

Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas



Formación del profesorado para la enseñanza de la resolución de problemas a alumnado TEA-1 desde la perspectiva inclusiva

**Memoria para optar al grado de doctora
presentada por:**

Ángeles Chico Gómez

Fecha de lectura: 11 de noviembre de 2024

Bajo la dirección de las doctoras:

Nuria Climent Rodríguez

Inmaculada Gómez Hurtado

Huelva, 2024



Universidad de Huelva



Departamento de Didácticas Integradas

COIDESO. Centro de Investigación del Pensamiento Contemporáneo

Formación del Profesorado para la Enseñanza de la Resolución de Problemas a Alumnado TEA-1 desde la Perspectiva Inclusiva

TESIS DOCTORAL



ÁNGELES CHICO GÓMEZ

2024

DIRIGIDA POR LAS DOCTORAS

Inmaculada Gómez Hurtado

Nuria Climent Rodríguez

Resumen

Resolver problemas en el aula supone que el docente adquiera competencias para atender a la diversidad de características de sus estudiantes, de la que forma parte el alumnado con Trastorno del Espectro Autista nivel 1 (TEA-1), aquellos con necesidades de apoyo educativo y que asisten al aula ordinaria. Los estudiantes TEA suelen manifestar intereses restringidos y patrones de comportamiento repetitivos, además de necesidades relacionadas con la comunicación social y las funciones ejecutivas. Estas características influyen en su aprendizaje de la resolución de problemas, pudiendo manifestar dificultades en la comprensión verbal y el desarrollo de estrategias de resolución, muy condicionadas por las necesidades asociadas a la memoria de trabajo, atención continuada y sostenida y autorregulación. Por otro lado, el docente requiere conocimiento especializado de los contenidos matemáticos involucrados, tales como las estrategias y fases de resolución, pero también conocimiento sobre recursos, técnicas didácticas y de aprendizaje para llevar la resolución de problemas al aula.

Esta tesis doctoral plantea una investigación destinada a nutrir la formación docente en la resolución de problemas matemáticos con alumnado TEA-1 desde la perspectiva de la inclusión. Para ello, seguimos una metodología exploratoria y enmarcada en el paradigma interpretativo, que divide nuestra investigación en dos partes. Un primer estudio de caso se centra en indagar las estrategias didácticas que benefician a los estudiantes TEA y TEA-1, desarrollando un taller de resolución de problemas con estudiantes de educación primaria con este diagnóstico, centrado en abordar estrategias heurísticas con materiales manipulativos. Los problemas y materiales del taller se llevan al aula ordinaria a través de tres estudios de caso, cada uno de ellos centrados en un docente, en cuya aula de tercer ciclo hay un estudiante TEA. Partiendo de las unidades de información extraídas de las transcripciones de las videgrabaciones del taller y las sesiones de los docentes, llevamos a cabo un análisis de contenido. Por un lado, analizamos cualitativamente las unidades del taller atendiendo al tipo de heurístico puesto en marcha, los materiales implicados en la resolución y las características del TEA que se manifiestan. Prestamos especial atención al heurístico generalización,

vinculado a la resolución de varios problemas en las sesiones, del que nos servimos para analizar además el proceso de generalización que llevan a cabo los participantes del taller. Por otro, realizamos un análisis mixto de las transcripciones de la videograbación de los tres estudios de caso las acciones docentes durante la implementación de un problema de generalización extraído del taller, siguiendo los subdominios y categorías de conocimiento especializado del marco MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) y los elementos de práctica inclusiva según los principios del Diseño Universal de Aprendizaje. Estudiamos además la co-ocurrencia entre ambos marcos, con objetivo de identificar la relación entre el conocimiento del contenido matemático y su enseñanza y las acciones inclusivas de la práctica docente.

Los resultados de nuestro estudio señalan el potencial de usar materiales y estrategias de enseñanza que, mediante apoyo visual, estructuren los procesos de resolución, lo que señala a los heurísticos como beneficiosos en el aprendizaje de resolución de problemas de los estudiantes TEA. Además, subrayamos el vínculo entre el conocimiento especializado de resolución de problemas y su enseñanza y las prácticas docentes que incluyen el uso de retroalimentación variada para guiar el aprendizaje, el uso de diversos métodos de representación para facilitar la comprensión; y el fomento del desarrollo de funciones ejecutivas.

Todo ello establece una relación transversal entre la enseñanza de la matemática y la inclusión, y que en futuras investigaciones trasladaremos a la formación docente.

Abstract

Solving problems in the classroom means the teacher to acquire skills in order to attend a diversity of characteristics in their group of students, within ASD- 1 (autist spectrum students level 1) students take part, those with educational needs in the regular classroom. ASD students usually show restricted interests and repetitive behaviour patterns, as well as needs related to social communication and executive functions.

These characteristics influence in the problem-solving learning situation, as they might show difficulties in verbal comprehension and the development of solving strategies, highly conditioned by the needs associated with working memory, continuous and sustained attention and self-regulation. On the other hand, the teacher requires specialized knowledge of the mathematical contents involved, such as solving strategies and phases, but also knowledge about resources, didactic and learning techniques to take problem solving to the classroom.

This doctoral thesis presents a research aimed at nurturing teacher training in mathematical problem solving with ASD-1 students from an inclusive perspective. For this purpose, we follow an exploratory methodology framed in the interpretative paradigm, which divides our research in two parts. A first case study centres on investigating the didactic strategies that benefit ASD and ASD-1 students, developing a problem-solving workshop with primary school students with this diagnosis, focused on addressing heuristic strategies with manipulative materials. The problems and materials from the workshop are taken to the regular classroom through three case studies, each of them is centred on a different teacher, in whose third cycle classroom there is an ASD student. Based on the units of information extracted from the transcriptions of the video recordings of the workshop and the teachers' sessions, a content analysis was carried out. On the one hand, we qualitatively analysed the workshop units according to the type of heuristic implemented, the materials involved in the resolution and the characteristics of the ASD manifested. Special attention was paid to the generalisation heuristic, linked to the resolution of several problems in the sessions, which we also use to analyse the generalisation process carried out by the workshop participants.

On the other hand, we conducted a mixed analysis of the videotape transcripts of the three case studies of the teaching activities during the implementation of a generalisation problem extracted from the workshop, following the subdomains and categories of specialized knowledge of the MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) framework and the elements of inclusive practice according to the principles of Universal Design for Learning. Co-occurrence between both frameworks was as well studied, in order to identify the relationship

between mathematical content knowledge and its teaching and the inclusive strategies in teaching practice.

The results of our study stand out the potential of using materials and teaching strategies that, through visual support, structure the solving processes, which points to heuristics as beneficial in the problem-solving learning of ASD students. In addition, we highlight the link between specialised knowledge of problem solving and its teaching and teaching practices that include the use of varied feedback to guide learning, the use of diverse representational methods to facilitate understanding, and the promotion of the development of executive functions.

All of this establishes a cross-cutting relationship between teaching mathematics and inclusion, which will be transferred to teacher training in future research.

Agradecimientos

Esta tesis no podría haberse completado sin el apoyo de mis dos directoras. Gracias, Nuria, gracias, Inma, por haberme proporcionado tanta ayuda y una guía constante, por las revisiones y propuestas, por otorgarme la oportunidad de iniciar este proyecto, del que no cabe duda sois co-autoras. Habéis sido un ejemplo a seguir. En primer lugar, por vuestro compromiso y cariño que plasmáis en todo lo que hacéis y por haber demostrado vuestra profesionalidad y capacidad de trabajar en equipo uniendo dos áreas con metodologías y objetos de estudios bastante diferentes, como son la Didáctica de la Matemática y la Pedagogía. Pero, sobre todo, por vuestra cercanía, interés y constante aliento durante estos años, que han hecho este camino tan duro mucho más fácil.

Al grupo de *Matemáticas y Autismo* de la Universidad de Cantabria por acogerme en mi estancia norteña, en especial a la doctora Irene Polo Blanco. Gracias Irene, por implicarte tanto en esta investigación, por tu invaluable ayuda con el análisis, por tu amabilidad constante y por sacar tiempo para enseñarme tus rincones preferidos de Santander.

A la doctora Elisabetta Robotti, por ofrecerme la oportunidad de descubrir una visión diferente de la didáctica de la matemática. Gracias por la oportunidad de iniciar juntas una colaboración Huelva-Génova y por tu sonrisa constante en todas las reuniones de investigación en *itañol*, cuyos frutos empiezan a verse en esta tesis. Grazie mille.

A la Asociación AOSA-TEA y a los docentes y centros educativos que participaron en este proyecto. Sin vuestro interés y colaboración no hubiera sido posible. Gracias a Ester, Andrea y Federico, por prestaros desinteresadamente y abrirme las puertas de vuestras aulas. Gracias también a Elio, Noa, Omar y Raúl, por enseñarme tantísimo; y a sus padres y madres, por su compromiso y facilitar tanto la tarea de llevar a cabo los talleres.

A mis compañeras y compañeros del Departamento de Didácticas Integradas de la Universidad de Huelva, especialmente al Área de Didáctica de la Matemática, por crear un ambiente tan cercano y familiar, y por vuestro constante apoyo en el desarrollo de esta tesis.

A Cristina, Mer, Pilar, Javi, María, Borja, Aguilera, Alejandro, Chino, Marina, Mariki, a mis amigos genoveses, Paula, David y Leonard, y a todas aquellas personas que han estado a mi lado durante estos años.

A mi familia, por el amor y el apoyo infinito. A mis queridos sobrinos, capaces de hacer que se evada cualquier preocupación y a quienes esta tesis les ha robado tantos ratos de juegos, bailes y cuentos. A mis hermanas, por las risas, el apoyo, los consejos, y por siempre, siempre, estar ahí. A mis padres, por ofrecerme todo y más, por hacerme querer siempre dar lo mejor de mí y por transmitirme la ilusión por la docencia.

A ti. Por todo. Por siempre.

ÍNDICE

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	13
I.1. Motivación y contextualización de la investigación	14
I.2. Enfoque y objeto de estudio	16
I.3. Estructura del trabajo	18
CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO	22
II.1. La inclusión para atender a la diversidad	23
II.1.1. La definición de inclusión	24
II.1.2. Indicadores para la inclusión	26
II.1.3. La escuela inclusiva	27
II.2. El Trastorno del Espectro Autista	30
II.2.1. Concepto y etiología. Teorías explicativas	30
II.2.2. Detección del TEA	32
II.2.3. Las necesidades educativas del TEA y TEA-1	33
II.3. La Resolución De Problemas.....	36
II.3.1. Qué es un problema	36
II.3.2. Estrategias para resolver problemas: Los heurísticos.	37
II.3.2.1. La estrategia de generalización	41
II.4. La enseñanza del alumnado TEA para resolver problemas	46
II.4.1. Características del TEA en la resolución de problemas	46
II.4.2. Estrategias para resolver problemas con alumnado TEA	48
II.5. La resolución de problemas en el aula: el docente de educación primaria	52
II.5.1. El conocimiento del docente de matemáticas	53
II.5.1.1. El conocimiento especializado del Docente de matemáticas: el modelo MTSK.....	54
II.5.1.2. El conocimiento del docente al abordar la resolución de problemas matemáticos	58
II.5.2. La práctica inclusiva en el aula de matemáticas	59

II.5.2.1. El Diseño Universal de Aprendizaje	61
II.5.3. Una aproximación a la relación entre el DUA y la enseñanza de la resolución de problemas.....	65
II.5.3.1.DUA y conocimiento especializado	69
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	72
III.1. Planteamiento del problema	73
III.2. Objetivos de la investigación	75
III.3. Diseño metodológico	76
III.3.1. Fase 1: Revisión bibliográfica y documentación.....	80
III.3.2. Fase 2: El taller de resolución de problemas.....	81
III.3.2.1. Subfase de trabajo de campo.....	82
III.3.2.1.1. El taller “cero”	82
III. 3.2.1.2. Entrevistas a docentes de aulas con diversidad	90
III. 3.2.1.3. El taller semestral	91
III. 3.2.2. Subfase Analítica	104
III. 3.2.3. Subfase de Divulgación.....	114
III.3.3. Fase 3: Transición al aula de primaria	116
III. 3.3.1. Subfase de trabajo de campo: La resolución de problemas con alumnado TEA-1 en el aula de educación primaria	117
III. 3.3.2. Subfase Analítica:Recogida de la información y análisis datos	123
III.3.3.3. Subfase de divulgación	133
III.4. Técnicas e Instrumentos de recogida, organización y análisis de la información	134
III.4.1. Recogida de datos	134
III.4.2. Análisis de datos	137
III.5. Fiabilidad y validez.....	138
CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN	141
SECCIÓN 1: Resolución de problemas con alumnado TEA	142
IV.1. La resolución de problemas con estudiantes TEA	143
IV.1.1. Taller cero.....	143
IV.1.1.1. La resolución del problema de los muñecos.....	143
IV.1.1.2. Uso del material en la resolución del problema de la granja	145
V.1.1.3. Uso del material en la resolución del problema de las nueces	146
IV.1.1.4. Dificultades observadas	147
IV.1.1.5. Informe del taller cero	149
IV.1.2. El taller semestral	153

IV.1.2.1. Material de construcción	155
IV.1.2.2. Los pictogramas.....	161
IV.1.2.3. Pictogramas y organizador gráfico	164
IV.1.2.4. Usando pictogramas y organizador gráfico: estrategias de resolución	167
IV.1.2.4.1 El heurístico marcha atrás	167
IV.1.2.4.2. El heurístico ensayo y error	168
IV.1.2.4.3. El heurístico generalización	170
IV.1.2.5. Otros resultados	176
IV.1.2.6. Informe de los resultados del taller semestral	180
IV.2. La resolución de un problema de generalización con estudiantes TEA-1	185
IV.2.1. La resolución de Raúl, Omar, Noa y Elio: El problema del Minecraft	186
IV.2.2. Los materiales en la resolución	193
IV.2.2.1. El material de construcción y el organizador tabular	194
IV.2.2.2. Los pictogramas y el organizador tabular	196
IV.2.2.3. El organizador	197
IV.2.3. Los niveles de generalización	201
IV.2.4. Informe de resultados de la resolución del problema del <i>Minecraft</i>	203
SECCIÓN 2: Resolución de problemas en el aula con diversidad	209
IV.3. La resolución de problemas en el aula: Sesiones 1-4	210
IV.3.1. La estructura de la sesión.....	210
IV.3.2. El rol del docente y los agrupamientos	213
IV.3.3. La conceptualización de los problemas	215
IV.3.4. Atención al alumnado TEA.....	220
IV.4. La resolución de problemas en el aula: sesión 5. El problema de la arqueóloga	221
IV.4.1. La sesión 5.....	221
IV.4.2. El Conocimiento Especializado en el Problema de la Arqueóloga	224
IV.4.3. La práctica Inclusiva en el problema de la arqueóloga	239
IV.4.4. La perspectiva dual: matemáticas e inclusión	248
IV.4.4.1. La relación entre el MTSK y DUA: Subdominios y principios.....	249
IV.4.4.2. La relación MTSK-DUA: Categorías y directrices	252
IV.4.4.3. La relación MTSK-DUA en las sesiones de los docentes	258
IV.4.3. Informe de resultados del capítulo.....	287
CHAPTER V: DISCUSSION OF RESULTS AND CONCLUSION	296

V.1. Discussion of results regarding objective O1: Develop pedagogical guidelines for learning problem-solving for pupils with Autism Spectrum Disorder - Asperger syndrome	297
V.1.1. O1.1. Identify and describe the characteristics associated with ASD-1 that may influence the problem-solving process.	297
V.1.2. O1.2. Describe problem-solving teaching strategies considering the characteristics associated with ASD-1 that may influence the problem-solving process.	301
V.1.3. O1.3. Describe how ASD-1 pupils solve heuristic mathematical problems based on different specific teaching strategies, including heuristic generalization.	305
V.2. Discussion of results regarding objective O2: Identify the knowledge of Primary Education teachers for the inclusive teaching of mathematical problem-solving for pupils with Autism Spectrum Disorder - Asperger syndrome.	308
V.2.1. O2.1. Identify the mathematical and the pedagogical content knowledge that Primary Education teachers demonstrate when solving problems in the classroom with diversity	309
V.2.2. O2.2. Recognize the inclusion elements that are evident in their practice....	313
V.2.3. The relationship between UDL and MTSK	317
V.3. Conclusions	321
Referencias	325
Anexos	367

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

I.1. Motivación y contextualización de la investigación

Cuando hacemos referencia a la didáctica de la matemática nos adscribimos a una perspectiva en la que la labor docente tiene diversos focos de atención. Así, situándonos en la investigación sobre el profesor de matemáticas y sus prácticas docentes en el contexto español, Bosch et al. (2024) identifican siete focos principales: la práctica del profesor, su desarrollo profesional, sus concepciones, elementos de su dominio afectivo, prácticas profesionales específicas (competencias profesionales), su conocimiento especializado y el formador de profesorado. En nuestro contexto, la naturaleza lógica y científica del área incrementa la complejidad de la enseñanza desde el momento en el que el objetivo se convierte en la consecución de un pensamiento lógico, donde razonamiento deductivo e inductivo se ponen en juego cuando un niño o una niña afrontan un desafío matemático.

El aula de educación primaria es un punto de encuentro de una gran diversidad de habilidades, intereses y niveles de desarrollo; la cual enriquece a la vez que multiplica los obstáculos de un proceso de enseñanza y aprendizaje que pretende hacer partícipes e incluir a todos y todas. A pesar de que en los últimos años la corriente de educación inclusiva ha cobrado fuerza en su afán por evitar el sesgo entre la educación especial y la enseñanza en el aula ordinaria, son reducidas las referencias respecto a cómo trabajar la matemática en el contexto de diversidad, en parte porque durante años se ha atribuido la incapacidad de aprender de forma significativa a aquellos con necesidades específicas (López Mojica et al., 2018).

El desarrollo de propuestas pedagógicas y de cualquier estrategia didáctica enmarcada en el paradigma de inclusión, requiere una preparación por parte del profesorado. La escasa formación específica de los docentes de primaria en la atención del alumnado con Necesidades Específicas de Apoyo Educativo (NEAE) (Arnáiz et al., 2019), delega su enseñanza al aula de especial, tal y como muestran un gran número de investigaciones centradas en el rol del docente de educación especial (Carr y Seah, 2019). Estos docentes suelen desarrollar un conocimiento estructurado de pedagogía sin llegar a profundizar en las áreas del currículo, lo que

induce una problemática en la enseñanza de la matemática, caracterizada por un nivel de abstracción que puede no compaginarse con las habilidades del alumnado (López-Mojica et al., 2018; López-Mojica y Aké, 2015; Ramírez-Cruz et al., 2018).

Este es principalmente el motor que hace cuatro años impulsó el inicio de esta tesis doctoral. Tras completar mi carrera en el Grado en Educación Primaria y continuar la formación mediante un Máster en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias, concretamente en Matemáticas, esta investigadora se aventuró a cursar otro Máster, esta vez en educación especial. Durante el año y medio que duró mi formación, descubrí la segregación entre las prácticas dirigidas a la atención a la diversidad y la inclusión y la incorporación de actividades en educación matemática, que con mucho interés traté de incluir en cualquier propuesta, diseño o unidad didáctica. El desconocimiento de referentes teóricos y la falta de conexión entre las áreas se me planteó como una limitación en mi formación, que transformamos en un reto al iniciar esta tesis.

La presente investigación se enmarca en la línea de “Investigación escolar en didácticas específicas” del programa oficial de “Doctorado en Investigación en la Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales, Matemáticas y de la Actividad Física y Deportiva” de la Universidad de Huelva. La tesis doctoral se ha desarrollado en el marco de un contrato predoctoral del Gobierno de España (FPU20-05070), asociado al Centro de Investigación en Pensamiento Contemporáneo e Innovación para el Desarrollo Social (COIDESO) de la Universidad de Huelva y el proyecto “Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado” (MTSK-TE) (RTI2018-096547-B-I00, Ministerio de Ciencia e Innovación). Además, ha sido auspiciado por el grupo de investigación DESYM (HUM-168), los proyectos PID2021-122180OB-I00 y PID2022-136246NB-I00 financiados por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, el proyecto INCLUREC de la Universidad de Huelva; así como el proyecto de Innovación Docente “Resolución de problemas desde la perspectiva inclusiva” (curso 2022-23), del plan de Estrategia De Política De Investigación Y Transferencia de la Universidad de Huelva y la Cátedra de Aguas de Huelva en la Convocatoria de Actúa por el Desarrollo Sostenible.

I.2. Enfoque y objeto de estudio

La finalidad de esta tesis es aproximarnos a la formación docente en la matemática inclusiva, concretamente en el contexto de resolución de problemas en las aulas de educación primaria, en las que los estudiantes con Trastorno del Espectro Autista forman parte de su diversidad. Son de este modo cuatro los nodos que estructuran nuestra investigación. Unimos resolución de problemas, trastorno del espectro autista, inclusión y formación docente.

En nuestro proyecto presentamos como primer nodo la enseñanza de la resolución de problemas. El currículo de educación primaria concibe la resolución de problemas como un eje transversal asociado a la competencia matemática y la competencia en Ciencia y tecnología (Real Decreto 157/2022; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022), siendo la piedra angular del aprendizaje de la matemática (NCTM, 2000). Aprender a resolver problemas implica adquirir una serie de habilidades y estrategias para comprender, organizar, deducir o relacionar ideas, destrezas que nutren el razonamiento matemático (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2022), pero también cuándo y por qué aplicarlas en cada situación (Root et al., 2018). Para llevar a cabo el desarrollo de estas estrategias de resolución, los estudiantes requieren de habilidades de comprensión e interpretación de textos verbales, secuenciación de operaciones y algoritmos, que pueden presentarse como un obstáculo en el aprendizaje de estudiantes con necesidades educativas (Fuchs et al., 2008), concepción que además ha marcado el desarrollo de enseñanzas inclusivas de este alumnado durante décadas por considerar su incapacidad para desarrollar razonamiento matemático (Noda y Bruno, 2010). No obstante, el proceso de enseñanza de resolución de problemas puede ser diseñado atendiendo a la diversidad de pensamiento, dado que posibilita incluir diferentes registros mediante la incorporación de tablas, dibujos o gráficos, elementos que favorecen la organización de datos y desarrollan la flexibilidad mental (Bruder 2016); e incorporar heurísticos, que proporcionan un enfoque sistemático para abordar la tarea (Verschaffel et al., 2020), dan soporte visual y pautas para organizar la información (Novotná et al., 2014; Delisio et al., 2018). Todo ello facilita aproximarnos a los distintos estilos de aprendizaje (Lambert et al.,

2020) en el proceso de comprensión del enunciado, de búsqueda de la solución y de la revisión de esta. El segundo nodo es el TEA, que engloba un amplio espectro de características. Muchas de las habilidades y dificultades que la literatura asocia al trastorno del espectro autista pueden ser compartidas por otros estudiantes del aula de primaria, lo que, considerando la perspectiva inclusiva de nuestra investigación, incentivó la elección de este trastorno del neurodesarrollo como foco de estudio. Nos situamos así en la perspectiva pedagógica de las relaciones del alumnado y su entorno de aprendizaje, en contraste con el enfoque de las características individuales de cada uno, puesto que pretendemos acentuar cómo afectan ciertas estrategias de enseñanza de la matemática en el proceso de aprendizaje (Roos, 2013).

El fin último de esta investigación es trasladar los resultados a la formación del profesorado. Resolver problemas en el aula de matemáticas trae consigo la interacción entre docentes y estudiantes. No podemos solo centrarnos en las competencias y necesidades que manifiesta el alumnado, sino que sobre el docente recae la responsabilidad de facilitar la creación de un espacio de aprendizaje adecuado y significativo (Ball et al., 2008). El grado de efectividad de las decisiones y la práctica educativa del docente va a depender del contexto y los objetivos del aprendizaje (Hiebert y Grouws, 2007), pero también del conocimiento del profesorado sobre el contenido de la enseñanza y cómo abordarlo en el aula (Ball et al., 2008; Shulman, 1986). Consideramos por tanto necesario el conocimiento de las características de los estudiantes, puesto que estas pueden condicionar su proceso de enseñanza y aprendizaje, y el conocimiento de las estrategias didácticas que benefician a los estudiantes TEA cuando abordan la resolución de problemas. Del mismo modo, se requiere relacionar este conocimiento con el de elementos de inclusión aplicados a la matemática, puesto que las aulas de educación primaria integran una gran diversidad de características de aprendizaje además de las asociadas al TEA.

La investigación sobre el aprendizaje matemático del alumnado TEA es mayoritariamente cuantitativa y centrada en comprender el perfil cognitivo de estos estudiantes (Barnett y Cleary, 2015; King et al., 2016), aunque durante los

últimos años han ido emergiendo investigaciones sobre estrategias de resolución de problemas atendiendo a las características del TEA, muchas de ellas recogidas en la revisión de Root et al. (2021). Nuestro foco es ahondar en las estrategias de enseñanza que benefician a este alumnado, para lo que desarrollamos un taller de resolución de problemas dirigido a estudiantes TEA. La revisión de Gevarter et al. (2016) señala que la mayoría de las investigaciones en esta área se contextualizan en una enseñanza individual o en entornos controlados, a lo que la revisión de Carr y Seah (2019) añaden la necesidad de incrementar los estudios en el aula de matemáticas. Esto nos impulsa a plantearnos llevar estas estrategias de enseñanza al aula ordinaria, donde encontramos la posibilidad de observar la puesta en marcha de problemas en un entorno inclusivo. Paralelamente, partir del conocimiento manifestado por docentes de educación primaria en activo cuando trabajan la resolución de problemas en su aula con diversidad, puede arrojar cierta luz a la investigación y al desarrollo de los contenidos de dicha formación docente.

I.3. Estructura del trabajo

Aunque en una primera aproximación el proyecto de tesis iba dirigido a la formación continua del profesorado relativa a la enseñanza matemática del alumnado TEA, pronto fue necesaria una reestructuración del planteamiento y el objeto de estudio. Antes de desarrollar la formación docente, era necesario describir las pautas y la fundamentación que la sostuviera, en términos de conocimiento sobre el alumnado TEA, de las estrategias de enseñanza y del conocimiento matemático-inclusivo que derivaba de ambos elementos. Estas tres claves son las que orquestaron finalmente la estructura de esta investigación, dividida en cinco capítulos.

Este primer capítulo I ha tratado de introducir cómo surgió este proyecto, sus principales focos de estudio y el planteamiento de la tesis. El capítulo II aborda la fundamentación teórica que da sustento a la tesis doctoral. Se integran bases teóricas vinculadas a la pedagogía, como aquellas que conceptualizan la inclusión, hilo conductor de este estudio. También la descripción de las características y el proceso de aprendizaje que la literatura asocia al alumnado con Trastorno del

Espectro Autista, así como estrategias de enseñanza, y marcos teóricos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas y el conocimiento especializado del docente de matemáticas.

El capítulo III describe el marco metodológico que estructura este proyecto de tesis. Desde el paradigma interpretativo y con un enfoque cualitativo, planteamos el diseño de la investigación, dividido en dos partes coincidentes con los objetivos de la tesis: la identificación de las características del alumnado TEA y las estrategias didácticas que benefician su aprendizaje en relación con la resolución de problemas que implican diversos heurísticos, y una aproximación al conocimiento que manifiesta el docente de primaria cuando enseña a resolver problemas de generalización en un aula con diversidad. La recogida de los datos se realiza mediante la observación, la entrevista y las producciones del alumnado y profesorado. El análisis de los datos se desarrolla mediante un análisis de contenido usando sistemas de categorías que vinculan marcos psicopedagógicos (como la Teoría de la Mente (Baron-Cohen, 2000) o la Teoría de las Funciones Ejecutivas (Ozonoff et al., 1991)), marcos procedentes de la didáctica general (como el Diseño Universal de Aprendizaje; CAST, 2018) y propios de la didáctica de las matemáticas (como los niveles de generalización de Blanton et al. (2015) o el modelo de conocimiento especializado del profesorado de matemáticas Mathematics Teachers' Specialised Knowledge, MTSK, (Carrillo et al., 2018)).

El capítulo IV se vincula al primer objetivo de la tesis. En la primera sección, abordamos la descripción y análisis de los resultados de un taller de resolución de problemas desarrollado con alumnado con TEA, y amplificamos nuestro enfoque hacia el estudio de un problema de generalización resuelto durante la octava sesión. La discusión de los resultados del taller nos acerca a las consideraciones didácticas relacionadas con el desarrollo de materiales y estrategias para abordar la resolución de problemas de generalización en un contexto de diversidad, así como al conocimiento de las características asociadas a los estudiantes TEA en relación con la resolución de problemas matemáticos.

El segundo objetivo de la tesis se aborda en la sección dos del capítulo IV. Durante sus apartados se resumen y analizan los resultados de la implementación de una propuesta didáctica centrada en un problema de generalización descrito en la sección uno. La propuesta fue llevada a cabo por tres docentes de la provincia de Huelva, quienes cuentan con un estudiante con TEA en su aula de tercer ciclo de primaria. La discusión de los resultados adquiere una doble perspectiva: el estudio de los elementos de práctica inclusiva y el conocimiento especializado que manifiestan los docentes. En la sección final de este capítulo, buscamos posibles relaciones entre el conocimiento especializado de los docentes (desde la perspectiva del modelo MTSK) y el uso de estrategias para una enseñanza matemática inclusiva (desde la perspectiva del Diseño Universal de Aprendizaje).

Finalmente, el capítulo V integra la discusión de los resultados de los talleres con estudiantes TEA y los resultados de la implementación de la propuesta de resolución de problemas en las aulas ordinarias. Este capítulo se estructura en función de los objetivos y subobjetivos de la tesis. Los epígrafes asociados al objetivo 1 detallan el papel de las estrategias visuales y los heurísticos en el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes TEA y TEA-1. También abordamos la influencia de sus características asociadas a los estudiantes autistas, y que, a pesar de las necesidades asociadas al trastorno, se han observado estrategias de generalización, predicción, organización y habilidades de trabajo colaborativo. Los epígrafes relacionados con el segundo objetivo detallan el conocimiento especializado manifestado por cada docente y los elementos de su práctica inclusiva, estableciendo relaciones con estudios previos. Se detallan además las relaciones entre el MTSK y el DUA, de las destacamos las uniones entre los subdominios de conocimiento especializado con las prácticas relacionadas con proporcionar opciones para la retroalimentación, la comprensión y las funciones ejecutivas. Un epígrafe final describe las conclusiones de nuestro proyecto, abordando las ideas principales del estudio, las limitaciones y un esbozo de las futuras líneas y estudios que pretenden continuar esta investigación.

Como se puede apreciar en la estructuración de la tesis, encontramos dos secciones claramente diferenciadas que sitúan a esta investigadora con una doble lente: enfocando a los estudiantes TEA y enfocando al docente de educación primaria. Considerando esta perspectiva dual, nuestra idea inicial era orquestar el desarrollo del proyecto siguiendo una modalidad por compendio de artículos. No obstante, aunque el desarrollo de la tesis ha ido acompañado de contribuciones a congresos y seminarios especializados y publicaciones en revistas de investigación vinculados a nuestros dos focos, las limitaciones ocasionadas por los cambios en el diseño metodológico adaptando el desarrollo de los talleres y la observación de las aulas a las necesidades de los participantes del estudio, ha tenido como consecuencia que optemos por la modalidad tradicional.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

Resumen

El objetivo de este capítulo es establecer una base teórica sólida que sirva como pilar fundamental para la tesis doctoral. A lo largo de sus epígrafes y apartados desarrollamos un análisis de las principales investigaciones en el ámbito de la educación inclusiva y la educación matemática, detallando y clarificando los conceptos y posicionándonos con respecto a las diferentes perspectivas del objeto de estudio. El primer apartado del capítulo hace un recorrido por las diferentes conceptualizaciones de la inclusión, a nivel europeo y nacional, para centrarnos, en el segundo apartado, en retratar las características del alumnado con Trastorno del Espectro Autista, concretando en la categorización de nivel 1 (APA, 2013) del trastorno. En un tercer y cuarto apartado, trasladamos el foco a la enseñanza a la resolución de problemas, analizando los significados teóricos y prácticos de este tópico, desde contextos generales hasta su didáctica con alumnado TEA y TEA-1. Finalmente, el apartado cinco versa sobre la figura del docente y su formación, con la doble perspectiva que guía esta tesis doctoral y que se manifiesta en los referentes teóricos y antecedentes sobre conocimiento especializado del docente de matemáticas, la práctica inclusiva del docente y una primera aproximación teórica al diálogo entre estas dos perspectivas.

II.1. La inclusión para atender a la diversidad

El concepto de diversidad abarca la multiplicidad de características presentes en un grupo. Como seres sociales, los humanos estamos inmersos en una red de símbolos que enriquecen y mejoran nuestras interacciones y comunicaciones (Castilla Segura, 2018), una estructura que influye directamente en nuestra identidad y en la de todas las personas que nos rodean.

Esta diversidad se refleja en todos los contextos sociales, incluida la escuela. El centro educativo es denominador común del proceso de crecimiento y construcción de todos los niños y niñas, sus personalidades e identidades. Cuanto más diverso sea el contexto del que se nutran, más amplio será el conjunto de atributos y cualidades con los que puedan sentirse identificados (Castilla Segura, 2018).

Según la UNESCO (Delors, 1996), la educación debería basarse en cuatro pilares fundamentales: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser. Estas competencias se manifiestan en la vida cotidiana de los niños y niñas que conviven en los centros educativos, compartiendo tanto espacios como tiempos. Por lo tanto, la escuela debe convertirse en un espacio inclusivo, entendiendo inclusión como un proceso continuo, dirigido a ofrecer una educación de calidad para todas y todos, respetando la diversidad y las diferentes necesidades de aprendizaje, habilidades, características y expectativas de los estudiantes y las comunidades, eliminando todas las formas de discriminación (*International Bureau of Education* de UNESCO, 2009). Dar una educación de calidad inclusiva a lo largo de toda la vida se encuentra dentro de los Objetivos de Desarrollo Sostenible que desarrolla la Agenda 2030 (Objetivo 4).

Sin embargo, las definiciones de inclusión tienden en ocasiones a simplificarse en la práctica; no olvidemos que inclusión no significa la mera presencia (física) en el aula (Roos, 2023). Además, la inclusión no debe reducirse al alumnado con necesidades educativas especiales (Ainscow, 2020).

II.1.1. La definición de inclusión

Desde la Declaración de Salamanca (1994), se han movilizado y fomentado políticas en apoyo de la escuela para todos y todas, que proporcionen una respuesta adecuada para todos los estudiantes, independientemente de sus características individuales. La Declaración de Salamanca y su Marco de Acción plantea los principios de la educación inclusiva que, tras 30 años, aún seguimos defendiendo (Ainscow, 2020; Ainscow y Messiou, 2016; Echeita, 2016; Echeita y Navarro, 2014; López-Melero, 2011; Muntaner et al., 2016; Plancarte, 2017).

La Declaración de Salamanca fue un punto de inflexión para la defensa y definición del concepto de inclusión, como un proceso que responde a la diversidad de necesidades de todos los niños a través de la participación en el aprendizaje y la vida escolar (UNESCO, 1994). Pero la tarea de definir inclusión educativa ha sido desarrollada durante décadas, impulsada por diversos autores. Así, presentamos a continuación diferentes definiciones de inclusión, en orden cronológico:

- **Stainback y Stainback (1992):** es un modelo en el que todos los estudiantes, independientemente de sus habilidades o discapacidades, estudian juntos en las mismas aulas y escuelas.
- **Lipsky y Gartner (1997):** se centra en la reformulación de las escuelas para que todos los estudiantes, con o sin discapacidades, aprendan juntos, apoyados por un currículo adaptado y métodos de enseñanza flexibles.
- **Mittler (2000):** es un enfoque educativo basado en la integración total de todos los estudiantes, independientemente de sus capacidades, en el entorno educativo general, asegurando su plena participación y éxito en la comunidad escolar.
- **Booth y Ainscow (2002):** es un proceso que tiene como objetivo aumentar la participación de todos los estudiantes en la escuela, promoviendo el acceso y la participación equitativa.
- **Parrilla (2002):** la educación inclusiva supone dos procesos interrelacionados: el proceso de incrementar la participación del alumnado

en la cultura y currículum de las comunidades ordinarias, y el proceso de reducir la exclusión.

- **Arnáiz (2003):** es una estrategia educativa basada en el respeto a la diversidad y la participación de todos los estudiantes en un ambiente escolar común, garantizando el acceso y la equidad en el aprendizaje.
- **Ainscow (2005):** implica la identificación y eliminación de barreras para el aprendizaje y la participación, y la movilización de recursos para apoyar a todos los estudiantes
- **Sánchez Palomino y Pulido Moyano (2007):** supone la transformación de las escuelas para responder a las necesidades de todos los estudiantes, promoviendo la igualdad y eliminando cualquier forma de exclusión.
- **Slee (2011):** es un proceso continuo de reestructuración de las políticas, prácticas y culturas de las escuelas para que todos los estudiantes puedan participar y aprender juntos, eliminando barreras y fomentando la equidad.
- **Murillo y Hernández (2011):** es un enfoque educativo que busca asegurar la participación y el éxito de todos los estudiantes, eliminando las barreras que impiden su pleno acceso al aprendizaje y promoviendo un entorno escolar que valore y respete la diversidad.
- **López Melero (2012):** el rasgo distintivo de la educación inclusiva es la conceptualización de la diferencia como un valor.
- **Messiou (2017):** implica la presencia, participación y progreso de todos los estudiantes.
- **UNESCO (2017, p.7):** supone el “fortalecimiento de la capacidad del sistema educativo para llegar a todos los estudiantes”.
- **Arnáiz et al. (2019):** proyecto de participación social y ciudadana que requiere procesos de cambio y mejora que proporcionen acogida y bienestar a todo el alumnado.
- **Ainscow (2024):** modelo educativo de reforma y transformación escolar para dar respuesta a la diversidad de necesidades de aprendizaje del alumnado.

- **Arnáiz et al. (2024):** Confusión de la comunidad educativa ante el significado de la educación inclusiva y, por tanto, repercusión negativa en la puesta en práctica de acciones inclusivas.

Todos estos autores coinciden en describir la inclusión como un proceso, un enfoque o hasta una estrategia, que otorga importancia a la participación de todos los estudiantes de la escuela, de manera que se reducen las barreras que limitan la equidad en un entorno adaptado a la diversidad. Esta perspectiva plantea transformar las prácticas, políticas y acciones escolares para responder a las necesidades de todos los estudiantes y garantizar una educación de calidad.

II.1.2. Indicadores para la inclusión

La teoría es clara: es necesaria una educación que respete la diversidad. Pero ¿cómo podemos llevar a cabo una práctica educativa inclusiva? Existe una necesidad claramente demostrada a nivel internacional de desarrollar indicadores que ayuden a las personas involucradas en la educación a comprender mejor el carácter inclusivo de sus sistemas educativos y a poder monitorizar su progreso. Kyriazopoulou y Weber (2009) describen los indicadores de la educación inclusiva en tres niveles: micro, que se refiere a individuos y aulas, meso, que involucra a las escuelas y los contextos en los que operan, y macro, que incluye sistemas más amplios como organismos gubernamentales locales y nacionales. Este enfoque ha sido ampliamente aceptado por los gobiernos nacionales, particularmente en Europa. Loreman et al. (2014) contribuyen con otro marco para medir la educación inclusiva: el modelo *Input-process-outcomes*. Complementan las ideas anteriores considerando otros aspectos, como la financiación, políticas, recursos e infraestructuras necesarias para movilizar prácticas que produzcan resultados beneficiosos para todos y todas, como éxito académico, desarrollo profesional o académico, etc.

Si pensamos en estas dos teorías, desde la perspectiva del input a nivel macro, durante varias décadas, una serie de eventos que forman parte de una revolución social han desafiado la visión mantenida por las políticas de varios países desarrollados (OCDE, 1995). Un ejemplo importante es el Informe Warnock,

publicado en 1978 por el Comité de Educación del Reino Unido, que abordó la diversidad considerando a las niñas y niños con necesidades educativas especiales (NEE) como aquellos que enfrentan dificultades en su educación. Estas necesidades abarcan una amplia gama, desde discapacidades físicas, sensoriales o cognitivas, hasta problemas emocionales, de aprendizaje o sociales (López y Valenzuela, 2015). El informe sugirió que la educación especial debería ser suplementaria en lugar de desarrollarse separadamente de los cursos regulares. La anteriormente mencionada Declaración de Salamanca sobre Necesidades Educativas Especiales (UNESCO, 1994, p. 8) planteó un cambio de paradigma, atendiendo principalmente a una pregunta: qué necesidades, en lugar de qué déficit tiene el alumnado:

Los niños y los jóvenes con necesidades educativas especiales deben tener acceso a las escuelas ordinarias, las cuales deberán incluirlos en el marco de una pedagogía centrada en el niño y con la capacidad para dar respuesta a sus necesidades.

A principios del siglo XXI, Booth y Ainscow (2002) introdujeron el concepto de “barreras para el aprendizaje y la participación”. Este enfoque marcó un punto de inflexión en la integración de los estudiantes, ya que se reconoció que el propio contexto escolar y social podía ser una limitación que necesitaba ser superada, más allá de las características individuales de cada niño o niña. La UNESCO (2021) señala que la reforma de los sistemas educativos es el objetivo de la inclusión, de manera que las escuelas adquieran la capacidad de proporcionar un espacio adaptado para educar a todas las niñas y niños. Es decir, la escuela debía adaptarse al alumnado, lo que nos lleva al nivel meso.

II.1.3. La escuela inclusiva

De acuerdo con la revisión de Loreman et al. (2014), varios documentos internacionales proporcionan indicadores para evaluar la presencia de la educación inclusiva. Destacamos el *Index for Inclusion* de Booth y Ainscow (2002), que ha sido ampliamente utilizado en todo el mundo, traducido a, al menos, 22 idiomas diferentes y adaptado a diversos contextos internacionales (Loreman et

al., 2014). Se rige por tres principios fundamentales, valores que deben impregnar las escuelas y sus prácticas para alcanzar la inclusión escolar:

- La creación de una **cultura inclusiva**, desarrollando un sentido de pertenencia y participación de todos los miembros de la comunidad educativa. Es necesario abogar por una visión compartida que dé valor a la diversidad y promueva la igualdad y el respeto.
- Producción de **políticas inclusivas**, reflejando en ellas el compromiso con la inclusión y el apoyo a la participación de los estudiantes, que desarrolle una escuela para todas y todos. Es necesario crear estructuras que respondan a las necesidades individuales, organizando el apoyo a la diversidad.
- Desarrollo de **prácticas inclusivas**, diseñando e implementando actividades de enseñanza y aprendizaje accesibles para todo el alumnado. La movilización de recursos, humanos y materiales se convierte en una herramienta clave para apoyar el aprendizaje inclusivo.

A nivel nacional, la escuela inclusiva se nutre de las propias leyes educativas. La evolución de estas leyes se ha reflejado en la atención a la diversidad de las escuelas, desde su concepción centrada en el déficit (Ley General de Educación; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 1970), la integración (LODE, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 1985; LOGSE, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 1990) y finalmente, desde la ley Orgánica de Educación (LOE 2/2006; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2006), necesidades educativas de atención específica, cambiando el foco hacia las necesidades y la creación y adaptación de un contexto para atenderlas.

Según Ainscow (2010), no hay fórmulas específicas para implementar la inclusión escolar, pero sí hay elementos esenciales que pueden facilitar su realización en nuestras escuelas. Por ejemplo, Adderley et al. (2015) defienden que, para que se desarrolle la inclusión, esta se ha de entender como un proceso dinámico que se nutre de las relaciones entre los estudiantes, los docentes y estudiantes, y entre estos y la propia escuela.

La reestructuración de las organizaciones y de los sistemas educativos será necesaria para realmente dar respuesta a las necesidades de los centros educativos y sus usuarios (Marchesi et al., 2021), pero a nivel de aula y finalmente, nivel micro, recae sobre los docentes la labor de desarrollar prácticas inclusivas.

Diversos modelos de enseñanza abogan por la inclusión educativa, como la teoría de Inteligencias Múltiples de Gardner (2011), que replantea la atención a la diversidad de pensamiento y estilos de aprendizaje intrínsecos a todos los individuos. Gardner argumenta que cada individuo tiene una combinación única de estas inteligencias, las cuales define como capacidades para resolver problemas en distintos contextos (Gardner, 1983) y que la labor educativa reside en adaptarse para desarrollar y aprovechar estas diversas capacidades.

Ainscow y Messiou defienden la práctica *inclusive inquiry*, que podríamos definir como desarrollar prácticas en el aula basadas en la discusión e investigación con los estudiantes (Messiou y Ainscow, 2015; Messiou et al., 2016; Ainscow y Messiou, 2021). Otorgar una posición de valor a las interacciones y relaciones que ocurren en las aulas de primaria entre estudiantes y docentes, puede impulsar acciones que desarrollen la inclusión (Ainscow y Messiou, 2018). Según estos autores, crear espacios en el aula para la discusión con los estudiantes, implica dar cabida a diferentes puntos de vista, lo que puede estimular nuevas formas de pensamiento y favorecer que se desarrollen distintas maneras de trabajar en el aula (Ainscow y Messiou, 2021). Esta visión de la enseñanza puede además favorecer en los docentes un cambio de perspectiva sobre cómo abordar diferentes actividades para atender a la diversidad de su aula (Figura 1).

Figura 1

Esquema de Inclusive Inquiry, que Relaciona el Diálogo Docente-Alumnado (en el Centro) con la Atención a la Diversidad, la Creación de Situaciones de Aprendizaje y el Desarrollo de Prácticas Inclusivas



Nota: Recuperado de Messiou y Ainscow (2020, p. 7)

Para desarrollar cualquier metodología didáctica basada en el paradigma inclusivo, es fundamental que el profesorado se comprometa con su propia formación (Booth y Ainscow, 2002). Por un lado, el docente requiere contemplar las características asociadas a la diversidad del alumnado de su aula, y por otro, las principales dificultades y limitaciones que pueden encontrarse al abordar con los estudiantes diferentes áreas del currículo. En los siguientes epígrafes, nos centraremos en el Trastorno del Espectro Autista (TEA) y en el estado del arte de las investigaciones sobre enseñanza de la matemática y resolución de problemas al alumnado con este trastorno del desarrollo.

II.2. El Trastorno del Espectro Autista

II.2.1. Concepto y etiología. Teorías explicativas

El Trastorno del Espectro Autista (TEA) es un trastorno del desarrollo congénito que afecta al comportamiento y la comunicación (Velarde-Incháustegui et al., 2021), La literatura asocia ciertas características a los estudiantes con TEA, como

necesidades en la comunicación social e interacción, intereses restringidos y patrones de comportamiento repetitivos (Carr y Seah, 2019).

La etiología del TEA es multifactorial (Ruiz-Lázaro et al., 2009). La literatura señala los factores genéticos, relacionados con la herencia genética, alteraciones y algunos síndromes (Scherer y Dawson, 2011); factores neurológicos derivados de afectaciones durante etapas prenatales y de la estructura y formación del cerebro que afecta a ciertas áreas cerebrales y sus conexiones neuronales (Amaral et al., 2008); y los factores ambientales, como complicaciones prenatales y perinatales, la exposición a toxinas o la edad de los progenitores (Hallmayer et al., 2011; Volk et al., 2013).

Debido a la variabilidad de estas características y necesidades en el diagnóstico infantil, resulta necesario hablar de un espectro, pero citamos a continuación las tres teorías principales que tratan de describir las características que se contemplan en el espectro TEA: la Teoría de la Coherencia Central, la Teoría de la Mente y la Teoría de las Funciones Ejecutivas. Es importante destacar que las investigaciones relacionadas con estas tres teorías indican que el espectro autista incluye una amplia variabilidad de características (de Andrade y Miarka, 2019), además de las particularidades individuales de cada persona.

La Teoría de la Coherencia Central fue desarrollada por Frith y Happè (1994). Se refiere al procesamiento de la información empleando patrones globales que posibilitan dar sentido y coherencia. Las autoras señalan que las personas autistas manifiestan dificultades para integrar la información, lo que repercute en la formación de ideas coherentes y con significado.

La Teoría de la Mente (Baron-Cohen, 2000), plantea la existencia de un componente cognitivo que daría sentido a las dificultades en el ámbito social y comunicativo de las personas con autismo. Se traduce como una alteración en la manera de percibir y comprender mensajes verbales y no verbales en situaciones comunicativas y la creación de esquemas mentales para triangular la información recibida (Huaquián, 2009), afectadas además por las dificultades para mantener la atención en más de un elemento, que cobra sentido considerando la multitud de

factores no textuales y contextuales que pueden condicionar la transmisión de un mensaje. Por último, la Teoría de la Función Ejecutiva, desarrollada por Ozonoff et al. (1991) se refiere a las habilidades y procesos que permiten resolver problemas (Ozonoff, 1997). Algunas de ellas son las habilidades para planificar y organizar, la capacidad de predecir o inferir, la memoria de trabajo, la autorregulación, la atención sostenida o la capacidad de inhibición (Martos-Pérez y Pérez, 2011).

II.2.2. Detección del TEA

El diagnóstico del TEA es complejo debido a la variabilidad en su manifestación. Además, no existe un biomarcador específico para confirmar el trastorno, lo que hace que el diagnóstico sea principalmente clínico (Lord et al., 2018). La detección suele iniciarse cuando se observan ciertas conductas en las interacciones con el entorno más próximo del estudiante, como los docentes o familiares, seguidos de una evaluación de especialistas psicólogos y/o neurólogos. Los criterios de diagnóstico clínico del TEA siguen el Manual Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales 5ta edición (DSM-V, APA, 2013). Los criterios siguen una descripción de diferentes aspectos, considerando (a) deficiencias persistentes en la comunicación social y en la interacción social en diversos contextos, (b) patrones restrictivos y repetitivos de comportamiento, intereses o actividades, (c) los síntomas han de estar presentes en las primeras fases del período de desarrollo, (d) los síntomas causan un deterioro clínicamente significativo en lo social, laboral u otras áreas importantes del funcionamiento habitual y (e) estas alteraciones no se explican mejor por la discapacidad intelectual (trastorno del desarrollo intelectual) o por el retraso global del desarrollo.

Se distinguen tres grados organizados en función del nivel de apoyo requerido en términos de la comunicación e interacción social y patrones de comportamientos restringidos, repetitivos y estereotipados (Tabla 1).

Tabla 1

Niveles del TEA de Acuerdo con la Clasificación de APA (2013)

Comunicación social	Comportamientos restringidos y repetitivos

Grado 3 “Necesita ayuda muy notable”	Deficiencias graves de las aptitudes de comunicación social verbal y no verbal causan alteraciones graves del funcionamiento, inicio muy limitado de las interacciones sociales y respuesta mínima a la apertura social de otras personas.	La inflexibilidad extrema de comportamiento, u otros comportamientos restringidos/repetitivos. Ansiedad intensa/ dificultad para cambiar el foco de acción.
Grado 2 “Necesita ayuda notable”	Deficiencias notables de las aptitudes de comunicación social verbal y no verbal; problemas sociales aparentes incluso con ayuda <i>in situ</i> ; inicio limitado de interacciones sociales; y reducción de respuesta o respuestas no normales a la apertura social de otras personas.	La inflexibilidad de comportamiento, la dificultad de hacer frente a los cambios u otros comportamientos restringidos/ repetitivos aparecen con frecuencia. Ansiedad y/o dificultad para cambiar el foco de acción.
Grado 1 “Necesita ayuda”	Sin ayuda <i>in situ</i> , las deficiencias en la comunicación social causan problemas importantes. Dificultad para iniciar interacciones sociales y ejemplos claros de respuestas atípicas o insatisfactorias a la apertura social de otras personas. Puede parecer que tiene poco interés en las interacciones sociales.	La inflexibilidad de comportamiento causa una interferencia significativa. Dificultad para alternar actividades. Los problemas de organización y de planificación dificultan la autonomía.

Nota: Recuperado del manual DSM-V (APA, 2013, p. 30)

II.2.3. Las necesidades educativas del TEA y TEA-1

Cuando iniciamos esta tesis doctoral, consideramos como foco de estudio el alumnado con Síndrome de Asperger, contemplado en la legislación Andaluza como alumnado con NEAE. Atendiendo a la categorización del DSM-V (APA, 2013), este Síndrome se incluye en el grado 1 de TEA, en adelante (TEA-1), que engloba a los estudiantes que requieren de apoyo para superar las limitaciones asociadas a dificultades en la comunicación social, que pueden afectar su proceso de

aprendizaje en términos de desarrollar interacciones sociales habituales, seguir normas sociales o relacionadas con el funcionamiento ejecutivo.

Las investigaciones que han considerado al estudiantado TEA-1 señalan una tendencia por rutinas fijas y una preferencia por ciertos patrones de comportamiento, que a menudo se vinculan a vulnerabilidad emocional y una baja tolerancia a la frustración (Carr y Seah, 2019). Las principales dificultades se encuentran en el área social y de comunicación y en los patrones de conducta restrictivos y repetitivos (Rotili et al., 2022). Sin embargo, la literatura también subraya habilidades como una memoria visual y mecánica notable, la capacidad para enfocarse en detalles y para reconocer patrones (de Giambattista et al., 2019).

Teniendo en cuenta todas estas características, diversos estudios señalan la eficacia de algunas técnicas para mejorar el desarrollo de los estudiantes TEA y TEA-1. Las técnicas para trabajar con alumnado TEA, aunque muy diversas y con diferentes focos de acción (alteraciones comunicativas, alteraciones sociales, alteraciones en la flexibilidad, etc.), comparten tres rasgos en común: (a) deben estar individualizadas, para atender las características personales, (b) deben estar estructuradas, adaptadas al entorno e implicar los agentes educadores del estudiante, y, por tanto, (c) contar con la participación de la familia.

Además de diferentes terapias y psicoterapias que se desarrollan con especialistas, otras técnicas se han diseñado para cubrir necesidades relacionadas con las alteraciones comunicativas. Los sistemas aumentativos y alternativos de comunicación (SAAC) son instrumentos de intervención que favorecen el proceso de enseñanza mediante instrucciones con un código comunicativo y su representación, física o digital. Un ejemplo de SAAC muy utilizado con personas TEA es el sistema comunicativo de intercambio de imágenes (PECS, Figura 2) (Wendt et al., 2019; Schaefer Whitby et al., 2019), que tiene como objetivo desarrollar la comunicación funcional apoyándose en el pensamiento visual y un contexto más cercano al estudiante.

Figura 2

Ejemplo del Sistema de Comunicación por el Intercambio de Imágenes (PECS)



Nota: Recuperado de Pyramid Educational Consultants (2017)

Por otro lado, señalamos la aplicación del TEACCH. Acrónimo de *Treatment and Education of Autistic and related Communication Handicapped Children*, este programa fue diseñado por la universidad de Carolina del Norte en 1966, de la mano de Schopler. De acuerdo con Soetikno y Mar'at (2021), esta metodología surgió con el objetivo de establecer un contexto más cercano y predecible para las personas TEA. El TEACCH se apoya en la combinación de diferentes técnicas y métodos, que se usan de manera flexible en función de las necesidades y habilidades de la persona (Schopler et al., 1995). Sin embargo, aunque la investigación ha subrayado la eficacia de estas técnicas (Koegel et al., 2012; Mesibov y Shea, 2010), esta no deja de ser relativa, dado que el aprendizaje de diversas habilidades en los estudiantes no implica su generalización a otros contextos sociales ni el desarrollo de otras capacidades (Horner et al., 2002). Además, como hemos comentado anteriormente, el espectro es muy amplio, lo que, por consiguiente, engloba un gran número de habilidades y necesidades en los estudiantes.

Los estudiantes TEA-1 suelen asistir al aula ordinaria, formando parte de su diversidad, lo cual implica considerar sus características cuando se aborda la enseñanza de resolución de problemas matemáticos.

II.3. La Resolución De Problemas

II.3.1. Qué es un problema

De acuerdo con la Real Academia de la Lengua Española (1970), definimos problema como una situación de dudosa o difícil solución. Esta concepción se adapta a los distintos contextos, entre ellos, el problema matemático en el aula de educación primaria. De acuerdo con Lester (2013), la concepción de la resolución de problemas implica que el individuo tuviera clara cuál es la meta del reto propuesto, que no es alcanzable de manera directa. Otros autores asocian el término problema a una situación de incertidumbre (Lesh y Doerr, 2003; Schoenfeld, 2007), y que puede (o no) tener una solución, de manera que los estudiantes deben desarrollar capacidades para alcanzarla (Verschaffel et al., 2000). Otras definiciones acercan la resolución de problemas al proceso de enseñanza, identificando la incertidumbre propia de un problema como un elemento clave en el aprendizaje, asociándola a procesos de retroalimentación y andamiaje (Kapur, 2014) y motor en el desarrollo de estrategias (Verschaffel et al., 2018).

Estas diferentes concepciones se han reflejado en la investigación. En 1980, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) planteaba la necesidad de convertir la resolución de problemas en el foco de la enseñanza de la matemática en las escuelas. Unos años después, en 1989, Stanic y Kilpatrick plantearon una clasificación de la investigación sobre resolución de problemas: como una actividad cognitiva, como un objetivo de aprendizaje en sí mismo, poniendo el foco en las habilidades necesarias para abordarlo y como estrategia didáctica, considerando la resolución de problemas como herramienta para enseñar matemáticas, desarrollar habilidades y condicionar creencias y actitudes en esta área de conocimiento (Liljedahl y Cai, 2021). Durante los últimos 30 años, la perspectiva sobre la enseñanza y aprendizaje en relación con la resolución de problemas ha ido variando, acercándose, principalmente, a las categorías dos y tres de estos autores, considerando la práctica de resolver problemas como un medio de aprendizaje o un contenido en sí (Branca, 1980; Hughes et al., 2017; Ng y

Cui, 2021) dada la infinidad de habilidades, modos de representación, estrategias, concepciones y contextos que puede involucrar. No obstante, de acuerdo con Liljedahl y Cai (2021), la resolución de problemas se ha convertido en un proceso cada vez más complejo que se nutre de variables contextuales y sociales: las corrientes actuales abogan por desviar la resolución individual hacia la colaborativa (Dahl et al., 2018; Pruner y Liljedahl, 2021) e implicar la creación de un contexto adaptado a la realidad de los estudiantes (Mellone et al., 2021).

Paralelamente, cómo se aborden los problemas en el aula va a depender de la actitud y conocimiento de los docentes respecto a la concepción de problema y su enseñanza (Berk y Cai, 2019; Novotná et al., 2014; Son y Lee, 2021). Esta concepción debe incluir acciones cognitivas, tipos de conocimiento y habilidades (Lester, 2013) y que además planteen la *decisión* como el centro de la resolución (Koichu, 2018).

Desde nuestro foco de estudio, los problemas que consideramos en nuestra investigación se caracterizan por plantear un reto desde un contexto cercano a los estudiantes, en la mayoría de los casos, seleccionados por ser próximos a alguno de sus focos de interés. Además, su diseño y planteamiento de la resolución va más allá de seguir un algoritmo, sino que implica estrategias, lo que nos lleva a hablar de heurísticos.

II.3.2. Estrategias para resolver problemas: Los heurísticos.

Se dice que cuando Arquímedes, en su bañera, alcanzó la solución al problema que le había planteado un encargo del mismísimo rey Hierón, un grito de *eureka* resonó en su estancia. Y resulta que, en griego antiguo, *Eureka* y heurístico comparten la misma raíz.

El término heurístico se refiere a una guía o estrategia que se asocia con cada paso en la resolución de un problema, ayudando a comprenderlo y a organizar eficientemente los recursos para encontrar una solución (Carrillo, 1998). Al usar heurísticos, se destaca la importancia del contexto de resolución, así como la

experiencia y las habilidades de la persona que enfrenta el problema (Marchi, 1980).

Este término fue introducido por Polya (1945), quien llevó a cabo una reflexión sobre las fases al resolver problemas, diferenciando las de comprensión, de planificación y ejecución de un plan y el *look back*, que entendemos por revisión del proceso. Igualmente, Polya estudió las estrategias que el buen resolutor llevaba a cabo para alcanzar la solución del problema. Unos años más tarde, Schoenfeld (1980) cuestionaba cómo, conociendo las estrategias y las fases, el buen resolutor no conseguía mejorar su proceso de abordaje de los problemas. Planteó entonces otras variables, añadidas a las estrategias heurísticas: los recursos y el sistema de creencias del resolutor.

La clasificación de heurísticos ha sido motivo de discusión desde diferentes paradigmas, pero encontramos cierta avenencia respecto a las distintas funciones cognitivas que implican. Goldin y Germain (1983) planteaban cuatro dimensiones: planificación anticipada del uso de un proceso en particular, métodos específicos de dominio para aplicar el proceso, dominios y niveles en los que se puede aplicar el proceso y criterios prescriptivos que sugieren que el proceso se aplique en una situación matemática dada. La propuesta de clasificación de Puig (1996) distinguía entre sugerencias heurísticas, que son directrices para orientar hacia la resolución (como las fases de resolución); herramientas heurísticas, que son instrumentos para transformar el problema (como la analogía o la división del problema en partes); y destrezas heurísticas, que son métodos para explorar las posibilidades del problema sin alterarlo (como crear una tabla).

Esta subdivisión de los heurísticos permite una gran variedad de enfoques para resolver problemas, que se complementan entre sí y ayudan al resolutor a ser consciente de los caminos que elige. De esta manera, el aprendizaje no se mide por la capacidad de resolver el problema en sí, sino por la habilidad para escoger y aplicar la estrategia adecuada (Puig, 1996). Las decisiones que se toman al abordar un problema nutren las habilidades como resolutores (Schoenfeld, 2011), y mejoran la capacidad para enfrentarlo desde diferentes perspectivas (Novotná et

al., 2014). Utilizar heurísticos puede contribuir a la retroalimentación de técnicas y conocimientos del resolutor, mejorándolos (Cocinero, 2015).

Al resolver problemas, la persona resolutora se sitúa en el centro del proceso de aprendizaje, organizando, planeando y desarrollando los pasos necesarios para alcanzar una solución (Cocinero, 2015; Goldin y Shteingold, 2001). Los heurísticos pueden ser recursos de organización y visualización de la información, lo que favorece el tratamiento de los datos (Novotná et al., 2014), o de simplificación y de revisión del propio proceso de resolución (Delisio et al., 2018). Todo ello facilita el desarrollo cognitivo del estudiante a partir de sus propias experiencias (Ordoñez, 2017), y cubre ciertas necesidades asociadas a la función ejecutiva, beneficiando, por tanto, a la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, entre ellos, aquellos niños y niñas con TEA-1.

A lo largo de la última década, la lista de heurísticos ha ido incrementando a medida que la investigación sobre resolución de problemas aumentaba. En nuestra investigación nos centramos algunos de ellos, descritos a continuación (Polya, 1945; Puig, 1996), por su potencial como estrategias que:

- Se apoyan en el componente visual de la resolución, como la representación y el uso de gráficos o funciones, que pueden llevarse a cabo mediante diferentes tipos de esquemas y dibujos y con distinto grado de formalidad y rigor. Es decir, podemos representar una relación funcional mediante un esquema tabular con dibujos o un gráfico de dispersión que represente los valores de cada variable.
- Plantean una estructuración secuencial del problema como la resolución marcha atrás, que se refiere a resolver el problema iniciando por el resultado, invirtiendo el orden de los pasos dados; o el descubrimiento de patrones, una regularidad inmersa en una serie aritmética o geométrica.
- Movilizan el desarrollo de habilidades relacionadas con las funciones ejecutivas como la analogía, que consiste en buscar un problema similar para replicar su estrategia, estableciendo relaciones entre métodos de

resolución; el ensayo y error y la experimentación sistemática; la simplificación del problema, la reformulación o establecimiento de submetas, estrategias que permiten focalizar la resolución en un solo caso o una sola variable del enunciado.

En esta investigación nos hemos basado en el trabajo de Carrillo (1998), de quien tomamos su descripción de los heurísticos asociados a las distintas fases de resolución de problemas (Tabla 2):

Tabla 2

Heurísticos Asociados a las Fases de Resolución

Comprensión	Organizar la información
	Ejemplificar
	Expresar en otros términos
Planificación y Exploración	Simplificar
	Estimar
	Buscar regularidades con intención de generalizar;
	Tantear;
	Considerar problemas equivalentes;
	Argüir por contradicción;
	Asumir la solución;
	Partir de lo que se sabe;
	Planificar jerárquicamente a solución;
	Descomponer el problema;
	Explorar problemas similares;
Ejecución:	Conjeturar
	Registrar todos los cálculos;
	Resaltar los logros intermedios
	Actuar con orden y con precisión
Verificación:	Explicar el estado de la ejecución
	Analizar la consistencia de la solución
	Expresar de otra forma la solución
	Analizar la consistencia del proceso
	Analizar si se puede llegar al resultado de otra manera.;
	Generalizar

Nota: Elaborado a partir de Carrillo (1998) y Cruz y Carrillo (2004)

Verschaffel et al. (2020) señalan que el uso de heurísticos no garantiza alcanzar la solución del problema, pero inducen en el resolutor un enfoque sistemático al abordar la tarea, incrementando las posibilidades de resolverla. Es decir, pueden facilitar que se apliquen métodos más organizados y coherentes, lo que puede beneficiar a aquellos estudiantes con dificultades en estos términos.

Emplear heurísticos puede, como hemos mencionado anteriormente, contribuir al desarrollo de habilidades en los estudiantes, y siguiendo las ideas de Schoenfeld (1985), Goldin (2004) señala que emplear estrategias heurísticas es una manera transformar el problema en otro que pueda ser más fácil. Pero, para pensar matemáticamente no basta con encontrar la resolución del problema, sino extrapolar la solución a una pregunta más general (ibid.), cobrando importancia el heurístico “generalización”. Podríamos plantearnos que esta estrategia se nutre de otros heurísticos, considerando que para generalizar es necesario partir de casos concretos y simples, tantear posibles resultados, representar los datos y ejemplos de diferentes formas y encontrar las posibles relaciones entre las variables. El siguiente epígrafe trata de desglosar las principales aportaciones de la literatura sobre este heurístico.

II.3.2.1. La estrategia de generalización

Una de las estrategias que Polya contemplaba en su primera aproximación a los heurísticos era la generalización. Esta estrategia ha sido definida de diversas maneras: como un proceso de resolución que se nutre de las regularidades descubiertas por el estudiante, así como su capacidad de extrapolar a otros casos, desde lo más concreto hasta un mayor nivel de abstracción (Callejo y Zapatera, 2017); como el proceso que describe el paso de lo particular a lo general, estableciendo las relaciones que vinculan cada caso concreto (Zapatera, 2018); o un vínculo de coordinación entre las diferentes variables interdependientes (Rivera, 2010). Desde esta perspectiva, Stacey (1989) propuso que la generalización debía clasificarse según su dependencia de la secuencia: generalización cercana, si se basa en un conteo paso a paso, o generalización lejana, si va más allá de este enfoque. El proceso de pasar de la generalización cercana a la lejana implica establecer una relación más compleja que integre la posición dentro de la secuencia y el número de términos involucrados (Radford, 2011), enfocándose no en los casos específicos, sino en el patrón, la regularidad y las relaciones que estructuran la secuencia de términos (Kaput, 1999).

Comprender el proceso que sigue un estudiante al identificar la característica común de una secuencia implica un acercamiento al desarrollo del sentido algebraico, considerado en el currículo (Real Decreto 157/2022; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022). En el currículo de Primaria de España, se relaciona este sentido con prácticas como la identificación de patrones y relaciones entre variables, la expresión de regularidades y la modelización de situaciones mediante expresiones algebraicas (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022). Esto sitúa la generalización como actividad que debe estar presente en el aula de primaria. De acuerdo con Vergel (2015), la generalización de patrones es una de las claves para introducir el álgebra en los centros educativos y esta es, de hecho, uno de los focos de este trabajo. Sin embargo, utilizar patrones para inducir el álgebra puede desembocar en que los estudiantes empleen el ensayo y error o deducciones sin coherencia en vez de desarrollar pensamiento algebraico (MacGregor y Stacey, 1993; Radford, 2008).

Partimos de la idea de que las relaciones funcionales que vinculan las variables y elementos de una secuencia constituyen una estructura matemática que puede resultar abstracta para los estudiantes de primaria, de modo que se hace necesario proporcionar un contexto similar a la relación funcional que puedan descomponer de forma tangible y manipulativa. Carraher et al. (2008) plantean el uso del problema verbal para crear este contexto y Pinto y Cañadas (2021) señalan las representaciones (verbales, pictóricas, gráficas, etc.) como herramientas para generalizar hasta que puedan usarse diversas notaciones de manera independiente e incorporar gradualmente símbolos algebraicos. Morselli y Robotti (2023) refieren cómo los estudiantes pueden construir significados en sus procesos de generalización a partir de registros diferentes, desde kinestésicos (gestos, movimientos) hasta algebraicos (Chico-Gómez et al., en prensa-e; Radford, 2006; Robotti, 2017).

La problemática reside en comprender cómo los estudiantes de esta etapa educativa llevan a cabo los procesos de generalización, así como diversas estrategias para fomentarlos (Strachota, 2016).

Por un lado, podemos distinguir los tipos de generalización que se manifiestan en el aula, asociados al lenguaje pre-algebraico y a las representaciones semióticas que puede aparecer en el aula de educación primaria. Radford (2002) describe el tipo de generalización (Tabla 3) en función del enfoque de aprendizaje de cada alumno, desde la necesidad de una objetivación de la matemática, hasta la subjetivación nutrida por la propia reflexión del niño o la niña (Radford, 2021). Es decir, los estudiantes ven y comprenden las matemáticas como conceptos y estructuras concretas y externas a ellos mismos. Mediante procesos sociales activos y creativos de construcción de sentido (Radford, 2008) desarrollan la internalización y personalización de su comprensión, hasta formar parte de su propio pensamiento y experiencia. En nuestro contexto de enseñanza, esta perspectiva otorga valor al papel de la representación que cada niño o niña pueda poner en marcha durante la resolución. Este autor describe la generalización de patrones algebraicos como un proceso que depende de la capacidad de descubrir elementos de una secuencia S , la capacidad de descubrir la relación en común de esos elementos y la capacidad de abordar una expresión directa de la misma (Radford, 2006).

Tabla 3

Tipos de Generalización

Tipo de generalización	Definición
Aritmética	No se considera generalización. Simplemente se completa la secuencia geométrica o aritméticamente.
Factual	La generalización se establece en función de cómo interpreta la persona las relaciones entre los objetos concretos de la secuencia, con carácter numérico y centrándose en casos concretos y dependientes del contexto. Se basa en acciones realizadas sobre números, utilizando palabras y gestos guiados por la percepción.
Contextual	La generalización tiene un carácter social y lingüístico, pudiéndose explicar verbalmente. La persona resolutora ahonda en la relación de objetos matemáticos abstractos que derivan de la regularidad descubierta en los elementos concretos de la secuencia. No se llega a utilizar lenguaje simbólico.
Simbólica	La explicación de la generalización adquiere un carácter impersonal. La persona resolutora subjetiviza las relaciones entre

los elementos de la secuencia, que quedan independientes al contexto. Implica una forma de comprender y dar sentido a las relaciones matemáticas mediante el uso del símbolo o lenguaje simbólico, de manera que el estudiante puede expresar y comunicar ideas matemáticas de manera más general y abstracta

Nota: Adaptado de Radford (2002)

En consonancia a estos tres factores, la investigación de Blanton et al. (2015) señala distintos niveles de sofisticación al generalizar (Tabla 4). Estos niveles no son descritos como etapas ni secuencias lineales por las que todo niño/a ha de pasar, sino que se asocian a la progresión del pensamiento del estudiante al comprender un contenido matemático (Battista, 2004), en este caso la generalización.

Tabla 4

Niveles de Generalización

Nivel de generalización	Definición
Pre-estructural	No se describe ni utiliza ningún tipo de relación matemática al hablar de los datos del problema. No se describen patrones recursivos en una secuencia de términos independientes ni ninguna relación entre cantidades covariantes. No se evocan esas relaciones, ni siquiera cuando se caracterizan las variables para encontrar los valores sucesivos o construir las parejas de valores correspondientes. Se pueden observar regularidades, pero no basadas en las características matemáticas.
Recursiva particular	Se entiende el patrón como una secuencia de ejemplos concretos. No se puede encontrar la igualdad que relaciona cada ejemplo y que permita articular el patrón como una generalidad (Kaput et al., 2008). Se reconoce el patrón recursivo desde el proceso de contar, secuenciado un conjunto de valores, no como una relación más general.
Recursiva general	Se comprende el patrón recursivo como una regla general entre un conjunto de valores, sin referirse a ejemplos o casos concretos. Se pueden utilizar los casos numéricos para explicar el pensamiento, la propia descripción del patrón refleja una regla general.
Funcional particular	Se establece una relación funcional como un conjunto de relaciones particulares entre valores correspondientes específicos. Un descriptor específico de este nivel es que los niños puedan describir las relaciones entre casos específicos, pero no

	como una relación funcional respecto de un tipo de ejemplos. Se relaciona con la “Quasigeneralization” (Cooper y Warren, 2011)
Funcional general primitiva	Se podría conceptualizar una relación general entre dos cantidades a través de un conjunto de casos, aunque sus representaciones tengan características primitivas. Aunque los niños puedan describir una relación general, no pueden articular una relación que identifique las cantidades específicas comparadas en su forma generalizada o la transformación matemática entre ellas. Aun así, si se le proporciona una regla, pueden llegar a evaluarla. El lenguaje marca la diferencia entre el nivel 4 (funcional particular) y este.
Funcional General emergente	El pensamiento de los niños refleja atributos clave de una relación funcional generalizada, aunque su representación sea incompleta. La representación puede llegar a incluir cantidades generales, pero no la relación matemática entre ellas.
Funcional General condensada	Se conceptualizan las funciones como una relación general entre 2 cantidades arbitrarias. Es decir, se pueden describir explícitamente las cantidades generales y la transformación matemática entre ellas a través de una relación funcional representada mediante palabras y notación simbólica.
Funciones como objetos	Ciertas características distinguen este nivel del anterior: la capacidad de percibir límites en la generalización de una relación, así como la capacidad de comprender cómo se transforma la regla y construir dicha transformación.

Nota: Adaptado de Blanton et al. (2015), y Goñi-Cervera y Polo-Blanco (2019)

La investigación de Lannin, et al. (2006) aporta, además, un marco de referencia atendiendo a las estrategias desarrolladas por alumnado de quinto curso de educación primaria (10-11 años) y da un papel especial al material manipulativo y el uso de dibujos al generalizar, al disminuir los errores que acarrea el empleo del registro algebraico (Tabla 5).

Tabla 5

Estrategias de Generalización

Estrategias de generalización y subtipos		Definición
Conteo		Dibujar o construir el patrón y contar todos los elementos
Diferencia	Recursiva	Continuar la secuencia usando la diferencia numérica entre términos consecutivos como factor aditivo o explicitar la relación recursiva entre los términos consecutivos

	Múltiplo de la diferencia	Continuar la secuencia usando la diferencia numérica entre términos consecutivos como factor multiplicativo (ajustando o no el resultado) para obtener términos distantes o el término general
Razonamiento multiplicativo	Valor ausente	Usar la regla de 3 para encontrar un término lejano
	Proporcional	Usar estrategias multiplicativas, empezando con el término conocido de la secuencia para encontrar términos lejanos o el término general
Correspondencia	Visual	Expresar la relación funcional entre las variables basándose en las características pictóricas
	Numérica	Expresar la relación funcional entre las variables basándose en las características numéricas de la representación

Nota: Adaptado de Lannin et al. (2006)

II.4. La enseñanza del alumnado TEA para resolver problemas

II.4.1. Características del TEA en la resolución de problemas

La resolución de problemas se describe como un espacio de aprendizaje que posibilita la simplificación y contextualización en torno a los intereses del alumnado (Lieshout y Xenidou-Dervou, 2020), representando los datos y sus relaciones, las estructuras y desarrollando conjeturas (Coles y Ahn, 2022). Se convierte así en un vehículo que permite abordar los contenidos curriculares de la etapa primaria y crea un escenario para desarrollar habilidades y prácticas que aboga por la diversidad de pensamiento.

Esta perspectiva favorece la educación matemática de estudiantes TEA-1, pero resulta esencial definir las estrategias didácticas y metodológicas, dado que un gran número de investigaciones en este campo se han centrado en los ámbitos clínico y psicopedagógico (Carr y Seah, 2019; Klaren et al., 2017). Es necesario, además, considerar algunas de las características asociadas al TEA que pueden influir en el proceso de resolución de problemas de los estudiantes.

La investigación comparativa entre estudiantes con TEA y desarrollo típico al resolver problemas de Polo-Blanco et al. (2024) arroja resultados en términos de una correlación entre el nivel de abstracción que emplean los estudiantes y las variables inhibición, flexibilidad cognitiva y teoría de la mente. Esto implica que los

estudiantes TEA pueden manifestar mayores dificultades en los procesos de abstracción asociados a la resolución y el desarrollo de estrategias. Se han encontrado indicios, además, de que la comprensión verbal, la teoría de la mente, la flexibilidad cognitiva y la inhibición son variables condicionantes del proceso de resolución, entre otras funciones ejecutivas (Polo-Blanco et al., 2024).

Las dificultades en la comprensión verbal que los estudiantes TEA a menudo enfrentan pueden condicionar la lectura de un enunciado (Alderson-Day, 2014; Bae et al., 2015). Además, las dificultades asociadas a la teoría de la Teoría de la Mente pueden derivar en limitaciones en comprender una situación comunicativa y las acciones de los personajes del problema, dada la dificultad para entender y situarse en el lugar de otros (Martos-Pérez y Paula-Pérez, 2011). Al abordar la planificación y la ejecución del proceso de resolución, los estudiantes TEA tienden a enfocarse en completar y secuenciar un proceso, a veces omitiendo pasos o perdiendo la secuencia lógica, que se explica por las dificultades derivadas de la limitada flexibilidad cognitiva, la inhibición en sus procesos y las limitaciones en las funciones ejecutivas como la memoria de trabajo y la atención sostenida y continua (Bae et al., 2015; Bullen et al., 2020). Otras dificultades de la función ejecutiva pueden influir en la organización de los datos, el desarrollo de las operaciones y la capacidad de inferir ideas y resultados (Donaldson y Zager, 2010).

Trasladando la visión desde las dificultades hacia las habilidades, el pensamiento visual y la capacidad para percibir detalles asociadas al TEA se benefician de estrategias didácticas que incluyen la instrucción visoespacial (Kribbs y Rogowsky, 2016). El medio visual permite disminuir las dificultades para comprender textos escritos (Van Gardenen et al., 2013; Kribbs y Rogowsky, 2016; Delisio, et al., 2018), y se ha descrito como una herramienta para explorar, registrar y monitorizar los datos (Stylianou, 2011), facilitando la esquematización y la comprobación del proceso de resolución y su coherencia. El uso de diversos medios de representación dinamiza la comunicación y fomenta el desarrollo y aprovechamiento de las diferentes inteligencias, las cuales, según Gardner (2011) se definen como habilidades para resolver problemas. La selección de la forma de presentar o expresar la información en diferentes registros es un proceso cognitivo

clave en la resolución de un problema (Duval, 2017). Es decir, no es la propia representación la que guía la construcción de conocimiento y habilidades, sino el propio proceso que sigue el resolutor al enlazar cada unidad que compone la representación, y que permite darles un significado coherente y útil en el contexto del problema (ibid.). Esto plantea que no hay un tipo de representación idónea y que la introducción de distintos medios de comunicación se presenta como una herramienta didáctica en la resolución de problemas para cualquier estudiante. La anteriormente mencionada revisión de Root et al. (2021) sobre resolución de problemas con alumnado TEA, señala la implicación de “multicomponentes” (o uso conjunto de diferentes recursos como medios de representación) como estrategias recomendables al trabajar con estos estudiantes.

Identificamos la representación como un recurso desde la educación inclusiva, que aboga por distintos medios de comunicación alternativos que guían las tareas en torno a procesos y contenidos matemáticos, lo que traza un nexo entre los estudiantes y los docentes en el proceso de enseñanza- aprendizaje (Goldin y Shteingold, 2001). El siguiente apartado describe las metodologías y estrategias de enseñanza de la resolución de problemas con alumnado TEA, de las que destacamos el carácter visual.

II.4.2. Estrategias para resolver problemas con alumnado TEA

Investigaciones anteriores han explorado estrategias didácticas y recursos que benefician a los estudiantes con TEA, destacando el uso de medios visuales y el aprendizaje estructurado como componentes clave (Carr y Seah, 2019; Gevarter et al., 2016; Root et al., 2021). Las intervenciones han de considerar las ya mencionadas flexibilidad cognitiva, teoría de la mente y comprensión verbal, funciones más afectadas en el alumnado TEA (Polo-Blanco et al., 2024).

Entre las estrategias efectivas de resolución de problemas, destacamos el uso de métodos de instrucción (Schaefer Whitby, 2009), que se caracterizan por facilitar el procesamiento verbal, el apoyo visual de la memoria de trabajo y la comprensión y organización de las fases de resolución.

Entre ellos, encontramos métodos basados en la mnemotecnia (Acevedo-Rincón et al., 2023), que facilitan al estudiantado recordar las fases y seguir un proceso secuencial, que puede mejorar la capacidad de ordenar objetivos y su consecución a la hora de resolver un problema (Klaren et al., 2017) que se estructuran de acuerdo con las fases de Polya (1945). Un ejemplo es el SBI (*Schema Based Instruction*). Rockwell et al. (2011) fueron pioneros en trabajar con los esquemas, o marcos que permiten resolver problemas mediante imágenes, diagramas, números o ecuaciones (Powell, 2011) mediante el método FOPS (acrónimo del inglés, *Functionally Organized Predictable Sequence*) y RUNS (acrónimo del inglés *Read, Use a diagram, Number sentence, State the answer*). El método SBI promueve la enseñanza de razonamiento basado en la repetición para reconocer las estructuras de los problemas verbales y ciertos patrones en figuras, gracias al uso de diagramas (Cox et al., 2024).

A pesar de que se demostró su eficacia con el alumnado TEA-1 y que el condicionamiento de instrucción focalizada posibilitaba alcanzar un razonamiento próximo a los estudiantes neurotípicos (Schaefer Whitby, 2013), surgían dificultades cuando los estudiantes mostraban necesidades cognitivas y un IQ inferior. Se manifestó la necesidad de incluir instrucción procedimental y no solo conceptual (Root et al., 2017) para desarrollar habilidades en la resolución de problemas. Estas autoras plantean la primera adaptación del SBI, denominado MSBI (del inglés, *Modified Schema Based Instruction*), basándose en las evidencias de prácticas con estudiantes con necesidades más severas (Browder et al., 2008). El MSBI incluía la representación como heurístico vinculado a cada paso de la resolución (en sustitución de las ayudas mnemotécnicas), el uso de un organizador gráfico y manipulativos, así como unas instrucciones explícitas y sistemáticas respecto a la resolución de las tareas. La instrucción adquiere distintos matices, distinguiéndose entre la instrucción centrada en los constructos verbales del proceso de resolución o en la comprensión de los componentes del problema y su implicación en las distintas operaciones (Acevedo-Rincón et al., 2023). Destacamos el potencial de del uso de heurísticos, el uso de manipulativos y el empleo de organizadores gráficos en el MSBI, que ha demostrado ser un método

efectivo para propiciar la resolución de problemas con estudiantes TEA (Cox et al., 2024; Spooner et al., 2017).

En particular, las estrategias heurísticas posibilitan la interpretación y estructuración de las respuestas, reduciendo las dificultades de organización y atención (Bae et al., 2015). Facilitan, además, transformar un enunciado verbal y estático en una representación mediante la que interpretar un conjunto de conexiones, posibilitando no solo comprender los datos, sino trabajar con ellos (Duval, 2016). Esto implica experimentar, simplificar y manipular la información visualmente (Novotná, 2014), beneficiando el tratamiento y aproximación gráfica de la resolución del problema.

Paralelamente, la incorporación de material manipulable proporciona una perspectiva más indirecta y abordable de las figuras y sus características al situarlas en un contexto de problema real (Murillo y Ceballos, 2013). En 2019, el equipo de Spooner desarrolló el método CRA (del inglés, *Concrete-Representational, Abstract*), como método de instrucción para la implementación de recursos manipulativos con objetivo de mejorar el pensamiento abstracto, clave en la educación matemática (Park et al., 2020). Este método plantea una aproximación al problema y contenido matemático con objetivos manipulables y concretos, partiendo de la flexibilidad que ofrecen los manipulativos para ser incluidos y adaptados a cualquier contexto y foco de interés del estudiantado (Root et al., 2017). La transición hacia lo representacional puede ir de la mano de la incorporación de los pictogramas y pictomaterial (Polo-Blanco et al., 2018a; 2018b), que ha evidenciado su utilidad en las fases de identificación y comprensión del problema y en el seguimiento del proceso de resolución, apoyando la instrucción. En conjunto con los manipulativos y los pictogramas, otros elementos que han resultado oportunos para representar son los organizadores gráficos (Jiménez y Kemmery, 2013; Saunders, 2014; Root et al., 2017). Los organizadores gráficos, definidos como diagramas esquemáticos (Cox et al., 2024), han adoptado diferentes estructuras según su función en la resolución del problema, empleados en investigaciones que siguen el método SBI y MSBI. Se basan en un modelo de representación visual que posibilita abordar conceptos abstractos de la resolución

de problemas (Delisio et al., 2018), facilitan la expresión de los datos y la solución, posibilitando el registro y la monitorización del propio proceso de resolución (Barnett y Cleary, 2016), apoyando, por tanto, la incorporación de apoyo visual con alumnado TEA (Delisio et al., 2018; Root y Browder, 2017). El organizador gráfico incluye la implementación de estrategias heurísticas, desde la representación, la simplificación y organización del problema o el establecimiento de submetas (Chico-Gómez et al., 2022c).

Cuando el objetivo es abordar con los estudiantes el descubrimiento de un patrón y alcanzar la generalización, la literatura señala, de nuevo, el papel de conectar diversas formas de representación (Hunter y Miller, 2022, Pinto y Cañadas, 2021; Stephens et al., 2017), integrando elementos pictóricos como manipulativos y pictogramas, y esquemáticos, como los organizadores gráficos.

Los método y estrategias de enseñanza mencionados hasta ahora comparten, principalmente, dos aspectos, el uso del medio visual y la estructuración de la resolución de problemas, tanto espacial como en fases. Estos dos elementos sientan las bases del material TEACCH y contribuyen con su objetivo: aumentar la autonomía en el proceso de comprensión y resolución de problemas de las personas con TEA, fomentando la organización y creación de estructuras mediante guías visuales (Schopler et al., 2013).

Un primer fundamento del TEACCH es la Enseñanza estructurada, un método que promueve la adecuación del entorno para mejorar la concentración mediante el uso de señales visuales e indicaciones claras. Dicho método, se apoya, además, en los intereses de los estudiantes, con objetivo de que el aprendizaje sea significativo, cercano y funcional (Mesivob y Shea, 2010; Sanz-Cervera et al., 2018). Mediante los ya mencionados sistemas aumentativos y alternativos de comunicación (SAAC), instrumentos de intervención que facilitan la atención a la comunicación mediante una instrucción basada en distintas representaciones, se ofrece a los estudiantes una guía con objetivos y actividades, fomentando la participación y considerando diferentes contextos sociales (Peeters, 2008), que puede cubrir necesidades asociadas a las funciones ejecutivas (Chico-Gómez et

al., 2022d; Muslim y Irvan, 2023) y funciones cognitivas verbales y no verbales (Sanz-Cervera et al., 2018).

II.5. La resolución de problemas en el aula: el docente de educación primaria

Al abordar la resolución de problemas, los estudiantes requieren de la comprensión de las relaciones entre los datos que involucra el reto. En los apartados anteriores se ha recalcado el papel de la representación al trabajar problemas con el alumnado con TEA, pero cualquier estudiante puede beneficiarse de utilizar la representación visual. Esta estrategia implica transformar la información del problema en un esquema visual que representa las relaciones entre los datos, las cuales son fundamentales para la resolución y comprensión (Polotskaia et al., 2021; Stylianou, 2010). Leikin y Ovodenko (2021) defienden que el proceso de representación requiere de mecanismos de autorregulación, que moderan la relación entre la representación interna, o cómo creamos los objetos o procesos en nuestra mente, y la representación externa, o aquella que comunicamos (Goldin y Shteingold, 2001). Siguiendo a estos autores, el sistema de representación se nutre de las interacciones entre las representaciones externa e interna, desarrollando las concepciones, las relaciones y los procesos de comprensión del alumnado, entre los que destacamos, en nuestro contexto, las estrategias y heurísticos en resolución de problemas. Estas ideas van en consonancia con la teoría de Schoenfeld (1980), en el sentido de entender la representación como un medio de comprender la información de la resolución de problemas y un medio para forjar una red de relaciones entre los diferentes significados y datos del enunciado.

En este proceso, la figura del docente resulta clave para identificar la representación que crea el estudiante, ajustar su intervención a los significados de esta y ofrecerle alternativas para flexibilizarla y mejorarla (Goldin y Shteingold, 2001). Estas intervenciones median entre el alumnado y el conocimiento matemático, que marcarán los pasos hacia una educación matemática significativa y de calidad (Blazar y Kraft, 2017). Para llevar a cabo estas acciones, el

docente necesita de conocimiento matemático, pero también conocimiento sobre las limitaciones y barreras que afectan en el día a día de los estudiantes, tanto en su aprendizaje a nivel académico como en la motivación y nivel de logro (Avilés-Canché y Marbán, 2023). Paralelamente, los programas de formación de profesorado (OECD, 2019) abogan por la formación de docentes para desarrollar una enseñanza de calidad desde la igualdad. Esta perspectiva subraya la necesidad de que la formación docente abarque la educación inclusiva de la matemática (Abrahamson et al., 2018), considerando tanto el conocimiento matemático de los profesores, como su conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1987) y prácticas docentes que consideren la diversidad del aula (Chao et al., 2018; González-Gil, 2013).

II.5.1. El conocimiento del docente de matemáticas

El conocimiento docente es foco de la investigación en didáctica de la matemática. Los estudios se posicionan desde la necesidad de desarrollar programas formativos que promuevan la relación entre el conocimiento del contenido y cómo trasladarlo al aula (Lee y Santangata, 2018) y la identificación de los tipos y naturalezas de los conocimientos como punto de anclaje para desarrollar la práctica educativa, considerando la especificidad del conocimiento de cada disciplina (Chapman, 2006; Ponte, 2012).

Diversos marcos teóricos han emergido desde estas perspectivas de investigación, pero nos remontamos a 1986 y a la categorización planteada por Shulman, que distinguía entre conocimiento de la materia (siglas en inglés, SMK), conocimiento curricular (siglas en inglés, CK) y conocimiento didáctico del contenido (siglas en inglés, PCK). Esta última categoría cobró más importancia, al ser la primera conceptualización de un conocimiento ligado específicamente a la enseñanza de una materia (Giberti, 2022), e incluía el conocimiento de la representación de los contenidos y cómo estas permitían su comprensión y el conocimiento sobre las dificultades de los estudiantes y sus concepciones.

A partir del modelo de Shulman, diversas investigaciones han surgido, otorgándole peso a la categoría de conocimiento PCK, más de 50 en la revisión bibliográfica de

Depaepe et al. (2013). Una de las más significativa es el modelo de Deborah Ball (2008), quien, por un lado, propuso la división del PCK en tres dimensiones ((i) conocimiento del contenido y los estudiantes (ii) conocimiento del contenido y la enseñanza y (iii) conocimiento del currículo) y del Subject Matter Knowledge (SMK), o conocimiento del contenido, en conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático.

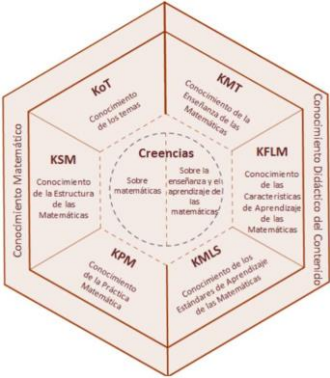
En el año 2013, un grupo de investigación de la Universidad de Huelva (Carrillo et al., 2013) plantean un modelo de conocimiento especializado del docente de matemáticas, el modelo *Mathematical Teacher Specialised Knowledge* (en adelante, MTSK), que mantiene la diferenciación propuesta por Shulman (1986) y Ball (2008). Dado que nos situamos en esta perspectiva, lo describimos con detalle en el epígrafe que sigue.

II.5.1.1. El conocimiento especializado del Docente de matemáticas: el modelo MTSK

El modelo MTSK (Figura 3) describe el conocimiento del contenido (MKT) y pedagógico del contenido (PCK) como componentes fundamentales de la competencia profesional del docente de matemáticas. Estos elementos abarcan la comprensión del contenido matemático y el conocimiento sobre estrategias pedagógicas para posibilitar la construcción de dicho conocimiento por parte de los estudiantes, conformándose como esenciales para una enseñanza efectiva. La estructura del modelo se plantea como una división jerárquica en tres dominios (los anteriores y de las creencias), ocho subdominios y categorías, que pretenden describir los elementos que conforman el conocimiento especializado del docente de matemáticas. Se observan tres áreas en el hexágono: la parte izquierda, relacionada con el conocimiento del contenido matemático, la parte derecha, centrada en el conocimiento didáctico del contenido y una parte central que representa las creencias del docente sobre matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, que permea cada uno de los subdominios y categorías del modelo (Carrillo et al., 2018; Soto-Cerros et al., 2023).

Figura 3

Representación Gráfica del Modelo MTSK



Nota: Recuperado de Muñoz, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes. y Climent. (2015)

La parte izquierda del hexágono del MTSK contempla el conocimiento sobre el contenido matemático, que se estructura en tres subdominios y diferentes categorías (Figura 4).

Figura 4

Subdominios y Categorías del Dominio del Conocimiento Matemático en el Modelo MTSK

Domínios	Subdominios	Categorías	Subcategorías
Conocimiento Matemático	KoT	Fenomenología y aplicaciones	
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	
		Registros de representación	
		Procedimiento	¿Cómo se hace?
			¿Cuándo puede hacerse?
			¿Por qué se hace así?
			Características del resultado
	KSM	Conexiones de complejización	
		Conexiones de simplificación	
		Conexiones transversales	
		Conexiones auxiliares	
	KPM	La práctica de demostrar	Desarrollo de demostraciones
			Métodos y tipos de demostración
			Funciones de las demostraciones
		La práctica de definir	Características de la definición
			Estrategias para resolver problemas
		El papel del lenguaje matemático	Papel de los símbolos
			Uso del lenguaje matemático

Nota: Recuperado de Escudero-Ávila, 2023 (basado en Montes *et al.*, 2022)

El conocimiento de los temas (*Knowledge of Topics*, KoT), se refiere al conocimiento del docente sobre la matemática escolar y diferentes significados asociados al contenido, que un docente de educación primaria, en nuestro caso, debe conocer (NCTM, 2000). Este subdominio se constituye en relación con las categorías: conocimiento de fenomenología y aplicaciones, conocimiento de

definiciones, propiedades y sus fundamentos, conocimiento sobre registros (numéricos, pictóricos, gráficos, etc.) y la relación entre ellos y conocimiento sobre procedimientos.

El conocimiento sobre conexiones entre los contenidos matemáticos (*Knowledge of the Structure of Mathematics*, KSM) abarca el conocimiento sobre el sistema que interconecta los diferentes elementos matemáticos (Montes et al., 2013), considerando conexiones de complejidad creciente, de simplificación, auxiliares y transversales. Los dos primeros se refieren al tratamiento de los temas desde una visión más avanzada o elemental (Ibid.), mientras que las conexiones auxiliares y transversales hacen referencia al conocimiento sobre cómo ciertos elementos matemáticos pueden apoyar la comprensión de otros conceptos o el conocimiento sobre la interrelación de estos (Carrillo et al., 2018). El subdominio KSM implica el conocimiento sobre cómo los conceptos se conectan a través de una o distintas áreas de las matemáticas, lo que desarrolla una concepción más holística.

El conocimiento sobre la práctica de hacer matemáticas (*Knowledge of the Practice In Mathematics*, KPM) se categoriza en forma de conocimiento sobre la práctica de definir, el conocimiento sobre la resolución de problemas que se relaciona con la estructuración de la resolución en partes o la diversidad de estrategias para resolver problemas, entre ellas, el conocimiento sobre heurísticos; el conocimiento sobre la práctica de demostrar (Alfaro-Carvajal et al., 2020), que se refleja en conocimiento sobre los ejemplos y términos que conforman una secuencia, el conocimiento sobre el establecimiento de conjeturas y las estrategias para verificar hipótesis y su conexión con las relaciones funcionales; y la categoría de conocimiento del lenguaje matemático (Delgado-Rebolledo et al., 2022).

El dominio PCK, queda representado en la parte derecha de la representación hexagonal, y también son tres subdominios y sus diferentes categorías los que lo constituyen (Figura 5).

Figura 5

Subdominios y Categorías del Dominio Del Conocimiento Didáctico del Contenido en el Modelo MTSK

Dominios	Subdominios	Categorías	Subcategorías
Conocimiento didáctico del contenido	KMT	Teorías de la Enseñanza de las matemáticas	Personales
			Institucionales
		Recursos didácticos (físicos y digitales)	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	
	KFLM	Teorías de aprendizaje matemático	Personales
			Institucionales
		Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas	
		Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático	
		Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas	
	KMLS	Resultados de aprendizaje esperados	
		Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado	
		Secuenciación de temas	

Nota: Recuperado de Escudero-Ávila, 2023, (basado en Montes *et al.*, 2022)

El primer subdominio es el conocimiento sobre la enseñanza (*Knowledge of Mathematics Teaching*, KMT), que abarca tres categorías: conocimiento sobre las teorías de enseñanza de la matemática (personales o de índole institucional), el conocimiento sobre los recursos didácticos, tanto físicos como los recursos informáticos o tecnológicos y el conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

El conocimiento sobre las características del aprendizaje (*Knowledge of Features of Learning Mathematics*, KFLM) abarca los conocimientos relacionados con las características inherentes a cómo los estudiantes aprenden el contenido matemático. Implica las categorías conocimiento de las teorías de aprendizaje, el conocimiento sobre las fortalezas y debilidades del alumnado y el conocimiento sobre las formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático.

Finalmente, el último subdominio hace referencia al conocimiento sobre estándares de aprendizaje (*Knowledge of Mathematics Learning Standards*, KMLS) o conocimiento sobre contenido didáctico que desarrollan los diferentes currículos educativos. Distinguimos las categorías expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y secuenciación de temas.

El modelo de Carrillo et al. (2013; 2018) ha sido empleado en diversas investigaciones sobre conocimiento docente de profesorado en ejercicio (Cayo et al., 2024; Climent et al., 2021; Montes et al., 2021; Muñoz-Catalán et al., 2022 Vasco-Mora et al., 2021; Zakaryan y Sosa, 2018), estudiantes del Grado en Educación (Chico-Gómez, Sánchez-Cerrejón et al., 2023; Pinto et al., 2023; Piñeiro et al., 2024) y en el diseño de tareas para la formación inicial (Carrillo et al., 2020; Chico-Gómez et al., 2023b; Climent et al., 2024; Montes et al., 2019; Pascual et al., 2023) y para abordar diversos contenidos en educación matemática, entre ellos, la resolución de problemas (Carrillo et al., 2019).

II.5.1.2. El conocimiento del docente al abordar la resolución de problemas matemáticos

La investigación señala que las limitaciones en el conocimiento de los docentes causan estragos en el aprendizaje en el aula (Depaepe et al., 2020; Piñeiro et al., 2019). Abordar problemas matemáticos en el aula no se aleja de otros contenidos respecto a la necesidad del docente de, no solamente conocer las estrategias y métodos de enseñanza, sino dominar un conjunto de habilidades de resolución (Carrillo et al., 2018; Chapman, 2015).

En consonancia con la inquietud por introducir la resolución de problemas como uno de los elementos clave de la enseñanza de la matemática, la última década ha atestiguado un creciente número de investigaciones centradas en la descripción del conocimiento del docente para abordar la resolución de problemas en el aula (Lester, 2013; OECD, 2014)

Chapman (2015) plantea un modelo paralelo al de Ball para describir el conocimiento profesional del docente al enseñar a resolver problemas: MPSKT. Este divide el conocimiento en competencia o dominio (“proficiency”) en resolución de problemas (en adelante RP); conocimiento curricular del contenido de RP (que incluye problemas, RP y planteamiento de problemas); conocimiento didáctico de RP, que abarca a los alumnos como resolutores de problemas y prácticas de instrucción para RP; y factores afectivos y creencias cognitivas de los docentes (Piñeiro et al., 2022).

Por otro lado, si nos situamos desde la perspectiva del MTSK, la propia categorización del modelo induce al conocimiento de la práctica matemática para resolver problemas (KPM) y el conocimiento sobre su enseñanza (KMT). No obstante, podríamos plantearnos que el docente requiere de conocimiento sobre distintos tipos de registros (KoT) para abordar la resolución, o sobre diferentes contenidos matemáticos y cómo enlazarlos para aumentar o disminuir su complejidad (KSM). Además, hemos de considerar la necesidad de que el docente conozca las potencialidades del problema que selecciona para ser resuelto en el aula (Lester y Cai, 2016) (KMT) y las posibles dificultades que pueden manifestar los estudiantes al abordarlo (KFLM). Es decir, la resolución de problemas requiere de varios subdominios del modelo. Considerando todos los elementos de conocimiento implicados en la enseñanza de la resolución de problemas, se hace vigente la necesidad de desarrollar una formación de los docentes (Boote y Boote, 2018; Karp, 2010; Piñeiro et al., 2019; 2024) que considere, además, las habilidades como resolutores de todos los estudiantes del aula. El docente requiere de conocimiento para reflexionar sobre el diseño de problemas y sobre su(s) posible(s) solución(es) (Joglar-Prieto et al., 2022), de manera que, modificando una variable, un dato o un elemento del contexto, flexibilice y acerque el proceso de resolución a sus estudiantes.

II.5.2. La práctica inclusiva en el aula de matemáticas

Históricamente, el aula de matemáticas se ha caracterizado por una instrucción lineal en la que predominaba el registro textual y auditivo, a través de clases magistrales y libros de texto (Lambert, 2020). Además, la concepción de que los estudiantes con discapacidad mental o dificultades de aprendizaje no eran capaces de aprender matemáticas de forma significativa ha estado arraigada durante décadas (Noda y Bruno, 2010). La solución fue abordar la enseñanza mediante la transmisión de conceptos clave de una forma mecanizada, que simplificaba la problemática. No obstante, esta medida se alejaba completamente del desarrollo de las habilidades lógicas esperables de la competencia matemática (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022; NCTM, 2000) y de la idea de la enseñanza igualitaria de acuerdo con los principios de enseñanza de Kilpatrick et

al. (2001): (i) aprender con comprensión, (ii) el aprendizaje se construye sobre lo que ya se conoce y (iii) la instrucción formal de la escuela debe construirse a partir del conocimiento matemático informal.

Esta perspectiva de enseñanza implica que los docentes, y la propia formación docente, considere la planificación como uno de los aspectos claves en el desarrollo profesional, dado que esta debe promover que la participación e interacción de los estudiantes en el aula genere aprendizaje de los diferentes contenidos, entre ellos, los matemáticos (Acevedo-Rincón et al., 2023). Roos define la inclusión en matemáticas como el conjunto de procesos que hacen partícipes a todo el alumnado, lo que implicaría establecer una organización que favorezca este tratamiento igualitario (Roos, 2019). La investigación manifiesta la necesidad de que esta planificación sea coherente y diferenciada con los estudiantes TEA, como la verificación de instrucciones, las múltiples formas de expresión y de acceso a la información (Darretxe y Sepúlveda, 2011). Sin embargo, si establecemos medidas concretas para algunos estudiantes en el aula de matemáticas, ¿estamos desarrollando una enseñanza inclusiva o integradora? Este tipo de diferenciación va de la mano de la separación de responsabilidades entre el docente de pedagogía terapéutica y el docente generalista que imparte matemáticas en el aula (Barrett, 2014; Gajewski, 2014). Con medidas específicas en el aula para el alumnado con TEA seguiríamos promoviendo un modelo clínico, en el cual el especialista es el que debe atender al alumnado con necesidades educativas especiales, realizando un apoyo principalmente terapéutico (Parrilla, 1996). De esta forma, se quedaría muy lejos la mirada inclusiva de la clase de matemáticas, donde la atención a la diversidad de todos y todas es desde un prisma de potencialidades, considerando que, si debe existir un apoyo, debe ser inclusivo (Puigdemívol y Petreñas, 2019).

Durante los últimos años, ha habido un creciente interés por conceptualizar la inclusión en la educación matemática (Roos, 2017; Schmidt, 2016). Se plantea como una necesidad establecer un conjunto de acciones que consideren las características de todos los estudiantes. El Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) es particularmente útil en estos términos, dado que no asume que las necesidades

de los estudiantes NEAE sean diferentes de las del resto del aula (Lambert, 2020), sino que su diseño es flexible y proactivo (King-Sears, 2020) con objetivo de llegar al mayor número posibles de estudiantes.

II.5.2.1. El Diseño Universal de Aprendizaje

La investigación en neurociencia señala tres redes neurológicas fundamentales que influyen en el proceso de aprendizaje: la percepción, el procesamiento de la información y las actitudes y motivación (Cherrier et al., 2020), las cuales abordan el qué, cómo y porqué del aprendizaje (Figura 6).

Figura 6

Redes Neurológicas Implicadas en el Aprendizaje

Redes de reconocimiento	Especializadas en percibir la información y asignarle significados. En la práctica, estas redes permiten reconocer letras, números, símbolos, palabras, objetos..., además de otros patrones más complejos, como el estilo literario de un escritor y conceptos abstractos, como la libertad.	
Redes estratégicas	Especializadas en planificar, ejecutar y monitorizar las tareas motrices y mentales. En la práctica, estas redes permiten a las personas, desde sacar un libro de una mochila hasta diseñar la estructura y la escritura de un comentario de texto.	
Redes afectivas	Especializadas en asignar significados emocionales a las tareas. Están relacionadas con la motivación y la implicación en el propio aprendizaje. En la práctica, estas redes están influidas por los intereses de las personas, el estado de ánimo o las experiencias previas.	

Nota: Recuperado de CAST (2011), basado en Rose y Meyer (2002)

El DUA (CAST, 2018) es un enfoque didáctico que pretende optimizar el proceso de aprendizaje de todos los estudiantes (Meyer et al., 2014; Rose y Meyer, 2006) mediante un amplio espectro de propuestas de prácticas para favorecer la motivación, la presentación, procesamiento y expresión de la información, a través de sus tres principios: Compromiso, Representación y Acción y expresión. Estos se organizan siguiendo una estructura jerárquica en directrices y puntos de verificación (Figura 7), que tienen como objetivo concretar las acciones para abordar prácticas inclusivas.

Figura 7

Organizador Gráfico con los Principios, Directrices y Puntos de Verificación del DUA



Nota: Recuperado de CAST (2018)

El principio de Compromiso (E., del inglés *Engagement*) se refiere a las acciones educativas para propiciar el porqué del aprendizaje, proporcionando opciones para que el estudiantado forme parte de su propio proceso de aprendizaje. Se descompone en tres directrices:

- Captar el Interés (E.RI, del inglés *Recruiting Interest*), que, a su vez, contempla acciones relacionadas con optimizar la elección personal y autonomía (E.RI.1), la relevancia de la tarea para el contexto y los intereses del alumnado (E.RI.2) y para minimizar posibles distracciones y regular el nivel de reto (E.RI.3).
- Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (E.SEP, del inglés *Sustaining Effort and Persistence*), que gira en torno a acciones relacionadas con optimizar la tarea para que las habilidades y competencias del estudiante no se vean mermadas por alteraciones de su motivación y autorregulación. Incluye

acciones como resaltar las metas y objetivos (E.SEP.1), variar las demandas y recursos (E.SEP.2), propiciar el trabajo en grupo y colaborativo (E.SEP.3) e incrementar la retroalimentación orientada a la maestría de la tarea (E.SEP.4).

- Autorregulación (E.SR, del inglés *Self-Regulation*), que se refiere a las prácticas orientadas a que los estudiantes desarrollen habilidades intrínsecas (CAST, 2018) para regular sus emociones, mediante el desarrollo de expectativas y creencias que fomenten la motivación (E.SR.1), facilitar el desarrollo de competencias y estrategias para afrontar situaciones de la vida cotidiana (E.SR.2) y optimizar acciones para desarrollar la autoevaluación y autorreflexión (E.SR.3).

El principio de Representación (R., del inglés *Representation*), por su parte, se refiere a las acciones educativas para propiciar el qué del aprendizaje, proporcionando opciones para percibir y comprender la información. Implica acciones orientadas hacia:

- Percepción (R.P, *Perception*), personalizando las formas de presentación de la información (R.P.1) y ofreciendo alternativas para la información de los medios auditivos (R.P.2) y visuales (R.P.3).
- Proporcionar múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y los símbolos (R.LS, del inglés *Language and Symbols*), que integra acciones para clarificar el vocabulario y los símbolos (R.LS.1), la estructura sintáctica (R.LS.2), proporcionar opciones para la decodificación de textos, símbolos y la notación matemática (R.LS.3), la comprensión de distintas lenguas (R.LS.4) y proporcionar formas para ilustrar mediante diferentes medios (R.LS.5).
- Comprensión (R.C, *Comprehension*), vinculada a acciones para que el alumnado active o recurra a su conocimiento previo sobre la tarea o el contenido (R.C.1), marcar aspectos críticos del contenido, patrones, relaciones o *big ideas* (R.C.2), guiar en el procesamiento, visualización y manipulación de la información (R.C.3) y maximizar la transferencia y generalización (R.C.4), en términos de proporcionar oportunidades para

relacionar las ideas, verificar las estrategias o proporcionar apoyos que faciliten conectar el conocimiento adquirido con ideas previas.

El principio de Acción y Expresión (AE., del inglés *Action and Expression*) se refiere a las acciones educativas para propiciar el cómo del aprendizaje, con las directrices:

- Proporcionar opciones para la interacción física (AE.PA, del inglés *Physical Action*), con métodos (AE.PA.1) y herramientas (AE.PA.2) para abordar la tarea.
- Proporcionar opciones para la Expresión y la Comunicación (AE.EC, *Expresión and Communication*), mediante diferentes medios de comunicación (AE.EC.1), herramientas y software (AE.EC.2), graduar los niveles de apoyo (AE.EC.3).
- Proporcionar acciones para la Función Ejecutiva (AE.EF, del inglés *Executive Functions*), que contempla acciones para optimizar el establecimiento de metas (AE.EF.1), la planificación y organización (AE.EF.2), la gestión de la información y los recursos (AE.EF.3) y la capacidad de monitoreo (AE.EF.4).

EL DUA surge como apoyo para el establecimiento de objetivos, criterios de evaluación, metodologías y diseño e implementación de materiales (CAST, 2018), lo que puede impulsar el desarrollo de la enseñanza inclusiva. Durante los últimos años, las leyes educativas de España han contemplado la inclusión de los fundamentos del DUA en el currículo de las distintas etapas de educación, hasta la ley actual (Ley Orgánica 3/2020; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2020), en la que hay una referencia explícita a este enfoque en el preámbulo y en el artículo 4.3.

Atendiendo al estado del arte, investigaciones previas han empleado el DUA para abordar una enseñanza inclusiva de estudiantes en escuelas ordinarias (Boothe et al., 2018; Davies et al., 2012; Katz, 2013; Rao et al., 2014; Sulaiman y Tahar, 2024). Otros estudios se aproximan a la enseñanza de estudiantes TEA (Aladsani et al., 2017; Chauhdry, 2019; Oliver-Kerrigan et al., 2021; Shoup, 2016), y a la enseñanza de la matemática (Lambert, 2021; Lambert et al., 2021; Morselli y Robotti, 2023;

Murray et al., 2014; Root et al., 2021), planteando el empleo del DUA para atender a aspectos comunicativos (Dieker et al., 2022; Thomas et al., 2015), para comprender y desarrollar las interacciones acontecidas en el aula de matemáticas (Abrahamson et al., 2018) o evaluar el desarrollo del proceso de resolución de problemas (Brown et al., 2022; Root et al., 2020).

Sin embargo, existe cierta reticencia en el empleo de este marco para desarrollar investigaciones científicas considerando que su estructuración tan compleja (principios, directrices, puntos de verificación y criterios) dificulta operacionalizar la recogida y análisis de datos (Sánchez-Serrano, 2024). Por otra parte, no todas las investigaciones sobre la implementación del DUA manifiestan una sistematicidad respecto al uso del marco en el diseño de la instrucción (Cook y Rao, 2018), considerando que los principios y directrices del marco se integran y combinan en la práctica educativa, dificultando la tarea de evaluar cada una de ellas y su eficacia (Cook y Rao, 2018; Sánchez-Serrano, 2024; Rao et al., 2020).

Desde nuestro punto de vista, nos adscribimos al pensamiento de que el DUA puede ser una herramienta que beneficia el aprendizaje de todos los estudiantes, pero también el desarrollo profesional de los docentes hacia una visión de la educación más inclusiva (Baybayon, 2021).

El marco del DUA proporciona una guía para los docentes en términos de flexibilizar y contemplar otras formas en el diseño de la instrucción (Cook y Rao, 2018; Kirschner, 2015) y de las tareas que se pueden desarrollar en el aula (Lambert et al., 2020; Morselli y Robotti, 2022), considerando cómo presentar la tarea y su resolución, cómo implicar al alumnado y cómo promover la comunicación y expresión de todas y todos en el aula.

II.5.3. Una aproximación a la relación entre el DUA y la enseñanza de la resolución de problemas

Estamos de acuerdo con Sulaiman y Tahar (2024) cuando afirmamos que el papel que adopte el docente y cómo lleve a cabo las diferentes estrategias condiciona las oportunidades de participación de todo el alumnado en el aula ordinaria. Los docentes son responsables de decidir, diseñar e implementar una matemática inclusiva en el aula que traspase la barrera marcada por el currículo (Roos, 2019).

¿Cómo podemos “diseñar” un espacio de enseñanza de resolución de problemas apto para todos y todas?

Roos (2017) señala que para lograr la inclusión es necesaria la competencia para enseñar matemáticas, mientras Root et al. (2019) manifiestan que usar los principios inclusivos que contempla el DUA en la enseñanza de la matemática podría favorecer la identificación de barreras de aprendizaje y diseñar oportunidades de aprendizaje adaptadas a todos y todas.

Dedicar tiempo a la planificación de la actividad de resolución de problemas es uno de los primeros pasos para abordar una educación inclusiva. El diseño de una tarea abordable en el aula requiere considerar los objetivos de aprendizaje para el desarrollo cognitivo, social y académico de todo el grupo clase y su diversidad (Muntaner, 2014). Thomas et al. (2015) describen cuatro preguntas o pasos basadas en el DUA para abordar un diseño inclusivo de una tarea matemática atendiendo a las posibles dificultades (p.20):

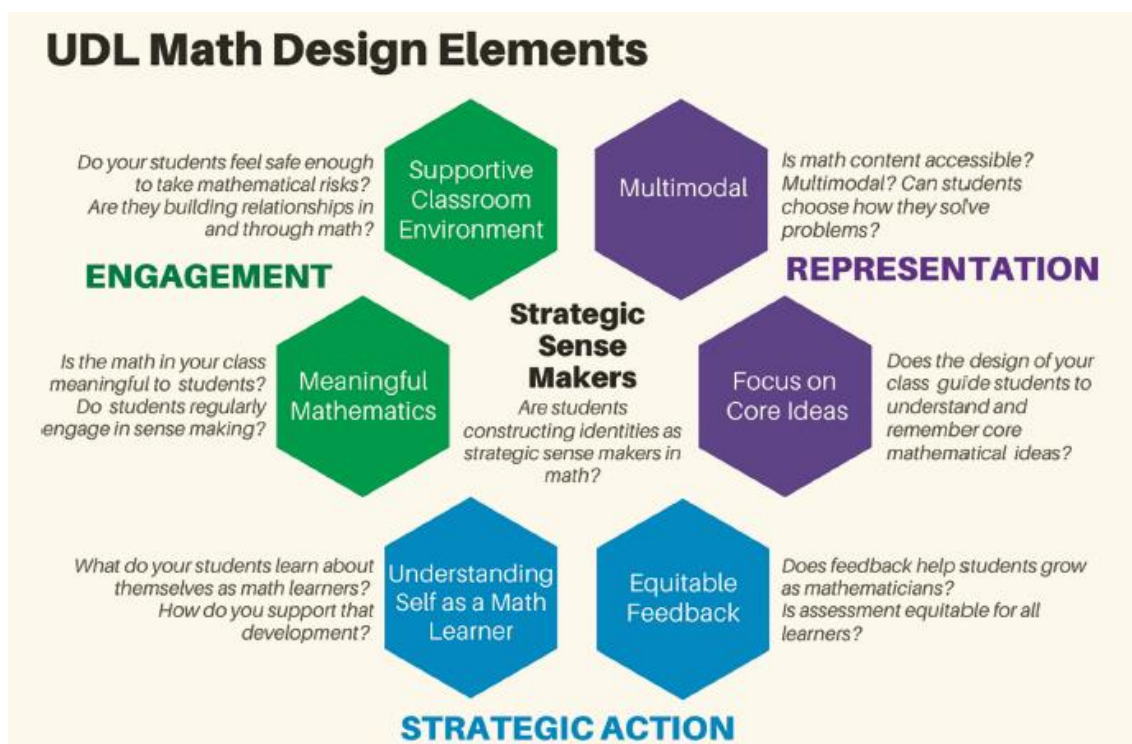
- 1) ¿Cuáles son mis metas?
- 2) ¿Qué requiere la sesión, en términos de materiales y metodologías (instrucción)?
- 3) ¿Qué componentes de la tarea pueden presentar una barrera para el aprendizaje de uno, varios o todo el estudiantado?
- 4) ¿Qué posibles soluciones pueden reducir estas barreras de aprendizaje?

Durante la resolución del problema, diferentes elementos de la práctica inclusiva requieren de la atención del docente. Rachel Lambert (2021) planteó un marco específico del DUA en el área de la matemática (Figura 8). Este marco, consideraba tres áreas de acción principales. *Engagement* se refiere, de manera paralela a Compromiso en el marco original del DUA, a las acciones orientadas a motivar el aprendizaje de la matemática, considerando para ello el desarrollo de un ambiente de apoyo en el aula y de unas matemáticas significativas. *Representation* hace referencia a las acciones para proporcionar al alumnado las ideas claves (*core ideas*), que la autora define como necesarias para el nivel educativo pertinente, entre las que destaca las habilidades para resolver problemas; y la representación

multimodal para abordar los diferentes contenidos y *core ideas*. El tercer nodo es *Strategic Action*, que Lambert vincula a las acciones para comprender y procesar la matemática. Este se vincula con las acciones de retroalimentación para apoyar el desarrollo matemático de los estudiantes y su autoconcepción como aprendices.

Figura 8

Marco UDL-Math (Acrónimo de DUA en inglés, *Universal Design for Learning*) de Lambert (2021)



Nota: Recuperado de Lambert (2021)

Resulta interesante cómo esta autora sitúa la resolución de problemas como contenido principal del aula de la matemática, de manera que el resto de las acciones han de cubrir su desarrollo como *core idea* mediante distintas formas de representación, motivación y estrategias de aprendizaje. Pero para que este marco pudiera servir de apoyo en el desarrollo de prácticas inclusivas de docentes y estudiantes para maestro/a en su formación, desde nuestro punto de vista, sería necesario pensar en relaciones entre la enseñanza de la resolución de problemas y las acciones inclusivas de una manera más tangible.

Esto nos trae de vuelta al marco DUA del CAST (2018). La investigación señala que la inclusión de distintas formas de representación, técnicas y estilos de aprendizaje a través de DUA puede favorecer la comprensión del problema (Buchheister et al., 2017); y que la contextualización del problema mediante situaciones del mundo real puede optimizar la relevancia, el valor y la autenticidad del objetivo (E.RI.2) y las metas de aprendizaje (E.SEP.1) (Root et al., 2020).

En la investigación de Root et al. (2020) se plantea una descripción de las diferentes acciones en el diseño e implementación de un problema con estudiantes NEAE, en términos de los principios del DUA y sus puntos de verificación (Tabla 6). Parten de estudios previos (Browder et al., 2008; Root et al., 2017) en los que se detectan distintas barreras en el aprendizaje de la resolución de problemas, de manera que se sistematiza el DUA como una herramienta para solventarlas.

Tabla 6

Relación Entre los Principios, Directrices y Puntos de Verificación con las Prácticas al Resolver un Problema con Alumnado NEAE

Compromiso	Representación	Acción y Expresión
Captar el Interés (E. RI)	Percepción (R.P.)	Acciones Físicas (AE.PA)
Selección del tema diario por parte del alumno (E.RI.1 Optimizar la elección individual y la autonomía)	Codificación por colores del organizador gráfico, texto a voz con voz humana (R.P.1 Ofrecer formas de personalizar la visualización de la información)	Soporte a petición, opción de usar el lápiz óptico o el dedo, y opción de respuesta "hablar o mostrar" (AE.PA..1 Variar los métodos de respuesta y navegación)
Temas del mundo real y vídeos de la comunidad de estudiantes (E.RI.2 Optimizar la relevancia, el valor y la autenticidad)	Texto a voz con voz humana (R.P.2 Ofrecer alternativas para la información auditiva)	
La economía de fichas indicaba el número de problemas a resolver durante el día (E.RI.3 Minimizar distracciones)		
Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (E.SEP)	Lenguaje, expresiones matemáticas y símbolos (R.LS)	Expresión y Comunicación (AE.EC)
Los alumnos establecen su meta al principio de cada	Instrucción explícita en vocabulario y símbolos (R.LS.1	Proporcionar Calculadora (AE.EC.2 Utilizar múltiples herramientas para la

lección (E.SEP.1 Aumentar la relevancia de las metas y los objetivos)	Aclarar vocabulario y construcción (símbolos)	y construcción y composición)
Elogios específicos del comportamiento (E.SEP.4 Utilizar el feedback orientado a la maestría de una tarea)	Representar la información de un problema verbal en un esquema (R.LS.2 Aclarar la sintaxis y la estructura).	Utilizar un sistema de indicaciones mínimas para liberar gradualmente el apoyo a medida que aumenta la independencia (AE.EC.3 Definir competencias con niveles de apoyo graduados para la práctica y la ejecución)
	Considerar texto y conversión de texto a voz (R.LS.3 Apoyar la descodificación de texto, notación matemática y símbolos)	
Autorregulación (E. SR)	Comprensión (R.C)	Funciones Ejecutivas (AE.EF)
Establecimiento de objetivos diarios, autocontrol y autografía de los progresos en Excel (E.SR.3 Desarrollar la autoevaluación y la reflexión).	Vídeos para aportar conocimientos previos a la discusión diaria de las experiencias de los alumnos (R.C.1 Activar o aportar conocimientos previos)	Instrucción para el establecimiento de objetivos (AE.EF.1 Orientar el establecimiento de objetivos adecuados)
	Se enseña explícitamente a discriminar entre tipos de problemas basándose en el análisis de tareas y reglas (R.C.2 Resaltar patrones, características críticas, grandes ideas y relaciones)	Análisis de tareas y reflexión del instructor (AE.EF.2 Apoyar la planificación y el desarrollo de estrategias, AE.EF.3 Facilitar la gestión de la información y los recursos)
	Oportunidades explícitas para generalizar el aprendizaje (R.C.4 Maximizar la transferencia y la generalización)	Establecimiento de objetivos diarios, autocontrol y autografía del progreso en Excel (AE.EF.4 Mejorar la capacidad de control del progreso)

Nota: Adaptado de Root et al. (2020)

II.5.3.1.DUA y conocimiento especializado

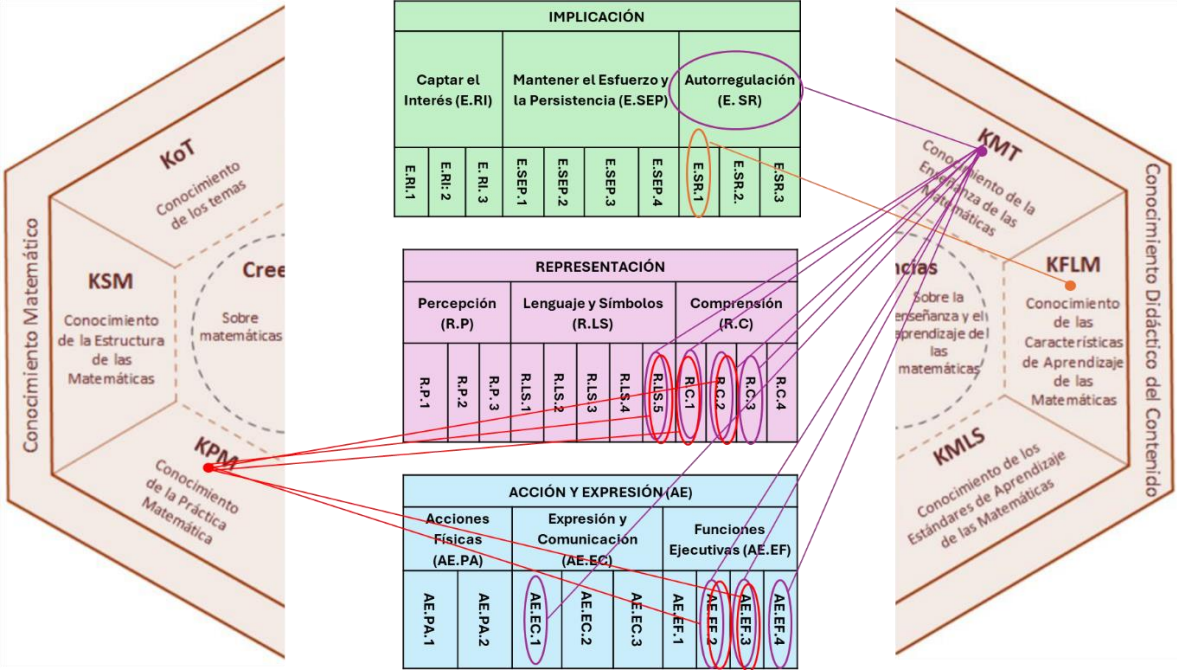
Para finalizar este epígrafe y conforme hemos descrito en los párrafos anteriores, consideramos que, para desarrollar una enseñanza inclusiva de la matemática, las competencias del docente deben nutrirse de su conocimiento del contenido matemático y pedagógico. Esto nos lleva a plantearnos un posible enlace entre el

conocimiento especializado y el DUA. Aunque esta idea será extendida en los resultados y su discusión de esta tesis, una aproximación puede arrojar luz al establecimiento de relaciones teóricas que hipoteticen la unión entre los dos marcos.

Si consideramos las cuatro dimensiones de la resolución de problemas planteadas por Schoenfeld (1985) en relación con el conocimiento especializado, podríamos plantearnos cierta relación con los elementos inclusivos del DUA (Figura 9). La primera dimensión, uso de recursos, manifiesta una clara conexión con KMT- recursos, y podría vincularse con acciones docentes hacia la guía en el procesamiento y visualización de la información (R.C.3), o, más directamente, el uso de recursos manipulativos (AE.EC.1). Encontramos relación entre la segunda dimensión, aplicación de heurísticos, con KMT- Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos y KPM- Resolución de problemas, y, a su vez, con elementos inclusivos como el desarrollo de estrategias de resolución y de planificación (AE.EF.2) y herramientas para la organización (AE.EF.3); y otros puntos de verificación que hacen referencia a la representación (R.LS.5, uso de diferentes medios), la analogía (R.C.1, recurrir a conocimiento previo de problemas o estrategias) o la búsqueda de regularidades (R.C.2, marcar relaciones y patrones). La dimensión de “uso de estrategias metacognitivas” se vincula con los principios de Acción y Expresión e Compromiso, en la medida en que fomenta la formulación de preguntas que orienten el proceso y la reflexión sobre este, así como la capacidad de monitoreo (AE.EF.4) y autorregulación (E.SR), que podríamos relacionar con KMT- Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. La última dimensión, creencias de los estudiantes, podría relacionarse con el principio de Compromiso (E.SR.1) y el conocimiento sobre las formas de interacción y teorías de aprendizaje (KFLM).

Figura 9

Primera Aproximación a la Relación Entre Subdominios MTSK y DUA



CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

Resumen

Este capítulo presenta las pautas metodológicas sobre las que se ha construido esta investigación. En un primer epígrafe describimos el planteamiento del problema sobre la formación docente desde la perspectiva inclusiva, seguido de un segundo epígrafe en el que desglosamos las preguntas de investigación y objetivos que surgen a partir de él. El último epígrafe aborda el diseño metodológico de nuestro estudio. Apoyándonos en antecedentes de investigación, nos adscribimos a la metodología cualitativa y el paradigma interpretativo para abordar nuestra investigación a través de cuatro estudios de caso. A lo largo del epígrafe se detallan las fases y subfases de investigación y los instrumentos y técnicas de recogida y análisis de la información de cada uno de los estudios.

III.1. Planteamiento del problema

La educación primaria es un derecho universal para todos los niños y niñas (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022). En palabras de Dewey, el aula de primaria es un microcosmos reflejo de la propia sociedad, en la que convergen una gran diversidad de habilidades, intereses, inquietudes, contextos y niveles de desarrollo. Aunque la diversidad debe entenderse como un aspecto positivo del que aprender y enriquecerse, el hecho de incluir y hacer partícipes a todas y todos supone un reto en el proceso de enseñanza. Las propias dificultades de la enseñanza de las matemáticas complejizan aún más este proceso. En este punto nos centramos en el alumnado con TEA-1, síndrome de Asperger.

Durante años, la mayoría de las investigaciones que involucran al TEA-1 se han centrado en las características de estos estudiantes desde la perspectiva médica o psicopedagógica (Acevedo-Rincón et al., 2023). Las revisiones bibliográficas sobre autismo y educación matemática destacan la necesidad de profundizar en la investigación sobre formación específica de los docentes en beneficio del desarrollo de la educación matemática de este alumnado (Carr y Seah, 2019; Klaren et al., 2017). Acevedo-Rincón et al. (2023) señalan la necesidad de “repensar” la formación docente, con el objetivo de desarrollar un conocimiento más amplio e incluir prácticas en educación matemática pensando en la diversidad. Consideramos además la necesidad de impulsar estudios sobre la resolución de problemas con alumnado TEA (King et al., 2016; Root et al., 2021), entre ellos, los problemas de generalización. Este tipo de problemas han demostrado acercar el desarrollo del pensamiento algebraico a los estudiantes de primaria (Fuchs et al., 2014), objetivo del currículo escolar (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022), pero su enseñanza al alumnado TEA requiere de instrucción específica (Rockwell et al., 2011; Root et al., 2018).

Investigar en formación docente implica incidir en la búsqueda e implementación de técnicas didácticas que beneficien al alumnado TEA en el contexto de aula, considerando que se necesita adaptar el currículo escolar a la realidad de los estudiantes, sus dificultades y habilidades en el aprendizaje de la matemática

(Chiang y Lin, 2007). Los estudiantes TEA, además de mostrar dificultades en el ámbito social y la comprensión verbal (Peeters, 2008), suelen manifestar unas limitadas funciones ejecutivas, pero las intervenciones centradas en el desarrollo de estrategias y heurísticos pueden mejorar sus habilidades, “especialmente en la resolución de problemas” (Klaren et al., 2017, p. 634).

Atendiendo a estas ideas, ponemos de manifiesto la necesidad de abordar una formación docente desde la matemática inclusiva. Esta tesis pretende sentar las bases para dicha formación, en términos de la descripción de estrategias didácticas inclusivas para trabajar con el alumnado TEA-1, la identificación del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido de los docentes (Shulman, 1987), considerando la resolución de problemas como objeto matemático y su enseñanza y aprendizaje, y los elementos que conforman la práctica inclusiva en un aula con diversidad.

En definitiva, nuestra pregunta principal de investigación es ¿Qué formación requiere un docente de Primaria para abordar, de forma inclusiva, la RP en el aula con alumnado TEA-1?

A partir de la problemática de la mejora de la formación, surge la necesidad de (i) identificar los elementos que favorecen el aprendizaje de la resolución de problemas de los estudiantes TEA-1 y (ii) identificar las prácticas inclusivas y el conocimiento que requiere el profesorado para abordar la resolución de problemas con este alumnado, así como sus posibles relaciones, que planteamos en varias subpreguntas:

¿Cuáles son las estrategias didácticas que benefician al alumnado TEA en la resolución de problemas?

¿Cómo influyen las características del alumnado TEA en el desarrollo de estrategias para resolver problemas?

¿Cómo influyen estas características y las estrategias didácticas en el proceso de resolución de problemas de generalización?

¿Cuál es el conocimiento esperable y deseable en un docente para llevar a cabo una práctica inclusiva en el aula de matemáticas considerando al alumnado TEA?

¿Cómo se caracteriza la práctica inclusiva al abordar la resolución de problemas con alumnado TEA-1?

III.2. Objetivos de la investigación

Considerando las preguntas de investigación descritas en el apartado anterior, el objetivo principal de esta tesis doctoral es describir necesidades y buenas prácticas docentes inclusivas para abordar la enseñanza de resolución de problemas en el aula de Educación Primaria cuando estudiantes TEA forman parte de su diversidad. Con intención de arrojar más claridad a la consecución del objetivo, desarrollamos diversos objetivos específicos:

O1. Desarrollar pautas didácticas para el aprendizaje en resolución de problemas del alumnado con Trastorno del Espectro Autista-síndrome de Asperger.

O1.1. Identificar y describir las características asociadas al TEA-1 que pueden influir en el proceso de resolución de problemas.

O1.2. Describir estrategias de enseñanza de resolución de problemas considerando las características asociadas al TEA-1 que pueden influir en el proceso de resolución de problemas.

O1.3. Describir cómo el alumnado TEA-1 resuelve problemas matemáticos de heurísticos en función de distintas estrategias de enseñanza específicas, entre ellos, el heurístico de generalización.

O2. Identificar el conocimiento del docente de Primaria para la enseñanza inclusiva de la resolución de problemas matemáticos al alumnado con Trastorno del Espectro Autista-síndrome de Asperger.

O2.1. Identificar el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido que manifiestan docentes de primaria cuando resuelven problemas en el aula con diversidad.

O2.2. Reconocer los elementos de inclusión que evidencian en su práctica.

III.3. Diseño metodológico

Toda investigación ha de situarse en un paradigma, entendiendo este como la visión y la manera de construir el conocimiento científico en base a una realidad (Kuhn, 1962). En nuestro caso, nos adscribimos al paradigma interpretativo, puesto que nos acercamos al objeto de estudio intentando describir y comprender el conjunto de variables que lo componen y las relaciones entre ellas (Bryman, 2016). Entender la realidad educativa de un colectivo como es el estudiantado con TEA, en un contexto concreto como la resolución de problemas, requiere de una visión interpretativa del investigador o investigadora. Esta postura se mantiene cuando trasladamos nuestro foco de estudio desde el estudiante TEA al docente en el aula diversa, para estudiar las interacciones entre este y el alumnado, el conocimiento que manifiestan y su práctica didáctica (Muñoz-Catalán, 2021), implica buscar e interpretar significados (Shulman, 1986).

El paradigma interpretativo ha guiado el desarrollo y planteamiento de los objetivos y preguntas de investigación de este proyecto, considerando que la caracterización de las variables respecto a las estrategias didácticas y el conocimiento del docente se nutre de los significados interpretados en cada momento del estudio (Stake, 1995). Participar en sesiones de un taller con estudiantes TEA-1 y observar sesiones de aulas de primaria, ambos contextos centrados en la resolución de problemas, nos ha permitido extraer datos cualitativos. Estos se definen por su naturaleza verbal y carácter polisémico (Rodríguez et al., 1996), que nos han implicado como investigadores en la recogida mediante grabaciones y trabajo de campo y en su interpretación (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2010). Y precisamente el interés por interpretar aquello que ocurre en el taller de problemas y en el aula de primaria lo que nos sitúa en el enfoque cualitativo. Sin embargo, en ciertos momentos de la investigación hemos recurrido a cuantificar los datos para mejorar la presentación de los resultados y su descripción. Esto nos lleva a una metodología mixta, concretamente, a la metodología en dos etapas (Hernández-Sampieri et al., 2014) (también denominada diseño exploratorio por Creswell, 2003). Los datos

cualitativos son codificados y se registran la frecuencia de sus evidencias, como datos numéricos.

El estudio de caso resulta la modalidad más adecuada para aproximarnos a la realidad que pretendemos estudiar y dar respuesta a las preguntas de investigación. De acuerdo con Yin (2013), el estudio de caso debe ser considerado cuando pretendemos dar respuesta al “cómo” o “por qué” y si se consideran que ciertos elementos contextuales pueden condicionar el fenómeno que se está estudiando. Las variables que influyen en una situación educativa son demasiado numerosas como para poder contabilizarlas todas cuando nos planteamos estudiar algún aspecto de la misma, y el estudio de caso permite describir lo acontecido en un contexto concreto. Dota al investigador o investigadora de un amplio abanico de herramientas metodológicas para estudiar y responder a ese “cómo” y “por qué” (Grauer, 2012), aterrizando en la concretización de la situación educativa. Baxter y Jack (2008) lo comparaban con el uso de un conjunto de lentes que permitían aproximarnos al objeto de estudio dentro de la complejidad del contexto, posibilitando la comprensión y descripción, en nuestro caso, de la situación educativa.

Dado que nuestros objetivos se centran en conocer y describir una situación educativa, como es el abordaje de la resolución de problemas con estudiantes con TEA, son cuatro estudios de caso los que componen esta investigación. Estos estudios, aunque inmersos en un proyecto más complejo que describimos en el siguiente apartado, siguen las fases del diseño de Stake (2010) (Figura 10).

El primer estudio de caso se centra en un taller de resolución de problemas, con el foco de estudio puesto en las estrategias de enseñanza y el aprendizaje que se produce, en relación con la resolución de problemas en estudiantes TEA. Los otros tres se sitúan en el contexto de aula, cuando trasladamos nuestro foco a los docentes de primaria en sus aulas con diversidad. Seleccionamos un grupo de docentes y llevamos a cabo un proceso de observación de sesiones de resolución de problemas. Siguiendo la clasificación de Stake (1995), podemos considerar estos cuatro estudios de caso como instrumentales, dado que el objetivo es alcanzar una mejor comprensión de un tema (Muñoz-Catalán, 2021), en nuestro

estudio, extraer elementos de conocimiento y estrategias inclusivas y sus posibles relaciones.

Figura 10

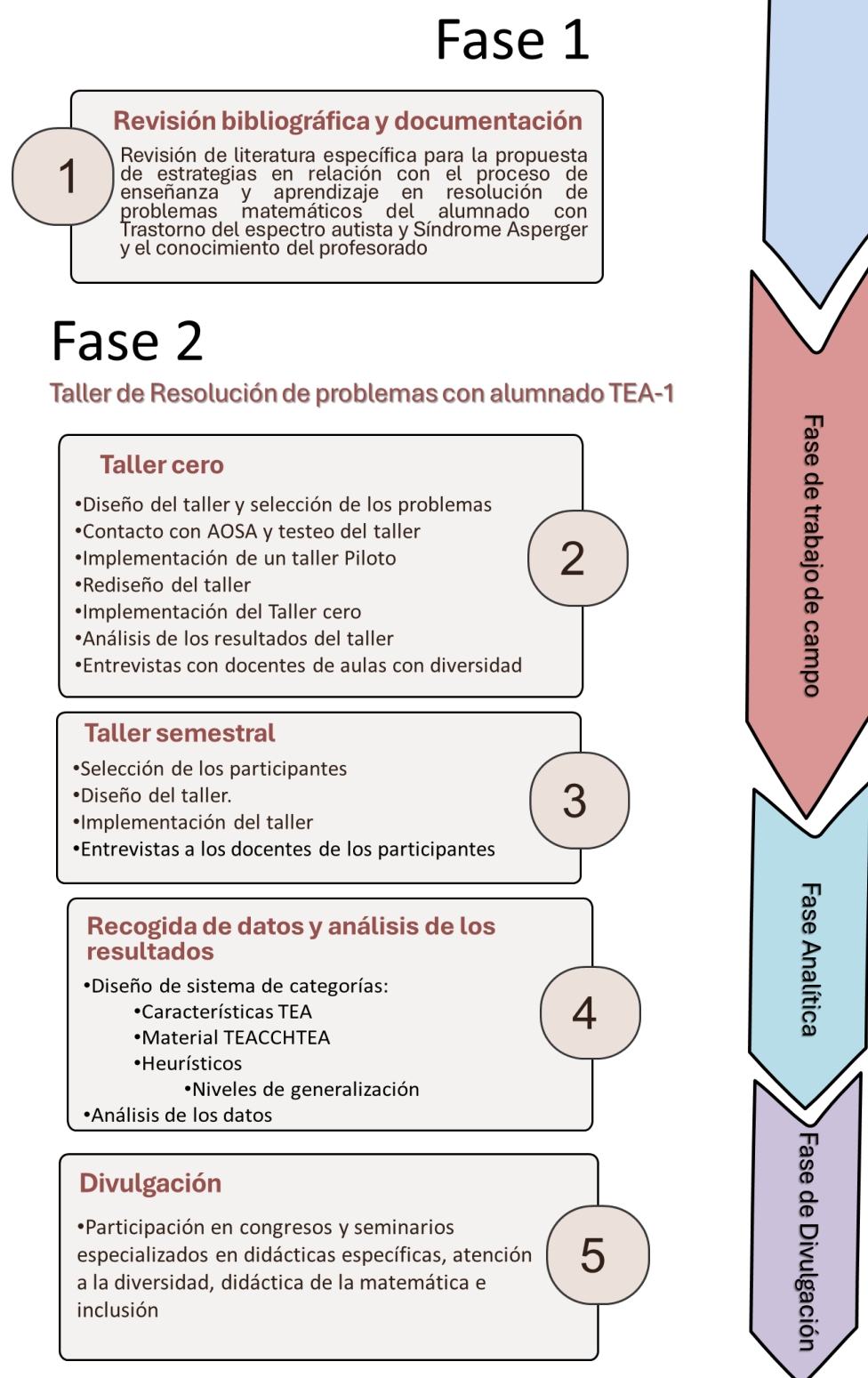
Fases del Diseño del Estudio de Caso



Nota: Adaptado de Stake (2010)

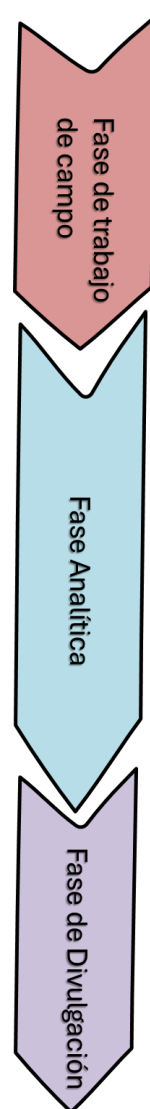
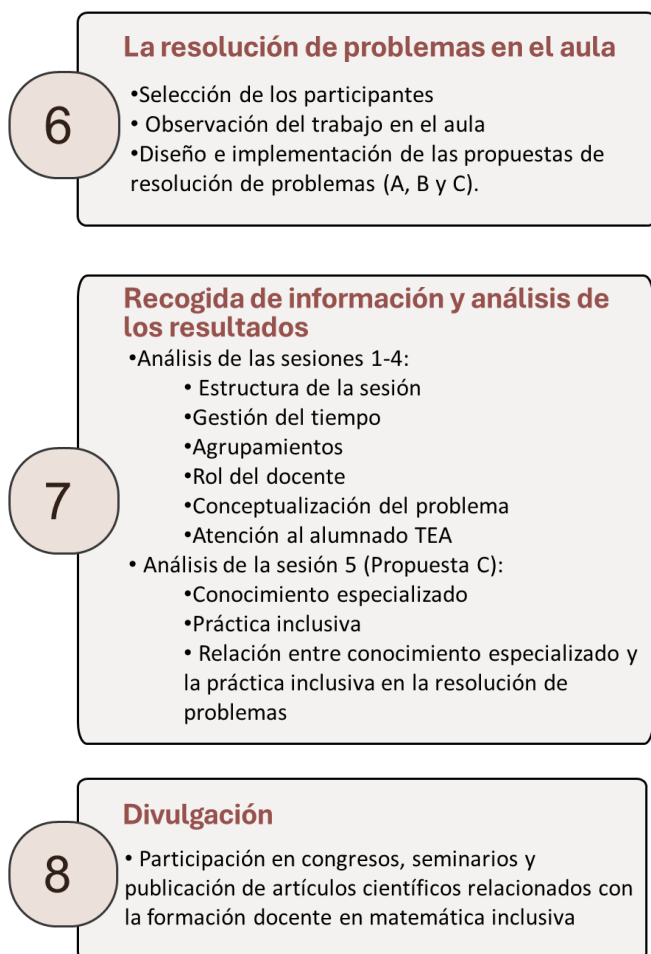
Aunque partimos de un objetivo claro, como es describir necesidades y buenas prácticas docentes inclusivas para la enseñanza de resolución de problemas en el aula de Educación Primaria con alumnado TEA, el diseño metodológico de este proyecto de investigación ha ido modificando sus etapas y los objetivos específicos en función de la realidad educativa y logística que nos encontrábamos. Considerando las distintas modificaciones que ha tenido este proyecto y los cuatro estudios de caso que lo nutren, la investigación se ha desarrollado en diversas fases. El diseño de la investigación, descrito en la Figura 11, se divide en tres grandes momentos que se aproximan a las fases de la investigación cualitativa de Rodríguez et al. (1996): una fase preparatoria de revisión bibliográfica y conocimiento del estado del arte seguida de dos etapas diferenciadas. La primera, relacionada con el O1, se desarrolla en una subfase de trabajo de campo centrada en un taller de resolución de problemas con estudiantes TEA, que a su vez se divide en dos etapas (taller cero y taller semestral); una subfase analítica asociada a la etapa anterior y una subfase de divulgación de resultados. La segunda etapa se relaciona con el O2, organizada a colación de la etapa anterior en una subfase de trabajo de campo centrada en la observación de aulas ordinarias de educación primaria, una subfase analítica y una última subfase de divulgación de datos.

Figura 11
Fases de la Investigación



Fase 3:

Transición al aula de educación primaria



III.3.1. Fase 1: Revisión bibliográfica y documentación

La **fase uno** se centra en la revisión bibliográfica y conocimiento del estado de la cuestión. La labor de revisión se centra, principalmente, en los primeros siete meses del proyecto, durante los cuales se indagó sobre el trastorno del espectro autista y los estudios en educación matemática que se vinculaban a estos estudiantes. Partimos desde una visión más general sobre el trastorno del espectro autista, las características asociadas y las teorías psicológicas que las explicaban, hasta centrarnos en el contexto de enseñanza y más concretamente, en la didáctica de la matemática y la resolución de problemas con este alumnado.

Sin embargo, ha sido necesario continuar nutriendo nuestra investigación actualizando el conocimiento a través de investigaciones emergentes sobre estrategias didácticas y conocimiento del docente. Esta primera revisión bibliográfica fue seguida de dos momentos claves: la divulgación de los primeros resultados y la transición desde el taller hacia el aula de primaria.

La participación en congresos y seminarios especializados en didácticas específicas y atención a la diversidad arrojaron nuevos nodos de investigación que necesitábamos añadir a nuestra red, como la inclusión del síndrome de Asperger, primer foco de este estudio, dentro de uno de los niveles del espectro autista, o el conocimiento específico sobre prácticas matemáticas al resolver problemas y las estrategias de generalización. En el momento en el que nos centramos en el segundo objetivo de esta tesis, fue necesario aterrizar de nuevo sobre los estudios que se centraban en el conocimiento didáctico y la práctica inclusiva en la etapa de educación primaria, redescubriendo marcos relacionados con la formación y el conocimiento docente en la inclusión educativa.

III.3.2. Fase 2: El taller de resolución de problemas.

La **fase dos**, gira en torno al primer estudio de caso: el taller de resolución de problemas con estudiantes TEA-1. Tras la revisión bibliográfica, nos planteábamos abordar el estudio sobre estrategias de enseñanza y el aprendizaje del alumnado TEA. En este momento surge la necesidad de conocer al estudiantado TEA, no solo teóricamente, sino mediante una experiencia práctica en la que abordar distintas estrategias didácticas y descubrir vivencialmente las características, habilidades y dificultades de aprendizaje de estos estudiantes y cómo podían condicionar su proceso de resolución de problemas. Distinguimos varias subfases en esta fase. Iniciamos con una subfase de trabajo de campo, en la que desarrollamos un taller inicial que permitió una primera toma de contacto con los estudiantes, seguido del diseño e implementación de un taller semestral. Le sigue una subfase analítica, en la que describimos el proceso de recogida y análisis de la información y una subfase de divulgación, que contiene las contribuciones a congresos y artículos académicos derivados de la investigación centrada en los talleres con estudiantes TEA-1.

III.3.2.1. Subfase de trabajo de campo

III.3.2.1.1. El taller “cero”

En un primer momento, planteamos el desarrollo del taller como modo de tomar contacto directo con los estudiantes con trastorno del espectro autista en el contexto de resolver problemas matemáticos. Diseñamos así el “taller cero”, un taller a desarrollar con estudiantes con TEA colaborando con una asociación de autismo, AOSA-TEA (Anexo 1) y el proyecto INCLUREC, un proyecto de innovación e iniciativa de aprendizaje-servicio de la Universidad de Huelva en el cual se elaboran y adaptan recursos didácticos dirigidos a alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo (Gómez-Hurtado et al., 2019).

III.3.2.1.1.1 Diseño y taller piloto

Tras un primer contacto con la asociación, a la que se le planteó la organización del taller, se diseñó una propuesta de resolución de problemas con material manipulativo dirigido a estudiantes de entre 6 y 18 años con diagnóstico TEA, de acuerdo con la selección de participantes desarrollada por la asociación. Crearon cuatro grupos (como explicaremos más adelante), organizados por nivel educativo y características psicológicas y psicopedagógicas. Se ofreció a las familias como terapia grupal y se pidió autorización a las mismas a través de un documento (Anexo 2).

El primer diseño contempló cinco problemas, con adaptaciones para cada nivel educativo de los estudiantes que participaban y con distintos materiales para cada uno, diseñados y creados en los talleres de INCLUREC. La creación de los materiales se rigió por los principios del DUA y se adaptaban a las directrices de la enseñanza estructurada¹ y el apoyo visual, de modo que los describimos como material TEACCH².

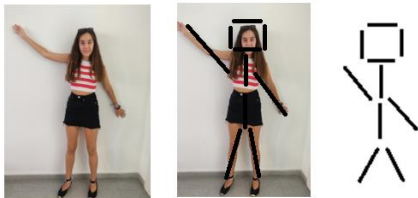
¹ La enseñanza estructurada es un enfoque pedagógico centrado en la organización sistemática y ordenada de los tiempos y el espacio de trabajo mediante el apoyo visual

² El material TEACCH (Treatment and Education of Autistic and related Communication Handicapped Children) se refiere a un programa para personas con TEA basado en el aprendizaje visual y la enseñanza estructurada para fomentar la autonomía y el desarrollo personal.

Este diseño fue discutido con el personal de la asociación, llevando a cabo un grupo de discusión con varios miembros, las investigadoras del taller y del proyecto INCLUREC (ver Anexo 3). Este concluyó en diversas modificaciones del planteamiento, el diseño de las figuras e imágenes adscritas a los problemas, los ejemplos y los materiales (Figura 12), y reduciendo la propuesta a tres problemas: el problema de los muñecos, el problema del gato y el problema de las nueces).

Figura 12

La Figura Inicial del Problema (Imagen de la Derecha) se Complementó con Otras Dos (Imagen de la Izquierda Y Central) para Hacer Explícita y Visual la Forma Anatómica, dado el Nivel de Abstracción del Diseño Inicial



La propuesta modificada fue testada con un grupo de estudiantes sin diagnóstico TEA de edades análogas a los participantes del taller. El taller piloto permitió a las investigadoras matizar elementos del taller como el diseño de los materiales, la organización de los espacios y el tiempo e incluso la modificación de uno de los problemas (el problema de Álvaro y Nico, ver Anexo 3) por su alto nivel de demanda cognitiva. La propuesta final fue implementada una semana después en el taller cero. Los problemas seleccionados fueron los siguientes (Tabla 7, Tabla 8, Tabla 9):

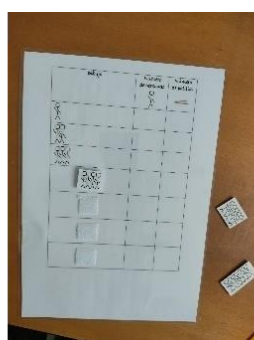
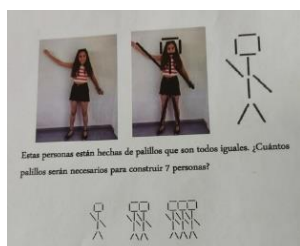
Tabla 7

Problema de los Muñecos

Problema 1: El problema de los muñecos	
Estas figuras están hechas con palillos. ¿Cuántos palillos son necesarios para hacer una figura de cuatro personas? ¿Y una de 7?	
Versión 1:	
Versión 2:	

El problema de los muñecos tiene como objetivo que los estudiantes descubran el patrón inmerso en la figura, relacionando el número de personas con el número de palillos necesarios para construirlas. Se diseñan dos versiones, de distinta dificultad, para ajustarnos al nivel de los participantes, Tras resolver la primera puede proporcionarse la siguiente, a modo de reto.

Para abordar el problema se propone emplear:



Enunciado con apoyo visual estructurado con oraciones secuenciadas y espaciadas. Incluye la transición desde una imagen concreta de una persona a su representación más abstracta mediante palillos.

Palillos depresores de colores diferentes, para construir los muñecos. La construcción puede favorecer la descomposición de las figuras y acercar a los estudiantes a la comprensión del patrón.

Pictogramas de las figuras con 1, 2, 3, ..., 8 personas. Se diseñan para facilitar la organización sobre el organizador y para mantener clara la estructura de las figuras.

Organizador gráfico en formato tabular, velcro, donde poder colocar pictogramas de las diferentes figuras. Se diseña bajo los criterios de enseñanza estructurada y apoyo visual del material TEACCH. Los títulos de las dos columnas integran un pictograma que apoyan su función: un monigote y una imagen de unos palillos.

El problema está diseñado para abordar una serie de heurísticos:

Identificación y Comprensión:

- Fomento de la percepción: observando el dibujo y los datos que representa.
- Representación: reproducir los datos del problema con depresores, imágenes en velcros o una tabla.

- Ejemplificar: los dibujos permiten ver ejemplos de construcción de muñecos y los palillos necesarios.
- Organizar la información: el organizador permite anotar los datos integrando caracteres pictóricos.

Planificación, exploración y ejecución:

- Buscar regularidades: cuántos palillos varían de una figura a otra.

Verificación:

- Generalizar: descubrir un patrón que relacione el número de palillos y de personas.

Tabla 8

Problema de la Granja

Problema 2: El problema de la granja

Juan vive en una granja donde hay gallinas y conejos. Entre todos los animales de la granja pueden contarse: 10 cabezas 28 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja? ¿Y cuántos conejos?

El problema de la granja se centra principalmente en el desarrollo de la estrategia ensayo y error, atendiendo a dos variables: número de animales y número de patas. Para resolverlo, los materiales proporcionados son: un enunciado con apoyo visual y gomets de colores.

Juan vive en una granja donde hay gallinas y conejos.



Entre todos los animales de la granja pueden contarse:

10 cabezas

28 patas.



¿Cuántas gallinas hay en la granja? ¿Y cuántos conejos?



Enunciado estructurado con apoyo visual.

Se añaden imágenes representativas de las variables del problema: los dos tipos de animales referidos en los datos, las cabezas y las patas. Las oraciones del enunciado están secuenciadas y espaciadas, así como las imágenes mencionadas. Se pretende estructurar visualmente los datos para facilitar la comprensión.

Gomets, o pegatinas de colores de distintas formas geométricas. Se incluyen para favorecer la representación de los datos y

reducir las posibles dificultades derivadas del dibujo de animales.

Su diseño plantea abordar una serie de heurísticos:

Identificación y Comprensión:

- Representar: extraer del enunciado los datos relevantes, apoyados por pictogramas e imágenes.

Planificación, exploración y ejecución:

- Explotar el papel de una sola variable o condición: partir del número de cabezas descarta el otro dato y permite simplificar el inicio de la resolución.
- Representar: utilizar los gomets puede simplificar el conteo y exploración de las variables.
- Tantear, aleatoria o sistemáticamente: asignar un valor al número de gallinas o conejos.
- Resaltar los logros intermedios: establecer submetas permite descubrir la relación existente entre el número de patas y cabezas a medida que se van dibujando.

Verificación:

- Analizar la consistencia de la solución y el proceso: aunque puedan dibujarse los animales, el constante conteo de patas permite revisar la solución.

Tabla 9

Problema de las Nueces

Problema 3: El problema de las nueces

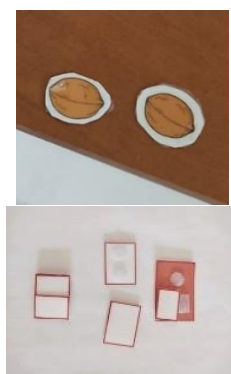
Versión 1:

Carmen sale de casa con una bolsita llena de nueces. Al encontrarse a Martina le da la mitad. Después se encuentra con Julia, a quien le da la mitad de lo que le queda. En el camino de vuelta se come dos de las nueces restantes y le da la última que le quedaba a una ardilla. ¿Cuántas nueces tenía al principio?

Versión 2:

Carmen sale de casa con una bolsita llena de nueces. Al encontrarse a Martina le da la mitad. En el camino de vuelta se come dos de las nueces restantes y le da la última que le quedaba a una ardilla. ¿Cuántas nueces tenía al principio?

El problema de las nueces se centra en el heurístico marcha atrás. Las dos versiones del diseño varían en el número de pasos necesarios para resolver el problema y, consecuentemente, el número de datos implicados. Incorpora números fraccionarios, abordando los significados parte-todo (Behr et al., 1983).



Enunciado secuenciado y con apoyo visual. El diseño contempla que las oraciones del problema estén espaciadas y apoyadas por una imagen. Cada par de elementos representa un paso del problema. Las imágenes incluyen elementos esquemáticos para explicar cada situación.

Pictogramas de nueces y fracciones, plastificadas y con velcro, con objetivo de representar los datos del problema y los significados de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ de la versión 2. El color blanco de las fracciones y el hecho de que estén plastificadas permite que los estudiantes puedan anotar sobre ellas.

Organizador gráfico tabular. Plastificado y velcro, se diseña para poder incluir los pictogramas sobre las celdas. Las filas pretenden representar cada paso de la resolución y las columnas, cada uno de los datos: cantidad inicial (columna de la izquierda), acontecimiento (columna central) y cantidad final (columna de la derecha).

Se diseña contemplando la aproximación a algunos heurísticos:

Identificación y Comprensión:

- Fomento de la percepción: observando las imágenes del enunciado y los datos que representan.

Planificación, exploración y ejecución:

-
- Representar: extraer del enunciado los datos relevantes, apoyados por los pictogramas y la representación tabular.
 - Organizar la información: el organizador permite anotar los datos integrando caracteres pictóricos.
 - Resaltar los logros intermedios: establecer submetas permite descubrir el número de nueces en cada estadio de la resolución.
 - Resolver marcha atrás: comenzando por el dato final del problema, se invierte el camino del personaje hasta conocer el número de nueces con las que salió de su casa.

Verificación

- Analizar la consistencia de la solución y el proceso: el registro sobre la tabla permite ver la resolución.
-

III.3.2.1.1.2. Implementación del taller cero

Durante dos días, pusimos en marcha el taller cero, al que asistieron 16 estudiantes organizados en cuatro grupos de trabajo:

Grupo 1: seis estudiantes de 11, 12, 13 y 15 años

Grupo 2: cinco estudiantes de 12, 13 y 18 años

Grupo 3: Dos estudiantes de 6 y 7 años

Grupo 4: Tres estudiantes de 15 y 16 años.

El taller se desarrolló en un aula de la Universidad de Huelva, en cuatro sesiones, una para cada grupo de trabajo. Además de los estudiantes, en cada sesión del taller estaban tres docentes-investigadoras, entre las que estaba la autora de este proyecto, las dos directoras del mismo y una persona miembro de AOSA-TEA. Las monitoras estaban involucradas en la investigación y eran conocedoras de los objetivos de la misma. La intervención se reducía a guiar la resolución de los problemas, aclarar dudas respecto a los problemas y el uso del material, así como orientar la puesta en común de las ideas que iban surgiendo. En el caso del miembro de la asociación que participaba en cada sesión, a estas tareas se les añadía la función de dar apoyo psicológico si fuera necesario.

Cada sesión seguía la misma estructura. Una presentación de las docentes-investigadoras y de cada participante del taller, seguido de la resolución de los problemas. Cada problema se abordaba con una lectura conjunta, acompañada del reparto de materiales manipulativos. Tras unos minutos de resolución individual, en el que las docentes observaban el proceso e intervenían en función de las necesidades de las y los estudiantes, se iniciaba una puesta en común de los resultados.

III.3.2.1.1.3. Análisis de los resultados del taller cero

Las cuatro sesiones fueron videograbadas y transcritas y se recogieron las producciones de los participantes. De las transcripciones, producciones y de la observación de las sesiones del taller se obtuvieron las unidades de información, que sirvieron como fuente de información para analizar los resultados del taller. El análisis se organiza en términos de las estrategias empleadas, los heurísticos utilizados, el material TEACCH empleado y las dificultades que aparecieron en el desarrollo de cada sesión, considerando las características que evidenciaron los estudiantes y que se asocian al TEA-1. Para ello, se recurre a una metodología exploratoria y cualitativa categorizando cada unidad de información en función de los heurísticos empleados en cada fase de resolución (Tabla 10) y las características del TEA-1 (Tabla 11).

Tabla 10

Categorías Heurísticos y Fases

Comprensión	Planificación y ejecución	Verificación
Representación	Búsqueda de regularidades	Generalización
Ejemplificación	Explotar solo una variable	Analizar la consistencia del proceso
Organización de la información	Ensayo y error aleatorio o sistemático	Analizar la consistencia de la solución
Hacer una lista	Marcha atrás	
Hacer una analogía		

Nota: Elaboración propia a partir de Carrillo (1998)

Tabla 11*Categorías TEA-1*

Funciones Ejecutivas	Habilidades
Dificultades para predecir	Preferencia por un aprendizaje secuenciado
Dificultades de atención sostenida	Habilidad visual
Dificultades en la organización y planificación	Elevado nivel de memoria visual y mecánica
Dificultades de autorregulación	Habilidades de percepción auditiva
Dificultades de memoria de trabajo	Habilidades para percibir y focalizar en los detalles
Limitaciones en la flexibilidad de pensamiento	Habilidades en el reconocimiento de patrones

Coherencia Central Y Teoría De La Mente

Dificultades para inferir significados globales de situaciones comunicativas

Dificultades para comprender mensajes no verbales

Pensamiento literal

Nota: Recuperado de Chico-Gómez et al. (2022b)

III. 3.2.1.2. Entrevistas a docentes de aulas con diversidad

Para el desarrollo del taller, se entrevistaron a cuatro docentes de educación primaria de centros educativos públicos y concertados. Aunque tenían distinta experiencia y contextos diferentes, el criterio de selección se guio por un rasgo en común: que en sus aulas hubiera un estudiante con TEA-1. El diseño de las entrevistas semi-estructuradas a los docentes organiza el análisis de la información en cuatro puntos: metodologías desarrolladas cuando resuelven problemas con el alumnado TEA-1, las dificultades que han de solventarse y las necesidades de formación docente para abordar una matemática inclusiva en el aula.

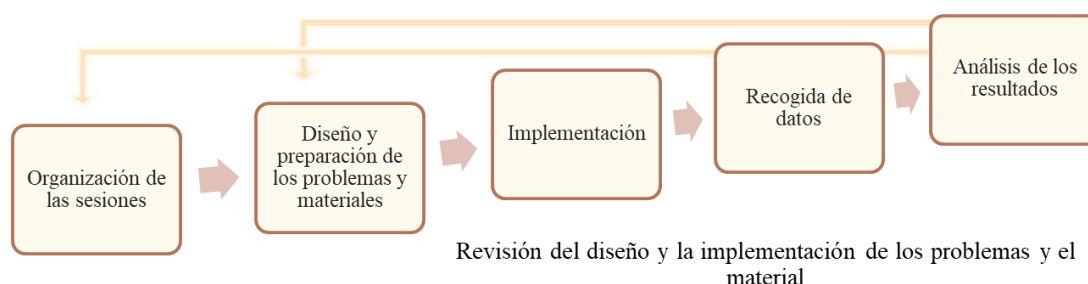
III. 3.2.1.3. El taller semestral

Tras concluir el taller cero, se planteó el desarrollo de un taller de resolución de problemas de mayor duración, dada la necesidad de obtener más información para la consecución del objetivo O1 de este proyecto.

Este taller se lleva a cabo siguiendo una metodología cíclica (Figura 13). La primera fase corresponde con el diseño y organización de las sesiones y los problemas a trabajar en cada una de ellas. La segunda fase se refiere a la implementación y desarrollo del taller, tras la que se inicia la fase tres, en la que se recogen y analizan los datos. Este análisis permite la detección de elementos mejorables en el diseño y desarrollo del taller, lo que cierra el ciclo volviendo a la fase uno.

Figura 13

Metodología del Taller de Resolución de Problemas Semestral



III. 3.2.1.3.1. Diseño del taller semestral

La primera fase comienza por contactar con las familias de los participantes, organizamos el calendario de sesiones bimensuales. Se establecen fechas flexibles para cada sesión, con objetivo de adaptarnos a las necesidades y situaciones de cada estudiante.

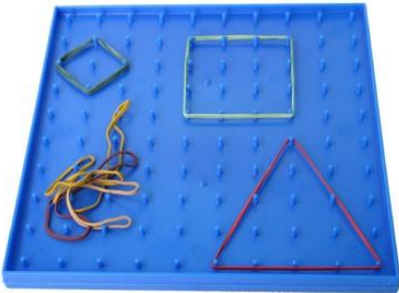
Tras la organización inicial del taller, se inicia el proceso de creación de una batería de problemas a realizar durante las sesiones. La selección se rige por el criterio de que los problemas puedan ser resueltos con estrategias heurísticas, dado que el objetivo del taller es ahondar en las estrategias de enseñanza y en el aprendizaje que promuevan la diversidad de formas de abordar un problema, su comprensión, el planteamiento de datos y la gestión de la resolución, más que en las habilidades de cálculo de los estudiantes.

A continuación, se procede al diseño y creación de materiales manipulativos en el taller de INCLUREC. Se siguen las mismas directrices de diseño del taller cero para desarrollar este material TEACCH.

Nuestro diseño contempla dos tipos de materiales: recursos para la organización y recursos para la resolución (Tabla 12). Cada tipo se orienta a cubrir distintas funciones, desde la comprensión del problema, la gestión y organización de la información o guiar la transición entre las distintas tareas de la sesión.

Tabla 12

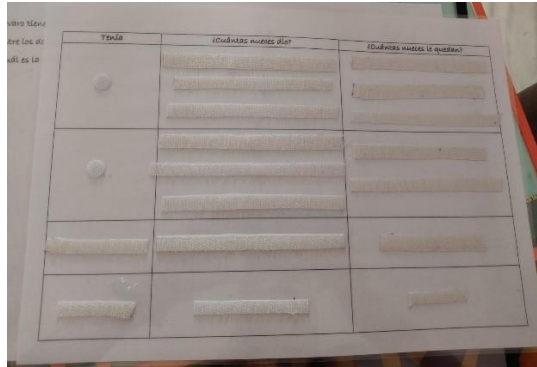
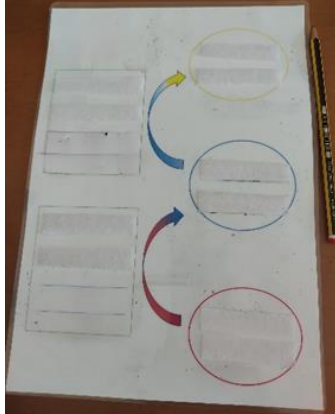
Recursos Diseñados Para el Taller y su Función

Tipo de recurso		Función
Recursos para la resolución		
Pictogramas		
Se incluyen pictogramas de ARAASAAC, imágenes reales o dibujos que complementan la información de los problemas y se relacionan con los personajes de estos y las acciones que realizan.	Representación de los datos	
		
Material de construcción		
Recursos estructurados, como los policubos y el geoplano, y no estructurados, como piezas de goma Eva en forma cuadrada.	Representación de los datos Visualización Establecimiento de relaciones entre los datos	
		

Organizador gráfico

Representaciones en forma tabular o esquemática. Plastificadas y con velcros, ofrecían la posibilidad de añadir pictogramas y títulos y el empleo de rotuladores de borrado en seco.

Representación de los datos
Visualización
Establecimiento de relaciones entre los datos
Organización y registro de la información



Recursos para la organización

Planificador de la sesión

Tabla plastificada y velcada, con pictogramas representativos de cada fase de la sesión y la temática de los problemas.

Visualización de las partes de la sesión
Facilitar la transición entre problemas



Motivadores

Recursos complementarios a las sesiones diseñados con material reciclado y goma Eva empleados para desarrollar estrategias de role-play y dramatización.

Motivar al alumnado
Dotar de contexto a los problemas
Hacer protagonistas a los estudiantes



Juegos de mesa

Juegos con una duración de diez minutos, con elementos visuales y adaptados a la edad de los participantes.

Facilitar la transición entre problemas
Desarrollar el trabajo en equipo, el respeto a los turnos y los tiempos de espera y las funciones ejecutivas como la memoria de trabajo, la organización o la predicción.



Nota: Adaptado de Chico-Gómez et al. (2024)

III. 3.2.1.3.2. Participantes

Tras la experiencia en el taller cero, recurrimos de nuevo a la colaboración con AOSA-TEA para seleccionar a cuatro estudiantes con diagnóstico TEA-1 escolarizados en el último ciclo de educación primaria y que asisten asiduamente a las sesiones de la asociación.

La selección de los participantes estuvo a cargo de la asociación colaboradora de este estudio. La selección se rigió por un primer criterio en términos de competencia matemática. En esta etapa educativa, los estudiantes suelen dominar (en distinto nivel) las operaciones aritméticas básicas y pueden haber desarrollado algunas habilidades como resolutores de problemas (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022), lo que favorece que el trabajo en el taller se focalice en las estrategias de resolución. Además, los psicólogos y especialistas escogieron a los estudiantes, atendiendo a sus características psicopedagógicas, necesidades y competencias sociales y curriculares.

La colaboración con un agente externo en un contexto educativo como el que se planteaba con el taller de resolución de problemas implicaba propiciar la creación de una relación de retroalimentación para el desarrollo de una educación inclusiva (Ainscow, 2010), de modo que los participantes se beneficiaran de la asistencia a la actividad propuesta.

Los participantes son cuatro estudiantes, Raúl, Elio, Omar y Noa, nombres que se corresponden con pseudónimos para respetar la confidencialidad de los datos y

asegurar la protección de los mismos. Durante todo el diseño y la puesta en marcha del taller se contó con la aprobación y consentimiento de los progenitores (ver Anexo 4), quienes desde el inicio se mostraron muy receptivos a cualquier propuesta y comprometidos con el desarrollo del taller. Seguimos un protocolo de confidencialidad y protección de datos, de manera que se documentaron una serie de autorizaciones para la participación de los estudiantes en el estudio y el acceso de las investigadoras a datos e informes académicos y psicológicos (ver Anexo 5). Los cuatro estudiantes eran socios de AOSA-TEA y estaban escolarizados en distintos centros ordinarios de la provincia de Huelva. cursaban el tercer ciclo de educación primaria y ninguno de ellos presentaba deficiencias en su competencia curricular en matemáticas. Según el informe psicopedagógico, el informe clínico y la evaluación psicológica de la asociación, todos presentaban un diagnóstico TEA-1 y afectación principalmente en las funciones ejecutivas. Las consecuencias de esto era la manifestación de necesidades en llevar a cabo tareas consecutivas manteniendo la atención y concentración en las mismas, la organización y la gestión.

En cuanto a la resolución de problemas, dichos informes señalaban necesidades en la toma de decisiones y la inhibición, lo que interfería en el proceso de resolución en términos de focalizar la atención, además de dificultades de organización y planificación.

La sesión de evaluación inicial del taller contribuyó a detectar otras demandas, como la monitorización del proceso de resolución, probablemente vinculada a limitaciones en la memoria de trabajo y la planificación. Aunque los estudiantes establecían relaciones entre los datos, se observaron dificultades al conectar las fases de resolución o sus diferentes estrategias. Las características individuales también influyeron en el proceso de resolución de problemas:

- Raúl:

12 años, estudiante de sexto curso de primaria. A nivel curricular, alcanza las competencias de su curso. Tiene una adaptación no significativa, relacionada principalmente con la temporalización de las tareas de clase y evaluativas y la

incorporación de manipulativos y recursos TICs. Estudia lo que se le dice que estudie o lea, sin ir más allá y no dedica el tiempo suficiente.

A nivel cognitivo, manifiesta una capacidad cognitiva dentro de la media, pero dificultades en funcionamiento ejecutivo: en la organización y planificación, gestión temporal, memoria de trabajo, toma de decisiones y monitoreo para la supervisión de tareas, entre otras. Suele esperar afirmación o guía para continuar con las actividades. Cuando ha de cambiar la hipótesis, parece que tiene la idea clara, pero omite información que antes tenía controlada y vuelve a fallar.

A nivel social, muestra algunas dificultades en la teoría de la mente, sobre todo al interpretar las emociones, intenciones y pensamientos de los demás. Muestra estereotipias. Muy tranquilo y calmado. Poco comunicador, requiere de preguntas y guías para continuar una conversación. Interés por los dinosaurios y los animales. Al resolver problemas, muestra cierta literalidad al interpretar los enunciados y limitaciones para expresar los datos y soluciones de forma clara, así como para inferir la información, con una tendencia a ser poco explícito y no comunicar sus ideas. Se muestra como un estudiante muy autónomo en su trabajo. Tiene buenas habilidades para descubrir patrones, denotando ideas originales.

- Elio:

12 años, estudiante de sexto curso de primaria. A nivel curricular, no tiene adaptaciones significativas, sino refuerzo educativo para trabajar aspectos de la función ejecutiva y algunas adaptaciones respecto a la temporalización de las tareas. Sigue un programa específico.

A nivel cognitivo, muestra afectadas la percepción, atención, memoria, pensamiento e inteligencia. Dificultades para mantener la atención, se distrae a nivel intrínseco con sus propios pensamientos.

A nivel comunicativo, manifiesta una conversación fluida, pero con dificultades para organizar su discurso en muchas ocasiones tanto hablado como escrito. Nivel en caligrafía algo menor que lo esperado, influido por dificultades psicomotrices.

A nivel social, muestra buena intención comunicativa y es cariñoso. Inicia, pero le cuesta bastante el mantenimiento de la interacción porque o se despiste y se evade. Muestra estereotipias. Poca tolerancia a la frustración.

Presentaba dificultades de planificación, exacerbadas por cierta limitación en la conciencia temporal y problemas en los cálculos con cifras elevadas. Mostraba dificultades en la visualización, aunque su capacidad de razonamiento y lógica era notable. Dificultades con operaciones con cantidades elevadas, desordena los datos y la información del ejercicio. Cuando está haciendo problemas con los demás suele estar pendiente de compartir sus logros con ellos.

- Omar:

11 años, estudiante de quinto curso. Muy responsable en su trabajo, sigue cada tarea de manera bastante literal.

A nivel curricular, aprueba todas las asignaturas, pero con adaptaciones curriculares significativas y con bastante apoyo de su PT. Se encuentran, sobre todo, dificultades significativas en la lectoescritura, en el cálculo y problemas matemáticos. Muy integrado en el grupo clase y sus compañeros acceden a ayudarlo cuando lo necesita.

A nivel cognitivo presenta una inteligencia dentro de la media, pero manifiesta dificultades a nivel atencional, visoespacial y de funcionamiento ejecutivo. Sobre todo, en base a sus funciones ejecutivas, es muy lento en la realización de actividades demandantes, mostrando limitaciones en la toma de decisiones a través del razonamiento de las distintas opciones, así como dificultades en la planificación y organización. Respecto al procesamiento por detalles, que aun haciéndole evidente la coherencia central o la globalidad de las imágenes o las figuras, su tendencia sigue siendo a construir o dibujar de manera disgregada (por detalles).

Respecto a la comunicación, presenta un lenguaje fluido y buenas habilidades comunicativas. En los ratos que no trabajamos problemas, marca él la dirección de las conversaciones, teniendo muy acentuada la temática. Muy buena intención comunicativa y buena reciprocidad social, pero a veces tiende a deambular en sus propios pensamientos. Buen comportamiento en general. Responsable y educado. Ausencia de comportamientos idiosincrásicos que vayan más allá de estereotipias mientras está inmerso en sus intereses (*Mario Bros* y la videoconsola *Nintendo*). Muy tranquilo.

Respecto a la resolución de problemas, muestra ciertas dificultades de comprensión cuando trabaja de manera autónoma, requiriendo de apoyo y supervisión. Destacan las dificultades en el razonamiento multiplicativo. Muchas dificultades en el contenido: multiplicaciones, sumas, estimación. Tiende a buscar operaciones aditivas, incluso cuando se emplean términos como “cada” o “por”. Memoria y atención afectadas: En los problemas, le cuesta mucho mantener la atención en todos los datos importantes, se suele centrar en uno o dos y no los relaciona. Lo manipulativo le ayuda bastante, porque se le olvidan los aspectos importantes. Se nota mucho cuando se cansa.

- Noa:

11 años, estudiante de quinto curso. Muy comunicador y participativo. Muestra intereses muy marcados en temáticas de videojuegos.

A nivel curricular, destaca su capacidad para retener rápidamente los contenidos. Los fallos en exámenes o a la hora de realizar tareas, aparecen por su impulsividad a la hora de contestar. Su nivel de matemáticas es notable.

A nivel cognitivo, tiene un nivel intelectual dentro de la media. Las dificultades que se presentan a nivel cognitivo son más basadas en su atención y en aspectos relacionados con su propia inseguridad. Manifiesta muy buena memoria y capacidad de retención. Dificultades en la atención, el orden y en la memoria a corto plazo. Se deja llevar por su idea inicial, aunque se haya discutido y se haya encontrado otra estrategia mejor. Se centra en esa (impulsividad y no monitorea).

A nivel comunicativo, muestra buen desarrollo verbal con elevado nivel de vocabulario. Reiterativo en sus temas de interés, aportando un exceso de información cada vez que quiere explicar algo o transmitir una idea. Dificultades para comprender gestos o expresiones faciales, así como para anticiparse a hechos o vivencias.

A nivel social, a veces no sigue las normas porque no las entiende. Muestra algunas limitaciones al identificar emociones complejas, comprender que sus acciones o comentarios pueden afectar a las emociones de los demás, tener en cuenta lo que las otras personas conocen a la hora de contar algo o dar información, comprender que las creencias de los demás pueden ser diferentes a las suyas y comprender que las personas pueden proporcionar información falsa. Esto se refleja en los

juegos, donde denota cierto nivel de frustración cuando pierde, ante lo que suele inventarse reglas.

Respecto a la resolución de problemas, manifiesta dificultades para razonar y supervisar su propio proceso, con una tendencia a la impulsividad. Se muestra muy hábil en el reconocimiento de figuras visuales. Comprende textos y enunciados e incluso saca ideas principales y hace asociaciones, sin embargo, le cuesta sacar los pasos a la hora de realizar problemas matemáticos, por lo que acaba teniendo fallos. Cuando lee los problemas es capaz de obtener los datos importantes, pero le cuesta organizarlos y seguir las estrategias. Se muestra muy hábil en el reconocimiento de figuras visuales.

III. 3.2.1.3.3. Implementación del taller semestral

El taller se desarrolla en 12 sesiones. Una sesión de introducción, cuyo fin principal era conocer a los participantes y establecer un primer contacto entre ellos y las investigadoras-docentes; una sesión de evaluación inicial; ocho sesiones de desarrollo y dos sesiones de evaluación final. Durante las doce sesiones del taller se resolvieron problemas diseñados para ser abordados con distintos heurísticos, empleando para ello varios materiales TEACCH (ver anexo 6).

Como hemos comentado en el apartado anterior, la propia implementación modificó el diseño inicial del taller. Una de las consecuencias fue una reestructuración de las sesiones. A partir de la segunda, se introdujo el planificador de la sesión, estableciendo una estructura fija para la sesión: saludo y presentación, desarrollo del problema 1, juego de mesa, desarrollo del problema 2 y valoración, en la que se discutía cómo había ido el taller y los estudiantes se despedían hasta la sesión siguiente. Fue necesario establecer una estructura fija para las sesiones con el fin de minimizar la frustración relacionada con la necesidad de inhibición (Chico-Gómez et al., 2024). Disponer del planificador encima de la mesa posibilitaba que los estudiantes previzualizaran los temas a tratar en la sesión (siempre en torno a sus focos de interés), a la vez que quedaban representadas las actividades realizadas y las planificadas para la sesión. El planificador dota de un espacio estructurado, visual (Schopler et al., 2013) y que permite abordar contenidos abstractos como el tiempo (Chico-Gómez et al.,

2022c; 2024). Los pictogramas velcrados se iban retirando a medida que se iban abordando cada parte de la sesión. Por ejemplo, la Figura 14 representa el planificador que se dispuso sobre la mesa de los estudiantes en la sesión 2. Se puede apreciar que se han despegado del planificador el pictograma de saludo y del primer problema (el problema de la caja fuerte, como se ve en el pictograma colocado justo encima).

Figura 14

Planificador de la Sesión 2, en el Momento del Juego de Mesa



Cada problema se abordaba siguiendo la misma estructura: una lectura conjunta iniciaba la resolución (cinco minutos), seguida de una resolución individual, en la que, tras unos minutos se ofrecía el material TEACCH, con o sin guía en su utilización, en función de las necesidades y la autonomía de los participantes. Al finalizar la resolución individual, se ponían en común las ideas, estrategias y resultados. Las fases de resolución individual y puesta en común se extendían o limitaban dependiendo del tipo de problema, de las versiones o posibilidades del mismo y de la actitud y necesidades de los estudiantes durante el taller.

La segunda consecuencia afectó al diseño de los problemas. Se crearon varias versiones de estos, en función de la demanda cognitiva y el número de tareas que involucraban, así como algunas versiones que añadían preguntas extras a la resolución, planteadas como opción si los estudiantes finalizaban la tarea. Al implementar cada uno, se escogía la versión más acorde al momento y al estudiante. La Figura 15 presenta un ejemplo de uno de los problemas del taller, el problema de *Scratch*, descrito en el Anexo 6.9. Se diseñaron cuatro versiones de este problema (Figura), las cuales implicaban números naturales, números fraccionarios y dos etapas distintas de resolución para abordar el heurístico marcha atrás.

Figura 15

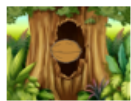
Versiones del Problema de Scratch

Scratch sale de su madriguera con dirección al lago, cargada de nueces.



Cuando llega, se tropieza con una enorme raíz de un nogal que sobresalía de la tierra y caen del árbol 9 nueces.

Hambrienta, se come 8 de las nueces que le quedan



y esconde las últimas 8 nueces en el hueco de un tronco de un árbol cercano.

¿Con cuántas nueces salió de la madriguera?



Al día siguiente, Scratch vuelve a salir en dirección al lago.



Cuando llega, recoge todas las nueces que tenía almacenadas en el árbol.

Se come la mitad.



De repente, aparece un tigre dientes de sable y tiene que salir huyendo, perdiendo la mitad de las nueces que le quedaban



Finalmente, vuelve a la madriguera con 4

¿Cuántas nueces recogió del tronco del árbol?



Scratch sale de su madriguera con dirección al lago, cargada de nueces.



Cuando llega, se tropieza con una enorme raíz de un nogal que sobresalía de la tierra y caen del árbol 9 nueces.

Hambrienta, se come la mitad de las nueces que le quedan



y esconde las últimas 8 nueces en el hueco de un tronco de un árbol cercano.

¿Con cuántas nueces salió de la madriguera?



Al día siguiente, Scratch vuelve a salir en dirección al lago.



Cuando llega, recoge todas las nueces que tenía almacenadas en el árbol.

Se come la mitad.



De repente, aparece un tigre dientes de sable y tiene que salir huyendo, perdiendo la mitad de las nueces que le quedaban



Finalmente, vuelve a la madriguera con 4

¿Cuántas nueces recogió del tronco del árbol?

Una de las características asociadas al TEA es la fijación por ciertas temáticas. Este aspecto ha marcado el diseño de los problemas, seleccionando temas de interés para el alumnado como videojuegos, dinosaurios, animales o personajes de dibujos animados. Se indagó sobre este aspecto en la sesión de introducción, aunque el trabajo semestral con los estudiantes posibilitó conocerlos y adaptar las temáticas cada vez más a sus personalidades e intereses.

Además, los problemas implican una serie de heurísticos. Todos ellos se apoyan de la representación, considerando el pensamiento visual asociado al TEA (Bae et al., 2015; Klaren et al., 2017). Dado que nuestro objetivo es ahondar en las estrategias de resolución con alumnado TEA-1, considerando sus características al abordarlas, seleccionamos una serie de heurísticos que pueden arrojar información sobre la manera en la que los estudiantes desarrollan su pensamiento al abordar problemas, así como sus necesidades y habilidades en dicho proceso.

Uno de los principales heurísticos trabajados es el ensayo y error. El establecimiento de hipótesis puede acercar a las investigadoras a conocer las capacidades de flexibilización de pensamiento, predicción y memoria de trabajo. Se trabaja en las sesiones Introducción (el problema de las nueces y bombones, Anexo 6.1), evaluación inicial (el problema de los lápices, Anexo 6.2), la sesión 1 (el problema de *Mario Party*, Anexo 6.3), la sesión 4 (el problema de *Star Wars*, Anexo 6.6), la sesión 5 (el problema de *Spiderman*, Anexo 6.7) y la sesión 6 (el problema de *Batman*, Anexo 6.8).

El heurístico resolver marcha atrás también protagoniza el taller. Cambiar la incógnita de posición posibilita reorientar las estrategias de resolución, lo que puede beneficiar la observación de las funciones ejecutivas y manifestaciones de comprensión del enunciado. Se aborda en la sesión de evaluación inicial, la sesión 6 (el problema de las estrellas, Anexo 6.8), la sesión 7 (el problema de *Scratch*, Anexo 6.9) y la sesión de evaluación 2 (el problema de los tickets, Anexo 6.12).

Por último, el heurístico generalización es abordado en nueve de las sesiones. Una de las habilidades asociadas al TEA-1 es la capacidad para percibir detalles (de Giambattista et al., 2019), de manera que abordar problemas que involucren la

generalización de patrones geométricos puede beneficiar a los estudiantes en el desarrollo de estrategias de resolución. Los problemas diseñados se basan en relaciones funcionales empleadas en investigaciones previas sobre la generalización matemática con estudiantes TEA, altas capacidades y de desarrollo típico de edades análogas a los participantes del taller (Arbona et al., 2017; Blanton et al., 2015; Carraher et al., 2008; Goñi-Cervera et al., 2022; Pinto y Cañadas, 2017; Zapatera, 2018). Se trabaja en las sesiones de introducción (problema del árbol de navidad, Anexo 6.1), sesión de evaluación inicial (problema de la bolsa mágica, Anexo 6.2), la sesión 2 (el problema del reloj, Anexo 6.4), la sesión 3 (el problema de los saludos, Anexo 6.5), la sesión 4 (el problema de la arqueóloga, Anexo 6.6), la sesión 5 (el problema de los cachorros, Anexo 6.7), la sesión 7 (el problema de los dinosaurios, Anexo 6.9), la sesión 8 (el problema de *Pokémon* y el problema del *Minecraft*, Anexo 6.10) y la sesión de evaluación final 2 (el problema del menú, Anexo 6.12).

Las tablas del Anexo 6 describen cada una de las sesiones del taller, atendiendo a los objetivos, los problemas abordados, los heurísticos implicados y los materiales empleados.

Los recursos se introdujeron progresivamente según las necesidades que se observaban en los estudiantes. A medida que avanzábamos en el desarrollo de las sesiones del taller, el uso de los recursos se hacía más autónomo (ver Tabla 13).

Tabla 13

Distribución del Uso de los Recursos en las Sesiones

Clasificación	Material	Sesiones												
		I	E0	1	2	3	4	5	6	7	8	E1	E2	
Resolución de Problemas	Pictogramas													
	Organizador	Tabla												
		Esquema												
	Material de Construcción	Policubos												
		Piezas goma Eva												
		Geoplano												
Organización de la sesión	Planificador de sesión													
	Motivadores													
	Juegos de mesa													

Nota: Se organiza la tabla en uso con instrucción (color claro) y autónomo (color oscuro)
Recuperado de Chico-Gómez et al. (2024)

Tres docentes-investigadoras, entre las que me incluyo, así como las dos directoras de este trabajo, y dos estudiantes de último curso del Grado en Educación Primaria y Grado de Educación Infantil que colaboraron en el taller guiaron el uso de los materiales y la resolución de los problemas. La intervención de todas se ajustó y graduó de acuerdo con las necesidades que mostraban los participantes.

III. 3.2.1.4. Entrevistas a los docentes de los participantes

A la vez que se desarrollaba el taller de resolución de problemas, establecimos contacto con los docentes de los participantes. El objetivo era conocer cómo abordaban la resolución de problemas en sus aulas y poder relacionar esta forma de trabajo con la que se llevaba a cabo en el taller. Mediante una entrevista semiestructurada (Anexo 7), se cuestionan aspectos relacionados con (a) tipos de problema, (b) tratamiento y participación del alumno en el aula ordinaria, (c) colaboración con el personal docente de Pedagogía Terapéutica y (d) necesidades de formación docente para abordar la enseñanza inclusiva de la resolución de problemas.

III. 3.2.2. Subfase Analítica

III. 3.2.2.1. Recogida de datos y análisis de los resultados

Las doce sesiones del taller fueron videograbadas y posteriormente transcritas. A esta información se le suma las producciones de los participantes en la resolución de cada problema y fotografías del desarrollo del taller. Además de las anotaciones en el cuaderno de campo de cada investigadora, fruto de la observación del desarrollo del taller. Considerando que las investigadoras ejercían también como docentes en el taller, lo que podía influir en la observación del mismo. Además, después de cada sesión, las docentes-investigadoras desarrollaban un grupo de discusión en el que se compartían y discutían los distintos aspectos de la sesión: (i) estrategias de resolución empleadas por cada participante, (ii) dificultades y necesidades observadas, (iii) funciones de los recursos, (iv) consideraciones para las siguientes sesiones. Este registro de información permite la extracción de

unidades de información, que son analizadas mediante una metodología exploratoria y cualitativa.

El proceso de análisis ha sido complejo, dada la cantidad de información recogida de distintas fuentes y las variables de investigación implicadas en él. Mediante el análisis de contenido, etiquetamos cada unidad en función de un sistema de categorías. Este se desarrolla inductivamente a partir de los datos (Mayring, 2014), complementándose con las variables teóricas extraídas de la revisión del estado del arte de nuestra investigación, que se relacionan con los objetivos específicos que marcamos al inicio del capítulo de metodología. Atendemos, de esta forma a las tres variables, que conforman nuestro sistema de categorías: las características TEA, el material TEACCH empleado y las estrategias heurísticas.

La primera variable que requiere atención cuando iniciamos un estudio que implica el alumnado TEA es el conjunto de características psicológicas y psicopedagógicas que la literatura asocia al trastorno. Entre ellas, destacamos las descritas por la Teoría de la Mente, la Teoría de las Funciones Ejecutivas y la Teoría de la Coherencia Central (Carr y Seah, 2019; de Giambattista et al., 2019; Frith y Happé, 1994; Ozonoff, 1997). Estas tres teorías se han considerado en la metodología del taller cero, descrito en el apartado anterior. Sin embargo, la profundidad de este segundo taller, dada su mayor duración temporal, ha permitido describir con mayor especificidad y concreción las características teóricas asociadas al TEA-1. Pretendemos abordarlas desde la perspectiva didáctica, lo que se traduce como concebir las características de los estudiantes TEA-1 como habilidades o dificultades que influyen en su proceso de aprendizaje, tal y como planteamos en el objetivo O1.1.

Los problemas del taller siguen un diseño centrado en la puesta en marcha de distintas estrategias heurísticas de resolución, descritas en las tablas del Anexo 6. Además, en el diseño de todos ellos se ha contemplado el uso de material TEACCH. Aunque el propio diseño del material TEACCH contemplaba las características asociadas al TEA según la fundamentación teórica que guía nuestro estudio, es necesario desgranar la influencia del material en la resolución de problemas de los estudiantes. Considerando el objetivo O1.2 y O1.3, pretendemos ahondar en cómo

estas estrategias y el material han condicionado la forma de comprender y ejecutar el proceso de resolución.

Además, consideramos el proceso de resolución de problemas de generalización de los estudiantes, atendiendo a los niveles de generalización que manifiestan al abordar este heurístico y la influencia de las características y materiales. que describimos en el epígrafe siguiente.

Diseñamos así un sistema de categorías (Tabla 14), a partir del estudio teórico, que atiende a los objetivos del estudio.

Tabla 14

Sistema de Categorías del Estudio de Caso 1

Categoría	Subcategoría	Siglas	Niveles de generalización
Características asociadas al TEA	Dificultades de comprensión verbal	DCV	
	Habilidad de percepción de detalles	HPD	
	Predominancia del aprendizaje secuenciado	PAS	
	Pensamiento visual	PV	
	Dificultades para predecir e inferir	DPRI	
	Dificultades de organización y planificación	DOPL	
	Dificultades de memoria de trabajo	DMT	
	Dificultades para la autorregulación	DAR	
	Dificultades de atención centrada y sostenida	DACS	
	Dificultades para ver la globalidad de una figura	DVGF	
	Literalidad y Rigidez de pensamiento	DLRP	
	Inhibición afectada		
Material TEACCH	Material de construcción		
	Pictogramas		
	Organizador gráfico		
Heurístico	Ensayo y error		
	Establecimiento de una submeta		
	Resolución marcha atrás		
	Generalización		1. Pre-estructural
			2. Recursivo particular
			3. Nivel recursivo general
			4. Funcional particular

	5. Funcional general primitivo
	6. Funcional general emergente
	7. Funcional general condensado
	8. Función como objeto

Nota: Elaboración propia a partir de Bae et al. (2015), Blanton et al., 2015, de Giambattista et al. (2019), y Frith y Happé (1994)

III. 3.2.2.2. Subcaso: el problema de generalización

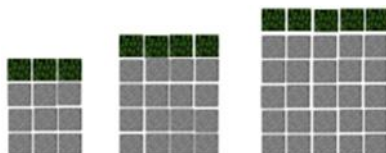
Como hemos comentado anteriormente, un heurístico recurrente en las sesiones de problemas (en nueve de ellas) fue la generalización. Para abordar el proceso de resolución, los participantes disponían de varios recursos, lo que incrementaba la aparición de una mayor diversidad de estrategias para resolver el problema.

Seleccionamos un problema de generalización para hacer un análisis en profundidad, el problema del *Minecraft* (Figura 16), de la sesión 8 del taller, por ser el último que se trabajó con los estudiantes previo a las dos sesiones de evaluación final y con una dificultad superior a los problemas de generalización abordados con anterioridad, que solo involucraban dos variables y relaciones lineales [e.g.: $f(x)=2+2x$; $f(x)=x+11$; $f(x)=x(x+1)/2$].

Figura 16

Problema del Minecraft

Jugando al Minecraft, tienes que construir las murallas de tu castillo. Cada trozo de muralla está construido con bloques de piedra y de hierba (para decorar). A medida que vas consiguiendo más materiales, la vas agrandando, siempre manteniendo la misma forma. ¿Cuántos bloques de hierba y piedra tendrá tu segunda muralla? ¿Y tu tercera muralla? ¿Y tu sexta muralla?



El problema implica tres variables, número de muralla (M), bloques de piedra (P) y bloques de hierba (H), relacionadas mediante cuatro funciones lineales y cuadráticas que relacionan los bloques de piedra y hierba (F1: $H^2=P$), el número de la muralla con los bloques de hierba (F2: $M+2=H$) y los bloques de piedra (F3: $(M+2)^2=P$) y las tres variables entre sí (F4: $M+2+(M+2)^2=H+P$).

Realizamos el análisis de la resolución atendiendo al material TEACCH y tipo de representación empleados según si utilizaban: (a) el dibujo o las piezas de goma Eva, (b) la tabla organizadora, (c) el dibujo o la goma Eva y la tabla, (d) los pictogramas, (e) los pictogramas y la tabla o (f) si no usaban material. Además, con objetivo de estudiar las estrategias y el desarrollo de la generalización que

manifiestan los estudiantes, empleamos un sistema de categorías (Tabla 15) derivado de los ocho niveles de generalización de Blanton et al. (2015) (Tabla 4, en el capítulo del marco teórico).

Tabla 15

Concreción de los Niveles de Generalización de Blanton et al. (2015) al Problema del *Minecraft*

Niveles de generalización	Manifestaciones de cada nivel	Ejemplo sobre una función
1. Pre-estructural	1.a. No describen ni utilizan ninguna relación matemática al hablar de los datos del problema.	F2($M+2=H$): cuentan las piezas verdes de cada muralla, sin establecer relaciones entre las cantidades.
	1.b. Pueden observar regularidades no basadas en relaciones funcionales.	F1($H^2= P$): dicen que si hay más hierba, tiene que haber más piedras.
	1.c. Responden sin explicar su razonamiento o usan estrategias de conteo o modelización en las que no se observa que relacionen las variables.	F4($((M+2)+(M+2)^2=H+P)$): sobre el dibujo, cuentan el total de bloques de cada muralla.
2. Recursivo particular	2.a. Entienden el patrón desde el conteo, secuenciando un conjunto de ejemplos concretos, sin articular el patrón como generalidad.	F2($M+2=H$): construyen con las piezas cada muralla añadiendo un bloque de hierba más a cada término.
	2.b. La respuesta alude a la relación recursiva aplicada en el término anterior, sin evidencia de generalizar a otros términos.	F3($(M+2)^2=P$): añaden (con dibujo o piezas) una fila/columna de piedras a la estructura anterior para formar la siguiente muralla, indicando, por ejemplo: “para pasar de la primera muralla a la segunda he añadido cinco piedras más”.
	3.a. Comprenden el patrón recursivo como una regla general, sin referirse a	F2($M+2=H$): comparan los pictogramas para afirmar que la hierba de una muralla a la

3. Nivel recursivo general	ejemplos o casos concretos.	siguiente aumenta "de uno en uno".
	3.b. Pueden utilizar los casos numéricos para describir un patrón que refleja una regla general.	$F4((M+2)+(M+2)^2=H+P)$: expresan que "hay que sumar siempre la fila de hierba, estos 5, y la de piedras, estos 5, para conseguir el total de la tercera muralla".
	3.c. Identifican el patrón recursivo en una o dos variables.	$F1(H^2= P)$: expresan que "si añades uno a los bloques de hierba, tienes que añadir una L de cuadraditos de goma Eva a las piedras".
4. Funcional particular	4.a. Establecen una relación funcional entre valores específicos, sin reflejar una generalización.	$F3((M+2)^2=P)$: expresan que "la muralla 2, tiene 4 filas de piedras, o sea, 16".
	4.b. Se apoyan en el caso particular anterior para responder sobre el término general.	$F4((M+2)^2+(M+2)=P+H)$: expresan que "si en la fila anterior (de la tabla) eran 4 hierbas, ahora serían 5 de hierba, 5x5, entonces 30 en total".
5. Funcional general primitivo	5.a. Pueden conceptualizar una relación general entre dos cantidades a partir de un conjunto de casos, aunque sus representaciones tengan características primitivas e incompletas.	$F1(H^2=P)$: señalando sobre las filas y columnas de la tabla, expresan que "aquí hay 3 hierbas, entonces 3x3 piedras; en esta hay 4 de hierba: 4x4 piedras; En esta hay 5: 5x5...".
	5.b. Expresan la relación funcional aludiendo al contexto, sin describir la transformación matemática o mencionar las variables.	$F3((M+2)^2= P)$: expresan que "se multiplica por el lado de la muralla para hacer un cuadrado de piedras".
6. Funcional general emergente	6.a. Reflejan atributos clave de una relación funcional generalizada, pero de manera incompleta: e.g. refiriéndose solo a una	$F2(M+2=H)$: expresan que "hay que sumar 2 a esta columna de la tabla, que es el número de muralla".

	variable, o incluyendo cantidades generales, pero no la relación matemática entre ellas.	
	6.b. Especifican las variables y comprenden la operación entre ellas, pero no describen la transformación matemática.	$F3((M+2)^2 = P)$: expresan que “el número de la muralla siempre va a tener dos hierbas más, que se multiplica”.
7. Funcional general condensado	7.a. Conceptualizan las funciones como una relación general entre dos cantidades arbitrarias.	$F4((M+2)+(M+2)^2 = H+P)$: expresan que “el número de hierba multiplicado por sí mismo es el número de piedras. Se suman y se obtiene el total”.
	7.b. Describen las cantidades generales y la transformación matemática entre ellas a través de una relación funcional representada con notación simbólica.	$F3((M+2)^2 = P)$: expresan que $(M+2)^2 = P$.
8. Función como objeto	Perciben límites en la generalización de una relación y son capaces de comprender cómo se transforma la regla y construir dicha transformación.	$F2(M+2=H)$: expresan que “si la muralla fuera rectangular, se sumaría la hierba de un lado del rectángulo”.

Nota: Recuperado de Chico-Gómez, Polo-Blanco et al. (En prensa)

El análisis de la información se lleva a cabo a partir de las diferentes unidades de información. En la Figura 17 mostramos un ejemplo de cómo se efectúa el proceso de análisis. Las dos unidades (A y B) extraídas de la resolución de Noa, se etiquetan en función de si hubo intervención o fue una estrategia espontánea del estudiante, la función del problema implicada, el término de la secuencia, el nivel de generalización y el recurso que utiliza el estudiante. Además, en la organización en unidades permite detectar manifestaciones de características asociadas al TEA-1.

Figura 17

Análisis de Dos Unidades Extraídas de la Resolución de Noa

	Acción espontánea o derivada de la instrucción	Función implicada	Términos de la secuencia que alude	Nivel de generalización (Blanton et al., 2015)	Recursos empleados
UNIDAD A	E	F4	4, 5	Funcional particular 4.2 No menciona las variables. Contesta casos concretos	Organizador y pictos
	N: En la cuarta, siguiendo lo que hay aquí serían 6, que lo multiplicamos por 6 veces (apoyándose en el picto para explicárselo a Sofía) ... Si... (cuenta solo la columna del picto de la tercera muralla) 6x6... 36, y se quedarían 42 (en total) D: Entonces, ¿has encontrado una forma para pasar de las verdes a las grises? ¿Cómo has pasado del 5 al 25? N: 5x5 D: ¿y del 4 al 16? N: 4x4				
UNIDAD B	E	F1	6	Funcional particular 4.1 Necesita contar el lado del cuadrado y no se refiere a ninguna variable INCORRECTO	Organizador (picto)
	D: ¿Serías capaz de hacer la sexta mentalmente? N: Mmmm... no. A ver, déjame ver un momento (cuenta sobre el picto solo el lado del cuadrado) 7... (lo escribe) sería 7x7				

Las etiquetas se organizan en una tabla, atendiendo a cada estudiante, empleando para ello una hoja de cálculo, que facilita la comparación de los datos. Los datos se organizan de acuerdo con el término de la secuencia al que aluda cada estudiante (Figura 18). El programa Excel posibilita atribuir colores a las variables en función del valor que manifiestan. Por ejemplo, a partir del nivel 4 la generalización alcanza el nivel funcional y la celda se torna en color amarillo. Posteriormente los datos se representan gráficamente mediante un diagrama de dispersión.

Figura 18

Organización de los Datos de los Cuatro Estudiantes Utilizando el Programa Excel

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	1 F2		1 d	A		1 F1		1 d	A		1 F4		1 d	A		1 F2		1 d	A
2	2 F2		1 d	B		2 F1		1 d	B		3 F4		1 d	B		2 F2		2 d	B
3	1 F1		1 d			3			C		1 F2		2 OY PICTOS C			2 F3		1 d	
4	2 F1		1 d	C		4 F4		2 d	D		1 F3		1 d	D		3 F4		1 d	
5	3 F2		3 d			5			E		2 F2		2 OY PICTOS E			4 F2		2 d	
6	3 F1		1 d	D		6 F4		3 d	F		2 F3		1 OY PICTOS F			4 F3		2 d	
7	3 F2		3 esquema	E		7 F1		5 d	G		3 F4		4 OY PICTOS G			5 F2		2 d	
8	2 F1		4 X						H		4 F4		4 OY PICTOS H			6 F2		2 d	
9	3 F1		4 X						I		5 F4		4 OY PICTOS I			7 F2		2 d	
10	6 F2		2 esquema						J		6 F4		4 d	J				1 d	
11	4 F2		3 esquema						K		7 F4		4 d	K		4 F1		4 d	
12	4 F1		5 esquema						L		3 F3		2 -	L		5 F1		4 d	
13	5 F1		5 esquema						M		23 F1		5 -	M		5 F2		2 d	
14	6 F1		5 esquema											N		6 F1		4 d	
15	7 F2		3 esquema											N		7 F1		4 d	
16	7 F1		4 esquema																
17	3 F2		5 esquema																
18	9 F3		4 ESQUEMA																
19	23 F1		6 esquema																
20	ELIO																		

III. 3.2.3. Subfase de Divulgación

La fase divulgativa e informativa se ha realizado paralelamente al desarrollo del taller y comienzo de la fase 3, descrita en los siguientes apartados. La información extraída del análisis y rediseño del taller ha permitido analizar y describir los resultados del estudio con estudiantes TEA-1.

2022

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I., y Climent, N. (2022). Problem-solving by students with Asperger's Syndrome. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti. (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp.4395–4410). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I., y Climent, N. (2022). Resolución de problemas matemáticos y Síndrome de Asperger: El uso del material TEACCH. *XVIII Congreso Internacional y XXXVIII Jornadas de Universidades y educación inclusiva*. (RIEJ) Universidad de las Islas Baleares. Palma de Mallorca, 2022.

Chico-Gómez, A., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (2022). La enseñanza estructurada en la resolución de problemas desde la perspectiva inclusiva [Taller]. Presentado a las *XX Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)* (pp. 1665–1676). Valencia. 3 a 6 de julio de 2022.

Chico-Gómez, A., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (2022). Using heuristics and 'TEACCH' materials in problem solving with students with Asperger Syndrome. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 189). PME.

Chico-Gómez, A., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (2022). La representación tabular en la resolución de problemas con alumnado con

Síndrome de Asperger. En T. F. Blanco, C. Núñez García, M.C. Cañadas, J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 209–217). SEIEM.

Chico-Gómez, A., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (2022). Using heuristics and ‘TEACCH’ materials in problem-solving with students with Asperger Syndrome. *28th Conference of Mathematical Views*. (MAVI). Universidad de Oviedo, Oviedo. 2022.

2023

Chico-Gómez, A., Climent, N., Gómez-Hurtado I, y Polo-Blanco, I. (2023). Resolución de un problema de generalización por un alumno de 5º de primaria con Síndrome de Asperger. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp.195–202). SEIEM.

2024

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I y Climent-Rodríguez, N. (2024). Recursos didácticos inclusivos en la resolución de problemas matemáticos con alumnado con síndrome de asperger. *Revista de Educación Inclusiva*, 17(1), 157–181.

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I y Climent-Rodríguez, N. (en prensa). 5 claves para la enseñanza de resolución de problemas con alumnado con TEA- Síndrome de Asperger desde la inclusión. *Actas del I Congreso Internacional de Investigación e Innovación sobre los Derechos de la Infancia: CRECER*. Universidad de Córdoba.

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I, y Climent-Rodríguez, N. (en prensa). Material TEACCH como facilitador de la generalización matemática en estudiantes con TEA-Síndrome de Asperger. En Editor1, Editor2 (Eds.), *Título del libro* (páginas del capítulo pp.). Octaedro.

Chico-Gómez, A., Polo-Blanco, I., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (en prensa). Resolución De Un Problema De Generalización Por Alumnado Con Trastorno Del Espectro Autista. *Enseñanza de las Ciencias*.

III.3.3. Fase 3: Transición al aula de primaria

Finalizado el taller de resolución de problemas, continuamos el desarrollo de este proyecto hacia la consecución del segundo objetivo (O2), y con ello, trasladamos el foco de estudio desde los estudiantes TEA hacia los docentes de la etapa primaria. Una de las motivaciones de este proyecto es abordar la enseñanza de la resolución de problemas desde la perspectiva inclusiva. Por ello, se requieren transferir las estrategias y metodologías desarrolladas en el taller, caracterizado por ser un contexto de enseñanza controlado, a un aula de primaria, donde confluyen diferentes características, habilidades y contextos que el docente debe atender. El análisis de los datos del primer estudio de caso precedió al inicio del diseño, implementación, recogida y análisis de los datos del estudio de caso de cada docente: la fase 3.

La fase 3 se relaciona con el segundo estudio de caso vinculado a esta tesis. Planteamos un proceso de observación de docentes de educación primaria cuando abordan la resolución de un problema matemático en su el aula empleando materiales manipulativos. Destacamos el contexto de enseñanza, dado que dentro de la diversidad del aula de estos docentes encontramos un alumno o alumna con TEA-1.

Para su consecución, la fase 3 se desarrolla en varias subfases. Una primera etapa gira en torno al trabajo de campo en el aula, abarcando la selección de los docentes participantes, el diseño y la implementación de la propuesta. La segunda etapa se centra en la fase analítica, describiendo la recogida y análisis de los datos y el diseño de los sistemas de categorías. Finalmente, en la fase informativa y divulgativa se construyen los diferentes artículos y manuscritos que resumen las conclusiones del estudio.

III. 3.3.1. Subfase de trabajo de campo: La resolución de problemas con alumnado TEA-1 en el aula de educación primaria

III.3.3.1.2. Selección de los participantes

La selección de los participantes se basó en tres criterios: desarrollar sesiones de resolución de problemas como tareas propias del aula, tener un estudiante TEA-1 en el aula de tercer ciclo de primaria y mostrar disponibilidad e interés para participar en el estudio. Andrea, Ester y Federico (nombres ficticios), son tres docentes de distintos centros educativos de la provincia de Huelva foco de esta investigación y estudio al cumplir estos criterios, conformando tres estudios de caso (Tablas 16, 17, 18):

Tabla 16

Estudio de caso 2

Datos generales	Ester, es una docente con aproximadamente 20 años de experiencia. Durante este tiempo, ha recibido formación continua en metodologías didácticas y desarrollo e implementación de las TICs en el aula. Imparte clase en un centro educativo concertado de Educación Infantil, Primaria y Secundaria y Formación Profesional de la periferia de la capital desde hace más de 15 años, caracterizado por su diversidad en orígenes, culturas, habilidades y dificultades de aprendizaje.
Datos del Aula	Su clase de sexto curso de primaria se compone de 24 estudiantes, entre los que está EstudianteA, con diagnóstico TEA. Manifiesta diversas dificultades en la comunicación y expresión y un nivel competencial inferior al del resto de su clase. Tiene una adaptación significativa, recibe apoyo del docente de Pedagogía Terapéutica dos veces por semana en habilidades específicas de comunicación, funciones ejecutivas, lectoescritura y matemáticas, pero en la mayoría de los casos asiste al aula con el resto de sus compañeros y compañeras.
Resolución de problemas	Ester aborda la resolución de problemas como un contenido más del aula de matemáticas. Extrae la mayoría de los problemas del libro de texto, aunque también introduce en el aula algunos adaptados por ella, centrados en desarrollar competencias relacionadas con contenidos del currículo. Considera el uso del libro de texto y la pizarra digital para proyectar los diferentes problemas y otorga mucha importancia a la fase de verificación del problema.

Tabla 17*Estudio de Caso 3*

Datos generales	Federico estudió la Diplomatura de magisterio y cuenta con más de 10 años de experiencia en un colegio concertado de Educación Infantil, Primaria y Secundaria situado en el centro de la ciudad. En su formación continua abarca diferentes cursos sobre enseñanza inclusiva, uso de las TICs y algunas metodologías de enseñanza de la matemática.
Datos del Aula	Imparte matemáticas en el aula de quinto curso, compuesta por 25 estudiantes. El trabajo se desarrolla normalmente en grupos, que integran habilidades heterogéneas. de 26 estudiantes de quinto curso, que incluye al EstudianteJ que tiene un diagnóstico TEA-1. quien no tiene adaptaciones curriculares específicas, pero recibe apoyo en el desarrollo de habilidades sociales. Muestra una motivación especial a trabajar la resolución de problemas y muestra mejores habilidades para trabajar en grupo que individualmente. Suele pasar desapercibido en el aula y sigue las lecciones normalmente sin dificultad. Solo
Resolución de problemas	Considera la resolución de problemas como un reto que puede motivar al alumnado. Desde su incorporación al centro en el que ejerce, ha participado en el desarrollo de un taller de resolución de problemas. Este se estructura en diferentes sesiones, normalmente una por semana, que se desligan de los contenidos matemáticos que se estén trabajando y se centran en el razonamiento. Se orientan al desarrollo de habilidades de resolutor de problemas, como, por ejemplo, la formulación de preguntas, la transformación de problemas, el diseño de distintas preguntas y contextos para un conjunto de datos dado, entre otros.

Tabla 18*Estudio de Caso 4*

Datos generales	Andrea es un docente novel con dos años de experiencia. Estudió el Grado en educación primaria y continuó su formación con un máster en investigación en enseñanza de la matemática. Como parte de su formación continua ha realizado cursos sobre educación inclusiva y cursos específicos sobre enseñanza de la matemática, como, por ejemplo, sobre el método ABN. Su breve experiencia docente no ha incluido el trabajo con alumnado TEA, pero sí con diferentes estudiantes con NEAE y distinto nivel educativo.
Datos del Aula	Es tutor en un centro rural, con una clase con siete estudiantes de tercero, cuarto y quinto de primaria. EstudianteU es un estudiante del aula de Andrea con diagnóstico TEA-1, que, de manera general, sigue las sesiones del docente y las actividades que propone. Requiere de atención individualizada en algunos momentos, como el apoyo en el

	control de la tarea diaria y el uso de la agenda o la temporalización de las actividades.
Resolución de problemas	La resolución de problemas forma parte de su día a día en el aula, que trabaja con los estudiantes de manera individual, puesto que puede haber otros realizando actividades diferentes, dado el carácter multinivel de su clase. Los problemas los extrae de diferentes webs, del libro y de un cuadernillo específico de resolución de problemas de los estudiantes. Alterna problemas relacionados con los contenidos que van abordando en el aula y contenidos generales del nivel, con problemas de razonamiento, lógico, además de introducir actividades de clase orientadas a desarrollar estrategias de resolución. Andrea otorga importancia a las dificultades derivadas de la comprensión lectora y de mecanizar el proceso de resolución, que contempla en el desarrollo de sus sesiones de resolución de problemas. En la resolución de problemas, EstudianteU ha recibido apoyo, tanto del docente de Pedagogía Terapéutica, como de Andrea, quien debía compaginar dicha tarea con atender al resto de estudiantes y sus distintos niveles. Se ha orientado el trabajo del curso a que EstudianteU desarrolle habilidades como resolutor autónomo, de manera que ha participado con sus compañeros y compañeras en la resolución de diferentes problemas diseñados por Andrea y una Olimpiada de resolución de problemas celebrada en el centro.

Ninguno de los tres ha recibido formación específica centrada en la atención a la diversidad o sobre autismo, aunque sí han participado en algunos cursos de formación continua sobre inclusión.

III.3.2.1.1. Diseño e implementación

El estudio se desarrolló tomando como principal fuente de información la observación no participante de quince sesiones de matemáticas en el aula, cinco sesiones de observación de cada participante. Estas se estructuraron en dos sesiones de observación de resolución de problemas diseñadas por el propio docente, una sesión de observación con una propuesta de problemas (Propuesta A) diseñada por las investigadoras y dos sesiones que incluyeron tanto una propuesta como la guía para su implementación (Propuestas B y C). Aunque se intervino en el diseño de las sesiones, hablamos de observación no participante porque una vez en el aula la actuación de las investigadoras fue de meras observadoras. En cada sesión estuvo presente la doctoranda y en algunas ocasiones una de las directoras del trabajo.

Las tres propuestas se diseñaron considerando los problemas de los talleres: taller cero y semestral de resolución de problemas con el alumnado TEA-1 desarrollado en este proyecto y descrito en el apartado 2 de este capítulo. La propuesta A consistió en una batería de cuatro problemas. Fueron reformulados para adaptarlos a los intereses y contextos de los estudiantes de las clases, orientándolos hacia la temática de viajes y animales (Figura 19).

Figura 19

Problemas de la Propuesta A

EL PROBLEMA DE NICO

Álvaro tiene 19 años más que su gato Nico. Entre los dos suman 37 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?



Álvaro tiene 19 años más que su gato Nico.

Entre los dos suman 37 años.



¿Cuál es la edad de cada uno?

EL PROBLEMA DE LOS CALCETINES

Dentro de unas horas cojo un vuelo hacia Tailandia, que sale de madrugada. Me quedan por guardar los calcetines, pero se ha ido la luz y no veo nada. Sé que tengo en el cajón 4 calcetines verdes, 6 azules y 8 rojos. Como mínimo, ¿cuántos calcetines tengo que coger para que sea seguro que llevo dos del mismo color?



Dentro de unas horas cojo un vuelo hacia Tailandia, que sale de madrugada.

Me quedan por guardar los calcetines pero se ha ido la luz y no veo nada.

Sé que tengo en el cajón 4 calcetines verdes, 6 azules y 8 rojos.



Como mínimo, ¿cuántos calcetines tengo que coger para que sea seguro que llevo dos del mismo color?

EL PROBLEMA DEL TUC-TUC

Durante una de las excursiones en nuestro viaje a Tailandia, tuvimos que decidir qué transporte usar. Pudimos escoger entre tuc-tuc, en los que cabían 2 personas, y taxis. Al final tomamos 10 vehículos en total para los 28 excursionistas. ¿Cuántos tuc-tuc cogimos? ¿Y cuántos taxis?

Durante una de las excursiones en nuestro viaje a Tailandia, tuvimos que decidir qué transporte usar.

Pudimos escoger entre tuc tuc, en los que cabían 2 personas, y taxis.



Al final tomamos 10 vehículos en total para los 28 excursionistas.



¿Cuántos tuc tuc cogimos? ¿Y cuántos taxis?

EL PROBLEMA DEL SANTUARIO DE ELEFANTES

El conductor del tuc-tuc quiere aprovechar los viajes para llevar agua al santuario de elefantes de Chiang Mai. Debe llevar 500 litros de agua para los elefantes, que están a 50 km. El tuc-tuc solamente puede cargar 100 litros por viaje. Consume medio litro de agua por kilómetro recorrido y si no lleva agua, no funciona.

¿Cuántos viajes tiene que dar el conductor del tuc-tuc para llevar los 500 litros al refugio de elefantes?



El conductor del tuc tuc quiere aprovechar los viajes para llevar agua al santuario de elefantes de Chiang Mai.

Debe llevar 500 litros de agua

para los elefantes, que están a 50 km.



50 KM



El tuc-tuc solamente puede cargar 100 litros por viaje.



Consume medio litro de agua por kilómetro recorrido

y si no lleva agua, no funciona.



¿Cuántos viajes tiene que dar el conductor del tuc tuc para llevar los 500 litros al refugio de elefantes?

Las propuestas B y C se centraron en un problema cada una, ambos seleccionados del taller: el problema de los muñecos y el problema de la arqueóloga. El diseño de las dos propuestas incluía el uso de material TEACCH para la resolución (Figuras 20 y 21). Los dos problemas tienen como objetivo la generalización matemática y, tanto el diseño del problema como de los materiales contemplaba la aparición de diversas estrategias de resolución y, por tanto, la posibilidad de ser abordadas desde diferentes perspectivas didácticas.

Figura 20

Materiales Empleados en la propuesta B (problema de los muñecos). De Izquierda a Derecha, Versión 1 y 2 de los Enunciados (Arriba), depresores de colores, Pictogramas que Representan Figuras con Diferentes Muñecos y Tabla con Velcro (Abajo).

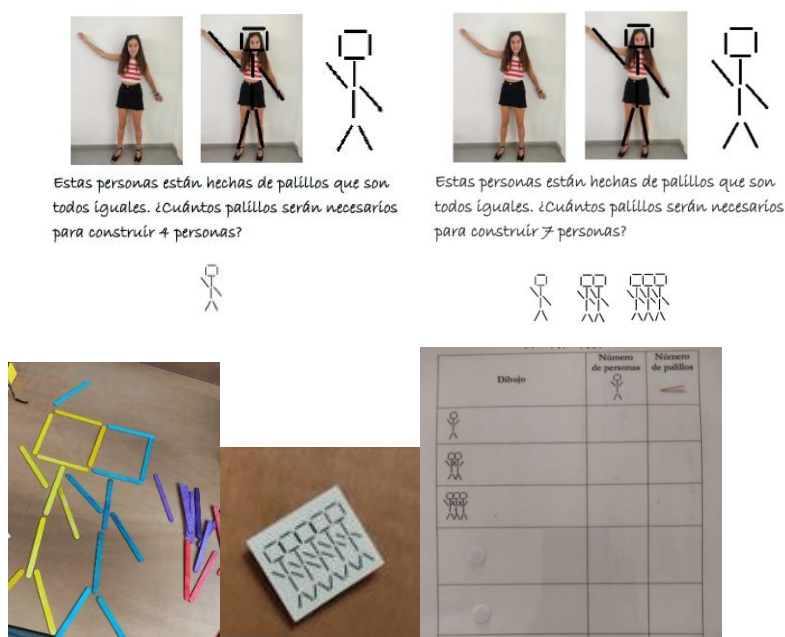


Figura 21

Materiales Empleados en la propuesta C (el problema de la arqueóloga). De Izquierda a Derecha, Piezas Cuadradas de Goma Eva, Pictogramas que Representan Escaleras de Diferentes Alturas y Tabla con Velcro



Previo a la implementación de cada sesión, se ofreció a los tres docentes una guía (ver Anexo 11.1) con aspectos clave de la resolución del problema, atendiendo a las ventajas y limitaciones del material, el objetivo de la sesión y algunas indicaciones y orientaciones sobre las dificultades esperables al abordar la tarea con alumnado TEA-1.

Durante las sesiones, las investigadoras adquieren un rol de observadoras, sin intervenir en las sesiones más allá de contribuir en el reparto de materiales para facilitar la gestión del aula por parte del docente.

III. 3.3.2. Subfase Analítica: Recogida de la información y análisis datos

Las quince sesiones de aula fueron videograbadas y posteriormente transcritas. Además, se realizaron entrevistas semiestructuradas después de cada sesión, de manera individual a cada docente, y una sesión conjunta al finalizar el periodo de observación en la que participaron dos de ellos.

Mediante la observación y las transcripciones de las videograbaciones de las sesiones y la entrevistas, se extraen unidades de información, entendidas como fragmentos mínimos de texto con unidad semántica (Bardin, 2002), sobre la gestión de la resolución de problemas de los tres participantes de este estudio.

La recogida de información se llevó a cabo durante los tres meses que duró el periodo de observación.

Las sesiones 1-4 de cada docente se analizan según: (a) estructura de la sesión, (b), gestión del tiempo, (c) agrupamientos, (d) rol del docente, (e) conceptualización del problema y (f) atención al alumnado TEA. Estas variables nos aportan información para conocer e interpretar las decisiones que toman los docentes al abordar sesiones orientadas a la enseñanza de resolución de problemas, con y sin propuesta de intervención externa.

Para el análisis del conocimiento docente, nos centramos en la última sesión, en la que se aborda la propuesta C (el problema de la arqueóloga). La selección de esta sesión se debe a dos criterios:

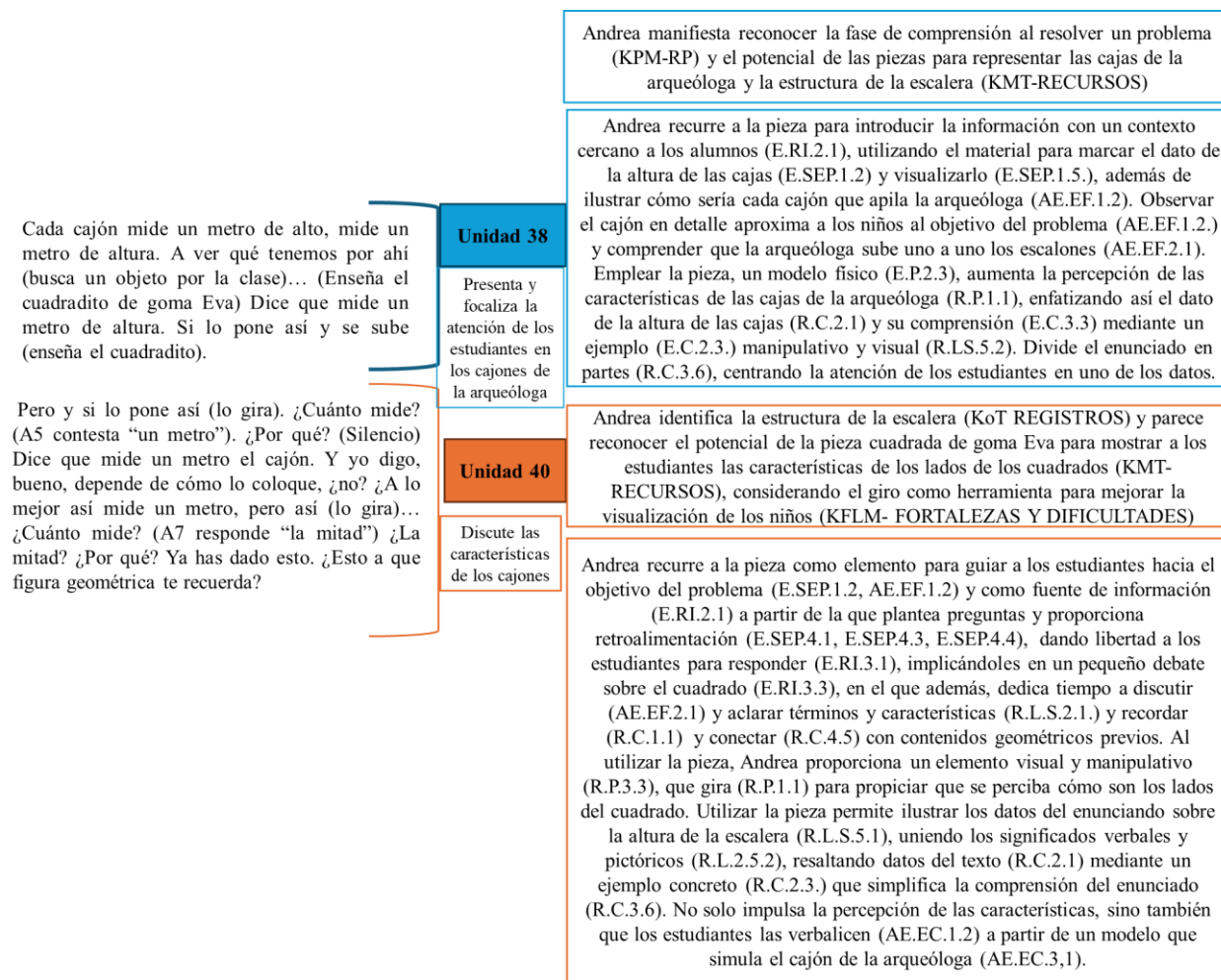
- Se trata de la última sesión de observación del estudio, de forma que los docentes y estudiantes se han familiarizado con el uso del material TEACCH y las estrategias de generalización abordados en la propuesta B.
- Plantear el establecimiento de una analogía entre los dos estudios de caso de este proyecto. Tanto las propuestas B y C como el problema del *Minecraft*, analizado como un subcaso en la fase de taller con estudiantes TEA-1, abordan la generalización matemática.

Las unidades de información se analizan desde una doble perspectiva, atendiendo a los dos subobjetivos vinculados al objetivo O2. Por un lado, los datos se analizan desde el conocimiento especializado del docente (O2.1), y por otro, desde la perspectiva de la práctica inclusiva (O2.2).

Se lleva a cabo un análisis de contenido (Krippendorff, 2018) de las tres sesiones. Cada unidad se identifica con el código UX-Y, siendo X la posición de la unidad dentro de la transcripción de la sesión e Y el docente de cuya sesión se extrae el fragmento. En la Figura 22 mostramos un ejemplo del proceso de identificación y análisis de dos unidades de información de la sesión de Andrea.

Figura 22

Ejemplo de Análisis de dos Unidades de Información de la Sesión de Andrea



III.3.2.1.1. Análisis del conocimiento especializado

Para realizar el análisis de la información del conocimiento especializado evidenciado por cada docente, recurrimos al modelo MTSK. Este modelo puede ser empleado como sistema de categorías, dado que permite organizar las manifestaciones de conocimiento en distintos niveles. Distinguimos el conocimiento matemático del conocimiento didáctico del contenido mediante los dominios MK y MKT. Dentro de cada dominio, el modelo se estructura en una jerarquía de subdominios y categorías que concretizan el conocimiento del docente de matemáticas (Figura 4 y Figura 5, en el capítulo del marco teórico). Las evidencias de conocimiento de los docentes se analizan de manera ordenada, pero con una visión flexible respecto al tipo de conocimiento que se identifica en cada una. Esto permite generar descriptores de conocimiento que emergen de la sesión de cada docente. Construimos así un sistema de descriptores que permiten caracterizar el conocimiento especializado en relación con la enseñanza de problemas de generalización y relacionar cada evidencia con las categorías y subdominios del modelo MTSK.

Cada unidad se etiqueta con un descriptor, de manera que abordamos el análisis de los resultados cuantificando el número de etiquetas correspondientes a cada categoría y subdominio. La asignación de etiquetas a las unidades y su cuantificación se realizó mediante Excel. El uso de las herramientas de este programa como el diseño de gráficos y los filtros facilitó el conteo de unidades atendiendo a las etiquetas de descriptores, categorías y subdominios, así como la creación y diseño de gráficas para representar los resultados del análisis. El desarrollo del análisis nos acerca a la consecución del objetivo 2.1, en términos del conocimiento que manifiesta cada docente y la posibilidad de realizar una comparativa entre los tres que ofrece una visión global del conocimiento movilizado durante el desarrollo de la propuesta C de resolución de problemas con material TEACCH.

III.3.2.1.2. Análisis de la práctica inclusiva

Para llevar a cabo el estudio de las unidades desde la perspectiva de la práctica inclusiva, empleamos un instrumento de análisis basado en el Diseño Universal de Aprendizaje (CAST, 2018). Diseñamos un sistema de categorías a través del que, de manera jerárquica, organizamos los niveles de inclusión partiendo de los principios, directrices, puntos de verificación y criterios del DUA. Establecemos un sistema de códigos con los que crear etiquetas para las unidades de información. Los códigos permiten vincular cada unidad con elementos de la práctica inclusiva como los principios de inclusión, Compromiso, Representación, o Acción y Expresión y sus directrices (Figura 23), pero también concretar la categorización de la información en términos de los criterios de cada uno de ellos (ver Anexo 10). Estos códigos se generan partiendo de las siglas en inglés del DUA, añadiendo números que identifican el nivel. Seguimos la estructura P.D.PV.C, de manera que cada etiqueta describe el criterio (C) que se identifica en la unidad, el cual se relaciona con un punto de verificación (PV), una directriz (D) y un principio (P) del DUA. Por ejemplo, el código E.RI.3.11 se refiere al criterio 11 “Implicar a todo el alumnado en los debates de clase”, del punto de verificación 3 “Minimizar distracciones”, de la directriz Captar el interés (*Recruiting Interest* en inglés) del principio Implicación (*Engagement* en inglés).

Cada unidad se etiqueta con un código, de manera que abordamos el análisis de los resultados cuantificando el número de etiquetas correspondientes a cada criterio, punto de verificación, directriz y principio. Como en el caso del análisis de conocimiento especializado, recurrimos al programa Excel para realizar el conteo y la cuantificación de las unidades, utilizando las herramientas para el análisis mixto y la representación de los resultados. Esta metodología nos permite distinguir resultados a distintos niveles de concreción, gracias a la relación jerárquica del sistema de categorías empleado y, por lo tanto, dar respuesta al planteamiento del objetivo 2.2 describiendo los elementos de la práctica inclusiva de los tres docentes en la sesión objeto de estudio, tanto de manera individual como realizando una comparación entre los tres.

Figura 23

Sistema De Categorías Del DUA

Puntos de Verificación	Principio 1: Compromiso o implicación (E)				Principio 2: Representación (R)					Principio 3: Acción y Expresión (AE)		
	Directriz: Captar el Interés (E. RI)				Directriz: Percepción (R.P.)					Directriz: Acciones Físicas (AE.PA)		
	E.RI.1. Optimizar la elección individual y autonomía	E.RI.2. Optimizar la relevancia, valor y autenticidad	E. RI. 3. Minimizar distracciones		R.P. 1. Ofrecer opciones para personalizar la presentación de la información	R.P. 2. Ofrecer alternativas para la información auditiva	R.P. 3. Ofrecer alternativas para la información visual		AE.PA.1. Variar los métodos de respuesta y navegación	AE.PA.2. Optimizar el acceso a herramientas y tecnologías de apoyo		
Puntos de Verificación	Directriz: Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (E.SEP)				Directriz: Lenguaje, expresiones matemáticas y símbolos (R.LS)					Directriz: Expresión y Comunicación (AE.EC)		
	E. SEP. 1. Marcar las metas y objetivos	E. SEP. 2. Varias las exigencias y recursos para optimizar el reto	E. SEP. 3. Promover la colaboración y la comunidad	E. SEP. 4. Utilizar el feedback orientado hacia la maestría en una tarea	R.LS. 1. Clarificar símbolos/ vocabulario	R.LS. 2. Clarificar sintaxis	R.LS. 3. Facilitar decodificación de textos y símbolos	R.LS. 4. Promover comprensión entre idiomas	R.LS. 5. Ilustrar mediante distintos medios	AE.EC.1. Usar múltiples medios de comunicación	AE.EC.2. Usar múltiples herramientas para construir y componer	AE.EC.3. Definir competencias con niveles de apoyo graduados para la práctica y la ejecución
	Directriz: Autorregulación (E. SR)				Directriz: Comprensión (R. C)					Directriz: Funciones Ejecutivas (AE.EF)		
Puntos de Verificación	E. SR. 1. Promover expectativas y creencias y optimicen la motivación	E. SR. 2. Facilitar estrategias y habilidades personales para afrontar situaciones y problemas	E. SR. 3. Desarrollar la autoevaluación y autorreflexión	R.C.1. Activar conocimientos previos	R.C.2. Señalar patrones, aspectos clave o características	R.C.3.Guiar el procesamiento de la información y la visualización	R.C.4. Maximizar la transferencia y generalización	AE.EF.1. Guiar el establecimiento adecuado de metas	AE.EF.2. Apoyar el desarrollo de estrategias y la planificación	AE.EF.3. Facilitar la gestión de la información y los recursos	AE.EF.4. Impulsar la capacidad de monitoreo	

III.3.2.1.1.1. DUA y MTSK

Los subapartados anteriores describen la metodología de análisis en términos del DUA y del modelo MTSK. Sin embargo, aunque resulta necesario observar estas dos perspectivas en la práctica docente de manera independiente, la realidad es que ambas confluyen cuando se aborda la resolución de problemas en un contexto de diversidad. Surge la necesidad de que el estudio contemple la relación entre ambas perspectivas. Para ello, recurrimos a realizar una cuantificación de la coocurrencia entre la categorización de conocimiento especializado y de la práctica inclusiva, utilizando como base las unidades de los docentes.

Cuantificamos las unidades codificadas paralelamente con etiquetas de ambos marcos, estableciendo una relación entre las categorías del MTSK con los puntos de verificación del DUA.

En primer lugar, se organizan las unidades de información codificadas como evidencias de conocimiento especializado en función de las fases de resolución observadas en la sesión de cada docente (Figura 24).

Figura 24

Fases de la Sesión de Cada Docente, Duración y Unidades de Información que Comprenden

ESTER	•FASE 1: Lectura y comprensión (23 minutos) •FASE 2: Resolución del enunciado (15 minutos) •FASE 3: Reto 20 metros (30 minutos)	U1-E:U22-E U23-E: U115-E U117-E: U226-E
FEDERICO	•FASE 1: Lectura y comprensión (5 minutos) •FASE 2: Resolución grupal del enunciado (25 minutos) •FASE 3: Discusión (8 minutos) •FASE 4: Reto de 20 metros (7 minutos)	U1-F:U44-F U48-F:U200-F U204-F:U300-F U303-F:U360-F
ANDREA	•FASE 1: Lectura y comprensión (10 minutos) •FASE 2: Resolución Individual (50 minutos) •FASE 3: Puesta en común (15 minutos)	U1-A:U91-A U92-A: U251-A U252-A; U338-A

Nota: Como comentábamos en el epígrafe III. 3.3.2, X se refiere a la posición de la unidad dentro de la transcripción y Y al docente de cuya sesión se extrae el fragmento. Detallamos la unidad que da inicio y finaliza cada fase, separadas por “.”

cuatro nexos con la directriz *Mantener el Esfuerzo y la Persistencia* (2 de E.SEP.1 y 2 de E.SEP.4) y dos nexos con la directriz *Percepción* (R.P.1).

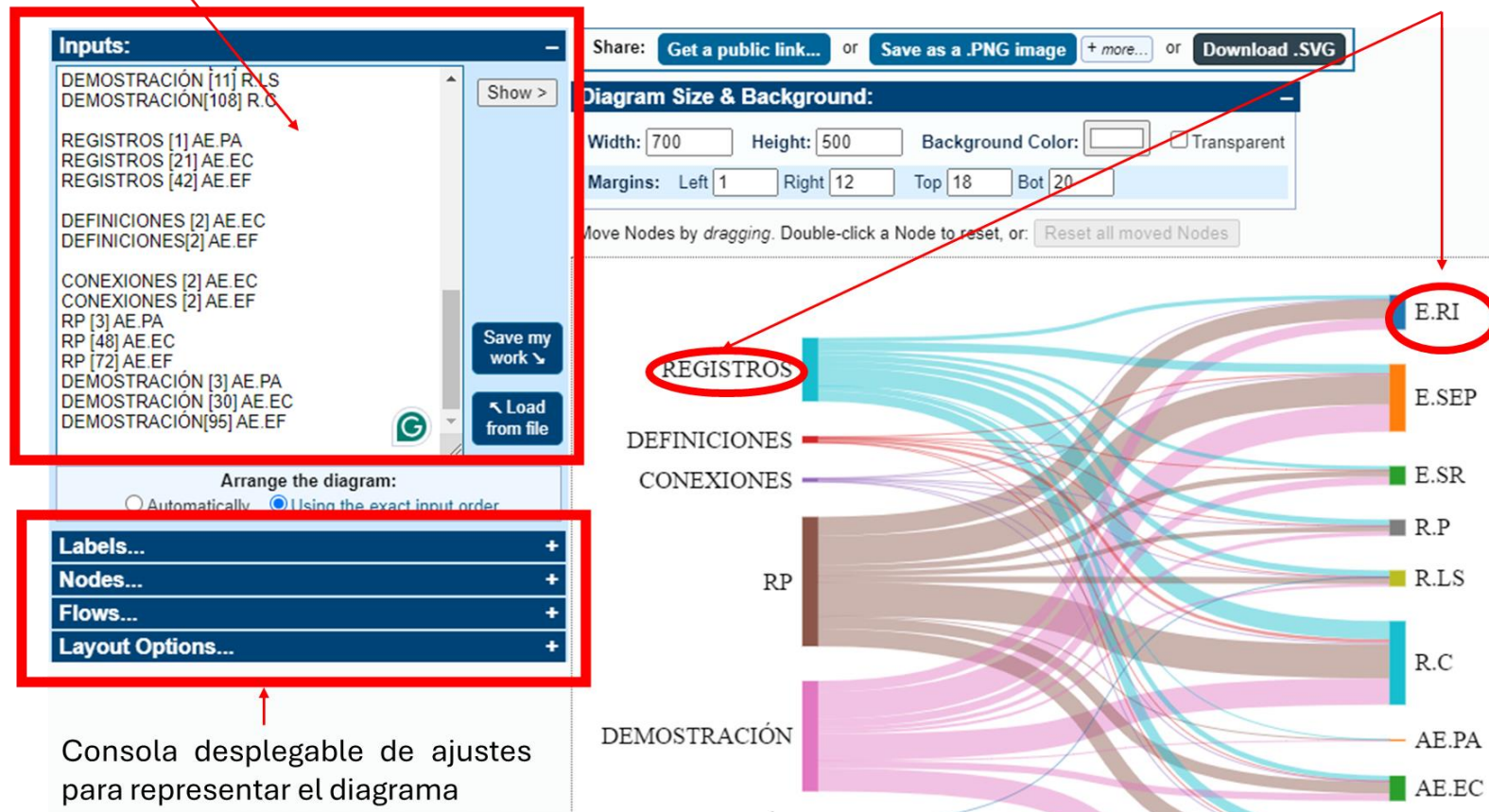
La información resultante es recogida en una tabla de doble entrada diferente en el programa Excel que posteriormente se traslada a la aplicación *Sankeymatic* (Figura 26), un software libre que permite crear gráficos de Sankey. Este tipo de gráfico posibilita la representación de flujos entre variables, en nuestro caso, cualitativas, de modo que el grosor de dichos flujos es mayor en función de la magnitud de las relaciones entre las variables. El diagrama de Sankey presenta de manera visual la co-ocurrencia entre la codificación de las unidades en términos del MTSK y DUA, evidenciando relaciones emergentes.

Considerando que nuestra investigación se contextualiza en una situación de enseñanza y aprendizaje de la matemática, para el análisis de la coocurrencia solamente se cuantifican aquellas unidades que muestran indicios de ambas perspectivas de estudio.

Figura 26

Diseño del Diagrama de Sankey con la Plataforma Sankeymatic

Consola de comandos donde introducir los datos cuantificando relaciones entre las variables y crear los nodos



Consola desplegable de ajustes para representar el diagrama

III.3.3.3. Subfase de divulgación

En esta segunda etapa en la investigación los resultados se han centrado en la figura del docente, en su conocimiento y su formación. Por ello, la participación y seminarios tras (y durante) la recogida y análisis de los datos ha ido en esta línea:

2023

Chico-Gómez, A, Sánchez-Cerrejón, A., Climent, N., Contreras, L.C., y Gómez-Hurtado, I. (2023). Conocimiento especializado movilizado durante una tarea formativa sobre un problema de generalización. *VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (CIMTSK)* (pp. 71–78). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV).

Chico-Gómez, A., Climent, N., y Gómez Hurtado, I., (2023). Designing tasks for prospective teachers: specialised knowledge on the inclusive teaching of problem-solving. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3719–3727). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

2024

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I., y Climent, N. (en prensa). Material TEACCH como impulsor de la generalización matemática en estudiantes con Síndrome de Asperger. *Actas del XIX Congreso Internacional y XXXIX Jornadas de Universidades y educación inclusiva. RIEJ*.

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I., y Climent, N. (en prensa). Conocimiento especializado de docentes en la resolución de un problema de generalización matemática en el aula neurodiversa de educación primaria. *3rd International Congress: Education and Knowledge (ICON-edu 2024)*. ICON.

Chico-Gómez, A., Robotti, E., Climent, N., Gómez-Hurtado I. (en prensa). Resolución de un problema de generalización en el aula de educación primaria desde la inclusión [Poster]. *Investigación en Educación Matemática XIX*. SEIEM.

III.4. Técnicas e Instrumentos de recogida, organización y análisis de la información

En los apartados previos se ha descrito cómo en cada fase de investigación se ha seguido un diseño metodológico distinto, en términos de las técnicas e instrumentos de recogida de información y de análisis de datos. Desde el enfoque cualitativo, como investigadoras nos hemos basado en diversas técnicas e instrumentos para registrar y analizar la información desarrollados durante el propio estudio, orientados por la necesidad de comprender la realidad estudiada (Hernández-Sampieri et al., 2014). Los instrumentos y técnicas seleccionados han ido adaptándose a las necesidades de la investigación y al contexto de cada estudio de caso (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2010).

III.4.1. Recogida de datos

Como instrumentos y técnicas de recogida de datos, referimos la observación, videograbación y las anotaciones en el diario de campo, que nos han permitido desarrollar e interpretar los resultados de cada estudio de caso (Hernández-Sampieri et al., 2014). La consideración de los distintos instrumentos, complementarios entre sí, nos provee de un conocimiento mayor sobre el objeto de estudio (Buchholtz, 2019).

La observación se ha llevado a cabo de forma participante (Mcmillan y Schumacher, 2005) en el estudio del taller cero y semestral, puesto que las investigadoras han intervenido activamente ejerciendo como docentes en el desarrollo de los mismos, reflejando en notas de campo todas las actividades e interacciones (Goetz y LeCompte, 1984). Tras cada sesión del taller, las tres investigadoras principales conformaban un grupo de discusión en el que se compartían los datos obtenidos de dicha observación, considerando que, en la

mayoría de las sesiones, cada una de nosotras nos centrábamos en atender el proceso de resolución de uno o dos participantes. En los estudios de caso 2, 3 y 4, la asistencia de las investigadoras a las aulas se caracterizaba por la no intervención, por lo que referimos la observación como no participante.

En todo caso, la metodología interpretativa nos sitúa a las investigadoras en una posición clave de la investigación, dado que la observación y la consecuente interpretación de la misma, de acuerdo con Bassey (1999), puede influir la situación estudiada al ser nosotras parte del contexto. La videograbación de todas las sesiones de los talleres y clases en las aulas y las anotaciones en un cuaderno de campo se emplearon como técnicas complementarias, con objetivo de reducir los posibles sesgos asociados a la participación activa en la observación por parte de las investigadoras (Monahan y Fisher, 2010) y reducir la falta de transparencia en la recogida de información (Carrillo y Muñoz-Catalán, 2010).

En el estudio de caso 1, las sesiones tuvieron lugar en un aula de la Universidad de Huelva. Se dispusieron las mesas unidas, para facilitar el trabajo en grupo. Sobre ellas, cuatro tabletas gráficas con un soporte fueron colocadas en el puesto de cada participante, de manera que se orientaba el objetivo de la Tablet hacia el espacio de trabajo. Se instaló en los dispositivos un programa que permitía grabar manteniendo la pantalla apagada, lo que pretendía disminuir posibles distracciones de la tarea. También se colocaron dos cámaras en el aula para tomar un plano más general desde dos puntos diferentes. Durante cada sesión, se tomaban fotografías del proceso de resolución de los participantes reflejado en su mesa de trabajo y sus producciones. Al finalizar cada problema, las hojas de trabajo de los participantes se recogían y etiquetaban con el nombre de cada uno. Los grupos de discusión posteriores a cada sesión eran audio grabados.

En los estudios de caso 2 y 3 y 4, se dispusieron cinco *tablets* y cuatro grabadoras de voz en los grupos de mesas de los estudiantes. En el estudio de caso 5, se colocaron las grabadoras en las mesas de los estudiantes, aprovechando la disposición de estas en forma de U, y una Tablet en cada extremo de la línea de mesas, que captaba todo el espacio de trabajo. En las tres aulas, dos cámaras complementaban la grabación, orientadas hacia la pizarra y al aula, con objetivo de captar los movimientos y acciones del docente.

En el primer estudio de caso, las cámaras y *tablets* estaban fijas, dada la limitación de flexibilizar la grabación por la tarea doble de esta investigadora como docente y observadora del taller. En los estudios 2, 3 y 4, aunque en principio se fijaban los aparatos para no ocasionar distracciones a los estudiantes de las aulas, la observación no participante permitió modificar la posición de los dispositivos de grabación si era necesario cambiar el enfoque de la pizarra o la posición de algún dispositivo para adaptarlo al desarrollo de la sesión. Al igual que en el primer estudio de caso, las investigadoras que asistían a las sesiones tomaban fotos de cada mesa de trabajo, de la pizarra y de las producciones de los participantes.

Respecto al uso del cuaderno de campo, durante el estudio de caso 1, este era cumplimentado mayoritariamente durante la discusión posterior a cada sesión, dado que la observación participante requería de la implicación de la investigadora en el desarrollo de cada tarea. En los estudios de caso centrados en las aulas, las anotaciones en el cuaderno recogían lo acontecido de la situación de clase observada en forma de *anotaciones descriptivas* (Creswell, 2003), pero también las impresiones e ideas de la investigadora en forma de *anotaciones reflexivas* (ibid.). Además, se llevaron a cabo entrevistas semiestructuradas a los docentes durante las dos fases de la investigación. La estructura de dichas entrevistas fue elaborada por las investigadoras, (ver Anexo 7 y 9) estableciendo preguntas abiertas con un orden flexible relacionadas con cuestiones sobre conocimiento, experiencia y opinión considerando los objetivos del estudio (Mcmillan y Schumacher, 2005). Siguiendo a Cohen et al. (2018), aunque se estableció un guion previo a la entrevista, discutido y triangulado por las investigadoras de este estudio, las preguntas se fueron modificando en función de la dirección de la conversación con la persona entrevistada. Las entrevistas realizadas fueron llevadas a cabo mediante videoconferencia (Zoom, Skype) con una duración aproximada de 30 minutos, a excepción de las entrevistas de cinco o diez minutos realizadas a los docentes justo después de cada sesión. Estas no seguían un guion preestablecido, dependiente de lo acontecido en cada sesión, aunque siempre se orientaban las preguntas hacia aspectos de decisiones didácticas, elecciones del contenido, planificación de la sesión, considerando la naturaleza más espontánea y los problemas o aspectos de la resolución.

Las videograbaciones y entrevistas asociadas a cada estudio de caso se transcriben. Seguimos un protocolo selectivo en el sistema de transcripción (Mayring, 2014), ya que los investigadores elegimos qué fragmentos de la grabación son relevantes y concentran la información que da respuesta a nuestras preguntas y objetivos de estudio. No obstante, las conversaciones, situaciones de aula y de taller que se seleccionan, son transcritas de manera textual. Contienen elementos verbales, no verbales y contextuales, considerando el carácter condicionante sobre el significado (Swift, 2022) en situaciones de enseñanza y aprendizaje en las que se sitúa nuestro estudio.

III.4.2. Análisis de datos

Como instrumentos y técnicas de análisis de datos empleados, señalamos el análisis de contenido para interpretar datos cualitativos en los cuatro estudios de caso. El análisis de contenido toma la estructura y significados del objeto a analizar como punto de partida (Mayring, 2014). En los estudios de caso referidos a los tres docentes empleamos además el análisis cuantitativo de coocurrencia de variables. Esta técnica indica el nivel o solidez de la asociación entre los conceptos (Krippendorff, 2022), lo que ilustra el estudio sobre la relación entre los dos marcos empleados en esta segunda etapa de nuestra investigación.

Para facilitar la tarea de análisis nos hemos apoyado en un sistema de codificación, La codificación de los datos se apoya en las variables de estudio, categorizando y etiquetando la información recabada (Creswell, 2003). En los estudios de caso 2, 3 y 4, el sistema de codificación ha simplificado la tarea de analizar el conocimiento especializado y la práctica inclusiva de los docentes, aunando en un conjunto de símbolos la jerarquía de categorías de cada uno de los marcos. La Tabla 19 pretende mostrar un resumen que clarifique la metodología seguida en los dos estudios de caso que integran nuestro proyecto de tesis:

Tabla 19

Resumen de la Metodología de la Tesis

	ESTUDIO DE CASO 1: ESTUDIANTES TEA-1	ESTUDIOS DE CASO 2, 3 y 4: DOCENTES
Objetivos específicos	O1.1. Identificar y describir las características asociadas al	O2.1. Identificar el conocimiento matemático y el conocimiento

	TEA-1 que pueden influir en el proceso de resolución de problemas	didáctico del contenido que manifiestan docentes de primaria cuando resuelven problemas en el aula con diversidad
	O1.2. Describir estrategias de enseñanza de resolución de problemas considerando las características del O1.1.	O2.2. Identificar los elementos de inclusión que evidencian en su práctica
Método	Cualitativo	Mixto
Instrumentos y técnicas de recogida de información	Observación participante (Estudio de caso 1) y no participante (Estudio de caso 2, 3 y 4)	
	Entrevista semiestructurada	
	Videgrabación	
	Diario de campo	
	Batería de problemas del taller Problema del <i>Minecraft</i>	Batería de 4 problemas Problema de la arqueóloga
Instrumentos y técnicas de análisis de información	Análisis de contenido para interpretar datos cualitativos	
		Análisis cuantitativo de co-ocurrencia de variables cualitativas
Métodos de representación	Diagrama de dispersión	Diagrama de barras Diagrama de Sankey

III.5. Fiabilidad y validez

Las investigaciones cualitativas van a menudo acompañadas de cuestionamientos sobre su fiabilidad, sobre todo cuando se lleva a cabo mediante estudios de caso con un número no muy elevado de participantes, como ocurre en nuestro proyecto. Por esta razón, es importante no descuidar los procesos y métodos que otorgan rigor a la metodología de estudio y convierten el estudio en una investigación científica.

De acuerdo con Corral (2017) un estudio debe tener validez interna, la cual consiste en que la veracidad de los resultados lo es también para las personas implicadas en el estudio (Corral, 2014). Hemos realizado entrevistas a los docentes de los estudiantes participantes del taller, entrevistas y conversaciones informales con los docentes implicados en la etapa de observación de las aulas de primaria, una entrevista final de consenso con los participantes de los estudios de caso 2, 3 y 4,

así como un grupo de discusión con la asociación AOSA-TEA para revisar todo el diseño y preparación del taller. Además, esta investigadora ha estado presente en el trabajo de campo y la fase de recogida de datos y análisis. Aunque destacamos esta permanencia, todas las sesiones del taller y sesiones de observación de los docentes, en las entrevistas y grupos de discusión, y todo el diseño e implementación de las sesiones de estudio ha sido coordinada con el resto de las investigadoras de este proyecto.

Como hemos comentado en epígrafes anteriores, la recogida de información se ha realizado mediante diferentes técnicas, de manera que hemos realizado una triangulación de fuentes atendiendo a los datos extraídos de las observaciones de cada investigadora, los registros del cuaderno de campo, las producciones de los participantes y las videograbaciones de *tablets* y cámaras. Cada diseño, testeo del material o de los instrumentos de investigación, diseño del análisis de los datos y resultados ha sido triangulado por las directoras de esta tesis, en colaboración con las dos investigadoras de las estancias predoctorales que han nutrido el proyecto, la doctora Irene Polo Blanco de la Universidad de Cantabria y la doctora Elisabetta Robotti, de la Universidad de Génova (Italia), expertas en educación matemática y TEA y la enseñanza matemática inclusiva. Destacamos así la consistencia del estudio, en el sentido de que cada fase ha seguido un método estructurado, riguroso y fiable, y por tanto permiten la reproductibilidad de la investigación.

Nuestro proyecto se ha caracterizado por aglutinar perspectivas de investigación en didáctica de la matemática, pedagogía y educación inclusiva, que han ido cubriendo *gaps* en el método de estudio dados los diferentes focos que abarca, lo que otorga una mayor consistencia al desarrollo del estudio. Todo el proceso de codificación de los estudios de caso 1 y 2 se ha guiado así del contraste entre diferentes enfoques teóricos y fuentes de información.

Paralelamente al desarrollo de cada fase de este proyecto, se han presentado y discutido los diseños metodológicos y resultados en seminarios de investigación como el SIDM, seminarios de la Universidad de Cantabria, en la Università di Genova, en foros de discusión como la reunión intermedia de la SEIEM y en los

diferentes congresos descritos previamente (ver subapartados III. 3.2.3 y III. 3.3.3.). La retroalimentación recibida por parte de expertos en investigación educativa ha permitido modificar y revisar los instrumentos y diseños, incrementando la confiabilidad del estudio.

Esta triangulación en el diseño de la investigación, la recogida y el análisis e interpretación de los datos resulta fundamental para evitar sesgos en el estudio. Es decir, podemos hablar en términos de Hernández-Sampieri et al. (2014), que nuestra investigación ha sido realizada mediante una triangulación en tres niveles: de disciplinas, de métodos y de investigadores.

No queríamos finalizar este apartado sin hacer mención a uno de los criterios de valoración de las investigaciones en Didáctica de la Matemática de Carrillo (1998), como es la relación con las matemáticas y su enseñanza. Nuestro estudio presenta la originalidad del doble enfoque: conocimiento del docente y atención a la diversidad. Los objetivos marcados y el diseño del estudio van dirigidos hacia la categorización de conocimiento y estrategias de enseñanza que posteriormente contribuyan a la formación docente para abordar la enseñanza de la matemática en el aula de primaria, atendiendo para ello a la diversidad de la misma.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

SECCIÓN 1: Resolución de problemas con alumnado TEA

Resumen

En esta primera sección del capítulo detallamos el análisis de los resultados correspondientes al primer estudio de caso que compone la tesis: el taller de resolución de problemas con alumnado TEA. Se describen los resultados del análisis del taller atendiendo a los objetivos O1.1 y O1.2. Los apartados de este capítulo corresponden con los resultados del taller cero y el taller semestral, cuyo diseño metodológico se describió en el capítulo III.

El primer apartado versa sobre los resultados de las diferentes sesiones del taller cero y el taller semestral. Describimos el uso del material TEACCH como estrategia de enseñanza y aprendizaje para resolver los problemas, atendiendo a las características asociadas al TEA-1, que marcaron tanto el diseño como la implementación de taller.

En el segundo apartado ponemos el foco en los resultados del taller en relación con la resolución de un problema de generalización, detallando la influencia de los materiales empleados y las características del TEA en el desarrollo de las distintas estrategias de generalización de los cuatro estudiantes del taller semestral.

IV.1. La resolución de problemas con estudiantes TEA

Este apartado recoge los resultados del taller cero y el taller semestral. El epígrafe dedicado al taller cero se estructura en términos de los tres problemas analizados: el problema de los muñecos, el problema de la granja y el problema de las nueces. Un cuarto sub-epígrafe desarrolla los resultados atendiendo a las dificultades que se encontraron en la resolución de los tres problemas, atendiendo al uso del material y las características del TEA. Un sub-epígrafe final resume los resultados del taller y da paso a la descripción del taller semestral.

El epígrafe de resultados del taller semestral sigue una estructura basada en el uso del material de construcción, los pictogramas y el organizador gráfico. Desarrollamos además una descripción de la resolución de los estudiantes cuando emplean los pictogramas y el organizador gráfico de manera conjunta, atendiendo a los diferentes heurísticos que se implementan, y cuando no se utiliza ningún material para abordar los problemas. Un sub-epígrafe final detalla un informe de los resultados del taller semestral.

IV.1.1. Taller cero

La resolución de los problemas se llevó a cabo en las diferentes sesiones, obteniendo resultados diferentes dadas las características, niveles educativos e intereses tan diversos que tenían los distintos participantes.

IV.1.1.1. La resolución del problema de los muñecos

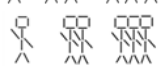
El material TEACCH ha tenido diversas funciones en el desarrollo del taller cero. La construcción de las figuras utilizando los *depresores* permitió en los estudiantes desarrollar estrategias más visuales y centradas en el conteo. Encontramos indicios de que el uso de colores al construir mejoró el reconocimiento del patrón, atendiendo al palillo compartido (Figura 27). Sin embargo, esta estrategia limitaba alcanzar resultados cuando aumentaba el número de depresores involucrados en el conteo, posiblemente por las dificultades de atención sostenida asociadas al TEA-1.

Figura 27

Transición Desde Dos Muñecos Separados a la Unión de Ambos Mediante el Palillo Compartido

Estas figuras están hechas con palillos. ¿Cuántos palillos son necesarios para hacer una figura de cuatro personas? ¿Y una de 7?

Versión 1: 

Versión 2: 



Reproducción de
muñecos separados



Transición a muñecos
unidos

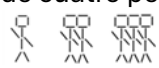
Enunciado del problema

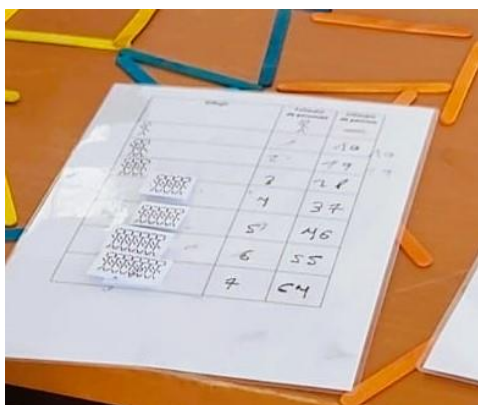
El uso conjunto de los *depresores* y la *tabla organizadora* y los *pictogramas* pareció mejorar el desarrollo de las estrategias de los estudiantes, dado que ofrecieron la oportunidad de registrar los datos obtenidos de sus construcciones y del conteo sobre los pictogramas. Destacamos algunos casos en los que este registro permitió descubrir la regularidad numérica en la columna de “número de palillos” y que desligó al estudiante del apoyo pictórico (Figura 28).

Figura 28

Uso del Organizador Tabular con y sin Pictogramas de Personas

Estas figuras están hechas con palillos. ¿Cuántos palillos son necesarios para hacer una figura de cuatro personas? ¿Y una de 7?

Versión 2: 



Organizador tabular y pictogramas

Dibujo	Número de personas 	Número de palillos 
	1	7
	2	11
	3	14
	4	17
	5	20
	6	23
	7	26

Organizador tabular sin pictogramas

El desarrollo de este problema, aunque guiado, dio libertad al alumnado a utilizar el organizador y los depresores indistintamente, en función de sus necesidades. Las distintas maneras de abordar el problema desembocaron en diferentes formas de alcanzar la generalización: desde el conteo de depresores hasta alcanzar la figura de 9 o 10 muñecos; estrategias recursivas en las que sumaban nueve palillos por cada muñeco nuevo añadido ($F(x)=(10+9x)$), como, por ejemplo, la idea que planteó David, del grupo 4 (“es como la tabla del nueve. Cuentas mirando el dibujo y luego añades la primera que tiene 10 y no sigue el patrón”); y estrategias que se basaban en la regularidad asociada al palillo compartido, relacionando el número de muñecos añadidos al número de palillos compartidos ($F(x)= (10x-(x-1))$), como muestra la explicación de Mara, del grupo 1:

Mara (G1): A cada figura le añades nueve palillos a las anteriores, porque comparten un palillo (señalando el palillo compartido sobre el pictograma velcrado).

Docente: Entonces, ¿cómo sabes cuántos palillos necesitas para hacer una figura de siete personas?

Mara: Cuento los palillos según el número de personas y luego les quito los palillos que comparten.

IV.1.1.2. Uso del material en la resolución del problema de la granja

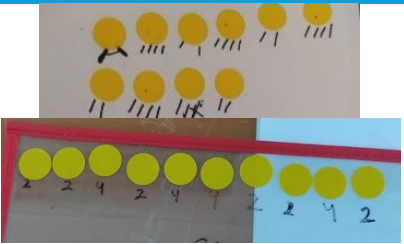
En el problema de la granja (Tabla 8), los estudiantes emplearon estrategias apoyadas en el establecimiento de submetas gracias a la utilización de los *gomets*. Estas pegatinas fijaban una de las variables del problema, las cabezas de los animales, de manera que los participantes establecían relaciones entre estas y la variable número de patas, que abordaban mediante estrategias de ensayo y error. Encontramos indicios de pensamiento prealgebraico, de manera que los estudiantes abordaban tanteos con diferente grado de sistematicidad y basados en elementos más o menos pictóricos que relacionaban dos variables. Por ejemplo, en la Figura 29, el estudiante sigue un orden en la formación de gallinas y conejos, dibujando dos o cuatro patas, respectivamente. Otros estudiantes no seguían un

orden sistemático, pero apoyaban su estrategia de ensayo y error en el registro numérico.

Figura 29

Estrategias de Ensayo y Error Sobre los Gometes, Dibujando las Patas de los Animales (Izquierda) o Anotando el Número de Extremidades (Derecha)

Juan vive en una granja donde hay gallinas y conejos.
Entre todos los animales de la granja pueden contarse: 10 cabezas 28 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja? ¿Y cuántos conejos?



Enunciado del problema
Estrategias de ensayo-error

V.1.1.3. Uso del material en la resolución del problema de las nueces

En el caso del problema de las nueces (Tabla 9), el material TEACCH posibilitó que los estudiantes relacionaran la fracción mitad, en términos del significado parte-todo, con las nueces que iban quedando con cada suceso del problema. La *tabla organizadora* mejoró el registro de la información y la organización de esta apoyándose en el medio visual, de manera que los estudiantes pudieron utilizar el espacio de las celdas para separar nueces restantes de las nueces repartidas. A su vez, involucrar las *fracciones manipulativas* de goma Eva tuvo como consecuencia la aparición de estrategias diferentes.

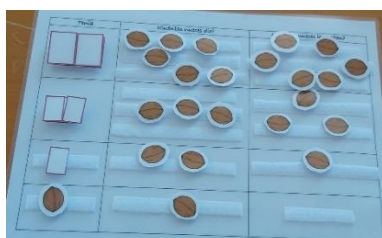
Así, Gabriel desarrolló una estrategia pictórica, agrupando los *pictogramas* de las nueces en cada celda (Figura 30, imagen central). David basó su estrategia en la aritmética, estableciendo un vínculo directo entre las porciones de las fracciones manipulativas y los valores de las nueces de cada paso de la resolución (Figura 30, imagen de la izquierda).

Figura 30

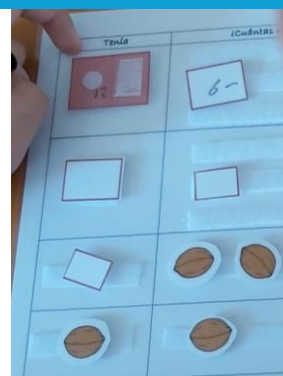
Usos Diferentes del Organizador Tabular en el Problema de las Nueces

Versión 2:

Carmen sale de casa con una bolsita llena de nueces. Al encontrarse a Martina le da la mitad. En el camino de vuelta se come dos de las nueces restantes y le da la última que le quedaba a una ardilla. ¿Cuántas nueces tenía al principio?



Uso 1 del organizador tabular (columnas: tenía, cuántas nueces dio, cuántas nueces le quedan)



Uso 2 del organizador tabular (columnas: tenía, cuántas nueces dio, cuántas nueces le quedan)

Enunciado del problema

IV.1.1.4. Dificultades observadas

Se observaron diferentes episodios en los que el uso del material desembocó en problemas de comprensión o en el desarrollo de las diferentes estrategias de resolución, asociados a algunas características del TEA-1. El rasgo principal que ha marcado la resolución ha sido la literalidad y las necesidades en la flexibilidad de pensamiento. Ninguna de las necesidades que describimos a continuación fueron observadas en el taller piloto (con un grupo de estudiantes sin diagnóstico TEA y con desarrollo neurotípico de edades análogas a los participantes del taller, como explicamos en la metodología).

En el problema de los muñecos, por problemas de impresión en el diseño de los enunciados, algunos segmentos de los muñecos tuvieron diferente grosor (Figura 31). Esto desembocó en que algunos de los participantes demostraran problemas de comprensión que les limitaban el descubrimiento del patrón basado en el palillo compartido. Por ejemplo, Ramón (grupo 1) participa activamente en la introducción del problema, afirmando que 7 muñecos contendrían 70 palillos. Tras mostrar dificultades para construir las figuras siguiendo el modelo y ofrecerle la docente una guía con los pictogramas para visualizar los palillos que componen la figura, la rechaza mostrando un pensamiento muy ligado a una interpretación muy literal (“Te lo estás inventando”).

Figura 31

Pictograma en el que los Segmentos Compartidos en las Cabezas de los Muñecos Tienen un Grosor Mayor



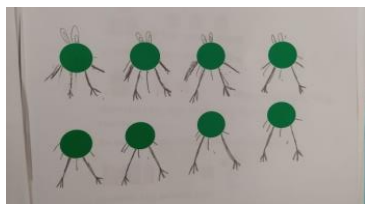
Las representaciones pictóricas marcadas por las imágenes mentales de los estudiantes fue una limitación en la resolución de problemas. Sergio (Grupo 1) diseñó las patas de las gallinas añadiéndoles garras, vinculadas a la imagen mental que tenía del animal. Esto ocasionó que creara animales de seis patas (Figura 32), dado que al intentar transformar el gomet en conejo, añadiera cuatro patas por no ser las dos iniciales extremidades propias del mamífero. Oliver (Grupo 3) comenzó dibujando los animales en la pizarra con todos sus detalles, perdiendo el objetivo del problema. A través de la interacción de una de las psicólogas de la asociación, el estudiante comenzó a diseñar solo las cabezas de conejo (ver Figura 32) pero le resultó imposible transformarlas en gallinas. Algo similar le ocurrió al abordar la representación de los muñecos en el problema 1. Oliver diseñó las figuras simulando su familia, lo que desembocó en que los muñecos perdieran su estructura, dado que el estudiante los construyó en función de la edad y altura de sus hermanos y él mismo (Figura 33).

Otro ejemplo de necesidades asociadas a la escasa flexibilidad de pensamiento la observamos en la resolución de Javi (Grupo 1), quien utilizó los gomets indistintamente para representar cabezas y patas de los dos animales. Su representación sigue un formato tabular, que nos lleva a pensar que su pensamiento fue condicionado por el uso de la tabla del problema de los muñecos, resuelto previamente a este segundo problema. La rigidez de pensamiento le dificultó terminar el problema, rompiendo la hoja con su propuesta.

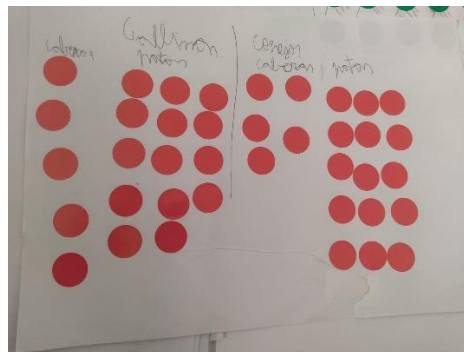
Figura 32

Ejemplos de Resoluciones del Problema de la Granja

Juan vive en una granja donde hay gallinas y conejos. Entre todos los animales de la granja pueden contarse: 10 cabezas 28 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja? ¿Y cuántos conejos?



Resoluciones de Sergio (arriba) y Oliver (abajo)



Resolución de Javi

Figura 33

Ejemplo de Resolución del Problema de los Muñecos

Estas figuras están hechas con palillos. ¿Cuántos palillos son necesarios para hacer una figura de cuatro personas? ¿Y una de 7?

Versión 1: 

Enunciado del problema



Resolución de Oliver

IV.1.1.5. Informe del taller cero

Aunque los grupos variaban y había diferencias en el funcionamiento ejecutivo, el aspecto clave en el proceso de enseñanza fue el uso de material visual y la secuenciación de la tarea.

En lo que respecta al carácter visual de las soluciones, el uso del color fue decisivo tanto para la comprensión como para la resolución del problema de la granja y el de los muñecos, y el carácter pictórico y esquemático de las nueces y organizador del problema de las nueces contribuyó a desarrollar estrategias diferentes. Sin embargo, el pensamiento literal continuó afectando la capacidad de visualización de los estudiantes, como se observa cuando algunos de los estudiantes rechazan usar los materiales o resolver los problemas a causa de su diseño, como el caso

del grosor del palillo compartido en los pictogramas del problema de los muñecos la forma de los gomets del problema de la granja, tan distinta de la imagen mental de conejos y las gallinas de los estudiantes.

Atendiendo a la secuenciación de los pasos de resolución, la fase inicial del problema se caracterizó en el 80% de los casos por la espera de instrucciones o sugerencias sobre cómo proceder (Gabriel, Grupo 4: ¿Puedo borrar si me equivoco?), preguntas sobre el uso del material y sobre los pasos a seguir en la solución (Chico-Gómez et al., 2022e). Por ejemplo, Cristóbal (Grupo 2), a pesar de encontrar el patrón a seguir en el problema, se detenía tras completar cada fila a la espera de instrucciones. Este tipo de comportamiento puede haber sido el resultado de una sobreprotección por parte del profesorado o familiares, que puede desembocar en que los estudiantes con necesidades específicas experimenten una disminución significativa de sus responsabilidades, lo que los desconecta de su propio proceso de aprendizaje (Roos, 2013).

Sin embargo, también se produjeron mecanismos de autoinstrucción, mediante los cuales los alumnos intentaron fijar metas y cumplir los objetivos del problema. Aunque los alumnos necesitaban orientación continua y estaban limitados por la rigidez cognitiva, el organizador visual y los depresores ayudaron a promover cierta diversidad de pensamiento.

La aceptabilidad de cada estrategia resultó clave para combatir la frustración y fue un factor de motivación importante para un grupo de alumnos acostumbrados a un tipo de matemáticas que aboga por una única estrategia de resolución. Se creó además un ambiente de expectación al presentar los problemas como retos, graduados según su dificultad (atendiendo a las versiones de los diseños) y motivar a los estudiantes a comparar sus estrategias y resultados.

La Tabla 20 muestra un resumen de los heurísticos puestos en marcha durante el taller y la influencia de las características del TEA en la resolución.

Tabla 20

Heurísticos, Características del TEA y Uso del Material TEACCH en el Taller Cero

Heurístico	Características asociadas al TEA	Uso del material TEACCH
<i>Problema de los muñecos</i>		
Representar	Habilidad visual Habilidades para percibir y focalizar en los detalles Dificultades para predecir	Observación y recuento de palillos que varían de una figura a otra. Las representaciones pictóricas y esquemáticas de palillos, pictogramas y esquema pueden asociarse numéricamente.
Organizar la información	Dificultades de atención sostenida	Se utilizan varios recursos complementarios.
	Dificultades en la organización y planificación Dificultades de memoria de trabajo	El registro de la información incluye elementos pictóricos mediante pictogramas.
Generalizar	Dificultades de memoria de trabajo Habilidades en el reconocimiento de patrones Elevado nivel de memoria visual y mecánica Habilidades para percibir y focalizar en los detalles	Búsqueda de un patrón en un dibujo, una construcción o a través de los datos resumidos en el organizador.
<i>Problema de la granja</i>		
Representar	Dificultades de comprensión verbal	Utilización de los pictogramas para extraer datos del enunciado y reproducirlos mediante los dibujos sobre los gomets.
Ejemplificar Explotar solo una condición	Dificultades para predecir	Se pueden dibujar conejos y gallinas indistintamente, empleando una representación esquemática y modificando el número de cada uno, fijando el número total de animales.
	Dificultades de memoria de trabajo Limitaciones en la flexibilidad de pensamiento Dificultades en la organización y planificación	Dibujar con los gomets ayuda a descomponer las propiedades de los ejemplos en unidades más pequeñas, atendiendo a las variables del problema.
<i>Problema de las nueces</i>		
Analizar la consistencia del	Dificultades de autorregulación	El apoyo visual de pictogramas y tablas permite contar las nueces en todo momento, con lectura

proceso y la solución	la	Dificultades en la organización y planificación	bidireccional de los datos iniciales y finales.
Organizar información	la	Dificultades de memoria de trabajo	La historia se cuenta a través de las imágenes, creando asociaciones entre el número de nueces y las fracciones mediante los pictogramas y el organizador.
Representar		Dificultades en la organización y planificación	
		Preferencia por un aprendizaje secuenciado	

Nota: Adaptado de Chico-Gómez et al. (2022d)

Respecto a las entrevistas realizadas a docentes de aulas inclusivas, los resultados señalan la implementación centrada en la inclusión de elementos que faciliten la planificación y secuenciación de la resolución de problemas, sobre todo de carácter visual. Algunos ejemplos son la incorporación de cronómetros visuales y organizadores de la sesión.

Todos los docentes se mostraron de acuerdo con la dificultad que reside en la comprensión y ejecución como fases de la resolución de problemas. La influencia de las funciones ejecutivas afecta a las habilidades de cálculo de los estudiantes, la lectura de los enunciados y el seguimiento del proceso de resolución. Los profesores señalan la importancia de seguir unas fases claras en la resolución de un problema, incorporar elementos visuales para la organización y acercar los problemas a los intereses de los estudiantes.

Sin embargo, destacan la limitación de tiempo, recursos humanos y materiales como claves en la atención a la diversidad del aula. También una necesidad de formación específica, dado que se señalan el ensayo y error y la propia experiencia como las principales fuentes de conocimiento sobre estrategias y métodos de atención a la diversidad en la resolución de problemas. La falta de recursos humanos, de tiempo y de ratio podría limitar la labor de los profesores. La formación del profesorado se describe como primordial para abordar los métodos inclusivos (Klaren et al., 2017).

Myriam: *El diseño universal de aprendizaje, con su base neurológica y pedagógica, es de hecho el «qué», el «cómo» y el «por qué» de los objetivos de la ley educativa.*

De ahí que todos los alumnos deban hacer lo mismo: presencia, participación y progreso. Esto hay que creérselo y la formación universitaria tiene un papel primordial en empujar a los profesores a hacerlo.

Los resultados de este taller impulsan un estudio más extenso de las estrategias de resolución de problemas con los estudiantes TEA y la influencia de las características que la investigación asocia al trastorno. El taller de resolución de problemas puede ser un impulsor de conocimiento sobre estrategias para fomentar la autonomía de los estudiantes mediante el uso de diferentes sistemas de representación y otros métodos que ayuden a desarrollar técnicas de autorregulación y retroalimentación, esenciales para los procesos metacognitivos asociados a la resolución de problemas.

IV.1.2. El taller semestral

Partiendo de los resultados del taller cero, se diseñó e implementó el taller semestral. Organizamos los resultados de este taller estableciendo una relación entre las funciones del material y las estrategias de resolución que estos han propiciado en la implementación del taller, así como la relación entre el uso del material y las características asociadas al TEA-1, siguiendo las categorías designadas en la metodología (Tabla 14).

Los siguientes sub-epígrafes describen los resultados en función de los materiales empleados en el taller: los materiales de construcción, los pictogramas y los pictogramas y el organizador. La Tabla 21 recoge la relación entre estos materiales y las características manifestadas durante el taller. Describimos a continuación las estrategias que se desarrollaron con cada material y su influencia en las características asociadas al TEA-1 observada durante la implementación del taller.

Tabla 21

Relación Entre las Características TEA-1 y los Materiales Empleados en el Taller

Características	Siglas	Estudiantes manifiestan características que las				Materiales empleados en el taller que benefician o cubren las necesidades derivadas de estas características				
		Elio	Noa	Omar	Raúl	Piezas de goma Eva	Policubos	Geoplano	Pictogramas	Organizador gráfico
Dificultades de comprensión verbal	DCV	x	x	x		x	x		x	x
Habilidad de percepción de detalles	HPD	x	x	x	x	x		x		
Predominancia del aprendizaje secuenciado	PAS			x	x	x	x			x
Pensamiento visual	PV	x	x		x			x	x	
Dificultades para predecir e inferir	DPRI			x	x	x				x
Dificultades de organización y planificación	DOPL	x	x	x	x				x	x
Dificultades de memoria de trabajo	DMT	x	x	x	x	x	x	x		x
Dificultades para la autorregulación	DAR	x	x	x	x				x	x
Dificultades de atención centrada y sostenida	DACS		x	x		x	x		x	x
Dificultades para ver la globalidad de una figura	DVGF	x	x	x					x	
Literalidad y Rigidez de pensamiento	DLRP	x		x					x	x
Inhibición afectada	I	x	x	x						x

IV.1.2.1. Material de construcción

Durante varias sesiones del taller, los materiales de construcción se introdujeron con el objetivo de facilitar la comprensión de los problemas. En concreto, se trata de piezas de goma Eva, policubos y geoplanos.

Los problemas en los que se implementaron requerían que los estudiantes abordaran la representación de un modelo. Los policubos se utilizaron en la sesión de introducción, de evaluación inicial y sesión 7 para representar el árbol de navidad (Anexo 6.2 y Anexo 6.9), el camino de *Sonic* (Anexo 6.3) y las figuras de los dinosaurios (Anexo 6.9); el geoplano se empleó en la sesión inicial y en la sesión 2 para representar una figura formada de varios triángulos y diseñar la telaraña de *Spiderman* (Anexo 6.1 y 6.4); las piezas de goma Eva, por último, sirvieron para construir en las sesiones 5 y 8 la escalera de la arqueóloga (Anexo 6.7 y 6.10) y las murallas del *Minecraft* (Anexo 6.10). Utilizar estos materiales propició en los estudiantes principalmente estrategias de conteo de elementos como parte de un patrón geométrico. Se escogieron estos materiales por su potencial visual, que permitía abordar la representación de diferentes figuras.

El primer aspecto que señalamos es la *dificultad para seguir un modelo dado*. Los estudiantes representaban aquellos rasgos más llamativos de la figura, perdiendo la estructura global de la misma (*Dificultades para ver la globalidad de una figura - DVGF*). Encontramos indicios de esto cuando Omar y Noa representan de manera separada cada uno de los cuadrados que constituían las telarañas (Figura 34); en la construcción de los dinosaurios de Noa y Elio (Figura 35) y en la representación de la escalera de la arqueóloga de Elio, que saltaba de dos en dos escalones sin respetar la estructura.

Figura 34

Construcción de la Telaraña Formada por Cuadriláteros de Distintas Formas y Separados (Omar, Izquierda) Diferente al Modelo del Enunciado (Derecha)

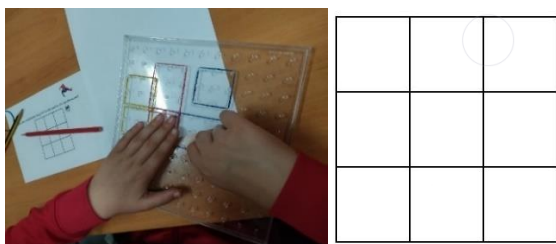


Figura 35

Construcción de un Dinosaurio (Elio, Izquierda) Diferente al Modelo Proporcionado por el Pictograma (Derecha)



En algunos de estos casos se observaron además *dificultades para modificar esa primera aproximación del problema*, posiblemente condicionados por limitaciones en la flexibilidad de pensamiento (*Literalidad y Rigidez de pensamiento -DLRP*) y reconducir acciones incorrectas (I). Esta limitación ocasionó que, en el problema de los dinosaurios (Anexo 6.9), se diseñaran distintas figuras de dinosaurios que seguían patrones distintos (*Dificultades para la autorregulación -DAR*). Durante la fase de discusión de estrategias, los estudiantes no comprendían por qué los resultados de cada uno fueron diferentes, ya que no visualizaban que sus construcciones no seguían la misma forma (Figura 36).

Figura 36

Modelo (Izquierda), Construcción de Omar (Centro) y Raúl (Derecha)



En el siguiente fragmento, observamos cómo Omar no consigue distinguir las diferencias entre su construcción y el modelo proporcionado, más allá del tamaño:

Docente: ¿Ves iguales estas patas que estas (Figura 37)? (comparando la construcción de Omar con el pictograma del enunciado. Omar no responde) ¿Estas tres patas son iguales de anchas?

Omar: Ay es que...si le quito esto se cae, ¿no? (quita una de las patas dobles, pero tiene muchas dificultades para unirlos de nuevo. Consigue montar la figura, pero la cabeza de la segunda figura no está encima de las patas, como apreciamos en la Figura 37)

Docente: Vale, ¿se te parece ahora? Vamos a mirarlo de lejos, pero vamos a mirarlo bien, eh...

Omar: (con dudas) Emm...Ahora (Pone la cabeza y cuello del segundo dinosaurio sin alinear con la pata).

Docente: ¿Se te parece a esta? (coge el pictograma de dos dinosaurios y lo coloca al lado de la figura que ha creado Omar, para compararlas mejor)

Omar: Sí... solo que esta (la construcción) es un poco más grande.

Figura 37

Construcción de Omar en la que el Cuello Del Segundo Dinosaurio no Encaja con las Patas del Primero

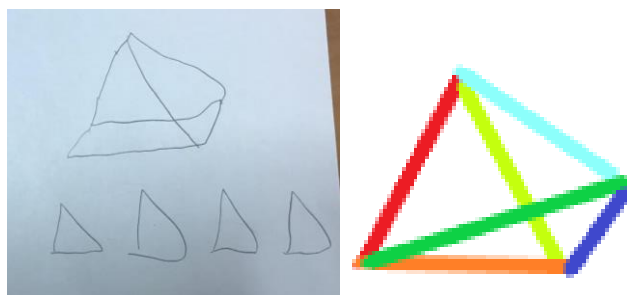


Paralelamente, Elio renunció a continuar su resolución, posiblemente a consecuencia a la poca tolerancia a la frustración por no haber conseguido seguir el modelo dado.

Ocurrió una situación similar con este estudiante en el problema de los triángulos (Anexo 6.2), en la sesión de evaluación inicial. No modificó su primera hipótesis, afirmando que la figura tenía solo cuatro triángulos (Figura 38). En su diseño, observamos líneas curvas que no conectan los vértices y que forman tres triángulos y un cuadrilátero, en contraposición con los cuatro triángulos que refiere el estudiante y que dibuja, iguales entre sí, pero diferentes al modelo, justo debajo. Queda manifiesta la *dificultad para representar el modelo dado y para ver la figura en su conjunto*, más allá de percibir los cuatro triángulos básicos de las caras del tetraedro (*Dificultades para ver la globalidad de una figura -DVGF*).

Figura 38

Resolución de Elio del Problema de los Triángulos (Izquierda) y Modelo Dado en el Enunciado (Derecha)



Señalamos que el proceso de representar el modelo desviaba a menudo la atención de los estudiantes del objetivo real del problema (*Dificultades de atención centrada y sostenida -DACS*), dado que requería que centraran su atención en más de un aspecto simultáneamente. Una variable que ha parecido condicionar la representación de los modelos ha sido el color. Por ejemplo, la construcción de Omar del árbol de navidad (Figura 39) se vio truncada por no disponer del número de policubos verdes y marrones suficientes para representar la figura. Se observa además como su construcción representa algunas de las características del modelo, como es el pico superior o una base de color marrón, pero que pierde la forma global (*Dificultades para ver la globalidad de una figura -DVGF*).

Figura 39

Modelo Proporcionado en el Enunciado (Izquierda) y Construcción de Omar del Árbol de Navidad del Enunciado, que no Sigue la Forma Propuesta (Derecha).



La selección de algunos de los materiales incrementó esta dificultad, considerando las limitaciones de motricidad fina que evidenciaron algunos estudiantes al construir las figuras ensamblando los policubos o al intentar engarzar las gomillas en los nodos del geoplano.

Sin embargo, destacamos que a pesar de las dificultades que pudieron experimentar en el proceso de construcción, al utilizar el medio visual como motor de resolución del problema (*Pensamiento visual -PV*), se observan evidencias de cómo los estudiantes consiguen abordar *distintas estrategias*. Por ejemplo, dividir y extraer cada cuadrado diferente de la telaraña de *Spiderman* empleando para ello colores (Figura 40) o una lista pictórica organizada (Figura 41), mejoró la resolución de los estudiantes y las dificultades derivadas de las limitaciones en la memoria de trabajo (DMT).

Figura 40

Resolución de Omar, que Asigna un Color a Cada Tipo de Cuadrado Para Facilitar el Conteo.

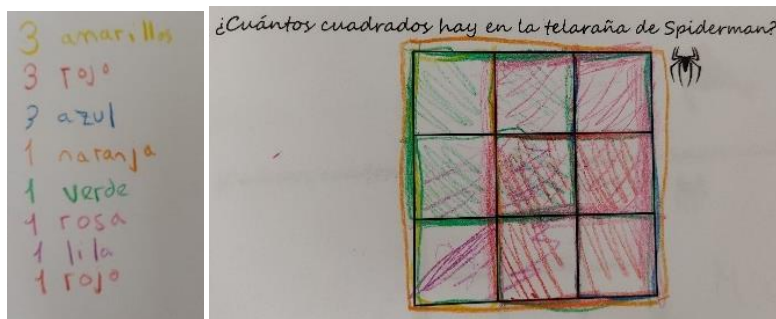
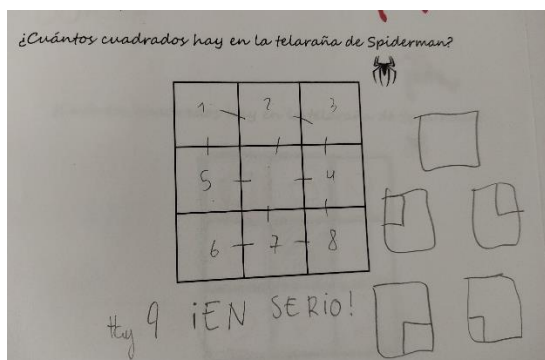


Figura 41

Resolución de Noa, Quien Extrae y Dibuja Los Diferentes Tipos de Cuadrados de la Figura de la Telaraña



El hecho de desglosar la información global de la figura propuesta en cada caso en unidades más pequeñas que debían relacionar posibilitó la *mejora de la comprensión de la propia estructura* al percibir sus especificidades (*Habilidad de percepción de detalles* -HPD). Por ejemplo, construir cada escalón de la escalera de la arqueóloga o cada fila de la muralla, contribuyó a *descubrir la regularidad de las figuras* (HPD) y ser capaces de *conocer la formación del siguiente término de la secuencia*. En el caso de Noa, el estudiante emplea las piezas para descubrir la regularidad de la estructura hasta alcanzar los dinosaurios de 9 y 10 metros, sin necesidad de contarlas; Elio, quien inicialmente construyó la escalera con escalones de diferentes alturas, consigue representar los diferentes ejemplos de escaleras siguiendo una secuencia ordenada con las piezas de goma Eva:

Noa: Entonces sería así (construye una escalera de 4 de altura y cuenta los 10 cajones necesarios) ... Para el de 8, uf a ese sí que le tengo que poner escalones... (construye. Para darse cuenta de cuántos le quedan, cuenta el número de columnas que lleva)

Docente: Noa, ¿no habría una manera más fácil de saber cuántos cajones necesita? En vez de ir contando cajones...(broma sobre que se compre una escalera normal). ¿Ella no podría pensar, para que tú la ayudes, alguna estrategia para que en vez de ir contando de 1 en uno toooooodos los cajones? Decir: 8 metros, pues necesito tantos cajones. Sin contar.

Noa: Creo que tengo una idea. Voy a contar esto. (cuenta la construcción de la escalera de 8 metros, sin orden). Son 36. A esos 36, les sumo 9.

Docente: ¿Por qué?

Noa: Porque hay que añadirle 9. Se quedan 45. A esos 45 les sumo 10, 55. 55 mediría el del Gigantorraptor (10 metros).

Elio: Otra cajita más encima (pone la pieza justo encima de la columna de piezas correspondientes al escalón anterior).

Docente: ¿Otra más encima? Pero entonces no seguimos lo que la arqueóloga iba haciendo. [...] Pero si lo le añado aquí una caja, ¿no ves que este escalón es más grande que los demás? Tú has dicho cómo lo poníamos aquí (refiriéndose al ejemplo de 4 metros que acaban de hacer y que tienen en un lado de la mesa). Como ahí tenemos los cajones, podemos subir hasta 4 metros.

Elio: Sí, eso es lo que he hecho yo

Docente: Eso es. y ahora hasta 8 metros? (Elio va cogiendo los cajones de goma Eva para construir y vuelve a hacer una escalera de cuatro metros). Ahí tenemos la misma altura (Elio añade una columna más). Ahí tenemos 5, muy bien, venga (Elio sigue añadiendo columnas de piezas, en orden).

IV.1.2.2. Los pictogramas

Los pictogramas se incluyeron en el enunciado de los problemas y de manera manipulativa, dotándolos de velcro. Durante las sesiones se observó cómo los estudiantes los emplearon para abordar la resolución del problema desde distintas perspectivas.

La primera estrategia es el conteo, que encontramos en la resolución del problema de la arqueóloga (Anexo 6.6). Los estudiantes iniciaron estrategias basadas en el dibujo sobre la escalera del problema. Observamos casos en los que no consiguen seguir la estructura correctamente, influidos por las dificultades de visualización (*Dificultades para ver la globalidad de una figura* -DVGF) y de planificación al organizar los escalones de manera ordenada (*Dificultades de organización y planificación* -DOPL), como es el caso de Elio (Figura 42); aunque también

destacamos casos en los que seguir la estructura, desarrolla una percepción del patrón que no casa con las dificultades de predicción asociadas al TEA-1 (*Dificultades para predecir e inferir* -DPRI), como ocurre con Raúl, que dibuja escalones “flotantes” a partir del octavo término (Figura 43).

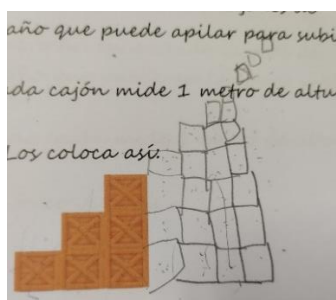
Figura 42

Escalones Desiguales y Desordenados de Elio



Figura 43

Estrategia de los Escalones Flotantes de Raúl



Los pictogramas también permitieron el desarrollo de *estrategias de ensayo y error* durante la resolución del problema de *Star Wars*, también de la sesión 4 (Anexo 6.6). Los pictogramas de los *Jedis* y sus espadas laser posibilitaron representar los datos del enunciado de una manera visual y manipulativa (*Pensamiento visual* -PV), que redujeron las dificultades de comprensión de los datos (*Dificultades de comprensión verbal* -DCV). Encontramos indicios de estrategias de ensayo y error que los estudiantes desarrollan de distinta forma. Elio se apoya en el pictograma del enunciado para agrupar las espadas en función de si pertenecían a maestros o aprendices (Figura 44). Noa utiliza los pictogramas manipulativos para organizarlos sobre su mesa de trabajo en dos zonas: izquierda para los aprendices y derecha para los maestros, con sus correspondientes espadas (Figura 45). Cuando el estudiante consigue fijar una de las variables, afectado por dificultades de atención

(*Dificultades de atención centrada y sostenida -DACS*) (ver fragmento), desarrolla la estrategia de ensayo y error. Una vez fijado el número de Jedis, basa su estrategia en desplazar espadas y Jedis de un lado a otro de la mesa hasta conseguir cumplir todas las condiciones. Encontramos así un ejemplo de que *el material le ayuda a superar las dificultades para inferir y autorregularse (Dificultades para predecir e inferir -DPRI- y Dificultades para la autorregulación -DAR) y crear un espacio organizado y ordenado como elemento visual de su estrategia (Dificultades de organización y planificación -DOPL y Pensamiento visual -PV).*

Noa: 11...13...y el último aprendiz y ya tengo las 14 espadas. Voy a contar...11 y 12... ¡me he pasado una!

Docente: 12 *jedis*... ¿y cuántas espadas tienes?

Noa: Teníamos 14 espadas y las he dividido en más aprendices que maestros porque como solo son 1, así equilibrio.

Docente: ¿Pero tú has contado aquí 14 espadas? (Noa las cuenta y ve que tiene 17) Quita todo lo que te sobre.

Noa: (quitando espadas) 17, 18, 19...

Docente: ¿Estás sumando o estás restando, Noa?

Figura 44

Elio Cuenta y Organiza las Espadas del Pictograma del Enunciado, Anotando a la Derecha el Número de Maestros (M) y Aprendices (A)

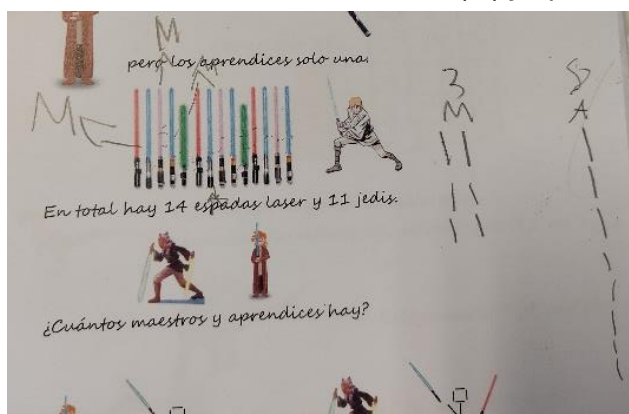
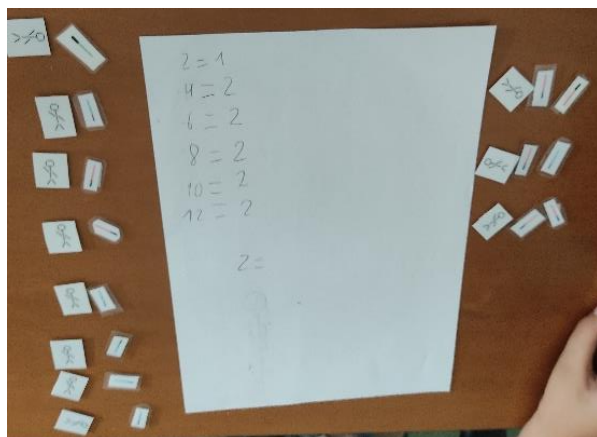


Figura 45

Noa Aprovecha el Espacio de su Mesa de Trabajo Para Agrupar los Aprendices y Maestros a Ambos Lados de su Hoja de Trabajo.



Sin embargo, destacamos que el diseño de los pictogramas influyó en diversos momentos del taller por la tendencia a la rigidez de pensamiento de los estudiantes (*Literalidad y Rigidez de pensamiento* -DLRP), sobre todo en el caso de Elio y Omar. Encontramos ejemplos en los que los estudiantes no comprenden los modelos por no parecerse a un árbol de navidad (problema del árbol, tabla del Anexo 6.1) o a un dinosaurio (Problema de los dinosaurios, tabla del Anexo 6.9). Desde el inicio de la resolución del problema de los dinosaurios, Elio se mostró frustrado con el enunciado (“Pero ¿cómo hacemos un dinosaurio así? ¡No lo entiendo! ¿Cómo hacemos el maldito dinosaurio?”) (I). Este estudiante también manifestó su escepticismo durante la resolución del problema de *Star Wars* (tabla del Anexo 6.6) porque ciertos elementos no cumplían con la realidad de la saga de películas, como que los pictogramas del enunciado mostraban personajes que no eran maestros y aprendices y que los pictogramas de las espadas tenían un color en su diseño que se asociaba a personajes que no eran *jedis*. Paralelamente, la docente modificó el contexto de este problema, transformando los Jedis en guerreros normales por la insistencia de Omar de su poco interés en la saga *Star Wars*.

IV.1.2.3. Pictogramas y organizador gráfico

Los pictogramas se utilizaron además de en los casos anteriores, de manera conjunta con los diferentes organizadores gráficos. Fueron empleados en el

problema de la bolsa mágica (Evaluación inicial, tabla Anexo 6.2), el problema de las estrellas (sesión 1, tabla Anexo 6.3), el problema del reloj (sesión 2, tabla Anexo 6.4), el problema de la arqueóloga (sesión 4, tabla Anexo 6.6), el problema de los cachorros (sesión 5, tabla Anexo 6.7), el problema de las estrellas (sesión 6, tabla Anexo 6.8), el problema de los dinosaurios y de *Scratch* (sesión 7, tabla Anexo 6.9), el problema de *Pokémon* y del *Minecraft* (sesión 8, tabla Anexo 6.10), el problema del avión (evaluación final 1, tabla Anexo 6.11), el problema del menú y el problema de los tickets (evaluación final 2, tabla Anexo 6.12). Durante las sesiones del taller, encontramos casos en los que pictogramas y organizador se usaron de manera conjunta durante toda la resolución y casos en los que los pictogramas solo se emplean al inicio de esta, dando paso a estrategias menos pictóricas. La *utilización y organización del espacio y tiempo* de trabajo mediante el organizador y el apoyo pictórico de los pictogramas contribuyó a cubrir algunas necesidades de los estudiantes (*Dificultades de organización y planificación* -DOPL) partiendo del pensamiento visual para responder a otras necesidades derivadas de su funcionamiento del cerebro (*Pensamiento visual* -PV). Estos materiales se introdujeron en las sesiones a continuación del material de construcción (en los casos en los que el problema los contemplaba). Los pictogramas y las piezas de construcción como la goma Eva o policubos se complementan. Al construir los modelos, los pictogramas ayudaron a los estudiantes a establecer fija la estructura de las figuras de los problemas y cubrir necesidades de visualización de Noa (*Dificultades para ver la globalidad de una figura* -DVGF) u otros aspectos, como la agilidad para construir las figuras de Omar, cuyo nivel de detalle hacía que perdiera de vista la resolución del problema como objetivo principal del taller (*Literalidad y Rigidez de pensamiento* -DLRP). En otros casos, su uso conjunto con el organizador gráfico contribuye a la resolución iniciada con el material manipulativo. Encontramos ejemplos de esto cuando los estudiantes se enfrentan al registro de la información en el problema de la arqueóloga, tras mostrar dificultades para comprender la estructura del modelo, Elio procede a anotar la información en su organizador tabular:

Elio: (Piensa y va mirando) Ah! ya con esto se puede hacer. Ya me he dado cuenta, ¡calculando! (Elio va canturreando los resultados) Este sería 36.

Docente: ¿Por qué?

Elio: Porque son 9 pilares. Otro pilar y es 45. [...] Por cada pilar, si añadimos un pilar, y eran 7, pero aquí le añadimos un pilar y son 8 y luego 9. Entonces tenemos 45 cajas porque hemos añadido 9 (va señalando sobre la columna de altura y número de cajas, respectivamente).

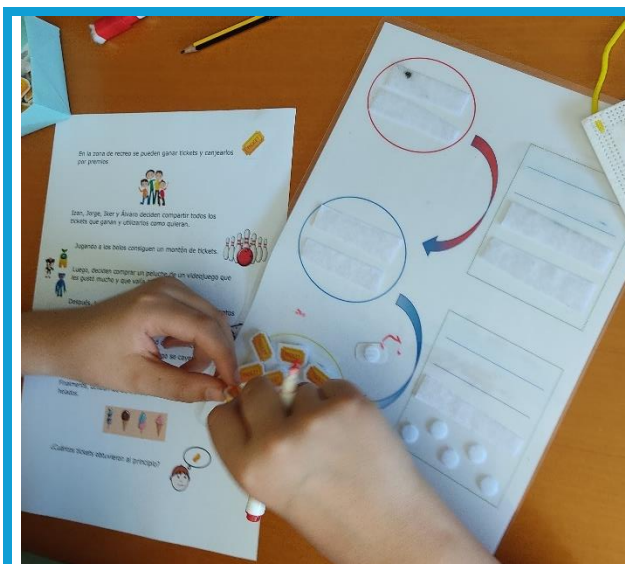
Organizar la información en las distintas tablas y esquemas contribuyó además a la transición desde el medio escrito y verbal a un medio más visual y gráfico, que pareció disminuir las necesidades de comprensión del enunciado (*Dificultades de comprensión verbal* -DCV). La presentación de varios datos en los problemas pueden ser un obstáculo en la comprensión de los estudiantes. Transformarlos en pictogramas y organizarlos posibilita comprender la historia o secuencia del problema, como vemos en la resolución de Omar (Figura 46), quien a lo largo de su resolución transforma el registro verbal en gráfico y este en numérico.

Figura 46

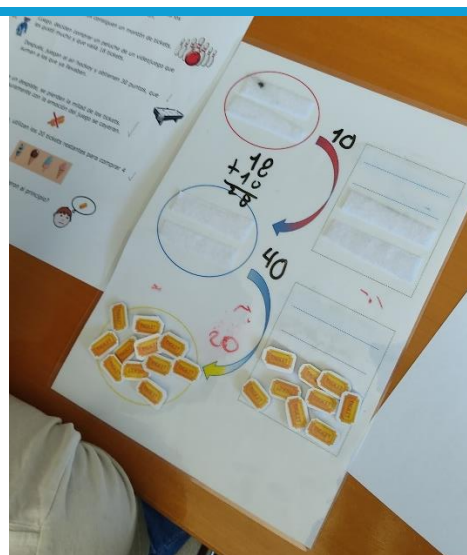
Omar Registra los Datos del Problema en el Organizador en Esquema del Problema de los Tickets

Problema de los tickets (versión 2):

En la zona de recreo se pueden ganar tickets y canjearlos por premios. Noa, Elio, Raúl y Omar deciden compartir todos los tickets que ganan y utilizarlos como quieran. Jugando a los bolos consiguen un montón de tickets. Luego, deciden comprar un peluche de un videojuego que les gustó mucho y que valía 18 tickets. Después, juegan al air hockey y obtienen 30 puntos, que suman a los que ya llevaban. En un despiste, se pierden la mitad de los tickets. Seguramente con la emoción del juego se cayeran. Finalmente, utilizan los 20 tickets restantes para comprar 4 helados. ¿Cuántos tickets obtuvieron al principio?



Noa registra la información del enunciado utilizando los pictogramas y el organizador gráfico



Tras iniciar su resolución de manera gráfica empleando los pictogramas, registra sobre el organizador los datos y cálculos de manera numérica.

IV.1.2.4. Usando pictogramas y organizador gráfico: estrategias de resolución

El uso de estos materiales al resolver problemas vino acompañado de distintas estrategias de resolución. Algunos de los problemas estaban diseñados para ser resueltos mediante un heurístico en concreto, pero la implementación del taller trajo consigo la aparición de diferentes estrategias.

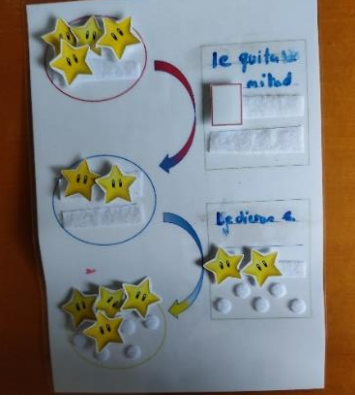
IV.1.2.4.1 El heurístico marcha atrás

Una de ellas fue la resolución *marcha atrás*. En el problema de *Scratch* y el problema de las estrellas se empleó el organizador en formato globo, sobre el que los estudiantes pudieron pegar los pictogramas para seguir cada una de las etapas que iban marcando los datos del enunciado. Este registro pictórico y numérico (Figura 47) facilitó la secuenciación de los datos (*Predominancia del aprendizaje secuenciado* -PAS) de una manera ordenada y visual (*Dificultades de organización y planificación* -DOPL, *Pensamiento visual* -PV), que permitía además que los estudiantes recorrieran en ambos sentidos los pasos de su resolución para comprobar el resultado (*Dificultades para la autorregulación* -DAR). No obstante, algunos de los estudiantes optaron por la estrategia de ensayo y error para resolver estos problemas. Partían de una hipótesis, que planteaban en el primer globo del

organizador gráfico. Siguiendo la secuencia del esquema visual, comprobaban la veracidad de su hipótesis inicial. Lo destacable de este método de resolución es que se apoyaban en la representación de los pictogramas y la organización en etapas, para modificar la hipótesis y acomodar el resto de los datos, mostrando indicios de autorregulación y flexibilidad en sus estrategias (*Dificultades para predecir e inferir –DPRI- y Dificultades para la autorregulación -DAR*).

Figura 47

El Estudiante (Noa) Combina el Registro Numérico y el Pictórico de los Pictogramas de Estrellas Para Resolver Sobre el Organizador en Globos del Problema de las estrellas

Jugando al Mario Party, fui ganando y perdiendo estrellas. En las primeras rondas gané varias estrellas. Luego, perdí la mitad de mis estrellas. En la casilla de Bowser tuve mucha suerte y gané 2. Al final de la partida conseguí 4 estrellas en total. ¿Cuántas gané en las primeras rondas? Enunciado del problema de las estrellas (Versión 2)	 Resolución usando el organizador

IV.1.2.4.2. El heurístico ensayo y error

El *ensayo y error* cobró protagonismo en otros problemas y, tal y como ocurrió en el taller cero, se observaron indicios de distintos niveles de sistematicidad en los estudiantes al abordar el tanteo. Durante la resolución del problema de las estrellas (Anexo 6.3), los estudiantes distribuyeron los pictogramas en las filas y columnas del organizador tabular para representar el número de estrellas que tenía cada personaje. (Figura 48).

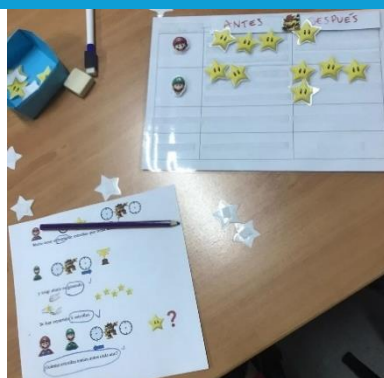
Figura 48

Resolución de un Estudiante de una de las Versiones del Problema de las Estrellas Utilizando los Materiales: Organizador Tabular, Pictogramas de las Estrellas y Personajes y Enunciado Secuenciado con Elementos Pictóricos

Al caer en la casilla de Bowser, este obliga a los jugadores a entregar todas sus estrellas que habían conseguido, volviéndolas a repartir como él quiere.

Bowser roba y reparte 5 estrellas en total. Mario tenía el triple de estrellas antes de encontrar a Bowser y Luigi ahora va ganando. ¿Cuántas estrellas tenían antes cada uno?

Enunciado del problema del *Mario Party*
(Versión 2)



Los pictogramas podían ser distribuidos en las filas y columnas del organizador tabular para representar el número de estrellas que tenía cada personaje, lo que cubrió necesidades asociadas a la planificación y la atención simultánea a más de un dato (*Dificultades de organización y planificación -DOPL- y Dificultades de atención centrada y sostenida -DACS*). La descomposición numérica del número de estrellas en las diferentes celdas pareció mejorar la comprensión de los datos (*Dificultades de comprensión verbal -DCV*). En el siguiente extracto de la resolución de Noa podemos observar cómo el estudiante reguló el reparto de los pictogramas entre los personajes (*Dificultades para la autorregulación -DAR*):

Docente: Entonces Wario en la columna ANTES, ¿cuántas tenía? Si Yoshi tenía 3, ¿Wario cuántas tenía?

Noa: Si hemos gastado ya las 5, sería 0.

Docente: Pero antes... Tú imagínate que esto no está (Tapa la columna DESPUÉS) ¿Cuántas tenía Wario?

Noa: Podría haber tenido 1 más la que le dan.

Docente: Dice que reparte 5. Si aquí (celda de Yoshi) hemos puesto 3 estrellas, ¿cuántas tenía Wario?

Noa: ¡Ah, dos!

También encontramos ejemplos en los que el estudiante utilizó la representación tabular para plasmar sus hipótesis respecto al número de estrellas de cada personaje, por lo que pueden comprobar los errores cometidos (*Dificultades para la autorregulación -DAR*), como muestra la siguiente unidad extraída de la resolución de Elio:

Docente: Busca un número que tú puedas poner como las estrellas que tiene después y que se respete que al multiplicarlo siga habiendo 5 estrellas en total.

Elio: Antes, Mario tenía 3, Luigi 2 (mueve estrellas a medida que cuenta la historia); luego, Mario 1 y Luigi 4.

Señalamos además que los estudiantes emplearon el organizador y los pictogramas para abordar estrategias de ensayo y error de manera espontánea en problemas diseñados para ser resueltos por la resolución marcha atrás. Es el caso del problema de las estrellas (tabla del Anexo 6.3) y de *Scratch* (tabla del Anexo 6.9). La posibilidad de desplazar las estrellas o nueces (respectivamente) de un globo a otro y añadir o retirar pictogramas parece influir en la habilidad de los estudiantes para modificar sus hipótesis (*Literalidad y Rigidez de pensamiento* -DLRP).

Noa: (Piensa en voz alta mientras observa el enunciado y manipula las estrellas sobre el organizador) *Aquí tiene 3 porque, si tiene que tener 5, tiene que tener 3. Ah, ¡no, no! En realidad, se tendría que quedar con 4, perdón. Serían 2 y ahora a 4 le quitamos 2, nos quedaríamos en 3... No perdón, 2. Y a esos 2 le sumamos más 3 y así. A ver, ¿es que era muy fácil eh!*

IV.1.2.4.3. El heurístico generalización

Durante la resolución de otros problemas, los cuatro estudiantes desarrollaron estrategias de *generalización*. Encontramos evidencias de que los distintos niveles de apoyo pictórico parecen mejorar las dificultades asociadas a la memoria de trabajo y atención, dado que registrar la información sobre los organizadores y seguir la secuencia o contar sobre los pictogramas aparentemente redujo las ocasiones en las que se perdía el objetivo del problema o se olvidaba la estrategia de resolución (*Dificultades de memoria de trabajo* –DMT- y *Dificultades de atención centrada y sostenida* -DACS).

Durante la resolución del problema de los cachorros (Anexo 6.7), se observa que el apoyo visual de los pictogramas resulta clave para Omar en el descubrimiento del patrón. Para escoger el pictograma que debe colocar sobre el organizador,

identifica en él el número de comederos (4, 5, 6...) (Figura 49) Una vez colocado, cuenta todos los perritos de uno en uno, y, de nuevo, los comederos (*Dificultades de memoria de trabajo -DMT*). Completadas cuatro filas del organizador, dio indicios de descubrir un patrón (“¿Va de 4 en 4?”). Se observa una diferencia entre las dificultades de memoria de trabajo y atención que manifiesta al usar el registro pictórico de los pictogramas, frente a los indicios de predecir una generalidad cuando se apoya en el registro numérico del organizador.

Figura 49

Ejemplo de Resolución del Problema de los Cachorros

Han llegado muchísimos cachorros a la protectora de animales. Para alimentarlos, los voluntarios han organizado los comederos para que quepan todos. A medida que van llegando los cachorros, colocan los comederos. ¿Cuántos comederos serán necesarios para 10 perritos? ¿Y para 26? ¿Y 112? ¿Y 29?



Organización para comer	Comederos	Cachorros
	1	4
	2	8
	3	12
	4	16
	5	20
	6	24

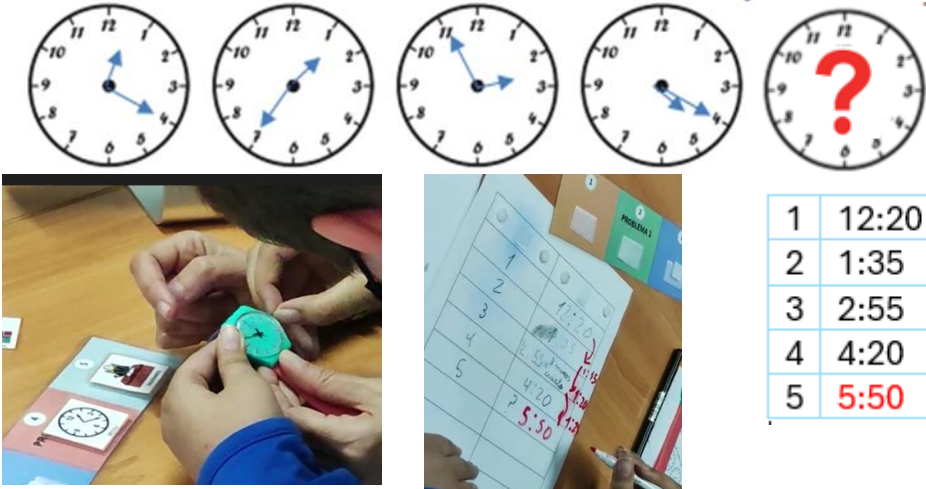
Omar anota los datos sobre su organizador. Los pictogramas muestran marcas de rotulador a causa del conteo sobre los cachorros representados en ellos.

En otros casos, las dificultades asociadas a la manipulación o la visualización disminuyen al transformar el registro pictórico en esquemático mediante el organizador. Encontramos indicios en el problema de los relojes (Figura 50), en el que, además, las dificultades para comprender el paso del tiempo sobre el reloj se reducen al utilizar los datos sobre la tabla, posibilitando descubrir el patrón (*Habilidad de percepción de detalles -HPD*).

Figura 50

Transición Desde la Manipulación de un Reloj (Izquierda) Hasta el Registro de los Datos Sobre la Tabla (Centro: Imagen Extraída de la Videograbación de la Sesión en el Centro y su Representación a la Derecha) en la Resolución del Problema de los Relojes

Para averiguar a qué hora has de comenzar la misión debes descifrar estos relojes. ¿Qué hora es en el reloj sin manecillas?



1	12:20
2	1:35
3	2:55
4	4:20
5	5:50

1 y 15
1 y 20
1 y 25

Durante la observación del taller, fue muy recurrente el error *de conteo*, apareciendo principalmente cuando las cifras eran muy elevadas o había un número considerable de sumandos. Durante el problema de *Pokémon*, encontramos errores en los resultados de Noa porque, a pesar de encontrar cierta regularidad en los datos respecto a la paridad correspondiente a cada personaje, no detectó el error de sus cálculos (*Dificultades de atención centrada y sostenida* –DACS–, *Dificultades de memoria de trabajo* –DMT). Como observamos en el siguiente fragmento, sabiendo que uno de los resultados era 110 caramelos, el estudiante obtuvo 109 consecuencia de un error de conteo sobre los pictogramas, que utilizaba de manera conjunta con el organizador (Figura 51). Esto le frustró y desvió su atención del problema, incluso llegando a proponer falsear el resultado (I).

Noa: Tiene que dar 110... No, 109...Pero el problema está mal...

Docente: Vamos a repasarlo porque los cálculos estarán mal (revisa los cálculos contando sobre los pictogramas).

Noa: (desmotivado, jugueteando con los pictos mientras la docente repasa los cálculos) Este problema tiene trampa.

Docente: ¡Qué va! Mira, hay una diferencia de 9. Entonces tenemos que seguir (la diferencia tenía que ser de 10).

Noa: ¿Y por qué no le ponemos un numerito más? (Se refiere a sumar uno más para obtener 110).

Figura 51

Resolución del Problema de Pokémon Utilizando el Organizador y los Pictogramas

El caramelloraro es un objeto que los pokémon pueden comer para aumentar un nivel.

Charmander y Squirtle encontraron una caja llenita de caramelloraros en el laboratorio del profesor Oak y deciden compartírselos.

Squirtle toma uno y Charmander, codicioso, toma dos.

A continuación, Squirtle toma tres y Charmander toma 4...

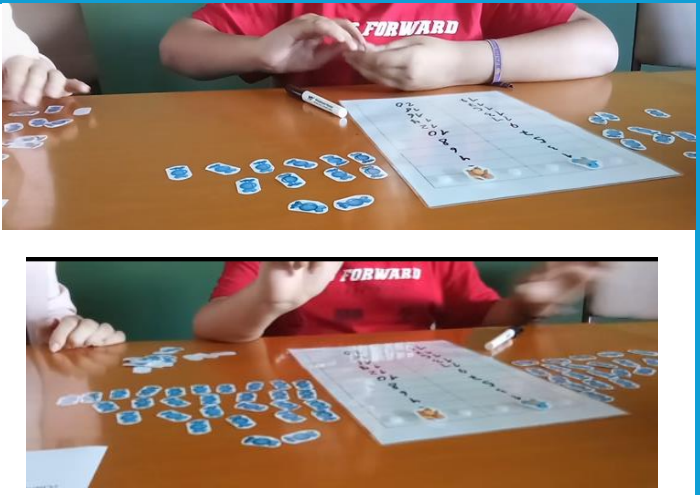
y así, sucesivamente, cada uno va tomando un caramelloraro más de los que había tomado el otro.

Charmander es el último en tomar los caramelloraros, cogiendo todos los que quedan.

Charmander tiene en total, 10 caramelloraros más que Squirtle

¿cuántos caramelloraros toma cada pokémon?

¿Cuántos caramelloraros había en la caja inicial?



Noa se apoya en los pictogramas para repasar sus cálculos y anotarlos en su organizador

Enunciado del problema

Elio también muestra cierta frustración cuando la docente le insiste en repasar los cálculos y la grafía de los resultados, que dificultan su comprensión. No reconoce sus propios fallos (*Inhibición afectada* -I, *Dificultades para la autorregulación* -DAR), pero va borrando a medida que calcula con la docente, insistiendo repetidamente en la veracidad de su estrategia (“¡¡Lo tenía bien yo desde el principio!! ¡¡Era el resultado original que yo tenía al principio!!”) al finalizar el proceso en la veracidad de su estrategia.

En el caso de Raúl, un *error de conteo* sobre el pictograma le llevó a registrar datos que le incitaron a plantear un patrón erróneo en la resolución del problema de la

arqueóloga (Figura 52). Disponer de la información sobre la tabla, propició que estableciera *relaciones recursivas entre los datos y descubriera su propio error* (*Dificultades para la autorregulación -DAR*).

Figura 52

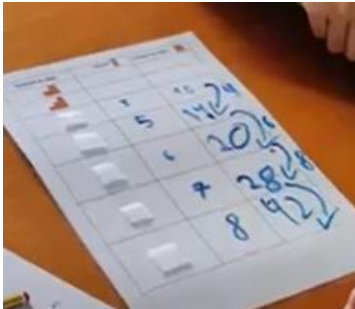
Resolución de Raúl Extraída de la Videograbación de la Sesión (Izquierda) y su Explicación (Derecha) en la que, a Pesar del Error de Conteo, el Estudiante Parece Establecer la Búsqueda de un Patrón Basado en la Suma de Números Pares

Una arqueóloga necesita limpiar las figuras de los dinosaurios que se exponen en el museo. No tiene una escalera, pero ha encontrado cajones de madera del mismo tamaño que puede apilar para subir. Cada cajón mide 1 metro de altura.



Los coloca así:

¿Cuántos cajones necesita para alcanzar la altura del Velociraptor (2 m)? ¿Y al Estegosaurio? (4 m)? ¿Y al Gigantorraptor? (8 m) ¿Y al T-rex (10 m)?



ALTURA	NÚMERO DE CAJAS TOTALES
4	10
5	14
6	20
7	28
8	42



4
6
8

El referido problema de la arqueóloga se introduce en la sesión 4, siendo la primera vez que los estudiantes se enfrentan a un problema empleando tres recursos diferentes (material de construcción, pictogramas y organizador gráfico en formato tabular). Tras un primer planteamiento de la resolución empleando las piezas de construcción, como hemos referidos en sub-epígrafes anteriores, la orientación de la docente dirige las estrategias de los niños hacia diferentes usos del organizador gráfico, que se empleó de manera conjunta con los pictogramas.

El primer uso es como registro. Omar y Raúl colocan los pictogramas con velcro sobre el organizador, obteniendo resultados diferentes. Omar se enfoca en ordenar y colocar todos los pictogramas, priorizando completar esa tarea sobre la

resolución del problema (*Dificultades de atención centrada y sostenida*- DACS). En el caso de Raúl, utilizar los pictogramas lo lleva a retomar una estrategia de conteo, olvidando la estrategia recursiva que había descubierto (*Dificultades de memoria de trabajo*- DMT):

Docente: Entonces, por ejemplo, si tiene 4 de altura, ¿Cuántas cajas son?

Raúl: 4 de altura?... Pues... (coge el rotulador y comienza a completar la tabla. Parece hacerlo calculando de cabeza).

Docente: ¿Y si fuesen 5 de altura?

Raúl: (Completa la fila correspondiente y cuenta de cabeza apoyándose en el dibujo que hay de cajas apiladas en la tabla) De 5 son 15.

Docente: Vale, ¿y de 6? Creo que lo tienes apuntado por ahí.

Raúl: (Cuenta imaginándose una fila más sobre el dibujo anterior de la tabla). 18... bueno creo que me he equivocado.

Docente: Cuéntalo, lo tienes aquí dibujado de antes (le señala el dibujo inicial que hizo sobre el enunciado).

Raúl cambia el rotulador por el lápiz y comienza a contar sobre el dibujo del enunciado, de nuevo por columnas.

Docente: Vale y el de 7. ¡Sin contar! ¿Cuánto crees que te va a salir? (silencio). Has puesto que para 4, son 10, para 5 son 15, para 6 dices que son 21 cajas...

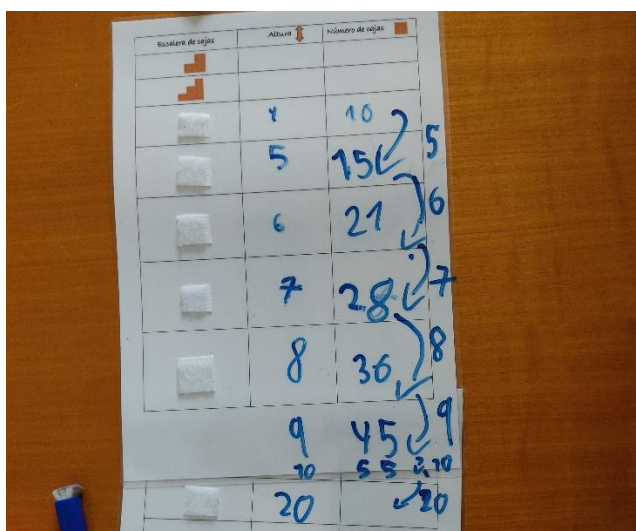
Raúl: (Piensa unos segundos). No, no sabría.

Otra función del organizador y pictogramas es como herramienta de análisis de la información. Al “cubrir” la columna de “cajones” para que visualicen lo que se añade en cada paso (*Pensamiento visual* –PV- y *Dificultades de atención centrada y sostenida* -DACS), se ayuda a Elio a identificar la variable de los pilares, reconociendo cada nueva escalera como la adición de una columna de cajones a la anterior, y comprendiendo cómo esta aumenta a medida que crece la altura de la escalera que construye la arqueóloga. En el caso de Raúl, la docente le sugiere buscar una estrategia más rápida que el conteo sobre los pictogramas del

organizador que hemos descrito previamente. El estudiante responde con "Saltar", haciendo una analogía con las columnas de escalones que la arqueóloga debe subir (*Pensamiento visual-PV*). Tras revisar los resultados anteriores usando la estrategia de "saltar", Raúl añade flechas al organizador para conectar verticalmente los registros de números de cajas, dejando de utilizar los pictogramas. Hasta ese momento, había estado calculando todo de memoria, lo que lo llevaba a olvidar los datos y a cometer errores de cálculo (*Dificultades de atención centrada y sostenida -DACS y Dificultades de memoria de trabajo -DMT*). En la Figura 53 observamos la relación recursiva que plantea pero que extrapola de manera errónea a términos no consecutivos (N=20).

Figura 53

Resolución Recursiva de Raúl Sobre el Organizador Gráfico



IV.1.2.5. Otros resultados

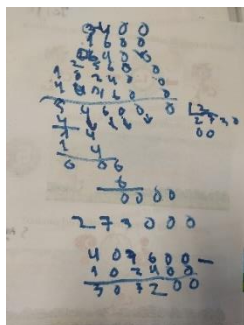
Para finalizar este epígrafe, detallamos algunos resultados del taller en términos de estrategias que surgieron sin emplear el material propuesto o en otros casos, abordando una función diferente a la de su diseño.

A partir de la sesión tres, Elio rechazó utilizar algunos materiales por “no necesitarlo” (*Literalidad y Rigidez de pensamiento -DLRP*). La problemática que surge es que, aunque sus ideas no lo alejan de la respuesta adecuada del problema, sí lo hacen su manera de representar o registrar la información

(Dificultades de organización y planificación -DOPL, Dificultades de atención centrada y sostenida -DACS). La Figura 54 muestra cómo el estudiante “organiza” las operaciones en su hoja de trabajo, mezclando sumandos y denotando una caligrafía muy poco legible y que incita al error.

Figura 54

Operaciones de Elio



Sin embargo, encontramos algunos ejemplos de resolución en las que manifiesta evidencias de abordar el problema generando representaciones tabulares en su hoja de trabajo. Por ejemplo, organizó las operaciones relacionadas con los personajes del problema de *Pokémon* (Anexo 6.10) en dos columnas (Figura 55) y ordenó en filas y columnas la relación entre el número de comederos y de cachorros en el problema de los perritos (Figura 56). Esta estrategia facilitó que descubriera un patrón en la paridad del número de caramelos de cada personaje, la cual explica a Noa:

Elio: Es que había un truco y es que en Squirtle siempre va a ser impar y en Charmander va a ser par. Yo he visto que en lado de Squirtle (Noa) ha puesto pares (mirando sobre la tabla de Noa), cuando no es así. Siempre hay uno de diferencia con cada uno, siempre. Mira, si Squirtle tiene 1, Charmander va a tener 2, si tiene Squirtle 3, Charmander va a tener 4. Y así sucesivamente.

Figura 55

Organización de Elio (Izquierda) de las Operaciones en dos Columnas Correspondientes a dos Materiales Frente al Organizador Tabular que se le Proporcionó Y No Utilizó (Derecha)



El caramellozarrar es un objeto que los pokemon pueden comer para aumentar un nivel.

Charmander y Squirtle encontraron una caja llenita de caramellozarras en el laboratorio del profesor Oak y deciden compartirlas.

Squirtle toma uno y Charmander, codicioso, toma dos.

A continuación, Squirtle toma tres y Charmander toma 4...

y así, sucesivamente, cada uno va tomando un caramellozarrar más de los que había tomado el otro.

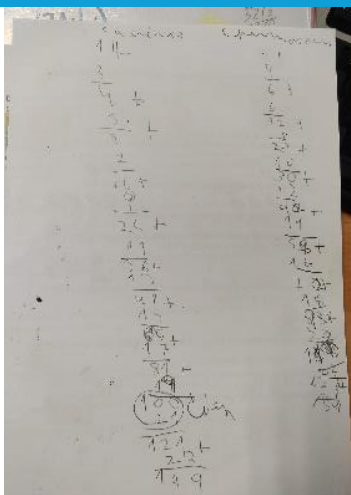
Charmander es el último en tomar los caramellozarras, cogiendo todos los que quedan.

Charmander tiene en total, 10 caramellozarras más que Squirtle

¿cuántos caramellozarras toma cada pokemon?

¿Cuántos caramellozarras había en la caja inicial?





Enunciado del problema

Figura 56

Organización de las Relaciones Entre Comederos y Perritos de Elio

Han llegado muchísimos cachorros a la protectora de animales. Para alimentarlos, los voluntarios han organizado los comederos para que quepan todos. A medida que van llegando los cachorros, colocan los comederos. ¿Cuántos comederos serán necesarios para 10 perritos? ¿Y para 26? ¿y 112? ¿y 29?



Han llegado muchísimos cachorros a la protectora de animales.

Para alimentarlos, los voluntarios han organizado los comederos para que quepan todos. A medida que van llegando los cachorros, colocan los comederos.

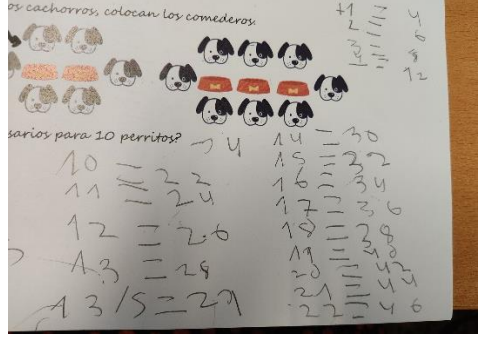


¿Cuántos comederos serán necesarios para 10 perritos?

¿Y para 26?

¿y 112?

¿y 29?



Enunciado del problema

Resolución de Elio

Durante las sesiones de evaluación, los estudiantes recurren espontáneamente a representar los datos de manera pictórica (Figura 57) y tabular (Figura 58), estrategia que acompaña el desarrollo del ensayo y error y organiza las operaciones (Dificultades de organización y planificación -DOPL).

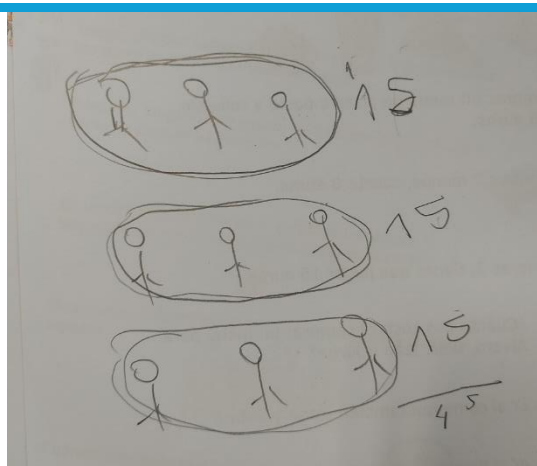
Figura 57

Representación Realizada Espontáneamente de los Personajes que Piden Menús

Antes de echar unos bolos, vamos a almorzar.

En el restaurante venden varios menús y nos dicen que hay ofertas. Si compras un menú de hamburguesa con patatas y refresco, vale 6 euros. Si compras 2 menús, cuesta 8 euros. Si compras 3, tienes que pagar 15 euros.

¿Cuánto nos costará comprar un menú para Omar, Raúl, Noa y Elio? ¿Y si comieran también Irene y Sofía? ¿Y si fuéramos también Nuria, Inma y Ángeles?

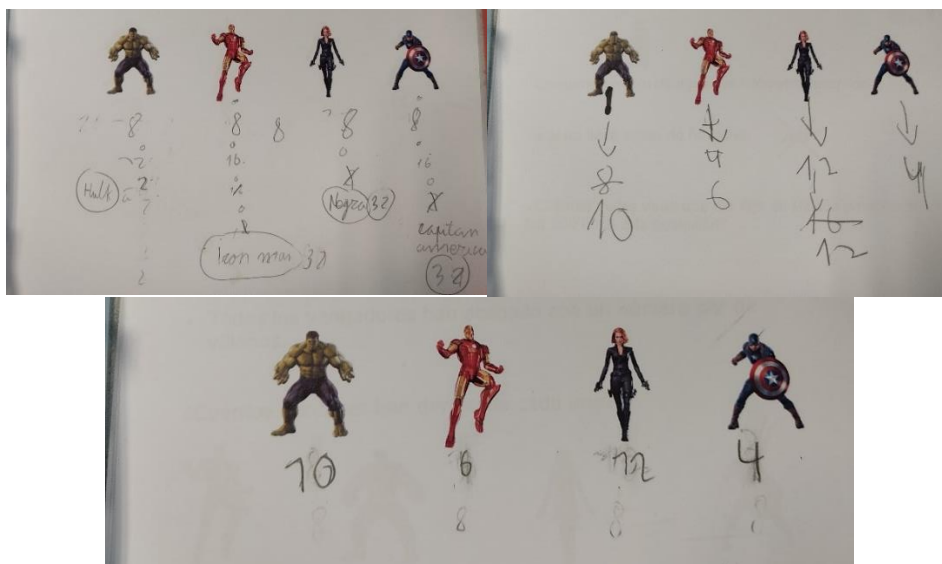


Enunciado del problema

Representación espontánea de Omar

Figura 58

Representación Tabular de Elio, Noa y Raúl Empleando los Pictogramas del Enunciado del Problema de los Vengadores



En otros casos, son los propios estudiantes los que generan un problema de generalización extendiendo la propuesta del enunciado del taller, como ocurrió en el problema de la arqueóloga (“No, no pasemos al siguiente (problema). ¿Y si fuera (un dinosaurio) de 30 (metros de altura)? Vamos a hacerlo mentalmente”) o en el problema de los menús (“¿Y si en vez de nosotros invitamos a toda la clase? ¿Cuánta gente hay en tu clase?”).

IV.1.2.6. Informe de los resultados del taller semestral

Atendiendo a los resultados mostrados en los epígrafes y sub-epígrafes anteriores, desarrollamos un informe de los resultados más destacados del taller semestral con los cuatro estudiantes TEA-1.

Cuando trabajamos con estudiantes con TEA-1, es crucial mantener un entorno organizado y estructurado, ya que un entorno impredecible o cambios inesperados pueden alterar su capacidad de concentración, su atención e incluso desarrollar un sentimiento de frustración. La estructuración de la sesión y del propio proceso de resolución de problemas apoyándonos en el medio y organización visual ha resultado ser particularmente beneficioso para los estudiantes. Por un lado, ha permitido ayudarles a ser conscientes de los objetivos de la sesión, de las actividades planteadas y de su proceso de resolución, lo que además ha potenciado la propia autorregulación de sus respuestas.

Incorporar los diferentes recursos a la resolución de problemas ha permitido a los estudiantes abordar el proceso de comprensión de cada problema y trabajar las distintas hipótesis que surgían a partir de esta, ayudándose de los diversos registros de comunicación propiciados por los recursos. Ampliar la gama de recursos disponibles para todos los estudiantes permite que cada uno seleccione el que mejor se ajuste a sus características y a la tarea matemática, en línea con los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA). Durante el taller, se incluyeron materiales con diferentes formatos, de modo que el estudiante podía acceder al registro verbal del enunciado, al pictórico del dibujo, al gráfico de los pictogramas y al numérico de los datos que iba registrando en la tabla. Utilizar recursos que se complementen entre sí no solo integra diversas formas de comunicación, sino que también puede fomentar que el pensamiento de los estudiantes evolucione desde lo concreto, apoyado en representaciones pictóricas, hasta un pensamiento más abstracto vinculado a las relaciones matemáticas que se abordan mediante representaciones esquemáticas y numéricas. El carácter visual de pictogramas y tablas y los diferentes materiales de construcción y manipulativos parece haber contribuido a cubrir ciertas

necesidades asociadas al TEA-1 y nos ha permitido observar la puesta en marcha de diversos heurísticos en la resolución.

Recogemos en la Tabla 22, una relación entre los heurísticos desarrollados durante el taller, relacionados con los materiales utilizados y las características del TEA que se han visto involucradas en su implementación.

Tabla 22

Relación Entre los Heurísticos, las Características del TEA-1 y el Uso de los Materiales en el Taller Semestral

Descriptor		Aplicación Del Heurístico Vinculado Al Material
FASE DE COMPRENSIÓN		
Heurístico <i>Representación</i>		
Pensamiento visual, Dificultades autorregulación, Habilidad percepción detalles		Dibujar esquemáticamente propicia ser consciente de la figura y los pasos de resolución realizados y restantes.
Pensamiento visual, Dificultades comprensión verbal, Literalidad y Rigidez pensamiento		Construir la figura puede complementar la comprensión del problema y ayudar a flexibilizar las ideas de los estudiantes.
Dificultades atención centrada y sostenida, Literalidad y Rigidez pensamiento, Dificultad de memoria de trabajo		El propio proceso de dibujo o construcción puede desviar la atención del estudiante de la resolución del problema y el objetivo del mismo.
Dificultades ver la globalidad de una figura, Literalidad y Rigidez pensamiento, Dificultades autorregulación, Inhibición afectada		Reproducir un modelo dado puede ocasionar dificultades por la tendencia a centrarse en los detalles, sin respetar la figura global, y dificultades para reconducir la representación incorrecta del modelo.
Heurístico <i>Organizar la información</i>		
Pensamiento visual, Dificultad de memoria de trabajo, Habilidad percepción detalles		Emplear el medio visual puede desarrollar diferentes estrategias en los estudiantes, basadas en el uso de diferentes colores, formas o espacios diferenciados en la hoja de trabajo.

Dificultades verbal, organización y Predominancia secuenciado	comprensión Dificultades planificación, aprendizaje	El organizador en formato tabla o esquema dotado con Velcro posibilita la representación ordenada de los datos del problema y permite registrar visualmente y organizar los datos.
Pensamiento Dificultades verbal	visual, comprensión	La representación tabular permite comprender e identificar las diferentes variables de los problemas, reflejándolas visualmente en columnas etiquetadas con rótulos y acompañarlas de pictogramas.
FASE DE PLANIFICACIÓN Y EJECUCIÓN		
Heurístico <i>Centrarse en una condición</i>		
Pensamiento Dificultades verbal, Dificultades centrada y sostenida	visual, comprensión atención	Los pictogramas pueden representar una de las variables que los estudiantes abordan de manera manipulativa, pudiendo centrarse en otros datos del problema.
Dificultad de trabajo, organización y planificación	memoria de Dificultades	El organizador ayuda a mantener un orden en el cálculo: la distribución en filas y columnas facilita fijar el valor que adopta cada variable, que se organizan por celdas y contribuyendo de manera visual a la descomposición numérica.
Dificultades centrada y sostenida	atención	El organizador subdividido en celdas o globos permite focalizar la atención en alguno de los datos tapando las celdas/globos que no interesan.
Heurístico <i>Ensayo y error</i>		
Dificultades verbal, Dificultades para predecir e inferir, Literalidad y Rigidez	comprensión para pensamiento,	Utilizar los pictogramas posibilita la visualización y manipulación de las variables sobre la mesa de trabajo o el organizador, atendiendo a las claves del enunciado
Pensamiento Dificultades Dificultades Dificultades atención centrada y sostenida	visual, autorregulación, organización y	La estrategia, desarrollada de manera visual sobre el organizador, propicia que sean conscientes de sus errores y puedan establecer nuevas hipótesis a partir de ellos.
Heurístico <i>Marcha atrás</i>		

Pensamiento visual, Dificultades autorregulación, Predominancia aprendizaje secuenciado	Los pictogramas pueden sustituir el registro numérico facilitando el cálculo de los datos resolviendo el enunciado de manera inversa.
Pensamiento visual, Predominancia aprendizaje secuenciado, Dificultades organización y planificación, Dificultades autorregulación, Dificultades para predecir e inferir	Las celdas y globos esquematizados del organizador gráfico posibilitan representar y diferenciar los pasos de la resolución y estadios del enunciado sobre el espacio de trabajo de manera visual.
<i>Heurístico Establecer generalizaciones</i>	
Dificultades atención centrada y sostenida, Habilidad percepción de detalles, Pensamiento visual	Las piezas posibilitan descomponer una figura y descubrir la relación entre las variables del problema.
Pensamiento visual, Predominancia aprendizaje secuenciado, Habilidad percepción de detalles	Las filas y columnas organizan la información en forma de secuencia, apoyados por los pictogramas.
Dificultades atención centrada y sostenida, Dificultades memoria de trabajo	Depender de una figura puede dificultar que los estudiantes desarrollen su proceso de generalizar, volcando la atención del objetivo del problema hacia los ejemplos concretos.
Pensamiento visual, Dificultades atención centrada y sostenida, Dificultades memoria de trabajo	La representación tabular ayuda mantener los datos ordenados y conectados de manera visual.
Literalidad y Rigidez de pensamiento, Inhibición afectada	Emplear el organizador solo como registro puede propiciar que el estudiante base su estrategia en una secuencia descontextualizada.
<i>Heurístico Registrar todo el proceso</i>	
Dificultades memoria de trabajo, Dificultades atención centrada y sostenida	Dibujar esquemáticamente propicia ser consciente de la figura y los pasos de resolución realizados y restantes.

Dificultades memoria de trabajo, Dificultades atención centrada y sostenida	El apoyo visual de los pictogramas y la estructura del organizador puede mejorar la atención sobre los pasos realizados y siguientes.
Dificultades memoria de trabajo, Dificultades atención centrada y sostenida, Dificultades organización y planificación, Predominancia del aprendizaje secuenciado, Dificultades para predecir e inferir	La organización esquemática o en celdas, filas y columnas de la tabla organizadora y permite anotar los resultados e información que se van descubriendo.
<i>Heurístico Expresar en otros términos</i>	
Pensamiento visual	El uso de los diferentes materiales incorpora registros distintos a la resolución.
FASE DE REVISIÓN Y COMPROBACIÓN	
<i>Heurístico Generalizar a otros términos</i>	
Habilidad percepción de detalles, Dificultades para predecir e inferir, Literalidad y Rigidez de pensamiento, Dificultades autorregulación	Mantener los datos y los resultados sobre el organizador facilita incluir otros términos en la secuencia, lo que proporciona la oportunidad de extender el problema.
<i>Heurístico Comprobar la consistencia del proceso /solución</i>	
Dificultades autorregulación, Dificultades memoria de trabajo, Predominancia aprendizaje secuenciado	Registrar sobre el organizador facilita comprobar la resolución. La representación tabular plasma las hipótesis del alumnado, por lo que pueden comprobar sus pasos previos, ser conscientes de sus errores y puedan establecer nuevas hipótesis a partir de ellos.

Nota: Desarrollado a partir de Chico-Gómez et al. (2022c;2022d; 2022f)

Los resultados del taller han señalado además la importancia de la planificación del trabajo con este alumnado. Esta debe contemplar la posibilidad de simplificar o ampliar la tarea según sea necesario. Factores como la capacidad de mantener la atención, la memoria de trabajo o la habilidad de visualización del estudiante pueden influir en el proceso de resolución, lo que podría hacer que requiera más

tiempo, o por el contrario resolverla antes de lo previsto, haciendo que no se cumplan las expectativas puestas en el diseño de la tarea.

Tomando esto en consideración, un elemento de la planificación ha sido la incorporación de los materiales en diferentes momentos de la resolución, para dar respuesta a las necesidades de comprensión o de las funciones ejecutivas. Señalamos además la incorporación del planificador de la sesión como un elemento favorable en la planificación. Éste ha posibilitado marcar los objetivos de la sesión, dejando, a su vez, la puerta abierta a las investigadoras-docentes para transformar los problemas abordados según las necesidades de los estudiantes, pudiendo extender o simplificar un problema, modificar el tiempo dedicado a cada tarea o regular el tipo de juego de mesa que se incluía en la sesión. Se eligieron los juegos por su capacidad para entrenar el respeto a los tiempos de espera, los turnos y las normas, en partidas de aproximadamente diez minutos. El nivel lúdico de la tarea se veía además impulsado por el uso de los materiales de construcción, el dibujo o los esquemas y organizadores tabulares, que contribuían a plantear el problema como un reto para el estudiante. Todo ello contribuyó no solo a desarrollar elementos del aprendizaje matemático y de la resolución de problemas, sino que también se convirtieron en una oportunidad para conocer a los participantes, sus intereses, habilidades y necesidades. Además, aunque no era objetivo directo de la investigación, favoreció que los participantes se conocieran entre sí y establecieran lazos afectivos, lo que contribuyó a crear un clima de cariño y respeto que presumiblemente favoreció la implicación de los participantes en los talleres.

IV.2. La resolución de un problema de generalización con estudiantes

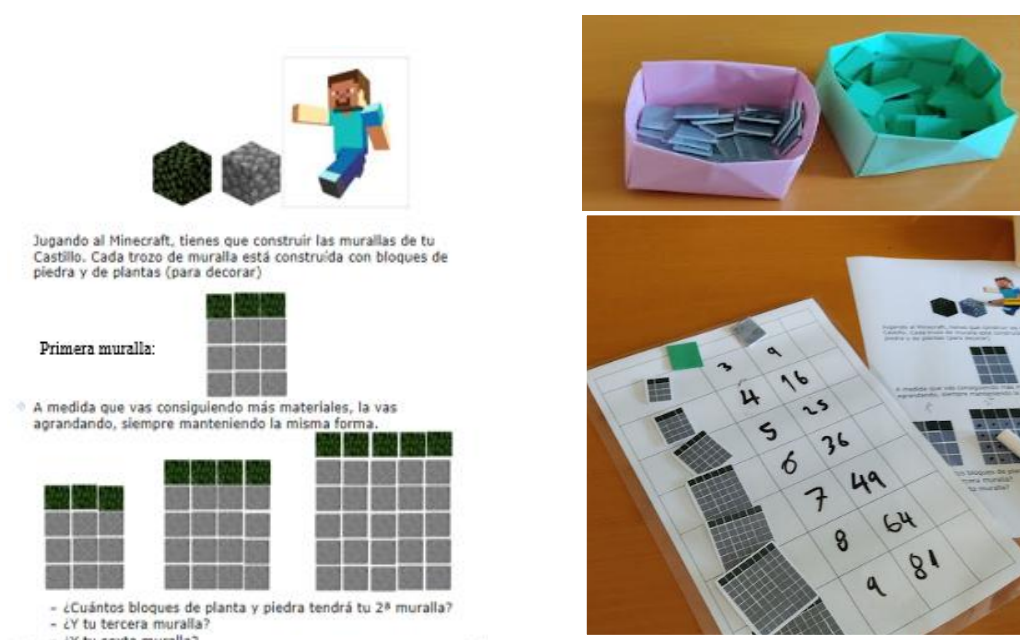
TEA-1

Esta segunda sección se centra en el proceso de resolución del problema del *Minecraft* (Figura 59), abordado en la sesión 8 del taller semestral (Tabla Anexo 6.10). Los primeros epígrafes se centran en describir cómo cada uno de los estudiantes abordaron la resolución del problema. A partir de estos, estructuramos esta sección atendiendo a qué papel tuvieron los distintos materiales TEACCH en

el proceso de generalización de los estudiantes, descrito en términos de los niveles de Blanton et al. (2015), así como referenciar la influencia de ciertas características asociadas al TEA-1. Un epígrafe final tratará de aunar los principales resultados de la resolución del problema del *Minecraft*.

Figura 59

Enunciado del Problema del Minecraft y Tipos de Representación Usados (Material TEACCH). Las Plantas, en Color Verde, Constituyen la Fila Superior de la Figura, y las Piedras se Corresponden con el Gris.



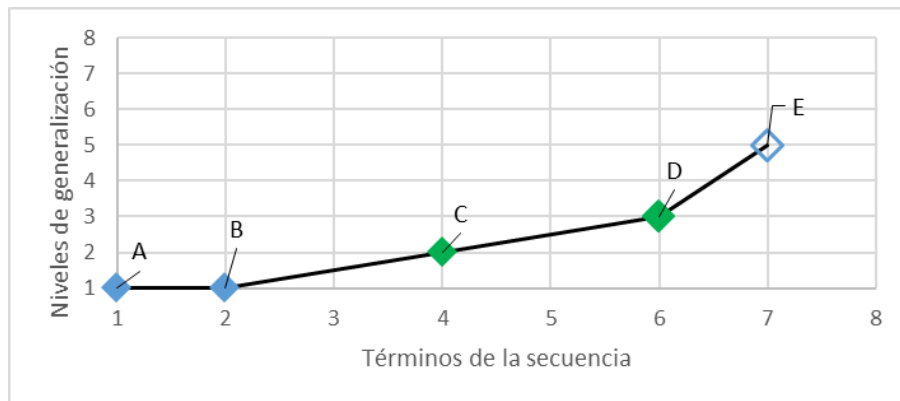
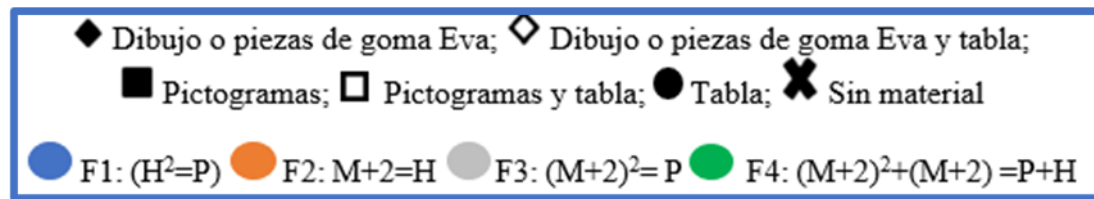
Nota: Recuperado de Chico-Gómez, Polo-Blanco et al. (En prensa)

IV.2.1. La resolución de Raúl, Omar, Noa y Elio: El problema del Minecraft

Demostrando mucha autonomía, Raúl aplica una estrategia de conteo en los dos primeros términos (pasos A y B de la Figura 60; “ha sido contarlos directamente”) apoyándose en las ilustraciones del enunciado para trabajar en la función F1. Cuando la docente le pregunta cómo está llevando a cabo la resolución, Raúl explica cómo va modificándose la estructura haciendo referencia a la función F4 (pasos C y D: “La 4ª tendría otro bloque más aquí (hierba) y otro bloque más de alto y de largo (piedras)”). Tras dibujar varias murallas, recurre al organizador tabular para anotar los datos que ha observado mediante su estrategia de dibujo, hasta resolver la séptima muralla, que resuelve sin apoyo pictórico (paso E).

Figura 60

Resolución de Raúl



PASO	A	B	C	D	E
Símbolo	◆	◆	◆	◆	◇
Función	F1	F1	F4	F4	F1

Nota: Recuperado de Chico-Gómez, Polo-Blanco et al. (en prensa)

Omar recurre al uso conjunto del dibujo y el organizador. La resolución de los tres primeros términos viene marcada por una generalización que oscila entre varias funciones. Aunque primero se centra en los bloques de hierba (F2, pasos A y B de la Figura 61), integra en su resolución los bloques de piedra (F3, paso C) y la muralla (F4, paso D).

Se le propone entonces emplear las piezas de goma Eva, que usa junto el organizador. Construye cada muralla en forma de “C”, empezando por la fila de piezas verdes, a la que añade la primera columna de grises en el lateral izquierdo y luego completa fila a fila, comenzando por la base de la muralla.

Cuando aborda la cuarta muralla manifiesta comprender la recursividad asociada a los bloques de hierba en cada una (F2, paso E), sin necesidad de observar el dibujo o su construcción (pasos G, H e I), pero intenta resolver del mismo modo los bloques de piedra de cada figura, lo que le lleva al error.

Omar: ¡Sí, claro! Serían 7, 8 y 9 (completa la columna de verdes del organizador)

Docente: ¡Perfecto ¿Y estas? (las grises)

Omar: A ver...

Docente: (Después de un minuto) ¿Cómo pasas tú del 3 al 9 (Sobre la tabla con el registro de Omar, en la que están colocados los pictogramas)?

Omar: (Contando con los dedos) 6

Docente: Le añades 6 ¿no? Y la siguiente, ¿qué has hecho?

Omar: Entonces aquí, si a 7 le añado 6.

Docente: Pero aquí (sobre el organizador), ¿para pasar del 6 al 36 le añado 6? ¿Cómo has pasado de uno a otro aquí haciéndolo (Sobre la construcción)?

Omar: Pues multiplicando

Docente: ¿El qué?

Omar: 6x6

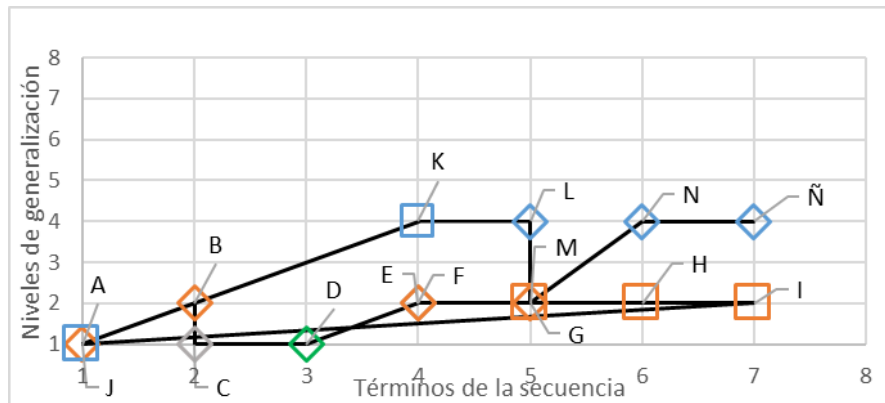
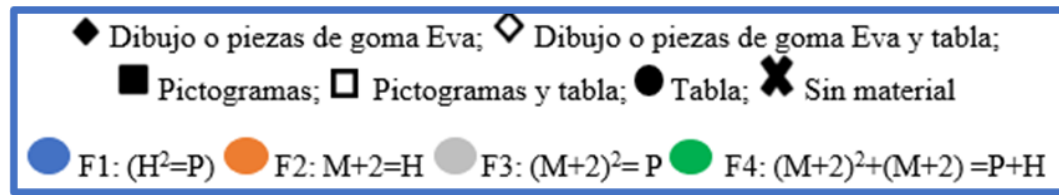
Docente: ¿Y por qué era 6x6?

Omar: Porque 6x6 te da 36

Como se observa en el fragmento anterior, con la guía de la docente, Omar retrocede a los términos 1 y 4, empleando los pictogramas y el organizador, momento en el que observa la muralla en términos de sus bloques de plantas y piedras (F1, pasos J y K). A partir de este punto, continúa construyendo las siguientes murallas solamente hasta tener claro cuántas filas de piedras tendrían ("Aquí hay 8 (de ancho), 8 (de alto) y 8 (de verdes)"), anotando entonces el resultado de la multiplicación correspondiente en su organizador (pasos L, M, N, Ñ).

Figura 61

Resolución de Omar



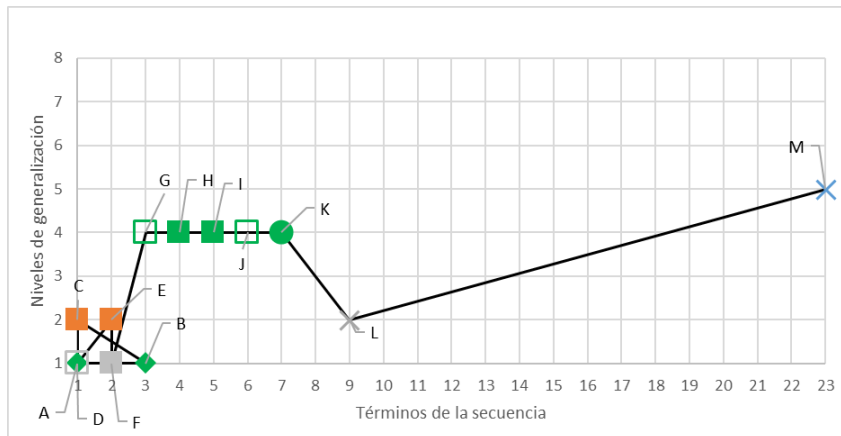
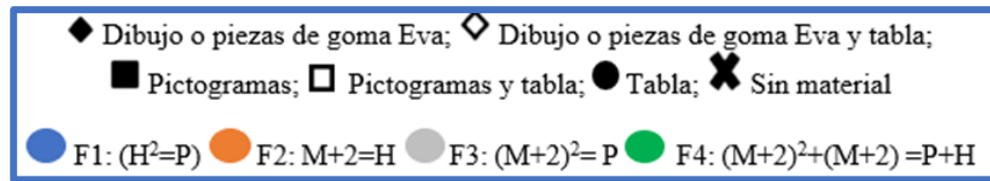
PASO	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ
Símbolo	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇
Función	F2	F2	F3	F4	F3	F2	F2	F2	F2	F1	F1	F1	F2	F1	F1

Nota: Recuperado de Chico-Gómez, Polo-Blanco et al. (En prensa)

Noa considera los bloques de hierba y piedras como un conjunto sumándolos (función F4, pasos A y B de la Figura 62), y aunque descubre que las filas de hierba van aumentando de uno en uno, considera esa suma de manera lineal obviando la estructura cuadrada de la muralla. Incluso intenta extender su estrategia hasta el término 6, con el objetivo de contestar rápidamente a las preguntas del problema. Al darse cuenta, ayudado por la docente, de que su muralla no tiene la misma forma que el enunciado, intenta corregir su error añadiendo una fila para respetar la forma cuadrada (Figura 63), pero la rigidez mental parece que impide la tarea de encontrar una estrategia que le permita hallar la respuesta correcta para la sexta muralla.

Figura 62

Resolución de Noa

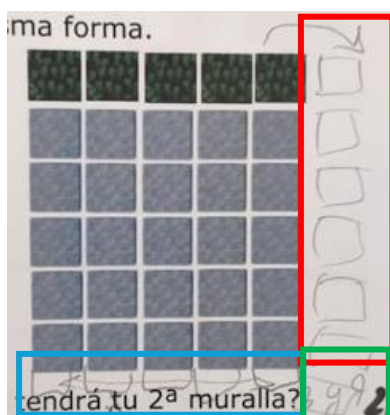


PASO	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Símbolo	◆	◆	■	□	■	■	□	■	■	□	●	✕	✕
Función	F4	F4	F2	F3	F2	F3	F4	F4	F4	F4	F4	F3	F1

Nota: Recuperado de Chico-Gómez, Polo-Blanco et al. (En prensa)

Figura 63

Estrategia de Noa. Dibuja la Columna de Cuadrados Verticales (Dibujo Enmarcado en el Rectángulo Rojo), Dejando un Cuadrado sin Fila (Dibujo Enmarcado en el Rectángulo Verde). Con la Ayuda de la Docente, Añade los Cuadrados Para Completar la Fila (Dibujo Enmarcado en el Rectángulo Azul)



La docente introduce el organizador, compaginando su uso con los pictogramas. Noa retoma el término 1, esta vez anotando en el organizador los datos que va

descubriendo mediante los pictogramas. Integra una visión de las piezas de hierba (pasos C y E), que va sumando, con el conteo de piezas de piedra (pasos D y F).

A partir del tercer término, Noa utiliza pictogramas (pasos H, I) y los compagina con el organizador (pasos G, J). La docente sugirió modificar la columna de los pictogramas en la tabla, sustituyendo las imágenes velcradas por el término, de modo que Noa empleó su tabla sin apoyo pictórico (paso K) relacionando de manera funcional los bloques de piedra y hierba con cada muralla (F4).

Elio se apoya en los pictogramas del enunciado para describir los bloques de hierba (pasos A y B de la Figura 64) y de piedra (C y D) de las primeras murallas. En el término 3 alcanza a descubrir el patrón recursivo asociado a los bloques de hierba (paso E), pero sigue contando sobre los pictogramas las piedras (paso F). Diseña un esquema para organizar los cálculos en su folio. Tras anotar los resultados que ya había descubierto, se centra en los bloques de hierba de la tercera muralla (paso G: *“Tiene truco: que siempre se va aumentando cada muralla de cada color. Si la primera muralla tiene 3 de plantas, la segunda va a tener 4 y la quinta (se refiere a la tercera) va a tener 5”*). Por un error, seguramente derivado de la cantidad de cifras que está manejando para referirse a tres variables diferentes, retrocede involuntariamente a la segunda y tercera muralla, explicando la relación entre los bloques de hierba y piedra (pasos H e I):

Docente: ¿Y de piedras? (la docente le pregunta por la tercera muralla, la que estaban discutiendo -paso G).

Elio: Pues de plantas va a tener 4 y de piedras 16

Docente: ¿Y la tercera?

Elio: Pues tiene 5. Es muy fácil. 25 de piedras (lo escribe debajo del dibujo de la 3ª muralla)

Intenta resolver la sexta muralla para dar respuesta a una de las cuestiones del enunciado, pero olvida su propia estrategia (Dificultades en la Memoria de Trabajo). Continúa empleando su esquema, rechazando el organizador que le ofrece la docente:

Elio: Y la sexta...Pues es muy fácil. Bueno, no es tan fácil, me he dado cuenta.

(Se queda pensando) Las plantas serían... La sexta sería...

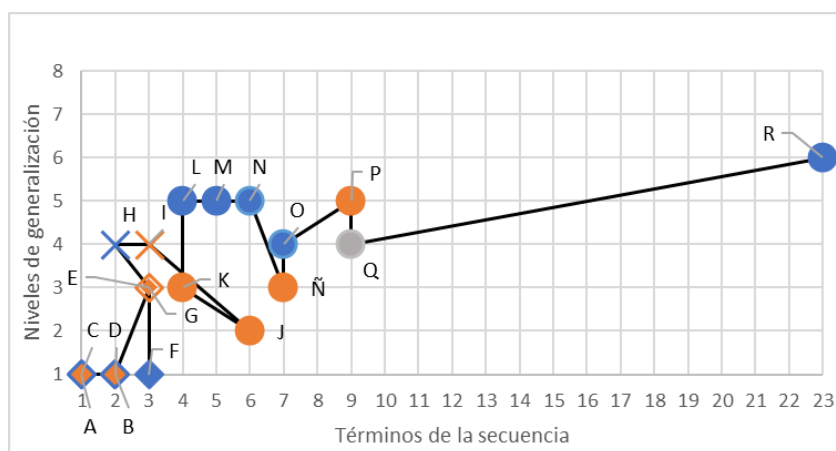
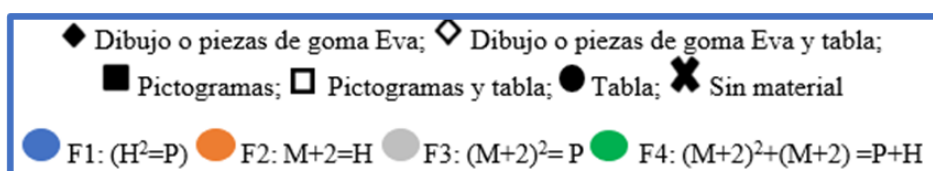
Docente: Aquí tienes el material, por si lo quieres

Elio: No necesito el material, lo voy a ir haciendo calculando

Tras revisar los datos que había registrado, aborda la cuarta, quinta y sexta muralla atendiendo a la relación entre piedras y bloques de hierba (pasos L, M, N y O) basada en el lado del cuadrado (“Ahora va a tener 6x6 [bloques de piedra]. Siempre va a tener así el lado.”) y la relación recursiva de F2 (paso Ñ).

Figura 64

Resolución de Elio



PASO	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R
Símbolo	◆	◆	◇	◇	◆	◆	◇	✕	✕	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
Función	F2	F2	F1	F1	F2	F1	F2	F1	F2	F2	F2	F1	F1	F1	F2	F1	F2	F3	F1

Nota: Recuperado de Chico-Gómez, Polo-Blanco et al. (En prensa)

Tras responder a las cuestiones del enunciado (segunda, cuarta y sexta muralla),

Noa se reta a sí mismo y a Elio a resolver la séptima muralla:

Noa: ¿Y si hacemos una séptima? [...] Sería 9 (verdes) 9x9, 81. Y serían 90. [...].

Yo me he propuesto hacer la séptima (dirigiéndose espontáneamente a Elio)

Elio: ¿Por qué?

Noa: Porque es un reto para mí. La séptima me ha dado 90 bloques

Elio: Voy a hacerlo yo. 9 de plantas porque siempre es así...a ver... (Se queda mirando los dibujos del enunciado)

Docente: Tienes la secuencia detrás, acuérdate

Elio: Ah sí (le da a vuelta a la hoja) 9×9 ...no es así, es 81. La séptima es 81. 9×9 y las plantas siempre va a ser uno que suma.

Tras este desafío, surgen de manera espontánea entre ellos otros retos: las murallas con 100, 121 y 500 piedras.

Noa manifiesta dificultades para recordar su propia estrategia y no consigue resolver el reto de 100, mientras que Elio estaba distraído con su esquema. En los siguientes retos, ambos estudiantes abordaron la resolución planteando la inversa de las funciones. En el reto de 121, invierten F3 (paso Q: “podría... 11×11 son 121) y F2 (paso P: “Porque si la séptima muralla son 9, la octava muralla tiene 10 y la novena tiene 11”) en el caso de Elio, y F3 en el caso de Noa (paso L: Es la novena muralla”). El último reto es afrontado por los dos estudiantes desde la relación entre piedras y hierba (F1), pero tras varios intentos (Noa, 11, 20, 40, 30, 21, 22, 23; Elio 12, 15, 35, 20, 25), cesan en su intento, algo frustrados.

IV.2.2. Los materiales en la resolución

Al tener la libertad de elegir el material, los niños prefirieron usar piezas de goma Eva y dibujar sobre los pictogramas del enunciado al inicio de la resolución, lo que los llevó a desarrollar estrategias basadas en el conteo. Dependiendo de las necesidades y las estrategias que fueron adoptando, se integraron las piezas de construcción, pictogramas con velcro y organizadores en el proceso de resolución de cada estudiante.

IV.2.2.1. El material de construcción y el organizador tabular

El empleo conjunto de las piezas de goma Eva y el organizador tabular guio la estrategia de resolución de Omar desde su inicio. Se observa que cada material adquiere una función.

Construir las murallas con las piezas cuadradas verdes y grises posibilitó que Omar contara y distinguiera los distintos términos de la secuencia, así como respetara la estructura de la muralla (*Dificultades para ver la globalidad de una figura* -DVGF). La forma de construir, anteriormente descrita como “C” (ver epígrafe V.2.1) guía a Omar en el reconocimiento de la relación entre el número de piezas verdes y grises de cada muralla y hace que, tras varias murallas, no necesite construirlas completas, sino conocer la altura de la muralla para saber cuántas filas tiene. El estudiante desarrolla un razonamiento multiplicativo, descrito a continuación en un extracto de diálogo, lo que resulta significativo dadas las dificultades que Omar mostraba en este contenido. A pesar de haber razonado esta relación, siguió necesitando construir algunas filas de la muralla para observar la relación (Figura 65), quizá influido por dificultades asociadas a la memoria de trabajo y de predicción (*Dificultades de memoria de trabajo* -DMT-, *Dificultades para predecir e inferir* -DPRI).

Docente: ¿Cómo has pasado de una muralla a otra (señala sobre la construcción de Omar)?

Omar: Pues multiplicando.

Docente: ¿El qué?

Omar: 6x6. Porque aquí no paraba de haber 6 y 6 y 6...

Figura 65

Construcción de Omar en Forma de “C”: Fila Superior de Piezas Verdes, Columna Izquierda de Grises y Base Inferior de Grises.



Considerando las dificultades que había evidenciado Omar en sesiones anteriores del taller cuando efectuaba tareas de conteo, sobre todo respecto al tiempo que requería para ello, se le ofreció utilizar el organizador tabular de manera complementaria. Inicialmente este material adoptó una función de mero registro, pero la guía de la docente propició que Omar observara los datos anotados en su tabla (*Habilidad de percepción de detalles –HPD-, Pensamiento visual -PV*) y descubriera el patrón asociado a las piezas verdes (F2):

P: A ver, vamos a mirar. De los verdes, ¿no hay algo que tú ya puedas saber?
(sobre el organizador)

A: ¡Sí, claro! Serían 7,8 y 9 (completa la columna de verdes del organizador sin necesitar construir dichos términos)

No obstante, Omar parte de esta hipótesis para intentar completar la columna de piezas grises de la tabla, ante lo que la docente insiste en comprobar esta estrategia con un término menor ($M=1$). Se observan posibles indicios de literalidad en este paso y de un olvido de su propia estrategia de construcción (*Literalidad y Rigidez de pensamiento –DLRP-, Dificultades de memoria de trabajo -DMT*), cuando Omar interpreta que las piezas que se añaden en cada término son siempre las mismas:

Docente: ¿Cómo pasas del 3 al 9 (señalando los bloques de hierba de la primera muralla)?

Omar: (*Contando con los dedos*) 6

Docente: Le añades 6 ¿no? (intenta cerciorarse de la estrategia de conteo de Omar). ¿Y qué has hecho en la siguiente?

Omar: Entonces aquí, a 7 (bloques de hierba de la muralla 5 que había completado en el organizador previamente) le añado 6.

IV.2.2.2. Los pictogramas y el organizador tabular

En otros casos, como el de Noa, los pictogramas cobran protagonismo en la resolución, dado que dibujar las nuevas murallas a partir de la representación del enunciado ocasionó que el estudiante no respetara la estructura dada (*Dificultades para ver la globalidad de una figura -DVGF*) (Figura 63 del epígrafe IV.2.1). Esta primera hipótesis influye en el proceso de resolución del estudiante, que muestra dificultades para desprenderse de ella (*Literalidad y Rigidez de pensamiento – DLRP-, Inhibición afectada -I*):

Noa: Tendríamos que añadirle una línea (columna) un poco más grande (se refiere a cómo ir de $M=3$ a $M=5$). De 7. Así que a 25 le sumo 7 y hacemos la cuarta (se refiere a $M=4$). Serían 32. a 32 le sumo 8 y serían 40 (se refiere a $M=5$). [...] Y la última, $40+9$ (se refiere a $M=6$). Pues 49. Y ya está.

Docente: Pero, ¿qué pasa aquí? (en la fila 7 se queda el dibujo del cuadradito solo, sin fila).

Noa: Que... le tenemos que meter uno más.

Docente: ¿Y cómo sería?

Noa: (Dibuja 5 más para completar la fila que quedaba suelta con el cuadrado solitario) Vale, pues entonces sería 32 no, sino 37. Y aquí en vez de 40, serían 46.

Introducir el organizador tabular y los pictogramas velcrados pareció impulsar que Noa mejorara en su resolución. Retrocedió al primer término de la secuencia para comprobar los datos contando sobre el pictograma de la primera muralla y anotando los resultados sobre su tabla. A pesar de que la estrategia de generalización de Noa incrementó su complejidad, llegando a establecer una relación funcional entre el lado del cuadrado y el número de piedras de la muralla (F1), encontramos indicios de que basaba esta generalización en el conteo sobre el pictograma (*Dificultades para predecir e inferir -DPRI*):

Noa: En la cuarta, siguiendo lo que hay aquí serían 6, que lo multiplicamos por 6 veces (apoyándose en el pictograma para explicarse) ... Sí... (cuenta

solo la primera columna del pictograma de la tercera muralla) 6x6...
36. y se quedarían 42 (en total, haciendo referencia a F4 en este punto).

Docente: Entonces, ¿has encontrado una forma para pasar de las verdes a las grises? ¿Cómo has pasado del 5 al 25?

Noa: 5x5.

Docente: ¿y del 4 al 16?

Noa: 4x4.

Modificar la función de la tabla organizadora, sustituyendo los pictogramas por el número de la muralla que representaban (Figura 66) pareció impulsar que la estrategia del estudiante se centrara en las relaciones numéricas expresadas en su organizador, que provocó un cambio de perspectiva en el estudiante hacia las relaciones entre el número de bloques de piedra, hierba y el total de la muralla (F3).

Figura 66

Organizador Tabular de Noa, en el que los Términos de la Secuencia Sustituyeron a los Pictogramas en la Primera Columna de la Tabla

1ª	3	4	12
2ª	4	16	20
3ª	5	25	30
4ª	6	36	42
5ª	7	49	
6ª	8	64	72
7ª	9	81	90

IV.2.2.3. El organizador

Tanto Elio como Raúl recurrieron al pictograma del enunciado como motor de sus estrategias de resolución, que luego sustituyeron por una representación más esquemática mediante el organizador gráfico.

La tendencia al trabajo individual y autónomo de Raúl dificultó la tarea de toma de datos, dado que su conversación era breve y se reducía a responder de manera escueta y no extenderse en la explicación de sus estrategias (I). Aborda los

primeros términos apoyándose sobre el dibujo y estableciendo relaciones entre el número de bloques de hierba y de piedra (F1: “ha sido contar directamente las plantas y las piedras que tienen debajo”), pero ciñó su resolución a dibujar y responder las murallas que se cuestionan en el enunciado, lo que parecen indicios de literalidad en la tarea (*Literalidad y Rigidez de pensamiento* -DLRP). Encontramos evidencias de estrategias de conteo, que compagina con estrategias recursivas a partir del término cuatro.

Docente: ¿Cómo lo estás haciendo?

Raúl: El primero lo pone aquí y el segundo también (en los pictogramas del enunciado), ha sido contarlos directamente. Y la 6ta muralla tiene que tener arriba 8 bloques de plantas.

Docente: ¿Por qué sabes que tiene 8?

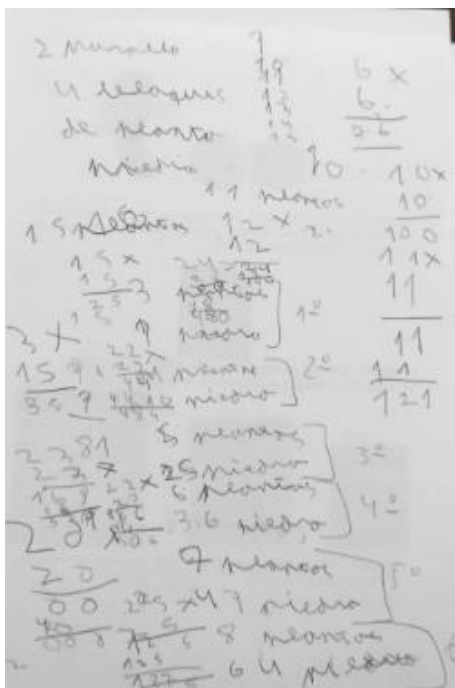
Raúl: Porque lo he contado. La cuarta tendría otro bloque más aquí (de hierba) y otro bloque más de alto y de largo (se refiere a las columnas que añadiría de piedra. Cada una tiene un bloque más de alto y de largo).

Cuando se le cuestionan otros términos no presentes en el enunciado, la docente le propone utilizar el organizador gráfico. Raúl anotó directamente todos los datos de murallas anteriores hasta llegar a la séptima, evidenciando una estrategia de generalización basada en la relación entre el número de hierbas y el número de piedras (F1).

Elio, por su parte, empleó el dibujo sobre la primera y segunda muralla. A partir de la tercera, abordó la resolución del problema creando su propio esquema en su hoja de trabajo, anotando los datos respecto a los bloques de hierba y piedra que observaba de cada muralla (Figura 67), estableciendo diferentes hipótesis sobre la relación entre ambas variables (F1 y F2).

Figura 67

Esquema de Elio



Aunque no reconoce un error de conteo (*Dificultades para la autorregulación -DAR*) continúa estableciendo relaciones entre el número de muralla y los bloques de hierba que tienen (F2: “Tiene que ser una línea de plantas. Vamos añadiendo 1 a cada planta”) y de estos con los bloques de piedra (F1), apoyándose sobre los pictogramas (“Pues muy fácil. La tercera va a tener 5 de piedra [...] Porque tiene 5 de plantas, aquí lo pone (señala el dibujo de las 3ª muralla)”) y los datos recogidos en su esquema. Hasta en dos ocasiones, encontramos indicios de que olvida su propia estrategia (*Dificultades de memoria de trabajo -DMT*), uno de ellos descrito en el siguiente fragmento, que soluciona retomando las ideas que había registrado en su esquema y la observación de los pictogramas del enunciado, ya que continúa rechazando el uso del material.

Elio: *La sexta sería... No necesito el material, lo voy a ir haciendo calculando* (le da la vuelta al folio del enunciado donde antes había calculado la 2ª muralla). *La tercera tendría tres plantas. Y piedras tiene...Tengo que mirarlo* (lo mira en el enunciado) *nueve*.

Noa y Elio continúan la resolución del problema abordando nuevas cuestiones de manera espontánea: averiguar cuál sería la muralla con 100 piedras, 121 piedras y 500 piedras.

Entre las estrategias que desarrollan, señalamos un intento de Noa de continuar con la relación multiplicativa previamente descubierta, pero que aplica incorrectamente a la variable piedras (“Pues 100 dos veces”) y la aplicación de la inversa de la función F4 (Elio: “Sería la muralla 11 [...] 11x11 son 121...”) y de F1 (Noa: “pero es que tengo que ver cuántos serían (cuántos verdes serían)”).

Se observan indicios de que el proceso de generalización parece verse de nuevo influido por dificultades para recordar estrategias previas (*Dificultades de memoria de trabajo* -DMT), que afectan a Noa en el reto de la muralla de 121 piedras (“Serían... si son 121 serían 21 de plantas y 100 de piedras.”) y de 500 piedras. En este caso, recurrir al organizador y el esquema apoyó las estrategias de ambos estudiantes, utilizando los ejemplos de murallas anteriores para cubrir las necesidades de la memoria de trabajo y para fijar el dato 500 como la variable bloques de piedras, mejorando la comprensión y la capacidad de inferir ideas:

Docente: Por ejemplo, ¿el 36 de dónde sale?

Noa: De 6x6.

Docente: Este de aquí que no está escrito, ¿cuál sería? (*Iván se saltó el 5º término en la tabla, dejando una fila libre*).

Noa: 7x7, que son (tras algunos errores de la tabla de multiplicar) 49.

Docente: ¿Y este 64?

Noa: De 8x8.

Docente: Entonces, ¿el 500 de dónde saldrá?

Noa: ¡¡De la tabla del 10!!

A pesar de tener clara la estrategia y ser capaces de aplicar el ensayo y error para tantear las posibles murallas con 500 piedras los numerosos fallos de cálculo (*Dificultades de atención centrada y sostenida* -DACS, *Dificultades para la autorregulación* -DAR) e influencia de las dificultades de memoria de trabajo (“¡Entonces sería 100x5! Y así da 500”) hacen que ambos niños acaban rindiéndose (Elio: “Me rindo. Yo he descubierto el resultado principal”).

IV.2.3. Los niveles de generalización

Los resultados del análisis del proceso de resolución muestran indicios de diferentes niveles de generalización.

Encontramos evidencias del primer nivel de generalización cuando los estudiantes no establecen relaciones entre el número de bloques de hierba, piedra ni el número de muralla, siguiendo simplemente la secuencia. Los cuatro estudiantes mostraron indicios de este nivel al abordar los términos 1, 2 y 3, coincidiendo con:

- El uso del dibujo sobre los pictogramas del enunciado (Elio, Raúl y Noa).

Elio: La tercera tendría 5 plantas. Y piedras tiene...Tengo que mirarlo
(lo mira en el enunciado) 25.

Docente: ¿9 por qué?

Elio: Porque aquí lo pone (en el dibujo).

- El uso de los pictogramas velcrados y el organizador para resolver el número de bloques de piedra de cada muralla ($F3: (M+2)^2=P$). Por ejemplo, aunque Noa, registrando datos en su organizador, anota 3, 9 y 12 en la fila correspondiente a la primera muralla, cuando va a registrar los datos de la segunda solo anota 4 y 25:

Docente: (Tras esperar unos segundos) Estamos en la segunda que es esta (señala el dibujo del enunciado).

Noa: Ah vale, que estamos en esta... pues serían (cuenta las piedras sobre el dibujo. Tras algunos errores de cálculo escribe 4, 16 y 25).

- El uso complementario del dibujo y el organizador, observable en la resolución de Omar.

Encontramos además indicios de que la aproximación inicial a la variable piedras (F3) es siempre desde el conteo de los bloques (nivel preestructural 1.c), quizá por no ser una regularidad que los estudiantes aprecien a simple vista.

Los niveles recursivos se evidencian principalmente cuando los estudiantes trabajan sobre la relación $F2(M+2=H)$, posiblemente por el carácter recursivo de la propia función. Encontramos indicios del nivel 2 (recursivo particular 2.b) en la

resolución de Noa y Omar, que completan la columna de la variable hierba de sus respectivos organizadores sumando uno a los bloques de hierba de cada término. En el caso de Raúl, cuando la docente le pregunta cómo está llevando a cabo la resolución, evidencia un nivel recursivo particular al hacer referencia a las dos variables de $F1(H^2 = P)$ para explicar cómo va modificándose la estructura de la muralla en el término cuatro de la secuencia (“La 4ª tendría otro bloque más aquí (hierba) y otro bloque más de alto y de largo (piedras)”).

El nivel 3 de generalización se observa a partir del término 3, cuando los estudiantes no recurren a ejemplos de murallas concretos para argumentar (3.a) respecto a la función $F2(M+2=H)$ (Raúl: “Tiene que ser una línea de plantas. Vamos añadiendo 1 a cada planta; Elio: “las plantas siempre van a ser uno que suma”) o $F4((M+2)+(M+2)^2=H+P)$ (Raúl: “Cada una tiene un bloque más de alto y de largo”) ya que la propia descripción del patrón refleja una regla general referida.

Los niveles funcionales, del 4 en adelante, se evidencian respecto a $F1$ en tres de los participantes. Encontramos indicios del nivel 4 en la resolución de Elio cuando, tras introducir el esquema en su resolución trabajando sobre $F2$, retrocede a los términos 2 y 3 desde la perspectiva de $F1$ (ver Figura 64 del epígrafe anterior); y en la resolución de Omar (Figura 61 del epígrafe anterior) cuando integra la goma Eva y el organizador y aunque necesita construir algunas filas para ver la longitud del lado, es capaz de vincular las variables hierba y piedra (nivel funcional, 4.a: “Son $9 \times 9 = 81$ ”). En la resolución de Raúl, el nivel funcional que observamos es el funcional general primitivo, en el término 7, cuando el estudiante recurre al organizador para registrar los datos.

A diferencia que sus compañeros, Noa evidenció el nivel funcional particular en $F4$, al basar su argumento en ejemplos anteriores (4.b: “En la tercera serían 5 y 25, que serían 30”) o no mencionar las variables:

Noa: *En la cuarta, siguiendo lo que hay aquí serían 6 (cuenta solo la columna del pictograma de la tercera muralla), que lo multiplicamos por 6 veces y se quedarían 42 en total.*

Además de en el caso de Raúl mencionado anteriormente, el nivel 5 aparece en la resolución de Noa y Elio cuando comienzan la discusión de sus estrategias y el reto

de las nuevas murallas. Encontramos, por ejemplo, que no necesitan mencionar las variables, pero a diferencia del caso anterior de Noa, aunque toman como referencia un caso particular, describen la estructura cuadrada que guía el patrón encontrado en F1 (5.a: “Porque 9x9 son 81. Sería 9 de lado y de alto”) o F2 (“Si la séptima muralla son 9, la octava muralla tiene 10 y la novena tiene 11”).

En otros casos, parten de un ejemplo, pero establecen la relación basándose en el lado del cuadrado (5.b: La 4ª muralla va a tener 6 plantas. Y de piedras 6x6 porque tiene 6 de lado”) o no hacen referencia a ningún ejemplo concreto (5.c: “¿Tú has multiplicado por el mismo número?”).

Finalmente, el nivel 6 se observa cuando Elio aborda F1 explicando cómo sabiendo el número de bloques de hierba, es capaz de transformar el valor en los bloques de piedra de la muralla. (“Vale, 10x10 es la octava muralla y dan 100 piedras. [...] Voy a pasar directamente al 15. 15 plantas”).

IV.2.4. Informe de resultados de la resolución del problema del *Minecraft*

Hemos reflejado en los epígrafes anteriores cómo los estudiantes abordaron la resolución del problema del *Minecraft* de maneras muy diversas. No solo encontramos diferencias, esperables, entre los cuatro niños, sino que cada uno de ellos manifiesta diferentes estrategias para abordar la generalización durante su proceso de resolución.

La Tabla 23 presenta una comparación del proceso de resolución de los estudiantes. Las diferentes columnas de cada estudiante, vinculadas mediante flechas, representan los avances y retrocesos de cada participante al abordar el problema, también reflejado en las figuras que presentábamos en el epígrafe IV.2.1.

Tabla 23

Resolución de los Estudiantes

Leyenda de la Tabla



Dibujo sobre los pictogramas del enunciado



Pictogramas velcrados



Esquema



Organizador tabular

T: Término

F: Función

N: Nivel de generalización

M/E: Material o estrategia empleada

	ELIO									RAÚL			NOA			OMAR								
T	F	N	M/E	F	N	M/E	F	N	M/E	F	N	M/E	F	N	M/E	F	N	M/E	F	N	M/E			
1	F2	1		F1	1					F1	1		F4	1		F2	2		F2	1		F1	1	
2	F2	1		F1	1		F1	4	X							F2	2		F2	2				
3				F2	3		F1	4	X				F4	1		F4	4		F4	1				
4				F1	1					F2	3		F4	2		F4	4		F2	2		F1	4	
5				F2	3					F1	5					F4	4		F3	2		F1	4	
6							F2	2		F1	5		F4	3		F4	4		F2	2		F1	4	
7										F2	3		F1	5		F4	4		F2	2		F1	4	
9										F1	4													
23										F2	5					F3	2	X						
										F3	4													
										F1	6					F1	5	-						

La diversidad de materiales y estrategias acompañó un proceso de resolución que no fue lineal, como podemos observar en los gráficos de las Figuras 60, 61, 62 y 64, y la Tabla 23. Los estudiantes fueron alternando los términos de la secuencia sobre los que trabajan, avanzando y retrocediendo. Estos saltos coinciden con cambios de material y cambios en la función que guía el proceso de resolución (F1, ..., F4). Raúl presentó dos saltos ascendentes del término 2 al 4, en el que cambia de F1 a F4, y del término 4 al término 6. La resolución de Noa presenta 1 salto ascendente del término 1 al 3 y uno descendente desde el término 3 al 1, momento en el que cambia de F4 a F2 y F3 e incluye el organizador y pictogramas en su resolución, que continúa de manera lineal. Omar sigue la secuencia de murallas hasta el término 7, momento en el que cambia de F2 a F1 y vuelve al término 1, tras el que se observa otro salto hasta el término 4, donde integra organizador y piezas de goma Eva.

Si observamos los términos de la secuencia, representados en las filas de dicha tabla, podemos establecer una comparación entre los datos referidos a funciones, niveles y materiales evidenciados en la resolución de Elio, Raúl, Noa y Omar.

La presencia de F1($H^2 = P$) y F2($M+2 = H$) superan las evidencias de F3($(M+2)^2 = P$) y F4($(M+2)^2 + (M+2) = P$) en el proceso de resolución de los estudiantes. Estos resultados pueden deberse al carácter más visual y perceptible de la relación entre los bloques de hierba y piedra de cada muralla (F1) y el carácter visual y recursivo del número de bloques de hierba de cada muralla (F2). F3 se aborda principalmente mediante estrategias de conteo de bloques grises y F4 implica que los estudiantes atiendan a las tres variables simultáneamente, lo que conlleva un nivel de demanda cognitiva mucho mayor. Respecto de los estudiantes, encontramos una tendencia de Elio y Omar a trabajar sobre F1 y F2, sobre F4 de Noa y el equilibrio de Raúl entre F1 y F4. Destacamos, sin embargo, que se observa una relación entre los niveles de generalización superiores y F1, de manera que los cuatro estudiantes alcanzan su nivel máximo de generalización y finalización de secuencia al trabajar con esta función. Esto parece sugerir que cuando disminuye el nivel de complejidad de la función, aumenta el nivel de generalización alcanzado.

Atendiendo al empleo de los materiales, todos los estudiantes comienzan su proceso de resolución mediante el dibujo sobre los pictogramas del enunciado.

Tras mostrar algunas dificultades y errores al abordar el término 3 de la secuencia de muralla, Elio y Noa incorporan el esquema y los pictogramas, respectivamente, en su resolución. Omar hace un uso conjunto de los materiales proporcionados, integrando las piezas de construcción con los pictogramas y el organizador. Raúl utiliza el organizador cuando quiere extender la resolución a otros términos más lejanos (N=7).

Encontramos además una relación entre su empleo y la manifestación de distintos niveles de generalización en los estudiantes (Tabla 24). Observamos que la utilización de los dibujos y los pictogramas tienen una mayor presencia en los tres primeros niveles de generalización (41,3%), mientras que encontramos un mayor número de evidencias de uso de la tabla organizadora a partir del nivel 4, el primero de los niveles funcionales (47%). Destacamos también la presencia del uso complementario de recursos, 48.3% en los niveles preestructurales y recursivos y 41.2% en los niveles funcionales, lo que refleja cómo los estudiantes se apoyan en diferentes registros para abordar el proceso de generalización.

Tabla 24

Frecuencia de los Tipos de Representación en Cada Nivel de Generalización

Niveles	Tipos de representación								
	Dibujo piezas de goma	o de Eva	Dibujo piezas de goma y tabla	o de Eva	Pictograma	Pictograma y tabla	Tabla	Sin material	Total
1	7		5		1	2			15
2	1		3		2	3	1	1	11
3	1		1				2		4
4			3		2	3	3	2	13
5			1				4	1	6
6							1		1
Total	9		13		5	8	11	4	

Nota: Recuperado de Chico-Gómez, Polo-Blanco et al. (En prensa)

Finalizamos este apartado, resaltando que proporcionar libertad mediante la integración de diversos materiales, conocidos por los estudiantes al haberlos empleado en el taller, ha facilitado el desarrollo de diversas formas de representación que han influido en el proceso de generalización de los niños. Además, señalamos que cada una de las estrategias y representaciones han cubierto necesidades asociadas al TEA1, como las dificultades de comunicación y comprensión verbal y las funciones ejecutivas (Klaren et al., 2017). Señalamos algunos ejemplos de situaciones que han reflejado resultados similares que en el apartado anterior de este capítulo:

- El empleo de las piezas de construcción verdes y grises para facilitar la visualización de la estructura de los términos de cada secuencia (*Dificultades para ver la globalidad de una figura -DVGF*).
- El uso de los pictogramas para fijar la estructura de las murallas (*Dificultades para ver la globalidad de una figura -DVGF*).
- La dependencia del apoyo visual para continuar la secuencia de las murallas (*Dificultades de memoria de trabajo –DMT-, Dificultades para predecir e inferir -DPRI*).
- Desviar el objetivo del problema a la construcción o dibujo, bastante perfeccionista, de las murallas y completar cada fila y columna de la tabla organizadora, perdiendo el objetivo del problema (*Literalidad y Rigidez de pensamiento –DLRP-, Dificultades para la autorregulación -DAR*).
- Las dificultades para cambiar de estrategia una vez establecidas las hipótesis (*Literalidad y Rigidez de pensamiento –DLRP-, Dificultades para la autorregulación –DAR-, Inhibición afectada -I*). Esto se refleja en la comparación entre las relaciones de las variables, buscando establecer analogías entre las estrategias y cálculos para F2 y F3 para descubrir el número de bloques verdes o grises de cada muralla.

SECCIÓN 2: Resolución de problemas en el aula con diversidad

Resumen

Esta segunda sección del capítulo de resultados se centra en la transición desde el taller con estudiantes TEA hacia la observación de la resolución de problemas en las aulas con diversidad. A lo largo de los epígrafes se describirá el proceso de observación, detallando los resultados del mismo en cada una de las tres aulas de los docentes foco de este estudio de caso. Organizamos los resultados en dos partes. La primera describe las cuatro primeras sesiones de observación, resaltando aspectos de la didáctica de la resolución de problemas y la manera de abordar las propuestas A y B, con objetivo de tener una visión global de los tres docentes. La segunda parte se centra en los resultados de la observación de la propuesta C, atendiendo al conocimiento especializado manifestado y la práctica inclusiva de las sesiones de los tres docentes. El objetivo de esta estructuración de los resultados es que el primer epígrafe aporte información al lector que facilite la contextualización y comprensión del análisis de contenido descrito en el segundo epígrafe de este capítulo.

IV.3. La resolución de problemas en el aula: Sesiones 1-4

Como es característico de las aulas de educación primaria, encontramos muchas diferencias entre las sesiones de Ester, Federico y Andrea. En este primer epígrafe detallamos los aspectos clave que hemos identificado relacionados con la forma de resolver problemas en el aula de cada uno de los docentes. Para ello, organizamos los resultados atendiendo a seis variables que emergen como diferenciadoras en las 3 implementaciones: (a) estructura de la sesión, (b), gestión del tiempo, (c) agrupamientos, (d) rol del docente, (e) conceptualización del problema y (f) atención al alumnado TEA.

IV.3.1. La estructura de la sesión

La primera variable que destacar es la estructura de la sesión. Cada docente sigue unas fases distintas al abordar la sesión de resolución de problemas con su alumnado. En todos los casos se observa una primera fase de lectura y explicación de la tarea, seguida de una fase de resolución y una puesta en común. Como diferencias, señalamos el tiempo de cada sesión. Mientras que todas las sesiones de Federico son de 45 minutos, en el caso de Ester y Andrea se desarrollan en 90 minutos, lo que posibilita abordar diversos problemas y extender los tiempos de resolución y puesta en común. A pesar de que las dos sesiones comparten la misma duración, la gestión del tiempo es distinta. Ester aborda una batería de cinco o seis problemas. Andrea resuelve dos problemas, dedicando 30 minutos en total a la fase de comprensión de los problemas, 40 a la resolución individual y 20 a la puesta en común.

En la sesión 3, de nuevo, Ester resuelve cuatro problemas durante la sesión y Andrea y Federico dos. Resumimos el contenido de cada una en la Tabla 26, describiendo la estructura, los problemas resueltos y su temporalización. En la distribución de los tiempos pueden apreciarse notables diferencias. En general, Ester y Federico dedican pocos minutos (menos de 5) a la fase de lectura y comprensión mientras que Andrea dedica al menos el doble de tiempo (13 y 10 minutos en cada problema). En los tres primeros problemas el resto del tiempo (hasta una media de 18 minutos) se dedica casi equitativamente a la resolución

individual y la posterior puesta en común. En el cuarto problema se observa una diferencia, con una larga fase de resolución individual que ocupa 22 de los 29 minutos totales dedicados al problema. En el caso, Federico, a la fase de comprensión le sigue una de resolución grupal, de 16 y 14 minutos, respectivamente, que cierra el tiempo dedicado al problema. La estructura del tratamiento de los problemas por parte de Andrea es completamente diferente. A la fase inicial de lectura y comprensión notablemente más larga que en los otros dos profesores, como hemos señalado, sigue una fase de resolución individual que ocupa lo mismo o un poco menos (8 y 10 minutos, en cada problema), y seguidamente una larga puesta en común (de 30 y 20 minutos, respectivamente).

Tabla 25

Estructura y Gestión de la Sesión 3 de los Docentes

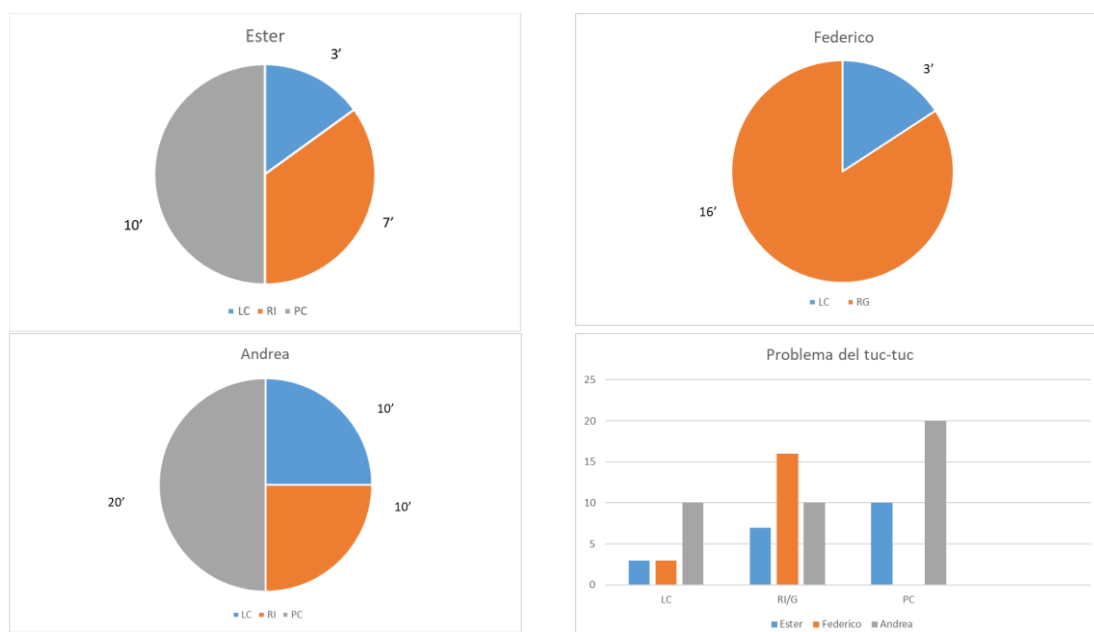
ESTER	FEDERICO	ANDREA
<u>El problema de Álvaro y Nico (14')</u> Lectura y comprensión: 1 minuto Resolución individual: 6 minutos Puesta en común: 7 minutos	<u>Introducción de la sesión:</u> 2 minutos <u>El problema del tuc-tuc (19')</u> Lectura y comprensión: 3 minutos Resolución grupal: 16 minutos	<u>El problema de los calcetines (51')</u> Lectura y comprensión: 13 minutos Resolución individual: 8 minutos Puesta en común: 30 minutos
<u>El problema de los calcetines (20')</u> Lectura y comprensión: 3 minutos Resolución individual: 7 minutos Puesta en común: 10 minutos	<u>El problema del santuario de elefantes (19')</u> Lectura y comprensión: 5 minutos Resolución grupal: 14 minutos <i>Conclusiones: 5 minutos</i>	<u>El problema del tuc-tuc (40')</u> Lectura y comprensión: 10 minutos Resolución individual: 10 minutos Puesta en común: 20 minutos
<u>El problema del tuc-tuc (20')</u> Lectura y comprensión: 3 minutos Resolución individual: 7 minutos Puesta en común: 10 minutos		
<u>El problema del santuario de elefantes (29')</u> Lectura y comprensión: 2 minutos		

Resolución individual: 22 minutos
Puesta en común: 5 minutos.

Si comparamos la distribución del tiempo en las tres aulas en el único problema común, el del tuc-tuc (Figura 68), se observa de nuevo la gran diferencia, con Ester y Federico más parecidos (con la diferencia de que Federico une las dos últimas fases en una resolución grupal, sin pasar por fase de resolución individual) y Andrea dando mucha importancia a la fase de puesta en común, que ocupa la mitad de la sesión. El tiempo total dedicado al problema vuelve a ser notablemente diferente (Ester y Federico similares, con 20 y 19 minutos, y Andrea con casi el doble, 40 minutos).

Figura 68

Distribución de Tiempos en la Resolución del Problema del Tuc-Tuc en las Tres Aulas



Nota: Las gráficas distinguen las fases Lectura y Comprensión (LC), Resolución Individual (RI) y Puesta en Común (PC)

En la sesión cuatro, dedicada al problema de los muñecos (Tabla 7, capítulo de metodología), la estructura de la sesión difiere de las anteriores en la temporalización y la incorporación de material TEACCH. Respecto a la gestión del tiempo, de los 90 minutos de sesión, Ester dedica 42 a la resolución del problema, dejando el resto del tiempo para abordar una actividad similar al juego de “hundir

la flota”. Ester divide la resolución en lectura y comprensión (de casi 8 minutos), resolución grupal (casi 10 minutos), puesta en común (de aproximadamente 2 minutos), abordaje de la generalización (7 minutos) y segunda puesta en común (15 minutos). La sesión de Federico se desarrolla en 45 minutos, y es organizada en una fase de lectura y comprensión (a la que se dedica casi 4 minutos), resolución grupal sin material (de 2 minutos), resolución grupal con depresores (de 12 minutos y 30 segundos) y con tablas organizadoras (durante aproximadamente 11 minutos) y resolución grupal dedicada a la búsqueda de la generalización (los 15 minutos y 30 segundos restantes de la sesión). En la sesión de Andrea (90 minutos) se aborda la lectura y comprensión de la versión 1 del problema (durante casi 10 minutos), entrega los depresores y aborda con ellos de manera grupal un nuevo reto a partir del problema (durante 30 minutos y 16 segundos), resolución individual de la versión 2 del problema (durante casi 20 minutos), puesta en común y discusión (de 5 minutos) y búsqueda de la generalización, tras una hora y 17 minutos, hasta finalizar la sesión (27 minutos).

Como se observa en la descripción de la estructura y temporalización, cada docente integra el material TEACCH en su sesión de manera muy diferente. Mientras Ester entrega los depresores y tabla organizadora a la vez al inicio de la sesión (minuto 3:47), Federico ofrece primero la tabla (minuto 6:00) y luego los depresores (18:20). Andrea incorpora los depresores (minuto 9:59) y no ofrece la tabla organizadora hasta abordar la segunda versión del problema en el minuto 40:15.

IV.3.2. El rol del docente y los agrupamientos

En la fase de resolución encontramos diferencias respecto a la variable agrupamientos. En las sesiones de Ester y Andrea, los estudiantes trabajan de manera individual, mientras que en la sesión de Federico se integra trabajo individual con trabajo grupal. Resulta característico que en las sesiones 4 y 5, Ester, siguiendo las recomendaciones de la guía proporcionada en la propuesta didáctica, establece el trabajo en grupo al inicio de la sesión e incluso indica que un portavoz transmitirá las ideas de los compañeros y compañeras al resto de

grupos. Sin embargo, este tipo de agrupamiento solo se mantiene durante los primeros 5 minutos de la puesta en común, tras los cuales Ester retoma su rol de las sesiones anteriores suprimiendo la función de los portavoces y grupos de trabajo.

Respecto al rol del docente, se mantiene de manera similar en todas las sesiones observadas de cada docente. Ester plantea el problema y, pasado el tiempo de resolución individual, resuelve ella en la pizarra, por lo que se observa un rol activo del profesor y un papel pasivo del alumnado, propio del modelo didáctico tradicional. Federico y Andrea adquieren un rol más cercano al de guía y facilitador promoviendo un rol activo del alumnado. Ambos docentes plantean la tarea al inicio de la sesión, van mesa a mesa durante la resolución individual/grupal atendiendo las posibles dudas de los estudiantes y guiando en el desarrollo de estrategias y en la fase de puesta en común dirigen las intervenciones del alumnado, escuchando sus aportaciones e ideas y buscando la diversidad de estrategias y planteamientos. Su rol se asocia a un modelo didáctico espontaneísta o investigador en el cual el profesorado ejerce un papel de guía, orientador o asesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Destacamos que, en la sesión 4 de Ester, se evidencia que la validación de la respuesta no corre solo a cargo de la docente como en sesiones anteriores, sino que invita a los estudiantes a explicar y cuestionar el porqué de sus explicaciones y trabajar como equipo, como se observa en los siguientes extractos del diálogo durante la fase de puesta en común de la sesión:

Ester: ¿Hemos llegado a alguna solución?

EstudianteC: No “seño”, pero tenemos dos teorías.

Ester: Vale, pues explícame tus teorías”

[...]

Ester: (Señalando una función propuesta por un estudiante y que acababa de escribir en la pizarra) Esta fórmula, ¿es correcta? ¿Qué pensáis?

[...]

Ester: Venga EstudianteM, cuéntanos.

EstudianteM: Yo he hecho...

Ester: Yo he hecho no, hemos pensado...

IV.3.3. La conceptualización de los problemas

La conceptualización de los docentes sobre las funciones y tipos de problemas varían de unas sesiones a otras.

En el aula de Ester, los problemas se usan como vehículos para trabajar diferentes temas que habían sido abordados en esa semana de clase. En las sesiones 1 y 2, se trabajaron problemas extraídos del libro de texto relacionados con números enteros y su representación gráfica y números fraccionarios.

En el aula de Federico se observa que el contenido es el propio problema. Este docente aborda cada sesión como un taller en el que se trabajan distintas competencias como resolutores. Además, hace explícito el conocimiento sobre la propia práctica de resolver problemas, atendiendo aspectos como el razonamiento y el proceso que lleva a los estudiantes a resolver el reto planteado, como se ve reflejado en el siguiente fragmento extraído de la resolución del problema 2 de la sesión 1:

Estudiante: Maestro, ¿te digo la pregunta?

Federico: No. Primero explícame cómo has llegado a planteártela.

Las sesiones 1 y 2 se centran en la formulación de preguntas dadas un contexto y unos datos:

SESIÓN 1

1. Nuria tiene 23 caramelos y cinco bombones de chocolate. Luis tiene cuatro caramelos menos que Nuria.
 - a. Diseña preguntas que se puedan resolver a partir del enunciado
2. Cuando tengo la oportunidad, salgo a correr unos kilómetros. Ayer recorrí 45 en bicicleta, y hoy. 56 kilómetros.
 - a. Formula una pregunta para que el problema se resuelva con una suma
 - b. Formula una pregunta para que el problema se resuelva con una multiplicación

- c. Formula una pregunta para que el problema se resuelva con una resta

Crea preguntas con la operación indicada y resuelve el problema

SESIÓN 2

1. Mi tío tiene en su granja 48 gallinas y 24 cerdos. El padre de Javi tiene en su granja 15 patos, 36 gallinas y 16 cerdos.

Escribe las preguntas adecuadas para las siguientes soluciones:

- a) La solución debe ser 20 gallinas
- b) La solución debe ser 8 cerdos
- c) La solución debe ser 72 huevos
- d) Formula una pregunta cuya respuesta sea: “No se puede saber con los datos que tenemos”.

Los problemas planteados por Andrea en las sesiones 1 y 2, aunque incluyen elementos explícitos de geometría como el cálculo de áreas y perímetros, se abordan como situaciones de reto para los estudiantes. Están diseñados de manera que es necesario indagar y resolver varias cuestiones antes de alcanzar la respuesta a cada pregunta del problema, que se planteaban de manera encadenada. Uno de los problemas se asemeja a la propuesta de Federico y pide a los estudiantes formular el problema dado un dato:

SESIÓN 1

1. Queremos pintar una habitación con un color más luminoso. Ahora te diré por qué. Antes que nada, vamos a la tienda para elegir el color de la pintura y el presupuesto. La pintura de color cuesta 9.75€/m². La pintura de color cuesta 5.38€/m². La pintura blanca la vamos a utilizar para el techo y la de color para las paredes.

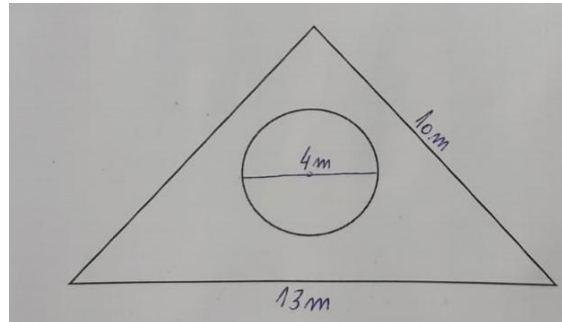
Posteriormente, medimos nuestra habitación, obteniendo las siguientes medidas:

- a. Pared 1: 3.5 m x 2.45 m
- b. Pared 2: 3.5 m x 2.45 m
- c. Pared 3: 2.7 m x 2.45 m
- d. Pared 2: 2.7 m x 2.45 m

¡Cuidado! Hay una ventana en la pared 3 de 1.8 x 1.2 m y una puerta en la pared 4 de 2.12 x 0.65 m.

Teniendo en cuenta estos precios, calcula la superficie de color y blanca para pintar y el coste total.

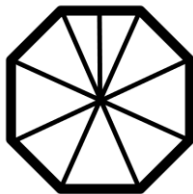
2. En una parcela de mi pueblo, he visto que hay un huerto con una forma particular. Me comenta su dueño que para la próxima siembra quiere mantener el mismo formato, pero necesita vallar el huerto para protegerlo de las ovejas y guarros que también hay en su parcela.



Teniendo en cuenta la forma y sabiendo que en la forma circular planta patatas y en el resto pimientos rojos, verdes y berenjenas, ¿qué área tendrá cada una de las dos partes? ¿Cuántos metros de valla necesitará?

SESIÓN 2

1. ¿Qué superficie ocupa la planta de un edificio circular que tiene de diámetro 30 metros?
Se quiere rodear el edificio con una valla, dejando un metro de distancia hasta el edificio. ¿Cuánto medirá la valla?
2. Formula un problema utilizando la figura:



Cuando observamos la sesión 3, la conceptualización de los problemas de Federico y Andrea se mantiene. Federico establece relaciones con las sesiones anteriores en términos de comprender las partes de la resolución de problemas y la manera de abordarlos, como el razonamiento o el desarrollo de estrategias diferentes:

¿Han sido situaciones que habéis tenido que abordar directamente y resolverlas? [...] ¿Pensáis que primero hacer el razonamiento y organizar las ideas os ayuda a resolverlo posteriormente?

Andrea continúa, como en las sesiones previas, estableciendo espacios para discutir la comprensión del problema con el alumnado y guiando en el desarrollo de estrategias (Problema de los calcetines, Figura 19: “Os propongo que antes de comenzar, hagáis un pequeño esquemita de lo que hay en el cajón. No hace falta dibujar, podéis utilizar palabras”). Los utiliza como situaciones de reto a través de las cuales se trabajan contenidos matemáticos.

Algo destacable es que Federico contextualiza la sesión como si de un viaje a Tailandia se tratara (“Hoy la idea es que nos vamos a marchar de viaje a Tailandia. ¿Os suena un transporte que se llama tuc-tuc? [...] ¿Conocéis este santuario? Es un lugar espectacular”), estableciendo una relación entre los problemas que selecciona. Este enfoque de la propuesta, aunque se concibió durante el diseño por esta autora, no fue trasladado a los docentes. El docente dedica tiempo de la lectura y comprensión para ilustrar y explicar elementos de los problemas, como el tuc-tuc y el santuario de elefantes de Chiang Mai.

Otro aspecto destacable que no había surgido en las sesiones anteriores es que Andrea establece acuerdos con los estudiantes respecto a algunos aspectos del problema cuando surgen dudas al respecto. Por ejemplo:

- En el problema de los calcetines, acuerdan si “un par de cada color” se refiere a dos calcetines del mismo color o dos parejas.
- En el problema del tuc-tuc, acuerdan que el taxi es de cuatro plazas, excluyendo al conductor y que los transportes que se cogen van todos completos.

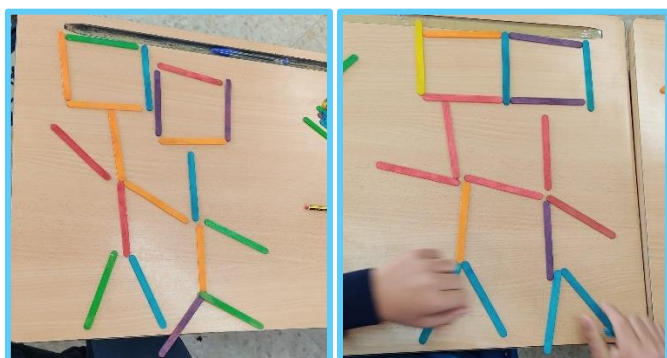
Respecto a la sesión de Ester, encontramos intervenciones de la docente dirigidas al planteamiento de la estrategia y no solo a la obtención de una resolución (“No me cuentes las operaciones, cuéntame qué has hecho y por qué lo has hecho [...] Explícame qué razonamiento te ha llevado a ti a hacer esa operación”). Este enfoque lo encontramos en esta sesión 3 y no en las dos anteriores.

En la sesión 4, la propuesta incorpora sugerencias para abordar el problema de los muñecos. Esto influye en la conceptualización de los docentes. Se observa cómo abordan el problema desde el caso concreto hasta alcanzar la generalización,

marcada como objetivo en el guion de la propuesta. Encontramos evidencias de que los tres docentes subrayan la importancia de describir cómo se identifican regularidades como parte de la generalización del problema. Ester y Federico comienzan directamente con la versión 2 del problema, pero Andrea inicia la sesión con la versión 1. A partir de esta, plantea como un problema “buscar la manera de ahorrarnos palillos para construir la misma figura”. Durante 30 minutos, discute con los estudiantes distintas formas de resolver este reto, utilizando los depresores (Figura 69). Es decir, este docente crea un problema nuevo a partir de una situación que los niños resuelven fácilmente, como es la versión del problema de los muñecos en la que las figuras están diseñadas sin compartir palillos.

Figura 69

Construcciones de los Estudiantes Resultantes de la Propuesta de Andrea a Partir de la Versión 1 del Problema de los Muñecos



Aunque la búsqueda de la generalización es el foco de las tres sesiones, el proceso de validación de la respuesta es diferente en cada una. En el aula de Federico, el trabajo en grupo concluye con la búsqueda de una conclusión que dejan como tarea para casa, entendiendo esta como “una idea a la que habéis llegado después de todo el razonamiento que habéis hecho”. En el aula de Ester la búsqueda de la generalización se cierra al alcanzar la relación funcional $f(x)=(x-1)*9+10$. En la sesión de Andrea, se dedican 20 minutos a discutir distintas formas de abordar el problema, apareciendo, además de la anterior, la visión de la figura mediante la función $f(x)=9*x+1$ y $f(x)=(10*x)-(x-1)$.

IV.3.4. Atención al alumnado TEA

Durante las sesiones observadas, el alumnado TEA asiste al aula ordinaria de Ester, Federico y Andrea y participa en la resolución de problemas con el resto de estudiantes. Encontramos distinta atención a estos estudiantes, marcada por el nivel competencial y sus necesidades.

En el caso de Ester, la estudiante TEA sigue la sesión con la ayuda de una compañera de mesa, quien asume el rol de guía. Durante las sesiones observadas, se puede apreciar cómo atiende a la pizarra y las explicaciones, pero no consigue redactar nada por sí misma en su cuaderno personal, más allá de lo que su compañera consigue aportarle. En las entrevistas con la docente, Ester nos informa de que, a pesar de que sus necesidades son muy significativas y el nivel competencial en matemáticas no es suficiente para seguir adecuadamente las actividades propuestas en las sesiones, considera que la asistencia al aula con el resto de sus compañeros y compañeras ha resultado muy beneficiosa y ha tenido consecuencias positivas en el desarrollo social de la alumna.

En la sesión de Federico, el estudiante se beneficia del trabajo en grupo. Sigue activamente y participa en todas las actividades del taller de problemas, colaborando con su grupo.

En la sesión de Andrea, este se sienta a su lado durante la resolución individual para guiarle en el desarrollo de las estrategias. El alumno participa activamente en la sesión, interviniendo y aportando ideas. El docente incorpora acciones para mantener la atención del estudiante y que mejore el autocontrol. En el aula, junto al asiento del alumno, Andrea dispuso un mural en el que se puntúan diferentes acciones del estudiante de acuerdo con las normas del aula, como por ejemplo el respeto al turno de palabra, al que hace referencia durante la sesión 2 de observación, en un momento en el que el alumno intervenía constantemente.

IV.4. La resolución de problemas en el aula: sesión 5. El problema de la arqueóloga

En el epígrafe anterior se han expuesto los resultados de la observación de las sesiones 1 a 4 de los tres docentes implicados en este estudio de caso. Las siguientes líneas se centran en los resultados de la observación de la quinta sesión, en la que se abordó el problema de la arqueóloga, y sobre la que realizamos un análisis del carácter inclusivo y el conocimiento docente manifestado en los tres estudios de caso. Organizamos este epígrafe en dos secciones. Una primera sección desarrolla una descripción de lo acontecido en el aula, con objetivo de contextualizar el análisis de contenido del conocimiento especializado y la práctica inclusiva, cuyos resultados se exponen en la sección 2. Esta segunda sección se divide a su vez en tres apartados: el conocimiento especializado, la práctica inclusiva y la perspectiva dual de la práctica docente en la resolución del problema de la arqueóloga. En cada uno de los apartados se resumirá una descripción desde una visión global de los resultados del estudio, hasta concretar en los casos de los tres docentes.

IV.4.1. La sesión 5

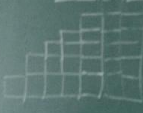
La sesión cinco de los tres docentes siguió estructuras diferentes. Ester presenta el problema de la arqueóloga en la pizarra digital y dedica 23 minutos a la fase de LECTURA y COMPRENSIÓN. En esta etapa, la docente explicó la estructura que se seguiría en la sesión, explicita los agrupamientos y aborda la lectura a nivel de clase y reparte todos los materiales. Inicia entonces la fase de RESOLUCIÓN DEL ENUNCIADO. Tras un par de minutos de trabajo individual, Ester aclaró algunos aspectos del enunciado ejemplificando alturas de la escalera. Comienza así la PUESTA EN COMÚN, en la que Ester dibuja una tabla en la pizarra similar al organizador gráfico (Figura 70). Pide a los estudiantes que expliquen algunos ejemplos de las escaleras de la arqueóloga, momento en el que surgieron dudas y que le llevó, de nuevo, a necesitar aclarar la estructura de la escalera. Tras 15 minutos de resolución, Ester plantea abordar una escalera de 20 metros de altura.

Este RETO se aborda durante 30 minutos, durante los cuales Ester guía la aparición de estrategias que sean distintas a las recursivas, descubiertas en la fase anterior.

Figura 70

Representación que Diseña Ester en la Pizarra que Simula la Organización Tabular y Pictórica del Material Organizador Utilizado por los Estudiantes

Huelva, 3 de mayo de 2023

Cajitas	Altura	Nº cajas
	1 m	1
	2 m ✓	3
	4 m	10
	5 m	15
	6 m	21
	7 m	28
	8 m	36
	10 m	$36 + 9 + 10$

Observamos cuatro fases en la sesión de Federico. En la fase LECTURA Y COMPRENSIÓN, el docente explica los objetivos de la sesión y presenta el problema de la arqueóloga. Aclara algunos elementos de la estructura de la escalera, contextualiza el problema con una actividad de una excursión en la que los estudiantes tuvieron que apilar unas piezas, como símil a la búsqueda de equilibrio de la escalera de la arqueóloga. Pasados cinco minutos, comienza la RESOLUCIÓN GRUPAL, en la que los estudiantes abordan el problema. Durante esta fase, el docente va mesa por mesa comprobando los avances de cada grupo y ofrece las piezas de goma Eva (minuto 11:40) y la tabla organizadora (minuto 19:00). Tras 25 minutos, se inicia la DISCUSIÓN, en la que un portavoz de cada grupo explica las estrategias y resultados alcanzados. La aparición de estrategias recursivas es aprovechada por el docente para introducir el RETO DE 20 METROS, que contextualiza como “Federicosaurio”. Los estudiantes abordan de nuevo la

resolución grupal, que finaliza tras 10 minutos en una nueva puesta en común en la que participan todos los grupos a través de sus portavoces.

La organización de Andrea sigue varias etapas. En la fase de LECTURA Y COMPRENSIÓN, se realiza una lectura grupal del enunciado durante la que Andrea va segmentando el enunciado. Utilizando la estructura de la escalera, discute con los estudiantes la relación entre la forma cuadrada de la imagen presentada junto al enunciado y la forma cúbica de las cajas de la arqueóloga, empleando para ello las piezas de goma Eva. Continúa la lectura, descomponiendo y reinterpretando con los estudiantes las ideas del enunciado y explicitando la estructura de la escalera y las alturas de los dinosaurios. Durante la fase de RESOLUCIÓN INDIVIDUAL, Andrea distribuyó las piezas de goma Eva (minuto 10:05) y los pictogramas y tablas (minuto 17:46). Supervisó el desarrollo de la actividad de cada estudiante, aceptando diversas formas de resolución y ofreció apoyo graduado según las necesidades de los estudiantes en el uso de los materiales y el desarrollo de estrategias. Pasada una hora, dos estudiantes resuelven el problema en la pizarra, dando inicio a la fase de PUESTA EN COMÚN. Andrea intervino tras la explicación de los estudiantes, no evaluando hipótesis ni estrategias, sino parafraseando las ideas de los estudiantes.

Ni el tiempo que cada docente dedica a la resolución del problema ni el número y tipo de interacciones en el aula de cada uno es el mismo. Identificamos intervenciones a nivel individual, en el que el docente interacciona con un estudiante, a nivel grupal, en el que interacciona con grupos de trabajo y a nivel de clase, en el que el docente se dirige a todo el grupo. En la tabla siguiente (Tabla 26), detallamos los tipos de interacción observados en cada sesión. Obtenemos los porcentajes a partir del número total de interacciones observadas en la sesión de Ester (187), Federico (184) y Andrea (158). La sesión de Ester se caracteriza por las interacciones a nivel de clase, en la que el 57.21% de las intervenciones son por parte de la docente y solo el 18.18% se corresponden con intervenciones en las que el alumnado comparte sus propias ideas o estrategias. Las sesiones de Federico y Andrea muestran más intervenciones a nivel grupal e individual. En ambas, aunque los porcentajes de intervenciones de los docentes no distan de los resultados de la

sesión de Ester 54.9 y 56.9%), observamos un menor número de intervenciones del alumnado vinculadas al conteo, identificación de términos, respuestas sencillas y monosilábicas, sino que se relacionan con la discusión de ideas y son más diversas a nivel individual, grupal o de clase (39.87% en la sesión de Andrea y 45.11% en la sesión de Federico).

Tabla 26

Tipos, Valores de las Intervenciones y sus Porcentajes en la Sesión Cinco de Ester, Federico y Andrea

Sesión y número de intervenciones totales	Persona que interviene	INDIVIDUAL	GRUPAL	CLASE		
				ORIENTACIONES	INTERACCIÓN	
					Se comparten estrategias o ideas	Intervenciones marcadas por el docente (monosílabos, conteo, términos)
Ester (187)	DOCENTE	0	0	21	29	57
	%			11,22	15.51	30.48
	ALUMNADO	0	0	-	34	46
	%				18.18	24.6
	TOTAL	0	0	21	63	103
	%			11,22	33.69	55.1
Federico (184)	DOCENTE	0	51	23	27	0
	%		27,72	12,5	14,68	
	ALUMNADO	0	52	-	31	0
	%		28,26		16,845	
	TOTAL	0	103	23	58	0
	%		55,98	12,5	31,52	0
Andrea (158)	DOCENTE	35	0	20	34	1
	%	22,15	0	12,66	21,52	0,63
	ALUMNADO	28	0	-	35	5
	%	17,72			22,15	3,16
	TOTAL	63	0	20	69	6
	%	39,87		12,66	43,67	3,79

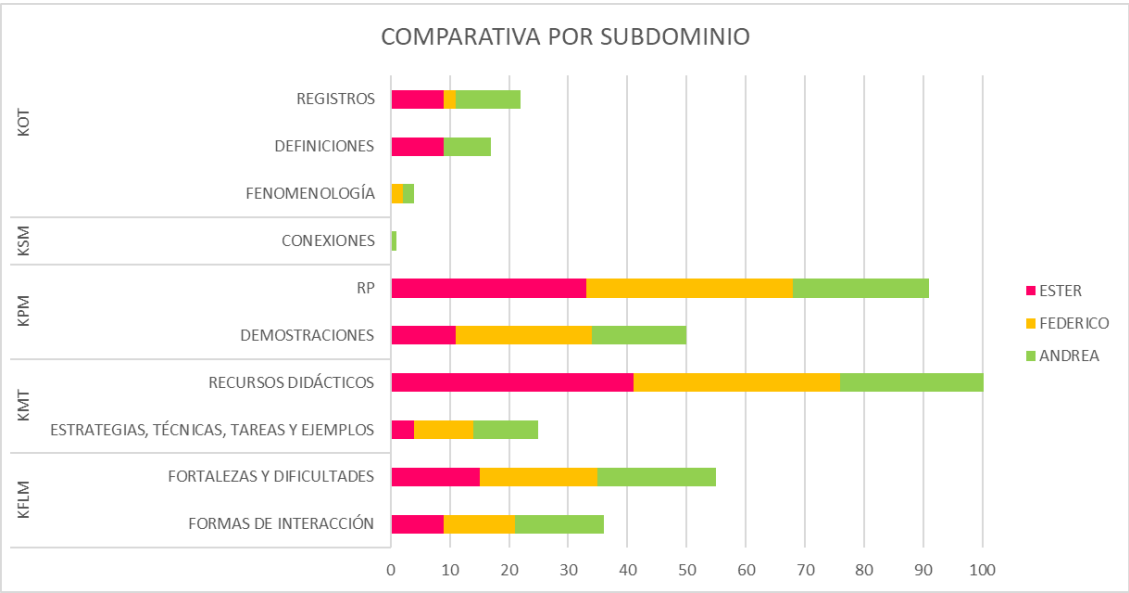
IV.4.2. El Conocimiento Especializado en el Problema de la Arqueóloga

En este segundo epígrafe organizamos los resultados del análisis en relación con los subdominio y categorías del modelo MTSK. Tal y como se ha descrito en el capítulo de metodología, identificamos las unidades de información de las sesiones de los tres docentes en las que se manifiesta conocimiento especializado, que se contabilizan atendiendo a los subdominios del MK y PCK. Establecemos una gráfica comparativa en la Figura 71, en la que representamos el valor absoluto de las unidades de cada sesión. Las manifestaciones de

conocimiento especializado de los docentes han mostrado una tendencia hacia el conocimiento didáctico del contenido (PCK), con una mayor presencia de evidencias del subdominio KMT (*Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*). Las unidades de información relacionadas con el conocimiento del contenido matemático (MK) se agrupan en torno al subdominio KPM (*Conocimiento de la práctica matemática*).

Figura 71

Comparativa Entre los Docentes en Términos de los Subdominios (Valor Absoluto de las Unidades de Información)



El estudio de las sesiones de los docentes ha señalado la manifestación de conocimiento del contenido (MK), con evidencias de conocimiento de los temas (KoT) y conocimiento de la práctica matemática (KPM). Solo se ha encontrado un indicio de conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) en la sesión de Andrea.

El análisis de contenido de las tres sesiones en las que se aborda el problema de la arqueóloga ha resultado en la construcción de una tabla de indicadores emergentes, relacionados con cada una de las categorías y subdominios del modelo. Recogemos los indicadores y su frecuencia en la sesión de cada docente por subdominios. En la Tabla 27 y Tabla 28 presentamos los relativos a los subdominios KoT y KSM.

Tabla 27

Conocimiento Emergente del Análisis de las Tres Sesiones en los Subdominios Conocimiento de los Temas (KoT) y Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) (Cómputo)

SUBDOMINIO	CATEGORÍA	INDICADOR (Conocimiento de...)	EVIDENCIAS EN LAS SESIONES						
			ESTER		FEDERICO		ANDREA		TOTAL
			UNIDAD	F	UNIDA D	F	UNIDA D	F	
KOT	Registros	Estructura de la escalera como parte de un cuadrado	U52	1			U265	1	2
		Relación entre la representación tabular y la pictórica para propiciar la búsqueda de la regularidad	U68	1					1
		Relación entre registro pictórico y numérico	U71, U134	2			U100, U106, U153, U296	4	6
		Relación entre patrones geométricos y patrones numéricos	U185, U190, U192, U205	4			U319, U326	2	6
		Estructura de la escalera	U205	1			U40	1	2
	Definiciones y propiedades	Relación tridimensional-bidimensional			U52	1			1
		Relación entre el cubo y sus caras			U63	1	U59, U61	2	3
	Fenomenología	Situación que corresponde a un término de la secuencia					U332	1	1
									22
	KSM	Conexiones Transversales	Interpretación geométrica de la suma de los n primeros números					U296	1
									1

Tabla 28

Indicadores de Conocimiento Emergentes del Análisis de las Tres Sesiones en los Subdominios Conocimiento de los Temas (KoT) y Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) (Ejemplos de Unidades)

SUBDOMINIO	CATEGORÍA	INDICADOR (Conocimiento de...)	Ejemplo de unidad de información	UNIDAD	Profesor/a
KOT	Registros	Estructura de la escalera como parte de un cuadrado	<i>Estudiante R dice: “El maestro me ha dicho para limpiar un dinosaurio de 114 metros”. Dice: “Yo voy a hacer el área de un cuadrado”, ¿vale? 114x114, 114 al cuadrado y me da 12.996 metros cuadrados. Sigue [señala sobre el dibujo de la pizarra].</i>	U265	ANDREA
		Relación entre la representación tabular y la pictórica para propiciar la búsqueda de la regularidad	<i>¿Cómo convierto esta figura de cuatro metros en una de cinco metros? [señala en la pizarra la tabla hecha, con sus dibujos].</i>	U68	ESTER
		Relación entre registro pictórico y numérico	<i>Vale, mirad, yo ahora os aconsejo que quien haya construido la figura, no mováis la figura de la mesa y con el lápiz, vayáis poniendo por aquí, en la mesa, con lápiz o encima o debajo, el número de metros que va alcanzando.</i>	U100	ANDREA
		Relación entre patrones geométricos y patrones numéricos	<i>Toma este rotulador y marca la diagonal (otro color). Porque alguno, alguno ha escuchado diagonal está diciendo la diagonal... eso qué era, chino...japonés...o no sé. Marca la diagonal.</i>	U319	ANDREA
		Estructura de la escalera	<i>Ester: ¿Qué hemos hecho aquí? Un cuadrado de... Estudiante 19: ocho por ocho. Ester: 8x8. Vale. Que sería todo esto [señala el cuadrado]. Pero el cuadrado que falta que hemos quitado. ¿De cuánto es? Estudiantes: De siete por siete.</i>	U205	ESTER
	Definiciones y propiedades	Relación tridimensional-bidimensional	<i>Eso no es un metro cúbico. Vamos... sí, sí sería un metro cúbico, sí.</i>	U52	FEDERICO
		Relación entre el cubo y sus caras	<i>Estas son las cajas [un estudiante señala: “un poco planas”]. Ya hombre... en dos dimensiones</i>	U63	FEDERICO
	Fenomenología	Situación que corresponde a un término de la secuencia	<i>114 metros. N= 114 [evocando a la escalera de base 114].</i>	U332	ANDREA
KSM	Conexiones Transversales	Interpretación geométrica de la suma de los n primeros números	<i>[Sobre el dibujo en la pizarra] Tú te diste cuenta de que haciendo la mitad del área, ocho no es lo que se queda en blanco. Él dice que el área de este cuadrado que es cuatro por cuatro, tiene Área 16. ¡16! Dice pues 16 entre dos, ocho. Ocho aquí y ocho en este [sobre el dibujo de la pizarra]. Y dice: “No, aquí no hay ocho, porque aquí hay 1, 2, 3, 4, 5 y 6”. Sigue.</i>	U296	ANDREA

Se observa un mayor número de evidencias de KPM (Conocimiento de la práctica matemática), presente en 95 unidades de información de los tres docentes, en

forma de conocimiento sobre la resolución de problemas y conocimiento sobre la práctica de demostrar (Tablas 29 y 30). Las unidades con evidencia de conocimiento de la práctica sobre resolver problemas (50), se organizan en 12 indicadores relacionados con el conocimiento sobre las fases y estrategias de resolución y los heurísticos, y la práctica de demostrar (45). Señalamos 11 indicadores de conocimiento sobre la práctica de demostrar. Estos hacen referencia al conocimiento sobre el papel de los términos y los ejemplos en el descubrimiento del patrón y las diferentes estrategias de generalización.

Tabla 29

Conocimiento Emergente del Análisis de las Tres Sesiones en el Subdominio Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) (Cómputo)

CATEGORÍA	INDICADOR (Conocimiento de...)	EVIDENCIAS EN LAS SESIONES						
		ESTER		FEDERICO		ANDREA		TOTAL
		UNIDAD	F	UNIDAD	F	UNIDAD	F	F
Resolución de Problemas	Fases de Resolución de Problemas	U4, U40	2	U142, U159, U206	3			5
	Fase de verificación	U125, U192, U198	3	U162, U206, U212	3	U223, U255	2	8
	Partes de un problema (datos, condiciones y requerimiento)			U13	1			1
	Fases de comprensión y planificación			U44	1	U11, U23, U29, U38	4	5
	Diversidad de estrategias para alcanzar un resultado			U99, U178, U184, U234, U265, U319, U354	7	U170, U175, U184, U338	4	11
	Importancia de las hipótesis y el razonamiento al resolver problemas			U172, U234, U312, U319, U343	5			5
	Heurístico particularizar	U36	1					1
	Heurístico hacer un diagrama	U63, U95	2			U123, U132, U312	3	5
	Heurístico descomponer el problema	U90	1			U64	1	2
	Heurístico analogía	U174	1	U212	1	U80, U132	2	4
	Heurístico dramatización			U84, U89	2			2
	Heurístico búsqueda de regularidades	U201	1					1
								50

Demostraciones	Ejemplos para conjeturar	U106, U201, U217	3			U170	1	4
	Papel de los ejemplos para comprobar una hipótesis	U125, U128, U134, U146, U192, U198	6	U148, U154	2	U258, U278, U305	3	11
	Papel de los ejemplos para buscar una regularidad			U108, U146	2	U94	1	3
	Selección de ejemplos para búsqueda de la regularidad	U34	1	U103	1			2
	Los términos lejanos/no consecutivos favorecen encontrar la generalización	U53, U108, U117, U158, U169, U201	6	U159, U303, U331	3	U215, U247, U258	3	12
	La función como expresión simbólica de un patrón	U174	1					1
	Estructura de la representación como clave del patrón geométrico	U201, U210, U217	3	U103	1			4
	Necesidad de generalizar mediante procedimientos no recursivos	U177, U226	2			U213, U247	2	4
	Recursividad como estrategia de generalización			U73, U331	2			2
	Cómo construir conjeturas			U246	1			1
	Contraejemplos					U278	1	1
45								

Tabla 30

Indicadores de Conocimiento Emergentes del Análisis de las Tres Sesiones en el Subdominio Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) (Ejemplos de Unidades)

SUBDOMINIO KPM				
CATEGORÍA	INDICADOR (Conocimiento de...)	Ejemplo de unidad de información	UNIDAD	Profesor/a
Resolución de Problemas	Fases en la Resolución de Problemas	Chicos, 5 minutos, y vamos a elegir una persona de cada grupo, por favor, que exponga la reflexión y la conclusión a la que habéis llegado en grupo. ¿Vale? Y luego, vamos a intentar, a ver si hemos obtenido algún tipo de conclusión, para poder calcular otros dinosaurios de mayor altura.	U159	FEDERICO
	Fases de verificación	Una pregunta: ¿Le encontráis algún tipo de relación con el que hicimos la semana pasada? El del palito que hicimos, el de los monigotes. ¿Le encontráis relación? EstudianteT dice que sí, ¿Qué relación le encuentras, EstudianteT?	U212	FEDERICO
	Partes de un problema (datos, condiciones y requerimiento)	¿Comprendéis la situación? Porque ahora, en base a ese problema que ella tiene para poder limpiar los huesos, nos hacen una serie de planteamientos. ¿Cuántos cajones necesita para alcanzar la altura de un Velociraptor, que mide dos metros? Un Estegosaurio que mide cuatro metros. Un Gigantorraptor que mide	U13	FEDERICO

	<i>ocho metros y un T-Rex que mide diez metros. ¿Vale? Entonces, la situación general la entendemos. Persona que tiene que dedicarse a limpiar aquellos esqueletos para poder exponerlos en el museo. Pero aquí tenemos un problemilla y es que no tenemos escaleras de esas dimensiones, pero tiene cajas ahí sin problemas para poder apilarlas.</i>		
Fases de comprensión y planificación	<i>Vale, mira, vamos a contextualizar. Estamos en un museo. Como el que hay en Londres. Se llama el Museo Natural. Seguramente te guste ir allí porque es un museo donde es gratis. En Londres, en la mayoría de los museos es gratis entrar. Yo entré y hay un montón de especies relacionadas con la naturaleza. Hay dinosaurios. Hay otra parte que es de animales marinos, delfines, ballenas. Después hay otra parte relacionada con los monos, con el homo sapiens, con la evolución humana. Hay otra parte de animales disecados. Hay leones, tigres... Es un museo muy, muy bonito. Entonces, aquí nos está hablando de dinosaurios. Yo creo, además, por la foto, que es el Museo Natural de Londres donde hay esos esqueletos de dinosaurios. Sigue, EstudianteA.</i>	U11	ANDREA
Diversidad de estrategias para alcanzar un resultado	<i>Y antes me faltaban tres. Creo que hay que poner de 5, sigue. Aunque tú hayas encontrado la otra fórmula. [EstudianteU vuelve a decir que ha acabado]. EstudianteU [voz calmada], ahora voy contigo. Venga, el de 5.</i>	U184	ANDREA
Conoce la importancia de las hipótesis y el razonamiento al resolver problemas	<i>[Estudiante: Cada vez que se van añadiendo más cajas se suma uno más. Aquí empieza por dos, y luego se suma [sobre el organizador]: aquí 3, aquí 4, aquí 5...] F: Anótalo.</i>	U172	FEDERICO
Heurístico particularizar	<i>EstudianteS, vamos a suponer el Velociraptor, que es el que tiene dos metros. Ya hemos explicado por qué apilamos las cajas de esa manera y no solamente una encima de otra, ¿vale? La altura que necesito son dos metros. ¿Cuántos cajones necesito apilar? [EstudianteS contesta tres]. Tres para no poner solamente uno encima del otro, que es muy inestable y no puedo hacerlo. Entonces utilizo tres cajas [completa su tabla de la pizarra].</i>	U36	ESTER
Heurístico hacer un diagrama	<i>¿Tú entiendes esa figura de las cajas? La forma puesta, en forma de escalera. ¿Y entiendes que una caja mide un metro de altura? ¿Y entiendes que si yo apilo las cajas de esta forma [señala el dibujo del enunciado sobre la pizarra digital], subo dos metros? Un metro y otro metro, ¿no? Y con cuatro metros necesito 1, 2, 3 y cuatro, lo que pasa es que yo voy rellenando la escalera hasta que está completa, ¿no? [...]</i>	U63	ESTER
Heurístico descomponer el problema	<i>Cada cajón mide un metro de altura y aparece una imagen de como los va colocando. ¿Sí? ¿A qué os suena eso? [Niños: "A una escalera!"]. A una escalera. Va construyendo una escalera.</i>	U64	ANDREA
Heurístico analogía	<i>Vale. De momento quiere limpiar estos cuatro dinosaurios. Antes de nada. ¿Hemos hecho algún problema parecido? Que te suene a ti, EstudianteU?</i>	U80	ANDREA
Heurístico dramatización	<i>Ten en cuenta que lo que tú estás creando es una escalera. Si tú rellenas huecos, no tienes paso de escalón. Si yo consigo subir este escalón [sobre la goma Eva] pero aquí pongo otra caja, qué tengo que hacer, así [simula un salto sobre las cajas de goma Eva]</i>	U84	FEDERICO
Heurístico búsqueda de regularidades	<i>Si estudiáramos otras estructuras en vez de con ocho metros de altura, como por ejemplo diez metros, con 12 o con 24, ¿podríamos sacar algún patrón de qué relación hay entre los que hay y los que faltan? No son exactamente la mitad. Son menos de la mitad. Pero si estudiamos unas pocas de estructuras, ¿seríamos capaces de ver esa relación? [Niños: Sí]. Supongo que sí. La cuestión es que hoy ya no nos da mucho tiempo. Pero, ¿estáis entendiendo cómo se llega a una</i>	U201	ESTER

		<i>ecuación? ¿cómo se llega a una fórmula? Estudiando la idea muy buena de EstudianteL del principio de contar todos los cuadros que hay, y después EstudianteO ha ido un poquito planteando que no son la mitad, pero por ahí van los tiros.</i>		
Demostraciones	Ejemplos para conjeturar	<i>Pero yo digo de esto [de lo que estaban haciendo], en el de tres. Digo, el área del cuadrado es tres por tres, pero no está el cuadrado completo. Me faltan tres. Que realmente coincide con la altura que tú has buscado. Y ahora digo yo: Vamos a ver si hay una relación.</i>	U170	ANDREA
	Papel de los ejemplos para comprobar una hipótesis	<i>Vamos a ver si eso es correcto, si ese razonamiento es correcto. Evidentemente, 20 es el doble de diez. Pero realmente, Cuando duplicamos los metros, ¿duplicamos las cajas? Vamos a verlo porque lo tenemos aquí en la pizarra [señala la tabla que habían estado completando en la pizarra].</i>	U125	ESTER
	Papel de los ejemplos para buscar una regularidad	<i>[Niña: Dependiendo del número de metros que mida el dinosaurio, será el número de cajones que se necesitan. Por ejemplo, mide un metro añadimos una caja; mide tres metros añadimos tres cajas]. F: Vale. A ver si sois capaces de sacar algún patrón.</i>	U108	FEDERICO
	Selección de ejemplos para búsqueda de la regularidad	<i>Vamos a ver, EstudianteN, yo creo que ahí en la tabla no lo tenía, pero lo he puesto yo [Señala la tabla que ha puesto en la pizarra, que empieza por un metro]. Si yo necesito alcanzar la altura de un metro, tengo ...un cajón, ¿No? Por lo tanto, ¿cuántas cajas necesito?</i>	U34	ESTER
	Los términos lejanos/no consecutivos favorecen encontrar la generalización	<i>Pero yo poniéndote esto aquí. Mira, te digo, EstudianteA que, viendo la progresión, ¿no?, este tiene dos metros de altura y tiene tres cajas. ¿Cuántas cajas tiene el que tiene 28 metros de altura? Pues piénsalo, ¿vale?</i>	U215	ANDREA
	La función como expresión simbólica de un patrón	<i>¿Me estáis entendiendo lo que quiero decir? ¿Os acordáis de que el otro día llegamos a una especie de ecuación donde averiguábamos con una sola ecuación cuál era el patrón? Pues... ¿alguien sería capaz de acercarse a eso? Hay que pensar un poquito. Otros 5 minutos de pensamiento.</i>	U174	ESTER
	Estructura de la representación como clave del patrón geométrico	<i>Si estudiáramos otras estructuras en vez de con ocho metros de altura, como por ejemplo diez metros, con 12 o con 24, ¿podríamos sacar algún patrón de qué relación hay entre los que hay y los que faltan? No son exactamente la mitad. Son menos de la mitad. Pero si estudiamos unas pocas de estructuras, ¿seríamos capaces de ver esa relación? [Niños: Sí]. Supongo que sí. La cuestión es que hoy ya no nos da mucho tiempo. Pero ¿estáis entendiendo cómo se llega a una ecuación? ¿cómo se llega a una fórmula? Estudiando la idea muy buena de EstudianteL del principio de contar todos los cuadros que hay, y después EstudianteO ha ido un poquito planteando que no son la mitad, pero por ahí van los tiros.</i>	U201	ESTER
	Necesidad de generalizar mediante procedimientos no recursivos	<i>Vale, tú ya puedes hacer siguiente, ¿a que sí? y el siguiente... Pero ahora yo te digo una cosa para que tú lo pienses. Tú me podrías decir... tú ve pensándolo eh... sabiendo la que tiene este. ¿Tú me podrías decir directamente la que tiene esta altura? ¿Directamente? ¿O tienes que ir una a una? Piénsalo. Dime EstudianteA.</i>	U213	ANDREA
	Recursividad como estrategia de generalización	<i>[Estudiante incide: Una más que en la anterior]. Pero una caja más es esto [señala una caja del dibujo/goma Eva] 4 cajas en ese caso, pero seguid razonando por ahí...</i>	U73	FEDERICO
	Cómo construir conjeturas	<i>Pero me choca un poco lo de añadir una caja más. No entiendo eso de añadir una caja más, porque si me está diciendo que de tres me voy a seis, luego me voy a diez... Yo no encuentro ahí tres... Una más serían cuatro... Una más sería cinco. Sin embargo, me está diciendo que de tres te pasas a seis, Luego te pasas a diez...</i>	U246	FEDERICO
	Contraejemplos	<i>Te voy a hacer una pregunta para que tú te plantees si eso está bien. Que no lo sé. Halla el de altura cuatro metros con esa fórmula, con esa relación que tú has</i>	U278	ANDREA

Atendiendo a los subdominios del conocimiento pedagógico del contenido (PCK), los docentes han evidenciado dos categorías de conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT, Tablas 31 y 32) y dos categorías de conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática (KFLM) (Tablas 33 y 34).

Tabla 31

Conocimiento Emergente del Análisis de las Tres Sesiones en el Subdominio Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) (Cómputo)

SUBDOMINIO KMT						
CATEGORÍA	INDICADOR	EVIDENCIAS EN LAS SESIONES				
		ESTER		FEDERICO		TOTAL
		UNIDAD	F	UNIDAD	F	
Recursos	Potencial de las piezas para reproducir las escaleras y favorecer observación de regularidades	U6	1			2
	Potencial de las piezas para representar las cajas y la estructura de la escalera					8
				U59, U72, U84	3	
	Limitaciones de las piezas en la representación de objetos tridimensionales			U63	1	1
	Potencial de las piezas para comprobar una hipótesis					1
	Potencial de la tabla como registro	U6, U95	2	U113	1	5
	Potencial de la tabla para descubrir la regularidad en los cajones que se añaden al crear cada escalera	U102	1	U119, U188	2	5
	Potencial de la tabla para comprobar una hipótesis			U198	1	1
	Potencial de la tabla para revisar el proceso			U198	1	1
	Diferencia entre el registro pictórico y el tabular para la búsqueda de una regularidad					1
						25
Estrategias, Técnicas, Tareas, Ejemplos	Ejemplo más pequeño para comprobar la comprensión	U23	1			2
	Ejemplo más pequeño para favorecer el establecimiento de conjeturas	U34, U148, U205, U217	4			7
	Ejemplo más pequeño para comprobar una conjetura					1
	Potencialidad de la representación tabular como estrategia del profesor para descubrir el patrón	U36, U55, U121	3			3
	Potencialidad de la representación tabular como estrategia del profesor para revisar el procedimiento	U125	1			1
	Potencialidad de la representación pictórica para descubrir el patrón	U71, U161, U190, U192, U205, U217	6	U103		11
						1

Necesidad de incorporar el registro numérico al pictórico para alcanzar el descubrimiento del patrón.	U100, U106	2	2		
Términos lejanos/no consecutivos para impulsar estrategias funcionales de generalización en el estudiante	U53, U66, U108, 117, U158, U169	6	U303, U331	2	10
Términos consecutivos para impulsar estrategias recursivas de generalización en el estudiante	U68, U151, U161	3	U182, U360	2	7
Términos consecutivos para desarrollar la búsqueda de una regularidad			U103	1	5
Importancia de la variable "cajas que se añaden" para descubrir la regularidad	U90, U100, U106, U143, U146, U148	6	U259, U274	2	9
Importancia de la variable "escalera complementaria" para descubrir la regularidad	U222, U224	2		5	7
Parafraseo del enunciado para favorecer su comprensión			U13	1	1
Parafraseo como estrategia para destacar y hacer extensiva la resolución de un estudiante a todos los demás	U115	1	U101, U360	2	6
Parafraseo como estrategia para revisar una hipótesis			U246	1	2
Importancia de la fase de comprensión			U4, U89	2	4
Importancia de la fase de comprensión (a través de abordar un contexto cercano)			U10, U11, U15	3	5
Importancia de propiciar estrategias diferentes al conteo para buscar regularidades	U55	1	U331	1	2
Necesidad de reflexionar sobre el proceso (metacognición)	U174	1	U206	1	3
Estabilidad como recurso para comprender la estructura de la escalera	U32, U36	2	U26, U36	2	4
Lenguaje gestual para aclarar la relación bidimensional- tridimensional			U54	1	1
Dramatización			U84, U89, U230	3	3
					96

El conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) se presenta en 121 unidades de información de los tres docentes (Tabla 32), algunas de ellas ejemplificadas en la Tabla 33. 25 de estas unidades están relacionadas con el conocimiento sobre recursos didácticos, agrupadas en torno a nueve indicadores de conocimiento de las funciones, ventajas y limitaciones en el uso de la goma Eva y el organizador tabular. Las 96 unidades restantes se vinculan al conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, organizadas en 22 descriptores diferentes.

Tabla 32

Indicadores de Conocimiento Emergentes del Análisis de las Tres Sesiones en el Subdominio Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) (Ejemplos de Unidades)

SUBDOMINIO KMT				
CATEGORÍA	INDICADOR (Conocimiento de...)	Ejemplo de unidad de información	UNIDAD	Profesor/a
Recursos	Potencial de las piezas para reproducir las escaleras y favorecer observación de regularidades	<i>Pero y si lo pone así [lo gira]. ¿Cuánto mide? [EstudianteU contesta “un metro”]. ¿Por qué? [Silencio]. Dice que mide un metro el cajón. Y yo digo, bueno, depende de cómo lo coloque, ¿no? ¿EstudianteU? A lo mejor así mide un metro, pero así [lo gira] ... ¿Cuánto mide? [EstudianteU responde “la mitad”] ¿La mitad? ¿Por qué? Ya has dado esto. ¿Esto a que figura geométrica te recuerda?</i>	U40-A	ANDREA
	Potencial de las piezas para representar las cajas y la estructura de la escalera	<i>¿Aquí cuantos metros has subido? [Un niño dice 3] tres. ¿Si añado una más, alcanzo los cuatro o no? [Estudiante incide: Una más que en la anterior]. Pero una caja más es esto [señala una caja del dibujo/goma Eva] 4 cajas en ese caso, pero seguid razonando por ahí...</i>	U72-F	FEDERICO
	Limitaciones de las piezas en la representación de objetos tridimensionales	<i>Estas son las cajas [un estudiante señala: “un poco planas”]. Ya hombre... en dos dimensiones.</i>	U63-F	FEDERICO
	Potencial de las piezas para comprobar una hipótesis	<i>Vamos a hacer una pregunta a EstudianteU, que antes fue muy rápido. Tú ahora, viendo esto [la estructura de piezas de goma Eva], ¿crees que antes te equivocaste? [Había dicho 2, 3, 4 cajones, sin pensar] [EstudianteU afirma].</i>	U87-A	ANDREA
	Potencial de la tabla como registro	<i>¿Entendido? Si lo podéis hacer como tenéis ahí, con la Goma Eva, vais haciendo las escaleras. Podéis ir poniendo en vuestra tabla que os han entregado, la solución a cada uno de ellos, e ir haciendo un poquito de trabajo de lógica. ¿de acuerdo? Pues venga [...]</i>	U6-E	ESTER
	Potencial de la tabla para descubrir la regularidad en los cajones que se añaden al crear cada escalera	<i>No. La cantidad de cajones que vamos añadiendo aquí [señala la columna de la tabla de la pizarra], ¿a qué es igual?</i>	U102-E	ESTER
	Potencial de la tabla para comprobar una hipótesis	<i>Que son exactamente los que tienes que subir. Pero aquí ya os habéis equivocado. Porque mira, esto está correcto. ¿Más 7? [sobre la tabla de los niños va comprobando con ellos los resultados de cada fila]. ¿Más 8?... [Tardan un poco en el cálculo mental] ¿Te ha costado eh...? (risas). [Los niños revisan entre ellos los resultados de los cálculos anteriores aplicando su nueva estrategia y se dan cuenta de sus errores].</i>	U198-F	FEDERICO
	Potencial de la tabla para revisar el proceso			
Estrategias, Técnicas, Tareas, Ejemplos	Diferencia entre el registro pictórico y el tabular para la búsqueda de una regularidad	<i>Os doy ahora esto [el organizador] que es otro refuerzo. Es distinto.</i>	U113-F	FEDERICO
	Ejemplo más pequeño para comprobar la comprensión	<i>Un metro. Cada cajón mide un metro. Vale, EstudianteL, si yo quisiera alcanzar la altura de un Velociraptor, ¿cuántos metros tendría que subir? [EstudianteL titubea]. Del Velociraptor. ¿Cuántos metros necesitaría subir para poder alcanzar al dinosaurio?</i>	U23-E	ESTER
	Ejemplo más pequeño para favorecer el establecimiento de conjeturas	<i>Vamos a ver, EstudianteN, yo creo que ahí en la tabla no lo tenía, pero lo he puesto yo [Señala la tabla que ha puesto en la pizarra, que empieza por un metro]. Si yo necesito alcanzar la altura de un metro, tengo ...un</i>	U34-E	ESTER

	<i>cajón, ¿No? Por lo tanto, ¿cuántas cajas necesito?</i>		
Ejemplo más pequeño para comprobar una conjetura	<i>Te voy a hacer una pregunta para que tú te plantees si eso está bien. Que no lo sé. Halla el de altura cuatro metros con esa fórmula, con esa relación que tú has encontrado. Cuatro metros. Venga. Rápido, que tiene que salir EstudianteG, Venga, cuatro metros.</i>	U278-A	ANDREA
Potencialidad de la representación tabular como estrategia del profesor para descubrir el patrón	<i>Eso era el de diez, ¿no? Venga, ese lo tenemos aquí [en la tabla de la pizarra]. El de diez sabemos que son 55 cajones.</i>	U121-E	ESTER
Potencialidad de la representación tabular como estrategia del profesor para revisar el procedimiento	<i>Vamos a ver si eso es correcto, si ese razonamiento es correcto. Evidentemente, 20 es el doble de diez. Pero realmente, cuando duplicamos los metros, ¿duplicamos las cajas? Vamos a verlo porque lo tenemos aquí en la pizarra [señala la tabla que habían estado completando en la pizarra].</i>	U125-E	ESTER
Potencialidad de la representación pictórica para descubrir el patrón	<i>Diez. Serían diez metros, ¿no?. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y diez [cuenta sobre el dibujo]. Para que midiera 11 metros, ¿cuántas cajas le tengo que añadir?</i>	U161-E	ESTER
Necesidad de incorporar el registro numérico al registro para alcanzar el descubrimiento del patrón.	<i>Vale, mirad, yo ahora os aconsejo que quien haya construido la figura, no mováis la figura de la mesa y con el lápiz, vayáis poniendo por aquí, en la mesa, con lápiz o encima o debajo, el número de metros que va alcanzando.</i>	U100-A	ANDREA
Términos lejanos/no consecutivos para impulsar estrategias funcionales de generalización en el estudiante	<i>[Escribe en la pizarra: "Federicosaurio, 20 metros"] Aquí lo tenéis. Este es el nuevo que hay que hacer. Este es el dinosaurio que hay que hacer ahora. ¿Cuántas cajas necesito? Os doy unos minutos, no corráis que sois muy rápidos. El Velociraptor ya lo hemos limpiado.</i>	U303-F	FEDERICO
Términos consecutivos para impulsar estrategias recursivas de generalización en el estudiante	<i>¿Qué hacemos? Pues sumamos 13 cajas. Luego, ¿cuántos vamos a tener que sumar? 14, ¿luego? 15 ¿luego? 16. ¿Luego? [Estudiantes contestan 17] hasta los 20.</i>	U360-F	FEDERICO
Términos consecutivos para desarrollar la búsqueda de una regularidad	<i>Vale. Esto es para subir a un dinosaurio de un metro. ¿Y para subir a uno de dos metros?</i>	U103-F	FEDERICO
Importancia de la variable "cajas que se añaden" para descubrir la regularidad	<i>Pero antes habíamos llegado a la conclusión de que al siguiente número de metros le añadíamos un número más de cajas. Entonces, ¿la siguiente a 10 metros cuál sería?</i>	U143-E	ESTER
Importancia de la variable "escalera complementaria" para descubrir la regularidad	<i>Pero yo digo de esto (de lo que estaban haciendo). En el de tres. Digo, el área del cuadrado es tres por tres, pero no está el cuadrado completo. Me faltan tres. Que realmente coincide con la altura que tú has buscado. Y ahora digo yo: Vamos a ver si hay una relación.</i>	U222-E	ESTER
Parafraseo del enunciado para favorecer su comprensión	<i>¿Comprendéis la situación? Porque ahora, en base a ese problema que ella tiene para poder limpiar los huesos, nos hacen una serie de planteamientos. ¿Cuántos cajones necesita para alcanzar la altura de un Velociraptor, que mide dos metros? Un Estegosaurio que mide cuatro metros. Un Gigantorraptor que mide ocho metros y un T-Rex que mide diez metros. ¿Vale? Entonces, la situación general la entendemos. Persona que tiene que dedicarse a limpiar aquellos esqueletos para poder exponerlos en el museo. Pero aquí tenemos un problemita y es que no tenemos escaleras de esas dimensiones, pero tiene cajas ahí sin problemas para poder apilarlas.</i>	U13-F	FEDERICO

Parafraseo como estrategia para destacar y hacer extensiva la resolución de un estudiante a todos los demás	<i>EstudianteR dice: El maestro me ha dicho para limpiar un dinosaurio de 114 metros. Dice: Yo voy a hacer el área de un cuadrado, ¿vale?</i>	U265-A	ANDREA
Parafraseo como estrategia para revisar una hipótesis	<i>Pero mira aquí. Vale, vale, vale. Se le pone...Mira, yo te voy a ir diciendo y haciendo lo que tú me vas diciendo, para que tú lo pienses. De lo que tú me vayas diciendo, yo te voy a decir lo que yo entiendo. ¿Vale? Ahora tú me dices: No, maestro, yo eso no lo quiero decir, o sí. Venga, repítame lo que me has dicho.</i>	U197-A	ANDREA
Importancia de la fase de comprensión	<i>Chicos, ¡empezamos! Sabéis que disponemos de poco tiempo. Necesitamos estar concentrados. Os hemos compartido ya la situación con la que vamos a trabajar hoy. La tenéis ya (en la plataforma classroom). Se titula la arqueóloga. Si os parece, vamos a hacer una lectura entre todos, ¿vale? Para que podamos ver la situación que se nos plantea. ¿Tenéis claro qué es un arqueólogo?</i>	U4-F	FEDERICO
Importancia de la fase de comprensión (a través de abordar un contexto cercano)	<i>Vale, mira, vamos a contextualizar. Estamos en un museo. Como el que hay en Londres. Se llama el Museo Natural. Seguramente te guste ir allí porque es un museo donde es gratis. En Londres, en la mayoría de museos, es gratis entrar. Yo entré y hay un montón de especies relacionadas con la naturaleza. Hay dinosaurios. Hay otra parte que es de animales marinos, delfines, ballenas. Después hay otra parte relacionada con los monos, con el homo sapiens, con la evolución humana. Hay otra parte de animales disecados. Hay leones, tigres... Es un museo muy, muy bonito. Entonces, aquí nos está hablando de dinosaurios. Yo creo, además, por la foto, que es el Museo Natural de Londres donde hay esos esqueletos de dinosaurios.</i>	U11-A	ANDREA
Importancia de propiciar estrategias diferentes al conteo para buscar regularidades	<i>Mira, mira aquí [en la tabla de la pizarra] Con lo que tenemos aquí, ¿eres capaz de decirme, así a voz de pronto, cuántas cajas necesitas para ocho metros? ¿o necesitas algo más? [silencio] ¿Tú cómo lo has hecho? Cuéntame.</i>	U55-E	ESTER
Necesidad de reflexionar sobre el proceso (metacognición)	<i>De momento quiere limpiar estos cuatro dinosaurios. Antes de nada. ¿Hemos hecho algún problema parecido? Que te suene a ti...</i>	U80-A	ANDREA
Estabilidad como recurso para comprender la estructura de la escalera	<i>Federico: [...] ¿Qué te proporciona estabilidad en una construcción que tú hagas? ¿Qué parte?</i> <i>Estudiante11: La parte de abajo.</i> <i>Federico: ¿Cómo se llama eso?</i> <i>Estudiante11: La base.</i>	U36-F	FEDERICO
Lenguaje gestual para aclarar la relación bidimensional-tridimensional	<i>Un metro, sí [gesticula trazando líneas que simulan las dimensiones de la caja]. [Estudiante pregunta "de alto, de largo y de ancho..."] Todo.</i>	U54-F	FEDERICO
Dramatización	<i>Federico: Claro, pero te estoy diciendo que lo que tú estás creando con las cajas es una escalera</i> <i>Estudiante13: Claro, con eso te caes</i> <i>Federico: tiene que ser práctica, ¿no?</i> <i>Estudiante14: Porque cuando llegas aquí y tengo que poner la caja aquí...</i> <i>Federico: Ten en cuenta que son cajas apiladas. Que no es una cuestión que tú digas van atornilladas... no, no. Tú vas apilando cajas. Como lo pongas así, hay riesgo de que te caigas, tú verás.</i>	U89-F	FEDERICO

Por último, encontramos evidencias de conocimiento relativo a siete indicadores de conocimiento sobre fortalezas y dificultades (36 unidades) y tres indicadores de las formas de interacción (19) dentro del subdominio KFLM (*Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas*) (Tablas 33 y 34).

Tabla 33

Conocimiento Emergente del Análisis de las Tres Sesiones en el Subdominio Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) (Cómputo)

SUBDOMINIO KFLM							
CATEGORÍA	INDICADOR (Conocimiento de...)	EVIDENCIAS EN LAS SESIONES					
		ESTER		FEDERICO		ANDREA	
		UNIDAD	F	UNIDAD	F	UNIDAD	F
Fortalezas Y Dificultades	Dificultades por considerar lo que completa la figura de la escalera como parte de la misma	U12, U185	2				2
	Dificultades de visualización y comprensión de la estructura de la escalera	U17, U32, U36, U63, U87, U93, U192	7	U12, U26, U36, U67, U70, U84, U230, U246, U274, U278	10	U40, U46, U52, U61, U87, U99, U104, U326	8
	Dificultades del alumnado para seguir el objetivo del enunciado y la tendencia a la dispersión en la construcción			U89, U230	2		2
	Dificultades de conteo y memoria de trabajo cuando el número de piezas es elevado					U100, U115	2
	Dificultades en la comprensión de la estructura multiplicativa					U223	1
	Dificultades de cálculo mental y la abstracción de los cálculos con cifras elevadas					U265, U278, U305	3
	Dificultades en la visualización de estructuras geométricas y el reconocimiento de sus partes					U319	1
							36
							13
Formas De Interacción	Tendencia de los estudiantes a estrategias de generalización recursivas y de conteo	U48, U63, U75, U87, U98, U169	6	U126, U133, U144, U154	4	U213, U215, U226	3
	Tendencia de los estudiantes a buscar una sola estrategia			U178, U184	2	U184	1
	Influencia de las emociones en el proceso de Resolución de problemas			U206, U303	2	U338	1
							19

Tabla 34

Indicadores de Conocimiento Emergentes del Análisis de las Tres Sesiones en el Subdominio Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) (Ejemplos de Unidades)

Categoría	Indicador (Conocimiento de...)	Ejemplo de unidad de información	Unidad	Profesor/a
Fortalezas y Dificultades	Dificultades por considerar lo que completa la figura de la escalera como parte de la misma	<i>Estudiante15: Señó, ¿esto son las cajas [Señala el dibujo del enunciado]? Ester: Todo eso. Lo blanco no son cajas, son lo marrón.</i>	U12-E	ESTER
	Dificultades de visualización y comprensión de la estructura de la escalera	<i>No, no me estás entendiendo. ¿Cuánto mide el Velociraptor? [EstudianteL responde 2 metros] Entonces. ¿Qué altura necesito para alcanzar al Velociraptor? [EstudianteL titubea] "...dos metros". Claro, necesito dos metros. Pero claro, si yo pongo un cajón encima de otro. Bing, bing, bing. Solo uno. ¿Qué es lo que va a pasar? Que es muy inestable y se va a caer. Entonces los apilas de esta manera [señala el enunciado proyectado]. Siempre va poniendo una base y va subiendo para que sea más estable en forma de escalera. ¿Hasta ahí lo tenemos claro?</i>	U32-E	ESTER
	Dificultades del alumnado para seguir el objetivo del enunciado y la tendencia a la dispersión en la construcción	<i>Alguno de vosotros habéis dicho. Sabéis que soy muy dado a la trocherías también, pero me decía. Estudiante17: "no, aquí vamos llenando huecos". Estamos construyendo con cajas una escalera. Lo que no queremos es matarnos. A la hora de subir construimos una escalera que nos facilita el trabajo</i>	U230-F	FEDERICO
	Dificultades de conteo y memoria de trabajo cuando el número de piezas es elevado	<i>Vamos a apuntar aquí. ¿Vale? Vamos a apuntar aquí. cuántos metros alcanza Venga, poco a poco [cuenta con EstudianteU sobre su construcción]</i>	U115-A	ANDREA
	Dificultades en la comprensión de la estructura multiplicativa	<i>Pues mira. ¿Tú crees que eso está bien? Porque tú has dicho si no me da con la suma, lo voy a multiplicar. Vale, pero comprueba si está bien. A ver si no va, está bien. Y yo me lo voy a creer y vamos a confundir aquí a todo el personal y nos van a pegar a ti y a mí por confundir a todos. Venga, piénsalo.</i>	U223-A	ANDREA
	Dificultades de cálculo mental y la abstracción de los cálculos con cifras elevadas	<i>A ver, haz el de tres, para que la gente lo entienda.</i>	U305-A	ANDREA
	Dificultades en la visualización de estructuras geométricas y el reconocimiento de sus partes	<i>Toma este rotulador y marca la diagonal [otro color]. Porque alguno, alguno ha escuchado diagonal está diciendo la diagonal... eso qué era, chino...japonés...o no sé. Marca la diagonal.</i>	U319-A	ANDREA
Formas de Interacción	Tendencia de los estudiantes a estrategias de generalización recursivas y de conteo	<i>Es decir, has ido añadiendo una más, una más, una más...Bueno, entonces, según esto, ¿puedo averiguar fácilmente cuál sería una altura de tres metros o cuántas cajas necesitaría, ¿no? Según lo que tú me estás diciendo, ¿cuántas serían?</i>	U48-E	ESTER

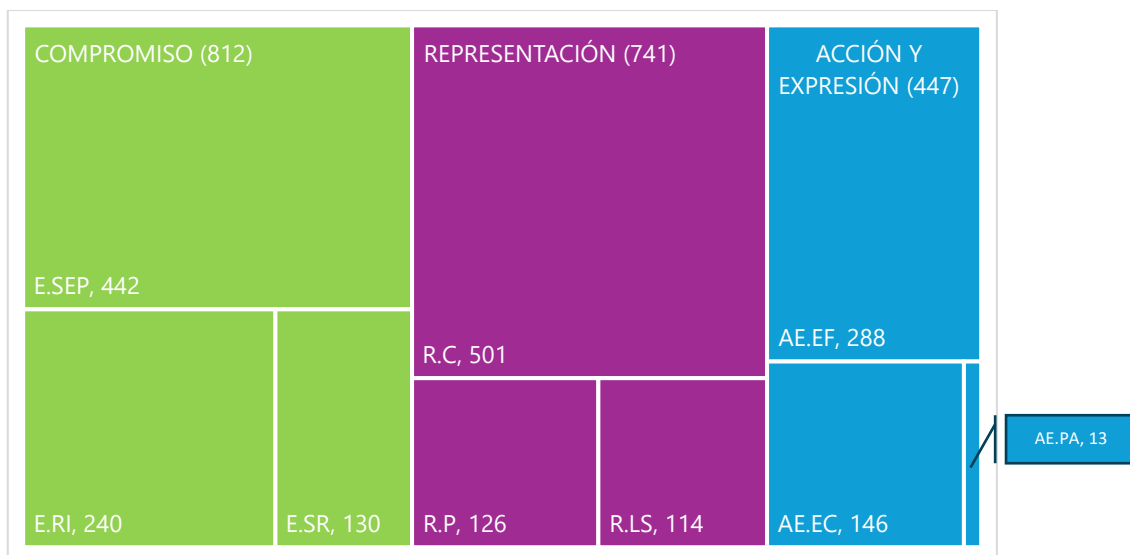
	<i>[Estudiante18 contesta seis] Seis. ¿Por qué? Porque son las de antes...</i>		
Tendencia de los estudiantes a buscar una sola estrategia	<i>Y antes me faltaban tres. Creo que hay que poner de 5, sigue. Aunque tú hayas encontrado la otra fórmula. [EstudianteU vuelve a decir que ha acabado]. EstudianteU [voz calmada], ahora voy contigo. Venga, el de 5.</i>	U184-A	ANDREA
Influencia de las emociones en el proceso de RP	<i>¿Empezamos? Vale. Un segundito. Venga, Empezamos. Lo primero. Como todos los días. Sensaciones. A ver qué ha pasado. ¿Qué ha pasado aquí? Ahora hablamos del problema. Me interesa que me expliquéis, la persona que realice la exposición del grupo, que me cuente cuál es la conclusión y el camino que ha seguido el grupo para intentar resolverlo. Y a qué conclusión han dicho vale. Pero de primeras... ¿Qué os ha parecido? ¿Qué os ha parecido el problema? Me refiero: Lo habéis visto fácil desde el principio... Os ha costado... Vale.</i>	U206-F	FEDERICO

IV.4.3. La práctica Inclusiva en el problema de la arqueóloga

Centramos ahora la exposición de resultados en relación con las evidencias de los tres principios del DUA. Las unidades de información de cada docente se analizan identificando en ellas los criterios asociados a cada punto de verificación correspondientes a las directrices de cada principio. El análisis de las tres sesiones de los docentes resulta en evidencias de los tres principios del DUA. Representamos en el gráfico comparativo (Figura 72) el número de puntos de verificación de Compromiso (Verde), Representación (Morado) y Acción y Expresión (Azul) encontrados en el análisis de las tres sesiones. Aunque encontramos evidencias de los tres principios, los resultados señalan diferencias en el número de manifestaciones de cada uno en las sesiones de los tres docentes. El principio de Compromiso es el más evidenciado (812 unidades), seguido de las 741 unidades relacionadas con el principio de Representación, mientras que los resultados del análisis muestran que las evidencias del principio de Acción y Expresión se reducen casi a la mitad (447).

Figura 72

Manifestaciones y Principios del DUA



Las tablas siguientes resumen los resultados de cada docente, organizados en torno al principio de Compromiso (Tabla 35), Representación (Tabla 36) y Acción y Expresión (Tabla 37). Añadimos a los resultados tres tablas complementarias (Tabla 38, Tabla 39 y Tabla 40) cuyo objetivo es ejemplificar cada una de las directrices del DUA con unidades información extraídas de las sesiones de Ester, Federico y Andrea.

Tabla 35

Resultados Globales y de los Tres Docentes Respecto a las Evidencias del Principio de Compromiso

Compromiso (E)											
E.RI. Proporcionar opciones para Captar el Interés											
E.RI.1. Ofrecer opciones que permitan la personalización en la presentación de la información				E.RI. 2. Optimizar la relevancia, el valor y la autenticidad				E. RI. 3. Minimizar distracciones			
Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea
8	26	23	8	21	17	32	73	31			
57				46				136			
				239							
E.SEP. Proporcionar opciones para Mantener el Esfuerzo y la Persistencia											
E. SEP. 1. Aumentar la relevancia de las metas y los objetivos. Establezca una visión del objetivo y por qué es importante.			E. SEP. 2. Variar las exigencias y los recursos para optimizar el reto			E. SEP. 3. Fomentar la colaboración y la comunidad			E. SEP. 4. Aumentar la retroalimentación orientada a la maestría		
Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea
53	55	34	14	14	4	12	48	4	10	125	69
142			32			64			204		
						442					
E.SR. Ofrecer opciones de Autorregulación											
E.SR.1. Promover expectativas y creencias que optimicen la motivación				E. SR. 2. Facilitar habilidades y estrategias personales de afrontamiento.				E.SR.3. Desarrollar la autoevaluación y la reflexión			
Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea
3	37	14	6	5	2	23	30	10			
54				13				63			
				130							
Total Compromiso: 811											

Tabla 36

Resultados Globales y de los Tres Docentes Respecto a las Evidencias del Principio de Representación

Representación (R)														
R.P. Proporcionar opciones para la Percepción														
R.P. 1. Ofrecer formas de personalizar la visualización de la información						R.P. 2. Ofrecer alternativas para la información auditiva			R.P. 3. Ofrecer alternativas para la información visual					
Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea
9	18	23	26	14	10	8	2	16						
50						50						26		
126														
R.LS. Proporcionar opciones para Lengua y símbolos														
R.LS.1. Aclarar el vocabulario y los símbolos			R.LS. 2. Aclarar la sintaxis y la estructura			R.LS. 3. Descodificación de texto, notación matemática y símbolos			R.LS. 4. Promover la comprensión entre idiomas			R.LS. 5. Ilustrar a través de múltiples medios		
Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea
8	5	4	0	1	1	17	5	6	0	0	0	28	8	31
17			2			28			0			67		
114														
R.C. Proporcionar opciones para la Comprensión														
R.C.1. Activar o proporcionar conocimientos previos. Establecer conexiones con conocimientos y experiencias anteriores.			R.C.2. Resalte patrones, características críticas, grandes ideas y relaciones. Acentuar la información importante y cómo se relaciona con el objetivo de aprendizaje.			R.C.3. Guiar el procesamiento y visualización de la información. Apoye el proceso de creación de significado a través de modelos, andamios y retroalimentación			R.C.4. Maximizar la transferencia y la generalización. Aplicar el aprendizaje a nuevos contextos					
Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea
10	9	12	74	36	71	73	35	92	12	31	46			
31			181			200			89					
501														
Total Representación: 741														

Tabla 37

Resultados Globales y de los Tres Docentes Respecto a las Evidencias del Principio de Acción y Expresión

Acción y Expresión (AE)											
AE.PA. Acción Física. Interactuar con materiales y herramientas accesibles.											
AE.PA1. Variar los métodos de respuesta y navegación.						AE.PA 2. Optimizar el acceso a herramientas y tecnologías de asistencia. Abrir puertas al aprendizaje con herramientas y dispositivos accesibles.					
Ester	Federico		Andrea			Ester	Federico		Andrea		
0	8		5			0	0		0		
13						0					
13											
AE.EC. Proporcionar opciones para Expresión y Comunicación											
AE.EC.1. Utilizar múltiples medios para la comunicación. Expresar el aprendizaje de manera flexible.			AE.EC.2. Utilizar múltiples herramientas para la construcción y composición. Compartir pensamientos e ideas utilizando herramientas que complementen el objetivo de aprendizaje.			AE.EC.3. Desarrollar fluidez con niveles graduados de apoyo para la práctica y el desempeño. Aplicar y liberar gradualmente estructuras para apoyar el aprendizaje independiente.					
Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea
5	28	30	3	1	16	6	15	42			
63			20			63					
146											
AE.EF. Proporcionar opciones para las Funciones Ejecutivas											
AE.EF.1. Guiar el establecimiento apropiado de objetivos. Practicar establecer metas desafiantes y auténticas.			AE.EF.2. Apoyar la planificación y el desarrollo de estrategias. Formular planes razonables para alcanzar las metas			AE.EF.3. Facilitar la gestión de la información y los recursos. Apoyar la organización y la memoria utilizando herramientas y procesos flexibles.			AE.EF.4. Mejorar la capacidad para monitorear el progreso. Analizar el crecimiento a lo largo del tiempo y cómo construir a partir de él.		
Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea	Ester	Federico	Andrea
14	21	30	19	14	44	21	24	24	11	33	33
65			77			69			77		
288											
Total Acción y Expresión: 447											

Tabla 38

Unidades de Información de los Tres Docentes que Ejemplifican las Directrices y Puntos de Verificación del Principio de Compromiso

PRINCIPIO DE COMPROMISO (E)				
Directriz: Proporcionar opciones para Captar el Interés (E.RI.)				
Punto de verificación	de	Ejemplo de unidad de información	Unidad	Profesor/a
E.RI.2. Optimizar relevancia, valor y autenticidad		<i>Vale, mira, vamos a contextualizar. Estamos en un museo. Como el que hay en Londres. Se llama el Museo Natural. Seguramente te guste ir allí porque es un museo donde es gratis. En Londres, en la mayoría de los museos es gratis entrar. Yo entré y hay un montón de especies relacionadas con la naturaleza. Hay dinosaurios. Hay otra parte que es de animales marinos, delfines, ballenas. Después hay otra parte relacionada con los monos, con el homo sapiens, con la evolución humana. Hay otra parte de animales disecados. Hay leones, tigres... Es un museo muy, muy bonito. Entonces, aquí nos está hablando de dinosaurios. Yo creo, además, por la foto, que es el Museo Natural de Londres donde hay esos esqueletos de dinosaurios. Sigue, EstudianteA.</i>	U11-A	ANDREA
E.RI.3. Minimizar distracciones		<i>[Con voz alta, calmada y marcando cada palabra] Chicos, 5 minutos, y vamos a elegir una persona de cada grupo, por favor, que exponga la reflexión y la conclusión a la que habéis llegado en grupo. ¿Vale? Y luego, vamos a intentar, a ver si hemos obtenido algún tipo de conclusión, para poder calcular otros dinosaurios de mayor altura.</i>	U159-F	FEDERICO
Directriz: Proporcionar opciones para Mantener el Esfuerzo y la Persistencia				
E.SEP.1. Marcar las metas y objetivo		<i>¿Tú entiendes esa figura de las cajas? La forma puesta, en forma de escalera. ¿Y entiendes que una caja mide un metro de altura? ¿Y entiendes que si yo apilo las cajas de esta forma [señala el dibujo del enunciado sobre la pizarra digital], subo dos metros? Un metro y otro metro, ¿no? Y con cuatro metros necesito 1, 2, 3 y cuatro, lo que pasa es que yo voy rellenando la escalera hasta que está completa, ¿no? ¿Eso lo entiendes bien? Tu dificultad ahora pasa que de 4 a 8 no, así de pronto no eres capaz de decirme cuántas.</i>	U63-E	ESTER
E.SEP.2. Variar las exigencias y recursos para optimizar el nivel de reto		<i>La cuenta la vieja ¿no? ¿Y si en vez de 20 metros te digo 50 metros y te digo ya no vale la cuenta de la vieja?</i>	U169-E	ESTER
E.SEP.3. Promover la colaboración y la comunidad		<i>Escúchalo, escúchalo [se dirige a un estudiante para que oiga la idea de un compañero] porque... es que a lo mejor no lo estás viendo tú [se refiere a una estrategia].</i>	U178-F	FEDERICO
E.SEP.4. Utilizar el feedback orientado hacia la maestría en una tarea		<i>Pues mira. ¿Tú crees que eso está bien?, Porque tú has dicho si no me da con la suma, lo voy a multiplicar. Vale, pero comprueba si está bien. A ver si no va, está bien. Y yo me lo voy a creer y vamos a confundir aquí a todo el personal y nos van a pegar a ti y a mí por confundir a todos. Venga, piénsalo.</i>	U223-A	ANDREA
Directriz: Proporcionar opciones para la Autorregulación (E.SR)				
E.SR.1. Promover expectativas y creencias optimicen la motivación		<i>Federico: ¿Cómo lo habéis averiguado? En esta altura 3... ¿cuántas cajas hay ahí? Estudiante2: [Pensando] ¡6! ¿Quién ha escrito eso? Federico: Pues el grupo. Lo habéis hecho en grupo.</i>	U133-F	FEDERICO

		<i>Estudiante: Ahora lo estamos haciendo en privado [se ríe].</i> <i>Estudiante3: Yo lo he hecho.</i> <i>Federico: ¿Lo habéis contado? [niños inseguros, titubeando]. He visto que los habéis ido contando.</i>		
E.SR.2.	Facilitar estrategias y habilidades personales para afrontar situaciones y problemas	Federico: Pero sí se cumple... mira. Si se cumple, ¿dónde estaría? Estudiante5: Aquí, más cajas [sobre su tabla han hecho una representación que relaciona alturas]. Federico: Pues ponlo. Esta es que has sumado tres cajas, ¿no? Porque dices que son 3 (de altura). Si habéis llegado a este razonamiento, para pasar de este a este le has sumado las cajas parecidas, ¿no?	U154-F	FEDERICO
E.SR.3.	Desarrollar la autoevaluación y autorreflexión	Ester: ¿Qué hemos hecho aquí? Un cuadrado de... Estudiante19: ocho por ocho. Ester: 8x8. Vale. Que sería todo esto [señala el cuadrado]. Pero el cuadrado que falta que hemos quitado. ¿De cuánto es? Estudiantes: De siete por siete.	U205-E	ESTER

Tabla 39

Unidades de Información de los Tres Docentes que Ejemplifican las Directrices y Puntos de Verificación del Principio de Representación

PRINCIPIO DE REPRESENTACIÓN (R)				
Directriz: Proporcionar opciones para La Percepción (R.P.)				
Punto de verificación		Ejemplo de unidad de información	Unidad	Profesor/a
R.P.1.	Ofrecer opciones para personalizar la presentación de la información	<i>Os he traído refuerzo para que lo hagáis así [señala el organizador].</i>	U117-F	FEDERICO
R.P.2.	Ofrecer alternativas para la información auditiva	<i>Toma este rotulador y marca la diagonal [otro color]. Porque alguno, alguno ha escuchado diagonal está diciendo la diagonal... eso qué era, chino... japonés...o no sé. Marca la diagonal.</i>	U319-A	ANDREA
R.P.3.	Ofrecer alternativas para la información visual	<i>No, no me estás entendiendo. ¿Cuánto mide el Velociraptor? [EstudianteL responde 2 metros] Entonces. ¿Qué altura necesito para alcanzar al Velociraptor? [EstudianteL titubea... dos metros]. Claro, necesito dos metros. Pero claro, si yo pongo un cajón encima de otro: Bing, bing, Bing. Solo uno. ¿Qué es lo que va a pasar? Que es muy inestable y se va a caer. Entonces los apilas de esta manera. [señala el enunciado proyectado] Siempre va poniendo una base y va subiendo para que sea más estable en forma de escalera. ¿Hasta ahí lo tenemos claro?</i>	U32-E	ESTER
Directriz: Proporcionar opciones para Lengua y símbolos (R.LS))				
R.LS.1.	Clarificar símbolos/ vocabulario	<i>[...] ¿Tenéis claro qué es un arqueólogo?</i>	U4	FEDERICO
R.LS.2.	Clarificar sintaxis	<i>¿Entendido? Si lo podéis hacer como tenéis ahí [en el enunciado], con la goma Eva, vais haciendo las escaleras. Podéis ir poniendo en vuestra tabla que os han entregado, la solución a cada uno de ellos, e ir haciendo un poquito de trabajo de lógica. ¿de acuerdo? Pues venga. [niño le pregunta si puede usar el material] Claro, porque si quieres ir poniendo encima de la mesa las cajas, lo podéis hacer como queráis [se va a su mesa].</i>	U6-E	ESTER

R.LS.3.	Facilitar de textos y símbolos	<i>EstudianteS, vamos a suponer el Velociraptor, que es el que tiene dos metros. Ya hemos explicado por qué apilamos las cajas de esa manera y no solamente una encima de otra, ¿vale? La altura que necesito son dos metros. ¿Cuántos cajones necesito apilar? [EstudianteS contesta tres] Tres para no poner solamente uno encima del otro, que es muy inestable y no puedo hacerlo. Entonces utilizo tres cajas [completa su tabla de la pizarra].</i>	U36-E	ESTER
R.LS.4.	Promover comprensión entre idiomas	-		
R.LS.5.	Ilustrar mediante distintos medios	<i>Una pregunta: ¿Le encontráis algún tipo de relación con el que hicimos la semana pasada? El del palito que hicimos, el de los monigotes. ¿Le encontráis relación? EstudianteT dice que sí, ¿Qué relación le encuentras, EstudianteT?</i>	U212-F	FEDERICO
Directriz: Proporcionar opciones para la Comprensión (R.C)				
RC1.	Activar conocimientos previos	<i>Uno más abajo. ¿A qué te refieres? A una fila. [EstudianteD contesta "Sí"]. Explicáte con propiedad, que sabes perfectamente la diferencia entre fila y columna. Yo le añado una fila [dibuja en la pizarra una fila más a la figura de cuatro metros]. Al añadirle uno de arriba ya está añadida, Aquí ha subido uno, ¿verdad? 12345. ¿Tengo ya cinco metros? Sí. ¿Cuántos cubitos, cuántos cajones hay ahí?</i>	71-E	ESTER
RC2.	Señalar patrones, aspectos clave o características	<i>Pero yo digo de esto (de lo que estaban haciendo) En el de tres. Digo, el área del cuadrado es tres por tres, pero no está el cuadrado completo. Me faltan tres. Que realmente coincide con la altura que tú has buscado. Y ahora digo yo: Vamos a ver si hay una relación.</i>	170-A	ANDREA
RC3.	Guiar el procesamiento de la información y la visualización	<i>¿Habéis entendido eso? Eso que ha dicho es fundamental para entenderlo. ¿No lo has entendido EstudianteA? Mira, dice: EstudianteG se ha ido al de cuatro y dice cuatro por cuatro 16 cuadrados. [EstudianteG comenta que "es el área de 12"]. A ver, como se me queda sin cubrir en esa escalera ... ¿justamente es la mitad lo que se queda sin cubrir? y dice no...</i>	326-A	ANDREA
RC4.	Maximizar la transferencia y generalización	<i>Estaba pensando en esto y me acordaba de la excursión. ¿Recordáis la experiencia que hicisteis subiendo a las cajas que las íbamos apilando una encima de la otra? ¿Qué pasaba?</i>	U15-F	FEDERICO

Tabla 40

Unidades de Información de los Tres Docentes que Ejemplifican las Directrices y Puntos de Verificación del Principio de Acción y Expresión

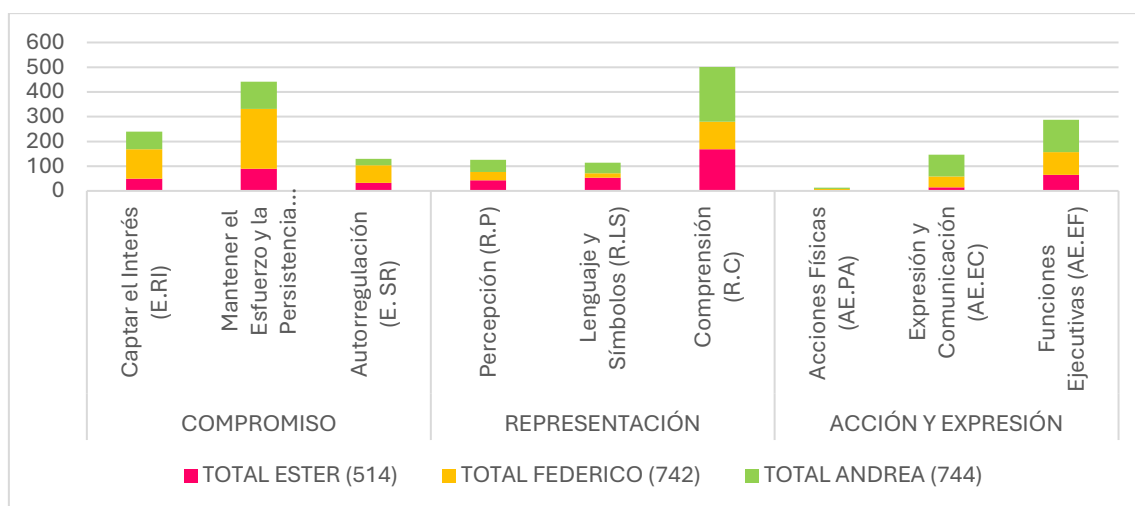
PRINCIPIO DE ACCIÓN Y EXPRESIÓN (AE)				
Directriz: Proporcionar opciones para la Acción Física (AE.PA)				
Punto de verificación	de	Ejemplo de unidad de información	Unidad	Profesor/a
AE.PA.1. Variar los métodos de respuesta y navegación	los de	<i>Os dejo esto por aquí para que construyáis [piezas de goma Eva].</i>	U59-F	FEDERICO
AE.PA.2. Optimizar el acceso a herramientas y	el acceso a	-		

tecnologías de apoyo				
Directriz: Proporcionar opciones para la Acción y Expresión (AE.EC)				
AE.EC.1. Usar múltiples medios de comunicación		Vale. Esto es para subir a un dinosaurio de un metro [sobre la producción de los niños]. ¿Y para subir a uno de dos metros?	U103-F	FEDERICO
AE.EC.2. Usar múltiples herramientas para construir y componer		Esas dos líneas que has hecho ahí, EstudianteR, ¿qué es? Explícamelo. EstudianteU, ¿ya lo has hecho? [contesta que sí]. Pues mira a ver, acuérdate del del otro día, ¿vale? ¿Te acuerdas de que había una relación? Pues mira, a ver tú, ¿qué relación hay de este a este, de este a este, de este a este [sobre el organizador de EstudianteU]... Mira a ver. EstudianteR, a ver, explícamelo [EstudianteR titubea porque se le mueven los cuadraditos] Da igual, yo me imagino esto bien...	U132-A	ANDREA
AE.EC.3. Definir competencias con niveles de apoyo graduados para la práctica y la ejecución		Ten en cuenta que lo que tú estás creando es una escalera. Si tú rellenas huecos, no tienes paso de escalón. Si yo consigo subir este escalón [sobre la goma Eva] pero aquí pongo otra caja, qué tengo que hacer, así [simula un salto sobre las cajas de goma Eva].	U84-F	FEDERICO
Directriz: Proporcionar opciones para las Funciones Ejecutivas (AE.EF)				
AE.EF.1. Guiar el establecimiento adecuado de metas		Pero mira aquí. Vale, vale, vale. Se le pone...Mira, yo te voy a ir diciendo y haciendo lo que tú me vas diciendo, para que tú lo pienses. De lo que tú me vayas diciendo, yo te voy a decir lo que yo entiendo. ¿Vale? Ahora tú me dices: No, maestro, yo eso no lo quiero decir, o sí. Venga, repíteme lo que me has dicho.	197-A	ANDREA
AE.EF.2. Apoyar el Desarrollo de estrategias y la planificación		Es una buena idea. Es decir, lo que me estás diciendo es que, si yo pongo 50 por 50, hallo todos estos cuadrados. Y si ahora lo divido entre dos, he quitado la mitad de los cuadrados [va señalando sobre el dibujo de la pizarra].	190-E	ESTER
AE.EF.3. Facilitar la gestión de la información y los recursos		Vale, mirad, yo ahora os aconsejo que quien haya construido la figura, no mováis la figura de la mesa y con el lápiz, vayáis poniendo por aquí, en la mesa, con lápiz o encima o debajo, el número de metros que va alcanzando.	U100-A	ANDREA
AE.EF.4. Impulsar la capacidad de monitoreo		¿Lo podéis poner ahí? [el razonamiento escrito] Lo que me habéis dicho antes. Tú me has dicho, si quiero llegar a tal tengo que añadir tal. ¿Lo puedes comprobar, a ver si sirve?	U152-F	FEDERICO

Respecto a los puntos de verificación, aunque hay indicios de las directrices de todos los principios, descritos en las Tablas 38, 39 y 40, destacamos cuatro de ellos (ver Figura 73).

Figura 73

Gráfico Comparativo de los Resultados de los Tres Estudios de Caso Respecto a las Directrices de Cada Principio del DUA



La directriz E.R.I (*Captar el interés*) se observa en la sesión de los tres docentes, considerando el papel del contexto y la implicación de los estudiantes al resolver un problema. Sin embargo, el mayor número de evidencias del primer principio del DUA va ligado a los puntos de verificación de E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*), vinculada a retroalimentar las estrategias de los estudiantes para la comprensión del enunciado y el desarrollo de estrategias de resolución. Esa comprensión parece reflejarse en el mayor número de puntos de verificación de R.C (*Comprensión*) del principio de Representación, relacionados con las distintas formas de visualizar y transmitir el contenido del problema. Por último, la directriz AE.EF (*Funciones ejecutivas*) es la más destacable del principio de Acción y Expresión, relacionado con prácticas destinadas a propiciar las habilidades de gestión de los datos, planificación y desarrollo autónomo de estrategias de resolución.

IV.4.4. La perspectiva dual: matemáticas e inclusión

Los dos epígrafes anteriores han abordado una visión global de los resultados del análisis de las unidades de información de los docentes, atendiendo a los indicadores del MTSK y los criterios asociados a los puntos de verificación del DUA. En este epígrafe el objetivo es describir la coocurrencia de estos dos focos de estudio, dado que la práctica docente puede analizarse desde las dos perspectivas.

IV.4.4.1. La relación entre el MTSK y DUA: Subdominios y principios

Una primera aproximación a la coocurrencia entre los principios del DUA y los subdominios de MTSK evidenciados en las tres sesiones resulta en un entramado de relaciones que representamos en la Figura 74. Una de las ventajas de la representación mediante el diagrama es que permite cuantificar las relaciones entre cada nodo a través de la visualización, dado que el grosor de las conexiones es directamente proporcional al valor numérico de las mismas. Los valores que etiquetan cada nodo del diagrama se corresponden con el número total de vínculos con el resto de las variables representadas. Complementamos la Figura 74 con la Tabla 41, que detalla el valor numérico de esta coocurrencia y la relación proporcional entre el número de evidencias de manifestaciones de cada subdominio y el valor de coocurrencia entre estos y las directrices, dado que consideramos que estos valores se ven influidos por el número total de manifestaciones de conocimiento. La Tabla 41 muestra valores absolutos, que se refieren al número de unidades que muestran evidencias simultáneas de cada subdominio y principio; y valores relativos, que se obtienen estableciendo una relación entre el valor absoluto de esa coocurrencia y el número total de evidencias del subdominio. Por ejemplo, la coocurrencia de Compromiso y conocimiento de los temas (KoT) se define en términos de 78 como valor absoluto, que refiere a 78 unidades en las que se observan simultáneamente descriptores del subdominio y criterios del principio. Como valores relativos, señalamos 3,5454 como valor resultante de la proporción establecida entre las 78 unidades con evidencias de ambos elementos y las 22 unidades en las que se manifiesta KoT.

Para facilitar la lectura del análisis considerando los numerosos valores encontrados, agrupamos los valores de coocurrencia relativo en tres niveles: el primer nivel, en el que el valor relativo de las relaciones es mayor o igual que 4, el segundo nivel en el que el valor relativo es mayor o igual que 2 y menor que 4, y el tercer nivel que engloba las relaciones con valor relativo inferior a 2.

Figura 74

Gráfico que Relaciona la Coocurrencia de los Subdominios de Conocimiento (MTSK) con los Principios del DUA

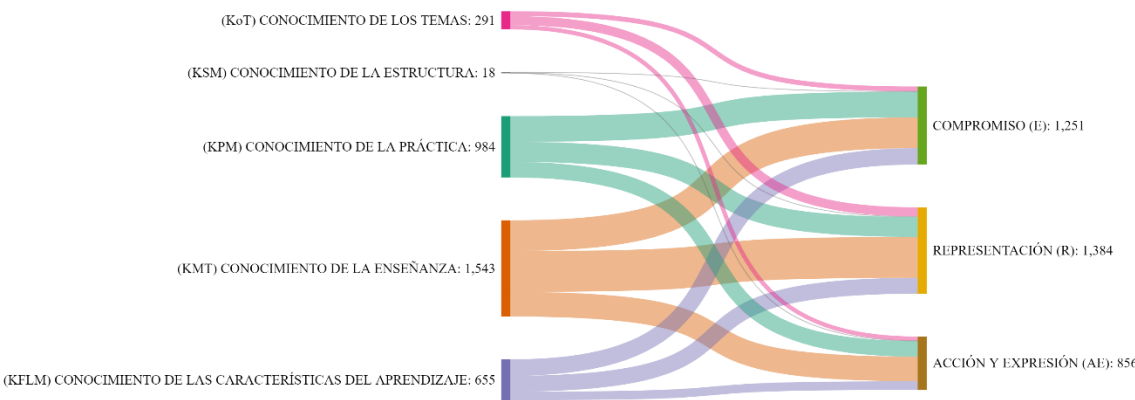


Tabla 41

Resultados del Análisis de Coocurrencia Entre los Subdominios y los Principios del DUA, en Términos de Valores Absolutos y Relativos.

Subdominio y nº de evidencias	COMPROMISO (812)		REPRESENTACIÓN (741)		ACCIÓN Y EXPRESIÓN (447)	
	Valor absoluto	Valor relativo	Valor absoluto	Valor relativo	Valor absoluto	Valor relativo
KOT (22)	78	3,5454	145	6,5909	68	3,0909
KSM (1)	5	5	9	9	4	4
KPM (95)	412	4,3368	321	3,37894	251	2,6421
KMT (121)	493	4,07438	655	5,413223 14	395	3,264462 81
KFLM (55)	263	4,781818 18	254	4,618181 82	138	2,509090 91

Nota: Los colores de las celdas se corresponden con los niveles de coocurrencia: nivel 1 ($r \geq 4$) en amarillo, nivel 2 ($2 \leq r < 4$) en verde y nivel 3 ($r < 2$) en azul

Los datos señalan que no hay una correspondencia absoluta entre los subdominios y los principios de inclusión. El grosor de cada nodo del gráfico anterior indica el número de nexos asociados. Atendiendo a los principios del DUA, observamos una mayor presencia de relaciones asociadas a los principios de Compromiso (1251) y Representación (1384), mientras que desde el conocimiento especializado destacan los nodos de KPM (*Conocimiento de la práctica matemática*) (984) y KMT (*Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*) (1543).

Al observar el diagrama desde el valor absoluto de las relaciones, este destaca los vínculos entre KoT-Representación y KMT-Representación con 145 y 655 valores de coocurrencia, respectivamente y la relación KPM-Compromiso (412). El subdominio KFLM (*Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas*) parece estar vinculado al mismo nivel con los principios de Compromiso (263) y Representación (254). Trasladando la visión a los principios del DUA, podemos destacar los vínculos Compromiso-KPM e Compromiso-KMT, que duplican o cuadriplican al resto de valores de este principio. El principio de Representación es el que muestra un mayor número de relaciones con los subdominios, aunque predomina la relación con KMT (*Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*), como hemos señalado previamente. Por último, destacamos la relación del principio de Acción y Expresión con KPM (*Conocimiento de la práctica matemática*) (251) y KMT (*Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*) (395).

Atendiendo al valor de coocurrencia relativo, encontramos evidencias del primer y segundo nivel. En el primer nivel (≥ 4) encontramos la mayoría de las relaciones con el principio de Representación e Compromiso. Señalamos especialmente las relaciones del nodo KSM (*Conocimiento de la estructura de las matemáticas*), puesto que la única evidencia del subdominio presenta una relación con Compromiso (5), además del valor relativo de coocurrencia mayor del análisis con el principio de Representación (9). Otras relaciones destacables se establecen entre KoT-Representación (6.59) y KMT-Representación (5.413). En el segundo nivel ($2 \leq r < 4$), encontramos las relaciones con el principio de Acción y Expresión, destacando la coocurrencia entre KPM (*Conocimiento de la práctica matemática*) y KFLM (*Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas*) y Acción y Expresión por mostrar valores significativamente menores.

Si cambiamos la visión del diagrama hacia las directrices de cada principio del DUA y cada una de las categorías de los subdominios del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas, podemos observar la coocurrencia a un nivel más micro, descrito en el siguiente epígrafe.

IV.4.4.2. La relación MTSK-DUA: Categorías y directrices

El análisis adquiere una mayor complejidad, representada en el gráfico (Figura 75), que muestra las relaciones entre los 20 nodos correspondientes a las 10 categorías de los subdominios evidenciadas (izquierda), y las nueve directrices (tres por cada principio, a la derecha del gráfico). Para complementar la lectura del gráfico, de nuevo recurrimos a la visión de los datos numéricos de la coocurrencia entre cada uno de estos nodos mediante la Tabla 42, en términos de valores absolutos y relativos. Los siguientes epígrafes desglosan los resultados observados desde la perspectiva de cada subdominio y categoría y directriz y punto de verificación. Los apartados finales detallan el análisis resaltando los resultados obtenidos de la sesión de cada docente de este estudio.

Poniendo el foco en las categorías de conocimiento, observamos un mayor número de conexiones de aquellas asociadas al Conocimiento didáctico del contenido, PCK, (2198) que al Conocimiento matemático, MK, (1293). Resaltamos que solo las relaciones del nodo conocimiento sobre Estrategias, técnicas y ejemplos (1140) (categoría del *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*, KMT, parte del PCK) se aproxima al total del conocimiento matemático.

Las directrices R.C (*Comprensión*) y E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) evidencian el mayor número de conexiones con cada uno de los nodos de conocimiento especializado, destacando especialmente los valores de coocurrencia con Estrategias, Técnicas y Ejemplos (308 con R.C.; 195 con E.SEP).

Figura 75

Gráfico de Coocurrencia Entre las Categorías de MTSK (Izquierda) y Directrices del DUA (Derecha)

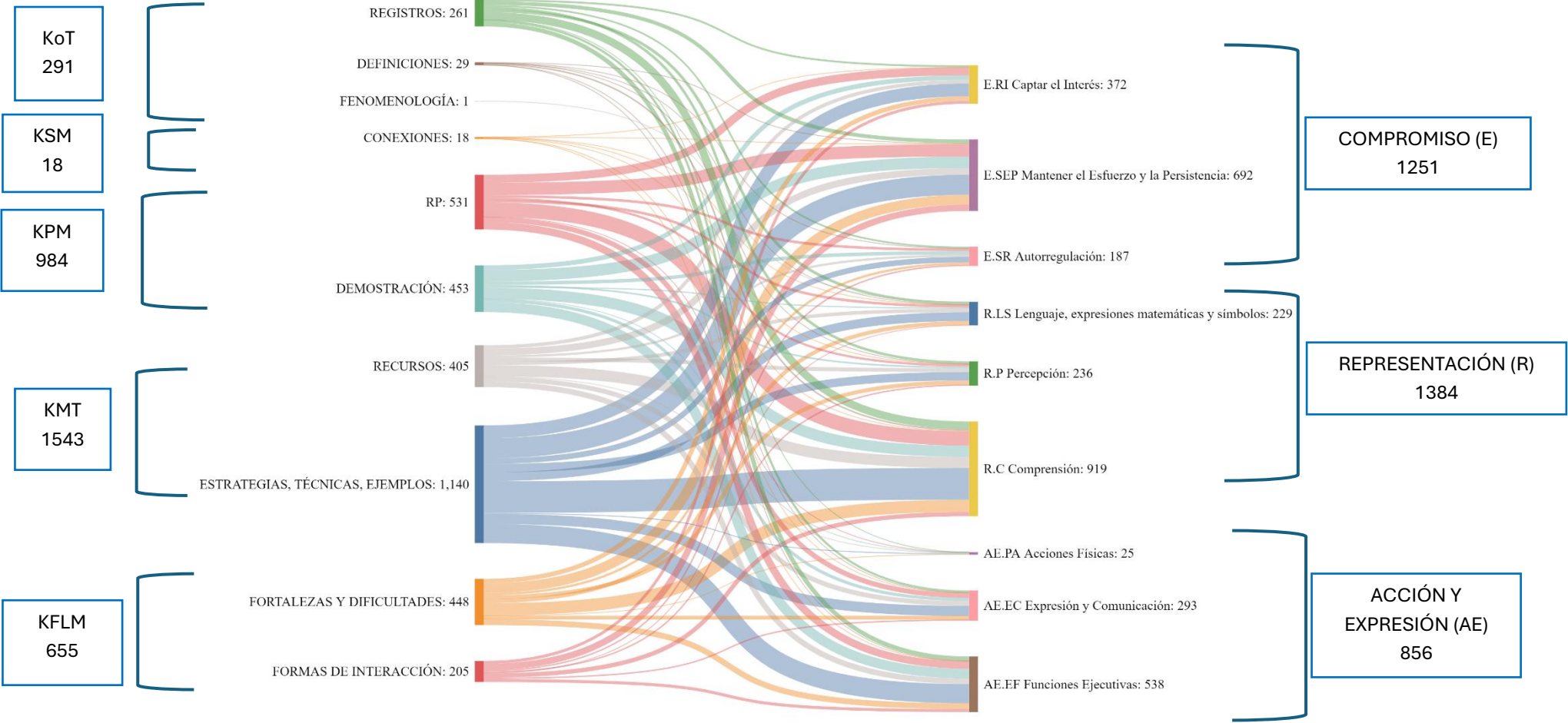


Tabla 42

Relaciones Relativas (R) y Absolutas (A) de la Coocurrencia DUA-MTSK

SUBDOMINIO CATEGORÍA Y ° DE EVIDENCIAS		VALOR	COMPROMISO (E)									REPRESENTACIÓN (R)										ACCIÓN Y EXPRESIÓN (AE)											
			Captar el Interés (E.RI)			Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (E.SEP)				Autorregulació n (E. SR)		Percepción (R.P)			Lenguaje y Símbolos (R.LS)				Comprensión (R.C)			Acciones Físicas (AE.PA)		Expresión y Comunicación (AE.EC)			Funciones Ejecutivas (AE.EF)						
			E.RI.1	E.RI.2	E.RI.3	E.SEP.1	E.SEP.2	E.SEP.3	E.SEP.4	E.SR.1	E.SR.2.	E.SR.3	R.P.1	R.P.2	R.P.3	R.LS.1	R.LS.2	R.LS.3	R.LS.4	R.LS.5	R.C.1	R.C.2	R.C.3	R.C.4	AE.PA.1	AE.PA.2	AE.EC.1	AE.EC.2	AE.EC.3	AE.EF.1	AE.EF.2	AE.EF.3	AE.EF.4
K o T	Registros (17)	A	2	5	11	14	4	4	14	3	1	12	9	12	4	5	1	2	0	19	7	32	31	5	1	0	6	2	13	11	12	11	8
			18			36				16			25			27				75			1		21			42					
		R	1.058823			2,11764				0.941176			1.47059			1.588235				4.41176			0.0588235		1.2353			2.4706					
	Definiciones (4)	A	0	0	0	0	1	0	5	0	0	2	1	0	1	0	0	0	1	1	4	5	4	0	0	1	0	1	0	0	1	1	
			0			6				2			2			1				14			0		2			2					
		R	0			1,5				0,50			0.5			0.25				3.5			0		0.5			0.5					
Fenomenología (1)	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
		0			0				0			0			1				0			0		0			0						
	R	0			0				0			0			1				0			0		0			0						
K S M	Conexiones T. (1)	A	0	0	1	3	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	3	3	0	0	0	0	0	2	1	1	0	0	
			1			4				0			2			1				6			0		2			2					
		R	1			4				0			2			1				6			0		2			2					
K P M	Resolución de problemas (50)	A	19	20	39	49	4	24	42	12	1	12	7	9	5	3	0	8	0	14	13	51	51	25	3	0	15	8	25	22	18	15	17
			78			119				25			21			25				140			3		48			72					
		R	1.56			2.8				0.5			0.42			0.5				2.8			0.06		0.96			1.44					
M	Demostraciones (45)	A	15	7	23	33	13	19	46	14	5	15	6	8	2	0	0	4	0	7	2	45	43	18	3	0	17	2	11	27	30	17	21
			45			111				34			16			11				108			3		30			95					
		R	1			2.46666				0.75555556			0.355555556			0.24444444				2.4			0.0666667		0.666667			2.11111					
K M T	Recursos (25)	A	8	8	18	15	5	6	39	6	3	12	20	13	5	0	3	12	0	19	3	37	44	24	5	0	24	6	16	13	13	19	9
			34			65				21			38			34				108			5		46			54					
		R	1,36			2,6				0,84			1.52			1.36				4.32			0.2		1.84			2.16					
	A		36	33	55	92	12	9	82	18	3	33	29	39	13	12	0	23	0	51	23	122	124	39	8	0	26	17	55	50	47	43	46
			124			195				54			81			86				308			8		98			186					

Estrategias, Técnicas y Ejemplos (96)		R	1.29166667			2.03125			0.5625			0.84375			0.89583333			3.21			0.083333			1.02083333			1.9375						
K F L M	Fortalezas y Dificultades (36)	A	13	10	21	30	8	4	52	11	1	10	10	18	10	5	1	9	0	23	6	40	49	23	5	0	13	3	17	11	12	16	17
			44			94			22			38			38			118			5			33			56						
	R	1,222222222			2,611111111			0,611111111			1.055555556			1.055555556			3.28			0.138889			0.916666667			1.555555556							
	Formas De Interacción (19)	A	9	6	13	17	8	12	25	8	2	3	6	3	4	0	0	0	0	5	4	20	14	4	0	0	5	2	6	6	6	6	11
		28			62			13			13			5			42			0			13			29							
	R	1,473684211			3,263157895			0,6842			0.6842			0.2631			2.2105			0			0.684210526			1.526315789							

Nota: Los colores de las celdas se corresponden con los niveles de coocurrencia: nivel 1 ($r \geq 4$) en amarillo, nivel 2 ($2 \leq r < 4$) en verde y nivel 3 ($r < 2$) en azul. Si el valor de la coocurrencia es cero, la celda tiene color naranja

Complemento a la Tabla 42: Principios, directrices y puntos de verificación de DUA.

Principio 1: Implicación (E)				Principio 2: Representación (R)				Principio 3: Acción y Expresión (AE)			
Directriz: Captar el Interés (E. RI)				Directriz: Percepción (R.P.)				Directriz: Acciones Físicas (AEPA)			
E.RI.1. Optimizar la elección individual y autonomía	E.RI.2. Optimizar relevancia, valor y autenticidad	E. RI. 3. Minimizar distracciones		RP. 1. Ofrecer opciones personalizar presentación de la información	RP. 2. Ofrecer alternativas para la información auditiva	RP. 3. Ofrecer alternativas para la información visual		AEPA1. Variar los métodos de respuesta y navegación	AEPA2. Optimizar el acceso a herramientas y tecnologías de apoyo		
Directriz: Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (E.SEP)				Directriz: Lenguaje, expresiones matemáticas y símbolos (RLS)				Directriz: Expresión y Comunicación (AEEC)			
E. SEP. 1. Marcar las metas y objetivos	E. SEP. 2. Varias las exigencias y recursos para optimizar el reto	E. SEP. 3. Promover la colaboración y la comunidad	E. SEP. 4. Utilizar el feedback orientado hacia la maestría en una tarea	RLS. 1. Clarificar símbolos/ vocabulario	RLS. 2. Clarificar sintaxis	RLS. 3. Facilitar decodificación de textos y símbolos	RLS. 4. Promover comprensión entre idiomas	RLS. 5. Ilustrar mediante distintos medios	AEEC1. Usar múltiples medios de comunicación	AEEC2. Usar múltiples herramientas para construir y componer	AEEC3. Definir competencias con niveles de apoyo graduados para la práctica y la ejecución
Directriz: Autorregulación (E. SR)				Directriz: Comprensión (C)				Directriz: Funciones Ejecutivas (AEEF)			
E. SR. 1. Promover expectativas y creencias y optimicen la motivación	E. SR. 2. Facilitar estrategias y habilidades personales para afrontar situaciones y problemas	E. SR. 3. Desarrollar la autoevaluación y autorreflexión		RC1. Activar conocimientos previos	RC2. Señalar patrones, aspectos clave o características	RC3. Guiar el procesamiento de la información y la visualización	RC4. Maximizar la transferencia y generalización		AEEF1. Guiar el establecimiento adecuado de metas	AEEF2. Apoyar el desarrollo de estrategias y la planificación	AEEF3. Facilitar la gestión de la información y los recursos
											AEEF4. Impulsar la capacidad de monitoreo

Presentaremos los datos primero en términos absolutos. Si observamos, en la Tabla 42, las categorías de KoT (*Conocimiento de los temas*), *Registros* evidencia un mayor número de relaciones (261) que *Definiciones y Fenomenología* (30), en concordancia con las 16 evidencias de indicadores en las sesiones de los tres docentes, muy superior a las de las 5 de las otras dos categorías. Destacan las conexiones de *Registros* y *Definiciones* con R.C (*Comprensión*), 75 y 14 nexos respectivamente. El gráfico señala además un vínculo de mayor grosor entre los nodos *Registros* y E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) (36) y AE.EF (*Funciones Ejecutivas*) (42).

El número de vínculos en los nodos de categorías de KPM (*Conocimiento de la práctica matemática*) aumenta considerablemente respecto a las anteriores. Se observan vínculos de las 50 evidencias de *Resolución de problemas* y las 45 de *Demostraciones* con los nodos E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) (119 y 111, valores significativamente similares), R.C (*Comprensión*) (140 y 108) y AE.EF (*Funciones Ejecutivas*) (72 y 95), y un nexo entre resolución de problemas y E.RI (*Captar el Interés*) (78). Aunque los valores son inferiores, encontramos una similitud en los valores de los nexos *Demostraciones*- E.RI (*Captar el Interés*) (45) y *Resolución de problemas* - AE.EC (*Expresión y Comunicación*) (48).

Respecto a las categorías de conocimiento didáctico del contenido (PCK), el nodo asignado a la categoría *Recursos* muestra 405 conexiones con las directrices del DUA, de las que destacamos las 65 vinculantes a E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) 65 y las 108 a R.C (*Comprensión*). Otros nexos relevantes enlazan el conocimiento sobre recursos con indicadores del principio de Acción y Expresión, concretamente AE.EC (*Expresión y Comunicación*) (46) y AE.EF (*Funciones Ejecutivas*) (54). El siguiente nodo, *Estrategias, Técnicas y Ejemplos*, refleja 1148 nexos con el DUA. Las 96 evidencias de esta categoría muestran un valor elevado de coocurrencia con elementos de la práctica inclusiva en términos de E.RI (*Captar el Interés*) (124), E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) (195), R.C (*Comprensión*) (308) y AE.EF (*Funciones Ejecutivas*) (186). Otros nexos a destacar se refieren al quinto punto de verificación de R.LS (*Lenguaje y Símbolos: Ilustrar mediante distintos medios (R.LS.5)*), que presenta 51 de los 86 asignados a esta

conexión. Algo similar ocurre con el tercer punto de verificación de AE.EC (*Expresión y Comunicación: Definir competencias con niveles de apoyo graduados para la práctica y la ejecución (AE.EC.3)*), que representa 55 de los 98 nexos totales a esta categoría del KMT (*Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*).

Finalmente, atendiendo a las categorías del KFLM (*Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas*), señalamos que las 36 evidencias de *Fortalezas y dificultades* y las unidades vinculadas a la categoría *Formas de interacción* comparten nexos con E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) (94 y 62) y R.C. (*Comprensión*) (118 y 42). Otros nexos de coocurrencia destacables son entre el nodo de *Fortalezas y dificultades* con E.RI (*Captar el Interés*) (44) y AE.EF (*Funciones Ejecutivas*) (56).

Vayamos ahora a los datos numéricos en términos relativos. Estos permiten interpretar los resultados considerando el número de evidencias de cada subdominio. De esta forma, podemos indagar en la proporción de unidades con indicios de conocimiento de cada categoría de MTSK que se relacionan con cada directriz de DUA. Diferenciamos si el porcentaje es cuatro o más (nivel uno; $r \geq 4$), entre dos y cuatro (nivel dos; $2 \leq r < 4$) o menor de dos (nivel tres; $r < 2$).

Concretar las relaciones relativas respecto a los tres niveles nos permite diferenciar el grado de coocurrencia entre directrices y categorías.

La mayoría de las relaciones se encuentran en el nivel tres de coocurrencia (color azul o naranja en la Tabla 42), que en algunos casos llega a adquirir el valor relativo 0 (color naranja en la Tabla 42). Es el caso del vínculo *Definiciones*-E.RI (*Captar el Interés*), y el nodo *Fenomenología*, que solo establece una relación de nivel tres con el principio de *Representación*. Otro ejemplo es el nodo AE.PA (*Acciones Físicas*), en el que, a excepción de la relación AE.PA -KSM (*Conocimiento de la estructura de las matemáticas*), los vínculos que se observan adquieren un valor relativo despreciable (< 0.25).

Las relaciones de coocurrencia de nivel dos (color verde en la Tabla 42) se observan asociadas a los nodos E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*), R.C

(*Comprensión*) y AE.EF (*Funciones Ejecutivas*), y desde la perspectiva de conocimiento especializado, sobre todo a *Conexiones* y *Demostraciones*. Señalamos algunas relaciones que adquieren un valor superior, como los vínculos *Definiciones* -R.C (*Comprensión*) (3.5), *Estrategias, Técnicas y Ejemplos* -R.C (*Comprensión*) (3.21), *Fortalezas y dificultades*-R.C (*Comprensión*) (3.28) y *Formas de Interacción*- E.RI (Captar el interés) (3.26).

Por último, se observan cuatro nexos que presentan un valor de coocurrencia relativo perteneciente al nivel uno ($r \geq 4$; color amarillo en la Tabla 42). La relación *Conexiones*-E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) adquiere el valor 4. El resto de los nexos vinculados a este nivel se observan en relación a la directriz R.C (*Comprensión*) con *Registros* (4.41), *Conexiones* (6) y *Recursos* (4.32).

IV.4.4.3. La relación MTSK-DUA en las sesiones de los docentes

Este epígrafe pretende plantear los resultados del análisis acercándonos a las sesiones de cada uno de ellos y concretando en ellas las unidades y puntos de verificación que respaldan los nexos entre MTSK y DUA.

Resulta interesante cómo una misma tarea con el mismo input (guía proporcionada) desemboca en tres resultados tan diversos. Encontramos diferencias en la manifestación de conocimiento especializado, en la práctica inclusiva y, por ende, en la coocurrencia de ambas.

Para acercar nuestra mirada a lo acontecido en cada estudio de caso, recurrimos a la representación de los valores de coocurrencia de cada uno de ellos mediante tres gráficos de Sankey. Si nos centramos en una visión global de los subdominios y principios, los gráficos de Ester (Figura 76), Federico (Figura 77) y Andrea (Figura 78) muestran conexiones con distinto grosor.

Figura 76

Gráfico de Coocurrencia Entre los Subdominios y los Principios de Ester

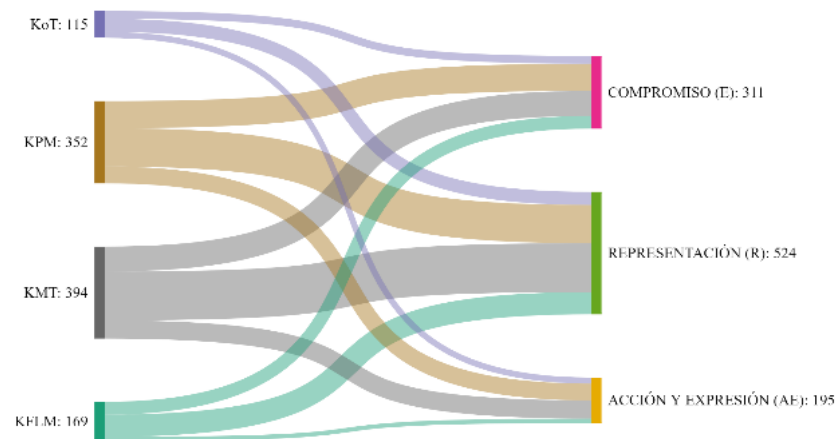


Figura 77

Gráfico de Coocurrencia Entre los Subdominios y los Principios de Federico

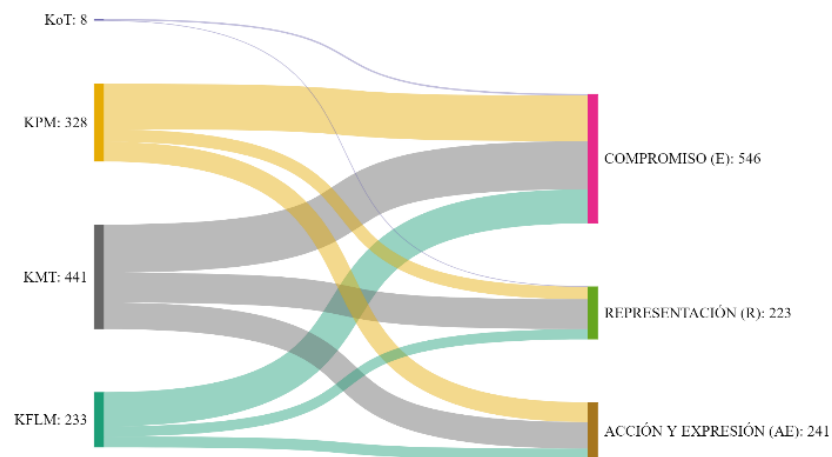
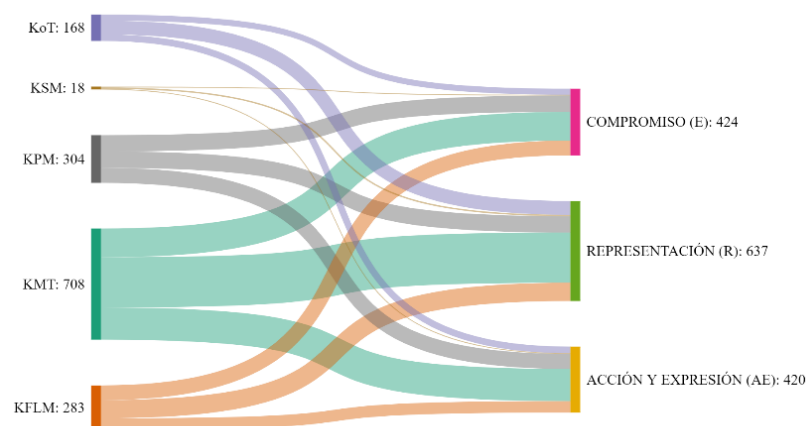


Figura 78

Gráfico de Coocurrencia Entre los Subdominios y los Principios de Andrea



La sesión de Ester manifiesta más conexiones en los nodos de KPM (*Conocimiento de la práctica matemática*; color ocre en la Figura 76) y KMT (*Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*; color gris en la Figura 76), de manera que se permean de manera análoga de los tres principios del DUA. En la sesión de Federico (Figura 77), los valores de KoT (*Conocimiento de los temas*) son muy inferiores respecto al resto de subdominios del propio gráfico y a las manifestaciones de este nodo en los gráficos de los otros dos docentes. Se observan nexos entre los subdominios y los tres principios, destacando las relaciones con el principio de Compromiso, a excepción de KoT (*Conocimiento de los temas*), que no se vincula a Acción y Expresión. En la sesión de Andrea (Figura 78), encontramos cierto equilibrio entre las conexiones de Compromiso y Acción y Expresión con los subdominios manifestados. El gráfico muestra conexiones equivalentes entre los tres principios con KPM (*Conocimiento de la práctica matemática*; color gris en la Figura 78) y KFLM (*Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas*; color naranja en la Figura 78), mientras que en KoT (*Conocimiento de los temas*) y KMT (*Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*), destacan las conexiones con Representación (colores azul y verde en la Figura 78). En este gráfico observamos un nodo relacionado con el subdominio KSM (*Conocimiento de la estructura de las matemáticas*), no presente en las Figuras correspondientes a los otros dos docentes, que se nutre de relaciones con los tres subdominios.

Si trasladamos nuestra visión a los nodos de DUA, Andrea y Ester muestran una predominancia en el nodo de Representación, reflejado en el grosor de los nexos de los gráficos de Sankey (Figuras 76 y 78). En la sesión de Federico, el principio predominante es el de Compromiso, aunque destacamos que los dos principios restantes muestran valores de coocurrencia similares entre sí (223 y 241), algo que también se observa entre los principios Compromiso y Acción y Expresión de la sesión de Andrea (424 y 420).

Con el objetivo de profundizar en el tipo de relaciones entre conocimiento especializado y práctica inclusiva, nos centramos a continuación en los nexos observados entre categorías del MTSK y las directrices del DUA, recogidas en las Figuras 79, 80 y 81 y las Tablas 43, 44 y 45.

En primer lugar, nos centramos en los nodos de coocurrencia. En la sesión de Andrea (Figura 80) encontramos referencias a diez categorías del MTSK y las nueve directrices del DUA. En los gráficos de los otros docentes solo intervienen siete nodos de conocimiento, y ocho nodos de práctica inclusiva en Ester (Figura 79) y nueve en Federico (Figura 80). Estos resultados coinciden con el análisis desde ambos marcos metodológicos. También con los valores descritos en términos de principios y subdominios.

Figura 79

Gráfico de Coocurrencia de la Sesión de Ester

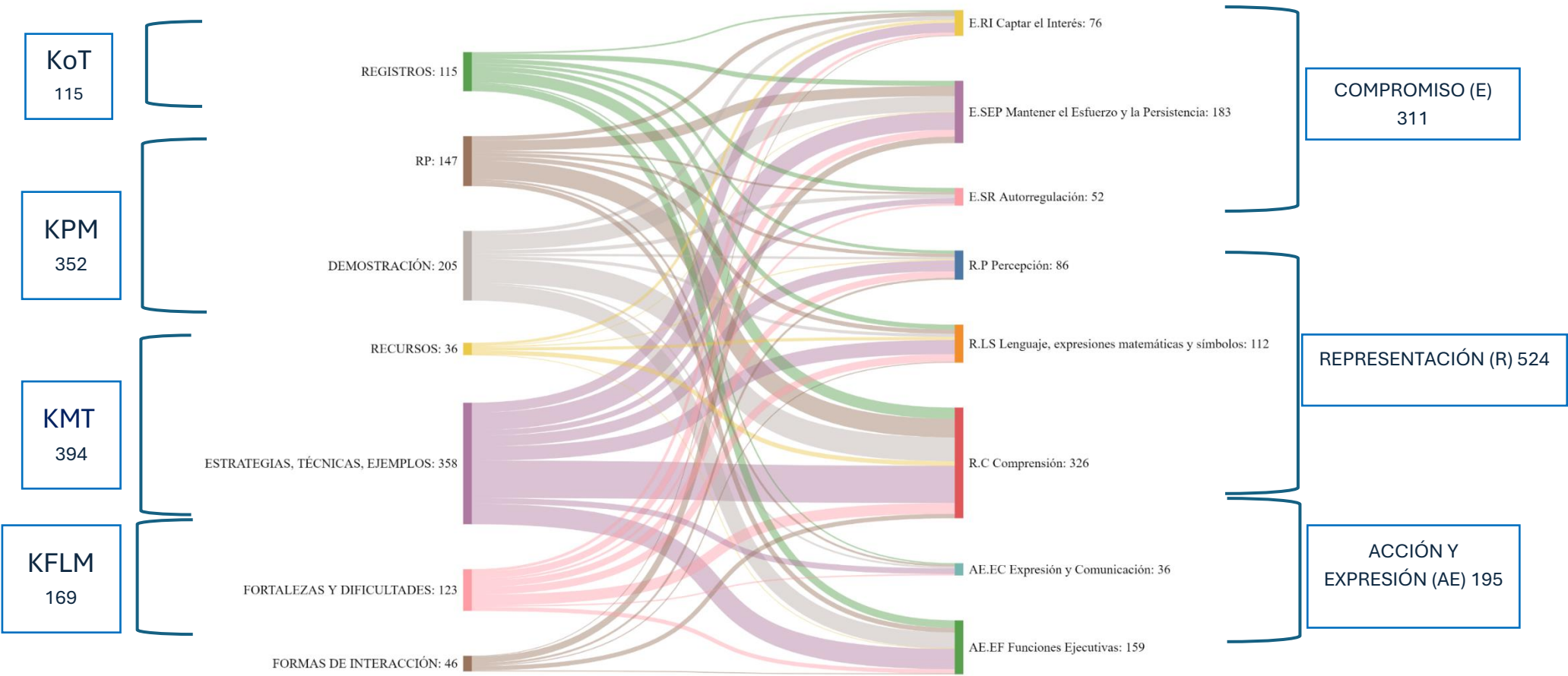


Tabla 43

Relaciones Relativas (R) y Absolutas (A) de la Coocurrencia DUA-MTSK de Ester

SUBDOMINIO, CATEGORÍA Y N° DE EVIDENCIAS			VALOR	COMPROMISO (E)									REPRESENTACIÓN (R)										ACCIÓN Y EXPRESIÓN (AE)											
				Captar el Interés (E.RI)			Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (E.SEP)				Autorregulación (E. SR)			Percepción (R.P)			Lenguaje y Símbolos (R.LS)					Comprensión (R.C)				Acciones Físicas (AE.PA)		Expresión y Comunicación (AE.EC)			Funciones Ejecutivas (AE.EF)			
				E.RI.1	E.RI.2	E.RI.3	E.SEP.1	E.SEP.2	E.SEP.3	E.SEP.4	ESR.1	ESR.2	ESR.3	R.P.1	R.P.2	R.P.3	RLS.1	RLS.2	RLS.3	RLS.4	RLS.5	RC.1	RC.2	RC.3	RC.4	AE.PA.1	AE.PA.2	AE.EC.1	AE.EC.2	AE.EC.3	AE.EF.1	AE.EF.2	AE.EF.3	AE.EF.4
K O T	Registros (9)	A	0	1	4	7	4	4	0	2	1	10	2	7	0	5	0	0	0	9	3	17	13	0	0	0	2	0	2	5	5	7	5	
		R	5			15				13			9			14					33				0		4			22				
	Definiciones (0)	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		R	0			0				0			0			0					0				0		0			0				
	Fenomenología (0)	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		R	0			0				0			0			0					0				0		0			0				
K S M	Conexiones (0)	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		R	0			0				0			0			0					0				0		0			0				
		R	0			0				0			0			0					0				0		0			0				
K P M	Resolución de Problemas (11)	A	4	4	5	19	2	6	3	1	0	5	0	7	3	0	0	6	0	7	5	26	20	4	0	0	2	1	3	4	4	4	2	
		R	13			30				6			10			7					55				0		6			14				
	Demostraciones (22)	A	2	2	7	21	9	8	7	0	2	9	2	5	0	0	0	4	0	5	2	30	30	8	0	0	2	0	3	14	19	12	2	
		R	11			45				11			7			9					70				0		5			47				
K M T	Recursos (4)	A	0	2	6	2	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	2	5	0	2	0	3	8	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
		R	8			2				0			3			9					13				0		0			1				
	Estrategias, Técnicas y Ejemplos (37)	A	5	5	19	29	8	8	7	0	2	14	7	22	3	6	0	16	0	20	9	53	42	6	0	0	3	6	8	13	16	24	7	
		R	29			52				16			32			36					110				0		17			60				
K F L M	Fortalezas y Dificultades (9)	A	3	1	4	12	4	4	0	2	0	4	2	12	5	5	0	6	0	11	0	19	13	0	0	0	1	1	2	3	0	5	4	
		R	8			20				6			19			22					32				0		4			12				
	Formas De Interacción (6)	A	0	0	2	11	5	0	3	0	0	0	2	1	3	0	0	0	0	3	3	6	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	
			2			19				0			6			3					13				0		0			3				

Nota: Los colores de las celdas se corresponden con los niveles de coocurrencia: nivel 1 ($r \geq 4$) en amarillo, nivel 2 ($2 \leq r < 4$) en verde y nivel 3 ($r < 2$) en azul Si el valor es cero, el color de la celda es naranja

Figura 80

Gráfico de Coocurrencia de la Sesión de Federico

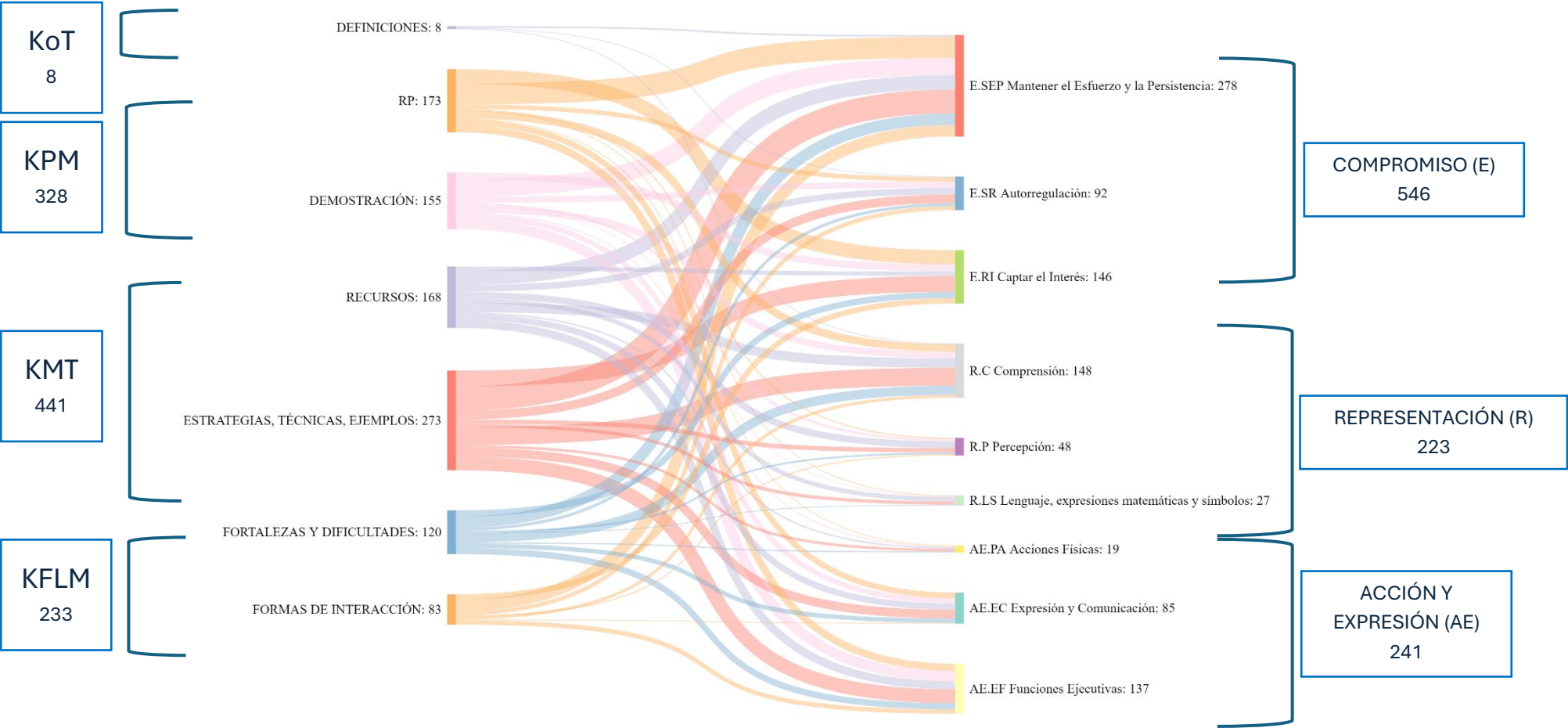


Tabla 44

Relaciones Relativas (R) y Absolutas (A) de la Coocurrencia DUA-MTSK de Federico

SUBDOMINIO, CATEGORÍA Y N° DE EVIDENCIAS		VALOR	COMPROMISO (E)									REPRESENTACIÓN (R)									ACCIÓN Y EXPRESIÓN (AE)													
			Captar el Interés (E.RI)			Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (E.SEP)				Autorregulación (E. SR)		Percepción (R.P)			Lenguaje y Símbolos (R.LS)					Comprensión (R.C)				Acciones Físicas (AE.PA)		Expresión y Comunicación (AE.EC)			Funciones Ejecutivas (AE.EF)					
			E.RI.1	E.RI.2	E.RI.3	E.SEP.1	E.SEP.2	E.SEP.3	E.SEP.4	E.SR.1	E.SR.2	E.SR.3	R.P.1	R.P.2	R.P.3	RLS.1	RLS.2	RLS.3	RLS.4	RLS.5	RC.1	RC.2	RC.3	RC.4	AE.PA.1	AE.PA.2	AE.PA.3	AE.EC.1	AE.EC.2	AE.EC.3	AE.EF.1	AE.EF.2	AE.EF.3	AE.EF.4
Ko T	Registros (0)	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
			0			0				0			0			0				0			0			0				0			0	
		R	0			0				0			0			0				0			0			0				0			0	
	Definiciones (2)	A	0	0	0	0	1	0	4	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			0			5				2		2			0					1			0			0				0			0	
		R	0			2,5				1		1			0					0,5			0			0				0			0	
Fenomenología (0)	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
		0			0				0		0			0					0			0			0				0			0		
	R	0			0				0		0			0					0			0			0				0			0		
KS M	Conexiones (0)	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
			0			0				0		0			0					0			0			0				0			0	
		R	0			0				0		0			0					0			0			0				0			0	
KP M	Resolución de Problemas (23)	A	4	9	26	16	1	16	25	8	0	4	2	1	0	0	0	1	0	1	4	3	10	4	2	0	8	1	7	8	3	2	7	
		R	39			58				12		3			2					21			2			16			20					
	Demostraciones (12)	A	3	4	12	9	2	11	25	10	1	6	3	2	2	0	0	0	0	2	0	6	8	4	3	0	10	0	4	9	6	2	11	
		R	19			47				17		7			2					18			3			14			28					
KM T	Recursos (10)	A	3	2	7	7	5	6	21	3	3	12	9	9	0	0	0	5	0	7	0	14	7	5	4	0	11	1	5	5	2	11	4	
			12			39				18		18			12					26			4			17			22					
		R	1,2			3,9				1,8		1,8			1,2					2,6			0,4			1,7			2,2					
	Estrategias, Técnicas y Ejemplos (25)	A	11	13	20	29	1	1	35	14	0	10	5	5	2	3	0	2	0	4	5	13	21	10	7	0	10	1	13	13	4	4	17	
			44			66				24		12			9					49			7			24			38					
		R	1,76			2,64				0,96		0,48			0,36					1,96			0,28			0,96			1,52					
KF L M	Fortalezas y Dificultades (12)	A	4	5	8	10	2	0	19	4	0	4	1	3	1	0	0	1	0	1	1	8	9	7	3	0	4	1	7	4	1	5	7	
			17			31				8		5			2					25			3			12			17					
		R	1,41666667			2,583333333				0,66666667		0,41666667			0,16666667					2,333333333			0,25			1			1,41666667					
	Formas De Interacción (8)	A	3	5	7	4	2	12	14	7	1	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	5	1	2	0	0	2	0	0	3	2	2	5	
R		15			32				11		3			0					8			0			2			12						
		R	1,875			4			1,375		0,375			0					1			0			0,25			1,5						

Nota: los colores de las celdas se corresponden con los niveles de coocurrencia: nivel 1 ($r \geq 4$) en amarillo, nivel 2 ($2 \leq r < 4$) en verde y nivel 3 ($r < 2$) en azul. Si el valor de la coocurrencia es cero, la celda tiene color naranja

Figura 81

Gráfico de Coocurrencia MTSK-DUA de la Sesión de Andrea

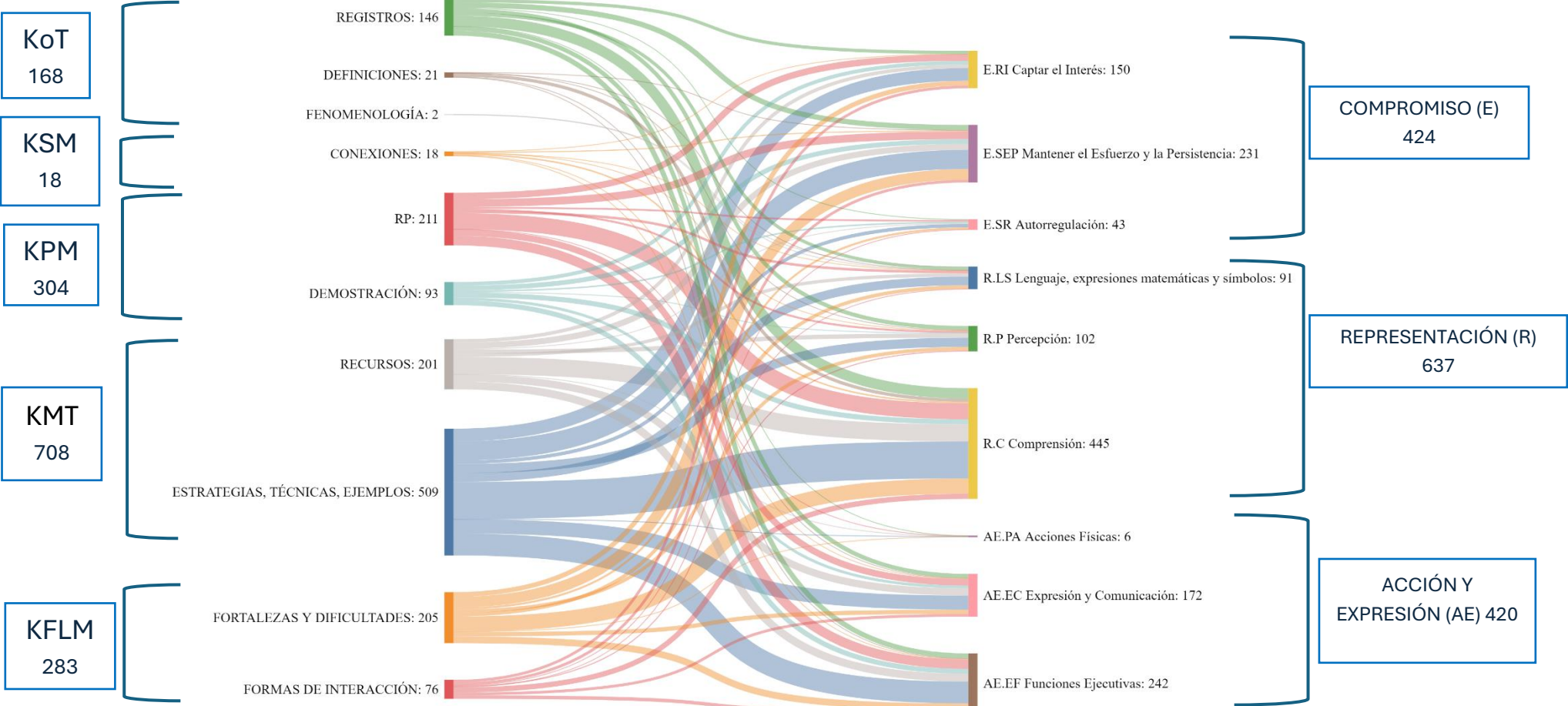


Tabla 45

Relaciones Relativas (R) y Absolutas (A) de la Coocurrencia DUA-MTSK de Andrea

SUBDOMINIO, CATEGORÍA Y N° DE EVIDENCIAS		COMPROMISO (E)										REPRESENTACIÓN (R)										ACCIÓN Y EXPRESIÓN (AE)											
		Captar el Interés (E.RI)			Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (E.SEP)				Autorregulación (E. SR)			Percepción (R.P)		Lenguaje y Símbolos (R.LS)					Comprensión (R.C)			Acciones Físicas (AE.PA)		Expresión y Comunicación (AE.EC)		Funciones Ejecutivas (AE.EF)							
		E.RI.1	E.RI.2	E.RI.3	E.SEP.1	E.SEP.2	E.SEP.3	E.SEP.4	ESR.1	ESR.2	ESR.3	R.P.1	R.P.2	R.P.3	RLS.1	RLS.2	RLS.3	RLS.4	RLS.5	R.C.1	R.C.2	R.C.3	R.C.4	AE.PA.1	AE.PA.2	AE.EC.1	AE.EC.2	AE.EC.3	AE.EF.1	AE.EF.2	AE.EF.3	AE.EF.4	
K o T	Registros (8)	A	2	4	7	7	0	0	14	1	0	2	7	5	4	0	1	2	0	10	4	15	18	5	1	0	4	2	11	6	7	4	3
		R	13			21				3			16		13					42			1		17		20						
	Definiciones (2)	A	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	3	5	4	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
		R	0			1				0			2		1					13			0		2		2						
	Fenomenología (1)	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		R	0			0,5				0			1		0,5					6,5			0		1		1						
K S	Conexiones Transversales (1)	A	0	0	1	3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		R	1			4				0			2		1					6			0		2		2						
		R	1			4				0			2		1					6			1		2		2						
K P M	Resolución de Problemas (16)	A	11	7	8	14	1	2	14	3	1	3	5	1	2	3	0	1	0	6	4	22	21	17	1	0	5	6	15	10	11	9	8
		R	26			31				7			8		10					64			1		26		38						
	Demostraciones (11)	A	1,625	1,9375				0,4375			0,5		0,625					4			0,0625		1,625		2,375								
		R	10	1	4	3	2	0	14	4	2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	9	5	6	0	0	5	2	4	4	5	3	8	
K M T	Recursos (11)	A	15	19				6			2		0					20			0		11		20								
		R	1,3636			1,7272				0,5454			0,1818		0					1,82			0		1		1,82						
	Estrategias, Técnicas y Ejemplos (34)	A	5	4	5	6	0	0	18	3	0	0	10	2	5	0	1	2	0	10	3	20	29	17	1	0	13	5	11	8	11	7	5
		R	14			24				3			17		13					69			1		29		31						
		A	1,272727			2,181818182				0,272727273			1,54545454		1,181818182					6,272727273			0,090909		2,636363636		2,818181818						
		R	20	15	16	34	3	0	40	4	1	9	17	12	8	3	0	5	0	27	9	56	61	23	1	0	13	10	34	24	27	15	22
K F L M	Fortalezas y Dificultades (15)	A	51			77				14			37		35					149			1		57		88						
		R	1,5			2,2647				0,4117			1,0882		1,0294					4,382			0,0294		1,6764		2,5882						
	Formas De Interacción (5)	A	6	4	9	8	2	0	33	5	1	2	7	3	4	0	1	2	0	11	5	13	27	16	2	0	8	1	8	4	11	6	6
		R	19			43				8			14		14					61			2		17		27						
		R	1,26666666			2,866666667				0,533333333			0,933333333		0,933333333					4,066666667			0,13333333		1,133333333		1,8						

Nota: Los colores de las celdas se corresponden con los niveles de coocurrencia: nivel 1 ($r \geq 4$) en amarillo, nivel 2 ($2 \leq r < 4$) en verde y nivel 3 ($r < 2$) en azul. Si el valor de la coocurrencia es cero, la celda tiene color naranja

Atendiendo al valor absoluto de las conexiones (Tablas 43, 44 y 45), destacamos en las tres sesiones los subdominios *Resolución de problemas y Estrategias, Técnicas, Tareas y Ejemplos*. Además, en las sesiones de Ester y Federico se observan valores significativos en *Demostraciones*, mientras que el nodo *Recursos* destaca en Federico y Andrea. En relación con la práctica inclusiva, los resultados señalan E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) y R.C (*Comprensión*) como las directrices más destacables en los tres docentes, coincidiendo con los resultados globales detallados en el epígrafe anterior. Encontramos otros nodos que manifiestan un valor subrayable en cada sesión, como las conexiones de E.RI (*Captar el Interés*), AE.EC (*Expresión y comunicación*) y AE.EF (*Funciones Ejecutivas*) destacables en Federico y Andrea, y E.SR (*Autorregulación*) en Federico.

En los párrafos siguientes analizaremos los resultados de cada categoría en los tres docentes, detallando el valor relativo de los nexos de coocurrencia.

Presentaremos primero los resultados por cada subdominio y categoría, comparando los valores en los tres docentes. Observamos que en lo relativo al subdominio KoT (*Conocimiento de los temas*) aparece el nodo *Registros* en Ester y Andrea, con 115 y 146 nexos cada uno (Figuras 79 y 81) (frente a 0 en Federico, Figura 80). Los resultados de Ester muestran relaciones de tercer nivel (valor relativo menor que 2) de *Registros* con siete de las directrices (Tabla 43, fila *Registros*, color azul o naranja), mientras en la sesión de Andrea encontramos valores relativos de segundo nivel (valor relativo igual o mayor a 2 y menor a 4, color verde en la Tabla 45) con E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*), R.P (*Percepción*), AE.EC (*Expresión y Comunicación*) y AE.EF (*Funciones Ejecutivas*). Ejemplo de ello es la unidad U40-A, en el extracto siguiente, en la que Andrea manifiesta conocer el potencial del registro pictórico de la goma Eva para representar las características de los escalones de la arqueóloga (KoT- Registros) cuando utiliza una pieza para discutir con el alumnado las características del cuadrado y trasladarla a la estructura de la composición usada por la arqueóloga. El docente utiliza el material manipulativo para propiciar en los estudiantes la tarea de percibir (R.P, *Percepción*) y expresar una idea matemática (AE.EC, *Expresión y Comunicación*), recurriendo a una retroalimentación oportuna y frecuente (E.SEP,

Mantener el esfuerzo y la persistencia) para centrar la atención del alumnado en un contenido (AE.EF, *Funciones Ejecutivas*).

U40-A: *Pero y si lo pone así (lo gira). ¿Cuánto mide? (EstudianteU contesta “un metro”). ¿Por qué? (Silencio) Dice que mide un metro el cajón. Y yo digo, bueno, depende de cómo lo coloque, ¿no, EstudianteU? A lo mejor así mide un metro, pero así (lo gira, apoyándolo sobre otro de sus lados). ¿Cuánto mide? (EstudianteU responde “la mitad”) ¿La mitad? ¿Por qué? Ya has dado esto. ¿Esto a que figura geométrica te recuerda?*

Destacamos además los valores de nivel uno de la coocurrencia en la sesión de Andrea con la directriz R.C (*Comprensión*), principalmente con los puntos de verificación R.C.2 (Resalte patrones, características críticas, grandes ideas y relaciones) y R.C.3 (Guiar el procesamiento y visualización de la información. Apoye el proceso de creación de significado a través de modelos, andamios y retroalimentación).

El nodo *Definiciones* aparece en los gráficos de Federico y Andrea (ya que en Ester toma valor 0, ver Tabla 43). Mientras que se observan un mayor número de nexos (nivel uno) con R.C. (*Comprensión*) en los resultados de Andrea (U59 y U61), destacan más las relaciones de nivel dos con E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) en la sesión de Federico (U52 y U63). Si observamos las unidades en las que acontece la coocurrencia de las variables, en las unidades U59-A Y U61-A el foco de Andrea es la comprensión de las características del cubo y el cuadrado, mediante la discusión que el docente plantea respecto a la forma de las cajas que utiliza la arqueóloga para construir su escalera.

U59-A: *Es un... cubo, pero el cubo está formado por... (Discusión con los estudiantes sobre lados, caras, ejemplos...).*

U61-A: *El cubo, sus caras de fuera son cuadrados. Entonces, la altura de ese cubo mide un metro y la base mide un metro. Esta altura mide un metro y esta mide otro metro (gesticula girando la pieza de goma Eva). Si lo giramos, mide lo mismo. Si lo giramos (repite el gesto cada vez), la altura que alcanza*

es un metro, la altura que alcanza es un metro, la altura que alcanza es un metro... ¿Sí? Importante eso, porque digo, bueno, un metro, depende como lo coloque... Vale.

Aunque el conocimiento que manifiesta Federico se relaciona también con la relación entre la forma tridimensional y bidimensional de las cajas y las piezas de goma Eva, el planteamiento del docente se centra en la retroalimentación de las ideas que plantean los estudiantes en cada grupo (E.SEP.4.3, *Proporcionar una retroalimentación frecuente, oportuna y específica*; E.SEP.4.4, *Proporcionar una retroalimentación sustantiva e informativa en lugar de comparativa o competitiva*), respecto a la concepción de metro cúbico y la comparación entre las dos y tres dimensiones:

U52-F:

EstudianteP: Profe, las cajas son un metro cúbico, ¿no?

Federico: Ehh. No. Eso no es un metro cúbico. Vamos... sí, sí sería un metro cúbico, sí.

U63-F:

Federico: Estas son las cajas.

EstudianteM(TEA): Un poco planas, profe.

Federico: Ya hombre... en dos dimensiones

Fenomenología solo aparece en los resultados de Andrea, mostrando un único punto de coocurrencia de nivel tres con R.LS (*Lenguaje y Símbolos*), observado en la unidad U332-A (“Andrea: 114 metros. N= 114”). El docente manifiesta conocer la secuenciación de términos, estableciendo una relación entre un ejemplo de la altura de una escalera propuesto en clase con su posición dentro del sistema. Resulta coherente la relación que se establece entre el conocimiento del lenguaje simbólico de la expresión con el punto de verificación R.LS (*Lenguaje y Símbolos*), que establece la flexibilidad y fácil acceso a múltiples representaciones de la notación científica (criterio R.LS.3.4).

También encontramos únicamente en la sesión de Andrea indicios del subdominio KSM (*Conocimiento de la estructura de las matemáticas*), al hacer referencia a la

suma de los n primeros números, observados en la unidad U296-A, en la que Andrea discute con EstudianteR la estrategia que el niño había planteado:

U296-A: (Sobre el dibujo en la pizarra) *Tú te diste cuenta de que haciendo la mitad del área, ocho no es lo que se queda en blanco. Él dice que el área de este cuadrado que es cuatro por cuatro, tiene Área 16. ¡16!. Dice pues 16 entre dos, ocho. Ocho aquí y ocho en este (sobre el dibujo de la pizarra). Y dice: No, aquí no hay ocho, porque aquí hay 12345 y seis. Sigue.*

Encontramos una coocurrencia de nivel 1 con E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) y R.C. (*Comprensión*) y de nivel 2 con R.P (*Percepción*), AE.EC (*Expresión y Comunicación*) y AE.EF (*Funciones Ejecutivas*) (Tabla 45). El descriptor “interpretación geométrica de los n primeros números” se relaciona con la secuenciación de los términos, entendidos desde la perspectiva visual de la composición del área de un cuadrado. La secuenciación de términos puede ser entendida como un conjunto de elementos (R.C.3.6, “*Dividir*” *la información en elementos más pequeños*), que pueden ser percibidos y comprendidos mediante un proceso secuencial (R.C.3.1, *Dar indicaciones explícitas para cada paso en un proceso secuencial*) de ejemplos que se relacionan entre sí (R.C.2.4, *Utilice señales e indicaciones para llamar la atención sobre características críticas*; AE.EC3.5, *Proporcionar múltiples ejemplos de soluciones novedosas a problemas auténticos*; AE.EF1.2, *Proporcionar modelos o ejemplos del proceso y producto del establecimiento de objetivos*). Esto involucra el planteamiento del objetivo de diversas maneras y formatos (E.SEP.1.2, *Mostrar el objetivo de varias maneras*; R.P.1, *Presente la información en un formato flexible que permita variar las siguientes características perceptivas*), numérica y geométrica a través del dibujo (E.SEP.1.5, *Utilizar ayudas o andamios para visualizar el resultado deseado*; R.P.2.2., *Proporcionar diagramas visuales, gráficos, anotaciones musicales o sonoras*; R.LS.5.2, *Establecer vínculos explícitos entre la información proporcionada en los textos y cualquier representación adjunta de esa información en ilustraciones, ecuaciones, cuadros o diagramas*; R.C.2.1, *Resaltar o enfatizar elementos clave en texto, gráficos, diagramas y fórmulas*) retroalimentando las estrategias del alumnado (E.SEP.1.6., *Involucrar a los alumnos en debates de*

evaluación sobre lo que constituye la excelencia y generar ejemplos relevantes que conecten con su bagaje cultural y sus intereses; E.SEP.4.4., Proporcionar una retroalimentación sustantiva e informativa en lugar de comparativa o competitiva; R.C.2.5., Resalte las habilidades aprendidas previamente que pueden usarse para resolver problemas desconocidos; R.C.3.4, Introducir andamios graduados que respalden las estrategias de procesamiento de información; AE.EC.3.4., Proporcionar retroalimentación diferenciada (por ejemplo, retroalimentación que sea accesible porque puede personalizarse para cada alumno individualmente). Además, Andrea involucra a todos los estudiantes del aula al parafrasear la estrategia descrita en la pizarra (E.RI.3.11, *Implicar a todos los participantes en los debates de toda la clase; AE.EF.2.4, Incorporar entrenadores o mentores que modelen el pensamiento en voz alta del proceso*).

En el subdominio KPM (*Conocimiento de la práctica matemática*) encontramos diferencias significativas entre los docentes. Atendiendo a la categoría *Resolución de problemas*, los resultados del análisis de Ester y Andrea muestran nexos de nivel uno (amarillo en las Tablas 43 y 45) con R.C (*Comprensión*). Si observamos las conexiones, en ambos docentes destacan los puntos de verificación R.C.2 (R.C.2.1., *Resaltar o enfatizar elementos clave en texto, gráficos, diagramas y fórmulas; R.C.2.4, Utilice señales e indicaciones para llamar la atención sobre características críticas*) y R.C.3. (R.C.3.1., *Dar indicaciones explícitas para cada paso en un proceso secuencial; R.C.3.4. Introducir andamios graduados que respalden las estrategias de procesamiento de información*). En Andrea, además, encontramos un valor significativo en R.C.2.3 (*Utilice múltiples ejemplos y no ejemplos para enfatizar características críticas*), R.C.3.3 (*Proporcionar modelos interactivos que guíen la exploración y nuevos entendimientos*) y R.C.4.1 (*Proporcionar listas de verificación, organizadores, notas adhesivas y recordatorios electrónicos*), lo que se refleja en la tendencia de este docente de abordar nuevos ejemplos con los estudiantes apoyándose en las piezas y el organizador gráfico. Ejemplo de ello se refleja en las unidades U115-A y U119-A, que muestran un extracto de transcripción en el que Andrea trabaja con EstudianteU (TEA):

U115-A: *Vamos a apuntar aquí, ¿vale? Vamos a apuntar aquí. cuántos metros alcanza Venga, poco a poco (cuenta con EstudianteU sobre su construcción de goma Eva).*

U119-A: *Aquí tienes la progresión, ¿no? (sobre el organizador de EstudianteU): 1 metro, 2 metros, 3 metros...8 metros, 9 metros. Vale. Pues ve haciendo la cuenta. Aquí, un metro, ¿cuántos cajones tiene? Completa (le deja trabajar).*

Resulta destacable cómo Ester y Andrea abordan las diferentes estrategias de resolución del problema mediante el heurístico hacer un diagrama (U63-E, U95-E, U123-A, U132-A y U312-A) que se relaciona con resaltar elementos claves del enunciado (R.C.2.1, *Resaltar o enfatizar elementos clave en texto, gráficos, diagramas y fórmulas*) y organizar los pasos de resolución (R.C.3.1, *Dar indicaciones explícitas para cada paso en un proceso secuencial*; R.C.3.6, *“Dividir” la información en elementos más pequeños*), puntos de verificación vinculados además con el descriptor conocimiento de las fases de resolución.

Destacamos también la conexión *Resolución de problemas-E.RI (Captar el Interés)* en los tres casos de nivel tres, pero de valores relativos superiores a 1. Principalmente, señalamos los resultados de Federico y Andrea en E.RI.1.1 (E.RI.1.1. *Proporcionar autonomía mediante el nivel de desafío, el contexto, el contenido, las herramientas utilizadas para recopilar o producir información, el diseño o la secuencia de tareas*). y E.RI.3.1 (*Crear un clima de aceptación y apoyo en el aula*) por el buen clima de trabajo colaborativo que desarrollan en sus aulas, tal y como se evidencia en el tipo de interacción (ver apartado 2.1 de este capítulo).

Respecto a la categoría *Demostraciones*, Ester y Federico evidencian conexiones de nivel dos (color verde en la Tabla 43 y 44) con AE.EF (*Funciones ejecutivas*) y E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) y R.C (*Comprensión*). La sesión de Andrea refleja todos los valores relativos de esta categoría asociados a un nivel uno, aunque aparecen valores cercanos al segundo nivel en las directrices que hemos mencionado (1.72 en E.SEP y 1.82 en R.C y AE.EF).

En la sesión de Ester, el conocimiento sobre *Demostraciones* tiene relación con los puntos de verificación de R.C.2 (*Resalte patrones, características críticas, grandes ideas y relaciones. Acentuar la información importante y cómo se relaciona con el objetivo de aprendizaje*) y R.C.3 (*Guiar el procesamiento y visualización de la información. Apoye el proceso de creación de significado a través de modelos, andamios y retroalimentación*). La docente apoya la búsqueda de la generalización con un planteamiento constante de ejemplos, que compara con los datos numéricos y gráficos planteados en el diagrama que ella dibujó en la pizarra. Este resultado se observa en la unidad U198-E, extracto de un diálogo a nivel de clase en el que la docente comprueba una hipótesis de uno de los estudiantes con el término 10:

U198-E: *Lo sumo todo, a ver si es verdad que hay 32 cuadros y faltan 32 cuadros. ¿Sumamos? (Suman entre todos $1+2+3+4+5+6+7+8$). 36. ¿Hay el mismo número de cuadros que los que he quitado?*

Las unidades analizadas de la sesión de Andrea permiten relacionar su conocimiento sobre el papel de los ejemplos para conjeturar, comprobar una hipótesis y buscar una regularidad con la representación de la secuencia (R.C.2.3, *Utilice múltiples ejemplos y no ejemplos para enfatizar características críticas*; R.C.3.1, *Dar indicaciones explícitas para cada paso en un proceso secuencial*), pero destacan los nexos con el andamiaje que desarrolla el docente, explicitando los pasos, graduando la construcción de un modelo para procesar la información (R.C.3.4, *Introducir andamios graduados que respalden las estrategias de procesamiento de información*), que enlaza con el conocimiento de utilizar estrategias no recursivas para generalizar, como observamos en la siguiente unidad en la que discute con el estudiante TEA:

U213-A: *Vale, tú ya puedes hacer siguiente, ¿a que sí? y el siguiente... Pero ahora yo te digo una cosa para que tú lo pienses. ¿Tú me podrías decir...? tú ve pensándolo eh... sabiendo la que tiene este. ¿Tú me podrías decir directamente la que tiene esta altura? ¿Directamente? ¿O tienes que ir una a una? Piénsalo. Dime EstudianteA (Deja a EstudianteU pensando).*

Los nexos de *Demostraciones* con la directriz AE.EF (*Funciones Ejecutivas*) se reflejan en diversas prácticas docentes. Los resultados del análisis señalan las manifestaciones de conocimiento de la práctica de demostrar cuando los docentes emplean diferentes ejemplos (U201-E) y contraejemplos (278-A) con los que desarrollan preguntas e indicaciones dirigidas a los estudiantes, con objetivo de guiar su conocimiento de lo que se pretende conseguir (AE.EF.1, *Guiar el establecimiento apropiado de objetivos. Practicar establecer metas desafiantes y auténticas*) y ayudarles en la planificación y organización de las estrategias de resolución (AE.EF.2, *Apoyar la planificación y el desarrollo de estrategias. Formular planes razonables para alcanzar las metas*). En otros casos (U217-E), a partir de ejemplos concretos el docente trata de flexibilizar la manera en la que los estudiantes visualizan la representación de la escalera (AE.EF.3, *Facilitar la gestión de la información y los recursos. Apoyar la organización y la memoria utilizando herramientas y procesos flexibles*), apoyándose en el patrón geométrico. El conocimiento de la estructura de la representación como clave del patrón geométrico se refleja en la manera de desglosar visualmente la estructura de la escalera como si fuera parte de un cuadrado, propiciando así el monitoreo de la resolución (AE.EF.4, *Mejorar la capacidad para monitorear el progreso. Analizar el crecimiento a lo largo del tiempo y cómo construir a partir de él*).

U201-E: *Si estudiáramos otras estructuras en vez de con ocho metros de altura, como por ejemplo diez metros, con 12 o con 24, ¿podríamos sacar algún patrón de qué relación hay entre los que hay y los que faltan? No son exactamente la mitad. Son menos de la mitad. Pero si estudiamos unas pocas de estructuras, ¿seríamos capaces de ver esa relación? (Niños: Sí). Supongo que sí. La cuestión es que hoy ya no nos da mucho tiempo. Pero, ¿estáis entendiendo cómo se llega a una ecuación, cómo se llega a una fórmula? Estudiando la idea muy buena de EstudianteL del principio de contar todos los cuadros que hay, y después EstudianteO ha ido un poquito planteando que no son la mitad, pero por ahí van los tiros.*

U278-A: *Te voy a hacer una pregunta para que tú te plantees si eso está bien. Que no lo sé. Halla el de altura cuatro metros con esa fórmula, con esa*

relación que tú has encontrado. Cuatro metros. Venga. Rápido, que tiene que salir EstudianteG, Venga, cuatro metros.

U217-E: Busca un número más pequeño que te será más fácil. Mira, vamos a hacerlo con un cubo de cuatro, que es la mitad. De aquí, ¿cuáles elimino? Elimino este, este... (sobre el dibujo del cuadrado completo, quita piezas hasta obtener la forma de escalera). Es decir, cuatro metros, ¿cuántos cuadrados tiene?

El vínculo de Resolución de problemas y *Demostraciones* con E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) es de nivel dos para los tres docentes (color verde en la Tabla 43, Tabla 44 y Tabla 45). En la sesión de Ester encontramos conexiones con el punto de verificación E.SEP.1 (*Aumentar la relevancia de las metas y los objetivos. Establezca una visión del objetivo y por qué es importante*). En varios momentos de la resolución del problema de la arqueóloga, observamos cómo la docente guía a los estudiantes marcando los objetivos asociados a las estrategias de resolución, a la vez que se manifiesta conocimiento de la verificación como fase en la resolución y conocimiento del papel de los ejemplos para comprobar una hipótesis (U125-E), y conocimiento sobre la estructura cuadrada como clave del patrón de la escalera (U210-E).

U125-E: Vamos a ver si eso es correcto. si ese razonamiento es correcto. Evidentemente, 20 es el doble de diez. Pero realmente, cuando duplicamos los metros, ¿duplicamos las cajas? Vamos a verlo porque lo tenemos aquí en la pizarra (señala la tabla que habían estado completando en la pizarra)

U210-E: Le hemos quitado al cuadrado de ocho por ocho, le hemos quitado un cuadrado de siete por siete.

Andrea y Federico, además, muestran conexiones de Resolución de problemas y *Demostraciones* con E.SEP.4 (*Aumentar la retroalimentación orientada a la maestría*) (Tabla 45 y Tabla 44), centrado en el desarrollo de prácticas de retroalimentación, que podemos conectar con el conocimiento sobre la diversidad de estrategias para alcanzar un resultado y de la importancia de la hipótesis y el

razonamiento (U44-F) y la fase de verificación (U223-A). La retroalimentación también se refleja en los ejemplos que los docentes plantean para desarrollar estrategias de generalización en los niños y comprobar sus hipótesis (U154-F, U213-A). Además, en la sesión de Federico se observan indicios de E.SEP.3 (*Fomentar la colaboración y la comunidad*), que podemos relacionar con el trabajo en grupo propio de su aula.

U44-F: *Vale, pues chicos, os planteamos. ¿Os imagináis la situación de cómo tener que buscarse la vida? ¿Os parece posible? Sí. ¿Veis posibilidades de hacerlo? Bueno, pues vamos a dedicar a hacer el razonamiento en grupo cinco minutitos. A ver, comentar la situación entre vosotros, y sin que nos pongamos ahora mismo a escribir, a resolver. Vamos a plantear esa situación, ¿vale?*

U223-A: *Pues mira. ¿Tú crees que eso está bien?, Porque tú has dicho si no me da con la suma, lo voy a multiplicar. Vale, pero comprueba si está bien. A ver si no va, está bien. Y yo me lo voy a creer y vamos a confundir aquí a todo el personal y nos van a pegar a ti y a mí por confundir a todos. Venga, piénsalo.*

U154-F: *Pues ponlo. Esta es que has sumado tres cajas, ¿no? Porque dices que son 3 (de altura). Si habéis llegado a este razonamiento... para pasar de este a este le has sumado las cajas parecidas, ¿no?*

U213-A: *Vale, tú ya puedes hacer siguiente, ¿a que sí? y el siguiente... Pero ahora yo te digo una cosa para que tú lo pienses. ¿Tú me podrías decir... tú ve pensándolo eh... sabiendo la que tiene este, ¿tú me podrías decir directamente la que tiene esta altura? ¿Directamente? ¿O tienes que ir una a una? Piénsalo.*

En el nodo *Recursos*, de la sesión de Ester destacan los nexos con E.RI (*Captar el Interés*), R.LS (*Lenguaje y Símbolos*) Y R.C (*Comprensión*), de nivel dos (color verde en la Tabla 43), siendo los demás valores relativos inferiores a 1. Es decir, los nexos de Ester vinculan el conocimiento sobre recursos con focalizar la atención de los

estudiantes (valor relativo 6 en E.RI.3, *Minimizar las distracciones*), favorecer la comprensión (valor relativo 8 en R.C.3, *Guiar el procesamiento y visualización de la información. Apoyar el proceso de creación de significado a través de modelos, andamios y retroalimentación*) y el uso de otras formas de comunicación que apoyen la comprensión del enunciado (valor relativo 5 en R.LS.3, *Descodificación de texto, notación matemática y símbolos*). Estos datos casan con las reducidas manifestaciones de conocimiento especializado en el uso de recursos de esta docente (3 unidades) en comparación con los resultados de Federico y Andrea, que muestran más evidencias de coocurrencia.

Los resultados de la sesión de Federico y Andrea además de R.C (*Comprensión*), señalan conexiones de nivel dos entre el nodo de Recursos y la práctica de retroalimentación (E.SEP, *Mantener el esfuerzo y la persistencia*), dado el tipo de enseñanza que llevan a cabo ambos. Su conocimiento sobre Recursos les permite usarlos para guiar la función ejecutiva (AE.EF, *Funciones Ejecutivas*). En el caso de Andrea, para apoyar la planificación y emplearlos para abordar la generalización (AE.EF.2, *Apoyar la planificación y el desarrollo de estrategias. Formular planes razonables para alcanzar las metas*) y para gestionar la información y flexibilizar los procesos (AE.EF.3, *Facilitar la gestión de la información y los recursos. Apoyar la organización y la memoria utilizando herramientas y procesos flexibles*); mientras las acciones de Federico se ven más vinculadas a esta segunda directriz (valor relativo de nivel 2 (2.2), que reflejamos en el siguiente fragmento (U113-F y U119-F). Federico propone a los estudiantes utilizar el organizador gráfico a pesar de haber abordado ya el problema con las piezas de goma Eva. Esto señala conocimiento sobre el potencial del recurso para descubrir regularidades, así como una práctica orientada a que los estudiantes flexibilicen sus estrategias de resolución integrando diferentes herramientas:

U113-F y U119-F:

Federico: Os he traído refuerzo para que lo hagáis así (señala el organizador)

EstudianteB: Si ya lo hemos hecho.

Federico: Pero bueno, ahora lo plasmáis ahí (sobre el organizador) a ver qué conclusiones sacáis.

El nodo *Estrategias, Técnicas y Ejemplos*, aunque destaca su valor absoluto en los tres docentes, encontramos algunas diferencias en los valores relativos. Se observan resultados significativos en los nexos de coocurrencia de esta categoría con R.C (*Comprensión*), nivel 1 en Andrea y nivel tres en Ester y Federico, que coincide con los descriptores de conocimiento de los docentes sobre las potencialidades de los distintos tipos de representación (pictórica, esquemática o numérica) para comprender la estructura de la escalera y descubrir la regularidad, así como el uso de diferentes términos consecutivos y no consecutivos para desarrollar estrategias de generalización. Resaltamos también el conocimiento sobre estrategias como el parafraseo, ejemplificado en la unidad U197-A, estrategia que el docente emplea para favorecer que el estudiante visualice y comprenda su propio proceso de resolución, revisando la hipótesis con EstudianteU TEA) (R.C.3, *Guiar el procesamiento y visualización de la información. Apoyar el proceso de creación de significado a través de modelos, andamios y retroalimentación*).

U197-A: *Pero mira aquí. Vale, vale, vale. Se le pone...Mira, yo te voy a ir diciendo y haciendo lo que tú me vas diciendo, para que tú lo pienses. De lo que tú me vayas diciendo, yo te voy a decir lo que yo entiendo. ¿Vale? Ahora tú me dices: No, maestro, yo eso no lo quiero decir, o sí. Venga, repíteme lo que me has dicho.*

Se observan además nexos del conocimiento sobre *Estrategias, Técnicas y Ejemplos* con E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) de nivel dos en Andrea y Federico y nivel tres en Ester, principalmente en los puntos de verificación E.SEP.1 (*Aumentar la relevancia de las metas y los objetivos. Establecer una visión del objetivo y por qué es importante*; en Andrea, Federico y Ester) y E.SEP.4 (*Aumentar la retroalimentación orientada a la maestría*; Andrea y Federico) que se traduce como preguntas y guías para orientar la consecución y visualización del objetivo y que retroalimenten las estrategias de generalización de los estudiantes.

Encontramos asimismo nexos del conocimiento sobre *Estrategias, Técnicas y Ejemplos* con AE.EF (*Funciones Ejecutivas*) de nivel tres en Ester y Federico y nivel

dos en Andrea. Las estrategias y los ejemplos que usa cada docente se relacionan con acciones para cubrir necesidades en la función ejecutiva. En la sesión de Ester, estas acciones se centran en la gestión y organización de los datos (AE.EF.3), como observamos en la U36-E cuando la docente recurre a ejemplificar escaleras de menor altura y organizar los datos en la tabla de la pizarra; y en la sesión de Federico en el establecimiento de un objetivo claro y el monitoreo del propio proceso (AE.EF.1 y AE.EF.4), como se aprecia en la unidad U303-F, que plantea como nuevo objetivo el dinosaurio de 20 metros, con lo que evidencia conocimiento sobre la importancia de los términos no consecutivos para propiciar estrategias de generalización marcando la pregunta para que los estudiantes vuelvan a aplicar las estrategias que ya habían descubierto con ejemplos anteriores. Los cuatro puntos de verificación permean los resultados de Andrea.

U36-E: Vamos a suponer el Velociraptor, que es el que tiene dos metros. Ya hemos explicado por qué apilamos las cajas de esa manera y no solamente una encima de otra, ¿vale? La altura que necesito son dos metros. ¿Cuántos cajones necesito apilar? [EstudianteS contesta tres]. Tres para no poner solamente uno encima del otro, que es muy inestable y no puedo hacerlo. Entonces utilizo tres cajas [completa su tabla de la pizarra].

U303-F: (Escribe en la pizarra: “Federicosaurio, 20 metros”) Aquí lo tenéis. Este es el nuevo que hay que hacer. Este es el dinosaurio que hay que hacer ahora. ¿Cuántas cajas necesito? Os doy unos minutos, no corráis que sois muy rápidos. El Velociraptor ya lo hemos limpiado.

Andrea además muestra valores significativos en E.RI (*Captar el Interés*), AE.EC (*Expresión y Comunicación*), R.LS (*Lenguaje y Símbolos*) y R.P (*Percepción*) de nivel 3 (Tabla 45), que podemos relacionar con su forma de presentar los contenidos (R.P.1, *Presente la información en un formato flexible que permita variar las siguientes características perceptivas*; R.LS.5, *Ilustrar a través de múltiples medios*), cercana y contextualizada (E.RI.1, *Ofrecer opciones que permitan la personalización en la presentación de la información*; E.RI.3, *Minimizar distracciones*), y aceptar las diversidad de estrategias de generalización que

desarrollan los estudiantes que revisa mesa por mesa (AE.EC.3, *Desarrollar fluidez con niveles graduados de apoyo para la práctica y el desempeño. Aplicar y liberar gradualmente estructuras para apoyar el aprendizaje independiente*).

Por ejemplo, el siguiente fragmento corresponde a la unidad U226-A y U247-A, que presenta un diálogo de Andrea con el EstudianteA. Se observa la guía del docente utilizando diferentes ejemplos de alturas, consecutivas y no consecutivas, para fomentar que el estudiante comprenda la relación entre los términos (R.C, *Comprensión*), desarrolle estrategias no recursivas (AE.EF, *Funciones Ejecutivas*), estableciendo una analogía entre la secuencia de términos y un ritmo marcado por palmadas (R.LS, *Lenguaje y Símbolos*) que focaliza la atención del estudiante (E.RI, *Captar el Interés*).

U226-A y U247-A:

Andrea: Tú sumas el número de metros, ¿no? (EstudianteA afirma).
Entonces, si te digo, EstudianteA, dime rápidamente el del nueve metros.
¿Cuántos tiene?

EstudianteA: Pues, eeem...son.... 45.

Andrea: Dime el de 10 (da una palmada).

EstudianteA: 55.

Andrea: Dime el de 11 (da una palmada).

EstudianteU: Súmale 11.

EstudianteA: Emmm... 66.

Andrea: Ahora en vez de el de 12, dime el de 28.

Si observamos los niveles de coocurrencia de KFLM (*Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas*), encontramos que el nodo *Fortalezas y dificultades* muestra valores inferiores que otras categorías en el caso de Andrea, cuyos resultados de coocurrencia aumentan en *Formas de interacción* (Tabla 45). En el caso de Ester (Tabla 43) ocurre que en el nodo *Fortalezas y dificultades* encontramos cuatro conexiones de nivel dos, siendo este el nodo con los nexos más relevantes y numerosos del análisis de la sesión de esta docente. Los resultados de Federico (Tabla 44) señalan más nivel de coocurrencia en

Fortalezas y dificultades, aunque uno de los nexos de *Formas de interacción* alcanza el nivel 1.

El nexo de *Fortalezas y Dificultades* con E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) alcanza el nivel dos en los tres docentes, y, coincidiendo con los resultados de los nodos de otras categorías comentados en párrafos anteriores, los nexos de Ester muestran una mayor coocurrencia con E.SEP.1 (*Aumentar la relevancia de las metas y los objetivos. Establezca una visión del objetivo y por qué es importante*), Federico con E.SEP.1 y E.SEP.4 (*Aumentar la retroalimentación orientada a la maestría*) y Andrea con E.SEP.4.

Destacamos los nexos de esta misma categoría con las directrices de Representación, que en Ester evidencian todas nexos de nivel 2 (color verde en la Tabla 43), manteniendo ese nivel con el nexo R.C (*Comprensión*) en la sesión de Federico y alcanzando el nivel 1 de coocurrencia en Andrea también con R.C (*Comprensión*). Este nexo adquiere relevancia dado que uno de los descriptores más representativos de todo el análisis en términos de KFLM (*Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas*) son las dificultades de visualización de los estudiantes, que afectan a la comprensión de la estructura de la escalera de la arqueóloga y su construcción, así como en la comprensión del patrón geométrico. En la sesión de Andrea, destacamos los resultados de esta coocurrencia entre nodos. Encontramos una mayoría de indicios de R.C (*Comprensión*) en las tres fases de la sesión, pero destacamos la aparición de evidencias de R.P (*Percepción*) en la fase de comprender el problema. Presentamos mediante el siguiente fragmento (U61-A), un ejemplo de cómo el docente ejemplifica las alturas de los cajones de la arqueóloga ayudándose de la goma Eva (KMT- *Recursos*). La forma en la que repite las acciones y aborda cada ejemplo da indicios de su conocimiento sobre las posibles dificultades de los estudiantes para identificar y extraer la característica de los cuadrados dentro de la estructura de la escalera:

U61-A: *El cubo, sus caras de fuera son cuadrados. Entonces la altura de ese cubo mide un metro y la base mide un metro. Esta altura mide un metro y esta mide otro metro [gesticula con el cuadradito de goma Eva]. Si lo*

giramos, mide lo mismo. Si lo giramos [repite el gesto cada vez], la altura que alcanza es un metro, la altura que alcanza es un metro, la altura que alcanza es un metro... ¿Sí? Importante eso, porque digo, bueno, un metro, depende como lo coloque... Vale.

Finalmente, el nodo *Formas de interacción* presenta conexiones de nivel dos en E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) y R.C (*Comprensión*) en la sesión de Ester, siendo nivel uno la conexión con E.SEP en la sesión de Federico y con R.C en la de Andrea.

Ester manifiesta conocimiento sobre las características de los estudiantes en seis unidades de información, que señalan una coocurrencia de su conocimiento de *Formas de interacción* con E.SEP.1 (*Aumentar la relevancia de las metas y los objetivos. Establezca una visión del objetivo y por qué es importante*). Si observamos la unidad E63-E, descrita a continuación, encontramos un ejemplo de cómo, atendiendo a la tendencia de los estudiantes al conteo o las estrategias recursivas, Ester desglosa la resolución del problema de la escalera en pequeños pasos (E.SEP.1.3, *Fomentar la división de las metas a largo plazo en objetivos a corto plazo*) que contribuyen a la visualización de la estructura que forma la arqueóloga y a comprender los objetivos que se han seguido hasta ahora mediante el diagrama tabular dibujado en la pizarra (E.SEP.1.5, *Utilizar ayudas o andamios para visualizar el resultado deseado*).

U63-E: *¿Tú entiendes esa figura de las cajas? La forma puesta, en forma de escalera. ¿Y entiendes que una caja mide un metro de altura? ¿Y entiendes que si yo apilo las cajas de esta forma [señala el dibujo del enunciado sobre la pizarra digital], subo dos metros? Un metro y otro metro, ¿no? Y con cuatro metros necesito 1, 2, 3 y cuatro, lo que pasa es que yo voy rellenando la escalera hasta que está completa, ¿no? Eso lo entiendes bien. Tu dificultad ahora pasa que de 4 a 8 no, así de pronto no eres capaz de decirme cuántas.*

El nexos de nivel 2 es compartido con Andrea, que evidencia manifestaciones de conocimiento mediante otros dos descriptores más. Encontramos así vínculos de conocimiento de la influencia de las emociones con E.SEP.4 (*Aumentar la*

retroalimentación orientada a la maestría), en el sentido de proporcionar una retroalimentación que resalte el esfuerzo y el error como un paso para el éxito (E.SEP.4.2, *Proporcionar una retroalimentación que haga hincapié en el esfuerzo, la mejora y el logro de un estándar en lugar de en el rendimiento relativo*; E.SEP.4.4, *Proporcionar una retroalimentación sustantiva e informativa en lugar de comparativa o competitiva*) como refleja la unidad U338-A:

U338-A: *Y ahora, mirad, yo tengo que decir una cosa. Mira, a lo mejor los demás os preguntáis cómo ha descubierto eso. Yo el problema no lo he hecho en casa. Yo aquí no he descubierto eso. Yo. El maestro no lo ha descubierto, ¿vale? Aquí, mirando lo vuestro, yo eso no lo he descubierto. No sé si en casa lo hubiera descubierto o no lo hubiera descubierto. ¿Por qué EstudianteG lo ha descubierto? Bueno, yo pienso que por un lado es porque se ha puesto a probar. Y por otro lado, porque tiene una visión que no puede tener todo el mundo. Ni puede, ni tiene. Porque ¿alguien de aquí se ha preguntado cómo ha sacado ese X menos N entre 2 más N ? Yo cuando se lo he visto en el cole, me lo he preguntado y he dicho eso, ¿cómo lo saca? Me lo ha explicado, lo comprendo, y digo: Ostras, es verdad. EstudianteG lo ve, le gusta y tiene la capacidad de eso, el tío. Así que vamos a dar un aplauso.*

En la sesión de Federico, el nexo de *Formas de interacción* con E.SEP (*Mantener el esfuerzo y la persistencia*) alcanza el nivel 1. Este docente, al igual que Andrea, manifiesta evidencias de los tres descriptores de *Formas de interacción*. En este nodo los resultados del análisis relacionan las manifestaciones de conocimiento con los puntos de verificación E.SEP.3 (*Fomentar la colaboración y la comunidad*) y E.SEP.4 (*Aumentar la retroalimentación orientada a la maestría*). Se observa que Federico desarrolla prácticas docentes orientadas a retroalimentar las estrategias de generalización de los estudiantes, pero también a fomentar la colaboración entre ellos. En este extracto de diálogo (unidades U175-F a U184-F), mostramos un ejemplo de cómo las intervenciones del docente en la discusión de uno de los grupos de estudiantes se orientan a contribuir a la aparición y el respeto por más de una estrategia de resolución:

U175-F a U184-F:

EstudianteC: Yo me he dado cuenta de una cosa... este número de cajas, sería 3.

Federico: Vale.

EstudianteJ: Pero ¿tú qué has hecho? (riéndose, sin prestar atención a la estrategia de EstudianteC)

EstudianteC: Mira...

Federico: Escúchalo, escúchalo porque... es que a lo mejor no lo estás viendo tú.

EstudianteC: Los números son 3, 3. Luego 3, 6. Luego $6+4$, 10; $10+5$, 15; $15+6$, 21. 21 que es resultado más 7, 28; 28 que es resultado más 8, 36; y 36 que es el resultado más 9, 45.

EstudianteJ: A ver, si está bien, pero...

Federico: ¡ANDA! (hace una musiquilla de violín trágico) ¿Y 10?

EstudianteC y EstudianteJ: 55.

Federico: 55. Ya, él (refiriéndose a EstudianteJ) ha entendido el razonamiento.

En relación con el nexo de nivel 2 de *Formas de interacción con R.C (Comprensión)*, se observa que los docentes vinculan el conocimiento de las características de los estudiantes con emplear la representación para fomentar la comprensión, resaltando aspectos clave de las estrategias que los estudiantes han desarrollado. En la unidad U48-E y la U184-A, se encuentran indicios de cómo Ester y Andrea parten de las estrategias de los estudiantes y emplean diferentes ejemplos para que continúen verificándolas. En el caso de Ester, esta unidad se relaciona con el conocimiento sobre la tendencia a la recursividad, mientras que Andrea manifiesta conocimiento sobre la tendencia de los estudiantes por desarrollar una única estrategia al abordar los problemas.

U48-E: *Es decir, has ido añadiendo una más, una más, una más... Bueno, entonces, según esto, ¿puedo averiguar fácilmente cuál sería una altura de tres metros o cuántas cajas necesitaría, ¿no? Según lo que tú me estás*

diciendo, ¿cuántas serían? [Estudiante18 contesta seis]. Seis. ¿Por qué? Porque son las de antes...

U184-A: Y antes me faltaban tres. Creo que hay que poner de 5, sigue. Aunque tú hayas encontrado la otra fórmula. [EstudianteU vuelve a decir que ha acabado]. EstudianteU [voz calmada], ahora voy contigo. Venga, el de 5.

La sesión de Andrea, además de los mencionados previamente, manifiesta otros nexos de nivel dos de *Formas de interacción* con los nodos E.RI (*Captar el Interés*), que se reflejan en acciones que buscan personalizar el problema y las estrategias para propiciar la autonomía en el estudiante (E.RI.1.1, *Proporcionar autonomía mediante el nivel de desafío, el contexto, el contenido, las herramientas utilizadas para recopilar o producir información, el diseño o la secuencia de tareas*); AE.EC (*Expresión y Comunicación*), en términos de retroalimentar al estudiantado para mejorar la forma de expresar sus ideas y estrategias (AE.EC.3.4, *Proporcionar retroalimentación diferenciada, accesible y personalizada*), aceptando su diversidad (AE.EC.3.1, *Proporcionar modelos diferenciados para emular, que demuestren los mismos resultados pero utilicen diferentes enfoques, estrategias o habilidades*); y AE.EF (*Funciones Ejecutivas*). De esta última conexión, señalamos que se manifiesta coocurrencia similar con los cuatro puntos de verificación de la práctica inclusiva orientada a la función ejecutiva.

Para concluir este capítulo, atendiendo a los niveles de coocurrencia, observamos en la sesión de Andrea muchas más relaciones de nivel 1 (9) (Tabla 45, color amarillo), mientras Ester y Federico presentan dos y una, respectivamente (color amarillo en Tabla 43 y Tabla 44). En términos generales, la sesión de Andrea muestra más indicios de coocurrencia de conocimiento especializado y práctica inclusiva. Federico y Ester muestran valores equivalentes, aunque cada uno muestra más evidencias de relaciones de segundo nivel (Ester) y tercero (Federico). Sin embargo, el estudio de conocimiento especializado no señala grandes diferencias entre ambos docentes (Figura 82) y el número de descriptores del DUA de Federico es superior al de Ester (ver Figura 83), lo que debería conllevar a un número mayor de coocurrencia. Si relacionamos estos datos con los tipos de interacción de cada sesión, descrito en el apartado IV.4.1. de este capítulo,

podemos deducir que el número de intervenciones de Ester y el tiempo que dedica a la sesión, que supera en ambos casos a los datos de la sesión de Federico, resulta una variable condicionante en el estudio de las unidades.

Figura 82

Comparativa de los Resultados del Análisis de Conocimiento Especializado en Función de los Subdominios de MTSK

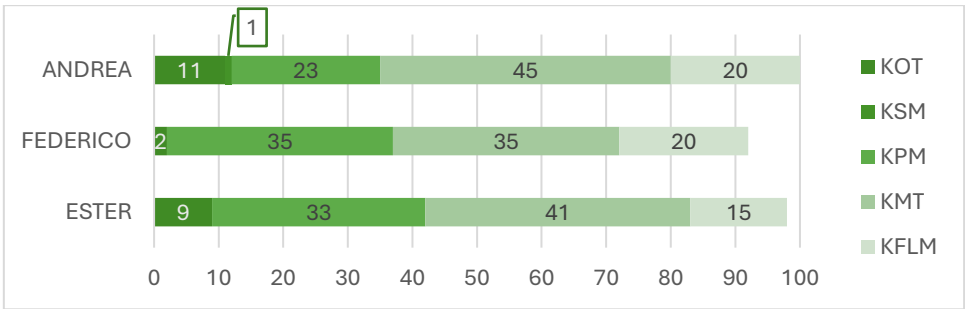
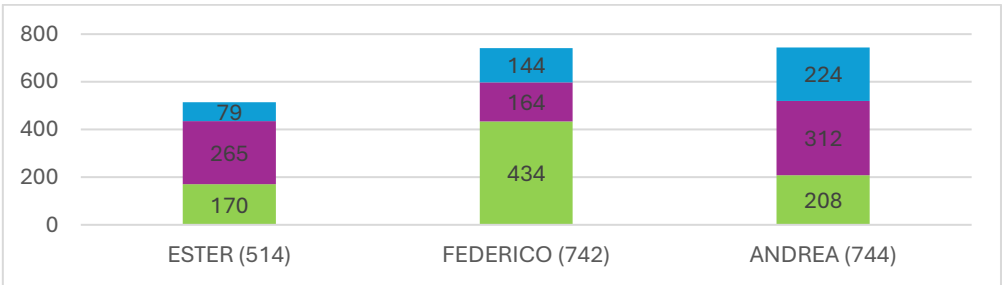


Figura 83

Comparativa de los Resultados del Análisis de la Práctica Inclusiva en Función de los Principios del DUA (Compromiso en Verde, Representación en Morado y Acción y Expresión en Azul)



IV.4.3. Informe de resultados del capítulo

Los diferentes epígrafes que conforman este capítulo han tratado de mostrar los resultados de la observación y análisis de las tres sesiones de los docentes. Los primeros apartados se han centrado en detallar las características de las sesiones de resolución de problemas, recalcando ciertos elementos, como la gestión, el tipo de agrupamiento, la temporalización o el tipo de problemas que aborda cada docente. Esto nos ha permitido contextualizar el análisis posterior.

El estudio de las tres sesiones de resolución del problema de la arqueóloga señala elementos de conocimiento y de práctica inclusiva en los tres docentes cuando abordan el problema de generalización con sus estudiantes.

Atendiendo al conocimiento especializado, señalamos más evidencias de conocimiento sobre la práctica matemática (KPM) y sobre la enseñanza (KMT). De cada uno de estos subdominios destacamos las categorías Resolución de Problemas y Recursos Didácticos, en los que además observamos cierto equilibrio entre el número de evidencias de los tres docentes. Los resultados de conocimiento sobre Demostraciones (KPM) y Fortalezas y Dificultades (KFLM) también son relevantes, aunque en menor medida. En los tres estudios de caso observamos evidencias de los diferentes subdominios, con menor presencia de descriptores de Conocimiento sobre los temas en la sesión de Federico y solo una evidencia de Conocimiento sobre la Estructura Matemática (KSM) en todo el análisis, perteneciente a la sesión de Andrea.

Con respecto a la práctica inclusiva, los resultados han señalado la presencia mayoritaria de indicadores del principio de Representación y Compromiso. Si nos centramos en cada estudio de caso, Ester, cuya sesión evidencia una menor presencia de indicadores de inclusión en relación con los otros dos estudios de caso, evidencia un mayor número de criterios asociados a Representación. En la sesión de Federico predomina el principio de Compromiso y en la de Andrea encontramos cierto equilibrio entre los principios, aunque con mayor presencia de Representación.

Analizar las manifestaciones de diferentes categorías de conocimiento especializado y los indicios de los principios de inclusión en las decisiones y acciones de los docentes nos ha permitido establecer una relación entre ambos focos de estudio. Las siguientes tablas sintetizan las principales conexiones encontradas, diferenciando entre relaciones de nivel 1 (Tabla 46) y de nivel 2 (Tabla 47).

Tabla 46

Relaciones de Nivel 1 Entre Elementos de Conocimiento Especializado y DUA

Categoría y Subdominio de MTSK	Directriz y Principio DUA	Puntos de verificación	Docentes
Registros (KoT)	Comprensión (Principio de Representación)	RC.2, RC.3	Andrea, Análisis conjunto
Definiciones (KoT)	Comprensión (Principio de Representación)	RC.2, RC.3, RC.4	Andrea
Conexiones Transversales (KSM)	Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (Principio de Representación)	E.SEP.1, E.SEP.4	Análisis conjunto
	Comprensión (Principio de Representación)	RC.2, RC.3	Andrea, Análisis conjunto
Resolución de problemas (KPM)	Comprensión (Principio de Representación)	RC.2, RC.3, RC.4	Ester y Andrea
Recursos (KMT)	Comprensión (Principio de Representación)	RC.2, RC.3, RC.4	Andrea, Análisis conjunto
Estrategias, Técnicas y Ejemplos (KMT)	Comprensión (Principio de Representación)	RC.2, RC.3, RC.4	Andrea
Fortalezas y Dificultades (KFLM)	Comprensión (Principio de Representación)	RC.2, RC.3, RC.4	Andrea
Formas de interacción (KFLM)	Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (Principio de Compromiso)	E.SEP.3, E.SEP.4	Federico
	Comprensión (Principio de Representación)	RC.2, RC.3	Andrea

Leyenda:

E.SEP.1: Aumentar la relevancia de las metas y los objetivos. Establezca una visión del objetivo y por qué es importante.

E.SEP.4: Aumentar la retroalimentación orientada a la maestría

R.C.1: Activar o proporcionar conocimientos previos. Establecer conexiones con conocimientos y experiencias anteriores.

R.C.2: Resalte patrones, características críticas, grandes ideas y relaciones. Acentuar la información importante y cómo se relaciona con el objetivo de aprendizaje.

R.C.3: Guiar el procesamiento y visualización de la información. Apoye el proceso de creación de significado a través de modelos, andamios y retroalimentación

R.C.4: Maximizar la transferencia y la generalización. Aplicar el aprendizaje a nuevos contextos

La tabla anterior refuerza que el principio de práctica inclusiva más presente en las tres sesiones es el de Representación, a través de la directriz relativa a ofrecer opciones para la Comprensión, fundamentalmente mediante Resaltar patrones, características críticas, grandes ideas y relaciones (R.C.2) y Guiar el

procesamiento y visualización de la información (R.C.3). Esta práctica inclusiva se sustenta en conocimiento sobre Registros y Definiciones (KoT), Conexiones (KPM), Resolución de problemas (KPM), Recursos y Estrategias, Técnicas y Ejemplos (KMT), y Fortalezas y Dificultades y Formas de interacción (KFLM). En menor medida el conocimiento de Conexiones se relaciona con favorecer el principio de Compromiso, a través de la directriz Mantener el Esfuerzo y la Persistencia.

Otras relaciones destacables son las establecidas entre esta directriz y las categorías Demostraciones (KPM) y Recursos (KMT), que, aunque no alcanzan el nivel uno por nuestro criterio de agrupamiento de los valores relativos, quedan muy próximos en la sesión de Federico (3.916 y 3.9), destacando las acciones para Aumentar la retroalimentación orientada a la maestría (E.SEP.4).

Tabla 47

Relaciones de Nivel 2 Entre Elementos de Conocimiento Especializado y DUA

Categoría y Subdominio de MTSK	Directriz y Principio DUA	Puntos de verificación	Docentes
Registros (KoT)	Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (Principio de Compromiso)	E.SEP.1, E.SEP.4	Ester Andrea Análisis conjunto
	Comprensión (Principio de Representación)	R.C.2, R.C.3.	Ester
	Expresión y Comunicación (Principio de Acción y Expresión)	AE.EC.3	Andrea
	Funciones Ejecutivas (Principio de Acción y Expresión)	AE.EF.1, AE.EF.2, AE.EF.3, AE.EF.4	Ester Andrea Análisis conjunto
Definiciones (KoT)	Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (Principio de Compromiso)	E.SEP.4	Federico
	Comprensión (Principio de Representación)	R.C.2, R.C.3, R.C.4	Análisis conjunto
Conexiones Transversales (KSM)	Percepción (Principio de Representación)	R.P.1, R.P.2	Andrea Análisis conjunto
	Expresión y Comunicación (Principio de Acción y Expresión)	AE.EC.3	Andrea Análisis conjunto
	Funciones Ejecutivas (Principio de Acción y Expresión)	AE.EF.1, AE.EF.2	Andrea Análisis conjunto

Resolución de problemas (KPM)	Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (Principio de Compromiso)	E.SEP.1, E.SEP.3, E.SEP.4	Ester Federico Análisis conjunto
	Comprensión (Principio de Representación)	R.C.2, R.C.3	Análisis conjunto
	Funciones Ejecutivas (Principio de Acción y Expresión)	AE.EF.1, AE.EF.2, AE.EF.3, AE.EF.4	Andrea
Demostraciones (KPM)	Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (Principio de Compromiso)	E.SEP.1, E.SEP.3, E.SEP.4	Ester Federico Análisis conjunto
	Comprensión (Principio de Representación)	R.C.1, R.C.2, R.C.3	Ester Análisis conjunto
	Funciones Ejecutivas (Principio de Acción y Expresión)	AE.EF.1, AE.EF.2, AE.EF.3, AE.EF.4	Ester Federico Análisis conjunto
Recursos (KMT)	Captar el Interés (Principio de Compromiso)	E.RI.3	Ester
	Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (Principio de Compromiso)	E.SEP.1, E.SEP.4	Federico Andrea Análisis conjunto
	Lenguaje y Símbolos (Principio de Representación)	R.LS.3	Ester
	Comprensión (Principio de Representación)	R.C.2, R.C.3, R.C.4	Ester Federico
	Expresión y Comunicación (Principio de Acción y Expresión)	AE.EC.1, AE.EC.3	Andrea
	Funciones Ejecutivas (Principio de Acción y Expresión)	AE.EF.2, AE.EF.3	Federico Andrea Análisis conjunto
Estrategias, Técnicas y Ejemplos (KMT)	Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (Principio de Compromiso)	E.SEP.1, E.SEP.4	Federico Andrea Análisis conjunto
	Comprensión (Principio de Representación)	R.C.2, R.C.3.	Ester Análisis conjunto
	Funciones Ejecutivas (Principio de Acción y Expresión)	AE.EF.1, AE.EF.2, AE.EF.3, AE.EF.4	Andrea
Fortalezas y Dificultades (KFLM)	Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (Principio de Compromiso)	E.SEP.1, E.SEP.4	Ester Federico Andrea Análisis conjunto
	Percepción (Principio de Representación)	R.P.2	Ester
	Lenguaje y Símbolos (Principio de Representación)	R.LS.1, R.LS.3, R.LS.5	Ester

	Comprensión (Principio de Representación)	R.C.2, R.C.3, R.C.4	Ester Federico Análisis conjunto
Formas de interacción (KFLM)	Captar el Interés (Principio de Compromiso)	E.RI.1, E.RI.3	Andrea
	Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (Principio de Compromiso)	E.SEP.1, E.SEP.4	Ester Andrea Análisis conjunto
	Comprensión (Principio de Representación)	R.C.1, R.C.2, R.C.3	Ester Análisis conjunto
	Expresión y Comunicación (Principio de Acción y Expresión)	AE.EC.3	Andrea
	Funciones Ejecutivas (Principio de Acción y Expresión)	AE.EF.1, AE.EF.2, AE.EF.3, AE.EF.4	Andrea

Leyenda:

E.RI.1: Optimizar la elección individual y autonomía
E.RI.3: Minimizar distracciones
E.SEP.1: Aumentar la relevancia de las metas y los objetivos. Establezca una visión del objetivo y por qué es importante.
E.SEP.3: Promover la colaboración y la comunidad
E.SEP.4: Aumentar la retroalimentación orientada a la maestría
R.P.1: Ofrecer opciones para personalizar la presentación de la información
R.P.2: Ofrecer alternativas para la información auditiva
R.LS.1: Clarificar símbolos/ vocabulario
R.LS.3: Facilitar decodificación de textos y símbolos
R.LS.5: Ilustrar mediante distintos medios
R.C.1: Activar o proporcionar conocimientos previos. Establecer conexiones con conocimientos y experiencias anteriores.
R.C.2: Resalte patrones, características críticas, grandes ideas y relaciones. Acentuar la información importante y cómo se relaciona con el objetivo de aprendizaje.
R.C.3: Guiar el procesamiento y visualización de la información. Apoye el proceso de creación de significado a través de modelos, andamios y retroalimentación
R.C.4: Maximizar la transferencia y la generalización. Aplicar el aprendizaje a nuevos contextos
AE.EC.1: Usar múltiples medios de comunicación
AE.EC.3: Definir competencias con niveles de apoyo graduados para la práctica y la ejecución
AE.EF.1: Guiar el establecimiento adecuado de metas
AE.EF.2: Apoyar el desarrollo de estrategias y la planificación
AE.EF.3: Facilitar la gestión de la información y los recursos
AE.EF.4: Impulsar la capacidad de monitoreo

Esta segunda tabla centrada en las relaciones de segundo nivel manifiesta conexiones con los tres principios, aunque de nuevo predominan las conexiones

con la directriz Mantener el Esfuerzo y la Persistencia del principio de Compromiso, destacando las acciones orientadas a Aumentar la relevancia de las metas y los objetivos (E.SEP.1) y Aumentar la retroalimentación orientada a la maestría (E.SEP.4); y destaca la directriz ofrecer opciones para las Funciones Ejecutivas, del principio de Acción y Expresión, a través de las directrices Apoyar el desarrollo de estrategias y la planificación (AE.EF.2) y Facilitar la gestión de la información y los recursos (AE.EF.3). Estos cuatro puntos de verificación de Compromiso y Representación se relacionan con el conocimiento sobre Registros (KoT), Resolución de problemas y Demostraciones (KPM), Recursos y Estrategias, Técnicas y Ejemplos (KMT), y Formas de interacción (KFLM). Además de las anteriores, encontramos una conexión entre Mantener el Esfuerzo y la Persistencia y Fortalezas y Dificultades (KFLM) y entre ofrecer opciones para las Funciones Ejecutivas y Definiciones (KoT).

Otras conexiones relevantes se presentan con otras directrices del principio de Representación y Acción y Expresión. Las acciones orientadas a Impulsar la capacidad de monitoreo (AE.EF.4) de la directriz ofrecer opciones para las Funciones Ejecutivas, están conectadas con el conocimiento sobre Registros y Definiciones (KoT), Resolución de problemas y Demostraciones (KPM), Estrategias, Técnicas y Ejemplos (KMT), y Formas de interacción (KFLM). Paralelamente, al igual que en las relaciones de primer nivel, señalamos la mayor presencia de acciones orientadas a Resaltar patrones, características críticas, grandes ideas y relaciones (RC.2) y Guiar el procesamiento y visualización de la información (RC.3). Estas se relacionan, además de con las categorías anteriores, con Recursos (KMT), Fortalezas y Dificultades y Formas de interacción (KFLM). Además, encontramos varios vínculos entre ofrecer opciones para las Funciones Ejecutivas y Definiciones (KoT) y la categoría Fortalezas y Dificultades (KFLM) con acciones dirigidas a ofrecer opciones de Lenguaje y los Símbolos, del principio de Representación, y Mantener el Esfuerzo y la Persistencia, del principio de Compromiso.

Señalamos en la Tabla 47 algunas relaciones de este nivel menos relevantes, como las que vinculan las categorías de conocimiento de Recursos (KMT) y Formas de Interacción (KFLM) con las directrices Captar el Interés, del principio de Compromiso, proporcionar opciones para la Expresión y Comunicación, del

principio de Acción y Comunicación; y, solo con la primera de ellas, ofrecer opciones para la percepción y para el Lenguaje y los Símbolos, del principio de Representación. Por último, la categoría de conocimiento sobre conexiones transversales (KSM) presenta relaciones con las acciones para promover la Percepción (principio de Representación) y la Expresión y Comunicación (Principio de Acción y Expresión).

Para finalizar este capítulo, plasmamos en la siguiente tabla (Tabla 48) otras relaciones encontradas que por nuestro criterio de agrupamiento quedan en el nivel tres, pero cuyo valor relativo se aproxima al segundo nivel. Todas ellas son coherentes con las ideas descritas en los párrafos anteriores, coincidiendo además con algunas de las relaciones reflejadas en la Tabla 47.

Tabla 48

Relaciones Entre Elementos de Conocimiento Especializado y DUA de Nivel 1 Próximas al Nivel 2

Categoría y Subdominio de MTSK	Directriz y Principio DUA	Puntos de verificación	Docentes
Resolución de problemas	Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (Principio de Compromiso)	E.SEP.1 E.SEP.4	Andrea (valor relativo: 1.9375)
Demostraciones	Comprensión (Principio de Representación)	R.C.2	Andrea (valor relativo: 1.82)
	Funciones Ejecutivas (Principio de Acción y Expresión)	AE.EF.4	Andrea (valor relativo: 1.82)
Recursos	Expresión y Comunicación (Principio de Acción y Expresión)	AE.EC.1 AE.EC.3	Análisis conjunto (valor relativo: 1.84)
Estrategias, técnicas, tareas y Ejemplos	Funciones Ejecutivas (Principio de Acción y Expresión)	AE.EF.3 AE.EF.4	Análisis conjunto (valor relativo: 1.94375)

Formas de Interacción	Captar el Interés (Principio de Compromiso)	E.RI.3	Federico (valor relativo: 1.875)

Leyenda:

E.RI.3: Minimizar distracciones

E.SEP.1: Aumentar la relevancia de las metas y los objetivos. Establezca una visión del objetivo y por qué es importante.

E.SEP.4: Aumentar la retroalimentación orientada a la maestría

R.C.2: Resalte patrones, características críticas, grandes ideas y relaciones. Acentuar la información importante y cómo se relaciona con el objetivo de aprendizaje.

AE.EC.1: Usar múltiples medios de comunicación

AE.EC.3: Definir competencias con niveles de apoyo graduados para la práctica y la ejecución

AE.EF.3: Facilitar la gestión de la información y los recursos

AE.EF.4: Impulsar la capacidad de monitoreo

CHAPTER V: DISCUSSION OF RESULTS AND CONCLUSION

Abstract

In this chapter we shall discuss the results of the analysis of Case Study 1, focused on the problem-solving workshop with a group of pupils with ASD; and Case Studies 2, 3, and 4, shifting the focus towards the results from observing the teachers when they solve problems in Primary Education classrooms.

We start from the results of our research presented in the two sections of the previous chapter in this thesis, to present their discussion throughout the following pages. The structure of this chapter is based on the specific objectives and sub-objectives that have guided our thesis project and each of the steps followed in the development of the research. In this way, there are two different sections, one focused on the pedagogical guidelines for problem-solving learning for pupils with ASD, and another more oriented towards the teacher's knowledge about the practice of solving problems in an inclusive way in the Primary classroom. A final section will bring together the main results obtained from our study into some final conclusions, describing the main ideas extracted from our research and bringing together the different perspectives of that research to put them into the main objective that has guided our steps -- teacher training. This chapter will close with the limitations found during these four years of research and the future lines that this study should take.

V.1. Discussion of results regarding objective O1: Develop pedagogical guidelines for learning problem-solving for pupils with Autism Spectrum Disorder - Asperger syndrome

One of the motivations of our research about teacher training from an inclusive perspective was to investigate the pedagogical guidelines that can promote the problem-solving learning of pupils with ASD-1. The first thing that mobilized achieving this objective was the literature review specialized in this topic. It is worth noting that no research has been found about problem-solving of pupils with ASD focused on the development of strategies and skills as problem-solvers prior to 2011 (Root et al., 2021). We have highlighted the role of TEACCH material, structured teaching, and various instruction-based methods (Schaefer Whitby, 2009), which consider the characteristics of ASD within the task of problem-solving.

The following sub-sections will try to break down the discussion of the research results regarding the characteristics associated with ASD that influence problem-solving, problem-solving strategies, and what happens when the strategy addressed with the pupils is related to the generalization process.

V.1.1. O1.1. Identify and describe the characteristics associated with ASD-1 that may influence the problem-solving process

The characterization of pupils with ASD encompasses, as its name indicates, a very broad spectrum of skills and educational needs.

The development of the zero workshop and the semester workshop has allowed observation and understanding of how the pupils' characteristics influence their solving process. It was not only during the implementation of the workshops that we were able to identify the characteristics that were manifested in the participants' resolution. Having the collaboration of specialists from the AOSA-TEA association when designing the zero workshop contributed to considering certain aspects with the selection of the problems, the statements, and the materials. In the case of the semester workshop, extending the sessions over seven months gave us the opportunity to witness the skills and needs of the four participants in different situations, which helped to redesign the workshop at various times to adapt it to the

pupils' reality. The influence of the characteristics associated with the three main theories that describe autism spectrum disorder was observed during both workshops.

The interaction between pupils when problem-solving enables the exchange of ideas, arguments, and reflection about different strategies (Ministry of Education, Culture and Sport, 2022). The needs associated with the Theory of Mind (Frith & Happé, 1994) result in pupils with ASD often showing difficulties when establishing interactions with their peers, given that they present a low level of such skills as empathy and the understanding of non-verbal language. We found significant differences between the zero workshop and the semester workshop regarding the interactions observed. In the zero workshop, only two of the pupils in group 4, the oldest pupils (>15 years old), managed to compare their strategies autonomously and spontaneously, whereas in group 3 (6 and 7 years old) there was hardly any interaction. In groups 1 (between 11 and 15 years old) and 2 (between 12 and 18 years old) the interaction was driven by the researchers. During the semester workshop, as the sessions progressed, the problems were adapted to the pupils' interests, and gradually a group atmosphere was created. The close context of the semester workshop, where the pupils were given the freedom to share their opinions about the topics and their solving strategies, might have contributed to transforming the sessions into challenges and improving the interaction between the participants. Specifically noteworthy was the board game area, incorporated into the sessions of the semester workshop from the second session onwards. Due to its closeness nature, it was beneficial for both the pupils and the researchers: it is described as a playful space, fostering relationships between the participants and an observation space for the researchers, where the characteristics associated with ASD were manifested in a more natural context.

If the focus is on the pupils' problem-solving process, despite the design and the implementation of the workshops being based on the visual aspect, which has been identified as a beneficial element for addressing tasks with pupils with ASD (Delisio et al., 2018; Klaren et al., 2017, Root et al., 2021) and ASD-1 (de Giambattista et al., 2019; Gevarter et al., 2016), a double-edged blade was found in this approach to

problem-solving. The type of representation of the statement pictograms and the manipulative materials conditioned the pupils' understanding and problem-solving process, both in the zero workshop and in the semester workshop. Pictorial representations can be a motivating element, taking advantage of their usual attachment to visual elements and drawing (Polo-Blanco et al., 2018a), in accordance with the participants' focus of interest (Gevarter et al., 2016), such as the images of animals or superheroes used in both workshops. However, the pupils' mental images might not coincide with the selected representations (Chico-Gómez et al., 2022d; 2022e), which becomes an obstacle to the resolution encouraged by the rigidity of thought and literality that derive from the low cognitive flexibility, inhibition, and theory of mind (Polo-Blanco et al., 2024). Transforming pictorial representations may not be an easy task for pupils with ASD (Polo-Blanco et al., 2018a), since this process requires a certain mental and visual flexibility, and an overall vision of the figure, not just of its parts. An example of this was found in the zero workshop, when one of the pupils created six-legged animals, focusing only on this variable and not on the complete drawing, without understanding that their idea had been decontextualized from the problem situation and also the teacher's proposal to remove legs from their "animal". Our results agree with those of the comparative research between neurotypical and pupils with ASD by Polo-Blanco et al. (2024), emphasizing that the difficulties associated with the Theory of Mind and the Theory of Central Coherence are configured as yet another obstacle within problem-solving. It should be noted that these difficulties were not found during the problem workshop with the control group, which prompts us to think about the essential role of not only using the visual medium in problem-solving, but also the type of representation chosen to support these tasks when they are addressed by pupils with ASD.

Replacing the pictorial representations with more schematic ones can reduce some difficulties (Kribbs & Rogowsky, 2016; Polo-Blanco et al., 2018). For instance, making the representation more figurative could bring it closer to the pupils' conceptions (Kribbs & Rogowsky, 2016) and therefore, help to overcome the difficulties associated with limited mental flexibility and visualization (Liljedah &

Cai, 2021). By turning the schematization of the parts of the drawing into a facet of the problem-solving, the pupils are being encouraged to focus their attention on the variables it comprises (Chico-Gómez et al., 2022d; 2022e; 2022f). When more schematic elements are included in the representation, its abstraction is increased, which according to Bennet et al. (2019) can reduce the working memory difficulties involved in understanding the figure, and hence benefitting pupils with ASD. However, although the pupils' skill to perceive details of the representations has been demonstrated, thus favouring problem-solving, one of the commonest difficulties present in the workshops was precisely this tendency to focus their attention on the specificities of the figures. On several occasions, there was evidence that this action made them lose the overall form of the problem and even the objective, possibly deriving from the difficulties of the Central Coherence Theory (Klaren et al., 2017), thus requiring the teacher's instruction and reorientation to integrate all the details observed in the overall form.

Although schematic representations were much commoner in the semester workshop, one of the most significant limitations we tried to overcome as teacher-researchers was that of the difficulties deriving from executive functions, which are limiting factors in the performance of pupils with ASD (Polo-Blanco et al., 2022). How these representations were used was conditioned by these mental processes. We found moments where attention was diverted from problem-solving to focusing on the task of completing a drawing, filling in a table, or associating the pictograms with each term in the resolution, an issue which, combined with working memory difficulties, limited the reorientation of the task to discovering the solution to the problem (Klaren et al., 2017). In other cases, the planning and prediction difficulties became obstacles to continuing the problem autonomously or reviewing the data (Cox et al., 2024), as well as the difficulties in inferring ideas from their own strategies, often forgotten as a result of the weakened working memory (Bullen et al., 2020). Similarly to the research by Bruno et al. (2021), the participants in our study, despite showing some flexibility in their strategies when problem-solving, required instruction specifically adapted to each of their needs so as to place them at some step of the solution when they had lost the objective of the problem.

As more workshop sessions were completed, while the manifestations of characteristics associated with ASD in the pupils did not decrease, in most cases fewer limitations were found in the problem-solving process. This may be due to the researchers' own learning about ASD that was reflected in the workshop design, such as the introduction of the session planner and the flexibility of the structure of the workshop and its sessions. We also argue that by spending more time working with the pupils, we get to know them better, their personal characteristics and their interests, which this author considers to be a conditioner of the skills and needs of pupils with ASD.

V.1.2. O1.2. Describe problem-solving teaching strategies considering the characteristics associated with ASD-1 that may influence the problem-solving process

In line with the previous subsection, visual support during the workshops has become a key element in the strategies that benefit the pupils' problem-solving process. We highlight the potential of creating visual problems whose ordered structure and pictorial elements have covered the needs of verbal comprehension of the problem's statements and data (Daroczy et al., 2015; Root & Browder, 2017). The design of the problems and the materials used for their resolution took into account the interests and tastes of the participants in the workshop, which has undoubtedly been a motivating factor in the solving process. The ASD collective is characterized by having narrow and sometimes limiting focuses of interest (Carr & Seah, 2019), so contextualizing the teaching around video games and cartoon characters improved the introduction of the tasks in each workshop session.

Using the TEACCH material made it possible to include the visual elements in various ways, which encouraged the emergence of different solving strategies (Novotná et al., 2014). The results of Case Study 1 revealed the involvement of the materials in the different resolution phases. Considering that the TEACCH material used encourages different forms of representation, we employ Stylianou's classification of functions (2011) to describe the use of the materials during the

resolution phases: as a means by which to understand information, as a tool for recording, for exploration, and for monitoring and evaluation.

In the comprehension phase, the main function of the materials is as a means of understanding information. Presenting the problem through a visual and structured statement, supported by materials, has allowed for the representation and manipulation of the problem's data converted into a story (Chico-Gómez et al., 2022c; In press-b), which improved the pupils' understanding and increased their involvement in the resolution (Carbonneau et al., 2013; Goodman et al., 2016). Our results agree with those of Lieshout & Xenidou (2020) in the sense that the creation of non-static representations, i.e., those that present a change, a transition, contributes to understanding the situation of the problem. In our study, this transition was visualized through pictograms of the statement or Velcro pictograms, whose manipulative nature allowed for the variables they represented to be modified, either by themselves or on the graphic organizer. Coding the information of the statement through pictograms and their distribution in the organizers in the form of a table or diagram also contributed to the simplification of the data (Delisio et al., 2018).

The use of TEACCH material has allowed the pupils to communicate their vision of the problem and work on their prior ideas during the planning and execution phase. The pictograms (of the statement and Velcro) and the organizers have become tools to record information. The pupils can group the data, represented pictorially with the use of pictograms or schematically using tabular or numerical representations, and arranging them in the rows, cells, or spaces of their worksheet. This covers the planning and organisation needs (de Giambattista et al., 2019; Klaren et al., 2017). Ordering the data makes it easier to relate them together (Kribbs & Rogowsky, 2016), and this distribution nourishes the tendency for sequenced learning (Chico-Gómez et al., 2022c), thus we highlight the function of tool for exploration.

During the previous resolution phases, the pupils constructed their hypotheses either by creating the figures with the construction material, drawing or manipulating the pictograms, or completing the different spaces of the organizer. In

the review phase, having their entire process in a visual form and in different registers seems to encourage verification of the results and the process itself, and gives the pupil greater autonomy in the resolution process (Bouck et al., 2014). The pupils used the materials as monitoring and evaluation tools.

We agree with previous research that included the implementation of TEACCH material in tasks involving mathematics (Chico-Gómez et al., 2022b; In press-a; de Andrade & Miarka, 2019; García-Moya, 2018) in pointing out the improvements in time and space management and the understanding of the process, in our case, problem-solving. The results of our research also highlight the potential of the materials as tools with which to address mathematical content. During the workshops, the pictograms, construction materials, and the organizer served as tools to represent recursive, multiplicative, and functional relationships, fractional numbers and different meanings of the fraction, geometric figures, and other mathematical content included in the Primary Education curriculum (Ministry of Education, Culture and Sport, 2023). Several difficulties were observed when addressing such content, many of them influenced by the characteristics associated with ASD. For example, the visualization of the different quadrilaterals in a figure and the relationship between them, the sequencing of the numerous calculations when the operations involved multi-digit numbers, or the understanding of some numerical relationships such as, in the case of one of our participants, ones which involve multiplication. However, the calculations and the discovery of the relationships between the values and operations are made more flexible by including the materials in the resolution (Bouck et al., 2013; Root et al., 2017), supported by visual elements, the decomposition and structuring on the worksheet, and the sequencing of the resolution into different steps and representation registers.

As mentioned above, the different materials involved different registers. This makes it possible for the pupils to use more than one element when problem-solving is in line with the multi-component conception of Root et al. (2021), in coincidence with other research in this area with pupils with ASD (Cox & Root, 2020; Root et al., 2017; Saunders, 2014). Offering more than one tool may not be compatible with some

characteristics associated with ASD, such as limited flexibility or cognitive rigidity (Bae et al., 2015), although the aforementioned studies and other examples collected in the review by Root et al. (2021) point to the potential of using “packs” of tools for the resolution. Spooner et al. (2019) notes that there is no evidence of the benefits of the materials in these packs when used alone, but, based on the results of our study, we highlight a series of indications of how the characteristics associated with ASD and ASD-1 benefitted or required attention when each material was used.

Nonetheless, the results of the workshops provide insight into the potential of implementing different resources that complement each other and that the pupils can use freely, from instruction to their autonomous use. We consider that instruction is needed to be able to use the materials (Gevarter et al., 2016; Hunter & Miller, 2023), but the goal of problem-solving teaching is to promote the development of cognitive functions, many of which are affected by ASD (Polo-Blanco et al., 2024), with the aim of the pupils acquiring a certain autonomy. We propose that using a stable, but flexible, structure that is adapted to the pupils, and to develop with them a problem-solving practice with visual and manipulative support that integrates various registers, can lead to the acquisition of problem-solving skills. Proof of this is that practices such as the design and implementation of diagrams, the drawing and creation of pictorial elements to represent the data of the problem, or the creation of tables using the drawings of the statement were found in the pupils. The diagrams, drawings, and spontaneous graphic elements observed show similar features with the materials used during the workshop. In addition, although our workshop proposal included materials and instruction adapted to the needs of the pupils, its objective was the emergence of different solving strategies, depending on the type of problems posed, which differs from other research in which a resolution script was provided for ASD pupils (Barnett & Cleary, 2015; King et al., 2016). Indeed, the use of the materials during the workshops allowed the use of different heuristics to be observed, which are described in the following subsection.

V.1.3. O1.3. Describe how ASD-1 pupils solve heuristic mathematical problems based on different specific teaching strategies, including heuristic generalization

The research study of Bae et al. (2015) compares the problem-solving skills of pupils with typical development and pupils with ASD-1, with the latter showing lower performance. The authors note a significant correlation between the performance of pupils with ASD-1 and sentence comprehension, mathematical vocabulary, computation, and everyday mathematical knowledge. Although in our study we found manifestations of difficulties regarding verbal comprehension and computation, as mentioned in the foregoing subsections, the participants showed the ability to address the different problems by developing various heuristic strategies.

One of the triggers for the appearance of different heuristics might have been the structuring of the resolution into phases, which linked the different registers of representation, from the pictorial to the symbolic (Cooper & Warren, 2008). The visual support in the organization of the session and the resolution phases seems to have encouraged the pupils to become aware of the objectives established in the task and to reflect upon their own process. In this context, teaching strategies linked to representation helps in the development of reasoning and visualization skills (Duval, 2016), skills that often present difficulties for pupils with ASD-1 (Bae et al., 2015; Chico-Gómez et al., 2022c; 2022d; Klaren et al., 2017). The representation supported the emergence of other heuristic strategies, such as work-backwards resolution, trial-and-error, and the search for generalization.

Heuristic strategies, such as the MSBI (Root et al., 2017), were considered to be suitable methods for pupils with ASD given their potential as tools to structure the resolution and provide visual support. However, some of the heuristics implemented during the workshop involve skills that are apparently incompatible with ASD. One is systematically testing as part of the trial-and-error strategy. The fluency which the pupils in the workshops showed in using this strategy implies the ability to reformulate an initial hypothesis, integrating executive functions such as self-regulation, intuition or prediction (Ozonoff, 1991) and flexibility of thought (Bae

et al., 2015). Similarly, carrying out work-backwards problem-solving requires the pupil to perform the operations in reverse, while also showing an understanding of the global context and the consequences of the actions on more than one element, thus involving the Theory of Central Coherence (Frith & Happé, 1994) and the Theory of Mind (Huaiquiàn, 2009). It is noteworthy how in various sessions, despite the fact that the problem design was oriented towards other strategies, the pupils carried out trial-and-error spontaneously, working on one of the variables by using the pictograms and recording their ideas about the organizer and even developing sub-goal strategies focused on some of the aspects of the problem. This type of thinking associated with the trial-and-error and sub-goal strategies implies that the pupil establishes relationships between variables, which according to Caspi & Sfard (2012) brings them closer to pre-algebraic thinking. Another link with algebra was made through the heuristic establishment of generalization. This strategy was implemented with different problems, both in the zero workshop and in the semester one, but we would note that in all of them it involved several materials simultaneously, and therefore different representations (Pinto & Cañadas, 2021; Stephens et al., 2017). Including this diversity of registers allows for a broader spectrum of ways to understand and communicate the underlying ideas linked to functional relationships, considering the abstraction involved in introducing functional thinking when working with Primary Education pupils (Radford, 2008) and pupils with ASD (Root & Browder, 2019; Root et al., 2018). We agree with the *Early Algebra* movement regarding the possibility of introducing functional thinking at an early age (Carragher et al., 2008; Coles & Ahn, 2022; Pinto & Cañadas, 2021; Pinto et al., 2023; Robotti, 2017; Zapatera, 2022), and consider the generalization heuristic as a possible path. The study about solving the Minecraft problem, addressed in the eighth session of the semester workshop, allowed us to investigate the generalization process carried out by the four participants. Our study agrees with previous research studies of pupils with ASD (Goñi-Cervera et al., 2022) and neurotypical pupils (Pinto & Cañadas, 2021) where the pupils reach different levels of generalization (Blanton et al., 2015) depending on the type of representation used. Noteworthy is the pupils' tendency to use constructions or drawing-based strategies, in line with other studies with ASD participants (Goñi-

Cervera et al., 2021; Polo-Blanco et al., 2018a; 2018b; 2019), which leads them to lower levels of generalization, whereas the use of the graphic organizer in tabular format is associated with higher levels of sophistication when generalizing (Chico-Gómez, Polo-Blanco et al., In press). However, using construction materials and pictograms representing each term in the sequence, although linked to lower levels of generalization because they are more compatible with strategies such as counting or recursion (Cetina-Vazquez & Cabañas-Sánchez, 2022; Lannin et al., 2006), has covered needs related to executive functions, visualization of the figure, and comprehension of the statement. Research by Vergel (2015) with neurotypical pupils indicates that the joint use of figures with tabular support leads to a greater perception and understanding of the pattern, while the use of the table alone prompts the pupils to establish numerical relationships. In our case, we observed the same consequence in this type of use of the tabular representation, which in several situations of the workshop (e.g., the resolution of Raúl's archaeologist) led to the loss of the objective or to decontextualization of the observed numerical relations, derived from difficulties of working memory and sustained attention (Klaren et al., 2017).

In any case, it is noteworthy that three of the participants presented a non-linear resolution (Stephens et al., 2017). This implies an ability to go back and forth in the different terms of the sequence, correct errors (with and without help), and change strategy, changes that are also reflected in how they vary their understanding of the regularity and connections between the variables, approximating their resolution through the four functional relations ($F_1, \dots, F_4$) (Chico-Gómez, Polo-Blanco et al., In press).

We note the possible influence of the teacher-researchers' instruction and the support of the TEACCH material in leading to the development of a resolution based on the ordered sequence of steps and supported by different representations. These visual and structured dynamics are clearly in line with the characteristics associated with ASD (Root et al., 2021). Our study agrees with Schaefer-Whitby, (2013) about the potential of Polya's method to improve the pupils' performance when problem-solving, with the use of manipulative materials to include different

registers and forms of communication (Park et al., 2020; Root et al., 2017; Spooner et al., 2019), and with the importance of instruction being provided in a way that is adapted to the pupils' needs (Acevedo-Rincón et al., 2023; Root et al., 2018). However, we would like to highlight that, unlike the arithmetic focus of the problems in previous research studies, such as those by Levingston et al. (2009), Rockwell et al. (2011), Yakuboba et al. (2015), included in the reviews by Gevarter et al. (2016), Carr & Seah (2019), and Root et al. (2021), our study focuses on heuristic problems. That is, despite the rigidity of thinking and the difficulties in solving situations derived from the executive functions (Bae et al., 2015; Klaren et al., 2017), the participants in both workshops showed the ability to address high cognitive demand problems that did not follow a closed structure (Root et al., 2018), the flexibility to modify their strategies and use different forms of representation during their problem-solving process, and, in contrast with other research (Horner et al., 2002; Root et al., 2020), the generalization skills required to extrapolate problem-solving strategies to new contexts.

V.2. Discussion of results regarding objective O2: Identify the knowledge of Primary Education teachers for the inclusive teaching of mathematical problem-solving for pupils with Autism Spectrum Disorder - Asperger syndrome

The other axis of this research is the teaching practice when problem-solving teaching involves pupils with ASD as part of the diversity of the classroom. Addressing teacher knowledge from a two-fold perspective was nourished by two models. There are several research studies that have resorted to the MTSK teacher's specialized knowledge model to describe the knowledge expressed by prospective teachers with respect to different contents, and the UDL universal and inclusive teaching model to describe and analyse different educational practices in schools and classrooms. However, this latter has been criticised for the numerous criteria and sub-criteria that comprising it and that break down an inclusive practice into checkpoints that are not very exhaustive in the description of the object of study (Cook & Rao, 2018; Rao et al., 2020; Sánchez-Serrano, 2024). Despite this, our study

defends its potential within educational research since it allows the aspects of the pedagogical decisions of the teacher who was protagonist of each case study to be both identified with remarkable precision and structuring and categorised according to their impact upon the pupils' engagement, representation, or expression and communication in the classroom. It should be noted that recognising the knowledge and inclusive elements in the teachers' decisions can facilitate the visualisation and understanding of their educational practice. However, a holistic approach to teaching skills is necessary (Vázquez-Gómez, 2007), especially when seeking to look more deeply into inclusive practice when teaching mathematics.

The following subsections will break down the discussion of the results of our research regarding Case Studies 2, 3, and 4, taking into account the specialized knowledge of each teacher and the elements of inclusion that they manifest in their practice. A third subsection will address the connections found between the two frameworks that guide our study.

V.2.1. O2.1. Identify the mathematical and the pedagogical content knowledge that Primary Education teachers demonstrate when solving problems in the classroom with diversity

If one thinks about analysing the teaching knowledge manifested when a pedagogical proposal about a generalization problem which incorporates manipulative materials is implemented in a classroom with diversity, one may primarily think of pedagogical knowledge. However, the results show evidence not only of the expected pedagogical knowledge (such as strategies and possible difficulties – knowledge of Mathematics Teaching, KMT, and knowledge of the characteristics of learning of mathematics, KFLM), but also manifestations of knowledge about the generalization of patterns, of mathematical practice related to proof and testing, and, above all, heuristic strategies relating to problem-solving (all of it knowledge of mathematical practice, KPM).

According to our study's results, the interpretation of the knowledge expressed by the teachers in the archaeologist session is mainly related to knowledge about

mathematical practice (KPM) and about teaching (KMT). Previous research about knowledge mobilized in a generalization task (Pinto et al., 2023) and the archaeologist problem itself in Chico-Gómez et al. (2023b) and Chico-Gómez, Sánchez-Cerrejón et al. (2023) as part of prospective teacher training tasks indicates more pieces of evidence of knowledge (expected and mobilized) about mathematics teaching and about learning (KMT and KFLM).

In this sense, an equivalence of results with our study is found regarding the knowledge about teaching. One of the categories of this subdomain is Strategies, Techniques, Tasks and Examples. As stated in the previous section and throughout this thesis, we agree that the strategies implemented in the classroom to address problem-solving and the generalization process must be varied, adapted to the pupils, and focused on the development of skills and competencies. Accordingly, the results of the analysis of the teachers in the three case studies show more than twenty different indicators of this category of knowledge, focused on the use of examples or the types of representation for teaching related to knowledge indicators present in other research about teacher knowledge (Cayo et al., 2024; Chico-Gómez et al., 2023b; Chico-Gómez, Sánchez-Cerrejón et al., 2023; Climent et al., 2021; Vasco-Mora et al., 2021), and other more specific indicators of strategies and tasks to address generalization problems related to the terms of the sequence and the resolution phases. The involvement of diverse forms of representation influences the inclusion of teaching practice (Morselli & Robotti, 2023), providing the pupils with ways to communicate their understanding of the figures and elements in the pattern, but also to know how other people express it (Selling, 2016). This leads to identifying these manifestations of knowledge of teaching about representations, examples, and other strategies such as dramatization or paraphrasing, as elements of practice that consider the characteristics of the diversity of the classroom.

The KMT subdomain also encompasses knowledge about resources, materials, and personnel. In the aforementioned studies, reference is made of the use of materials to address generalization. Incorporating materials into the classroom work involves incorporating representations for mathematical concepts (Goldin, 2004). In the

context of the generalization, the different resources can represent variables and their functional relationships (Carraher et al., 2008), materials on which to build and discover regularity and to model from the particular to the general (Goldin, 2004). However, and despite the fact that the archaeologist session proposal included the implementation of materials (pictograms, construction materials in the form of square pieces of EVA foam, and graphic organizers in tabular format), the indicators of the teachers' knowledge in this category were lesser than expected. Although we highlight the knowledge expressed by the teachers regarding the potential of each type of material, this was manifested at specific moments in the sessions. According to Morselli & Robotti (2023), incorporating materials implies the use of multiple forms of representation, which are beneficial for the task of generalization (Hunter & Miller, 2022; Pinto et al., 2023; Radford, 2008) but require teaching actions aimed at planning and organization so that the motivation provided by the use of manipulatives (Park et al., 2020; Root et al., 2017; Sarmiento, 2017) does not divert attention from the objective of the session and the mathematical content involved. In any case, by including materials as teaching resources implies that the teachers have reflected upon their potential and limitations (Climent et al., 2021). When using specific materials, even though this can help the pupils recognize regularities and functional relationships (Chico-Gómez et al., In press-b; Chico-Gómez, Polo-Blanco et al., In press; Stephens et al., 2017), it requires a transition from the pictorial and manipulative to arithmetic (Coles & Ahn, 2022), schematic (Chico-Gómez et al., In press-a; Chico-Gómez, Polo-Blanco et al., In press; Polo-Blanco et al., 2018a) or symbolic representations so as to reach higher levels of generalization that are not conditioned by the visualization of functional relationships. Additionally, extending the generalization to distant terms was precisely one of the objectives of the research proposal for the archaeologist session.

Regarding knowledge of topics (KoT), we did find some evidence, but the emergent descriptors were mainly related to knowledge about registers. Given the volume of indicators about representations, it is consistent to find these data, which relates KoT with the KMT subdomain (Climent et al., 2021).

Knowledge of features of learning mathematics (KFLM) is also not evident in the analysis of the sessions of our three teachers. They mainly highlight knowledge about visualization difficulties, considering the main role of the stepped figure and its composition in steps in the archaeologist problem. The impact on teaching of identifying and interpreting the pupils' potential difficulties regarding the content addressed has been confirmed in previous research (Callejo & Zapatera, 2017; Giberti, 2022). In the context of generalization, the pupils can observe these relationships in a variety of ways (Carraher et al., 2008; Lannin et al., 2006), and it is the teachers' responsibility to develop skills to be able to identify and understand their pupils' comprehension and verbalization process (LaRochelle et al., 2019).

A subdomain that did present a significant number of pieces of evidence was the knowledge of mathematical practice (KPM). It is among the expected manifestations of knowledge in Chico-Gómez, Sánchez-Cerrejón et al. (2023) and Chico-Gómez et al. (2023a) since it involves practices related to problem-solving, heuristics, and resolution phases, and coincides with the manifestations of knowledge about research into pedagogical knowledge (Carrillo et al., 2018; Escudero-Ávila et al., 2015; Muñoz-Catalán et al., 2019; Muñoz-Catalán et al., 2022). However, it is worth noting that the results obtained might be related to our analysis perspective. The number of pieces of evidence of knowledge about the practice of problem-solving is equivalent to the volume of evidence of knowledge about the practice of proof. This author has considered the teacher's manifestations of knowledge about proofs and making conjectures as being evidence of their knowledge about mathematical practice, which concluded in eleven different knowledge indicators. The use of examples to give a proof, the distinction between the terms of the sequence, or the form of establishing and checking conjectures are part of the teacher's knowledge about the practice of proof, but it is also related to how teachers transfer this practice to their classroom when teaching generalization tasks (Delgado-Rebolledo & Zakaryan, 2020; Sosa et al., 2016), which therefore explains the numerous pieces of evidence of KMT and KPM in our knowledge analysis.

V.2.2. O2.2. Recognize the inclusion elements that are evident in their practice

Regarding the inclusive practice observed in the three sessions, it is worth noting the presence of actions related to the principles of Representation and Engagement. As described in the chapter on the results of the workshop and the observation of the classrooms, the archaeologist problem contemplates different ways of how it can be solved. There is no doubt that the statement itself includes a visual structure on which the pupils must base their generalization hypotheses, and that the association of the materials to the various registers translates into different ways of representing the archaeologist's way of stacking. We observed teacher practices aimed at taking advantage of the visual aspect of the problem to perceive, but above all to understand, the task. This is manifest in the fact that the guideline with the most evidence is R.C. *Provide options for comprehension*. The EVA foam pieces, the pictograms, and the graphic organizer were used for this purpose, reflecting the data of the verbal statement, organizing the pupils' strategies, and promoting visualization, linked with the checkpoints related to actions aimed at pointing out patterns and guiding the processing and visualization of information (R.C.2, *Highlight patterns, critical features, big ideas and relationships*; and R.C.3, *Guide the processing and visualization of information*). These results coincide with Root et al. (2020) who note that instruction about representing on the organizing scheme nurtures the pupils' understanding of mathematical relationships. The use of resources is related to actions which promote different forms of representing so as to address diversity within the classroom (Gómez-Hurtado et al., 2021), and which are also necessary for the problem's solution to be addressed from the different forms of presentation (Root et al., 2020) and of comprehension of the structures and patterns (Pinto & Cañadas, 2021; Stephens et al., 2017).

Regarding the principle of Engagement, even though it was implemented differently in each classroom by using group work or a sharing phase, organizing the classroom work to be carried out collaboratively contributed to including everyone in the task (Ainscow, 2010). In addition, posing the discovery of the pattern as a challenge is related to creating mathematical opportunities for inquiry, which includes the exchange of strategies and enhances the *growth mindset* (Lambert, 2020). These

types of practices focus on working with the pupils on personal growth and confidence in their personal abilities, which are reflected in the numerous evidence given in the E.SEP. guideline *Providing options to sustain effort and persistence*. This guideline also encompasses the teaching actions observed that were aimed at providing feedback for the pupils to progress through the resolution phases, coinciding with the results of Browder et al. (2018) and Root et al. (2020). A problem that contextualizes algebraic content increases the pupils' motivation and engagement (E.RI., *Providing options to recruit interest*), which shares a certain parallelism with the MSBI thematic stories of Spooner et al. (2017). We found less evidence of actions related to providing the pupils with the autonomy to make decisions, design, and choose, coinciding with the study about UDL-related teaching actions by Sulaiman & Tahar (2024). Providing the pupils with freedom in the classroom is a complex practice, but if a problem-solving context is created that already contains a selection of options and paths that the pupil can take, adapted to their characteristics (Cook & Rao, 2018), this can contribute to them developing autonomy. These options can impact the emergence of different solving strategies, enabling the creation of a space for discussion that enriches the resolution process (Hunter & Miller, 2022; Koichu, 2018) and the skills of the problem-solvers themselves (Dahl et al., 2018), while promoting the inclusion of a greater diversity of ideas, learning styles, and skills (Messiou & Ainscow, 2015; Ainscow & Messiou, 2021).

Although the results indicate that the manifestations of the Action and Expression principle are just half of the evidence the other two provide, we consider it relevant that one of its guidelines, *Providing Options for Executive Functions* (AE.EF), ranks as the third most observed. The teachers developed classroom practices, especially through feedback, that can be related to the goal-setting guide (AE.EF.1) accessible and adapted to the pupils' needs (Brown, 2015; Duchaine et al., 2011). The focus of other actions was on supporting the planning and implementation of strategies (AE.EF.2), a task in which resources became important and therefore new actions emerged aimed at facilitating their management and that of information about the problem (AE.EF.3, *Facilitating the management of information and*

resources). Root et al. (2024) note the potential of *self-graphing* (p. 204), i.e., of developing pedagogical actions so that the pupils can follow their resolution based on their own visual mapping. This coincides with the recording and monitoring functions of the graphic organizer (Stylianou, 2011) and connects with the actions of the teachers to improve their progress monitoring ability (AE.EF.4, *Enhance capacity for monitoring progress*). Self-monitoring is a recommended practice for teaching pupils with needs (Cook & Rao, 2014), among which are the self-regulation difficulties of pupils with ASD (Ozonoff, 1991). However, the teachers in our case studies made reviewing the process a common practice for all their pupils, for example, by proposing different heights and ladders to corroborate the hypotheses posed, supporting the sequence of terms on the graphic organizer, or reviewing the terms and calculations on the blackboard. These practices reflect that inclusion is not only about the pupils being present in the classroom, but that the tasks carried out involve everyone's action and success (Ainscow, 2006).

The manifestations of inclusive actions by the teachers of our case studies can be interpreted in terms of the framework of Lambert (2021), which supports and structures three nodes of the involvement of the UDL in the learning of mathematics. The *Engagement* and *Representation* nodes are represented when the teachers address the archaeologist problem by creating a space for discussion and collaboration, involving different materials and forms of representation. The results of our study are in line with the classification provided by Lambert, though we do find certain differences with the third node, *Strategic Action*. According to her description, this involves both the development of the notion of oneself as a mathematics learner and the review, evaluation, and feedback of the learning process. Rachel Lambert exemplifies this node by strategies that the pupils can develop in the mathematics classroom, aimed at working on specific content, problem-solving strategies, and strategies related to executive functions and to emotional self-regulation (Lambert, 2021). Thus we find a relationship with the actions to mobilize executive functions, which, according to the results of our research, was one of the most outstanding guidelines. However, we wonder whether diverting attention from the forms of expression as an element of inclusion

(reflected in the AE.EC guideline of the Principle of *Action and Expression*) indeed benefits the teacher who uses this framework as a guide in the development or evaluation of their inclusive practice.

It is true that resorting to representations can facilitate this task (Duval, 2016; NCTM, 2000; Selling, 2016), and that understanding the mathematics learning situation as a community can lead to thinking about communication (Daroczy et al., 2020; Selling, 2016). However, we subscribe to the perspective of Carrillo et al. (2008) in conceiving that interactions in the mathematics classroom, those that occur between the teachers, pupils and content, are influenced by the management of the teacher's participation, understanding that (bidirectional) communication is one of the main nodes that conditions the cognitive involvement of the pupils and their learning (ibid.; Delors, 1996). The teachers need tools with which to manage the classroom interactions that promote the construction of mathematical knowledge and meanings, and to develop skills for interpreting the forms of expression and representation through which the pupils express their understanding of the content (Goldin & Shteingold, 2001). Explaining the variables that can influence the pedagogical actions to promote the expression and communication of the teaching process may be necessary to enhance the teachers' knowledge and practice when addressing inclusive mathematics teaching. The level of systematicity that UDL has shown to have for categorizing and describing the inclusive elements of the practice of the teachers studied brings us back to this framework as a possible tool for teachers and researchers.

For example, let us place ourselves in the context of solving the archaeologist problem in the classroom, a diverse classroom like that of Andrea, Ester, and Federico. The results indicated that having the same problem and resources did not condition the resolution in the three classrooms, but instead how the problem was understood and treated by each teacher (Verschafel et al., 2000; Verschafel & de Corte, 2018) and how they transferred it to their pupils. By involving resources in the session, a different register was integrated, but the instruction provided by the teacher influenced how they were used (Bouck et al., 2014; Carbonneau et al., 2013; Root et al., 2021) as well as how the pupils interacted to work on the

mathematical content involved (Carbonneau & Marley, 2012), in our case, the generalization of geometric patterns. Regarding the interaction between the pupils, the spaces provided by each teacher to discuss ideas encouraged the pupils to share their generalization process, which, based on their understanding of the variables and their ability to visualize, manifested itself in the form of different levels (Blanton et al., 2015) and strategies (Lannin et al., 2006). These expressions of ideas are in line with what Brown et al. (2022) call mathematical representations, those that the pupils use when solving problems, and which these authors relate to the principle of Action and Expression since they derive from teaching actions. Although the pupils' generalization was not analysed in the case of classroom problem-solving, different teacher practices were observed to address the diversity of the pupils' mathematical representations (Brown et al., 2022), e.g., integrating the use of resources (Andrea & Federico), replacing group work with class-level interaction (Ester), or delegating to the pupils the explanation on the blackboard of some resolution hypotheses (Andrea).

All these examples integrate the knowledge about practices related to UDL principles in terms of forms of representation, with the pupils' involvement in their learning, and with actions that mobilize expression, communication, and options for executive functions. But they also involve the specialized knowledge of mathematical content and its didactics, which leads us to the relationship between the two frameworks.

V.2.3. The relationship between UDL and MTSK

When this study was started, the hypothesis set out certain relationships between the two frameworks. We posited a possible relationship between the KPM, KMT and KFLM subdomains and some UDL guidelines and checkpoints, based on the description of these in terms of CAST (2018), but the results differ from the initial approach.

Initially, we established a possible connection between the KPM subdomain and the checkpoints R.C.1 (*Activate or provide prior knowledge*) and R.C.2 (*Highlight patterns, critical features, big ideas and relationships*), coinciding with the results of

the analysis which indicate a level 2 relationship. These hypothetical relationships were established with respect to the implementation of specific heuristics, such as generalization, expected when solving the archaeologist problem, and analogy, considering that in the previous session the teachers had worked on similar solving strategies. In addition, we found evidence of relationships of the same level with R.C.3 (*Guide the processing and visualization of information*), E.SEP.1 (*Increase the relevance of goals and objectives*) and E.SEP.4 (*Increase the mastery-oriented feedback*). These relationships, which were only contemplated for the *Problem-solving* category, had a similar weight in the *Proofs* category, adding a level 2 relationship with AE.EF (*Provide options for executive functions*). Inclusive practice implies that the teacher knows different methods with which to structure the information and promote its visualization and expression (Lambert et al., 2020) that also bring the pupils closer to achieving the task of solving the problem. Our study links it with the knowledge of heuristics and resolution phases (Verschaffel et al., 2020) manifested in the multiple knowledge descriptors that emerged from our research. We also propose that the teacher's knowledge of examples and terms that allow conjectures to be made (Kaput, 1999), and which are manifested in the process of proof, can model the development of the pupils' generalization by involving various executive functions such as monitoring, planning or attention to the resolution steps (Ozonoff, 1991). Knowing how to work in mathematics expands the teacher's options to transfer the different methods to work in the classroom (Alfaro-Carvajal et al., 2020; Delgado-Rebolledo et al., 2022), which can cover a greater number of pupils' learning styles.

Regarding the KMT subdomain, we found that the results reaffirm the relationship between R.C.2 (*Highlight patterns, critical characteristics, big ideas and relationships*) and R.C.3 (*Guide the processing and visualization of information*). The implication of generalization in solving the archaeologist problem allowed us to observe in the three teachers practices that were aimed at discovering patterns and key elements represented in the steps constructions. Also, the connection between the *Resources* category and R.C.4 (*Maximize transfer and generalization*), level 1, is noteworthy, which reflects that teaching contemplates the development of

generalization skills in pupils (Strachota, 2016), not only concerning the discovery of the pattern, but in the use of tables and drawings as supports for the resolution process, and other personal strategies which help in schematizing and representation (Pinto & Cañadas, 2021; Root et al., 2022).

We also note other possible relationships between KMT and the principles of UDL, but the results grouped them around level 2, such as the actions related to the principle of Action and Expression AE.EC (*Provide options for expression and communication*), which were reflected in the use of different resources to encourage the pupils to express their ideas and resolution hypotheses and to develop different strategies (Brown et al., 2022; Root et al., 2020), and AE.EF (*Provide options for executive functions*) which was manifested in the knowledge descriptors about the teaching of different strategies to generalize, plan and organize data (Chico-Gómez et al., 2023b; Chico-Gómez et al., In press-b), and of techniques such as paraphrasing to motivate the monitoring and explanation of the resolution (Delisio et al., 2018). Uncontemplated relationships were observed with AE.EC.3 (*Build fluencies with graduated levels of support for practice and performance*) and AE.EF.1 (*Guide appropriate goal-setting*). These suggest that the teachers' knowledge of teaching resources and techniques implies the mastery of a range of teaching options to support problem-solving with different levels of cognitive demand and challenge for the diversity of the characteristics in the classroom (Muntaner, 2014).

The hypothesized relationships between KMT and E.SR.1 of the Engagement principle and R.LS.5 of the Representation principle were left unestablished, but the analysis brought to light the relationships with E.RI.3 (*Minimize distractions*), E.SEP.1 (*Heighten salience of goals and objectives*), E.SEP.4 (*Increase the mastery-oriented feedback*), and R.LS.3 (*Support decoding of text, mathematical notation, and symbols*). The teaching decisions regarding the type of instruction and feedback during problem-solving are reflected in the emergent descriptors concerning pedagogical knowledge of the examples and terms. Knowledge of the diversity and potential of the examples helped guide the resolution objectives and focused the pupils' attention on the task (Cox & Root, 2020), who benefitted from having the task

in different forms and representations (Brown et al., 2022). This also involves the resource knowledge descriptors, such as the potential of the visual and schematic support of the organizer or the construction blocks (Root et al., 2020). The teachers' knowledge about the potential of representations through the resources and solving strategies contributed to the decoding and change of register of the data involved in the statement of the problem.

The last approach contemplated the relationship between KFLM and E.SR.1, which was replaced in the analysis by level 1 relationships with E.SEP.3 (*Foster collaboration and community*) and E.SEP.4 (*Increase the mastery-oriented feedback*), which shows that the instruction and explanations of the resolution are in line with the needs of the pupils (Root et al., 2021; Spooner et al., 2019). Also notable are the relationships with R.C.2 (*Highlight patterns, critical characteristics, big ideas and relationships*) and R.C.3 (*Guide the processing and visualization of information*) with two categories of this subdomain, and a KFLM-R.C.4 relationship (*Maximize transfer and generalization*) in the *Strengths and Difficulties* category. Knowing the difficulties of mental calculation, of abstraction and visualization or difficulties in understanding and following the objective of the statement, as well as the tendency of the pupils to have simple strategies related to counting, is related to the teacher's search and implementation of different practices that adapt to the pupil's reality, which establishes an analogy with the results of the research by Root et al. (2017) and Spooner et al. (2017). The manifestations of the generalization process can adopt various representations, including drawing or gestures (Radford, 2006), so the teacher's knowledge about the characteristics of this learning becomes necessary (Robotti, 2017).

The analysis established a relationship of the KoT categories with R.C.2 (*Highlight patterns, critical characteristics, big ideas and relationships*) and R.C.3 (*Guide the processing and visualization of information*) which was not proposed but is in line with the emergent descriptors of this subdomain. In order to convey to the pupils, the keys to the pattern contained within the structure of the archaeologist's steps, knowledge about the different registers and characteristics of the figures that make up the geometric pattern is required (Alfaro-Carvajal et al., 2020; Chico-Gómez et

al., 2023a; Chico-Gómez, Sánchez-Cerrejón et al., 2023). Finally, we highlight the relationship that arises between KSM and the principles of Engagement (E.SEP.1, *Heighten salience of goals and objectives*, and E.SEP.4, *Increase the mastery-oriented feedback*) and Representation (R.C.2, *Highlight patterns, critical characteristics, big ideas and relationships*, and R.C.3, *Guide information processing and visualization*). This connection, established with the only descriptor of this subdomain, “geometric interpretation of the first n numbers”, highlights that knowing and establishing relationships between different mathematical contents can boost teaching practices aimed at discovering examples and keys to understanding the problem from different perspectives. Integrating different areas of knowledge makes it possible to expand the range of representations and tools to develop various facets of mathematical reasoning (Brown et al., 2022), promoting the pupils' understanding and involvement in their own learning.

V.3. Conclusions

The ideas expressed in the pages of this thesis have attempted to establish guidelines that contribute to teacher training in problem-solving with diverse pupils, including ones with ASD-1. Through the use of heuristics and TEACCH material, different registers were integrated, visual elements that support and structure the resolution and a variety of ways of working on problems (Delisio et al., 2018; Novotná et al., 2014). In this way, there is support for needs related to verbal comprehension, executive functions and the establishment of strategies, needs which are often present in Primary classrooms, and especially in pupils with ASD (Klaren et al., 2017; Root et al., 2021). Teaching strategies of this type pay attention not only to the cognitive factor, but also to the emotional one (Chico-Gómez et al., 2022d; 2022f). Presenting problems as challenges and creating an open space for different learning styles supported by the integration of different strategies and types of representation (presence), provides the pupils with options to participate (participation) and to improve their skills (progress) (Ainscow et al., 2006; Messiou, 2017; Muntaner, 2014; Muntaner et al., 2016).

When we transfer our vision to the work of the teachers from classrooms with diversity, the results indicate relationships of each subdomain of knowledge with UDL guidelines and checkpoints despite the different teaching styles and methods of each teacher studied. Our research has shown that specialized knowledge on how to work with problem-solving (KPM: Problem-solving), specifically a problem of generalization in mathematics (KPM: Proofs), the various registers (KoT), and the knowledge about teaching and learning when approaching the solution with different strategies and resources (KMT and KFLM) in the classroom, is associated with teaching practices related to providing different feedback methods to guide learning objectives and involve pupils (Engagement), using different representation methods to promote verbal understanding of the problem and the different resolution methods (Representation), and promoting the development of different executive functions associated with resolution (Action and Expression). This reinforces the idea that inclusion is not carried out in practices that are complementary to the teaching of mathematics, but rather permeates teaching actions in which both mathematical and pedagogical content knowledge are manifest (Carrillo et al., 2018). According to Baybayon (2021), pupils are not the only beneficiaries of the involvement of UDL in the classroom, but also the teachers who conceive this framework as an influential element in their classroom actions can see reduction in the barriers in the teaching process.

We emphasize the need for mathematics teaching to acquire a more integrated approach, which would require collaboration between different fields of research. The union between research in mathematics education and research in inclusive education could lead to the identification of well-founded pedagogical strategies and their extension to educational contexts (Deruaz et al., 2020), thus involving the teachers themselves (Ainscow & Messiou, 2021).

We would stress the idea that there is no single recipe for how to teach problem-solving to pupils with ASD, as to any other student, but that everything depends on the characteristics of the pupils and the context (Gevarter et al., 2016; Wong et al., 2015). In this research we have tried to provide some valid keys to nourish teacher training in this area, considering the diversity of pupils in the Primary classroom.

It could be assumed that one of the limitations of our study lies in the number of informants, which makes it difficult to generalize the results of our research. However, collaborating with a local association and with schools in the province has given us the advantage of closeness and mutual trust. Having a direct and bidirectional communication with the psychologists of that association and the teachers involved in our research facilitated the task of modifying the design of the workshops, the problems and other methodological issues to adapt them to the reality of the educational context studied. In addition, working with ASD-1 students on an ongoing basis requires, in our opinion, generating a climate of trust that is only possible in small groups.

Another limitation was time. In addition to the time needed to organize and design the workshops and proposals for the four case studies, the work of implementation and data collection was subject to the availability of the participants, which extended the workshops with the pupils with ASD, including the zero workshop and the semester workshop, and the observation process of the Primary classrooms to eight and five months, respectively.

Time has played against us and has modified our initial methodological proposal of carrying out a continuing training workshop for teachers, given that the deadlines for requesting it did not fit the temporal reality in which the relevant collection, transcription and analysis processes took place. Thus we shall transfer this idea to a future project, which will provide continuity to our research. Likewise, in addition to getting closer to the continuous training that will feed our study of the experience and knowledge of active teachers, we shall continue to develop the initial training tasks in the Degree in Primary Education (Chico-Gómez et al., 2023a; Chico-Gómez, Sánchez-Cerrejón et al., 2023) so as to bring prospective teachers closer to an inclusive vision of teaching problem-solving.

We close the chapter and this thesis by quoting the father of a pupil with ASD. We had the opportunity to conduct an interview with him prior to the start of this research, but his words summarize how we understand the inclusive teaching of

mathematics:

Difficulties? many. Possibilities? all.

Referencias

- Abrahamson, D., Flood, V. J., Miele, J. A., y Siu, Y. T. (2018). Enactivism and ethnomethodological conversation analysis as tools for expanding Universal Design for Learning: The case of visually impaired mathematics students. *ZDM - Mathematics Education*, 51(2), 291–303. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0998-1>
- Acevedo-Rincón, J. P., Flórez-Pabón, C. E., y Lizarazo-Cárdenas, E. A. (2023). Investigaciones sobre trastorno del espectro autista: Un análisis de los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. *Revista Colombiana de Educación*, 87, 347–368. <https://doi.org/10.17227/rce.num87-12115>
- Adderley, R. J., Hope, M. A., Hughes, G. C., Jones, L., Messiou, K., y Shaw, P. A. (2015). Exploring inclusive practices in primary schools: Focusing on children's voices. *European Journal of Special Needs Education*, 30(1), 106–121. <https://doi.org/10.1080/08856257.2014.964580>
- Ainscow, M. (2005). Developing inclusive education systems: What are the levers for change? *Journal of Educational Change*, 6(2), 109–124. <https://doi.org/10.1007/s10833-005-1298-4>
- Ainscow, M. (2010). Achieving excellence and equity: Reflections on the development of practices in one local district over 10 years. *School Effectiveness and School Improvement: An International Journal of Research, Policy and Practice*, 21(1), 75–92. <https://doi.org/10.1080/09243450903569759>
- Ainscow, M. (2020). Promoting inclusion and equity in education: Lessons from international experiences. *Nordic Journal of Studies in Educational Policy*, 6(1), 7–16. <https://doi.org/10.1080/20020317.2020.1729587>
- Ainscow, M. (2024). *Developing Inclusive Schools. Pathways to Success*. Routledge.
- Ainscow, M. Booth, T. and Dyson, A. (2006) *Improving Schools, Developing Inclusion*. Routledge.
- Ainscow, M., y Messiou, K. (2018). Engaging with the views of students to promote inclusion in education. *Journal of Educational Change*, 19(1), 1–17. <https://doi.org/10.1007/s10833-017-9312-1>
- Ainscow, M., y Messiou, K. (2021). Inclusive inquiry: An innovative approach for promoting inclusion in schools. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, 15(2), 23–37. <https://doi.org/10.4067/s0718-73782021000200023>

- Aladsani, M., Chen, X., y Zehner, A. (2017). Implementing universal design for learning in classrooms with minorities with autism. *Journal of Childhood and Developmental Disorders*, 3(2), 10–23.
- Alderson-Day, B. (2014). Verbal problem-solving difficulties in Autism Spectrum Disorders and atypical language development. *Autism Research*, 7(6), 720–730. <https://doi.org/10.1002/aur.1424>
- Alfaro-Carvajal, C. R., Flores-Martínez, P., y Valverde-Soto, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, 14(2), 85–117. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i2.9363>
- Amaral, D. G., Schumann, C. M., y Nordahl, C. W. (2008). *Neuroanatomy of autism. Trends in Neurosciences*, 31(3), 137–145. <https://doi.org/10.1016/j.tins.2007.12.005>
- Arbona, E., Jaime, A., Gutiérrez, A. y Beltrán-Meneu, M. J. (2016). Patrones geométricos para iniciar en el álgebra a estudiantes de primaria con talento matemático. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 557). SEIEM.
- Arnáiz, P. (2003). *Educación Inclusiva: Una Escuela para Todos*. Aljibe.
- Arnáiz, P., de Haro-Rodríguez, R., y Maldonado, R. (2019). Barriers to student learning and participation in an inclusive school as perceived by future education professionals. *Journal of New Approaches in Educational Research (NAER Journal)*, 8(1), 18–24. <https://doi.org/10.7821/naer.2019.1.321>
- Arnaiz-Sánchez, P., Alcaraz, S., y García, C. M. C. (2024). Significados atribuidos a la educación inclusiva por la comunidad educativa. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 27(3), 135–152.
- Avilés-Canché, K., y Marbán Prieto, J. M. (2023). Perfiles de autoeficacia docente y conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación Del Profesorado*, 26(2), 57–85. <https://doi.org/10.6018/reifop.559321>
- Bae, Y. S., Chiang, H. M., y Hickson, L. (2015). Mathematical word problem solving ability of children with Autism Spectrum Disorder and their typically

- developing peers. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 45(7), 2200–2208. <https://doi.org/10.1007/s10803-015-2387-8>
- Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bardin, L. (2002). *Análisis de Contenido*. Akal.
- Barnett, J. E., y Cleary, S. (2015). Review of evidence-based mathematics interventions for students with autism spectrum disorders. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 50(2), 172–185. <http://www.jstor.org/stable/24827533>
- Baron-Cohen, S. (2000). Theory of mind and autism: A fifteen year review. En S. Baron-Cohen, H. Tager-Flusberg, y D.J. Cohen (Eds), *Understanding Other Minds: Perspectives from Developmental Cognitive Neuroscience*. Oxford Academic. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198524465.003.0001>
- Barrett, D. (2014). Resourcing inclusive education. *International Perspectives on Inclusive Education*, 3, 75–91. <https://doi.org/10.1108/S1479-363620140000003020>
- Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open University Press.
- Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 185–204. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_6
- Baxter, P., y Jack, S. (2008). Qualitative case study methodology: Study design and implementation for novice researchers. *The Qualitative Report*, 13(4), 544–559. <https://doi.org/10.46743/2160-3715/2008.1573>
- Baybayon, G. (2021). The use of Universal Design for Learning (UDL) framework in teaching and learning: A meta-analysis. *Academia Letters*, Article 692. <https://doi.org/10.20935/al692>
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., y Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91–125). Academic Press.

- Bennett, A., Inglis, M., y Gilmore, C. (2019). The cost of multiple representations: Learning number symbols with abstract and concrete representations. *Journal of Educational Psychology*, 111(5), 847–860. <https://doi.org/10.1037/edu0000318>
- Berk, D., y Cai, J. (2019). Mathematics teacher beliefs. En M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of teacher education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1179-6_236-1
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511–558. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>
- Blazar, D., y Kraft, M. A. (2017). Teacher and teaching effects on students' attitudes and behaviors. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 39(1), 146–170. <https://doi.org/10.3102/0162373716670260>
- Boote, S. K., y Boote, D. N. (2018). ABC problem in elementary mathematics education: Arithmetic before comprehension. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(2), 99–122. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9350-2>
- Booth, T., y Ainscow, M. (2002). Index for inclusion: Developing learning and participation in schools. *Centre for Studies on Inclusive Education*.
- Boothe, K. A., Lohmann, M. J., Donnell, K. A., y Dean Hall, D. (2018). Applying the principles of Universal Design for Learning (UDL) in the college classroom. *The Journal of Special Education Apprenticeship*, 7(3), Article 2. <https://doi.org/10.58729/2167-3454.1076>
- Bosch, M., Hochmuth, R., Kwon, O.N., Loch, B., Rasmussen, C., Thomas, M., y Trigueros, M. (2024). Survey team 1: Research in university Mathematics education. En J. Wang (Ed.), *Proceedings of the 14th International Congress on Mathematical Education (ICME 14)* (vol.1, pp. 239–250). ICME. https://doi.org/10.1142/9789811287152_0021
- Bouck, E. C., Satsangi, R., Doughty, T., y Courtney, W. (2014). Virtual and concrete manipulatives: A comparison of approaches for solving mathematics problems for students with autism spectrum disorder. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 44, 180–193. <https://doi.org/10.1007/s10803-013-1863-2>

- Branca, N.A., (1980). Problem Solving as a Goal, Process, and Basic Skill. En S. Dalam Krulik (Ed.), *Problem Solving in School Mathematics. 1980 Yearbook*. NCTM.
- Browder, D. M., Mims, P. J., Spooner, F., Ahlgrim-Dezell, L., y Lee, A. (2008). Teaching elementary students with multiple disabilities to participate in shared stories. *Research and Practice for Persons with Severe Disabilities*, 33(1), 3–12. <https://doi.org/10.2511/rpsd.33.1-2.3>
- Browder, D. M., Spooner, F., Lo, Y. Y., Saunders, A. F., Root, J. R., Ley Davis, L., y Brosh, C. R. (2018). Teaching students with moderate intellectual disability to solve word problems. *The Journal of Special Education*, 51, 222–235. <https://doi.org/10.1177/07319487211061421>
- Brown, L. (2015). Commentary for section 3: From diversity to practices: Addressing, redressing and taking action. En A. Bishop, H. Tan, y T. N. Barkatsas (Eds.), *Diversity in mathematics education: Towards inclusive practices* (pp. 255–259). Springer International Publishing.
- Brown, N., Bostic, J. D., Folger, T., Folger, L., Hicks, T., y Nafziger, S. (2022). Revising word problems to address UDL and standards. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 115(4), 252–264. <https://doi.org/10.5951/mtlt.2020.0365>
- Bruder, R. (2016). Role of heuristic for problem solving. En P. Liljedahl, M. Santos-Trigo, U. Malaspina, y R. Bruder (Eds.), *Problem solving in mathematics education* (pp. 2–6). Springer.
- Bruno, A., Polo-Blanco, I., González-López, M. J., y González-Sánchez, J. (2021). Strategies for solving addition problems using modified schema-based instruction in students with intellectual disabilities. *Mathematics*, 9(15), 1814–1831. <https://doi.org/10.3390/math9151814>
- Buchheister, K., Jackson, C., y Taylor, C. (2017). Maths games: A universal design approach to mathematical reasoning. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 22(4), 7–12.
- Buchholtz, N. (2019). Planning and conducting mixed methods studies in mathematics educational research. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 131-152). Springer.
- Bullen, J. C., Swain Lerro, L., Zajic, M., McIntyre, N., y Mundy, P. (2020). A developmental study of mathematics in children with Autism Spectrum

- Disorder, symptoms of Attention Deficit Hyperactivity Disorder, or typical development. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 50(12), 4463–4476. <https://doi.org/10.1007/s10803-020-04500-9>
- Bryman, A. (2016). The nature and process of social research. En A. Bryman (Ed.), *Social Research Methods* (pp. 2–15). Oxford University Press.
- Callejo, M. L., y Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(4), 309–333. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1>
- Carbonneau, K. J., y Marley, S. C. (2012). Activity-based learning strategies and academic achievement. En J. A. C. Hattie y E. M. Anderman (Eds.), *The international handbook of student achievement*. Routledge.
- Carbonneau, K. J., Marley, S. C., y Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380–400. <https://doi.org/10.1037/a0031084>
- Carr, M., y Seah, W. T. (2019). Mathematics education for students with Autism Spectrum Disorder: Where are we now? *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis | Studia Ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 10, 17–39. <https://doi.org/10.24917/20809751.10.2>
- Carraher, D. W., Martinez, M. v., y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 3–22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Carrillo, J. (1998) *Modos de Resolver Problemas y Concepciones sobre la Matemática y su Enseñanza: Metodología de la Investigación y Relaciones* [Tesis doctoral]. Servicio de Publicaciones Universidad de Huelva.
- Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Prat, M., y Rojas, F. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. *Enseñanza de Las Ciencias*, 26(1), 67–76.
- Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M. C. (2010). Análisis metodológico de las actas de la SEIEM (1997-2010) desde la perspectiva de los métodos cualitativos. Reflexión en torno a un caso. En M. Marín-Rodríguez, G. Fernández-García, L. J. Blanco-Nieto y M. Palarea-Medina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 77–98). SEIEM.

- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Hasery M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 8) (pp. 2985–2994). Middle East Technical University, Ankara and ERME.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N, Aguilar, A. Riberiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Montes, M. (2019). Mathematics teachers' specialised knowledge in managing problem solving classroom task. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.), *Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development* (pp. 297–316). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_16
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Montes, M. (2020). Using professional development contexts to structure prospective teacher education. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (pp. 393–420). Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004418967_015
- Caspi, S., y Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as the first step toward school algebra. *PNA*, 6(2), 61–71. <http://hdl.handle.net/10481/18313>
- CAST (2011). *Universal Design for Learning Guidelines version 2.0*. CAST
- CAST (2018). *Universal Design for Learning Guidelines version 2.2*. CAST
- Castilla Segura, J. (2018). Las ATAL (Aulas Temporales de Adaptación Lingüística) y la diversidad cultural en la escuela: Problematicando naturalizaciones discursivas. *Gazeta de Antropología*, 34(1), artículo 6. <http://hdl.handle.net/10481/54700>
- Cayo, H., Codes, M., y Contreras, L. C. (2024). A mathematics teacher's specialized knowledge in the selection and deployment of examples for teaching sequences. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(3), 784–803. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2158142>

- Cetina-Vázquez, M. y Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(1), 65–86. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3096>
- Chao, C. N. G., Lai, F. T. T., Ji, M., Lo, S. K., y Sin, K. F. (2018). Which inclusive teaching tasks represent the highest level of teacher efficacy in primary and secondary schools? *Teaching and Teacher Education*, 75(1), 164–173. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2018.06.014>
- Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62(2), 211–230. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1>
- Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 3(1), 19–36. <https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1049>
- Chauhdry, N. (2019). Including students with Autism Spectrum Disorder in regular classrooms—current practices. *Journal of Inclusive Education*, 3(1), 85–96.
- Cherrier, S., Le-Roux, P., Gérard, F., Wattelez, G., y Galy, O. (2020). Impact of a neuroscience intervention (NeuroStratE) on the school performance of high school students: Academic achievement, self-knowledge and autonomy through a metacognitive approach. *Trends in Neuroscience and Education*, 18, 100–125. <http://doi.org/10.1016/j.tine.2020.100125>
- Chiang, H. M., y Lin, Y. H. (2007). Mathematical ability of students with Asperger syndrome and high-functioning autism: A review of literature. *Autism: The International Journal of Research and Practice*, 11(6), 547–556. <https://doi.org/10.1177/1362361307083259>
- Chico-Gómez, A., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (2022a). La enseñanza estructurada en la resolución de problemas desde la perspectiva inclusiva [Taller]. Presentado a las XX Jornadas para el aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) (pp. 1665–1676). Valencia. 3 a 6 de julio de 2022.
- Chico-Gómez, A., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (2022b). Using heuristics and 'TEACCH' materials in problem solving with students with Asperger Syndrome. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 189). PME.
- Chico-Gómez, A., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (2022c). La representación tabular en la resolución de problemas con alumnado con Síndrome de

Asperger. En T. F. Blanco, C. Núñez García, M.C. Cañadas, J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 209–217). SEIEM.

Chico-Gómez, A., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (2022d). Using heuristics and ‘TEACCH’ materials in problem-solving with students with Asperger Syndrome. *28th Conference of Mathematical Views (MAVI)*. Universidad de Oviedo, Oviedo. 2022.

Chico-Gómez, A., Climent, N., Gómez-Hurtado I, y Polo-Blanco, I. (2023a). Resolución de un problema de generalización por un alumno de 5º de primaria con Síndrome de Asperger. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp.195–202). SEIEM.

Chico-Gómez, A., Climent, N., y Gómez Hurtado, I., (2023b). Designing tasks for prospective teachers: Specialised knowledge on the inclusive teaching of problem-solving. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3719–3727). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I., y Climent, N. (2022e). Problem-solving by students with Asperger’s Syndrome. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti. (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp.4395–4410). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I., y Climent, N. (2022f). Resolución de problemas matemáticos y Síndrome de Asperger: El uso del material TEACCH. *XVIII Congreso Internacional y XXXVIII Jornadas de Universidades y educación inclusiva*. (RIEJ) Universidad de las Islas Baleares. Palma de Mallorca, 2022.

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I y Climent-Rodríguez, N. (2024). Recursos didácticos inclusivos en la resolución de problemas matemáticos con alumnado con síndrome de asperger. *Revista de Educación Inclusiva*, 17(1), 157–181.

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I y Climent-Rodríguez, N. (en prensa-a). 5 claves para la enseñanza de resolución de problemas con alumnado con TEA- Síndrome de Asperger desde la inclusión. *Actas del I Congreso Internacional*

de Investigación e Innovación sobre los Derechos de la Infancia: CRECER.
Universidad de Córdoba.

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I., y Climent-Rodríguez, N. (en prensa-b). Material TEACCH como facilitador de la generalización matemática en estudiantes con TEA-Síndrome de Asperger. En Editor1, Editor2 (Eds.), *Título del libro* (páginas del capítulo pp.). Octaedro.

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I., y Climent, N. (en prensa-c). Material TEACCH como impulsor de la generalización matemática en estudiantes con Síndrome de Asperger. *Actas del XIX Congreso Internacional y XXXIX Jornadas de Universidades y educación inclusiva.* RIEJ.

Chico-Gómez, A., Gómez-Hurtado, I., y Climent, N. (en prensa-d). Conocimiento especializado de docentes en la resolución de un problema de generalización matemática en el aula neurodiversa de educación primaria. *3rd International Congress: Education and Knowledge (ICON-edu 2024).* ICON.

Chico-Gómez, A., Polo-Blanco, I., Climent, N., y Gómez-Hurtado, I. (en prensa). Resolución de un problema de generalización por alumnado con trastorno del espectro autista. *Enseñanza de las Ciencias.*

Chico-Gómez, A., Robotti, E., Climent, N., Gómez-Hurtado I. (en prensa). Resolución de un problema de generalización en el aula de educación primaria desde la inclusión [Poster]. *Investigación en Educación Matemática XIX.* SEIEM.

Chico-Gómez, A., Sánchez-Cerrejón, A., Climent, N., Contreras, L.C., y Gómez-Hurtado, I. (2023). Conocimiento especializado movilizado durante una tarea formativa sobre un problema de generalización. *VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (CIMTSK)* (pp. 71–78). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV).

Climent, N., Montes, M.A., Contreras, L.C., Carrillo, J., Liñan, M.M., Muñoz-Catalán, M., Barrera, V.J., León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 85 –103.

Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C., y Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Thales, vista desde el conocimiento

- especializado del profesor. *Educación Matemática*, 33(1), 98–114. <https://doi.org/10.24844/em3301.04>
- Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M., y Ribeiro, M. (2024). The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. *ZDM Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8>
- Cocinero, P. C. (2015). Método Heurístico Y Su Incidencia En El Aprendizaje Del Álgebra. [Tesis doctoral]. Universidad Rafael Landívar.
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315456539>
- Coles, A., y Ahn, A. (2022). Developing algebraic activity through conjecturing about relationships. *ZDM - Mathematics Education*, 54(6), 1229–1241. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01420-z>
- Cook, S. C., y Rao, K. (2018). Systematically applying UDL to effective practices for students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 41(3), 179–191. <https://doi.org/10.1177/0731948717749936>
- Cooper, T. J., y Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 207–226. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0066-8>
- Corral, Y. (2014). *Instrumentos de Recolección de Datos: Validez y Confiabilidad*. Editorial Academica Española.
- Corral, Y. (2017). *Validez y fiabilidad de las investigaciones cualitativas*. ARJÉ. *Revista de Postgrado FaCE-UC*, 11(20), 196–209.
- Cox, S. K., y Root, J. R. (2020). Modified schema-based instruction to develop flexible mathematics problem-solving strategies for students with Autism Spectrum Disorder. *Remedial and Special Education*, 41(3), 139–151. <https://doi.org/10.1177/0741932518792660>
- Cox, S., Root, J., McConomy, A., y Davis, K. (2024). “For whom” and “under what conditions” is MSBI effective? A conceptual replication with high school students with autism. *Exceptional Children*, 0(0). <https://doi.org/10.1177/00144029241259013>
- Creswell, J. W. (2003). *Research Design. Qualitative Quantitative and Mixed Methods Approaches*. SAGE Publishing.

- Cruz, J., y Carrillo, J. (2004). ¿Qué ponen en juego los alumnos al resolver problemas? Diferencias entre alumnos de 12 y 14 años. En E. Castro, y E. Torre (Eds), *Investigación en educación matemática. VIII* (pp. 195–205). SEIEM.
- Dahl, H., Klemp, T., y Nilssen, V. (2018). Collaborative talk in mathematics—contrasting examples from third graders. *Education 3-13*, 46(5), 599–611. <https://doi.org/10.1080/03004279.2017.1336563>
- Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W.D., y Nuerk, H.C. (2015). Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology*, 6, 1–13. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348>
- Daroczy, G., Meurers, D., Heller, J., Wolska, M., y Nuerk H.C. (2020). The interaction of linguistic and arithmetic factors affects adult performance on arithmetic word problems. *Cognitive Processing*, 21, 105–125. <https://doi.org/10.1007/s10339-019-00948-5>
- Darretxe, L., y Sepúlveda, L. (2011). Estrategias educativas para orientar las necesidades educativas de los estudiantes con Síndrome de Asperger en aulas ordinarias. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, 9(24), 869–892. <https://doi.org/10.25115/ejrep.v9i24.1477>
- Davies, P. L., Schelly, C. L., y Spooner, C. L. (2012). Measuring the effectiveness of universal design for learning intervention in postsecondary education. *Journal of Post secondary Education and Disability*, 26(3), 195–220.
- de Andrade Viana, E., y Miarka, R. (2019). Students with Autism Spectrum Disorder and didactic situations involving mathematics: A case study. En D. Kolloosche, R. Marcone, M. Knigge, M. Godoy, y O. Skovsmose (Eds.), *Inclusive Mathematics Education: State-of-the-Art Research from Brazil and Germany* (pp. 315–334). https://doi.org/10.1007/978-3-030-11518-0_20
- de Giambattista, C., Ventura, P., Trerotoli, P., Margari, M., Palumbi, R., y Margari, L. (2019). Subtyping the Autism Spectrum Disorder: comparison of children with high functioning autism and asperger syndrome. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 49(1), 138–150. <https://doi.org/10.1007/s10803-018-3689-4>
- Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and*

Mathematics Education, 18(3), 567–587. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0>

- Delgado-Rebolledo, R. D., Zakaryan, D., y Alfaro-Carvajal, C. (2022). El conocimiento de la práctica matemática. En M. Montes, N. Climent, y J. Carrillo (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) 10 años de camino* (pp. 57–69). Dykinson. <https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1.9>
- Delisio, L. A., Bukaty, C. A., y Taylor, M. (2018). Effects of a graphic organizer intervention package on the mathematics word problem solving abilities of students with Autism Spectrum Disorders. *The Journal of Special Education Apprenticeship*, 7(2), Article 4. <https://doi.org/10.58729/2167-3454.1069>
- Delors, J. (1996). Los cuatro pilares de la educación. En J. Delors (Ed.), *La educación encierra un tesoro. Informe de la UNESCO de la Comisión internacional sobre la educación para el siglo XXI* (pp. 91–103). Santillana/UNESCO.
- Depaepe, F., Verschaffel, L., y Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12–25. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.03.001>
- Depaepe, F., Verschaffel, L., y Star, J. (2020). Expertise in developing students' expertise in mathematics: Bridging teachers' professional knowledge and instructional quality. *ZDM*, 52(2), 179–192. <http://doi.org/10.1007/s11858-020-01148-8>
- Deruaz, M., Dias, T., Gardes, M. L., Gregorio, F., Ouvrier-Buffet, C., Peteers, F., y Robotti, E. (2020). Exploring MLD in mathematics education: Ten years of research. *Journal of Mathematical Behavior*, 60, 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100807>
- Dieker, L. A., Greer, M., y Lannan, A. (2022). Seven equity ideas for students with language-based needs in mathematics. *Middle School Journal*, 53(5), 33–39. <https://doi.org/10.1080/00940771.2022.2119758>
- Donaldson, J. B., y Zager, D. (2010). Mathematics interventions for students with high functioning Autism/Asperger's Syndrome. *Teaching Exceptional Children*, 42(6), 40–46. <https://doi.org/10.1177/004005991004200605>
- Duchaine, E. L., Jolivet, K., y Fredrick, L. D. (2011). The effect of teacher coaching with performance feedback on behaviour-specific praise in inclusion

classrooms. *Education and Treatment of Children*, 34(2), 209–227.
<http://doi.org/10.1353/etc.2011.0009>

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y Aprendizaje en Matemáticas: Perspectivas Semióticas Seleccionadas* (pp. 61–94). Énfasis.

Duval, R. (2017). Registers of semiotic representations and analysis of the cognitive functioning of mathematical thinking. En T.M. Campos (Ed.), *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations* (pp. 45–71). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9_3

Echeita, G., y Navarro, J. L. (2014). *La educación inclusiva como derecho. Marco de referencia y pautas de acción para el desarrollo de una revolución pendiente*. Universidad Autónoma de Madrid.

Echeita, G. (2016). Inclusión y exclusión educativa. De nuevo el grito hacia una educación inclusiva. *Revista de Educación*, 373, 10–23.
<https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2016-373-322>

Escudero-Avila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C., y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, 10(1), 53–77.
<https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095>

Frith, U., y Happé, F. (1994). Autism: Beyond “theory of mind.” *Cognition*, 50(1–3), 115–132. [https://doi.org/10.1016/0010-0277\(94\)90024-8](https://doi.org/10.1016/0010-0277(94)90024-8)

Fuchs, L. S., Seethaler, P. M., Powell, S. R., Fuchs, D., Hamlett, C. L., y Fletcher, J. M. (2008). Effects of preventative tutoring on the mathematical problem solving of third-grade students with math and reading difficulties. *Exceptional Children*, 74(2), 155–173.
<https://doi.org/10.1177/001440290807400202>

Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Sterba, S. K., Long, J., Namkung, J., Malone, A., Hamlett, C. L., Jordan, N. C., Gersten, R., Siegler, R. S., y Changas, P. (2014). Does working memory moderate the effects of fraction intervention? An aptitude-treatment interaction. *Journal of Educational Psychology*, 106(2), 499–514. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1054465>

- Gajewski, A. (2014). Ethical challenges and dilemmas in measuring inclusive education. *International Perspectives on Inclusive Education*, 3, 19–36. <https://doi.org/10.1108/S1479-363620140000003017>
- García-Moya, M. (2018). Resolución de problemas con niños con trastorno del espectro autista (TEA) [Problem solving with children with autism spectrum disorder (ASD)]. En A. Carneiro-Barrera y A. Díaz-Román (Coord.), *Advances in education and development sciences* (pp. 419–426). AEPC.
- Gardner, H. (1983). *Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences*. Basic Books.
- Gardner, H. (2011). *Inteligencias múltiples. La teoría de la práctica*. Paidós Ibérica
- Gevarter, C., Bryant, D. P., Bryant, B., Watkins, L., Zamora, C., y Sammarco, N. (2016). Mathematics interventions for individuals with autism spectrum disorder: A systematic review. *Review Journal of Autism and Developmental Disorders*, 3(3), 224–238. <https://doi.org/10.1007/s40489-016-0078-9>
- Giberti, C. (2022). A teacher training project to promote mathematics laboratory during the COVID-19 health crisis in Italy. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 10(3), 256–268. <https://doi.org/10.30935/scimath/11837>
- Goetz, J.P., y LeCompte, M. D. (1984). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Ediciones Morata.
- Goldin, G. A. (2004). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 36(2), 56–60. <https://doi.org/10.1007/BF02655759>
- Goldin, G. A., y Germain, Y. (1983). The analysis of a heuristic process: ‘Think of a simpler problem’. En J. C. Bergeron y N. Herscovics (Eds.), *Proceedings of the 5th Annual Meeting of PME-NA* [North American Chapter, International Group for the Psychology of Mathematics Education] (Vol. 2, pp. 121–128). University of Montreal. Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics.
- Goldin, G. A., y Shteingold, N. (2001). Systems of representation and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds), *The role of representation in school mathematics* (pp. 1- 23). National Council of Teachers of Mathematics.

- Gómez-Hurtado, I., García-Rodríguez, M. del P., González Falcón, I., y Coronel Llamas, J. M. (2020). Adaptación de las metodologías activas en la educación universitaria en tiempos de pandemia. *Revista Internacional de Educación Para La Justicia Social*, 9(3), 415–433. <https://doi.org/10.15366/riejs2020.9.3.022>
- Gómez-Hurtado, I., Moya-Maya, A. y García-Prieto, F.J. (2021). Recursos para la inclusión. Hacia una accesibilidad universal. En I. Gómez-Hurtado y F.J. García-Prieto (Eds.), *Manual de didáctica para la diversidad* (pp. 119–133). Pirámide
- González-Gil, F., Martín-Pastor, E., Flores, N., Jenaro, C., Poy, R., y Gómez-Vela, M. (2013). Teaching, learning and inclusive education: The challenge of teachers' training for inclusion. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 93, 783–788. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.09.279>
- Goñi-Cervera, J., Cañadas, M. C. y Polo-Blanco, I. (2021). Estrategias por alumnos con trastorno del espectro autista al resolver una tarea que involucra una relación funcional. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 311 – 318). SEIEM.
- Goñi-Cervera, J., Cañadas, M. C., y Polo-Blanco, I. (2022). Generalisation in students with autism spectrum disorder: An exploratory study of strategies. *ZDM - Mathematics Education*, 54(6), 1333–1347. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01415-w>
- Goodman, S. G., Seymour, T. L., y Anderson, B. R. (2016). Achieving the performance benefits of hands-on experience when using digital devices: A representational approach. *Computers in Human Behavior*, 59, 58–66. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2016.01.006>
- Grauer, K. (2012). A case for case study research in education. En S.R. Klein (Ed.), *Action Research Methods* (pp. 69–79). Palgrave Macmillan US. https://doi.org/10.1057/9781137046635_4
- Hallmayer, J., Cleveland, S., Torres, A., Phillips, J., Cohen, B., Torigoe, T., Miller, J., Fedele, A., Collins, J., Smith, K., Lotspeich, L., Croen, L. A., Ozonoff, S., Lajonchere, C., Grether, J. K., y Risch, N. (2011). Genetic heritability and shared environmental factors among twin pairs with autism. *Archives of General Psychiatry*, 68(11), 1095–1102. <https://doi.org/10.1001/archgenpsychiatry.2011.76>

- Hernández-Sampieri, R., Collado-Fernández, C., y Baptista-Lucio, M.P. (2014). *Metodología de la Investigación*. Mc Graw Hill Education
- Hiebert, J., y Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371–404). Information Age.
- Horner, R. H., Carr, E. G., Strain, P. S., Todd, A. W., y Reed, H. K. (2002). Problem behavior interventions for young children with autism: A research synthesis. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 32(5), 423–446. <https://doi.org/10.1023/A:1020593922901>
- Huaiquiàn, C. (2009). Intervención psicoeducativa basada en imágenes en niños y niñas con trastornos generalizados del desarrollo. *Revista Chilena de Neuropsicología*, 4(42), 138–148.
- Hughes, J., Gadanidis, G., y Yiu, C. (2017). Digital making in elementary mathematics education. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 3(2), 139–153. <https://doi.org/10.1007/s40751-016-0020-x>
- Hunter, J., y Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: Supporting young diverse students to identify structures and generalise. *ZDM - Mathematics Education*, 54(6), 1349–1362. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y>
- Jiménez, B. A., y Kemmery, M. (2013). Building the early numeracy skills of students with moderate intellectual disability. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 48(4), 479–490.
- Joglar-Prieto, N., Liñán-García, M., y Contreras, L. C. (2022). MTSK en la formación inicial del profesorado de primaria. En M. Montes, N. Climent, y J. Carrillo (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) 10 años de camino* (pp. 207–222). Dykinson. <https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1.20>
- Kapur, M. (2014). Productive failure in learning math. *Cognitive Science*, 38(5), 1008–1022. <https://doi.org/10.1111/cogs.12107>
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding*. Lawrence Erlbaum.

- Kaput, J. J., Blanton, M., y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–55). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-3>
- Karp, A. (2010). Analyzing and attempting to overcome prospective teachers' difficulties during problem-solving instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(2), 121–139. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9127-y>
- Katz, J. (2013). The three block model of universal design for learning (UDL): Engaging students in inclusive education. *Canadian Journal of Education*, 36(1), 153–194.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn Mathematics*. National Academy Press.
- King, S. A., Lemons, C. J., y Davidson, K. A. (2016). Math interventions for students with autism spectrum disorder: A best-evidence synthesis. *Exceptional Children*, 82(4), 443–462. <https://doi.org/10.1177/0014402915625066>
- King-Sears, M. E. (2020). Introduction to special series on universal design for learning. *Remedial and Special Education*, 41(4), 191–193. <https://doi.org/10.1177/0741932520908342>
- Kirschner, P. A. (2015). Do we need teachers as designers of technology enhanced learning? *Instructional Science*, 43(2), 309–322. <https://doi.org/10.1007/s11251-015-9346-9>
- Klaren, M., Pepin, B., y Thurlings, M. (2017). Autism and mathematics education. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research In Mathematics Education* (CERME10) (pp. 629–636). Institute of Education and ERME.
- Koegel, L., Matos-Freden, R., Lang, R., y Koegel, R. (2012). Interventions for children with autism spectrum disorders in inclusive school settings. *Cognitive and Behavioral Practice*, 19(3), 401–412. <https://doi.org/10.1016/j.cbpra.2010.11.003>
- Koichu, B. (2018). Mathematical problem solving in choice-affluent environments. En A. Kuzniak y H. Forgasz (Eds.), *Invited lectures from the 13th international congress on mathematical education* (pp. 307–324). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_18

- Kribbs, E., y Rogowsky, B. (2016). A review of the effects of visual-spatial representations and heuristics on word problem solving in middle school mathematics. *International Journal of Research in Education and Science*, 2(1), 65–74. <https://doi.org/10.21890/ijres.59172>
- Krippendorff, K. (2022). *Content Analysis: An Introduction to Its Methodology*. SAGE Publishing. <https://doi.org/10.4135/9781071878781>
- Kuhn, T. (1962). *The structure of scientific revolutions*. University of Chicago Press.
- Kyriazopoulou, M., y Weber, H. (Eds.) (2009). *Development of a set of indicators for inclusive education in Europe*. European Agency for Development in Special Needs Education.
- Lambert, R. (2020). *Increasing Access to Universally Designed Mathematics Classrooms*. Policy Analysis for California Education, PACE.
- Lambert, R. (2021). The magic is in the margins: UDL math. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 114(9), 660–669. <https://doi.org/10.5951/mtlt.2020.0282>
- Lambert, R., Sugita, T., Yeh, C., Hunt, J. H., y Brophy, S. (2020). Documenting increased participation of a student with autism in the standards for mathematical practice. *Journal of Educational Psychology*, 112(3), 494–513. <https://doi.org/10.1037/edu0000425>
- Lambert, R., Imm, K., Schuck, R., Choi, S., y McNiff, A. (2021). “UDL is the what, design thinking is the how”: designing for differentiation in mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development*, 23(3), 54–77.
- Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3–28. <https://doi.org/10.1007/BF03217440>
- LaRochelle, R., Nickerson, S. D., Lamb, L. C., Hawthorne, C., Philipp, R. A., y Ross, D. L. (2019). Secondary practising teachers’ professional noticing of students’ thinking about pattern generalisation. *Mathematics Teacher Education and Development*, 21(1), 4–27.
- Lee, J., y Santagata, R. (2020). A longitudinal study of novice primary school teachers’ knowledge and quality of mathematics instruction. *ZDM - Mathematics Education*, 52(2), 295–309. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01123-y>

- Leikin, R., y Ovodenko, R. (2021). Stepped tasks for complex problem solving: Top-down-structured mathematical activity. *For the Learning of Mathematics*, 41(3), 30–35. <https://www.jstor.org/stable/27091218>
- Levingston, H. B., Neef, N. A., y Cihon, T. M. (2009). The effects of teaching precurent behaviors on children's solution of multiplication and division word problems. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 42, 361–367. <https://doi.org/10.1901/jaba.2009.42-361>
- Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. <https://doi.org/10.4324/9781410607713>
- Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *Mathematics Enthusiast*, 10(1–2), 245–278. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1267>
- Liljedahl, P., y Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM - Mathematics Education*, 53(4), 1–13. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w>
- Lipsky, D. K., y Gartner, A. (1997). *Inclusion and school reform: Transforming America's classrooms*. Paul H. Brookes Publishing.
- López, S. I. M., y Valenzuela, B. G. E. (2015). Niños y adolescentes con necesidades educativas especiales. *Revista Médica Clínica Las Condes*, 26(1), 42–51. <https://doi.org/10.1016/j.rmclc.2015.02.004>
- López-Melero, M. L. (2011). Barreras que impiden la escuela inclusiva y algunas estrategias para construir una escuela sin exclusiones. *Innovación Educativa*, 21, 37–54. <http://hdl.handle.net/10347/6223>
- López-Melero, M. L. (2012). La escuela inclusiva: Una oportunidad para humanizarnos. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 26(2), 131–160.
- López-Mojica, J., y Aké, L. (2015). Formación matemática del docente de Educación Especial. En P. Scott y A. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática En Las Américas: 2015. Necesidades Especiales* (vol. 14, pp. 94–101). CIEAEM.
- López Mojica, J., Aké, L., y Cruz, K. (2018). Conocimiento matemático de profesionistas de Educación Especial en su formación inicial. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 53, 30–40.

- Lord, C., Elsabbagh, M., Baird, G., y Veenstra-Vanderweele, J. (2018). Autism spectrum disorder. *Lancet*, 392(10146), 508–520. [https://doi.org/10.1016/s0140-6736\(18\)31129-2](https://doi.org/10.1016/s0140-6736(18)31129-2)
- Loireman, T., Forlin, C., Chambers, D., Sharma, U., y Deppeler, J. (2014). Conceptualising and measuring inclusive education. En T. Loireman, C. Forlin y U. Sharma (Eds.), *International Perspectives on Inclusive Education* (Vol. 3, pp. 165–187). Emerald Group Publishing Limited <https://doi.org/10.1108/S1479-363620140000003015>
- Marchesi, À., Blanco, R., y Hernández, L. (2021). *Avances y Desafíos de la Educación Inclusiva en Iberoamérica*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI).
- Martos Pérez, J., y Paula Pérez, I. (2011). Una aproximación a las funciones ejecutivas en el trastorno del espectro autista. *Revista de Neurología*, 52(1), S147–S153. <https://doi.org/10.33588/rn.52s01.2010816>
- Mayring, P. (2014). Qualitative content analysis: Theoretical foundation, basic procedures and software solution. *Qualitative Methods in Various Disciplines I: Psychology*, 1(2), Article 20. <https://doi.org/10.17169/fqs-1.2.1089>
- Mcmillan, J., y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa. Una Introducción Conceptual*. Pearson Addison Wesley.
- Mellone, M., Pacelli, T., y Liljedahl, P. (2021). Cultural transposition of a thinking classroom: To conceive possible unthoughts in mathematical problem solving activity. *ZDM Mathematics Education* 53, 785–79. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01256-z>
- Mesibov, G. B., y Shea, V. (2010). The TEACCH program in the era of evidence-based practice. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 40(5), 570–579. <https://doi.org/10.1007/s10803-009-0901-6>
- Messiou, K. (2017). Research in the field of inclusive education: Time for a rethink? *International Journal of Inclusive Education*, 21(2), 146–159. <https://doi.org/10.1080/13603116.2016.1223184>
- Messiou, K., y Ainscow, M. (2015). Responding to learner diversity: Student views as a catalyst for powerful teacher development? *Teaching and Teacher Education*, 51. 246– 255. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2015.07.002>

- Messiou, K., y Ainscow, M. (2020). Inclusive inquiry: Student–teacher dialogue as a means of promoting inclusion in schools. *British Educational Research Journal*, 46(3), 670–687. <https://doi.org/10.1002/berj.3602>
- Messiou, K., Ainscow, M., Echeita, G., Goldrick, S., Hope, M., Paes, I., Sandoval, M., Simon, C., y Vitorino, T. (2016). Learning from differences: A strategy for teacher development in respect to student diversity. *School Effectiveness and School Improvement*, 27(1), 45–61. <https://doi.org/10.1080/09243453.2014.966726>
- Meyer, A., Rose, D. H., y Gordon, D. (2014). *CAST: Universal Design for Learning: Theory and Practice*. CAST Professional Publishing.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (1970). Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. *Boletín Oficial del Estado*, 187, 11784–11806. Disponible en: <https://www.boe.es/boe/dias/1970/08/06/pdfs/A12525-12546.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (1985). Ley Orgánica 8/1985, de 3 de julio, reguladora del Derecho a la Educación. *Boletín Oficial del Estado*, 159, 4 de julio de 1985. Disponible en: <https://www.boe.es/buscar/pdf/1985/BOE-A-1985-12978-consolidado.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (1990). Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *Boletín Oficial del Estado*, 238, 28930-28949. Disponible en: <https://www.boe.es/boe/dias/1990/10/04/pdfs/A28927-28942.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado*, 106, 4 de mayo de 2006. Disponible en: <http://www.boe.es/boe/dias/2006/05/04/pdfs/A17158-17207.pdf>
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, 2 de marzo de 2022. Disponible en: <https://www.boe.es/buscar/pdf/2022/BOE-A-2022-3296-consolidado.pdf>
- Mittler, P. (2000): *Working Towards Inclusive Education: Social Context*. David Fulton.

- Monahan, T., y Fisher, J. (2010). Benefits of "Observer Effects": Lessons from the Field. *Qualitative Research*, 10(3), 357–376. <https://doi.org/10.1177/1468794110362874>
- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M., y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: Una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el Profesor de Matemáticas: Formación, Práctica de Aula, Conocimiento y Competencia Profesional* (pp. 157–176). Ediciones Universidad Salamanca.
- Montes, M., Climent, N, y Carrillo, J. (2022). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) 10 años de camino*. Dykinson. <https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1>
- Montes, M, Contreras-González, L., y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas, enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano-Alcaraz, G. Gutiérrez-Pereda, N. Climent-Rodríguez, A. Estepa-Castro (Eds.), *Investigación En Educación Matemática XVII* (pp. 404–410). SEIEM.
- Montes, M., Pascual, M. y Climent, N. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(1), 83–104. <https://doi.org/10.12802/relime.21.2414>
- Morselli, F., y Robotti, E. (2022). Looking back for understanding: Formative assessment strategies and inclusive activities for conjecturing and proving. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti. (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 3867–3874). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.
- Morselli, F., y Robotti, E. (2023). Designing inclusive educational activities in mathematics: The case of algebraic proof. En K. Robinson, D. Kotsopoulos, y A. Dubé (Eds.), *Mathematical teaching and learning: Perspectives on mathematical minds in the elementary and middle school years* (pp. 69–88). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-31848-1_5
- Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., y Climent, N. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK): Un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, 18(3), 1801–1817.

- Muñoz-Catalán, C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A.M., Aguilar, A. y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el Profesor De Matemáticas: Formación, Práctica de Aula, Conocimiento y Competencia Profesional* (pp. 63–84). Ediciones Universidad Salamanca.
- Muñoz-Catalán, M. C. (2021). Reflexiones para una fundamentación del estudio de caso como diseño metodológico en Educación Matemática. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 65 – 80). SEIEM.
- Muñoz-Catalán, M. C., Ramírez-García, M., Joglar-Prieto, N., y Carrillo-Yáñez, J. (2022). Early childhood teachers' specialised knowledge to promote algebraic thinking as from a task of additive decomposition [El conocimiento especializado del profesor de educación infantil para fomentar el pensamiento algebraico a partir de una tarea de descomposición aditiva]. *Infancia y Aprendizaje*, 45(1), 37–80. <https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1946640>
- Muntaner, J. J. (2014). Prácticas inclusivas en el aula ordinaria. *Revista Nacional e Internacional de Educación Inclusiva*, 7(1), 63–79.
- Muntaner, J. J., Rosselló-Ramón, M. R., y de la Iglesia-Mayol, B. (2016). Buenas prácticas en educación inclusiva. *Educatio Siglo XXI*, 34(1 Marzo), 31–50. <https://doi.org/10.6018/j/252521>
- Murillo Moreno, A., y Ceballos Urrego, L. (2013). Las prácticas de enseñanza empleadas por docentes de matemáticas y su relación con la resolución de problemas mediados por fracciones. *Revista Científica*, 17(2), 244–248. <https://doi.org/10.14483/23448350.6553>
- Murillo, F. J. y Hernández, R. (2014). Hacia un concepto de justicia social. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 9(4), 8–23.
- Murray, E., Hillaire, G., Johnson, M., y Rappolt-Schlichtmann, G. (2014). Representing, acting, and engaging: UDL and mathematics. En S. Chinn (Ed.), *The Routledge international handbook of dyscalculia and mathematical learning difficulties* (pp. 393–405). Routledge.
- Muslim, F., y Irvan, M. (2023). Effectiveness of the TEACCH method to improve the executive function ability of children with Autism Spectrum Disorder (ASD). En A. P. Wibawa et al. (Eds.), *Proceedings of the International Conference on*

Education 2022 (ICE 2022) (pp. 82–89). https://doi.org/10.2991/978-2-38476-020-6_9

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An agenda for action*. National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

Ng, O. L., y Cui, Z. (2021). Examining primary students' mathematical problem-solving in a programming context: Towards computationally enhanced mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 53(4), 847–860. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01200-7>

Noda, A., y Bruno, A. (2010). Operaciones básicas en alumnos con síndrome de Down. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, 4(4), 143–159. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i4.6161>

Novotná, J., Eisenmann, P., Příbyl, J., Ondrušová, J., y Břehovský, J. (2014). Problem solving in school mathematics based on heuristic strategies. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, 7(1), 1–6. <https://doi.org/10.7160/eriesj.2013.070101>

OECD. (1995). *OECD Economic Outlook, Volume 1995 Issue 1*. OECD. https://doi.org/10.1787/eco_outlook-v1995-1-en

OECD (2019), *Education at a Glance 2019: OECD Indicators*, OECD Publishing, Paris. <https://doi.org/10.1787/f8d7880d-en>

OECD (2014), *Education at a Glance 2014: OECD Indicators*, OECD Publishing, Paris. <https://doi.org/10.1787/eag-2014-en>

Oliver-Kerrigan, K. A., Christy, D., y Stahmer, A. C. (2021). Practices and experiences of general education teachers educating students with autism. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 56(2), 158–172.

Ordoñez, R. (2017). *Aplicación del método heurístico y desarrollo de habilidades de investigación en estudiantes en etapa de investigación formativa*. [Tesis doctoral en educación]. Universidad Nacional de San Marcos.

- Ozonoff, S. (1997). Components of executive function in autism and other disorders. En J. Russell (Ed.), *Autism as an executive disorder* (pp. 179–211). Oxford University Press.
- Ozonoff, S., Pennington, B. F., y Rogers, S. J. (1991). Executive function deficits in high-functioning autistic individuals: Relationship to theory of mind. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 32(7), 1081–1105. <https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1991.tb00351.x>
- Park, J., Bouck, E. C., y Smith, J. P. (2020). Using a virtual manipulative intervention package to support maintenance in teaching subtraction with regrouping to students with developmental disabilities. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 50(1), 63–75. <https://doi.org/10.1007/s10803-019-04225-4>
- Parrilla, A. (1996). *Apoyo a la Escuela: Un Proceso de Colaboración*. Ediciones Mensajero.
- Parrilla, A. (2002). Acerca del origen y sentido de la educación inclusiva. *Revista de Educación*, 327, 11–29.
- Pascual Martín, M. I., Climent Rodríguez, N., Codes Valcarce, M., Martín Díaz, J. P., Y Contreras González, L. C. (2023). Tareas en la formación inicial de maestros para la construcción de conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. *Revista Interuniversitaria de Formación Del Profesorado. Continuación de La Antigua Revista de Escuelas Normales*, 98(37.2). <https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99221>
- Peeters, T. (2008). *Autismo: De la Comprensión Teórica a la Intervención Educativa*. Autismo Ávila.
- Pinto, E., y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: Un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo de la Vega, J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407–416). SEIEM.
- Pinto, E., y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 113–134. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2>
- Pinto, E., Cortés, C., Martínez-Videla, M.V. y Piñeiro, J.L. (2023). ¿Cómo atienden futuras profesoras al pensamiento algebraico de niñas? Conexiones entre noticing y MTSK. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI*

Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (pp. 272–279). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2019). Primary teachers' conceptions and beliefs about mathematical problems, its resolution and teaching. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 16, 57–72. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i16.253>

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2022). What problem-solving knowledge is required in mathematical teaching? A curricular approach. *Curriculum Perspectives*, 42(1), 1–12. <https://doi.org/10.1007/s41297-021-00152-6>

Piñeiro, J. L., Chapman, O., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2024). Prospective primary teachers' initial mathematical problem-solving knowledge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(8), 1914–1937. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2107958>

Plancarte, M. L. (2017). *Estrategias didácticas inclusivas: Un enfoque para atender la diversidad en el aula*. Publicaciones de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Polo-Blanco, I., Bruno, A., González, M.J., y Olivera, B. (2018a). Estrategias y representaciones en la resolución de problemas aritméticos de división en estudiantes con trastorno del espectro autista: Un estudio de caso. *Revista de Educación Inclusiva*, 11(2), 159–178.

Polo-Blanco, I., Bruno, A., y González, M.J. (2018b) Errores en la resolución de problemas de división por un estudiante con trastorno del espectro autista. En L.J. Rodríguez, L. Muñiz, A. Aguilar, P. Alonso, F. García y A. Bruno (Eds), *Investigación en Ed. Matemática XXII* (467–476). SEIEM.

Polo-Blanco, I., González, M., y Bruno, A. (2019). Estudio exploratorio sobre estrategias y errores de un estudiante con trastorno del espectro autista al resolver problemas de división partitiva. *Brazilian Journal of Special Education*, 25(2), 247–264. <https://doi.org/10.1590/s1413-65382519000200005>

Polo-Blanco, I., Suárez-Pinilla, P., Goñi-Cervera, J., Suárez-Pinilla, M., y Payá, B. (2024). Comparison of mathematics problem-solving abilities in autistic and non-autistic children: The influence of cognitive profile. *Journal of Autism*

and *Developmental Disorders*, 54(1), 353–365.
<https://doi.org/10.1007/s10803-022-05802-w>

- Polotskaia, E., Savard, A., y Nadon, C. (2022). La résolution de problèmes mathématiques et l'art de la représentation. *For the Learning of Mathematics*, 41(3), 16–19.
- Polya, G. (1945). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.
- Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83–98). Graó.
- Powell, S. R. (2011). Solving word problems using schemas: A review of the literature. *Learning Disabilities Research and Practice*, 26(2), 94–108.
<https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2011.00329.x>
- Pruner, M., y Liljedahl, P. (2021). Collaborative problem solving in a choice-affluent environment. *ZDM - Mathematics Education*, 53(4), 753–770.
<https://doi.org/10.1007/s11858-021-01232-7>
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Comares.
- Puigdemívol, I. y Petreñas, C. (2019). Evolución y sentido del apoyo educativo: La función de apoyo en la escuela inclusiva. En I. Puigdemívol, B. Petreñas, B. Siles y A. Jardí (Eds.), *Estrategias de Apoyo en la Escuela Inclusiva* (pp. 19–61). Graó.
- Pyramid Educational Consultants (2017). *Apoyo Picture Exchange Communication System (PECS)* [Imagen]. <https://pecs-spain.com/apoyo-pecs/>
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14–23.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz, y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 1–21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM -*

International Journal on Mathematics Education, 40(1), 83–96.
<https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0>

- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17–24). Ankara, Turkey: PME.
- Radford, L. (2021). O Ensino-aprendizagem da Álgebra na Teoria da Objetivação. En V. Moretti y L. Radford (Eds.), *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural* (pp. 171-195). Livraria da Física.
- Ramirez-Cruz, C., J., Lopez-Mojica, M., y Ake, L. P. (2018). Importance of mathematics in special education degree in their initial training. *ATENAS*, 3, 100–114.
- Rao, K., Ok, M. W., y Bryant, B. R. (2014). A review of research on Universal Design Educational models. *Remedial and Special Education*, 35(3), 153–166.
<https://doi.org/10.1177/0741932513518980>
- Rao, K., Ok, M. W., Smith, S. J., Evmenova, A. S., y Edyburn, D. (2020). Validation of the UDL reporting criteria with extant UDL research. *Remedial and Special Education*, 41(4) 219–230. <https://doi.org/10.1177/0741932519847755>
- Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73(3), 297–328. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0>
- Robotti, E. (2017). Designing innovative learning activities to face difficulties in algebra of dyscalculic students: Exploiting the functionalities of AlNuSet. En A. Leung y A. Baccaglini (Eds.), *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks* (pp. 193–214). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_10
- Rockwell, S. B., Griffin, C. C., y Jones, H. A. (2011). Schema-based strategy instruction in mathematics and the word problem-solving performance of a student with autism. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, 26(2), 87–95. <https://doi.org/10.1177/1088357611405039>
- Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Aljibe.

- Roos, H. (2013). Special educational needs in mathematics from an inclusive perspective. En A.B. Fuglestad (Ed.), *Special needs education in mathematics. New trends, problems and possibilities* (pp. 120–124). Portal Academic.
- Roos, H. (2017). Diversity in an inclusive mathematics classroom: A student perspective. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10)* (pp. 1433–1440). DCU Institute of Education and ERME.
- Roos, H. (2019). Inclusion in mathematics education: An ideology, a way of teaching, or both? In *Educational Studies in Mathematics*, 100(1), 25–41. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9854-z>
- Roos, H. (2023). Students' voices of inclusion in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 113(2), 229–249. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10213-4>
- Root, J. R., y Browder, D. M. (2019). Algebraic problem solving for middle school students with autism and intellectual disability. *Exceptionality*, 27(2), 118–132. <https://doi.org/10.1080/09362835.2017.1394304>
- Root, J. R., Browder, D. M., Saunders, A. F., y Lo, Y. Y. (2017). Schema-Based Instruction with concrete and virtual manipulatives to teach problem solving to students with autism. *Remedial and Special Education*, 38(1), 2–52. <https://doi.org/10.1177/0741932516643592>
- Root, J. R., Cox, S. K., Saunders, A., y Gilley, D. (2020). Applying the universal design for learning framework to mathematics instruction for learners with extensive support needs. *Remedial and Special Education*, 41(4), 194–206. <https://doi.org/10.1177/0741932519887235>
- Root, J. R., Henning, B., y Boccumini, E. (2018). Teaching students with autism and intellectual disability to solve algebraic word problems. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 53(3), 325–338. <https://www.jstor.org/stable/26563472>
- Root, J. R., Ingelin, B., y Cox, S. K. (2021). Teaching mathematical word problem solving to students with autism spectrum disorder: A best-evidence synthesis. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, 56(4), 420–436.
- Rose, D.H., y Meyer, A. (2002) *Teaching Every Student in the Digital Age: Universal Design for Learning*. Alexandria

- Rose, D.H., y Meyer, A. (2006). *A Practical Reader in Universal Design for Learning*. Harvard Education Press.
- Rotili, P., Durante, A., y Hoffmann Wagner, L. (2022). Manifestaciones, diagnóstico y tratamiento en el trastorno del espectro autista. *Revista Científica UPAP*, 2(1), 57–64. <https://doi.org/10.54360/rcupap.v2i1.26>
- Ruiz-Lázaro, P. M., Posada de la Paz, M., y Hijano Bandera, F. (2009). Trastornos del espectro autista: Detección precoz, herramientas de cribado. *Pediatría Atención Primaria*, 11(17), 381–397. <https://doi.org/10.4321/s1139-76322009000700009>
- Sánchez-Palomino, A., y Pulido-Moyano, R. (2007). *El Centro Educativo. Una Organización de y para la Diversidad*. Grupo Editorial Universitario.
- Sánchez-Serrano, J. M. (2023). El DUA en la cuerda floja: Un análisis de las críticas al modelo. *Estudios Sobre Educación*, 46, 57–77. <https://doi.org/10.15581/004.46.003>
- Sanz-Cervera, P., Fernández-Andrés, M. I., Pastor-Cerezuela, G., y Tárraga-Mínguez, R. (2018). The effectiveness of TEACCH intervention in autism spectrum disorder: A review study. *Papeles Del Psicólogo*, 39(1), 40–50. <https://doi.org/10.23923/pap.psicol2018.2851>
- Sarmiento, C. V. S. (2017). Jogos matemáticos aplicados a crianças com transtorno do espectro autista (TEA) em uma escola de dias d'Ávila. *Revista Científica Semana Acadêmica*, 105, 1–24.
- Saunders, A.F. (2014). *Effects of Schema-Based Instruction Delivered through Computer-Based Video Instruction on Mathematical Word Problem Solving of Students with Autism Spectrum Disorder and Moderate Intellectual Disability*. [Tesis doctoral]. The University of North Carolina at Charlotte
- Schaefer-Whitby, P. (2009). *The Effects of a Modified Learning Strategy on the Multiple Step Mathematical Word Problem Solving Ability of Middle School Students with High-functioning Autism or Asperger's Syndrome*. [Tesis doctoral]. University of Central Florida.
- Schaefer-Whitby, P. J. (2013). The effects of solve it! On the mathematical word problem solving ability of adolescents with autism spectrum disorders. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, 28(2), 78–88. <https://doi.org/10.1177/1088357612468764>

- Schaefer Whitby, P. J., Kucharczyk, S., y Lorah, E. (2019). Teaching object exchange for communication to a young girl with autism spectrum disorder and visual impairment. *Journal of Visual Impairment and Blindness*, 113(4), 372–380.
<https://doi.org/10.1177/0145482X19869521>
- Scherer, S. W., y Dawson, G. (2011). Risk factors for autism: Translating genomic discoveries into diagnostics. *Human Genetics*, 130(1), 123–148.
<https://doi.org/10.1007/s00439-011-1037-2>
- Schmidt, M. C. S. (2016). Dyscalculia ≠ maths difficulties. An analysis of conflicting positions at a time that calls for inclusive practices. *European Journal of Special Needs Education*, 31(3), 407–421.
<https://doi.org/10.1080/08856257.2016.1163016>
- Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching problem-solving skills. *The American Mathematical Monthly: The Official Journal of the Mathematical Association of America*, 87(10), 794–805.
<https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11995155>
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (2007). *Assessing Mathematical Proficiency*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755378>
- Schoenfeld, A. H. (2011). *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*. Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9780203843000>
- Schopler, E., Mesibov, G.B., y Hearsey, K. (1995). Structured teaching in the TEACCH system. En Schopler, E., Mesibov, G.B. (Eds), *Learning and Cognition in Autism. Current Issues in Autism*. Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4899-1286-2_13
- Selling, S. K. (2016). Learning to represent, representing to learn. *Journal of Mathematical Behavior*, 41, 191–209.
<https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.003>
- Shoup, K. (2016). *Universal Design for Learning and Inclusion for Students with Autism Spectrum Disorder* [Tesis doctoral]. University San Marcos.
- Shulman, L. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporary perspective. En M. C. Witrock (Ed.), *Handbook of Research in Teaching* (3rd ed., pp. 3–36). Macmillan.

- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1–22. <http://dx.doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Slee, R. (2011). *The Irregular School: Exclusion, Schooling and Inclusive Education*. Routledge.
- Soetikno, N., y Mar’at, S. (2021). Teacch for parents and child with autism spectrum disorder: A review of the literature. *Advances in Health Sciences*, 41, 190–194. <https://doi.org/10.2991/ahsr.k.211130.032>
- Son, J. W., y Lee, M. Y. (2021). Exploring the relationship between preservice teachers’ conceptions of problem solving and their problem-solving performances. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 129–150. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-10045-w>
- Sosa, L., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, 28(2), 151-174. <https://doi.org/10.24844/em2802.06>
- Soto-Cerros, S., García-González, M. del S., y Pascual-Martín, M. I. (2023). La relación entre el dominio afectivo y el modelo MTSK: Una oportunidad de investigación. *Educación Matemática*, 35(2), 226–246. <https://doi.org/10.24844/em3502.09>
- Spooner, F., Root, J. R., Saunders, A. F., y Browder, D. M. (2019). An updated evidence-based practice review on teaching mathematics to students with moderate and severe developmental disabilities. *Remedial and Special Education*, 40(3), 150–165. <https://doi.org/10.1177/0741932517751055>
- Spooner, F., Saunders, A., Root, J., y Brosh, C. (2017). Promoting access to common core mathematics for students with severe disabilities through mathematical problem solving. *Research and Practice for Persons with Severe Disabilities*, 42(3), 171–186. <https://doi.org/10.1177/1540796917697119>
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147–164. <https://doi.org/10.1007/BF00579460>
- Stake, R. E. (1995). *The Art of Case Study Research*. SAGE Publishing.

- Stake, R. E. (2010). *Investigación Cualitativa: El estudio de Cómo Funcionan las Cosas*. The Guilford Press. <http://hdl.handle.net/10486/661629>
- Stainback, S., y Stainback, W. (1992). *Schools as inclusive communities*. En S. Stainback y W. Stainback (Eds.), *Curriculum Considerations in Inclusive Classrooms: Facilitating Learning for all Students* (pp. 3-17). Paul H. Brookes Publishing Co.
- Stanic, G., y Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. En R. I. Charles, y E. A. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving: Research Agenda for Mathematics Education* (pp. 1-22). NCTM/Lawerance Erlbaum Associates.
- Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., y Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 143–166. <https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636>
- Strachota, S. (2016). Conceptualizing Generalization. *INVI: Open Mathematical Education Notes*, 6, 41–55.
- Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(4), 325–343. <https://doi.org/10.1007/s10857-010-9143-y>
- Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, 76(3), 265–280. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2>
- Sulaiman, L. H., Y Tahar, M. M. (2024). Implementation of Universal Learning Design Principles by mainstream teacher in inclusive education programs. *Special Education [SE]*, 2(1), E0015–E0015. <https://doi.org/10.59055/se.v2i1.15>
- Swift, A. (2022). Being creative with resources in qualitative research. En U.Flick (Ed.), *The SAGE Handbook of Qualitative Research Design* (pp. 290–307). SAGE Publishing.
- Thomas, C. N., van Garderen, D., Scheuermann, A., y Lee, E. J. (2015). Applying a Universal Design for Learning framework to mediate the language demands of mathematics. *Reading and Writing Quarterly*, 31(3), 207–234. <https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030988>

- UNESCO 1994. *The Salamanca Statement and Framework for Action on Special Needs Education*, UNESCO.
- UNESCO. (2009). *Policy Guidelines on Inclusion in Education in all*. UNESCO.
- UNESCO. (2017). *Educación para los Objetivos de Desarrollo Sostenible: Objetivos de Aprendizaje*. UNESCO
- UNESCO (2021). *Informe de Seguimiento de la Educación en el Mundo 2021/2: Los Actores no Estatales en la Educación: ¿Quién Elige? ¿Quién Pierde?* UNESCO.
- van Lieshout, E. C. D. M., y Xenidou-Dervou, I. (2020). Simple pictorial mathematics problems for children: Locating sources of cognitive load and how to reduce it. *ZDM - Mathematics Education*, 52(1), 73–85. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01091-3>
- Vasco-Mora, D., Climent-Rodríguez, N., y Escudero-Ávila, D. (2021). Interconnections between content knowledge and pedagogical content knowledge of a university lecturer in linear algebra. *Mathematics*, 9(20), 2542–2556. <https://doi.org/10.3390/math9202542>
- Vázquez Gómez, G. (2007). La formación de la competencia cognitiva del profesor. *Estudios Sobre Educación*, 12, 41–57. <https://doi.org/10.15581/004.12.24317>
- Velarde-Incháustegui, M., Ignacio-Espíritu, M. E., y Cárdenas-Soza, A. (2021). Diagnóstico de Trastorno del Espectro Autista- TEA, adaptándonos a la nueva realidad, Telesalud. *Revista de Neuro-Psiquiatría*, 84(3), 175–182. <https://doi.org/10.20453/rnp.v84i3.4034>
- Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA. Revista de Investigación En Didáctica de La Matemática*, 9(3), 193–215. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220>
- Verschaffel, L., y De Corte, E. (2018). Mathematical problem solving and instruction. *Mathematical Thinking and Learning*, 20(4), 1–22.
- Verschafel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). Making sense of word problems. *Educational Studies in Mathematics* 42(2), 211–213. <http://.doi.org/10.1023/A:1004190927303>

- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., y van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM - Mathematics Education*, 52(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01130-4>
- Volk, H. E., Lurmann, F., Penfold, B., Hertz-Picciotto, I., y McConnell, R. (2013). Traffic-related air pollution, particulate matter, and autism. *Archives of General Psychiatry*, 70(1), 71–77. <https://doi.org/10.1001/jamapsychiatry.2013.266>
- Wendt, O., Hsu, N., Simon, K., Dienhart, A., y Cain, L. (2019). Effects of an iPad-based speech-generating device infused into instruction with the picture exchange communication system for adolescents and young adults with severe autism spectrum disorder. *Behavior Modification*, 43(6), 898–932. <https://doi.org/10.1177/0145445519870552>
- Wong, C., Odom, S. L., Hume, K. A., Cox, A. W., Fettig, A., Kucharczyk, S., Brock, M. E., Plavnick, J. B., Fleury, V. P., y Schultz, T. R. (2015). Evidence-based practices for children, youth, and young adults with autism spectrum disorder: A comprehensive review. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 45(7), 1951–1966. <https://doi.org/10.1007/s10803-014-2351-z>
- Yakubova, G., Hughes, E. M., y Hornberger, E. (2015). Video-based intervention in teaching fraction problem-solving to students with autism spectrum disorder. *Journal of Autism and Developmental Disorders*, 45(9), 2865–2875. <https://doi.org/10.1007/s10803-015-2449-y>
- Yin, R. K. (2013). *Case study research: Design and methods*. *Applied Social Research Methods Series*. SAGE Publishing.
- Zakaryan, D., y Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática*, 33(1), 71–97. <https://doi.org/10.24844/em3301.03>
- Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números. Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, 97, 51–67.
- Zapatera, A. (2022). La generalización de patrones como herramientas para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria. *Educación Matemática*, 34(2), 134–152.

Índice de Figuras

Figura 1	30
Figura 2	35
Figura 3	55
Figura 4	55
Figura 5	57
Figura 6	61
Figura 7	62
Figura 8	67
Figura 9	71
Figura 10	78
Figura 11	79
Figura 12	83
Figura 13	91
Figura 14	100
Figura 15	101
Figura 16	109
Figura 17	113
Figura 18	113
Figura 19	120
Figura 20	122
Figura 21	122
Figura 22	125
Figura 23	128
Figura 24	129
Figura 25	130
Figura 26	132
Figura 27	144
Figura 28	144
Figura 29	146
Figura 30	146
Figura 31	148
Figura 32	148
Figura 33	149
Figura 34	155
Figura 35	156
Figura 36	156
Figura 37	157
Figura 38	158
Figura 39	158

Figura 40	159
Figura 41	159
Figura 42	162
Figura 43	162
Figura 44	163
Figura 45	164
Figura 46	166
Figura 47	168
Figura 48	168
Figura 49	171
Figura 50	172
Figura 51	173
Figura 52	174
Figura 53	176
Figura 54	177
Figura 55	177
Figura 56	178
Figura 57	178
Figura 58	179
Figura 59	186
Figura 60	187
Figura 61	189
Figura 62	190
Figura 63	190
Figura 64	192
Figura 65	194
Figura 66	197
Figura 67	198
Figura 68	212
Figura 69	219
Figura 70	222
Figura 71	225
Figura 72	239
Figura 73	247
Figura 74	250
Figura 75	253
Figura 76	258
Figura 77	259
Figura 78	259
Figura 79	262
Figura 80	264

Figura 81	266
Figura 82	287
Figura 83	287

Índice de Tablas

Tabla 1	32
Tabla 2	40
Tabla 3	43
Tabla 4	44
Tabla 5	45
Tabla 6	68
Tabla 7	83
Tabla 8	85
Tabla 9	86
Tabla 10	89
Tabla 11	90
Tabla 12	92
Tabla 13	103
Tabla 14	107
Tabla 15	110
Tabla 16	117
Tabla 17	118
Tabla 18	118
Tabla 19	137
Tabla 20	150
Tabla 21	154
Tabla 22	181
Tabla 23	204
Tabla 24	207
Tabla 25	211
Tabla 26	224
Tabla 27	226
Tabla 28	227
Tabla 29	228
Tabla 30	229
Tabla 31	232
Tabla 32	234
Tabla 33	237
Tabla 34	238
Tabla 35	241
Tabla 36	242
Tabla 37	243
Tabla 38	244

Tabla 39	245
Tabla 40	246
Tabla 41	250
Tabla 42	254
Tabla 43	263
Tabla 44	265
Tabla 45	267
Tabla 46	288
Tabla 47	290
Tabla 48	294

Anexos

Anexo 1: Carta de interés de la asociación participante _____	368
Anexo 2: Documento de autorización de participación en el taller cero _____	369
Anexo 3: Propuesta inicial del taller cero _____	373
Anexo 4: Autorización de las familias para la participación en el taller semestral _____	383
Anexo 5: Autorización de consulta de informes _____	384
Anexo 6: Taller semestral _____	385
Anexo 7: Entrevistas a docentes _____	418
Anexo 8: Propuesta de participación en el proyecto para docentes y centros educativos _____	419
Anexo 9: Entrevista a docentes de los estudios de caso 2, 3 y 4. Protocolo _____	420
Anexo 10: Principios, directrices, puntos de verificación y criterios _____	422
Anexo 11: Enlace a archivos _____	431

Anexo 1: Carta de interés de la asociación participante

D^a __, Directora de la *Asociación Onubense de Síndrome de Asperger y trastornos de espectro autista (AOSA)*

Hace constar,

El interés de AOSA en los resultados del proyecto I+D+i: *Conocimiento especializado en la formación del profesorado de matemáticas: Tareas y conocimiento del formador (MTSK-T&MTEK)*, coordinador por Nuria Climent y Luis Carlos Contreras (Universidad de Huelva).

El abordaje en el citado proyecto de la formación del profesorado para la enseñanza de la resolución de problemas a alumnado con síndrome de Asperger, en el marco de la tesis doctoral de Ángeles Chico, de la Universidad de Huelva, constituye a nuestro parecer un medio para comprender mejor el tratamiento educativo de dicho alumnado. El enfoque educativo inclusivo que se adopta en la tesis en relación con la enseñanza al alumnado con síndrome de Asperger añade valor a los resultados esperados.

Y para que conste a los efectos oportunos, firmo el presente en Huelva a XX de diciembre de 2021.

Fdo.

Anexo 2: Documento de autorización de participación en el taller cero

Anexo 2.1. PLAN DE ACTUACIÓN FRENTE AL COVID EN EVENTOS O ACTIVIDADES EN LA UNIVERSIDAD DE HUELVA

TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ALUMNADO CON ASPERGER

8 Y 9 DE JULIO DE 2021. 10-13 h

AULA 6.1

FACULTAD DE PSICOLOGÍA EDUCACIÓN Y CIENCIAS DEL DEPORTE

Durante las mañanas de 8 y 9 de julio tendrá lugar un taller de resolución de problemas matemáticos con niños y niñas de la asociación Onubense de Síndrome de Asperger (AOSA). En dos sesiones en las que participarán usuarios de edades comprendidas entre los 6 y 18 años, se trabajarán estrategias de resolución utilizando materiales y recursos manipulativos, individualizados y adaptados a sus características. El número de asistentes al taller se sitúa entre 3 y 8 personas, que dispondrán de su material individual y desinfectado.

Medidas generales:

- El **organizador** velará por que se cumplan las medidas sanitarias establecidas por la Universidad de Huelva en su “Plan de actuación frente al COVID 19” elaborado para el curso 2020/21. Para ello deberá nombrarse un responsable COVID de la actividad
- No podrán acudir al Acto público de defensa quienes:

Presenten síntomas compatibles con la COVID-19

https://www.mscbs.gob.es/profesionales/saludPublica/ccayes/alertasActual/nCov/documentos/20200325_Decalogo_como_actuar_COVID19.pdf

Estén en aislamiento domiciliario por tener diagnóstico o síntomas compatibles con COVID-19.

Se encuentren en período de cuarentena por haber tenido contacto con alguna persona con síntomas o diagnosticada de COVID-19

https://www.mscbs.gob.es/profesionales/saludPublica/ccayes/alertasActual/nCov/documentos/Que_es_la_Cuarentena.pdf

- Uso obligatorio de la mascarilla para todas las personas que accedan a la UHU y en todos los espacios de la Universidad de Huelva, durante la permanencia en la misma, siguiendo las recomendaciones de la autoridad sanitaria y la normativa vigente

en la Comunidad Autónoma.

- **Garantizar** que las entradas y salidas serán ordenadas y con una distancia interpersonal de al menos 1,5 metros, respetando la señalética instalada con este fin en las puertas de los espacios a utilizar.
- Los usuarios y usuarias contarán con dispensadores de gel hidroalcohólico a su disposición, contando con los ya disponibles en los edificios del Campus y los que facilitará el organizador de forma específica para cada evento.
- Se notificará con suficiente antelación a los responsables de coordinación del Campus de las fechas y horas de los eventos para la correcta limpieza y ventilación de los espacios.

Público asistente a los eventos:

- Se recomendará al alumnado llegar con la antelación suficiente en función del
número de asistentes al evento o actividad, para evitar aglomeraciones.
- El **organizador** asignará un asiento numerado a cada asistente.
- Siguiendo las recomendaciones sanitarias se recogerán en una base de datos: nombre, apellidos, DNI y teléfono de contacto del tutor de cada alumno/a, así como el número de asiento que ocupe el alumno/a durante la actividad
- **Garantizar** que el alumnado ocupará el asiento asignado y seguirá las indicaciones del **organizador** en el acceso y salida de los recintos, que se hará de forma ordenada y escalonada.
- Tanto al principio como al final del taller se indicará la forma de evacuar para poder mantener las distancias de seguridad. El alumnado deberá esperar en sus asientos las instrucciones para ello por parte del organizador o sus asistentes.
- En cualquier momento durante el taller si alguna persona tuviese que desplazarse desde su asiento, se realizará manteniendo las distancias mínimas de seguridad y siguiendo las indicaciones que las docentes haya dispuesto.

Aforos:

- La Universidad de Huelva ha reconfigurado los aforos de los espacios donde vana tener lugar las actividades para adaptarlos de

la mejor manera posible a las exigencias establecidas por las autoridades competentes. El aforo se limita al 50 % de la capacidad total, para crear un espacio seguro donde cada asistente guarde siempre la distancia de un metro y medio con el resto, de manera que el aula 6.2 donde tiene lugar el taller cumple con el protocolo.

- Como se ha dicho anteriormente, los aforos serán siempre numerados con asiento preasignado, inhabilitando las butacas que no se ocupen y asegurando que no se superará en ningún caso más del aforo permitido.
- En cumplimiento de la legislación vigente, se instalará en la puerta de la sala un cartel informativo con el aforo total disponible para el evento.

Huelva a junio de 2021

Anexo 2.2.: Consentimiento de participación y grabación del taller cero



CONSENTIMIENTO DE USO DE IMÁGENES PARA MENORES Y PARA LA REALIZACIÓN DE UN TALLER DIDÁCTICO

Dado que el derecho a la propia imagen está reconocido en el artículo 18 de la Constitución y regulado por la Ley 1/1982, de 5 de mayo, sobre el derecho al honor, a la intimidad personal y familiar y a la propia imagen, la Ley 15/1999, de 13 de Diciembre, sobre la Protección de Datos de Carácter Personal y el Reglamento europeo de protección de datos 679/2016 de 27 de Abril, la dirección de este Centro pide el consentimiento a los/las padres/madres o tutores legales para poder participar y tomar imágenes en las cuales aparezcan individualmente o en grupo los niños y niñas que participen en las diferentes actividades propuestas en la sesión formativa que realiza la ASOCIACIÓN AOSA EN COLABORACIÓN CON LA UNIVERSIDAD DE HUELVA, en el CONTEXTO DE LA TESIS DOCTORAL "Formación del profesorado para la enseñanza de la resolución de problemas a alumnos con síndrome de Asperger" elaborada por la doctoranda Ángeles Chico Gómez y dirigida por la profesora Dra. Nuria Climent Rodríguez e Inmaculada Gómez Hurtado, DE LA UNIVERSIDAD DE HUELVA, los días 8 y 9 de Julio de 2021.

Esta actividad consiste en la realización de un taller didáctico sobre resolución de problemas en un aula de la Facultad de Educación de la Universidad de Huelva, siendo realizada por la doctoranda y sus directoras. Esta participación será con fines exclusivamente formativos, asegurando la total privacidad del menor.

Don/Doña

Con DNI..... como padre/madre o tutor del niño/a

.....

- ☐ SÍ DOY MI CONSENTIMIENTO
☐ NO DOY MI CONSENTIMIENTO

Para que la ASOCIACIÓN AOSA, realice el taller didáctico y pueda utilizar imágenes/grabaciones de mi hijo/a exclusivamente para la formación en el contexto de la tesis doctoral especificada de la Universidad de Huelva.

Huelva, a de.....de 20.....

Firma:

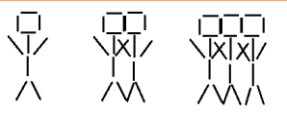
Anexo 3: Propuesta inicial del taller cero

El problema de los saludos		15 MIN.
PROBLEMA: A una fiesta asisten 5 personas. A medida que llegan, se van saludando. ¿Cuántos “choques de codos” hubo?		
Objetivos	<i>Representar y organizar los datos del enunciado del problema de manera visual mediante una pizarra organizador gráfico, simplificando la situación</i> <i>Mejorar la comprensión mediante el uso de organizadores de datos y tablas.</i> <i>Distinguir las diferentes situaciones que se producen, espaciando en el tiempo cada una de ellas</i> <i>Encontrar el patrón que marca la relación entre el número de personas y los saludos.</i> <i>Utilizar el geoplano para representar una situación numérica</i>	<i>Estrategias heurísticas: buscar un patrón y representar</i> <i>Los números naturales</i> <i>Operaciones aritméticas aditivas y multiplicativas</i>
DESARROLLO	Fase 1: comprensión. Leemos el problema y dejamos un tiempo para que se comprenda. Estrategias de comprensión: Representación gráfica de la situación. Fase 2: Pensar un plan: Utilizar lápices de colores para unir a cada personaje mediante flechas, que permitan desglosar lo sucedido partiendo de lo que hace cada persona. El uso de flechas de colores facilita comprender que los saludos son recíprocos, de manera que aunque de primeras la persona A saluda a 4, el número de “choque de codos” va disminuyendo si nos fijamos en el resto de invitados. De igual manera, la clave está en que cada uno saluda a todos menos a sí mismo. Una alternativa es usar un geoplano donde situamos a las 5 personas, de manera que las gomillas o cuerdas posibilitan representar los saludos. Fase 3: Ejecución: contamos las gomillas o trazos diferentes. Fase 4: Comprobamos. <i>Extra:</i> ir añadiendo invitados. ¿Y si fueran 6? ¿Y 7? Se pretende que se extienda la representación con el fin de encontrar la relación entre el número de asistentes y los saludos que tienen lugar, con el fin de llegar a un patrón.	
COMPETENCIAS	COMPETENCIAS PISA	ESTRATEGIAS
Competencia Lingüística	Pensar y razonar.	Representación gráfica, geoplano, tabla de datos.

Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor	Argumentar.	MATERIALES
Competencia aprender a aprender	Comunicar.	Pizarras veleda/magnéticas
Competencia matemática	Modelar.	Geoplanos y gomillas de colores
	Plantear y resolver problemas.	Rotuladores de colores
	Representar.	Etiquetas/imanes que representan a los asistentes.
	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.	

El problema de Lola		15 MIN.
PROBLEMA: La tía de Lola fue de visita a casa de su hermano y le entregó 18 € a cada uno de sus sobrinos. Como Lola debía dinero a sus hermanos, repartió su paga entre ellos, los cuales se quedaron con 22 € cada uno, excepto el mayor, que tenía 24. ¿Cuántos sobrinos son? ¿Cuántos hermanos tenía Lola?		
Objetivos	Representar y organizar los datos del enunciado del problema de manera visual mediante una pizarra organizador gráfico, simplificando la situación Mejorar la comprensión mediante el uso de organizadores de datos y tablas. Distinguir la situación de recepción del dinero a la del reparto, estableciendo dos puntos clave para cada personaje del problema Utilizar la recta numérica para representar la relación entre los números. Uso de materiales manipulativos como las regletas o el numicon para dar valor real y tangible a los datos del problema.	Estrategias heurísticas: submeta y representar Los números naturales Operaciones aritméticas aditivas y multiplicativas Desarrollo del sentido numérico
DESARROLLO	Fase 1: Comprensión. Leemos el problema y dejamos un tiempo para que se comprenda. Lola es quien reparte su paga. Es importante llegar a la idea de que todos reciben 18, pero que ella se queda sin dinero al repartir todo lo que le ha dado su tía al resto. Podemos simular una situación representativa en dos pasos: la que la tía le da 18 euros a Lola y sus hermanos; seguidamente describir que esos 18 se convierten en 22, 24 y cero. La pregunta es, para quedarse a cero, ¿a cuántos hermanos le ha dado dinero Lola? Fase 2: Pensar un plan: Debemos descubrir el paso de 18 a 22, a 24 y a 0. ¿Cuánto ha ganado y perdido cada uno? El total de lo que hayan ganado es lo que Lola les ha dado. Para ello podemos representar los números mediante una recta numérica que refleje el aumento de 18 a 22 y 24 y la disminución de Lola. Otra posibilidad es hacerlo con regletas de Cuisenaire/Montessori o el Numicon, en función de la capacidad de abstracción del alumnado. Fase 3: Ejecución: Al basarnos en la representación de la descomposición, podemos agrupar lo que obtiene extra cada hermano y el mayor (4 y 6 euros respectivamente), comparándolo con el dinero que recibe Lola de su tía. $18 - 6 = 12$ euros le quedan a Lola después de pagarle a su hermano mayor. Resta reiterada a 12 para ver cuántos hermanos pueden recibir 4 euros → 3 hermanos En total son 5 hermanos contando a Lola. Fase 4: Comprobamos.	

COMPETENCIAS	COMPETENCIAS PISA	ESTRATEGIAS: Organizador gráfico: Qué había y qué paso. representación mediante rectas numéricas
Linguística	Pensar y razonar.	MATERIALES
Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor	Argumentar.	Pizarras veleda/magnéticas
Aprender a aprender	Comunicar.	Regletas de Montessori/ Cuisenaire
Matemática	Modelar.	Numicon
	Plantear y resolver problemas.	Etiquetas con personajes
	Representar.	Rotuladores de colores.
	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones	

El problema de los muñecos		15 MIN.
PROBLEMA Estas personas están hechas de palillos que son todos iguales. ¿Cuántos palillos serán necesarios para construir 7 personas? ¿Y 100 personas?		
		
Objetivos	- Representar y organizar los datos del enunciado del problema de manera visual mediante una pizarra organizador gráfico para simplificar la situación - Mejorar la comprensión mediante el uso de organizadores de datos y tablas. - Encontrar el patrón que marca la relación entre el número de personas y los palillos. - Encontrar la relación entre el número de personas y los palillos con y sin representación de las mismas	Contenidos - Estrategias heurísticas: búsqueda de un patrón y representar - Desarrollo del sentido numérico
DESARROLLO	Fase 1: comprensión. Leemos el problema y dejamos un tiempo para que se comprenda. Solamente nos centramos en la primera pregunta. La segunda no se realiza hasta haber completado la resolución. Para comprender el problema podemos dibujar los muñecos utilizando palillos. Con esta acción pretendemos que comprendan el proceso que se sigue al añadir palillos. Se puede llegar al resultado de dos maneras: Representando los 7 muñecos y contando o viendo la relación entre el número de muñecos y de palillos necesarios para construirlos. El objetivo es llegar a esta última estrategia, para lo que podemos plantear la cuestión de intentar adivinar el número de palillos sin necesidad de construir la representación. Fase 2: Pensar un plan: Si averiguamos cuántos palillos compone cada grupo de muñecos, podremos intentar saber cuántos serían los 7 muñecos. Contamos y apuntamos los datos en un organizador, donde se refleja el número de muñecos, su representación, los palillos que necesito.	

Dibujo	Número de muñecos 	Número de palillos 
	1	11
	2	20
	3	29

¿Cómo pasamos de 11 a 20? ¿Y de 20 a 29? Con cada muñeco se añaden 9 palillos, menos el primero, que son 11. Se dibujará esta idea, añadiendo a cada muñeco su etiqueta con el número que se añade.

Fase 3: Ejecución: Podemos representar la secuencia de muñecos, detallando el proceso: $11+9+9+9+9+9+9$... Contamos así que si son 7 serían $6 \cdot 9 + 11$.
¿Y 100?

Fase 4: Comprobamos, pudiendo representar los 7 muñecos.

COMPETENCIAS

Competencia Lingüística
Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor
Competencia aprender a aprender
Competencia matemática

COMPETENCIAS PISA

Pensar y razonar.
Argumentar.
Comunicar.
Modelar.
Plantear y resolver problemas.
Representar.
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

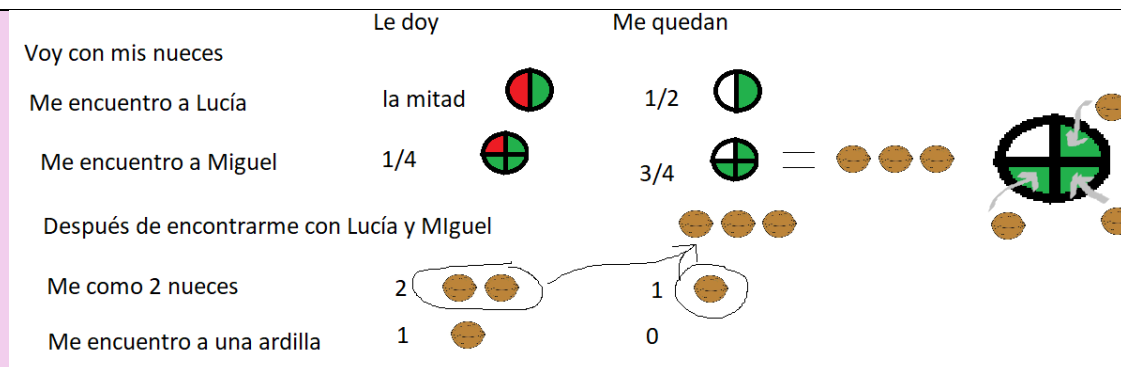
ESTRATEGIAS

Organizador gráfico, uso de tablas, buscar un patrón

MATERIALES

Pizarras verde/magnéticas
Rotuladores de colores.
Palillos de dientes
Etiquetas con números magnéticos
Personas magnéticas

El problema de las nueces		15 MIN.
PROBLEMA: Pablo sale de casa con el bolsillo lleno de nueces. Al encontrarse a Lucía le da la mitad. Después se encuentra con Miguel, al que le da la cuarta parte de lo que le queda. En el camino de vuelta se come dos de las nueces restantes y le da la última que le quedaba a una ardilla. ¿Cuántas nueces tenía al principio?		
Objetivos	- Representar y organizar los datos del enunciado del problema de manera visual mediante una pizarra organizador gráfico, simplificando la situación - Mejorar la comprensión mediante el uso de organizadores de datos y tablas. - Distinguir los cambios en el número de nueces de acuerdo a los encuentros de Pablo - Utilizar la tabla y material manipulativo para comprender los datos y los significados de los números fraccionarios - Uso de materiales manipulativos como los pictogramas para dar valor real y tangible a los datos del problema.	Contenidos - Estrategias heurísticas: marcha atrás y representar - Los números naturales y racionales - Operaciones aritméticas aditivas y multiplicativas - Significado de la fracción como parte de un todo
DESARROLLO	Fase 1: comprensión. Leemos el problema y dejamos un tiempo para que se comprenda. Utilizamos pictogramas de nueces para representar el proceso de reparto. Deben así surgir cuestiones relacionadas con el significado de las fracciones, abordados mediante el uso de representaciones gráficas (quesitos o porciones de colores). El uso de etiquetas en la pizarra magnética permitirá también plantear el problema en escenas como si de una historia se tratara, indicando qué pasó en cada momento con las nueces que llevaba el protagonista. Fase 2: Pensar un plan: Una vez dispuestas las escenas, la mayor pista que tenemos es que el protagonista se come una nuez, dándole otra a una ardilla. Es decir, si empezamos desde el final obtenemos el dato de que tenía 3 justo antes de que pasara esto. La clave está en relacionar esas dos nueces con su origen, es decir, con los $\frac{3}{4}$ restantes del encuentro con Miguel. Fase 3: Ejecución: Una vez detectada la relación entre las fracciones y el número de nueces, se trataría de asignar los pictogramas de las nueces a la representación de las fracciones, mostrando así en los “quesitos” que si después de encontrarse a Miguel le quedan 3, esas 3 son los $\frac{3}{4}$ que le quedan y por ende, le ha dado a Miguel 1 nuez.	



Fase 4: Comprobamos, contando de nuevo la historia ya con los datos obtenidos.

COMPETENCIAS

Lingüística
Sentido de la
iniciativa y espíritu
emprendedor
Aprender a
aprender
Matemática

COMPETENCIAS PISA

Pensar y razonar.
Argumentar.
Comunicar.
Modelar.
Plantear y resolver problemas.
Representar.
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las
operaciones

ESTRATEGIAS

ESTRATEGIAS: Organizador gráfico: Qué había y qué paso.
Representación gráfica de fracciones, marcha atrás

MATERIALES

Pizarras verde/magnéticas
Etiquetas con personajes
Pictogramas magnéticos
Rotuladores de colores.

El problema de Álvaro y Nico		15 MIN.
PROBLEMA: Álvaro tiene 19 años más que su gato Nico. Entre los dos suman 37 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?		
Objetivos	- Representar y organizar los datos del enunciado del problema de manera visual mediante una pizarra organizador gráfico, simplificando la situación - Mejorar la comprensión mediante el uso de organizadores de datos y tablas - Mejorar la comprensión mediante el uso de organizadores de datos y tablas. - Representar las dos claves que nos aporta el problema de manera independiente - Utilizar las regletas para representar una situación numérica	Contenidos - Estrategias heurísticas: submeta y representar - Los números naturales - Operaciones aritméticas aditivas
DESARROLLO	Fase 1: comprensión. Leemos el problema y dejamos un tiempo para que se comprenda. Utilizamos pictogramas para representar las distintas relaciones que se manifiestan en el problema, utilizando a Álvaro y su gato ($\text{Álvaro} + 19 = \text{Nico}$; $\text{Nico} + \text{Álvaro} = 37$). La representación puede llevarse a cabo mediante el símbolo numérico o bien ayudándonos de las regletas de Montessori, en función de las necesidades cognitivas del alumnado. Fase 2: Pensar un plan: La representación con las regletas puede ayudar a vislumbrar esa relación entre los protagonistas. Es necesario representar esa conexión en una recta, que facilite aplicando la visualización espacial entre los números del problema. En esos 37 años que suman están las edades de Nico y Álvaro, así como sabemos que la distancia entre uno y otro es 19. Estas ideas se desarrollarían en dos pasos. El diagrama muestra una recta horizontal con una flecha en la punta derecha. El punto de partida está etiquetado como '0' y el punto de llegada como '37'. Un segmento de la recta, desde 0 hasta 19, está coloreado en rojo y etiquetado como 'Nico' en rojo. El resto de la recta, desde 19 hasta 37, está coloreado en azul y etiquetado como 'Álvaro' en azul. Debajo de esta recta, se repite el segmento rojo de longitud 19, etiquetado como 'Nico'. Fase 3: Ejecución: Una vez representada la recta es sencillo ver y calcular la edad de cada uno, aplicando cálculos aritméticos de sustracción.	

Fase 4: Comprobación		
COMPETENCIAS	COMPETENCIAS PISA	ESTRATEGIAS
Competencia Lingüística	Pensar y razonar.	Representación gráfica, recta numérica, resolución en
Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor	Argumentar.	estadíos, uso de un diagrama
Competencia aprender a aprender	Comunicar.	MATERIALES
Competencia matemática	Modelar.	Pizarras veleda/magnéticas
	Plantear y resolver problemas.	Rotuladores de colores
	Representar.	Etiquetas/imanes con personajes
	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.	Regletas Montessori/Cuisenaire

Anexo 4: Autorización de las familias para la participación en el taller semestral

Facultad de Educación

Nuria Climent

Universidad de Huelva

Inmaculada Gómez

Ángeles Chico

Estimados padres y madres:

Desde la Universidad de Huelva y en colaboración con AOSA estamos desarrollando unos talleres de resolución de problemas matemáticos como parte de la investigación de una tesis doctoral, dirigidos a ahondar en las estrategias y técnicas de aprendizaje que favorecen el desarrollo de los niños y niñas con síndrome de Asperger. A través de talleres pretendemos investigar cuáles de ellas mejoran la comprensión de los problemas, la organización de los datos y el proceso de resolución. El objetivo final es llevar las estrategias seleccionadas a la formación de maestros/as en los centros educativos, para poder abordar una enseñanza inclusiva de las matemáticas.

Nuestro foco se sitúa así en valorar la aplicación de estas técnicas, en ningún caso evaluando a los niños y niñas que las emplean en los talleres. Se entiende que los talleres pueden generar una mejora en la habilidad de resolver problemas, pero esta puede o no apreciarse al estar prevista como un producto de la enseñanza a largo plazo.

Los talleres de una hora se desarrollarán cada dos semanas durante 5 meses trabajando distintas estrategias en resolución de problemas. Al comprometerse con el proyecto se acepta:

- La grabación en vídeo y audio de las sesiones, que tendrán fines únicamente académicos.
- La asistencia periódica a las mismas, dos veces al mes.

Firma del padre/madre/tutor

.....

Anexo 5: Autorización de consulta de informes

Facultad de Educación

Nuria Climent

Universidad de Huelva

Inmaculada Gómez

Ángeles Chico

Estimados padres y madres:

Como parte de la investigación llevada a cabo en el contexto de talleres de resolución de problemas desde la Universidad de Huelva y en colaboración con AOSA, se hace necesario recabar información de carácter psicopedagógico de los participantes. Es por ello que:

- Les pedimos que soliciten el informe psicopedagógico al centro escolar de su hijo, con el fin de establecer un nexo entre los distintos espacios educativos.
- Requerimos la autorización para acceder a este informe, así como a los informes neurológicos y psicológicos que serán proporcionados por AOSA.

Toda esta información seguirá un protocolo de privacidad y será únicamente empleada con fines académicos, con objetivo de mejorar el desarrollo de los talleres y aplicar una enseñanza más individualizadas y que aborden necesidades reales de los participantes.

Firma del padre/madre/tutor

.....

Anexo 6: Taller semestral

Anexo 6.1. SESIÓN DE INTRODUCCIÓN		DICIEMBRE
OBJETIVO: Introducir la dinámica del taller a los estudiantes y conocer algunas de sus características, habilidades e intereses. Iniciar la resolución de problemas incorporando la representación como estrategia principal.		Heurístico: Representación, ensayo y error, generalización
TAREA ¿Qué es lo que mejor sabes hacer? ¿Qué regalos has pedido por Navidad? ¿Qué vas a hacer estas Navidades?	PROBLEMA 1: Nueces y bombones <i>Versión 1</i> Para celebrar el fin del otoño en casa, Fran quiere repartir 36 nueces en cestas para sus amigos, para que todos tengan la misma cantidad. No sabe cuántas cestas va a tener que hacer porque algunos amigos no podrán ir a su casa. ¿De cuantas formas puede preparar las cestas con nueces <i>Versión 2</i> Fran decide repartir también 30 bombones. ¿Cómo puede organizar las cestas para que todos sus amigos tengan el mismo número de nueces y bombones?	PROBLEMA 2: El árbol de navidad Fran ha decidido decorar la casa con arbolitos de navidad a escala. Ha hecho varios tamaños, pero quiere crear algunos más grandes para que la casa quede más bonita. ¿Cuántas piezas necesitará para hacer un árbol de 7 piezas de alto?
Materiales Recursos para la organización: - Motivadores: Ficha de calcetín navideño	Materiales del Problema 1 Recursos para la resolución: - Pictogramas de bombones y nueces - Motivadores; Pompones de colores y cajas de diferentes colores donde introducir los pictogramas - Organizador tabular con columnas para dos y tres variables	Materiales del problema 2 Recursos para la resolución: - Material de construcción: Policubos - Organizadores: Tabla organizadora
Expectativas Las preguntas de la ficha pueden sentar	Expectativas del problema 1 Se presenta la versión 1 del problema. Tras su	Expectativas del problema 2 El problema implica la relación funcional



precedente para hablar de gustos e intereses con los estudiantes, con el fin de conocer sus focos de interés, habilidades y preferencias, y tenerlas en cuenta para el diseño de otros problemas del taller.

resolución, se aborda la versión 2, que es una extensión del problema cuyo objetivo es aumentar la complejidad, incluyendo la variable bombones.

La comprensión del problema puede ser uno de los principales obstáculos. Los estudiantes pueden abordar el problema iniciando una estrategia de tanteo o ensayo y error, que les dé una pista sobre la dinámica a seguir. El material manipulativo puede ayudar a organizar los datos y comprender la situación que plantea el problema y la tabla puede ayudar en el registro de la información.

La tabla organizadora incluye el suficiente espacio para poder abordar más preguntas en el caso de resolver rápidamente las preguntas.

$f(x)=(n-1)^2+1$. Aunque se pregunta por el árbol de altura 7, el problema puede extenderse preguntando por otras alturas, con objetivo de alcanzar la generalización a otros términos.

Se espera que los estudiantes representen el árbol como estrategia inicial para descubrir el patrón. La construcción con policubos del modelo dado puede arrojar algunas ideas sobre la regularidad inmersa en la figura del árbol. Pueden aparecer dificultades relacionadas con la predicción, la visualización de la figura en su globalidad o la memoria de trabajo al desarrollar sus estrategias de su resolución.

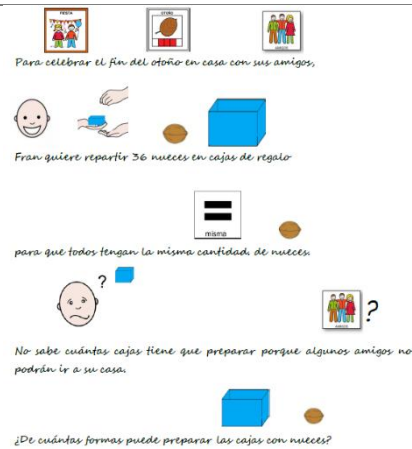
Ficha de calcetín



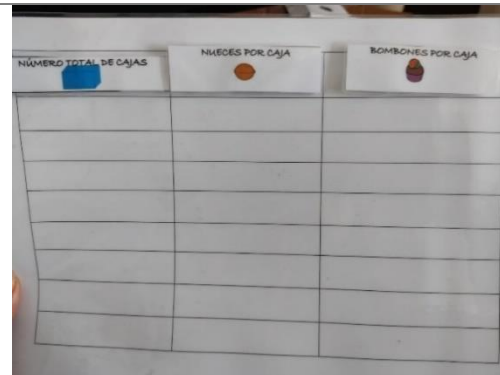
Pictogramas de nueces, bombones y cajas



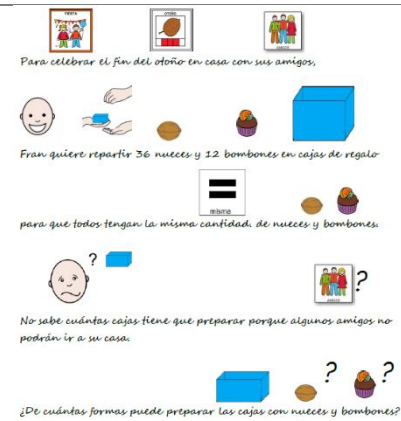
Versión 1 del Enunciado del Problema 1



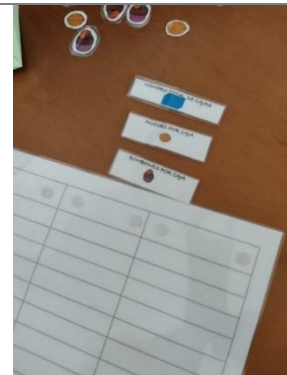
Organizador de tres variables



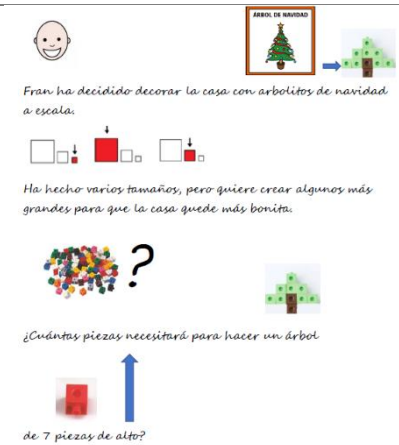
Versión 2 del Enunciado del Problema 1



Organizador y etiquetas con títulos



Enunciado del problema 2



Organizador de dos variables



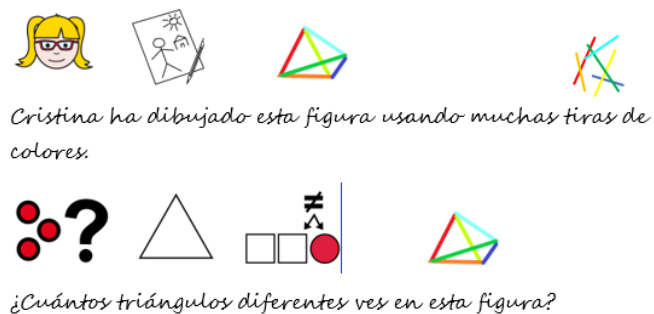
Anexo 6.2. SESIÓN DE EVALUACIÓN INICIAL		ENERO
OBJETIVO: La dinámica de la sesión se plantea desde la intervención progresiva. Es decir, tras una lectura conjunta, la docente intervendrá en la resolución según las necesidades del estudiante, evaluando así sus capacidades. Se pretenden Introducir diferentes materiales y formas de trabajar para evaluar las habilidades y dificultades de los estudiantes al resolver problema, como la capacidad de resolución del alumnado, la habilidad visual y la necesidad de representar el resultado. Se atiende también a las características asociadas al TEA que manifiesten como aquellas relacionadas con la función ejecutiva (e.g., orden, organización de la respuesta, predicción) o la coherencia central (e.g., comprensión del enunciado).		Heurístico: Representación, ensayo y error, generalización
PROBLEMA 1: El problema de los lápices Carlos tiene en su estuche 4 lápices verdes, 6 lápices azules y 8 rojos. Sin mirar, ¿cuántos lápices tiene que sacar Carlos del estuche para asegurarse de que coge dos iguales?	PROBLEMA 2: El problema de los triángulos Cristina ha dibujado una figura usando muchas tiras de colores. ¿Cuántos triángulos diferentes ves en esta figura? 	PROBLEMA 3: El problema de la bolsa mágica <i>Versión 1</i> Tengo una bolsa mágica con bombones. Cada vez que guiño el ojo, salen más. Al principio tenía 2, pero guiñé y conseguí 4. Luego guiñé y conseguí 8. Lo hice otra vez y encontré 16 bombones en la bolsa. ¿Cuántos tendré si guiño otra vez más? <i>Versión 2</i> Le he prestado la bolsa mágica a mi primo. Ha guiñado 4 veces y dice que tiene 64 bombones. ¿Cuántos metió al principio?
Materiales problema 1 Recursos para la organización: - Motivadores: Lápices de colores	Materiales del problema 2 Recursos para la resolución: - Material de construcción: Tiras de colores	Materiales del Problema 3 Recursos para la resolución: - Pictogramas de bombones - Organizador tabular Recursos para la organización: - Motivadores: Bolsa “mágica”
Expectativas del problema 1 Se les muestra el enunciado y se dejan	Expectativas del problema 2 Se les muestra el enunciado con el dibujo y se dejan	Expectativas del problema 3 Se les muestra el enunciado con el dibujo

algunos segundos para pensar. 1.Preguntar si se ha entendido y si se necesita lectura conjunta 2.Si se bloquea, ofrecer lápices para representar el problema/dibujar 3.Preguntas guiadas: ¿Qué puede pasar si saca 2? ¿Y tres? ... 4. Resolverlo juntos, modelando las situaciones de sacar lápices. Las posibles dificultades observables pueden estar relacionadas con el orden, organización de la respuesta, predicción, dificultades para mantener la atención en varios aspectos, así como la comprensión del enunciado	algunos segundos para pensar. 1.Preguntar si se ha entendido y si se necesita lectura conjunta 2.Si se bloquea, ofrecer tiras para representar el problema 3.Preguntas guiadas: ¿me enseñas algún triángulo? Y si los apuntas/ dibujas? 4. Ofrecer representarlos con colores	y se dejan algunos segundos para pensar. 1.Preguntar si se ha entendido y si se necesita lectura conjunta 2.Si se bloquea, ofrecer esquematizar la historia verbalmente, escrito o con material (en ese orden según el niño) 3.Preguntas guiadas: ¿Qué ha pasado al guiñar? Antes había 2 y luego 4. De 4 a 8...¿Qué magia se le hace a los bombones? 4. Ofrecer representar la historia y resolverlo juntos El problema implica la relación funcional $f(x) = 2^x$. La versión 2

Enunciado del problema 1



Enunciado del problema 2



Versión 1 del enunciado del problema 3



Versión 2 del enunciado del problema 3



Organizador tabular del problema 3

[illegible]

Pictogramas de bombones



Anexo 6.3. SESIÓN 1**PRIMERA QUINCENA DE FEBRERO**

OBJETIVO: Iniciar las sesiones de desarrollo del taller con contextos y temáticas llamativas, poniendo en práctica el uso del organizador tabular con problemas con valores numéricos sencillos, que mejoren la autoestima de los estudiantes respecto al cálculo. Se intervendrá con objetivo de guiar en el uso de los materiales y el desarrollo de estrategias.

Heurístico: Representación, ensayo y error y establecimiento de submetas

PROBLEMA 1: El problema de Mario Party

Al caer en la casilla de Bowser, este obliga a los jugadores a entregar todas sus estrellas que habían conseguido, volviéndolas a repartir como él quiere.

Versión 1

Bowser roba y reparte 5 estrellas en total. Mario tiene el triple de estrellas después de encontrar a Bowser y Luigi ahora va ganando. ¿Cuántas estrellas tenían antes cada uno?

Versión 2

Bowser roba y reparte 5 estrellas en total. Mario tenía el triple de estrellas antes de encontrar a Bowser y Luigi ahora va ganando. ¿Cuántas estrellas tenían antes cada uno?

Versión 3

Bowser ha robado y repartido 5 estrellas. Yoshi tiene 2 estrellas más que antes de encontrarse a Bowser. Wario se queda sin ninguna. ¿Cuántas estrellas tienen ahora?

Versión 4

Bowser robó y repartió 6 estrellas. Toad y la Princesa Peach intercambian su número de estrellas, mientras que Waluigi, que iba ganando, se queda con las mismas. ¿Cuántas estrellas tienen en total cada uno?

Materiales problema 1

Recursos para la resolución:

- Pictogramas de los personajes del *Mario Party*
- Organizador tabular velcroado

PROBLEMA 2: El problema de Sonic*Versión 1*

Sonic duplica su velocidad en cada minuto. Si recorre un camino en 4 minutos.

¿Cuánto tarda en recorrer la mitad del camino?

Versión 2

Shadow es capaz de cuadruplicar su velocidad en cada minuto.

Si recorre un camino en 6 minutos...

¿cuánto tarda en recorrer la mitad del camino?

Materiales problema 2

Recursos para la resolución:

- Material de construcción: policubos
- Organizador: tabla organizadora

Expectativas del problema 1

Las diferentes versiones se irán introduciendo en función de cómo desarrollen sus estrategias y las dificultades que manifiesten, dado que, aunque el enunciado no incluye cifras elevadas, se requiere de habilidades como la atención sostenida, memoria de trabajo y la capacidad para autorregular el resultado. La versión 1 no tiene solución, con objetivo de observar las respuestas de los estudiantes cuando el problema es irresoluble.

La versión 1 se lee de manera conjunta, para concretar entre todos el contexto. La resolución se aborda de manera individual, aunque con cierta flexibilidad si se quisieran compartir ideas durante esta etapa. Si se observan diferentes ritmos, se proporcionan las versiones 2, 3 y 4.

La temática puede ser un factor de motivación para los estudiantes.

Puede ser resuelto por ensayo y error, más o menos sistemático, y apoyado en la representación con los pictogramas sobre la tabla.

Expectativas del problema 2

Se inicia con la versión 1, que se lee en conjunto. La resolución sigue la misma dinámica que en el problema 1. Una vez resuelto, se aborda la versión 2, que es una transformación de la primera versión modificando los datos, de manera que extiende la resolución introduciendo con otro personaje.

El problema puede ser resuelto mediante representación y establecimiento de submetas. El tiempo es un concepto abstracto, y puede causar dificultades de comprensión. Los policubos pretenden convertirse en herramientas para representarlo de manera más concreta.

Versión 1 del enunciado del problema 1

Al caer en la casilla de Bowser, este obliga a los jugadores a entregar todas sus estrellas que habían conseguido, volviéndolas a repartir como él quiere.

Bowser roba y reparte 5 estrellas en total

Mario tiene el triple de estrellas después de encontrar a Bowser

y Luigi ahora va ganando.

¿Cuántas estrellas tenían antes cada uno?

Versión 2 del enunciado del problema 1

Mario tenía el triple de estrellas antes de encontrar a Bowser

y Luigi ahora va ganando.

¿Cuántas estrellas tenían antes cada uno?

Versión 3 del enunciado del problema 1

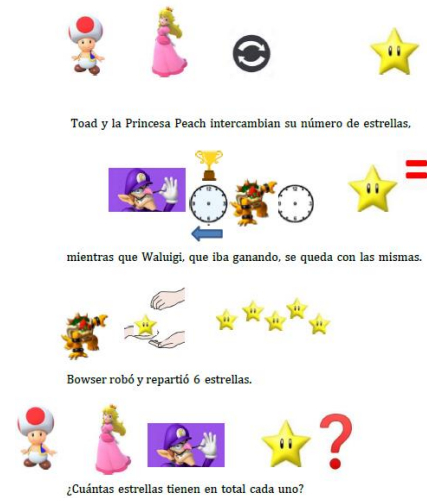
Yoshi tiene 2 estrellas más que antes de encontrarse a Bowser

Wario se queda sin ninguna.

Bowser ha robado y repartido 5 estrellas.

¿Cuántas estrellas tienen ahora?

Versión 4 del enunciado del problema 1



Versión 1 del enunciado del problema 2



Versión 2 del enunciado del problema 2



Organizador gráfico tabular del problema 1



Pictogramas de personajes del Mario Party y estrellas



Anexo 6.4. SESIÓN 2

SEGUNDA QUINCENA DE FEBRERO

OBJETIVO: Reestructurar la organización de la sesión del taller, introduciendo el planificador y los juegos de mesa. Continuar la resolución de problemas combinando el uso de distintos materiales.

Heurístico: Representación y generalización

PROBLEMA 1

Para abrir la caja fuerte, necesitamos encontrar 3 números. Sabemos algunas pistas:

- Son tres dígitos diferentes e impares.
- Uno de ellos es el 5 Entre todos suman 15.
- Están ordenados de mayor a menor.

¿Cuál es la combinación para abrir la caja fuerte?

PROBLEMA 2

Para averiguar a qué hora has de comenzar la misión debes descifrar estos relojes. ¿Qué hora es en el reloj sin manecillas?



Materiales problema 1

Recursos para la resolución:

- Números de madera manipulativos

Recursos para la organización:

- Motivadores: carpeta de espías, caja fuerte, candado

Materiales transversales

Recursos para la organización:

- Planificador de la sesión
- Juego de mesa: Juego de palabra tabú con tarjetas con pictogramas

Materiales problema 2

Recursos para la resolución:

- Organizador: tabla organizadora

Recursos para la organización:

- Motivadores: relojes/dibujo de un reloj

Expectativas del problema 1

El problema se introduce como una misión de espías. El objetivo es que todos los estudiantes alcancen el resultado de este problema, para poder, entre todos, abrir la caja fuerte con el número descubierto. Tras una lectura conjunta, la resolución tendrá una parte individual y una común, para poder observar las estrategias de cada participante.

Aunque los números involucrados en este problema son sencillos, el descubrimiento del número secreto involucra seguir una serie de pistas. Puede haber limitaciones en la resolución derivadas de dificultades para seguir un orden y atender a todas las pistas del enunciado.

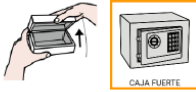
Expectativas del problema 2

El problema se extrae del interior de la caja fuerte, donde habrá una copia para cada estudiante. La lectura conjunta dará paso a la resolución individual.

El problema implica la relación funcional $f(x) = n(70 + 5n)$. Integra el tiempo como contenido principal, lo que puede ocasionar una dificultad por su carácter abstracto, más allá de descubrir el patrón inmerso en el dibujo de los relojes.

Se puede recurrir a dibujos u objetos (relojes) para representar el paso del tiempo. El organizador se proporciona con los títulos en blanco, con objetivo de propiciar que el estudiante se plantee las variables y registre lo que va descubriendo.

Enunciado del problema 1



Para abrir la caja fuerte, necesitamos encontrar 3 números.

Sabemos algunas pistas:



- Son tres dígitos diferentes e impares.
- Uno de ellos es el 5 Entre todos suman 15.
- Están ordenados de mayor a menor.

¿Cuál es la combinación para abrir la caja fuerte?

Enunciado del problema 2

Para averiguar a qué hora has de comenzar la misión debes descifrar estos relojes.

¿Qué hora es en el reloj sin manecillas?



Caja fuerte, carpeta de espías y números de madera



Organizador tabular de dos variables

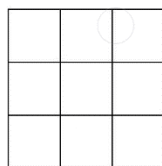
OBJETIVO: Emplear otros materiales distintos al organizador gráfico que faciliten fomentar el orden. **Heurístico:** Representación y búsqueda de regularidades

PROBLEMA 1: El problema de la telaraña

Versión 1

¿Cuántos cuadrados hay en la telaraña de *Spiderman*?

¿Podrías hacer una telaraña con 15 cuadrados



Versión 2

¿Cuántos triángulos hay en la telaraña de *Spiderman*?

¿Podrías hacer una telaraña con 15 triángulos



PROBLEMA 2: El problema de los saludos

Los vengadores celebran una reunión secreta. Cuando llegan, se van saludando. Sabiendo que asisten Thor, Ojo de Halcón y el Capitán América, ¿cuántos saludos hay en total en la reunión?

- Tras acabar una misión, se incorporan Viuda Negra y Iron Man. ¿Cuántos saludos se han dado todos los Vengadores?

Materiales problema 1

Recursos para la resolución:

- Materiales de construcción: Geoplano y gomillas

Materiales transversales

Recursos para la organización:

- Planificador de la sesión
- Juego de mesa

Materiales problema 2

Recursos para la resolución:

- Materiales de construcción: lámina de corcho, gomillas y chinchetas con los vengadores.

Recursos para la organización:

- Motivadores: Máscaras de los vengadores

Expectativas del problema 1

Se plantean dos versiones, con telarañas de forma cuadrada o triangular. La forma cuadrada se plantea en primer lugar, considerando que la representación de la telaraña tiene menor demanda cognitiva, dado el menor número de cuadrados y las características más sencillas y visuales de este polígono.

Pueden utilizar el geoplano para recrearlo o marcar con un lápiz de color encima del dibujo.

La segunda pregunta del problema pretende fomentar la visualización y que

Expectativas del problema 2

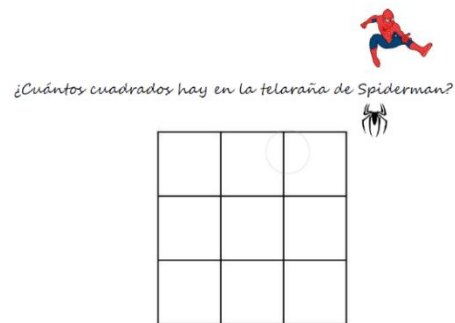
El objetivo es que los estudiantes descubran las relaciones entre el número de personas y el número de saludos, siguiendo la relación $f(x) = n(n-1)/2$.

Progresivamente aparecen más personajes con la versión 2, que pretenden aumentar la complejidad del problema.

Partiendo de la dramatización, se pretende llegar a la representación, que posibilite descubrir la regularidad y generalizar

descubran que, al añadir dos depresores o más gomillas en el geoplano, no aumenta en uno, sino que afecta a los triángulos medianos. Se espera que se fijen solamente en los cuadrados y triángulos de menor tamaño, respectivamente.

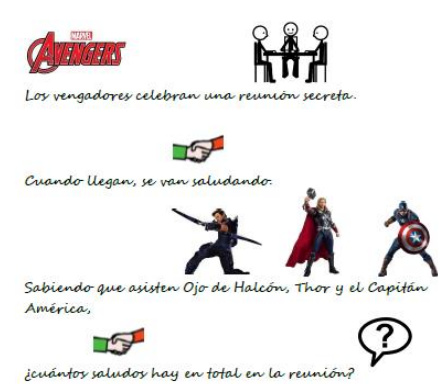
Versión 1 del enunciado del problema 1



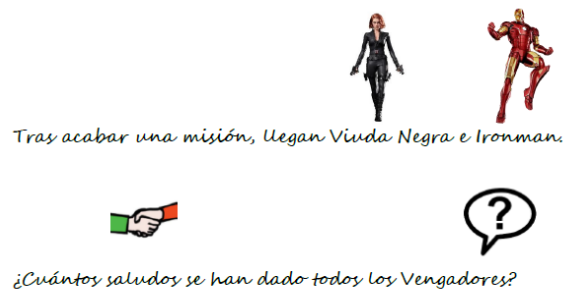
Versión 2 del enunciado del problema 1



Versión 1 del enunciado del problema 2



Versión 2 del enunciado del problema 2



Máscaras de Vengadores



Corcho con chinchetas de Vengadores y gomillas



OBJETIVO: Usar la representación para trabajar el ensayo y error y la generalización. La meta es que los estudiantes desglosen el enunciado y partan de sus propias hipótesis. Tras la lectura inicial y la resolución individual, una fase de discusión ha de integrar las diferentes estrategias y puntos de vista. Los enunciados se diseñan con elementos visuales que representan aspectos clave del problema, introduciendo ejemplos e imágenes y menos pictogramas de ARAASAC.

Heurísticos: Representación, ensayo y error, generalización.

PROBLEMA 1: El problema de *Star Wars*

Los guerreros Jedi utilizan espadas laser para vencer al lado oscuro. Los maestros pueden utilizar dos espadas a la vez, pero los aprendices solo una. En total hay 14 espadas laser y 11 Jedis. ¿Cuántos maestros y aprendices hay?

PROBLEMA 2: El problema de la arqueóloga

Una arqueóloga necesita limpiar las figuras de los dinosaurios que se exponen en el museo. No tiene una escalera, pero ha encontrado cajones de madera del mismo tamaño que puede apilar para subir. Cada cajón mide 1 metro de altura.



Los coloca así:

¿Cuántos cajones necesita para alcanzar la altura del Velociraptor (2 m)? ¿Y al Estegosaurio? (4 m)? ¿Y al Gigantoraptor? (8 m) ¿Y al T-rex (10 m)?

Materiales problema 1

Recursos para la resolución:

- Pictogramas con monigotes y pictogramas con espadas laser

Materiales transversales

Recursos para la organización:

- Planificador de la sesión
- Juego de mesa

Materiales problema 2

Recursos para la resolución:

- Materiales de construcción: piezas de goma Eva cuadradas
- Pictogramas de escaleras
- Organizador gráfico en formato tabular, con velcros.

Expectativas del problema 1

Este problema se diseña como transformación del problema de la granja (taller cero), adaptando el contexto a los centros de interés de los participantes.

Expectativas del problema 2

El problema plantea dos variables, altura y cajones, y la relación funcional $f(x) = x(x+1)/2$. Las preguntas sobre los distintos dinosaurios han de plantearse a medida que el niño va resolviendo, aunque pueden incluirse

El dibujo y los pictogramas puede apoyar la estrategia de tanteo y ensayo y error. Las dificultades pueden presentarse respecto a la capacidad de retroceder en su hipótesis inicial, así como de convertir los pictogramas de monigotes en maestros Jedis o aprendices, dadas las dificultades de flexibilidad al plantear y modificar hipótesis.

Los materiales (monigotes con espadas) aparecen esquematizados en el enunciado, de manera que los estudiantes pueden observar y reproducir la representación de maestros y aprendices.

otros ejemplos, para extender la resolución del problema hasta alcanzar la generalización a términos no consecutivos. Será necesaria la incorporación preguntas guías que faciliten la visualización de los cajones y sus dimensiones, así como su influencia en el aumento de altura de la escalera. Se esperan distintos niveles en las hipótesis y estrategias de resolución, desde el simple conteo a la búsqueda de una regularidad más rigurosa y ordenada.

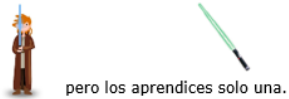
Se incluyen tres tipos de materiales para representar el modelo de la escalera construyendo con las piezas y representar los datos sobre el organizador. Los pictogramas se introducen para simplificar la tarea de dibujar o construir.

Enunciado del problema 1

Los guerreros Jedi utilizan espadas laser para vencer al lado oscuro.



Los maestros pueden utilizar dos espadas a la vez,



pero los aprendices solo una.



En total hay 14 espadas laser y 11 jedís.



¿Cuántos maestros y aprendices hay?

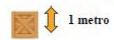


Enunciado del problema 1



Una arqueóloga necesita limpiar las figuras de los dinosaurios que se exponen en el museo.

No tiene una escalera, pero ha encontrado cajones de madera del mismo tamaño que puede apilar para subir.



1 metro

Cada cajón mide 1 metro de altura.

Los coloca así:



¿Cuántos cajones necesita para alcanzar la altura del velociraptor? (2 m)



¿Y al Estegosaurio? (4 m)?



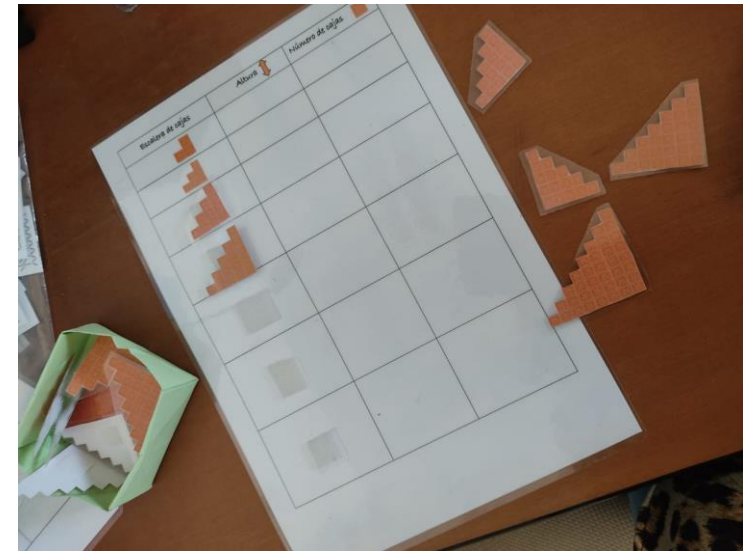
¿Y al Gigantoraptor? (8 m)



¿Y al T rex (10 m)?



Organizador gráfico velcrado y pictogramas de las escaleras

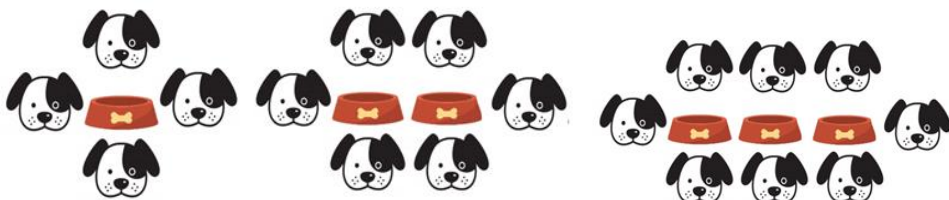


Pictogramas de monigotes y espadas láser



Piezas cuadradas de goma Eva



Anexo 6.7. SESIÓN 5		PRIMERA QUINCENA DE ABRIL
OBJETIVO: Estableciendo analogías con los problemas de la sesión 4, la meta sigue siendo usar la representación para trabajar el ensayo y error y la generalización, que estudiantes desglosen el enunciado y partan de sus propias hipótesis. Alcanzar la expresión verbal de la generalización.		Heurísticos: Representación, ensayo y error, generalización.
PROBLEMA 1: El problema de Spiderman Spiderman se desplaza por la ciudad lanzando telarañas. Para atrapar a los ladrones utiliza 4 telarañas y para ayudar a los ciudadanos emplea 2. Esta semana, ha cumplido 12 misiones en total (entre rescates y arrestos) y ha empleado 34 telarañas. ¿Cuántos ladrones ha atrapado? ¿A cuántos ciudadanos ha ayudado?	PROBLEMA 2: El problema de los cachorros Han llegado muchísimos cachorros a la protectora de animales. Para alimentarlos, los voluntarios han organizado los comederos para que quepan todos. A medida que van llegando los cachorros, colocan los comederos. ¿Cuántos comederos serán necesarios para 10 perritos? ¿Y para 26? ¿y 112? ¿Y 29?	
		
Materiales problema 1	Materiales transversales	Materiales problema 2
Recursos para la resolución: - Pictogramas de telarañas, ciudadanos y ladrones	Recursos para la organización: - Planificador de la sesión - Juego de mesa	Recursos para la resolución: - Pictogramas de cachorros y comederos - Organizador gráfico en formato tabular
Expectativas problema 1 Este problema plantea resolverse siguiendo la misma estrategia de ensayo y error que el problema de <i>Star Wars</i> (Sesión 4). Se pretende que sean capaces de extrapolarla al segundo problema. Tiene varias soluciones. Se puede llegar a investigar cuáles son o quedarnos en la inicial que encuentren. Para ello, podríamos discutir que cada 4	Expectativas del problema 2 Problema de generalización de un patrón apoyada en los números pares, que implica la relación funcional $f(x)=2+2x$. La observación del dibujo puede apoyar el descubrimiento de la regularidad. El uso de la tabla organizadora puede beneficiar el mantener la atención fija en la tarea.	

telarañas implican un ladrón o dos personas salvadas. Podrían usarse las telarañas manipulables (pictogramas) a modo de guía de la discusión o alguna otra representación.

La última pregunta hace referencia a un número impar, lo que pretende reorientar la respuesta hacia un número par de comederos, planteando la regularidad del patrón.

Enunciado del problema 1

 Spiderman se desplace por la ciudad lanzando telarañas.

 Para atrapar a los ladrones utiliza 4 telarañas

 y para ayudar a los ciudadanos emplea 2.

 Esta semana, ha cumplido 12 misiones en total (entre rescates y arrestos) y ha empleado 34 telarañas.

 ¿Cuántos ladrones ha atrapado?

 ¿A cuántos ciudadanos ha ayudado?

Enunciado del problema 2

 Han llegado muchísimos cachorros a la protectora de animales.

 Para alimentarlos, los voluntarios han organizado los comederos para que quepan todos.

A medida que van llegando los cachorros, colocan los comederos.



¿Cuántos comederos serán necesarios para 10 perritos?

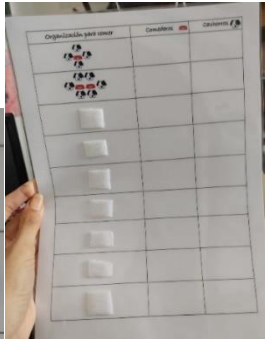
¿Y para 26?

¿y 112?

¿ y 29?

Organizador gráfico y pictogramas del problema 2





OBJETIVO: Desarrollar la estrategia apoyándose en el dibujo e introducir organizadores gráficos con formatos diferentes al tabular. Los materiales empleados pretenden representar la historia que plantean los problemas: establecer los pasos de una partida en la que se ganan y pierden estrellas en el problema 1 y ascender por un túnel en el problema 2.

PROBLEMA 1: El problema de las estrellas

Jugando al Mario Party, fui ganando y perdiendo estrellas
En las primeras rondas gané varias estrellas

Versión 1

Luego perdí 2.

En la casilla de Bowser tuve mucha suerte y gané 3.

Al final de la partida, tenía en total 5 estrellas.

¿Cuántas gané en las primeras rondas?

Versión 2

Luego perdí la mitad de las estrellas.

En la casilla de Bowser tuve mucha suerte y gané 2.

Al final de la partida conseguí 4 estrellas en total.

¿Cuántas gané en las primeras rondas?

Versión 3

Luego perdí 2 estrellas.

En la casilla de Bowser tuve mucha suerte y gané 2.

Al final de la partida conseguí 4 estrellas en total.

¿Cuántas gané en las primeras rondas?

PROBLEMA 2: El problema de Batman

Persiguiendo al Joker, Batman cae en una trampa: Un túnel de 50 metros hacia el subsuelo. Como es de arena, resbala mucho. Con cada salto sube 5 metros, pero resbala 3 hacia abajo. ¿Cuántos saltos tiene que dar Batman para salir del túnel?

Materiales problema 1

Recursos para la resolución:

- Pictogramas velcrados de estrellas
- Organizador gráfico en formato esquemático

Materiales transversales

Recursos para la organización:

- Planificador de la sesión
- Juego de mesa

Materiales problema 2

Recursos para la resolución:

- Pictograma de *Batman* con imán
- Esquema/ representación del túnel con imanes y recta numérica

Expectativas del problema 1

Este problema se caracteriza por plantear la incógnita en el dato inicial de la historia. Este tipo de estructura puede suponer algo novedoso de cara al desarrollo de estrategias, por lo que será necesario dar mucha importancia al orden en la resolución para superar dificultades asociadas a las funciones ejecutivas. Cada subproblema se puede relacionar con un personaje del juego, para darle más contexto.

Se inicia con la versión 1. Al finalizar el problema, establecer con los estudiantes qué estrategias han llevado a cabo.

La versión 2 incluye el concepto de mitad, lo que puede ocasionar dificultades a la hora de invertir el dato trabajando a la inversa: si di la mitad es que antes tenía el doble.

Se espera utilizar el organizador y los pictogramas para “contar” la historia al revés, a modo de estrategia visual y manipulativa que permita abordar el problema.

La versión 3 sería la opción para Omar o para aquellos que tengan muchas dificultades. No incluye números fraccionarios.

Expectativas del problema 2

El problema vincula submeta y ensayo y error. Sabiendo que en cada salto sube 2, se pueden aproximar al 50. Es importante no perder de vista el sentido de los saltos y el resbalarse al aproximarnos al 50.

La primera solución que propongan puede ser dividir 50 entre 2. Una posible solución será incluir el esquema del túnel para que intenten demostrar esta hipótesis utilizando el pictograma de *Batman* y la recta numérica.

Atendiendo a dificultades de memoria de trabajo, atención y predicción, anotar los saltos en un folio o un organizador puede ser una solución para no perder el hilo de sus propios cálculos.

Versión 1 del enunciado del problema 1

Jugando al Mario Party, fui ganando y perdiendo estrellas.

En las primeras rondas gané varias estrellas.

Luego perdí 2.

En la casilla de Bowser tuve mucha suerte y gané 3.

Al final de la partida, tenía en total 5 estrellas.

¿Cuántas gané en las primeras rondas?

Versión 2 del enunciado del problema 1

Jugando al Mario Party, fui ganando y perdiendo estrellas.

En las primeras rondas gané varias estrellas.

Luego perdí la mitad de estrellas.

En la casilla de Bowser tuve mucha suerte y gané 2.

Al final de la partida conseguí 4 estrellas en total.

¿Cuántas gané en las primeras rondas?

Versión 3 del enunciado del problema 1

Jugando al Mario Party, fui ganando y perdiendo estrellas.

En las primeras rondas gané varias estrellas.

Luego perdí 2 estrellas.

En la casilla de Bowser tuve mucha suerte y gané 2.

Al final de la partida conseguí 4 estrellas en total.

¿Cuántas gané en las primeras rondas?

Enunciado del problema 2

Perseguido al Joker, Batman cae en una trampa.

Un túnel de 50 metros hacia el subsuelo.

Como es de arena, resbala mucho.

Con cada salto sube 5 metros pero resbala 3 hacia abajo.

¿Cuántos saltos tiene que dar Batman para salir del túnel?

Pictogramas de pictogramas



Esquema con recta numérica del problema 2



OBJETIVO: Se pretende que los estudiantes establezcan relaciones de analogía. En problemas previos se ha trabajado ambas estrategias de marcha atrás y generalización, así como se han empleado los organizadores específicos (en esquema y tabulares) diseñados para desarrollar estas estrategias de manera visual, que, de nuevo, se integran en esta sesión.

Heurístico: marcha atrás y generalización

PROBLEMA 1

Versión 1

Scratch sale de su madriguera con dirección al lago, cargada de nueces. Cuando llega, se tropieza con una enorme raíz de un nogal que sobresalía de la tierra y caen del árbol 9 nueces. Hambrienta, se come 8 de las nueces que le quedan y esconde las últimas 8 nueces en el hueco de un tronco de un árbol cercano. ¿Con cuántas nueces salió de la madriguera?

Versión 2

Scratch sale de su madriguera con dirección al lago, cargada de nueces. Cuando llega, se tropieza con una enorme raíz que sobresalía de la tierra y caen del árbol 9 nueces. Hambrienta, se come la mitad de las nueces que le quedan y esconde las 8 últimas nueces en el hueco de un tronco de un árbol cercano, en el que suele esconder la comida. ¿Con cuántas nueces salió de la madriguera?

Versión 3

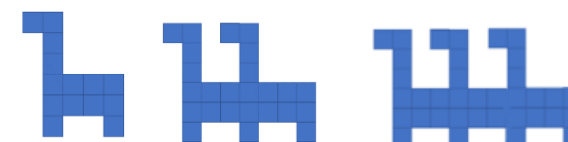
Al día siguiente, Scratch vuelve a salir en dirección al lago. Cuando llega, recoge todas las que guardó en el árbol. Se come la mitad. De repente, aparece un tigre dientes de sable y tiene que salir huyendo, perdiendo la mitad de las nueces que le quedaban. Finalmente, vuelve a la madriguera con 4. ¿Cuántas nueces recogió del tronco del árbol?

Versión 4

Al día siguiente, Scratch vuelve a salir en dirección al lago cargada de nueces. Cuando llega, recoge todas las nueces que tenía almacenadas en el árbol. Se come 8. De repente, aparece un tigre dientes de sable y tiene que salir huyendo, perdiendo cuatro nueces. Finalmente, vuelve a la madriguera con 4 nueces. ¿Con cuántas nueces salió de la madriguera?

PROBLEMA 2

¿Cuántos policubos necesitas para hacer este dinosaurio? ¿Y si fueran dos? ¿Y 3? ¿Y 7? ¿Y 10?



Materiales problema 1	Materiales transversales	Materiales problema 2
Recursos para la resolución: - Pictogramas de nueces - Organizador gráfico en formato esquema	Recursos para la organización: - Planificador de la sesión - Juego de mesa	Recursos para la resolución: - Pictogramas de dinosaurios - Policubos - Organizador gráfico tabular
Expectativas del problema 1	Expectativas del problema 2	
Hay dos versiones de cada subproblema, con fracciones y sin ellas, obteniéndose el mismo resultado. Las versiones 2 y 4 están diseñadas pensando en Omar, dadas sus dificultades con el carácter multiplicativo de las operaciones. Al haber variantes del problema, tras comentar de manera conjunta algunos aspectos del contexto del problema, la lectura y resolución es individual. Los estudiantes han de atender a que la pregunta hace referencia a un dato inicial, por lo que hay que empezar desde el dato final. El organizador y los pictogramas de las nueces pueden facilitar contar la historia, de manera visual, apoyando al enunciado. La resolución de este problema requiere otorgar importancia al orden. Tras poner en común la respuesta, se abordarán las versiones 3 y 4, siguiendo la misma dinámica.		El problema implica la relación funcional $f(x)=x+11$. Tras la lectura conjunta se inicia la resolución individual. La estrategia más esperable es que cuenten las piezas del primer dinosaurio y multipliquen por el número de animales de cada figura. Se requiere de habilidades de observación del dibujo, aunque la construcción puede guiarles en la comprensión. Tras unos momentos de resolución, se proporciona el material de construcción. Se debe propiciar que el alumnado supere la estrategia de conteo hacia otras de mayor demanda cognitiva (Blanton et al., 2015; Lannin et al., 2006). Se les planteará a los estudiantes llevar a cabo estrategias de organización de la información, aunque las tablas pueden entregarse como apoyo para registrar y anotar los datos. Sería recomendable establecer analogías con el problema de la arqueóloga, en el que tenían que ir construyendo la escalera.

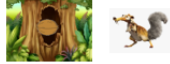
Versión 1 del enunciado del problema 1

Scratch sale de su madriguera con dirección al lago, cargada de nueces.



Cuando llega, se tropieza con una enorme raíz de un nogal que sobresalía de la tierra y caen del árbol 9 nueces.

Hambrienta, se come 8 de las nueces que le quedan



y esconde las últimas 8 nueces en el hueco de un tronco de un árbol cercano.

¿Con cuántas nueces salió de la madriguera?



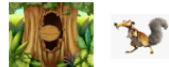
Versión 2 del enunciado del problema 1

Scratch sale de su madriguera con dirección al lago, cargada de nueces.



Cuando llega, se tropieza con una enorme raíz de un nogal que sobresalía de la tierra y caen del árbol 9 nueces.

Hambrienta, se come la mitad de las nueces que le quedan



y esconde las últimas 8 nueces en el hueco de un tronco de un árbol cercano.

¿Con cuántas nueces salió de la madriguera?



Versión 3 del enunciado del problema 1



Al día siguiente, Scratch vuelve a salir en dirección al lago.



Cuando llega, recoge todas las nueces que tenía almacenadas en el árbol.

Se come la mitad.



De repente, aparece un tigre dientes de sable y tiene que salir huyendo, perdiendo la mitad de las nueces que le quedaban



Finalmente, vuelve a la madriguera con 4

¿Cuántas nueces recogió del tronco del árbol?

Versión 4 del enunciado del problema 1



Al día siguiente, Scratch vuelve a salir en dirección al lago.

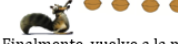


Cuando llega, recoge todas las nueces que tenía almacenadas en el árbol.

Se come la mitad.



De repente, aparece un tigre dientes de sable y tiene que salir huyendo, perdiendo la mitad de las nueces que le quedaban



Finalmente, vuelve a la madriguera con 4

¿Cuántas nueces recogió del tronco del árbol?

Enunciado del problema 2

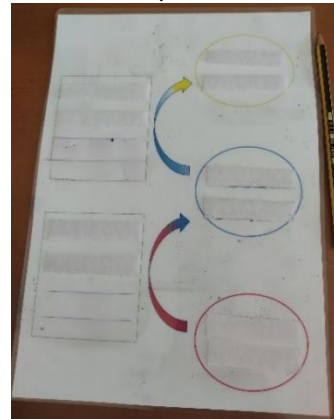


¿Cuántos policubos necesitas para hacer este dinosaurio?



- ¿Y si fueran dos?
- ¿Y 3?
- ¿y 7?
- ¿y 10?

Organizador gráfico en formato esquemático



OBJETIVO: Al inicio de cada resolución, los estudiantes cuentan únicamente con los enunciados. **Heurístico:** generalización y ensayo y error. Se espera que desarrollen por sí mismos tablas, dibujos o diferentes herramientas de representación. Se dispondrán de materiales específicos por si se les ocurriera solicitar laguna tabla o pictograma o se encontrarán algunas dificultades en el desarrollo de la resolución. El diseño de los enunciados solo contempla imágenes propias del contexto de los problemas.

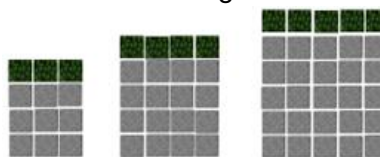
PROBLEMA 1: El problema de Pokémon

El caramelorraro es un objeto que los Pokémon pueden comer para aumentar un nivel. Charmander y Squirtle encontraron una caja llenita de caramelorros en el laboratorio del profesor Oak y deciden compartirlas. Squirtle toma uno y Charmander, codicioso, toma dos. A continuación, Squirtle toma tres y Charmander toma 4... y así, sucesivamente, cada uno va tomando un caramelorraro más de los que había tomado el otro. Charmander es el último en tomar los caramelorros, cogiendo todos los que quedan. Charmander tiene en total, 10 caramelorros más que Squirtle, ¿cuántos caramelorros toma cada Pokémon? ¿Cuántos caramelorros había en la caja inicial?

PROBLEMA 2: El problema del Minecraft

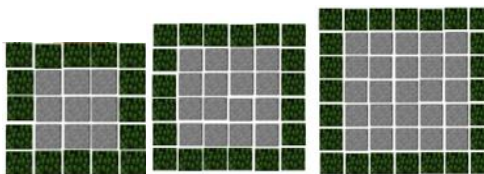
Versión 1

Jugando al Minecraft, tienes que construir las murallas de tu Castillo. Cada trozo de muralla está construido con bloques de piedra y de hierba (para decorar). A medida que vas consiguiendo más materiales, la vas agrandando, siempre manteniendo la misma forma. ¿Cuántos bloques de hierba y piedra tendrás tu segunda muralla? ¿Y tu tercera muralla? ¿Y tu sexta muralla?



Versión 2

Como cada vez eres más creativo, haces algunas puertas para tu castillo, que están construidas con bloques de piedra y de plantas (para decorar). A medida que vas consiguiendo más materiales, la vas agrandando, siempre manteniendo la misma forma. ¿Cuántos bloques de planta y piedra tendrás tu 2ª puerta? ¿Y tu quinta puerta? ¿Y tu séptima puerta?



Materiales problema 1

Recursos para la resolución:

- Pictogramas de caramelorraros, Squirtle y Charmander
- Organizador tabular

Expectativas del problema 1

El problema implica dos relaciones funcionales, una vinculada a cada personaje: $f(x) = 2x - 1$ para Squirtle y $(f) = 2x$ para Charmander.

Aunque el problema puede resolverse con simple conteo, es necesario propiciar que el alumnado establezca relaciones entre las acciones de los personajes y los caramelorraros que van obteniendo. Por ejemplo, llegar a observar que Squirtle siempre toma un número impar de caramelos y Charmander un número par.

Dada la cantidad de datos, el problema requiere atender al orden y organización, por lo que registrarlos puede servir de apoyo. Se les puede guiar para que hagan un diagrama o una tabla, representando la historia, como se efectuó en el problema de *Mario Party* o de *Batman*. Se puede ofrecer el organizador. Se espera que utilicen el ensayo y error, no que se fijen en la relación de sumandos de caramelorraros totales.

Materiales transversales

Recursos para la organización:

- Planificador de la sesión
- Juego de mesa

Expectativas del problema 2

Solo se les ofrece el enunciado de la versión 1. Se espera que bien, pidan policubos, piezas o dibujen con colores las diferentes murallas. Se ofrecerán las piezas de goma Eva y, tras unos minutos, los organizadores.

El problema implica tres variables, relacionadas entre sí: Hierba y Piedra ($H^2 = P$); Muralla y Hierba, ($M + 2 = H$); Muralla y Piedra ($(M + 2)^2 = P$); Muralla, Hierba y Piedra, ($M + 2 + (M + 2)^2 = H + P$).

Así, el patrón es recursivo respecto a la relación entre los bloques de Hierba y Muralla, y multiplicativo en los demás casos. Estas últimas pueden ocasionar dificultades en la generalización. Si el estudiantado no es capaz de inferir los cuadrados perfectos, sería recomendable orientar su atención hacia cuántos ladrillos se añaden de una muralla a otra (+7, +9, +11...), con objetivo de reducir las estrategias de conteo.

La versión 2 del problema se abordará si los estudiantes finalizan la primera.

Materiales problema 2

Recursos para la resolución:

- Piezas cuadradas de goma Eva, verdes y grises
- Pictogramas de murallas
- Organizador tabular velcroado

Enunciado del problema 1

El caramelloraro es un objeto que los pokemon pueden comer para aumentar un nivel.

Charmander y Squirtle encontraron una caja llenita de caramelloraros en el laboratorio del profesor Oak y deciden compartírselos.

Squirtle toma uno y Charmander, codicioso, toma dos.

A continuación, Squirtle toma tres y Charmander toma 4...

y así, sucesivamente, cada uno va tomando un caramelloraro más de los que había tomado el otro.

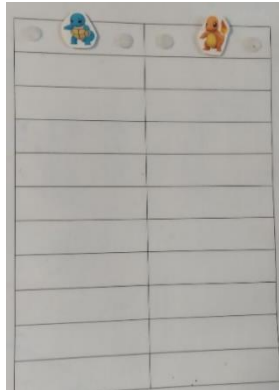
Charmander es el último en tomar los caramelloraros, cogiendo todos los que quedan.

Charmander tiene en total, 10 caramelloraros más que Squirtle

¿cuántos caramelloraros toma cada pokemon?

¿Cuántos caramelloraros había en la caja inicial?

Organizador gráfico del problema 1, con pictogramas de los personajes



Versión 1 del enunciado del problema 2

Jugando al Minecraft, tienes que construir las murallas de tu Castillo. Cada trozo de muralla está construida con bloques de piedra y de plantas (para decorar)

Primera muralla:

A medida que vas consiguiendo más materiales, la vas agrandando, siempre manteniendo la misma forma.

¿Cuántos bloques de planta y piedra tendrá tu 2ª muralla?

¿Y tu tercera muralla?

¿Y tu sexta muralla?

Organizador gráfico del problema 2, con pictogramas de las murallas



Versión 2 del enunciado del problema 2

Como cada vez eres más creativo, haces algunas puertas para tu castillo. Cada trozo de muralla está construido con bloques de piedra y de plantas (para decorar)

A medida que vas consiguiendo más materiales, la vas agrandando, siempre manteniendo la misma forma.

¿Cuántos bloques de planta y piedra tendrá tu 2ª puerta?

¿Y tu quinta puerta?

¿Y tu séptima puerta?

Piezas cuadradas de goma Eva, grises y verdes



OBJETIVO: Iniciar las sesiones de evaluación con dos problemas abordables con diferentes heurísticos. Tras una lectura común, los materiales se dejan sobre la mesa sin dar ninguna indicación previa y se inicia la resolución individual. Se evaluarán las habilidades como resolutores de los estudiantes atendiendo al tipo de estrategias que llevan a cabo y cómo influyen en estas las características asociadas al TEA que evidencian.

Heurístico: Submeta/representación/ensayo y error

PROBLEMA 1

Para llevar a cabo una misión muy peligrosa, Los Vengadores deciden agruparse en equipos

El equipo rojo irá a la guarida del villano.

El equipo rojo está formado por Hulk, Capitán América Viuda Negra y Iron Man.

Versión 1

- Entre todos han acabado con 32 secuaces.
- Viuda Negra ha luchado el doble que Iron Man.
- Entre Iron Man y Hulk han derrotado a la mitad de los secuaces.
- Capitán América ha luchado con los restantes.
- Entre Capitán América y Iron Man han derrotado a los mismos que Viuda Negra.
- Todos los vengadores han acabado con un número par de villanos

¿Cuántos secuaces han derrotado cada uno?

Versión 2

- Entre todos han acabado con 32 secuaces.
- Viuda Negra ha vencido a 6 secuaces más que Iron Man.
- Entre Iron Man y Hulk han derrotado a 16 secuaces.
- Capitán América ha luchado con los restantes.
- Entre Capitán América y Iron Man han derrotado a los mismos que Viuda Negra.
- Todos los vengadores han acabado con un número par de villanos

¿Cuántos secuaces han derrotado cada uno?

PROBLEMA 2

Mientras, Ojo de Halcón se encarga de ayudar a los ciudadanos de un poblado que el villano ha dejado aislado. Debe llevar 500 litros de agua en un avión para la población, que está a 100 km. El avión solamente puede cargar 250 litros por viaje. Consume un litro de agua por kilómetro recorrido y si no lleva agua, no funciona.

¿Cuál es el mayor número de litros que conseguirá llevar Ojo de Halcón al poblado?

Materiales problema 1	Materiales transversales	Materiales problema 2
Recursos para la resolución: - Organizador gráfico en formato tabular con las pistas del enunciado en un lateral	Recursos para la organización: - Planificador de la sesión - Juego de mesa	Recursos para la resolución: - Pictogramas de garrafas de 50 y 100 litros. - Organizador gráfico que presenta el esquema del camino que traza el avión con cada entrega de agua.
Expectativas del problema 1	Expectativas del problema 2	
El contexto de super héroes puede resultar un motivador muy potente. El problema requiere de una lectura comprensiva y atención a cada uno de los datos implicados. Los estudiantes pueden tener dificultades para seguir y enlazar las pistas del enunciado, de manera que el orden es esencial. Las diferentes filas del organizador tabular pueden orientar estrategias de ensayo y error, de manera que quedan registradas las hipótesis de los estudiantes, facilitando la manipulación de los datos. La lista complementaria a un lado de la tabla en el organizador puede guiar la verificación del cumplimiento de cada dato del enunciado, expuesto a modo de lista.	Continuar la sesión en la misma temática puede guiar el establecimiento de objetivos en los estudiantes. Para resolver el problema, aunque abordable de manera numérica, la representación puede ser un apoyo necesario para mantener la atención a todas las premisas del enunciado. Este aspecto puede ser causa de errores en la resolución de los estudiantes, que pueden perder la atención u olvidar alguna de sus estrategias en los numerosos pasos que realiza el personaje del problema para cumplir con su objetivo.	

Version 1 del Enunciado del problema 1



Para llevar a cabo una misión muy peligrosa, los Vengadores se dirigen a la guarida del villano.

- Entre todos han acabado con 32 secuaces.
- Entre Iron Man y Hulk han derrotado a la mitad de los secuaces.
- Viuda Negra ha luchado el doble que Iron Man.
- Capitán América ha luchado con los que quedaban.
- Entre Capitán América y Iron Man han derrotado a los mismos que Hulk.
- Todos los vengadores han acabado con un número par de villanos.

¿Cuántos secuaces han derrotado cada uno?



Version 2 del Enunciado del problema 1



Para llevar a cabo una misión muy peligrosa, los Vengadores se dirigen a la guarida del villano.

- Entre todos han acabado con 32 secuaces.
- Viuda Negra ha vencido a 6 secuaces más que Iron Man.
- Entre Iron Man y Hulk han derrotado a 16 secuaces.
- Capitán América ha luchado con los que quedaban.
- Entre Capitán América y Iron Man han derrotado a los mismos que Hulk.
- Todos los vengadores han acabado con un número par de villanos.

¿Cuántos secuaces han derrotado cada uno?



Enunciado del problema 1



Mientras, Ojo de Halcón se encarga de ayudar a los ciudadanos de un poblado que el villano ha dejado aislado.

Debe llevar 500 litros de agua en un avión



para la población, que está a 100 km.



El avión solamente puede cargar 250 litros por viaje



Consumo un litro de agua por kilómetro recorrido

y si no lleva agua, no funciona.

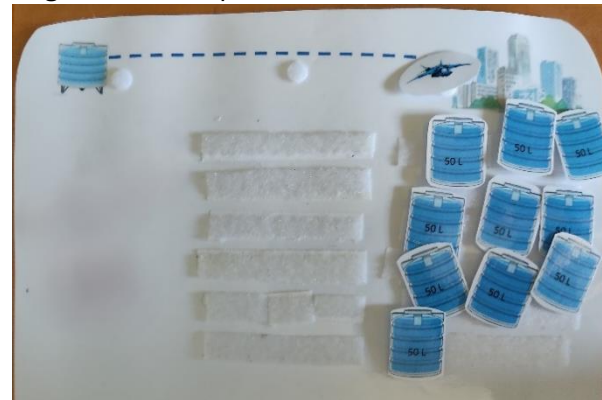


¿Cuántos viajes tiene que dar Ojo de Halcón para llevar los 500 litros a la población?

Organizador del problema 1

IRON MAN	HULK	VIUDA NEGRA	CAPTÁN AMÉRICA	COMPROBAMOS
				- Entre todos han acabado con 32 secuaces
				- Entre Iron Man y Hulk han derrotado a la mitad de los secuaces.
				- Viuda Negra ha luchado el doble que Iron Man.
				- Capitán América ha luchado con los que quedaban.
				- Entre Capitán América y Iron Man han derrotado a los mismos que Hulk.
				- Todos los vengadores han acabado con un número par de villanos.

Organizador del problema 2



OBJETIVO: Se propone resolver dos problemas abiertos, en términos de ser abordables con diferentes heurísticos. Los materiales se dejan sobre la mesa sin dar ninguna indicación previa y se inicia la resolución individual. Se evaluarán las habilidades como resolutores de los estudiantes atendiendo al tipo de estrategias que llevan a cabo y cómo influyen en estas las características asociadas al TEA que evidencian. A excepción de los pictogramas de los tickets, los organizadores son los mismos que se han empleado en sesiones anteriores. El contexto de los problemas se relaciona con una salida de los estudiantes del taller y las investigadoras-docentes como broche final del taller.

Heurístico:
generalización y marcha
atrás

PROBLEMA 1

Antes de echar unos bolos, vamos a almorzar.
En el restaurante venden varios menús y nos dicen que hay ofertas. Si compras un menú de hamburguesa con patatas y refresco, vale 6 euros. Si compras 2 menús, cuesta 8 euros. Si compras 3, tienes que pagar 15 euros.
¿Cuánto nos costará comprar un menú para Omar, Raúl, Noa y Elio?
¿Y si comieran también Irene y Sofía? ¿Y si fuéramos también Nuria, Inma y Ángeles?

PROBLEMA 2

En la zona de recreo se pueden ganar tickets y canjearlos por premios. Noa, Elio, Raúl y Omar deciden compartir todos los tickets que ganan y utilizarlos como quieran.
Jugando a los bolos consiguen un montón de tickets.
Versión 1
Luego, deciden comprar un peluche de un videojuego que les gustó mucho y que valía 18 tickets.
Después, juegan al air hockey y obtienen el triple de puntos que suman a los que ya llevaban.
En un despiste, se pierden la mitad de tickets. Seguramente con la emoción del juego se cayeran.
Finalmente, utilizan los 20 tickets restantes para comprar 4 helados.
¿Cuántos tickets obtuvieron al principio? ¿Cuánto costaba cada helado?

Versión 2
Luego, deciden comprar un peluche de un videojuego que les gustó mucho y que valía 18 tickets.
Después, juegan al air hockey y obtienen 30 puntos, que suman a los que ya llevaban.
En un despiste, se pierden la mitad de tickets. Seguramente con la emoción del juego se cayeran.
Finalmente, utilizan los 20 tickets restantes para comprar 4 helados.
¿Cuántos tickets obtuvieron al principio? ¿Cuánto costaba cada helado?

Materiales problema 1	Materiales transversales	Materiales problema 2
Recursos para la resolución: - Organizador gráfico	Recursos para la organización: - Planificador de la sesión - Juego de mesa	Recursos para la resolución: - Pictogramas de tickets - Organizador gráfico
Expectativas del problema 1	Expectativas del problema 2	
Tras una lectura conjunta, se inicia la resolución individual, con intervenciones mínimas de las docentes. Los materiales están encima de la mesa, para favorecer que se usen libremente. El precio de los menús parece encerrar una regularidad que se pretende que los estudiantes descubran. Dado que ellos son los protagonistas del problema, se espera que trabajen colaborativamente, comparen sus resultados y alcancen la generalización en la relación entre las variables menú y precio.	Continuando con los estudiantes como protagonistas, se espera que lleven a cabo la estrategia de resolución marcha atrás para abordar este problema. La lectura se hace de manera individual, dado que hay dos versiones del problema, que, aunque tienen el mismo resultado, una de ellas involucra valores con menor demanda cognitiva (versión 2). Utilizar la versión 2 puede reducir la frustración derivada de no conseguir resolver el problema o cometer muchos errores de cálculo, dada la tendencia al error al involucrar operaciones combinadas y de carácter multiplicativo. Organizar los datos y seguir un orden puede ser una de las mayores dificultades al resolver el problema. Tras resolver el problema, se comparan resultados e ideas.	

Enunciado del problema 1

Antes de echar unos bolos, vamos a almorzar.

En el restaurante venden varios menús y nos dicen que hay ofertas.



Si compras un menú de pizza o pasta y refresco, vale 6 euros.

Si compras 2 menús, cuesta 8 euros.

Si compras 3, tienes que pagar 15 euros.

- ¿Cuánto nos costará comprar un menú para Omar, Raúl, Noa y Elio?
- ¿Y si comieran también Irene y Sofia?
- ¿Y si fuéramos también Nuria, Inma y Ángeles?



Version 1 del Enunciado del problema 2

En la zona de recreo se pueden ganar tickets y canjearlos por premios



Noa, Elio, Raúl y Omar deciden compartir todos los tickets que ganan y utilizarlos como quieran.

Jugando a los bolos consiguen un montón de tickets.



Luego, deciden comprar un peluche de un videojuego que les gustó mucho y que valía 18 tickets.

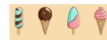
Después, juegan al air hockey y obtienen 30 puntos, que suman a los que ya llevaban.



En un despiste, se pierden la mitad de los tickets. Seguramente con la emoción del juego se cayeran.



Finalmente, utilizan los 20 tickets restantes para comprar 4 helados.



¿Cuántos tickets obtuvieron al principio?



Versión 2 del enunciado del problema 2

En la zona de recreo se pueden ganar tickets y canjearlos por premios



Noa, Elio, Raúl y Omar deciden compartir todos los tickets que ganan y utilizarlos como quieran.

Jugando a los bolos consiguen un montón de tickets.



Luego, deciden comprar un peluche de un videojuego que les gustó mucho y que valía 18 tickets.

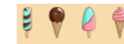
Después, juegan al air hockey y obtienen el triple de puntos que suman a los que ya llevaban.



En un despiste, se pierden la mitad de los tickets. Seguramente con la emoción del juego se cayeran.



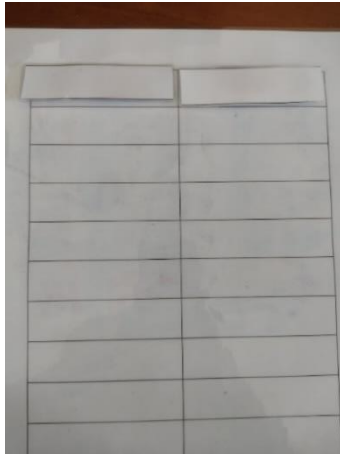
Finalmente, utilizan los 20 tickets restantes para comprar 4 helados.



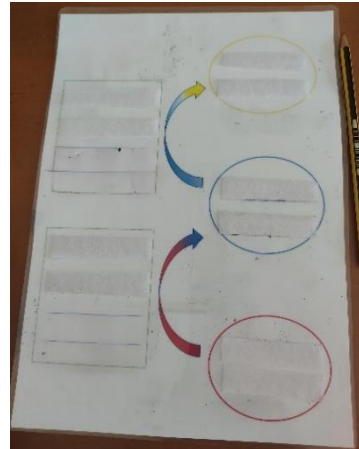
¿Cuántos tickets obtuvieron al principio?



Organizador del problema 1



Organizador del problema 2



Pictogramas de Tickets del problema 2



Anexo 7: Entrevistas a docentes

Bloque genérico

- ¿Cuánto tiempo dedicas a la resolución de problemas a la semana? ¿Cómo la trabajas?
- ¿Qué dificultades señalarías como más significativas?
- ¿Planteas algunas estrategias a tu alumnado? ¿Cuáles?
- ¿Empleas algún recurso?
- Estos recursos, materiales y métodos, ¿se emplean con todo el alumnado? (Enlazar con enseñanza inclusiva)
- ¿Se trabaja de manera conjunta con el resto de docentes para desarrollar estas estrategias o medidas? (de manera inclusiva)

Medidas generales: Alumnos con NEAE

- ¿Qué tipo de actuaciones se desarrollan en el aula como parte del Programa Específico?
- dificultades específicas y cómo se abordan
- ¿Hay alguna medida específica que el niño necesite?
- ¿Se trabaja de manera conjunta con el resto de docentes para desarrollar ciertas estrategias o medidas? (Específicamente con el niño)
- Salidas del aula: docente de PT. ¿Qué tipo de comunicación/coordinación se establece con este docente?
- ¿Cómo son las relaciones con sus compañeros?
- ¿Tienen algún rol en el aula o algún refuerzo respecto a ciertos comportamientos?
- Motivación en el aula por aprender y hacer las tareas

Formación

- ¿Las medidas y estrategias mencionadas se han trabajado en alguna formación?
- ¿Cuáles son las limitaciones y dificultades que se presentan en el aula de cara a desarrollar la matemática inclusiva?
- ¿Qué se necesitaría para poder sortearlas y mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de todo el alumnado?

Anexo 8: Propuesta de participación en el proyecto para docentes y centros educativos

*Facultad de Educación
Universidad de Huelva*

Nuria Climent
Inmaculada Gómez
Ángeles Chico

Estimado equipo directivo y equipo docente:

Como parte de una investigación enmarcada en el desarrollo de una tesis doctoral sobre resolución de problemas matemáticos con estudiantes con Síndrome de Asperger, solicitamos su colaboración para continuar con nuestro estudio. Durante el curso pasado se llevaron a cabo talleres de resolución de problemas contando con la colaboración de la Asociación Onubense de Síndrome de Asperger (AOSA), y el Proyecto INCLUREC de la Universidad de Huelva, dirigidos a ahondar en las estrategias y técnicas de aprendizaje que favorecen el desarrollo de los niños y niñas con síndrome de Asperger. Continuando esta investigación pretendemos ahondar en las estrategias y metodologías que se emplean en el aula de tercer ciclo de primaria al trabajar los problemas matemáticos cuando el Síndrome de Asperger forma parte de la diversidad del aula. El objetivo final es llevar las estrategias seleccionadas a la formación de maestros/as en los centros educativos, para poder abordar una enseñanza inclusiva de las matemáticas.

Nuestro foco se sitúa así en valorar la aplicación de estas técnicas, en ningún caso evaluando a los docentes.

Al comprometerse con el proyecto se acepta:

- La grabación en vídeo y audio de las sesiones, que tendrán fines únicamente académicos.
- Participar en una breve formación en la que se trabajará resolución de problemas y estrategias metodológicas.

Anexo 9: Entrevista a docentes de los estudios de caso 2, 3 y 4. Protocolo

Bloque genérico

- ¿Cuánto tiempo dedicas a la resolución de problemas a la semana? ¿Cómo la trabajas?
- ¿Qué dificultades señalarías como más significativas?
- ¿Planteas algunas estrategias a tu alumnado? ¿Cuáles?
- ¿Empleas algún recurso?
- Estos recursos, materiales y métodos, ¿se emplean con todo el alumnado? (Enlazar con enseñanza inclusiva)
- ¿Se trabaja de manera conjunta con el resto de docentes para desarrollar estas estrategias o medidas? (de manera inclusiva)

Medidas generales: Alumnos con NEAE

- ¿Qué tipo de actuaciones se desarrollan en el aula como parte del Programa Específico?
- Dificultades específicas y cómo se abordan
- ¿Hay alguna medida específica que el niño necesite?
- ¿Se trabaja de manera conjunta con el resto de docentes para desarrollar ciertas estrategias o medidas? (Específicamente con el niño)
- Salidas del aula: docente de PT. ¿Qué tipo de comunicación/coordinación se establece con este docente?
- ¿Cómo son las relaciones con sus compañeros?
- ¿Tienen algún rol en el aula o algún refuerzo respecto a ciertos comportamientos?
- Motivación en el aula por aprender y hacer las tareas

Post-Implementación

- ¿Te esperabas el tipo de actividades que hemos realizado en el aula?
- ¿Qué te ha llamado la atención?
- Describir opiniones de los problemas de cada sesión: sesión de Tailandia, sesión de los muñecos, sesión de la arqueóloga
- Preguntas concretas:
 - ¿Por qué elegisteis esos problemas?
 - ¿Resolviste los problemas previamente?

- ¿Cómo planteaste introducirlos?
- ¿Por qué ese contexto?
- ¿La sesión cumplió tus expectativas?
- ¿Y el uso de los materiales?
- Aspectos positivos y negativos
- ¿Algo que destacarías respecto al trabajo con tu alumno con TEA?

Formación

- ¿Las medidas y estrategias mencionadas se han trabajado en alguna formación?
- ¿Cuáles son las limitaciones y dificultades que se presentan en el aula de cara a desarrollar la matemática inclusiva?
- ¿Qué se necesitaría para poder sortearlas y mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de todo el alumnado?

Anexo 10: Principios, directrices, puntos de verificación y criterios

PRINCIPIO DE COMPROMISO (E)
DIRECTRIZ: Captar el interés (E.RI)
Punto de Verificación: E.RI.1. Optimizar la elección individual y autonomía
E.RI.1.1. Proporcionar (a los alumnos) tanta discreción y autonomía como sea posible. E.RI.1.2. Permitir que participen en el diseño de las actividades. E.RI.1.3. Implicarlos en el establecimiento de sus objetivos.
Punto de Verificación: E.RI.2. Optimizar relevancia, valor y autenticidad
E.RI.2.1. Variar las actividades y fuentes de información. E.RI.2.2. Diseñar actividades para que los resultados del aprendizaje sean auténticos.
Punto de Verificación: E.RI. 3. Minimizar distracciones
E.RI. 3.1. Crear un clima de aceptación y apoyo. E.RI. 3.2. Variar el nivel de novedad o riesgo. E.RI.3.3. Tablas, calendarios, etc. que aumenten la previsibilidad de actividades y transiciones. E.RI.3.4. Crear rutinas. E.RI. 3.5. Alertas y pre-visualizaciones para ayudar a anticiparse a los cambios. E.RI.3.6. Opciones para, en contraste con las anteriores, maximizar lo inesperado. E.RI.3.7. Variar el nivel de estimulación sensorial. E.RI.3.8. Variar la presencia de ruido o estimulación visual, número de elementos presentados a la vez. E.RI.3.9. Variar el ritmo de trabajo, la duración de las sesiones, las pausas o la secuencia de las actividades. E.RI.3.10. Variar las exigencias sociales, el nivel percibido de apoyo y los requisitos de exposición pública. E.RI. 3.11. Implicar a todos en los debates.
Directriz: Mantener el Esfuerzo y la Persistencia (E.SEP)

Punto de Verificación: E. SEP. 1. Marcar las metas y objetivos
E.SEP.1.1. Pedir (a los alumnos) que formulen o reafirmen explícitamente el objetivo. E.SEP.1.2. Mostrar el objetivo de varias maneras. E.SEP.1.3. Fomentar la división de las metas a largo plazo en objetivos a corto plazo. E.SEP.1.4. Demostrar el uso de herramientas de programación. E.SEP.1.5. Utilizar ayudas para visualizar el resultado deseado. E.SEP.1.6. Involucrarles en debates sobre la excelencia y ejemplos conectados con su bagaje.
Punto de Verificación: E. SEP. 2. Varias las exigencias y recursos para optimizar el reto
E.SEP.2.1. Diferenciar el grado de complejidad con el que se pueden completar las actividades. E.SEP.2.2. Proporcionar alternativas en herramientas y andamios permitidos. E.SEP.2.3. Variar los grados de libertad para un rendimiento aceptable. E.SEP.2.4. Hacer hincapié en el proceso, el esfuerzo y la mejora en el cumplimiento de las normas.
Punto de Verificación: E. SEP. 3. Promover la colaboración y la comunidad
E.SEP.3.1. Crear grupos de aprendizaje cooperativo con objetivos, funciones y responsabilidades claros. E.SEP.3.2. Crear programas de apoyo al comportamiento positivo con objetivos y apoyos diferenciados. E.SEP.3.3. Indicar cuándo y cómo pedir ayuda a compañeros y/o profesores. E.SEP.3.4. Fomentar y apoyar las oportunidades de interacción y apoyo entre compañeros. E.SEP.3.5. Construir comunidades de alumnos comprometidos con intereses o actividades comunes. E.SEP.3.6. Crear expectativas para el trabajo en grupo.
Punto de Verificación: E. SEP. 4. Utilizar el feedback orientado hacia la maestría en una tarea
E.SEP.4.1. Fomentar la perseverancia, la eficacia y la autoconciencia, y el uso de estrategias específicas.

E.SEP.4.2. Proporcionar una retroalimentación que enfatice el esfuerzo, mejora y logro de un estándar.
E.SEP.4.3. Proporcionar una retroalimentación frecuente, oportuna y específica.
E.SEP.4.4. Proporcionar una retroalimentación sustantiva e informativa.
E.SEP.4.5. Proporcionar una retroalimentación que incorpore la evaluación en estrategias para el futuro.
DIRECTRIZ: Autorregulación (E.SR)
Punto de Verificación: E. SR. 1. Promover expectativas y creencias y optimicen la motivación
E.SR.1.1. Proporcionar avisos, recordatorios, etc. que se centren en la autorregulación.
E.SR.1.2. Proporcionar entrenadores que modelen el establecimiento de objetivos personales apropiados.
E.SR.1.3. Apoyar actividades que fomenten la autorreflexión y la identificación de objetivos personales.
Punto de Verificación: E. SR. 2. Facilitar estrategias y habilidades personales para afrontar situaciones y problemas
E.SR.2.1. Proporcionar modelos diferenciados para gestionar la frustración y las fobias.
Punto de Verificación: E. SR. 3. Desarrollar la autoevaluación y autorreflexión
E.SR.3.1. Ofrecer dispositivos para ayudar a aprender a recopilar datos de su comportamiento.
E.SR.3.2. Utilizar actividades que incluyan la obtención de retroalimentación y andamiajes alternativos.
PRINCIPIO DE REPRESENTACIÓN
DIRECTRIZ: Percepción (R.P)
Punto de Verificación: R.P. 1. Ofrecer opciones para personalizar la presentación de la información
R.P.1.1. Presentar la información en un formato flexible que permita variar características perceptivas.
Punto de Verificación: R.P. 2. Ofrecer alternativas para la información auditiva
R.P.2.1. Utilizar equivalentes textuales en forma de subtítulos o de conversión a texto para el lenguaje oral.

R.P.2.2. Proporcionar diagramas visuales, gráficos, anotaciones musicales o sonoras.
R.P.2.3. Transcripciones escritas de vídeos o clips auditivos.
R.P.2.4. Lenguaje de signos americano (ASL) para el inglés hablado.
R.P.2.5. Utilizar análogos visuales para representar el énfasis y la prosodia.
R.P.2.6. Proporcionar equivalentes visuales o táctiles para efectos sonoros o alertas.
R.P.2.7. Proporcionar descripciones visuales y/o emocionales para la interpretación musical
Punto de Verificación: R.P. 3. Ofrecer alternativas para la información visual
R.P.3.1. Proporcionar descripciones (textuales u orales) de todas las imágenes o animaciones.
R.P.3.2. Utilizar equivalentes táctiles para los elementos visuales clave que representen conceptos.
R.P.3.3. Proporcionar objetos físicos y modelos espaciales para transmitir la perspectiva o la interacción.
R.P.3.4. Proporcionar claves auditivas para los conceptos clave y las transiciones en la información visual.
R.P.3.5. Seguir las normas de accesibilidad al crear textos digitales.
R.P.3.6. Permitir que un ayudante competente lea el texto en voz alta.
R.P.3.7. Facilitar el acceso a programas de conversión de texto a voz.
DIRECTRIZ: Lenguaje, expresiones matemáticas y símbolos (R.LS)
Punto de Verificación: R.LS. 1. Clarificar símbolos/ vocabulario
R.LS.1.1. Enseñar previamente el vocabulario y símbolos para que se conecte con conocimientos previos.
R.LS.1.2. Proporcionar símbolos gráficos con descripciones textuales alternativas.
R.LS.1.3. Destacar cómo los términos o expresiones se componen de palabras o símbolos más sencillos.
R.LS.1.4. Incluir apoyo para el vocabulario y los símbolos en el texto.
R.LS.1.5. Apoyar las referencias desconocidas en el texto.
Punto de Verificación: R.LS. 2. Clarificar sintaxis
R.LS.2.1. Aclarar la sintaxis desconocida o la estructura subyacente.

Punto de Verificación: R.LS. 3. Facilitar decodificación de textos y símbolos
R.LS.3.1. Permitir la conversión de texto a voz. R.LS.3.2. Utilizar voz automática con notación matemática digital. R.LS. 3.3. Utilizar texto digital acompañado de grabación de voz humana. R.LS.3.4. Permitir flexibilidad y fácil acceso a múltiples representaciones de la notación cuando sea apropiado. R.LS. 3.5. Ofrecer aclaraciones sobre la notación mediante listas de términos clave.
Punto de Verificación: R.LS. 4. Promover comprensión entre idiomas
R.LS.4.1. Hacer que toda la información clave en el idioma dominante también esté disponible en su primera lengua y en ASL para los estudiantes sordos. R.LS.4.2. Vincular palabras clave de vocabulario con definiciones y pronunciaciones en lenguas dominantes y heredadas. R.LS.4.3. Definir vocabulario específico del dominio utilizando términos comunes y del dominio. R.LS.4.4. Proporcionar herramientas de traducción electrónica o enlaces a glosarios multilingües. R.LS.4.5. Incorporar apoyos visuales y no lingüísticos para aclarar el vocabulario.
Punto de Verificación: R.LS. 5. Ilustrar mediante distintos medios
R.LS.5.1. Presentar conceptos clave en forma de representación simbólica alternativa o manipulativo. R.LS.5.2. Establecer vínculos explícitos entre la información textual y representación adjunta en ilustraciones, ecuaciones, cuadros o diagramas.
DIRECTRIZ: Comprensión
Punto de Verificación: R.C.1. Activar conocimientos previos
R.C.1.1. Anclar la instrucción vinculando y activando conocimientos previos relevantes. R.C.1.2. Utilizar organizadores avanzados. R.C.1.3. Enseñar previamente conceptos críticos previos mediante demostraciones o modelos. R.C.1. 4. Unir conceptos con analogías y metáforas relevantes. R.C.1. 5. Hacer conexiones transversales explícitas.

Punto de Verificación: R.C.2. Señalar patrones, aspectos clave o características
R.C.2.1. Resaltar o enfatizar elementos clave en texto, gráficos, diagramas y fórmulas. R.C.2.2. Utilizar esquemas, organizadores gráficos, etc. para enfatizar ideas y relaciones clave. R.C.2.3. Utilizar múltiples ejemplos y no ejemplos para enfatizar características críticas. R.C.2.4. Utilizar señales e indicaciones para llamar la atención sobre características críticas. R.C.2.5. Resaltar las habilidades aprendidas previamente para resolver problemas.
Punto de Verificación: R.C.3. Guiar el procesamiento de la información y la visualización
R.C.3.1. Dar indicaciones explícitas para cada paso en procesos secuenciales. R.C.3.2. Proporcionar opciones para métodos y enfoques organizativos. R.C.3.3. Proporcionar modelos interactivos que guíen la exploración y nuevos entendimientos. R.C.3.4. Introducir andamios graduados que respalden las estrategias de procesamiento de información. R.C.3.5. Proporcionar múltiples puntos de entrada a una lección y vías opcionales a través del contenido R.C.3.6. “Dividir” la información en elementos más pequeños. R.C.3.7. Liberar información progresivamente. R.C.3.8. Eliminar distracciones innecesarias a menos que sean esenciales para el objetivo de instrucción.
Punto de Verificación: R.C.4. Maximizar la transferencia y generalización
R.C.4.1. Proporcionar listas de verificación, organizadores y recordatorio. R.C.4.2. Impulsar el uso de estrategias y dispositivos mnemotécnicos. R.C.4.3. Incorporar oportunidades explícitas para la revisión y la práctica. R.C.4.4. Proporcionar plantillas, organizadores gráficos y mapas para apoyar la toma de notas. R.C.4.5. Proporcionar andamios que conecten la nueva información con el conocimiento previo.

R.C.4.6. Incorporar nuevas ideas en ideas y contextos familiares.
R.C.4.7. Proporcionar oportunidades explícitas y respaldadas para generalizar el aprendizaje a situaciones nuevas.
R.C.4.8. Ofrecer oportunidades a lo largo del tiempo para revisar ideas clave y sus vínculos.
PRINCIPIO DE ACCIÓN Y EXPRESIÓN (AE)
DIRECTRIZ: Acciones Físicas (AE.PA)
Punto de Verificación: AE.PA.1. Variar los métodos de respuesta y navegación
AE.PA.1.1. Proporcionar alternativas en ritmo, sincronización, velocidad y rango de acción motora.
AE.PA.1.2. Proporcionar alternativas para responder físicamente o indicar selecciones.
AE.PA.1.3. Proporcionar alternativas para interactuar físicamente con materiales.
Punto de Verificación: AE.PA.2. Optimizar el acceso a herramientas y tecnologías de apoyo
AE.PA 2.1. Proporcionar comandos de teclado alternativos para la acción del mouse.
AE.PA 2.2. Crear opciones de interruptor y escaneo para aumentar el acceso independiente.
AE.PA 2.3. Proporcionar acceso a teclados alternativos.
AE.PA 2.4. Personalizar superposiciones para pantallas táctiles y teclados.
AE.PA 2.5. Seleccionar software que funcione perfectamente con alternativas de teclado y teclas.
DIRECTRIZ: Expresión y Comunicación (AE.EC)
Punto de Verificación: AE.EC.1. Usar múltiples medios de comunicación
AE.EC.1.1. Redactar en múltiples medios como texto, habla, dibujo, ilustración, etc.
AE.EC.1.2. Utilizar materiales manipulativos físicos.
AE.EC.1.3. Utilizar las redes sociales y herramientas interactivas.
AE.EC.1.4. Resolver problemas usando una variedad de estrategias.
Punto de Verificación: AE.EC.2. Usar múltiples herramientas para construir y componer

AE.EC.2.1. Proporcionar correctores ortográficos, gramaticales y software de predicción de palabras. AE.EC.2.2. Proporcionar software de conversión de texto a voz y viceversa. AE.EC.2.3. Proporcionar calculadoras, calculadoras gráficas, blocs de dibujo geométricos o papel cuadriculado pre-formateado. AE.EC.2.4. Proporcionar iniciadores o tiras de frases. AE.EC.2.5. Utilizar redes y herramientas de esquematización. AE.EC.2.6. Proporcionar software de diseño asistido por computadora, notación musical o software de notación matemática. AE.EC.2.7. Proporcionar manipulativos matemáticos virtuales o concretos. AE.EC.2.8. Utilizar aplicaciones web.
Punto de Verificación: AE.EC.3. Definir competencias con niveles de apoyo graduados para la práctica y la ejecución
AE.EC.3.1. Proporcionar modelos diferenciados para emular. AE.EC.3.2. Proporcionar mentores diferenciados. AE.EC.3.3. Proporcionar andamios que puedan implementarse gradualmente con mayor independencia y habilidades. AE.EC.3.4. Proporcionar retroalimentación diferenciada. AE.EC.3.5. Proporcionar múltiples ejemplos de soluciones novedosas a problemas auténticos.
DIRECTRIZ: Funciones Ejecutivas (AE.EF)
Punto de Verificación: AE.EF.1. Guiar el establecimiento adecuado de metas
AE.EF.1.1. Proporcionar indicaciones y apoyos para estimar esfuerzo, recursos y dificultad. AE.EF.1.2. Proporcionar modelos o ejemplos del proceso y producto del establecimiento de objetivos. AE.EF.1.3. Proporcionar guías y listas de verificación para el establecimiento de objetivos de andamiaje. AE.EF.1.4. Publicar metas, objetivos y cronogramas.
Punto de Verificación: AE.EF.2 Apoyar el desarrollo de estrategias y la planificación

AE.EF.2.1. Incorporar indicaciones y espacio para "detenerse y pensar" antes de actuar. AE.EF.2.2. Incorporar indicaciones para “mostrar y explicar su trabajo”. AE.EF.2.3. Proporcionar listas de verificación y plantillas de planificación. AE.EF.2.4. Incorporar entrenadores o mentores que modelen el pensamiento en voz alta. AE.EF.2.5. Proporcionar guías para dividir las metas a largo plazo en objetivos alcanzables a corto plazo.
Punto de Verificación: AE.EF.3. Facilitar la gestión de la información y los recursos
AE.EF.3.1. Proporcionar organizadores gráficos y plantillas para recopilar y organizar de la información. AE.EF.3.2. Incorporar indicaciones para categorizar y sistematizar. AE.EF.3.3. Proporcionar listas de verificación y guías para tomar notas.
Punto de Verificación: AE.EF.4. Impulsar la capacidad de monitoreo
AE.EF.4.1. Hacer preguntas para guiar el autocontrol y la reflexión. AE.EF.4.2. Mostrar representaciones del progreso. AE.EF.4.3. Utilizar plantillas que guíen la autorreflexión sobre la calidad y la integridad. AE.EF.4.4. Usar de listas de verificación de evaluación, rúbricas y ejemplos de desempeño.

Anexo 11: Enlace a archivos

Anexo 11.1. Guía para los docentes sobre la propuesta B y C



Anexo 11.2 Imágenes del taller control



Anexo 11.3. Imágenes del Taller cero



Anexo 11.4. Imágenes del taller semestral

