2024). However, early childhood education (henceforth, ECE), the educational stage for children under the age of 6, remains largely under-explored (Carmona-Medeiro et al., 2024; van Bommel et al., 2024).

Despite the progress made in research, there is a clear need to build a more robust theory to understand the general phenomenon of MPP (Baumanns & Rott, 2021; Cai et al., 2015). One of the lines of research that requires attention from the research community concerns how to implement and manage MPP tasks to help students learn how to pose mathematical problems (Carmona-Medeiro & Climent, 2024; English, 2020; Li et al., 2022). In this regard, Cai (2022) points out three challenges teachers encounter during the implementation of MPP tasks that need to be addressed through empirical studies: (i) how to manage problems of a non-mathematical nature posed by students, (ii) how to manage

problems students pose that are not related to the objectives of the task, and (iii) how to manage situations inherent to the open nature of MPP tasks.

This study aims to contribute to filling the existing gap about ECE students' difficulties in problem posing processes. It lays the foundations for future research and didactic proposals that seek to integrate MPP into the classroom at this educational stage. In doing so, it addresses both the processes involved in the task implementation, through the analysis of students' difficulties, and the products generated, through the characterisation of the problems posed. The context is a lesson with 4–5-year-olds, in which the problem situation is presented as a complex poster showing daily life in a neighbourhood. Given the paucity of studies conducted on ECE, there is no evidence as to whether the challenges outlined by Cai (2022) can be applied to this educational stage. It is understood that characterising problems posed by students is an indicator of both their level of performance and of the difficulties they face (Xu et al., 2020). Therefore, exploring students' difficulties is useful to understand the challenges an ECE teacher faces during task implementation. This study aims to contribute to filling the existing gap about ECE students' difficulties in problem posing processes. It lays the foundations for future research and didactic proposals that seek to integrate MPP into the classroom at this educational stage.

2. Theoretical Framework

2.1. Problem Posing

The research literature in mathematics education reflects a wide variety of approaches and definitions of what constitutes MPP (Baumanns & Rott, 2021; Cai, 2022). In the case of students, and from a broad perspective, MPP can be understood as performing two activities: (i) posing a problem based on a given situation, or (ii) posing a problem by modifying an existing problem (Silver, 1994). Henceforth, the focus of this study will be on MPP based on a given situation. Taking into account the level of openness the task grants to the problem poser, Baumanns and Rott (2020, 2021) distinguish between structured and unstructured MPP tasks. MPP tasks are structured when students are asked to pose problems based on a previously solved problem by modifying some of its structural elements. Tasks are unstructured when students pose problems based on a given situation that may or may not provide detailed information. Thus, MPP tasks form a spectrum in which both the restrictions and the information provided increase, and whose extremes are unstructured and structured tasks. This study focuses on unstructured tasks.

The defining framework assumed (Cai, 2022; Baumanns & Rott, 2020) implies that the activity of formulating necessarily leads to the construction of a problem that requires a solution. When recent studies within the framework of problem solving refer to mathematical problems, they do so to describe non-routine problems (Baumanns & Rott, 2020). However, it is important to note that the terms “task” and “problem” are used in a broad sense in the framework of problem posing, and an MPP task can hence lead to the construction of problems at any point along the routine/non-routine spectrum.

MPP tasks have been conceptualised in the literature as consisting of two fundamental elements: the problem situation and the prompt (Cai & Hwang, 2023; Cai et al., 2022). The problem situation sets the context and provides the background information for problem posing. Depending on whether the problem situation is based on real-world or mathematical references, it concerns a real-world or a mathematical context. The information provided by the problem situation can be qualitative or quantitative, and may include words, pictures, graphs, patterns, tables, and mathematical expressions (Cai & Hwang, 2023). The prompt guides the problem posing process by delimiting the expectations of the task. For the same problem situation, there can be numerous types of prompts, which

may include a reference to the number of problems, the difficulty, the person the problem is intended for, or a combination of those prompts.

An MPP task can become more or less structured by making modifications in the problem situation and/or the prompt (Carmona-Medeiro et al., 2024). The choice of problem situation, and therefore of the context and the amount of information provided, influences the nature of the problems students can generate and the complexity of the mathematical work to be activated (Montes et al., 2024). Different studies have shown that the type of prompt has a direct impact on the characteristics of the problems students pose (Cai et al., 2023).

We know that the cognitive processes involved in problem posing have their own specific nature and, therefore, cannot be effectively described using traditional phase models of problem solving (Cai & Rott, 2024; Pelczer & Gamboa, 2009). Although there is still no general descriptive model of phases for problem posing comparable to Pólya's four-step problem-solving model (1985), several studies have attempted to characterise its phases (Baumanns & Rott, 2022; Cai, 2022; Cruz, 2006; Koichu & Kontorovich, 2013; Pelczer & Gamboa, 2009; L. Zhang et al., 2022).

In particular, L. Zhang et al. (2022) propose that the processes involved in problem posing can be framed in three phases: (i) understanding the task, (ii) constructing the problem, and (iii) expressing the problem. Given the nature of this study, focused on identifying students' difficulties during a problem posing task, attention is placed on two of these phases: the students' understanding of the task and the oral expression of the posed problem.

The understanding of the task phase constitutes a key moment in the problem posing process, as it does not merely involve interpreting instructions but requires an active exploration of the problem situation to identify its mathematical potential. According to Baumanns and Rott (2022), this initial phase, which they call situation analysis, is crucial for generating mathematically meaningful problems, as it allows students to establish connections between the elements present in the problem situation and the underlying mathematical structures. Moreover, L. Zhang et al. (2022) note that cognitive conflicts arising during this phase act as creative triggers in the process of posing problems. Other studies (Cai & Rott, 2024; Crespo & Sinclair, 2008) highlight the importance of students becoming familiar with the task in order to recognise its limitations and possibilities, concluding that a prior and thorough exploration of the problem situation positively impacts the quality of the problems posed. However, identifying the opportunities the task offers, considering its conditions, constraints, and mathematical potential, is neither immediate nor self-evident, but requires deliberate interpretation and selection by the students (Pelczer & Gamboa, 2009). In the case of early childhood education, several studies (Martín-Díaz et al., 2020; Carmona-Medeiro et al., 2024) reveal that exploring the problem situation is essential for the viability of the task.

The problem expression phase, on the other hand, requires students to organise their ideas and articulate the language needed to shape the problem they have devised clearly and precisely (Baumanns & Rott, 2022). Crespo and Sinclair (2008) point out that the ability to express mathematical problems not only reflects understanding of the content, but also the ability to communicate mathematical ideas effectively. In the case of students under the age of six, studies indicate that limitations inherent to the development of literacy and linguistic skills (Carmona-Medeiro et al., 2024; van Bommel et al., 2024) affect the written or oral formulation of the problem. Thus, the expression phase becomes particularly sensitive in early childhood education, where communication difficulties may influence the quality of the problem posed, regardless of the students' level of mathematical understanding.

2.2. Characteristics of the Problems Posed: An Indicator of Students' Difficulties

MPP is a cognitively demanding activity (Cai & Hwang, 2023; Silver, 1994). Unlike problem solving, MPP, in general, is an activity that is far removed from the usual classroom habits (Chen & Cai, 2020; Singer et al., 2013). Its integration in the classroom is a challenge for both teachers and students, as it involves a disruption of prevailing rules and expectations of teaching and learning mathematics (Cai et al., 2015). To make progress in understanding how to integrate MPP in the classroom, it is necessary to understand which factors influence its implementation (Cai et al., 2015; Carmona-Medeiro & Climent, 2024). Although studies focused on ECE indicate the feasibility of introducing MPP (Carmona-Medeiro et al., 2024; Fosse et al., 2020; Martín-Díaz et al., 2020; van Bommel et al., 2024), little is known about the difficulties experienced by ECE students during MPP. The study conducted by Carmona-Medeiro and Climent (2024) on understanding how a teacher manages an MPP task in an ECE classroom (4–5 years) can be considered a direct antecedent of this study. The study reveals that most of the students' difficulties involving teacher scaffolding are related to the students' prevailing non-mathematical meaning of problems.

It should be noted that, at this age, children are in the process of learning how to read and write, for which reason the problem situation should provide information in a register other than the written one. Therefore, the choice of the register to be used to provide the problem situation is not random. Obtaining information from the students may represent a potential difficulty linked to the different registers that can be used for the choice of the problem situation. Most of the studies on MPP in ECE (Carmona-Medeiro et al., 2024; Martín-Díaz et al., 2020; van Bommel et al., 2024) provide the problem situation using registers that encourage manipulation and/or visualisation. It is known that manipulative and visual experiences are essential as a basis for verbal and cognitive development at these ages (Smith et al., 2011). However, little is known about the difficulties students experience in obtaining and communicating information from the problem situation.

Analysing problems posed by students is not only an avenue for assessing mathematical performance, it can also be an indicator of their emerging difficulties (Cai et al., 2015). Multiple approaches that analyse problems posed by students (Cai & Hwang, 2023; Carrillo & Cruz, 2016; Leavy & Hourigan, 2024; Palmér & van Bommel, 2020) have been considered in this study. Adaptations were made because of the peculiarities of children. Thus, with the focus on children's difficulties, three variables are considered to characterise the problems posed: (i) mathematical nature; (ii) incomplete problems; and (iii) inconsistent problems.

The "mathematical nature" variable is in line with the difficulty Cai (2022) mentions, and refers to whether the problem posed is set in a framework in which the mathematical concepts or procedures necessary to solve the (mathematical or non-mathematical) problem are located. The "incomplete problems" variable refers to the absence of some of the structural elements of the problem posed (information and/or question) (Carmona-Medeiro & Climent, 2024). Finally, the "inconsistent problems" variable addresses both the problems posed in which there is no logical relationship between the information and the question, and those that are unrelated to the current problem situation and/or prompt (Cai, 2022).

In light of recent studies (Baumanns & Rott, 2022; Cai & Rott, 2024), it is relevant to distinguish between the processes involved in MPP and the products resulting from it. The former refers to the cognitive, linguistic, and interactional actions students perform throughout the problem posing activity, whereas the latter concerns the structure and mathematical quality of the posed problems. This study considers both dimensions: the analysis of the posed problems and the emerging difficulties identified during the activity, each offering a complementary perspective on students' engagement with MPP.

3. Methodology

This study uses the single case design as a methodological approach (Yin, 2009), considering the implementation of an MPP task as the unit of analysis. It is an intrinsic case study (Stake, 1995) that consists of a group of students in a problem posing lesson in an ECE classroom. It allowed for exploring and characterising students' emerging difficulties during problem posing. The interest of the case lies in: (i) the uniqueness of the sample, 4–5-year-old children; (ii) the distance, in relation to the usual classroom habits, with respect to MPP based on a given situation; (iii) the lack of research on the difficulties of students under the age of six.

This paper explores the emerging difficulties of students related to posing mathematical problems based on a given situation. The study seeks to characterise the problems posed with the aim of highlighting difficulties linked both to the mathematical activity of MPP and to the idiosyncrasies of the educational stage. In line with recent research (Baumanns & Rott, 2022; Cai & Rott, 2024), the analysis considers both the processes students engage in during the task, through the observation of difficulties as they unfold, and the products they generate, through the problems they manage to pose. This dual perspective enables a more comprehensive understanding of their engagement with MPP.

3.1. Context and Participants

The classroom analysed in this study involves a teacher, referred to as Elena (pseudonym), and 20 children aged between 4 and 5 in the second year of ECE in a public school in a small town in south-western Spain. At the time of the study, Elena had 15 years of experience and was well acquainted with the problem-based learning (PBL) approach, as she was an active member of a collaborative research group with a particular interest in the reflection on and implementation of learning situations related to PBL. Although the PBL approach was common practice in the classroom, MPP based on a given situation was a practice that was far removed from the usual classroom habits.

3.2. Description of the Lesson

The starting point of the MPP task implemented is a problem situation provided by means of a poster (Figure 1). The problem situation presented in the poster represents daily life in a neighbourhood. The information the poster provides includes individuals (pedestrians, workers, a policeman, vendors, customers, drivers, animals, etc.), objects (vehicles, clothes, fruit, urban infrastructure, safety elements, elements of nature), actions (buying and selling, moving around, directing traffic, tree pruning, etc.), and spaces (shops, houses, urban spaces, green areas, etc.).

The activity begins with gathering the students in an assembly in which Elena reminds them of the basic rules of participation and tells them a brief story about the Fields medal to contextualise the mathematical activity. The poster, initially covered with a cloth, is used as a resource to arouse curiosity in the students. Once the poster has been uncovered, Elena gives the instructions for the activity and guides the students in identifying and recognising the elements that make up the poster. The students participate spontaneously, naming the aspects of the poster that are interesting or familiar to them. After the initial exploration of the problem situation, Elena returns to the instructions, stressing that the aim of the task is to invent problems based on the poster.

Throughout the session, although the problem situation remains unchanged, the teacher makes several modifications to the prompt. The original task, referred to as Task 0, thus evolves because of the modifications the teacher makes to the prompt, giving rise to eight tasks. Table 1 provides the tasks shown according to the type of prompt used.



Figure 1. Poster shown to the students for mathematical problem posing.

Table 1. Types of tasks according to the prompt used.

Prompt	Tasks
Posing a problem related to the poster	Task 0
Posing a problem related to the poster different to the previous ones	Task 1
Posing a problem in continuing a story	Tasks 2 and 7
Posing a problem based on a question	Task 3
Posing a problem using a word	Tasks 4 and 8
Posing a problem using a quantity	Task 5
Posing a problem based on a specific part of the poster	Task 6

With Elena's help, the students' contributions progressively evolve into a coherent story, together with an appropriate question. The task runs for approximately an hour, and once most of the students have had a chance to pose a problem, the activity is considered completed.

3.3. Data Collection and Analysis

As the students are in the process of learning how to read and write, posing problems is done orally, and video recording was chosen as an instrument to collect data. It allows collecting both verbal and gestural data from the students. The session analysed was designed by the teacher with the support of a collaborative research group in which she participates together with teachers from other educational levels and educators in Didactics of Mathematics, including one of the authors of this paper. The implementation of the session is observed in a non-participant manner. It is video recorded, placing a camera in the back of the classroom so as not to interfere with the classroom activity.

In order to analyse the students' emerging difficulties during the exploration phase of the problem situation, coding was performed freely, without using any instrument or resorting to a priori categories other than the perspective provided by the theoretical framework. This allowed us to group the students' difficulties and construct emergent categories following an iterative coding process using the constant comparative method (Bryman, 2001). The emergent analysis of the data followed the grounded theory approach, a method commonly used in qualitative research (Charmaz, 2008). During the coding process, through grouping by units of meaning, different categories and indicators emerged. They were refined during and after the subsequent analysis (Strauss & Corbin, 1990), following the meaning condensation approach proposed by Kvale (1996). It was validated through investigator triangulation (Flick, 2007). The detailed analysis up to the first elicitation of categories was performed by the first author of this paper within the

framework of his doctoral thesis, and was then discussed with the second author. The analysis of the students' actions led to the identification of two emergent indicators linked to the students' difficulties in exploring the problem situation (Table 2).

Table 2. Emergent indicators (D1 and D2) related to students' difficulties in exploring the problem situation.

Indicators
D1. Difficulty in recognising the elements of the problem situation
D2. Difficulty in naming/communicating the elements of the problem situation

The problems formulated by the students were transcribed and subjected to an analysis of the three variables described: mathematical nature (yes/no), incomplete problems (absence of information/absence of question), and inconsistent problems (there is no logical relationship between the information and the question/the problem posed is not related to the problem situation and/or current prompt). This led to the identification of three other difficulties, this time associated with the problem posing phase itself (Table 3).

Table 3. Characterisation of problems posed by the students related to difficulties (D3, D4, and D5) during problem posing.

Indicators
D3. Posing problems of a non-mathematical nature
D4. Posing incomplete problems
D5. Posing inconsistent problems

4. Results

The problem posing session takes place in three phases: (i) presentation and contextualisation of the activity, (ii) exploration of the problem situation, and (iii) problem posing. Table 4 shows the students' difficulties in the last two phases, as Elena, the teacher, plays the main role in the first phase.

Table 4. Emergent indicators linked to students' difficulties (D1–D9) during the problem posing task, together with their frequency of occurrence (n_i).

Indicators	n_i
D1. Difficulty in recognising the elements of the problem situation	10
D2. Difficulty in naming/communicating the elements of the problem situation	39
D3. Posing problems of a non-mathematical nature	32
D4. Posing incomplete problems	81
D5. Posing inconsistent problems	6

The analysis of the students' actions performed on the information units allowed identifying five indicators (D1–D5) linked to the difficulties the students experienced during the problem posing task. The first two indicators (D1 and D2) refer to the difficulties the students experience during the exploration of the problem situation, while the remaining indicators (D3–D5) refer directly to the difficulties they experience during the problem posing process. The frequency of occurrences (n_i) in which each type of difficulty was identified is presented below (Table 4):

4.1. Students' Difficulties During the Exploration of the Problem Situation

Difficulties related to the recognition of the elements that make up the problem situation (D1) occur in three situations: (i) difficulty in distinguishing between objects that

have some similarity in form or function ($n_i = 6$); (ii) difficulty in recognising the specific meanings of road signs ($n_i = 2$); and (iii) difficulty in recognising the gender of people ($n_i = 2$). Some examples are shown below:

- 63¹ P "I see a drawing of a child"
 72 P "Here is another one" [the student says there is another traffic light while she points to a streetlamp]
 49 P "I see a red circle"
 198 P "A woman with a small bag. . ."

The first two examples correspond to the difficulty in distinguishing between objects that have a certain similarity in form or function (i). In the first case, when the student confuses an advertisement with a drawing, the difficulty comes from not understanding the communicative intention of the advertisement. In the second case, when the student confuses a streetlamp with a traffic light, the difficulty arises from not identifying the functional difference (one illuminates, the other regulates traffic). In the third example, there is a difficulty in recognising the specific meanings of traffic signs (ii). In this case, the student sees the "no entry" sign only as a red circle without understanding its specific meaning. The last example shows the difficulty in recognising the gender of people (iii). The student confuses an older man with a woman, showing that, at this age, they do not yet have a clear outline of the subtle physical differences between men and women. Factors such as clothing, hairstyle, or posture may influence their perceptions.

Difficulties related to naming or communicating the elements of the problem situation (D2) are manifested in the lack of accuracy in the use of language. Some examples are given below:

- 13 P "I see a truck cutting a tree."
 25 P "It is not allowed there."
 40 P "It is a post. . .for the light."
 62 P "He is telling him he cannot pass."
 149 P "Because it can blow very hard."
 501 P "There are four."
 551 P "There are none."
 50 P "There, there" [pointing to the poster] [Joint reply]
 19 P "Down"
 20 P "On the left"

In the first case, the student attributes the action of cutting the branch to the truck instead of to the worker. The child observes the crane truck and the worker with a saw, but does not notice that the truck only holds the platform. In the second case, the student expresses the impossibility of performing an action without specifying it. In the third case, the student describes the object by looking at one of its parts and its function, but does not know the appropriate word for the object ("streetlamp"). In the fourth and fifth examples, the student expresses an action without specifying who performs it. In the sixth and seventh cases, the student expresses a quantity of measurement without specifying which number and/or unit of measurement the quantity of measurement refers to. The last three examples correspond to students' difficulties in communicating the position of an element on the poster. This difficulty is significant because of its frequency of occurrence ($n_i = 24$). The first example corresponds to the use of gestural language to communicate the position ($n_i = 11$), while the remaining examples correspond to the use of relative positions ("up-down, right-left"), which are insufficient to locate the element on the poster ($n_i = 11$).

4.2. Students' Difficulties During the Problem Posing Process

The following section deals with the students' emerging difficulties with regard to each of the three variables used.

4.2.1. Posing Non-Mathematical Problems

The analysis of the units of information related to indicator D3 led to the identification of three emergent descriptors (D3-1, D3-2, and D3-3). These descriptors are presented below (Table 5) together with their frequency of occurrence (n_i):

Table 5. Emergent descriptors linked to posing non-mathematical problems (D4-1 and D4-2), together with their frequency of occurrence (n_i).

Descriptors	n_i
D3-1. Orienting problem posing towards accidents or catastrophes	11
D3-2. Orienting problem posing towards situations that make it difficult or impossible to achieve an end	17
D3-3. Orienting problem posing towards enquiring into the motivations or reasons for an action	4

The problems posed by the students are successively oriented towards non-mathematical situations, showing that, at this age, the notion of a mathematical problem is still incipient, and the notion of a personal problem prevails. In the first two cases (D3-1 and D3-2), the logic underlying the notion of personal problems implies it is not necessary to provide a question or information of a mathematical nature. Some examples of non-mathematical problems posed by students are provided below. The first three examples correspond to situations in which the students orient by posing the problem towards accidents or catastrophes (D3-1), while the remaining ones correspond to situations where the students orient by posing the problem towards situations that make it difficult or impossible to achieve an end (D3-2):

- 79 P "A woman walking around with a bag... she runs away and gets hit by a car."
- 161 P "The firemen over there... want to get out of the fire station and they're going to damage that corner because they're going to hit it with the ladder."
- 211 P "What if the man who is cutting the tree drops a branch and it accidentally hits the head of the man sitting?"
- 156 P "A woman walking around with a bag... She has to get home and doesn't know the way."
- 123 P "This woman wants to go somewhere... but the policeman won't let her pass... because the road is blocked. So she can't get through."
- 281 P "A woman with a dog wants to go shopping for clothes. She wants to buy a waistcoat, but she doesn't like it."

In the last case (D3-3), although the students provide partial information of a mathematical nature and/or a question, the problems seem to be oriented towards exploring reasons or motives behind an action:

- 123 P "The girl has two loaves of bread, why did she buy two loaves of bread?"
- 146 P "The paper is flying away... Why is that boy's paper flying away? [pointing to the sign in the pharmacy window]"
- 156 P "A woman with a dog wants to go shopping for clothes. What does she want to buy?"

In all cases, the students identify an action or situation and formulate a question that invites a connection between the action and a reasonable reason (cause and effect

relationship). The evolution from Task 0 to the subsequent tasks was a response to the students' emerging difficulties (D3-1, D3-2, and D3-3) and the need to create a viable environment for problem posing. The teacher's strategy focused on modifying the level of structuring of the initial task (free prompt) by progressively increasing both the constraints and the information provided through new prompts (structured prompts) that guided the tasks toward more structured situations. The modifications made to the initial task (Task 0) had an impact on the problems posed by the students, significantly reducing the emerging difficulties (D3-1, D3-2, and D3-3).

4.2.2. Posing Incomplete Problems

The analysis of the units of information related to indicator D4 led to the identification of two emergent descriptors (D4-1 and D4-2). These descriptors are presented below (Table 6) together with their frequency of occurrence (n_i):

Table 6. Emergent descriptors linked to posing incomplete problems (D4-1 and D4-2), together with their frequency of occurrence (n_i).

Descriptors	n_i
D4-1. Incompleteness of information in the problem posed	33
D4-2. Absence of a question in the problem posed	48

Throughout the session, numerous situations are identified in which it is clear that the problems the students pose are incomplete, either because the information about the problem is incomplete, because data are missing (D4-1), or because there is no question that requires mathematical thinking (D4-2). In general, these are partial advances in posing problems.

Incompleteness of information in the problem (D4-1) occurs when the students make partial progress in formulating the information of the problem. In all cases where incompleteness of information is identified, the absence of a question (D4-2) is simultaneously observed. Some examples in which it is clear that the students have difficulties in formulating a mathematical problem (information and question) and in which their interventions reflect only partial progress in the development of the information of the problem are provided below:

- 214 P "That man wants to go to all the shops over there. . ."
 270 P "A woman with a dog. . . wants to go shopping for clothes. . ."
 424 P "That mum wants to buy fruit for her son."
 491 P "There is only one apple, one pear, one orange, and one grape."

The absence of a question in the problem posed (D4-2), in addition to being observed in cases where only a partial advance of the information of the problem is produced ($n_i = 33$), occurs in situations where the information of the problem is incomplete ($n_i = 15$). Some examples are shown below:

- 137 P "The woman bought two loaves of bread and wanted to buy three. . .because there were. . .no more loaves of bread in the shop."
 427 P "That mum wants to buy fruit for her son. She wants an apple, a pear, and a grape."
 474 P "That window has the shape of a square."
 608 P "A woman with a dog wants to buy a hat. The hat costs 10€ and the woman only has 1€."

In all cases, the students give the information about the problem, providing a story (buying and selling), and/or data relating to mathematical quantities (discrete quantities or shapes). However, they do not ask any questions. The various modifications made by the teacher to the initial task (Task 0) had no impact on the emerging difficulties (D5-1 and D5-2).

4.2.3. Posing Inconsistent Problems

The analysis of the units of information related to the problems the students pose led to the identification of two descriptors (D5-1 and D5-2) linked to the inconsistency of the problems (D5). These descriptors are presented below (Table 7), together with their frequency of occurrence (n_i):

Table 7. Emergent descriptors linked to posing inconsistent problems (D5-1, D5-2 and D5-3), together with their frequency of occurrence (n_i).

Descriptors	n_i
D5-1. There is no logical relationship between the information and the question	1
D5-2. Initiate posing a problem that is not related to the current prompt	5

The absence of a logical relationship between the information and the problem question (D5-1) occurs when the students make partial progress in the development of the information of the problem and formulate a question that is inconsistent with the story elements developed:

248 P “A woman goes to buy bread...How many cars are there?”

Throughout the session, although the problem situation remains unchanged, the teacher makes several modifications to the prompt. These modifications to the original task (Task 0) represent a difficulty for the students. This shows that, although the teacher modifies the prompt and considers the previous tasks as completed, the students continue to initiate the posing of problems in relation to previous prompts (D5-2). This was observed, for instance, during Task 2, where the prompt is given by the instruction to pose a problem based on a story that has already started:

118 T “...Let’s help Adrian with the first part of the problem: a woman goes to buy bread Can anyone think of any questions or stories we need to consider?”

The students start posing a problem that is related to previous prompts:

123 P “The car goes...”

5. Conclusions

The results obtained in this study provide evidence of the difficulties experienced by ECE students (4–5 years) in posing mathematical problems based on a given situation. Five key indicators of difficulty were identified and characterised. Two of the difficulties occur during the exploration phase of the problem situation: difficulty in recognising the elements of the problem situation (D1), and difficulty in naming and communicating these elements (D2). The remaining three occur during the formulation phase: posing problems of a non-mathematical nature (D3), posing incomplete problems (D4), and posing inconsistent problems (D5).

With regard to the exploration phase of the problem situation, the data show that students find it difficult to accurately communicate the elements (objects, subjects, actions, spaces, etc.) they observe in the problem situation (D2). This difficulty can be explained by the fact that, at this age, they are still developing their language skills and, therefore, still consolidating their vocabulary, their ability to categorise, and their accuracy in the use of language. Previous research (Cai, 2022; van Bommel et al., 2024) pointed out that the representational register used in providing the problem situation may influence the students' understanding. The findings of this study suggest that providing the problem situation by means of a complex picture may be a significant factor for exploring difficulties. The difficulties observed during this phase (D1 and D2) stress the need to include the exploration phase of the problem situation as an inherent phase of problem posing (L. Zhang et al., 2022) in ECE, as indicated in previous studies by Carmona-Medeiro et al. (2024) and Martín-Díaz et al. (2020).

In the problem posing phase, it was observed that a significant number of students posed problems of a non-mathematical nature (D3). This difficulty has been reported in research on other educational levels, and has been identified as one of the challenges that need to be investigated in task management (Cai, 2022). In addition to confirming that this difficulty is also prevalent in ECE, the study characterises the problems posed, which enables the analysis of children's logic in greater depth. The tendency of students to pose non-mathematical problems reinforces the idea that the notion of personal problem prevails at this age (Carmona-Medeiro & Climent, 2024). When posing problems is oriented towards accidents or catastrophes (D3-1), or towards situations that make it difficult or impossible to achieve an end (D3-2), the prevailing children's logic does not consider it necessary to use information of a mathematical nature or a question to be answered (Carmona-Medeiro & Climent, 2024). When problem posing is oriented towards enquiring into motivations or reasons for an action (D3-3), the underlying logic implies that the question can respond to a natural logic, and its solution can be invented (Ayllón et al., 2010; Carmona-Medeiro & Climent, 2024).

Another relevant finding is the high number of incomplete problems (D4). This suggests that the students have difficulties in including all the structural elements of a problem (Malaspina, 2021). In most cases, initial formulations were fragmentary and represented only a partial advance in the development of the information on the problem (D4-1), and therefore did not include any questions. Even when students develop a story, the formulation of the question is not clear. The data show the need for teacher scaffolding to complete the story/information, or to formulate a question. All the mathematical problems the students pose have gone through previous formulations in which some of the structural elements of the problem are not addressed. They evolved thanks to the pedagogical help of the teacher, essentially through questions, and to the collaboration of the students. This difficulty has been pointed out in previous studies on MPP tasks at early ages, where the role of the teacher in the co-construction of problems together with students (Palmér & van Bommel, 2020), the establishment of mathematical demands (Carmona-Medeiro & Climent, 2024), or the modification of the variables of the task (problem situation and/or prompt) (Carmona-Medeiro et al., 2024) to encourage the students' progress in problem posing are highlighted.

Finally, the low number of inconsistent problems (D5) indicates that most students managed to maintain a certain degree of coherence between the information and the question. This suggests that, despite the difficulties, students have an intuitive understanding of the basic structure of a problem (Lowrie, 2002), although they still require support to make mathematical relationships explicit in their statements.

The modifications made to the task, aimed at increasing its level of structuring, proved useful for redirecting students' problem posing towards mathematically meaningful situations. However, these adjustments had no impact on students' difficulties in formulating complete problems. This suggests that, while increasing task structuring can promote the mathematical nature of the posed problems, overcoming challenges related to the inclusion of all the structural elements of a problem requires additional interventions. In this regard, we concur with [Jastrzębowska \(2023\)](#) and [Chang \(2007\)](#) that problem posing is viable within an environment of dialogue, emotional support, and progressive scaffolding, where teacher mediation plays a key role in consolidating the necessary competencies. Furthermore, [Lowrie's \(2002\)](#) study demonstrates that first-grade children (6 years old) are capable of generating mathematically meaningful problems when provided with a supportive and stimulating environment, reinforcing the importance of pedagogical context in fostering problem-posing abilities from early ages.

Our analysis also suggests that starting from a non-structured situation accompanied by a free prompt can be a powerful didactic strategy when the aim is to access and understand students' prevailing notions of what constitutes a problem.

This study identifies and characterises the emerging difficulties of ECE students during the activity of posing problems based on a given situation. It is believed that the indicators and descriptors provided in this study may be useful in other research on problem posing in ECE. Although further studies on how to implement and manage MPP tasks are needed ([Cai, 2022](#); [Carmona-Medeiro & Climent, 2024](#); [English, 2020](#); [Li et al., 2022](#)), this study could provide teachers with guidance on the obstacles and opportunities inherent in teaching and learning through MPP ([Cai et al., 2015](#); [H. Zhang & Cai, 2021](#)).

Author Contributions: Conceptualization, E.C.M. and N.C.; Methodology, E.C.M.; Validation, E.C.M. and N.C.; Formal analysis, E.C.M.; Investigation, E.C.M.; Resources, E.C.M.; Data curation, E.C.M.; Writing—original draft, E.C.M.; Writing—review & editing, E.C.M. and N.C.; Visualization, E.C.M.; Supervision, N.C. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This research was funded by Department of Didactics, Faculty of Educational Sciences, University of Cadiz, grant number N/A.

Institutional Review Board Statement: Ethical review and approval were waived for this study, since the study focused on observations and analyses without direct interventions that could pose a risk to participants, and considering the national regulations in force in Spain.

Informed Consent Statement: Informed consent was obtained from all subjects involved in the study.

Data Availability Statement: The original contributions presented in this study are included in the article. Further inquiries can be directed to the corresponding author.

Acknowledgments: To the projects PID2021–122180OB-I00 “financed by MCIN/AEI/10.13039/50110 0011033, Spain, and “FSE Investing in your future””. To the project ProyExcel_00297 of the Regional Ministry of Economic Transformation, Industry, Knowledge, and Universities of Andalusia. To the teams of the researches groups DPD (HUM-462) of the University of Cádiz and DESYM (HUM-168) of the University of Huelva. To the Research Centre COIDESO of the University of Huelva.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflicts of interest.

Abbreviations

The following abbreviations are used in this manuscript:

MPP Mathematical problem posing
ECE Early childhood education

Note

- ¹ The transcription records are labelled as follows: the number of each turn; the speaker (T for teacher and P for pupil); the transcription of each speaker's utterance; accompanying gestures in square brackets.

References

- Aktaş, M. C. (2022). Problem-posing research in mathematics education: A bibliometric analysis. *Journal of Pedagogical Research*, 6(4), 217–233. [\[CrossRef\]](#)
- Ayllón, M. F., Castro, E., & Molina, M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. In M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 223–233). SEIEM.
- Baumanns, L., & Rott, B. (2020). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning*, 13(2), 59–76. [\[CrossRef\]](#)
- Baumanns, L., & Rott, B. (2021). Developing a framework for characterising problem-posing activities: A review. *Research in Mathematics Education*, 24(1), 28–50. [\[CrossRef\]](#)
- Baumanns, L., & Rott, B. (2022). The process of problem posing: Development of a descriptive phase model of problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 251–269. [\[CrossRef\]](#)
- Baumanns, L., & Rott, B. (2024). Problem-posing tasks and their influence on pre-service teachers' creative problem-posing performance and self-efficacy. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101130. [\[CrossRef\]](#)
- Bonotto, C., & Santo, L. D. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. In F. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing. Research in mathematics education* (pp. 103–123). Springer. [\[CrossRef\]](#)
- Bryman, A. (2001). *Social research methods*. Oxford University Press.
- Cai, J. (2022). What research says about teaching mathematics through problem posing. *Éducation & Didactique*, 16(3), 31–50. [\[CrossRef\]](#)
- Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101391. [\[CrossRef\]](#)
- Cai, J., & Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. In R. Leikin (Ed.), *Mathematical challenges for all* (pp. 115–145). Springer. [\[CrossRef\]](#)
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3–34). Springer. [\[CrossRef\]](#)
- Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R., & Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: Tasks variables, processes, and products. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 119–145). PME.
- Cai, J., Ran, H., Hwang, S., Ma, Y., Han, J., & Muirhead, F. (2023). Impact of prompts on students' mathematical problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior*, 72, 101087. [\[CrossRef\]](#)
- Cai, J., & Rott, B. (2024). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM—Mathematics Education*, 56(1), 61–71. [\[CrossRef\]](#)
- Carmona-Medeiro, E., & Climent, N. (2024). Demandas matemáticas para el desarrollo de la formulación de problemas en un aula de educación infantil. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 19(1), 25–51. [\[CrossRef\]](#)
- Carmona-Medeiro, E., Martín-Díaz, J. P., & Climent, N. (2024). Variables in planning and carrying out a problem-posing task in early childhood education. *Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101131. [\[CrossRef\]](#)
- Carrillo, J., & Cruz, J. (2016). Problem-posing and questioning: Two tools to help solve problems. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems: Advance and new perspectives* (pp. 23–36). Springer. [\[CrossRef\]](#)
- Chang, N. (2007). Responsibilities of a teacher in a harmonic cycle of problem solving and problem posing. *Early Childhood Education Journal*, 34(4), 265–271. [\[CrossRef\]](#)
- Charmaz, K. (2008). Reconstructing grounded theory. In P. Alasuutari, L. Bickman, & J. Brannen (Eds.), *The sage handbook of social research methods* (pp. 447–460). SAGE.
- Chen, T., & Cai, J. (2020). An elementary mathematics teacher learning to teach using problem posing: A case of the distributive property of multiplication over addition. *International Journal of Educational Research*, 102, 101420. [\[CrossRef\]](#)
- Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(5), 395–415. [\[CrossRef\]](#)
- Cruz, M. (2006). A mathematical problem-formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 7, 79–90.

- English, L. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: Commentary. *International Journal of Educational Research*, 102, 101451. [\[CrossRef\]](#)
- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa* (2nd ed.). Morata.
- Fosse, T., Lange, T., & Meaney, T. (2020). Kindergarten teachers' stories about young children's problem posing and problem solving. In M. Carlsen, I. Erfjord, & P. S. Hundeland (Eds.), *Mathematics education in the early years* (pp. 351–368). Springer. [\[CrossRef\]](#)
- Jastrzębowska, K. (2023). What is the area of a pig? Problem posing and problem solving in early childhood education. *Problemy Wczesnej Edukacji*, 57(2), 114–132. [\[CrossRef\]](#)
- Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the billiard task. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 71–86. [\[CrossRef\]](#)
- Krawitz, J., Hartmann, L., & Schukajlow, S. (2024). Do task variables of self-generated problems influence interest? Authenticity, openness, complexity, and students' interest in solving self-generated modelling problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101129. [\[CrossRef\]](#)
- Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. SAGE Publications.
- Leavy, A., & Hourigan, M. (2024). Attending to task variables when engaging in group problem posing for elementary level mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101128. [\[CrossRef\]](#)
- Lee, Y., Capraro, R., & Capraro, M. (2018). Mathematics teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge in problem posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(2), 75–90. [\[CrossRef\]](#) [\[PubMed\]](#)
- Leikin, R., & Elgrably, H. (2019). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, 101424. [\[CrossRef\]](#)
- Li, X., Sun, X., & Cai, J. (2022). Integrating problem posing into the mathematics classroom: Current advances and future directions of research. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 48(1), 101213. [\[CrossRef\]](#)
- Lowrie, T. (2002). Designing a framework for problem posing: Young children generating open-ended tasks. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 3(3), 354–363. [\[CrossRef\]](#)
- Malaspina, U. (2021). Creación de problemas y de juegos para el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0–6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(1), 1–17. [\[CrossRef\]](#)
- Martín-Díaz, J. P., Montes, M., Codes, M., & Carrillo, J. (2020). Characterisers of teaching in a mathematics problem posing lesson in preschool education. *Sustainability*, 12(15), 6148. [\[CrossRef\]](#)
- Montes, M., Chico, J., Martín-Díaz, J. P., & Badillo, E. (2024). Mathematics teachers' specialized knowledge mobilized through problem transformation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101132. [\[CrossRef\]](#)
- National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales.
- Palmér, H., & van Bommel, J. (2020). Young students posing problem-solving tasks: What does posing a similar task imply to students? *ZDM Mathematics Education*, 52, 743–752. [\[CrossRef\]](#)
- Pelcer, I., & Gamboa, F. (2009). Problem posing: Comparison between experts and novices. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 353–360). PME.
- Possamai, J. P., & Allevato, N. S. G. (2024). Teaching mathematics through problem posing: Elements of the task. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101133. [\[CrossRef\]](#)
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.
- Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 1–7. [\[CrossRef\]](#)
- Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2015). *Mathematical problem posing: From research to effective practice*. Springer.
- Smith, L. B., Yu, C., & Pereira, A. F. (2011). Not your mother's view: The dynamics of toddler visual experience. *Developmental Science*, 14(1), 9–17. [\[CrossRef\]](#) [\[PubMed\]](#)
- Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications.
- Strauss, A. L., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. SAGE Publications.
- van Bommel, J., Palmér, H., & Ebbelind, A. (2024). Division i förskoleklassen genom problemlösning och problemformulering. *Forskning Om Undervisning Och Lärande*, 12(2), 46–67. [\[CrossRef\]](#)
- Xu, B., Cai, J., Liu, Q., & Hwang, S. (2020). Teachers' predictions of students' mathematical thinking related to problem posing. *International Journal of Educational Research*, 102, 101427. [\[CrossRef\]](#)
- Yin, R. K. (2009). *Case study research. Design and methods* (4th ed.). SAGE Publications.

- Zhang, H., & Cai, J. (2021). Teaching mathematics through problem posing: Insights from an analysis of teaching cases. *ZDM Mathematics Education*, 53(4), 961–973. [[CrossRef](#)]
- Zhang, L., Cai, J., Song, N., Zhang, H., Chen, T., Zhang, Z., & Guo, F. (2022). Mathematical problem posing of elementary school students: The impact of task format and its relationship to problem solving. *ZDM-Mathematics Education*, 54(3), 497–512. [[CrossRef](#)]

Disclaimer/Publisher’s Note: The statements, opinions and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and not of MDPI and/or the editor(s). MDPI and/or the editor(s) disclaim responsibility for any injury to people or property resulting from any ideas, methods, instructions or products referred to in the content.

