



Construyendo conocimiento especializado en geometría: un experimento de enseñanza en formación inicial de maestros

Miguel Montes

Universidad de Huelva, Centro de Investigación COIDESO

mail: miguel.montes@ddcc.uhu.es

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3181-0797>

Nuria Climent

Universidad de Huelva, Centro de Investigación COIDESO

mail: climent@uhu.es

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0064-1452>

Luis Carlos Contreras

Universidad de Huelva, Centro de Investigación COIDESO

mail: lcarlos@uhu.es

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0044-2365>

RESUMEN

Este trabajo tiene por objetivo caracterizar el conocimiento especializado que se construye en un aula de formación inicial de maestros con una tarea basada en el análisis de vídeos. Se diseñó un experimento de enseñanza que se implementó a pequeña escala con tres estudiantes para maestro, para definir los referentes que permitieron rediseñar la tarea en la siguiente fase, en la que se escaló a un aula de formación inicial. La tarea consistió en la visualización y discusión de un vídeo de aula sobre la construcción de una definición de 'polígono'. Tras el análisis, con el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, se identificó conocimiento movilizado sobre la definición de 'polígono' y sus elementos, la práctica matemática de definir, recursos y ejemplos para definir 'polígono', dificultades ligadas a dicho contenido, y su presencia en el currículo de primaria, consistentes con lo presente en la literatura de investigación. Esto nos permite reflexionar sobre cómo este tipo de tareas permite construir elementos de conocimiento.

Palabras Clave: Experimento de Enseñanza, Vídeo análisis, MTSK, Formación inicial de maestros, Polígono.

Building specialized knowledge in geometry: a teaching experiment in initial teacher training

ABSTRACT

This work aims to characterize the specialized knowledge built in a primary teachers initial training class by means of a task based on video analysis. We designed a first phase consisting in a small scale teaching experiment with three students, used to define the referents that would allow to redesign the task in the second phase. This second phase scaled up the experiment to group of students in a teacher training program. The task was based on the visualization and discussion of a video about building a definition of 'polygon'. After the analysis, conducted using the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model, we identified the knowledge mobilized by prospective teachers about the definition of 'polygon' and its elements, about the mathematical practice of defining, about resources and examples to define 'polygon', about learning difficulties related to that content, and about its presence in primary school syllabi, consistent with research literature. This work ends with reflections about how the task allows to build elements of specialized knowledge.

Keywords: Teaching experiment, Video analysis, MTSK, Primary teacher education, Polygon.

ISSN: 0210-2773

DOI: <https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.27-36>



1. Introducción

Una de las necesidades de la investigación en educación matemática es la transferencia de resultados (García *et al.*, 2010); en particular, a la formación de profesores. Así, dado el importante número de estudios desarrollados sobre el conocimiento del profesorado de matemáticas, parece indispensable que estos impacten en los programas de formación inicial. Este impacto puede darse en diferentes niveles, desde un rediseño curricular a nivel nacional, al diseño de planes de estudio, o al diseño de tareas para la formación de profesores (Montes *et al.*, 2019).

Desde esta perspectiva, y motivados por transferir los resultados de nuestra investigación a la formación de maestros y maestras, en la Universidad de Huelva, durante los dos últimos años se viene desarrollando una línea de investigación de diseño en forma de experimentos de enseñanza, en los que diferenciamos dos fases de implementación. En primer lugar, desarrollamos un experimento de enseñanza en escala “uno a uno” (Cobb y Gravemeijer, 2008) que denominaremos en pequeño grupo, con un grupo reducido de estudiantes para maestro o maestra (en adelante EPM) y, posteriormente, escalamos la implementación a todo el alumnado al que pertenece ese grupo, normalmente del último curso del Grado en Educación Primaria por la Universidad de Huelva (denominaremos esta segunda implementación como en gran grupo). El propósito de la primera fase es estudiar los resultados en un ambiente de laboratorio y con EPM seleccionados *ad hoc* por tener una alta capacidad de reflexión acerca de la matemática y su enseñanza y aprendizaje, como referente de lo máximo que podía dar de sí la tarea sin intervención de las personas formadores, para replantear su diseño antes de la fase de gran grupo.

En este artículo nos centramos en una tarea de análisis de fragmentos de vídeo de una sesión real de primaria en la que se introduce la definición de polígono y en el conocimiento especializado (Carrillo *et al.*, 2018) que construyen los y las EPM a partir de esta tarea. La pregunta de investigación que guía el trabajo es: ¿Qué conocimiento especializado se construye en un aula de formación inicial de maestros y maestras con una tarea basada en el análisis de vídeo? Diferenciaremos el conocimiento movilizado por los EPM en la primera fase del experimento y el conocimiento construido en el aula de formación inicial en la segunda fase.

2. Referentes teóricos

Las tareas en formación inicial deben tener función, forma y foco (Grevholm *et al.*, 2009). En la tarea que aquí se presenta, la función es construir conocimiento especializado en maestros y maestras que enseñarán matemáticas, modelizado a través del modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo *et al.*, 2018). La forma viene dada por el análisis de vídeo, como mediador de la construcción de conocimiento profesional. El foco, como concreción de la función, consiste en construir elementos concretos de MTSK, especialmente elementos ligados al conocimiento de los temas, de la práctica matemática, de las características del aprendizaje de las matemáticas, y de la enseñanza de las matemáticas, todo en relación con la definición de polígono. Así, esta investigación se basa en tres elementos principales: el análisis de vídeo como herramienta para la construcción de conocimiento especializado en la formación inicial de maestros, el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas como estructurador de la tarea, y la enseñanza y aprendizaje de los conceptos geométricos elementales.

2.1 Análisis de vídeo en formación inicial de profesores

El vídeo es un recurso cada vez más habitual tanto en la formación inicial como continua de profesores (Lin y Rowland, 2016). Su uso en formación inicial va desde una discusión libre, en la que los y las EPM suelen centrar su atención en aspectos generales y ligados a la gestión de la actividad (Star y Strickland, 2008), a un análisis pautado, en el que los estudiantes reciben consignas definidas sobre lo que deben observar y analizar (Fortuny y Rodríguez, 2012).

Las grabaciones propuestas a los futuros profesores pueden centrarse en la actividad del profesor o de los alumnos (en particular, en cómo es aprendido el contenido por estos, *e. g.*, Fernández *et al.*, 2018). La visualización de vídeos de clases reales aporta, además de un soporte para el aprendizaje matemático y de estrategias de enseñanza, la mejora de las actitudes del futuro profesorado hacia el aprendizaje tanto de elementos didácticos del contenido, como al propio contenido (Millman *et al.*, 2009).

Con tareas que involucren análisis de vídeos de sesiones reales se pretende también acercar la práctica de aula a las aulas de formación inicial. El vídeo posibilita pausar las acciones para poder reflexionar sobre ellas y ligar las discusiones a eventos concretos, lo que posibilita alejarlas de razonamientos generales a menudo vagos (Lampert y Ball, 1998).

Para que se puedan extraer beneficios del análisis de vídeos, esta debe ser una práctica con cierta continuidad, para que el futuro profesorado vaya aprendiendo a identificar eventos relevantes de la práctica de aula (Carrillo y Climent, 2008; 2008; van Es y Sherin, 2010) y pueda evolucionar de análisis puramente descriptivo a otros más interpretativos (Alsawaie y Alghazo, 2010).

2.2 MTSK como estructurador de la tarea

Los modelos de conocimiento profesional del profesor han tenido diversos usos en la literatura, fundamentalmente, para analizar y evaluar dicho conocimiento, y para estructurar tareas de construcción de conocimiento profesional (Ball *et al.*, 2008; Rowland *et al.*, 2009).

En los últimos años, se ha usado el modelo MTSK (Carrillo *et al.*, 2018) para comprender el conocimiento que los profesores ponen en juego al desempeñar su profesión (*e. g.*, Zakaryan y Ribeiro, 2019). Este modelo, propuesto desde una visión intrínseca de la noción de especialización, conserva con fines analíticos la división entre los dominios de conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido propuesta por Shulman (1986), y posteriormente refinada por Ball *et al.* (2008). En el MTSK se propone dividir el dominio del conocimiento matemático en tres subdominios: conocimiento de los temas (KoT, del inglés *Knowledge of Topics*), de la estructura de las matemáticas (KSM, del inglés *Knowledge of the Structure of Mathematics*), y de la práctica matemática (KPM, del inglés *Knowledge of Practices in Mathematics*). El KoT tiene como referente el conocimiento matemático objeto de enseñanza, abarcando su perspectiva fenomenológica y sus aplicaciones, los diversos registros de representación de los entes matemáticos, las definiciones de los mismos (incluyendo ejemplos que constituyen la imagen conceptual), sus propiedades y sus fundamentos, así como los procedimientos. El KSM pretende mostrar la idea de un conocimiento formado por múltiples conexiones entre los diversos entes matemáticos. El KPM contempla los elementos propios del quehacer matemático, entre los que se encuentra el conocimiento de las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones. En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, queda dividido en otros tres

subdominios: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, del inglés *Knowledge of Mathematics Teaching*), de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM, del inglés *Knowledge of Mathematics Learning Features*), y de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, del inglés *Knowledge of Mathematics Learning Standards*). El KFLM tiene como referente al que aprende, contemplando el conocimiento de teorías personales o formales sobre el aprendizaje, de las fortalezas o dificultades en los procesos de aprendizaje matemático, de las formas de interacción de los y las estudiantes con un contenido matemático y de los intereses y expectativas de los estudiantes ante determinados entes matemáticos. El KMT fija la mirada en quien enseña, contemplando el conocimiento sobre teorías (personales o formales) de enseñanza, de los recursos materiales y virtuales para desarrollarla y el conocimiento de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Por último, el KMLS implica una visión holística del currículo, incluyendo las expectativas (lo esperable) de aprendizaje en una etapa educativa determinada, el nivel de desarrollo conceptual o procedimental que es esperable en esa etapa y cómo un determinado contenido engarza en forma de secuencia con contenidos cronológicamente anteriores y posteriores. Los elementos que hemos detallado de cada uno de los subdominios constituyen, de hecho, un sistema de categorías e indicadores que dotan a este modelo de su poder analítico (véase Carrillo *et al.*, 2018).

La tarea que nos ocupa pretende que los y las EPM construyan conocimiento especializado en relación con la noción de polígono y su definición, para lo que tomamos como referencia algunos resultados de la investigación en educación matemática que sintetizamos a continuación.

2.3 Enseñanza y aprendizaje de los conceptos geométricos elementales

El aprendizaje de un concepto geométrico supone integrar la imagen conceptual y la definición conceptual del mismo, teniendo más fuerza la imagen que la definición (Vinner, 1991). La construcción de una imagen conceptual rica de un objeto geométrico requiere de la exposición a variedad de representaciones del mismo (Barrantes *et al.*, 2015), para evitar, entre otros, los distractores de orientación (propiedades visuales que el alumnado toma como propias del concepto y no lo son, como, por ejemplo, que los polígonos tengan siempre un lado sobre la horizontal) y de estructuración (propiedades que el alumnado excluye en su

esquema del concepto, por ejemplo al presentarle solo polígonos convexos) (Vinner y Hershkowitz, 1983).

En la construcción de la imagen conceptual juega un papel fundamental la ejemplificación (Watson y Mason, 2005). En particular, los ejemplos, los contraejemplos o los no-ejemplos ayudan a distinguir las características relevantes de las secundarias de un concepto y a la construcción de una imagen rica del mismo (Zaslavsky *et al.*, 2006). En relación con el conjunto de ejemplos de un concepto matemático conviene que el profesorado considere la dimensión de variación del concepto, como aquellas características que pueden modificarse manteniéndose la estructura del mismo (por ejemplo, el número de lados en el caso de polígono) (Figueiredo y Contreras, 2015).

La definición y la imagen conceptual entran en juego en el proceso de definir. Cuando definimos un concepto matemático estamos clasificándolo y, a la inversa, clasificar un conjunto de objetos supone definir las clases (De Villiers *et al.*, 2009). Las definiciones en matemáticas pueden ser descriptivas (se parte de la imagen del concepto e identifican las propiedades) o constructivas (se parte de una definición conceptual de la que se identifican propiedades que al variarlas llevan a una nueva definición) (de Villiers, 1998). Al definir en matemáticas hay que considerar las propiedades necesarias y suficientes o atributos críticos, esto es, que permiten describir el objeto matemático diferenciándolo de otros. Entre las propiedades atribuibles a una definición matemática se encuentran que esta sea correcta, económica, no circular, no contradictoria, inequívoca e independiente de la representación (Zaslavsky y Shir, 2005).

3. Metodología

Este estudio se enmarca en un proyecto de investigación, implementado durante los cursos 2017-2018 y 2018-2019, donde se desarrolló un experimento de enseñanza (Molina *et al.*, 2011) con dos fases de implementación, una en pequeño grupo, con tres EPM, y otra en gran grupo (Figura 1). Previamente, en la fase de preparación, se había seleccionado el vídeo, diseñado la plantilla de análisis (sobre la base de plantillas utilizadas en estudios anteriores; Climent *et al.*, 2016) y se habían seleccionado los y las informantes.

Para el experimento de enseñanza en pequeño grupo se seleccionó *ad hoc* a dos EPM de tercer curso y una EPM de cuarto curso de grado, de los cuales dos tenían un alto rendimiento en matemáticas, y otro una gran sensibilidad didáctica, tanto a

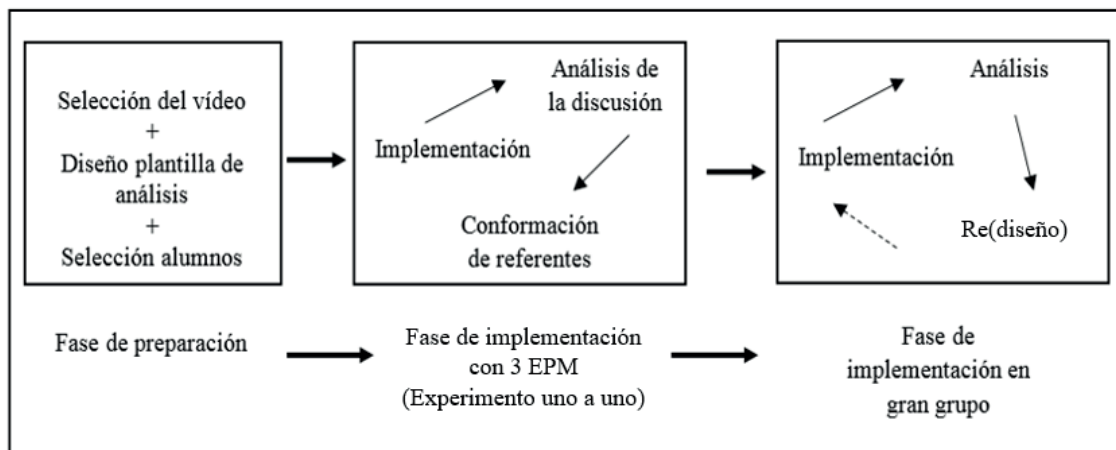


Figura 1: Proceso de desarrollo de la tarea (elaboración propia).

juicio del equipo de investigación y de sus formadores y formadoras durante el Grado de Primaria, como por sus calificaciones previas en el ámbito de las matemáticas; todos ellos demostraban una alta capacidad reflexiva y voluntad para involucrarse en el proyecto. Ninguno de los alumnos había recibido formación previa en relación con la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

A estos tres estudiantes, en primer lugar, se les dio una plantilla para el análisis del vídeo que focalizaba en indicadores de MTSK. En el vídeo, de 5º de Educación Primaria, Enrique, el maestro del aula, usaba una bolsa con recortes de distintas figuras geométricas. En primer lugar, pedía al alumnado que salieran uno a uno a la pizarra, escogiera una figura (al azar) y decidiera en qué grupo ponerla (le pedía hacer dos grupos sin dar más indicaciones), resultando la clasificación que se presenta en la Figura 2. Tras extraerse como primera figura un rectángulo, al sacar el siguiente alumno un triángulo y relacionar que con dos triángulos se puede hacer un polígono, lo coloca en el mismo grupo. La figura siguiente, un sector circular, es considerada claramente por los alumnos en otro grupo (por un lado curvo) y a partir de aquí se va llegando a la clasificación de la Figura 2, con la idea implícita de polígono. A partir de la agrupación realizada, los niños y niñas construyeron en gran grupo una definición de polígono. Este vídeo fue elegido por su potencial respecto de la construcción de elementos de MTSK vinculados a contenidos geométricos. En particular, esperábamos que diera pie a la construcción de conocimiento especializado en relación con la definición e imagen conceptual de polígono (KoT); clasificar y definir, definiciones constructivas frente a dadas y propiedades de una definición matemática (KPM); recursos para enseñar el concepto de polígono, papel de la posición como posible distractor en la enseñanza de polígonos, papel de los ejemplos y no ejemplos en la enseñanza y en la construcción de una definición (KMT); y dificultades en el aprendizaje de polígono (KFLM).



Figura 2: Figuras geométricas presentes en el vídeo (elaboración propia).

Los tres EPM del experimento en pequeño grupo, a los que denominaremos Ramón, Carla e Ismael (nombres ficticios), visionaron de manera individual el vídeo de la clase completa, tomando notas y elaborando un informe final de su análisis. A posteriori, los tres EPM de modo conjunto, con una formadora experta, discutieron sus análisis y los problemas con la plantilla (ver Tabla 1). Se recogió la videograbación de la reunión y sus informes de análisis. Tras el análisis de la discusión por parte del grupo de investigación, se seleccionaron dos extractos de vídeo (el primero correspondiente a la clasificación de las figuras en dos grupos y el segundo a la construcción de la definición de polígono), en los que había una mayor riqueza en relación con la reflexión de estos EPM, y se refinó la plantilla, realizando cambios menores, fundamentalmente de redacción y aclaración de vocabulario, hasta obtener la que presentamos en la Tabla 1, que orienta sobre elementos de KFLM (indicador1), KoT (2), KMT (3, 4 y 5) y KMLS (6). Este proceso conformó el rediseño de esta tarea (Molina *et al.*, 2011).

Tabla 1.

Plantilla para el análisis del vídeo (elaboración propia).

Aspectos a abordar	Qué sucede	Qué interpreto
1. Estrategias de pensamiento e ideas de los alumnos. Ideas intuitivas		
2. Contenidos que se trabajan y en qué se pone el énfasis		
3. Tipo de actividades		
4. Recursos: potencialidad, limitaciones y uso		
5. Ejemplos que se usan. Representaciones del contenido		
6. Adecuación al currículo		

La implementación del experimento en gran grupo se realizó en cuatro clases de cuarto curso del Grado de Educación Primaria con, aproximadamente, 70 EPM en cada una de ellas, como inicio al estudio del concepto de polígono en su formación inicial. Se proyectó en vídeo el primero de los extractos (sin la plantilla) y se discutió el análisis en el gran grupo. Después los EPM analizaron individualmente el segundo extracto del vídeo con la plantilla y se discutió en el gran grupo. Se recogieron las plantillas individuales y se videograbaron las clases. En este artículo presentamos los resultados obtenidos en una de las clases, con una formadora novel (3 años de experiencia). Elegimos esta clase por el posible interés añadido de la implementación del análisis de vídeo en gran grupo por parte de una formadora con poca experiencia.

Realizamos *a posteriori* un análisis de contenido de los datos recogidos con los subdominios, categorías e indicadores del MTSK (Escudero-Ávila *et al.*, 2015). Este análisis se realizó por los autores, triangulando los análisis posteriormente por un experto externo a esta investigación.

4. Resultados

En este apartado presentamos los resultados de la implementación en las dos fases del experimento de enseñanza (Figura 1), si bien detallamos más los resultados de la segunda fase, dado que, como hemos señalado, consideramos la primera como un paso previo para testar y rediseñar la actividad antes de implementarla en su contexto natural en un aula de formación.

4.1 Resultados de la implementación en pequeño grupo

Como resultado del análisis del vídeo con la plantilla, los tres EPM ponen en juego su imagen de polígono y cómo se definen algunos de sus elementos, se plantean cómo se define matemáticamente y cómo se puede construir una definición en un aula de primaria, cuestionándose la relación entre clasificar y definir. Analizan la actividad del aula desde el punto de vista del recurso empleado y las posibles dificultades de los alumnos, y reflexionan acerca de los polígonos en el currículo. Resumimos las ideas principales a continuación.

Definición de polígono y sus elementos (KoT). Muestran imágenes variadas del concepto de polígono. Se cuestionan la definición de lado y si solo se refiere al caso de polígono (si se puede llamar “lado” al segmento curvilíneo de un sector circular, por ejemplo). Consideran la circunferencia como un ejemplo de lo que no es polígono, aunque pueda pensarse como el límite de una sucesión de polígonos con un número creciente de lados.

Definir (KPM). Se cuestionan acerca del proceso de construcción de una definición en matemáticas y concluyen que necesitan profundizar en ello. Consideran que no es matemáticamente correcto construir definiciones solo con ejemplos, al igual que no se puede hacer una demostración matemática solo a partir de ejemplos:

Ismael: Como elemento matemático, construir una definición a partir de ejemplos, no es matemáticamente correcto. Se entiende, que, en una clase de primaria, lo que se quiere es que el concepto quede claro. A lo mejor, sí es una buena vía para que el niño lo entienda, pero matemáticamente no.

Consideran que para construir una definición matemática hay que identificar las propiedades necesarias del objeto matemático (en este caso de polígono). Creen que una definición no debe ser redundante (se plantean características necesarias y suficientes), como se observa en la siguiente transcripción:

R¹: ... me hizo gracia que en la definición pusiera con lados rectos y sin ninguna curva, es lo mismo.

F: ¿Tú hubieras recortado esa definición?

R: [...] No haría falta decir las dos cosas. Pero esa definición es la definitiva.

F: ¿Hubierais dejado esa definición o hubierais trabajado sobre ella?

I: Yo creo que, si es la primera que se le está presentando y los niños han llegado a esa conclusión, como conclusión está bien, aunque sea redundante.

Definir como actividad escolar (KMT). Ramón reconoce como válido iniciar un proceso de clasificación que tenga como consecuencia la construcción de una definición. Se cuestionan si clasificar es una actividad matemática previa necesaria a definir o tiene sentido solo como actividad escolar para que los alumnos se familiaricen con el objeto matemático antes de definirlo:

I: Sí, pero después al final de todo, cuando hace la puesta en común, no hace hincapié en eso [la clasificación]. Creo que hace hincapié en la definición. Si tu objetivo de todas las actividades era construir la definición, no le vería sentido que trabaje la clasificación. [...]

R: Sí, es para construir la definición.

Consideran que, desde el punto de vista escolar, es adecuado definir a partir de ejemplos.

Recursos y ejemplos para definir polígono (KMT). Entienden que las figuras en cartulina presentan restricciones para definir polígono, dado que no resaltan el borde. Valoran como aspecto positivo que las figuras se puedan manipular y mover. Piensan que para trabajar sobre la definición de un objeto matemático es importante mostrar ejemplos que no cumplan con las condiciones, además de ejemplos:

[...] las figuras hechas con cartulinas potencian el trabajo manipulativo que no les permitiría el lápiz y el papel, pero también limitaría la explicación de otros conceptos relacionados. Un claro ejemplo sería: Pueden explicar qué es una figura poligonal, pero no podrían explicar qué no es, utilizando el criterio de líneas abiertas y cerradas. [análisis individual de Carla]

Otra dificultad a tener en cuenta es saber si un polígono es lo que hay dentro y/o los bordes exteriores. Se podría salvar esta dificultad desde un principio dando una figura hueca, que solo presente los lados sin tener interior, así se percibirían de que son diferentes. [análisis individual de Ramón]

Dificultades para definir polígono (KFLM). Detectan dificultades en los alumnos de primaria para identificar las características que permiten definir polígono (diferenciando las propiedades relevantes del concepto de las irrelevantes):

Otra de las dificultades que podemos analizar es el problema que les supone [a los alumnos] diferenciar entre las propiedades que poseen todos los polígonos y las características propias del polígono que está intentando analizar. Esto se puede deber a que no tienen bien asimiladas estas propiedades, aunque de una manera casi intuitiva, sí saben reconocer un polígono [pero] no son capaces de diferenciar las propiedades generales de las particulares. [análisis individual de Ismael]

Polígonos en el currículo (KMFLS). Reconocen que el tema de polígonos está presente en el currículo desde Educación Infantil, aunque desconocen su secuenciación.

4.2 Resultados de la implementación en el aula de formación

A continuación, mostraremos evidencias del conocimiento movilizado por el gran grupo en la implementación en la segunda fase. En relación con los resultados de la fase en pequeño grupo, la discusión en la fase de gran grupo se centra en el aula de primaria, sin apenas alusiones a la práctica matemática en sí. Así, en relación con definir, no se diferencia entre definir en matemáticas y como actividad escolar, sino que se considera exclusivamente como actividad escolar y en relación con la de clasificar. Como en la fase en pequeño grupo, se reflexiona sobre el recurso y los ejemplos, en este caso con más énfasis, y no sólo se plantean dificultades del alumnado de primaria sino también características del concepto de polígono que les son más naturales.

4.2.1. Definir y clasificar

Se discute la finalidad de la actividad en el aula de primaria. En un principio, la mayoría de los y las EPM consideran que es trabajar la clasificación de figuras, mientras que un EPM considera que es definir polígono, pues definir consiste en diferenciar lo que es de lo que no es (Definir—KPM). La transcripción que sigue se desarrolla después del visionado del primer fragmento del vídeo, en el que en el aula de primaria se están formando dos grupos de figuras en la pizarra:

¹ Las intervenciones de los EPM son indicadas por su inicial (I: Ismael, R: Ramón, C: Carla), las de la formadora con F, y las de la formadora novel con FN.

FN: ¿Qué es lo que quiere hacer el profesor? [...] ¿qué contenido principal quiere trabajar?

EPM1: Yo diría que la definición matemática de polígono.

FN: ¿Y dónde está la definición?

EPM1: Los alumnos aprenden a identificar figuras planas de lo que es un polígono, porque el círculo, el sector circular y eso no son polígonos, entonces la clasificación que hacen [...] es polígonos y figuras planas que no son polígonos.

FN: Pero no ha hecho una definición de polígono. ¿No?

EPM1: No directamente, pero al final puede derivarse la actividad en eso.

Este EPM plantea la relación entre clasificar y definir y vislumbra que la clasificación puede suponer un acercamiento a la definición (KMT). Cuando comparten el análisis del segundo fragmento de vídeo, los EPM toman conciencia de lo que supone construir una definición (frente a aprender una definición ya dada), pues implica identificar las características críticas (KPM), como declara el siguiente EPM en la puesta en común:

EPM4: Lo que les cuesta es sacar todas las características que incluyen a ciertas figuras y que excluyen a otras figuras.

Esa toma de conciencia de la actividad de definir les hace cambiar su idea de cuál es el objetivo de la actividad en el aula de primaria:

FN: [Entonces, cuál es] El contenido ¿Qué es lo que se está trabajando en esa clase?

EPM5: La construcción de la definición de polígono.

En el aula de formación (en comparación con los resultados de los tres EPM descritos anteriormente, en la primera fase) no hay un cuestionamiento sobre cómo se define en matemáticas ni el papel de los ejemplos. Tampoco se analiza la definición del aula en relación con las características de una definición matemática. La discusión se mantiene ligada a la actividad del aula de primaria, sin alusiones a la práctica matemática en sí. De hecho, una EPM declara en un momento de la discusión:

EPM3: [...] porque una figura tenga lados rectos ya es un polígono, ya que con que solo tenga un lado curvo ya no es un polígono.

Esta EPM está identificando una condición necesaria también como suficiente (KPM). Este comentario no recibe atención en el aula de formación.

4.2.2. Recursos y ejemplos para definir polígono

El recurso tiene, para los EPM, la ventaja de que de las figuras en cartulina son manipulativas y se mueven, reconociendo la importancia del cambio de posición en los ejemplos de polígono que se muestra a los alumnos de primaria (KMT).

EPM6: [...] además de ser un recurso visual, [...] puedes ver otro tipo de figuras que a lo mejor visto en un libro no puedes moverlas o no puedes manipularlas.

Una EPM plantea como limitación del recurso el hecho de que se presente un conjunto reducido de ejemplos, lo que puede provocar que el alumno de primaria no generalice el concepto (KMT):

EPM4: Yo lo que he puesto como inconveniente es que [...] al final son finitas las figuras que tiene en la bolsa, entonces [...] puede provocar que el alumno no llegue a generalizar y se centre en esas figuras solo, en esos polígonos.

Esta reflexión es interesante porque plantea el papel de los ejemplos y la posibilidad de generalización a partir de ellos (KMT, KFLM). En el aula de formación, a instancias de la formadora, los EPM analizan el conjunto de ejemplos dados en el aula de primaria y valoran su conveniencia por su diversidad en cuanto a imágenes de polígono:

FN: ¿Qué aporta cada ejemplo?

EPM7: Que pueden ser regulares o no regulares.

EPM8: [...] Que puede ser cóncavo o convexo.

EPM2: [...] Si quiere que los alumnos por sí mismos sean capaces de sacar las características que excluyen del grupo polígono a ciertas figuras necesita todas esas figuras, que haya concavidad y convexidad, diferentes tipos de lados, regularidad e irregularidad...

Parecen pensar que el conjunto de ejemplos que se pongan para construir la definición de polígono debe destacar las características críticas del mismo. En ese sentido, identifican que el conjunto de figuras que pone el profesor no destaca convenientemente todas estas características (KMT):

EPM2: [...] las dificultades de los alumnos han surgido a partir de los ejemplos que ha puesto el profesor. Si tú pones esos ejemplos, los alumnos la única parte que han sacado ha sido esa primera [se refiere a todos los lados rectos], las otras han necesitado ayuda, que si la hubiesen tenido [los ejemplos] igual la hubiesen sacado ellos solos también.

Se plantean otros recursos que podrían haber mostrado estas características, como alambres o geotiras con los que se podrían construir figuras abiertas. Si bien no llegan a hacer explícita la necesidad del uso de no ejemplos para definir, como hacen los 3 EPM, se está movilizandando la idea. De hecho, en su reflexión individual en la plantilla de análisis, una EPM indica (Figura 3):

El grupo de figuras no poligonales es menor y les puede llevar a una confusión cuando vean otras figuras de este tipo.

Figura 3: Reflexión de EPM10 en la plantilla de análisis

En el aula de formación, el recurso y los ejemplos reciben más atención que en el análisis de los 3 EPM, en parte por la intervención de la formadora. Así, EPM8 indica en su plantilla de análisis (Figura 4):

Todas las figuras no son aleatorias. Están pensadas para reunir todas y cada una de las características, hasta las menos usuales.

Figura 4: Reflexión de EPM8 en la plantilla de análisis

4.2.3. Cómo abordan la definición de polígono estudiantes de primaria

A partir del vídeo, los EPM identifican tanto características de los polígonos que para los alumnos de primaria son naturales, como algunas más difíciles de percibir (KFLM). Así, consideran que lo más natural para los alumnos es clasificar por el número de lados (KFLM), que tienen dificultades para identificar si el

borde forma parte del polígono y, por el contrario, es claro que ha de tener todos los lados rectos:

EPM9: No ve que tiene cuatro lados pues entonces directamente lo pongo en otro.

EPM10: los alumnos piensan en un primer momento que el sector circular al no tener un lado recto no es un polígono por lo que deciden ponerlo en el otro lado de la pizarra.

EPM11: Yo he puesto que las dificultades que presentan han sido que los niños no sabían si un polígono era solamente el interior o el exterior y que por otro lado la mayoría solo se han fijado en la característica de que las figuras tenían que tener los lados rectos.

Durante el análisis del vídeo, y cuando se hace la discusión de la segunda parte del mismo, los EPM cambian radicalmente su idea de la dificultad de la actividad para alumnos de 5º de Primaria. Así, algunos de los EPM que tras el visionado de la primera parte de la actividad exponían su perplejidad por el hecho de se situara en 5º curso, toman conciencia de la dificultad que presenta diferenciar las características críticas de polígono (Dificultades-KFLM):

EPM8: [...] no la veo muy propia para el curso en el que están. [...] yo esto ya lo he dado en dos cursos antes, y me parece una actividad que es de total inicio porque lo más básico es esa primera gran clasificación y en cursos superiores se van concretando más.

[Comentario tras el visionado de la primera parte del vídeo]

EPM5: [...] He visto que supuestamente en el curso anterior han tenido que dar esto, pero les cuesta mucho trabajo cerrar lo que es un polígono y todas sus características.

FN: [...] ¿Qué os parece la adecuación de la actividad a quinto de primaria? ¿Seguís pensando que no es adecuada?

EPM2: A mí sí que me parece que se está volviendo adecuada porque extraer una definición sí que es una cosa más propia de quinto de primaria, no es una cosa tan sencilla para hacer en ciclos anteriores

[Comentarios en el análisis tras el visionado de la segunda parte del vídeo]

Esa toma de conciencia refleja que pasan de ver la actividad como de clasificar a percibirla como de definir, mostrando su sorpresa por el hecho de que se pueda construir en un aula de primaria una definición de polígono. Esta sorpresa es común a lo que reflejaban los tres EPM del experimento en pequeño grupo. Por otro lado, esto supone cuestionarse el nivel de desarrollo conceptual esperado en relación con este contenido en este curso (KMLS).

5. Conclusiones

Los resultados de las implementaciones en pequeño y gran grupo coinciden en los aspectos claves de la actividad. La tarea ha contribuido a la toma de conciencia de que la variabilidad de las propiedades de las figuras planas es esencial en el proceso de construcción del concepto y, por tanto, en su definición. Ello ha permitido a los EPM reflexionar sobre el papel de los ejemplos y los no-ejemplos (Zaslavsky *et al.*, 2006), sobre su consideración a la hora de diseñar o utilizar el recurso, sus implicaciones en el aprendizaje de los estudiantes (superando comentarios puramente actitudinales, para concretar en reflexiones que permiten construir conocimiento didáctico del contenido) y las consecuen-

cias curriculares de esas implicaciones. Además, ha supuesto el cuestionamiento del propio concepto de polígono, cuáles son sus características críticas y la práctica matemática de definir, en relación con la de clasificar (de Villiers *et al.*, 2009). Esto ha permitido que los y las EPM se planteen la posibilidad de definir como práctica matemática escolar y sus posibles dificultades.

Estas coincidencias son importantes en la medida que validan la potencialidad de la tarea, así como lo son las diferencias. Entre esas diferencias destacamos la reflexión sobre cómo se define en matemáticas, algunas características de una definición matemática (Zaslavsky y Shir, 2005) y sobre el papel de los ejemplos en ese proceso, surgido solo en la fase en pequeño grupo. Es posible que la calidad de la formación matemática de los tres EPM sea origen de esta diferencia. En contraposición, la diferenciación entre definir como actividad matemática y la definición en el aula de primaria es más profunda en el caso de la fase en gran grupo, planteándose consideraciones didácticas (Tsamir *et al.*, 2015). Esto último puede explicarse por el interés de la formadora en la ejemplificación, lo que puede justificar que en gran grupo se haya puesto más énfasis en el recurso y en la ejemplificación en la enseñanza.

Lo anterior, muestra cómo los EPM empiezan a movilizar con esta tarea ideas reflejadas en la investigación sobre el concepto de polígono y la práctica de definir, y su enseñanza y aprendizaje, como reflejábamos en el marco teórico, y que suponen la construcción de conocimiento especializado al respecto. Así, observamos que, junto con la reflexión sobre la ejemplificación, se percibe la importancia de la imagen conceptual frente a la definición (Vinner, 1991) y el papel de la enseñanza para contribuir a la construcción de una imagen conceptual rica (Barrantes *et al.*, 2015). Estos resultados son relevantes porque aportan una propuesta formativa que incide sobre la práctica de definir, tanto desde la perspectiva matemática como didáctica, y sobre la definición de polígono, dado que la investigación ha mostrado que los futuros profesores muestran dificultades a la hora de considerar condiciones necesarias y suficientes al definir un objeto geométrico, y una imagen restringida de algunos conceptos geométricos, con fuerte peso de imágenes prototípicas (Ullusoy, 2021; Ward, 2004; Codes *et al.*, 2019). Es obvio que para que este conocimiento especializado se construya de manera fundamentada, habrá que continuar el trabajo en la formación inicial, incluyendo referentes teóricos y la reflexión sobre ellos. Lo que observamos es que la tarea de análisis, a partir de clases reales de matemáticas de primaria, hace que para los alumnos tenga sentido el conocimiento especializado que se pretende construir, en línea con el aumento de motivación hacia dicho aprendizaje constatado en Millman *et al.* (2009).

En nuestro caso, el análisis de vídeo ha sido planteado con indicadores orientados hacia la construcción de conocimiento especializado, en un formato que podemos considerar semiabierto. Encontramos que esto ha posibilitado centrar la atención de los estudiantes y que la discusión no se centre en aspectos generales, como la investigación ha mostrado que suele ocurrir (Star y Strickland, 2008) y, a su vez, da cierta libertad el EPM para fijar su atención en cuestiones que le resulten relevantes, iniciándolos en el proceso de *noticing* o mirar con sentido situaciones de aula (Mason, 2021; Fernández *et al.*, 2018). Además, el foco en situaciones reales de aula, donde se puede apreciar tanto la actividad del profesor como la de los alumnos y la interacción entre ambas, permite que se pueda reflexionar sobre cuestiones tanto de enseñanza como de aprendizaje, estableciendo nexos entre ambas.

Los resultados obtenidos en gran grupo, en contraste con los de la fase de pequeño grupo, nos han servido para identificar aspectos del MTSK susceptibles de construirse de forma natural y

otros que, si bien están presentes potencialmente en la tarea, dependen más de la intervención del formador y de la interacción entre estudiantes. Así, la discusión sobre el proceso matemático de definir debe hacerse más explícita en la tarea. Por otro lado, este estudio apunta hacia la relevancia del estudio conocimiento del formador en la implementación de una tarea en un contexto formativo.

Este estudio se ha circunscrito a una única aula de formación inicial, dada la naturaleza cualitativa de la investigación desarrollada, y a un único ciclo (con dos fases) del experimento de enseñanza, gestionado por una formadora con poca experiencia. Sería interesante, en siguientes aproximaciones, desarrollar estudios que usen la misma tarea, o refinamientos de la misma, en aulas tanto del mismo contexto, como de contextos socioculturales notablemente diferentes, en pos de explorar posibles diferencias y/o matizaciones en el conocimiento especializado construido. Asimismo, se podría estudiar la diferencia en la gestión de la tarea, centrándonos en un formador con una experiencia más amplia, o con una formación diferente.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto RTI2018-096547-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, del centro de investigación COIDESO y del grupo de Investigación DESYM (HUM-168), y de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP. Gracias también a nuestro compañero y amigo José (Pepe) Carrillo por todo lo que aportó.

Referencias

- Alsawaie, O. N., y Alghazo, I. M. (2010). The effect of video-based approach on prospective teachers' ability to analyze mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(3), 223-241. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9138-8>
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, 9(2), 107-127. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6105>
- Carrillo, J., y Climent, N. (2008). From professional tasks in collaborative environments to educational tasks in mathematics teacher education. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, Use and Exemplars* (Vol. 4, pp. 215-234). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_15
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñán, M., Muñoz-Catalán, M. C., Barrera, V., y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las Matemáticas a través del análisis de vídeos. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 9, 85-103. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.108>
- Cobb, P., y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A.E. Kelly, R. A. Lesh y J. Baek (eds.), *Handbook of design research Methods in Education. Innovation in Science, technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315759593>
- Codes, M., Climent, N., Oliveros, I. (2019). Prospective primary teachers' knowledge about the mathematical practice of defining. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)* (pp. 3871-3878). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University y ERME.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Oliver, y K. Newstead (ed.), *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2 (pp. 248-255). University of Stellenbosch.
- De Villiers, M., Govender, R., y Patterson, N. (2009). Defining in Geometry. En T. Craine, y R. Rubinstein (eds.), *Understanding Geometry for a Changing World* (pp. 189-203). NCTM.
- Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M.C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., Aguilar, A. (2015). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60-68). SGSE.
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J., y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 39-61. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229>
- Fortuny, J. M., y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 23-37.
- García, F. J., Maas, K., y Wake, G. (2010). Theory meets practice: Working pragmatically within different cultures and traditions. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 445-457). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1>
- Grevholm, B., Millman, R., y Clarke, B. (2009). Function, Form, and Focus: The role of Tasks in Elementary Mathematics Teacher Education. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (eds.), *Tasks in Primary Mathematics Education: Purpose, Use and Exemplars* (pp. 1-5). New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_1
- Lampert, M., y Ball, D.L. (1998). *Teaching, Multimedia and Mathematics: Investigations of Real Practice*. Teachers College Press, Columbia University.
- Lin, F.L., y Rowland, T. (2016). Pre-Service and In-Service Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. En Á. Gutiérrez, G.C. Leder y P. Boero (eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483-519). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_14
- Mason, J. (2021). Learning about noticing, by, and through, noticing. *ZDM Mathematics Education*, 53, 231-243. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01192-4>
- Millman, R., Svec, K., y Williams, D. (2009). Tasks using video clips of children in a content Mathematics course for future elementary school teachers. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, Use, and Exemplars* (pp. 105-112). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_8
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experi-

- mentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435>
- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de Profesores de Matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176). Ediciones Universidad de Salamanca.
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. SAGE. <https://doi.org/10.4135/9781446279571>
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Star, J. R., y Strickland, S. K. (2008). Learning to observe: Using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(2), 107-125. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9063-7>
- Ulusoy, F. (2020). Prospective Early Childhood and Elementary School Mathematics Teachers' Concept Images and Concept Definitions of Triangles. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-22. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10105-6>
- van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(2), 155-176. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9130-3>
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5
- Vinner, S., y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *ZDM*, 83, 20-25. <https://doi.org/10.1007/BF00452223>
- Ward, R. A. (2004). An Investigation of K-8 Preservice Teachers' Concept Images and Mathematical Definitions of Polygons. *Issues in Teacher Education*, 13(2), 39-56.
- Watson, A., y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9781410613714>
- Zakaryan, D., y Ribeiro, M. (2019). Mathematics teachers' specialized knowledge: a secondary teacher's knowledge of rational numbers. *Research in Mathematics Education*, 21(1), 25-42. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1525422>
- Zaslavsky, O., Harel, G., y Manaster, A. (2006). A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 5, pp. 457-464).
- Zaslavsky, O., y Shir, K. (2005). Students' Conception of a Mathematical Definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317-346. <https://doi.org/10.2307/30035043>

