

Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas



El conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca de la proporcionalidad : un estudio de casos

**Memoria para optar al grado de doctor
presentada por:**

Christian Camilo Fuentes Leal

Fecha de lectura: 19 de octubre de 2020

Bajo la dirección del doctor:

Luis Carlos Contreras González

Huelva, 2020



Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas



**El conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca de la
proporcionalidad: Un estudio de caso.**

Memoria para optar al grado de doctor presentada por:

Christian Camilo Fuentes Leal

Bajo la dirección del doctor:

Luis Carlos Contreras

Huelva

El presente trabajo ha sido realizado gracias al apoyo financiero por comisión de estudios remunerada al exterior otorgado por la Secretaría de Educación de Bogotá, por medio de la resolución 1667 de 7 de septiembre de 2018.

Agradecimientos

Este trabajo es producto del esfuerzo, la constancia y compromiso de los miembros del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva. Gracias por permitirme participar activamente y crecer junto a ustedes.

Al Doctor Luis Carlos Contreras, director de esta tesis doctoral, por su comprensión, colaboración y su apoyo incondicional en todos estos años de formación.

A la profesora Sonia Vanegas y al Colegio Paulo VI, por permitirme entrar a sus aulas, sin su participación no se hubiera llevado a cabo esta investigación.

A las revisoras externas, Doctora Josefa Perdomo y Doctora Ceneida Fernández, gracias por enriquecer la investigación, así como mi labor profesional con sus comentarios y apreciaciones.

A la secretaría de educación de Bogotá, por apoyar propuestas que aportan a la mejora de la calidad de la educación.

A Andalucía, por dar oportunidades que en otras latitudes son privilegios.

A la persona que con su ejemplo, constancia y sacrificio me ha enseñado a hacer posible lo imposible, Luz Marina.

RESUMEN

Este trabajo es fruto de diversos esfuerzos por medio de los cuales se busca mostrar la importancia de la comprensión de la enseñanza de la proporcionalidad como un concepto clave en la construcción del pensamiento matemático. Se optó por el conocimiento especializado del profesor como objeto de estudio, para lo cual se empleó el paradigma interpretativo y el estudio de caso como herramientas que aportan para responder la pregunta de investigación ¿Qué conocimiento especializado moviliza un profesor de enseñanza secundaria cuando enseña proporcionalidad?

Para responder a esta pregunta, se optó por usar la metodología bottom-up, top-down, que busca establecer una relación ascendente y descendente entre los datos recolectados y la teoría sobre el objeto de estudio. En este sentido, inicialmente se grabaron y sistematizaron cuatro sesiones de clase en las que se enseñó dicho concepto en las instalaciones de un colegio público de la ciudad de Bogotá. Se usó el modelo MTSK como herramienta de análisis, creado en el marco del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva y usado previamente en varias tesis doctorales que también indagan acerca del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Una vez se recolectaron los datos por medio de la grabación de las clases, la toma de apuntes en el diario de campo y la celebración de entrevistas con la profesora informante, se hace un análisis cronológico que busca establecer cada uno de los veinte episodios estudiados y los subdominios presentes en cada uno de estos episodios. Gracias a la adquisición de una sensibilidad teórica, también se pudo establecer nuevas relaciones entre estos subdominios por medio de la indagación sobre las oportunidades e indicios observados.

Posteriormente, para la discusión del análisis de los datos, se hace una reflexión en dos sentidos; cómo la presente investigación aporta a, o debate, investigaciones previas sobre el conocimiento del profesor acerca de la proporcionalidad y cómo las relaciones entre los datos pueden aportar en la comprensión de los diferentes subdominios del modelo MTSK.

Las conclusiones giran en torno a los aportes teóricos y metodológicos que ofrece el modelo MTSK y posibles impactos que puede tener esta investigación, entre los que se encuentran la elaboración de propuestas de formación de profesores, la creación de nuevos espacios académicos de reflexión sobre el conocimiento especializado del profesor, la identificación de necesidades de formación de los profesores de matemáticas, el diseño de secuencias de enseñanza de la proporcionalidad y la comprensión y superación de dificultades de aprendizaje de la proporcionalidad.

Finalmente, se presentan las limitantes y proyecciones futuras de la presente investigación, mostrando así los procesos investigativos como construcciones cíclicas que pueden dejar cuestiones y situaciones abiertas para posteriores indagaciones sobre conocimiento especializado del profesor.

Palabras Clave: Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK), Proporcionalidad, Estudio de caso.

ABSTRACT

This work is the result of various efforts through which we seek to show the importance of understanding the teaching of proportionality as a key concept in the construction of mathematical thinking. The specialized knowledge of the teacher was chosen as the object of study, for which the interpretive paradigm and the case study were used as contributing tools to answer the research question: What specialized knowledge does a secondary school teacher mobilize when teaching proportionality?

To answer this question, we chose to use the bottom-up, top-down methodology, which seeks to establish an ascending and descending relationship between the data collected and the theory on the object of study. In this sense, four class sessions were initially recorded and systematized in which this concept was taught in the facilities of a public school in the city of Bogotá. The MTSK model was used as an analysis tool, created within the framework of the Research Seminar in Mathematical Didactics (SIDM) of the University of Huelva and previously used in several doctoral theses that also inquire about the specialized knowledge of the mathematics teacher.

Once the data was collected through the recording of the classes, taking notes in the field diary and holding interviews with the informant teacher, a chronological analysis is carried out that seeks to establish each of the twenty episodes studied and the subdomains present in each of these episodes. Thanks to the acquisition of a theoretical sensitivity, it was also possible to establish new relationships between these subdomains by investigating the opportunities and indications observed.

Subsequently, for the discussion of data analysis, a reflection is made in two directions; how the present investigation contributes to, or debates, previous investigations on the teacher's knowledge about proportionality and how the relationships between the data can contribute to the understanding of the different subdomains of the MTSK model.

The conclusions revolve around the theoretical and methodological contributions offered by the MTSK model and possible impacts that this research may have, among which are the preparation of proposals for teacher training, the creation of new academic spaces for reflection on knowledge teacher training, identifying the training needs of mathematics teachers, designing proportionality teaching sequences, and understanding and overcoming proportionality learning difficulties.

Finally, the limitations and future projections of the present investigation are presented, thus showing the investigative processes as cyclical constructions that can leave questions and situations open for subsequent inquiries about the teacher's specialized knowledge.

Key Words: Specialized knowledge of the Mathematics teacher (MTSK), Proportionality, Case study.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	14
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	19
2.1. La proporcionalidad: Una breve revisión teórica	20
2.2. Conocimiento matemático sobre el concepto de proporcionalidad	29
2.2. 1. Proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa	36
2.2.2. Proporcionalidad aritmética y geométrica.....	37
2.2.3 Una aproximación sobre la proporcionalidad en el contexto escolar	43
2.2.3.1. Errores y obstáculos epistemológicos del concepto de proporcionalidad	63
2.3 El conocimiento profesional del profesor	81
2.4 Antecedentes del modelo MTSK	83
2.5 El modelo MTSK	93
2.5.1 El conocimiento matemático (MK)	95
El conocimiento de los temas (KoT)	96
El conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)	100
El conocimiento de la práctica matemática (KPM)	101
2.5.2 El conocimiento didáctico de contenido (PCK)	103
El conocimiento de las características del aprendizaje en matemáticas (KFLM)	103
El Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	106
El Conocimiento de los estándares de aprendizaje matemáticos (KMLS)	109
2.5.3 Las concepciones y las creencias	117
3. MARCO METODOLÓGICO	118
3.1 Caracterización del estudio	120
3.2 Caracterización del contexto de la profesora Sonia	121
3.3 Estudio de caso: Diseño de la propuesta de investigación	123

3.4 Técnicas de recolección de la información	123
3.5 Técnicas de tratamiento, sistematización y análisis de la información	124
4. ANÁLISIS CRONOLÓGICO	129
Sesión 1 – Razón y proporcionalidad de segmentos	132
Episodio 1. [E1.1, U 1-46] Introducción del concepto de razón entre segmentos 133	
Episodio 2 [E1.2, 47-82] Procedimiento para encontrar el valor de un segmento cuando exista proporcionalidad.....	137
Episodio 3 [E1.3, 63-92] Resolución de situación real usando proporcionalidad para encontrar el valor de un segmento.....	139
Episodio 4 [E1.4, U93-112] Resolución de ejercicios en contextos matemáticos usando proporcionalidad para encontrar el valor de un segmento.....	143
Episodio 5 [E1.5, 114-156] Resolución de ejercicios asociados a la razón y proporción en contextos geométricos	145
Sesión 2 – Proporcionalidad geométrica e introducción al teorema de Tales.....	153
Episodio 6 [E2.1, U157-171] Comprobación de relaciones de proporcionalidad en la construcción.....	154
Episodio 7 [E2.2, U172-193] Comprobación de relaciones de proporcionalidad en la construcción.....	157
Episodio 8 [E2.3, U194-215] Construcción de segmentos homólogos.....	160
Episodio 9 [E2.4, U225-232] Búsqueda de dos pares de segmentos homólogos dado un segmento	162
Sesión 3 – Teorema de Tales.....	163
Episodio 10 [E3.1, U 234-240] Teorema de Tales para encontrar la altura de la pirámide de Keops	164
Episodio 11 [E3.2, U241-254] Presentación del teorema de Tales entre dos rectas transversales y rectas paralelas.....	166

Episodio 12 [E3.3, U254-270] Resolución de un segmento usando teorema de Tales entre tres rectas paralelas.....	168
Episodio 13 [E3.4, U271-293] Resolución de dos segmentos usando teorema de Tales entre cuatro rectas paralelas.....	169
Sesión 4 – Semejanza de triángulos	173
Episodio 14 [E4.1, U295 -308] Criterios de semejanza de triángulos.....	174
Episodio 15 [E4.2, U309-318] Aplicación de los criterios de semejanza en un contexto real.....	177
Episodio 16 [E4.3, U319-328-] Resolución de triángulos semejantes en contexto matemático.....	179
Episodio 17 [E4.4, U329-339] Resolución de triángulos semejantes en contexto matemático, explicitando el despeje de incógnitas	180
Episodio 18 [E4.5, U340-357] Resolución de triángulos semejantes por medio de sus ángulos	181
Episodio 19 [E4.6, U359-371] Aplicación del teorema de Tales en la búsqueda de la altura de un edificio	183
Episodio 20 [E4.7, U372-382] Resolución de triángulos semejantes con dos incógnitas en contexto matemático	185
5. ESTABLECIENDO EL MTSK DE LA PROFESORA.....	187
5.1 Relaciones entre los subdominios del MTSK de la profesora	200
6. CONSTRUYENDO EL MTSK PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD.....	217
7. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	243
7.1 Con respecto a las investigaciones previas	244
7.2 Con respecto al MTSK.....	250
8. CONCLUSIONES	265
8.1 Aportes teóricos y metodológicos que ofrece el MTSK.....	266

8.2 Impactos de los resultados	273
8.3 Limitaciones y proyecciones	279
9. BIBLIOGRAFÍA	282
10. ANEXOS	289
10.1 Relaciones identificadas en la profesora entre subdominios del MTSK	290
10.2 Relaciones evocadas entre subdominios del MTSK	292
10.3 Relaciones identificadas en la profesora entre subdominios del MTSK	295

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Representaciones sobre proporcionalidad propuestas por Fiol y Fortuny (1990)...	44
Tabla 2 Niveles de razonamiento proporcional en Khoury (2002)	61
Tabla 3 Síntesis de las características de propuestas de enseñanza de la proporcionalidad.	63
Tabla 4 Identificación de constante de proporcionalidad Yáñez et al (2016)	68
Tabla 5 Síntesis de errores y dificultades en la enseñanza de la proporcionalidad	73
Tabla 6 Representaciones de la razón y la proporcionalidad propuesta en Valverde (2012)	100
Tabla 7 Conocimientos que facilitan la relación del conocimiento con conocimientos anteriores y posteriores	101
Tabla 8 Posibilidades y limitaciones de los materiales y de las estrategias para la enseñanza de la proporcionalidad según Godino y Batanero (2002).....	108
Tabla 9 Materiales para enseñar proporcionalidad según Godino (2012).....	108
Tabla 10 . Malla de sistematización de la información recolectada	125
Tabla 11 Codificación de las transcripciones	126
Tabla 12 Organización de la información por subdominios.....	127
Tabla 13 Episodios de la sesión 1.....	133
Tabla 14 Episodios de la sesión 2.....	154
Tabla 15 Episodios de la sesión 3.....	164
Tabla 16 Episodios de la sesión 4.....	174
Tabla 17 Síntesis de número de indicadores encontrados	199
Tabla 18 Evidencias e indicios del dominio MK	231
Tabla 19 Evidencias e indicios del dominio PCK	240
Tabla 20 Oportunidades identificadas en el modelo MTSK	241
Tabla 21 Totalización de las evidencias, indicios y las oportunidades	268
Tabla 22 Relaciones entre las categorías del MTSK.....	270

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Representación gráfica del problema de investigación	16
Figura 2 Triángulos semejantes	40
Figura 3 Triángulos cuya razón de semejanza es 4	41
Figura 4 Mapas con diferentes escalas numéricas	42
Figura 5 Mapa con escala gráfica de la región autónoma de Andalucía	42
Figura 6 Relación de conceptos matemáticos relativos a la proporcionalidad Solomon (1987)	46
Figura 7 Primer método de trabajo presentado en Fiol y Fortuny (1990)	57
Figura 8 Representaciones asociadas a la enseñanza de la proporcionalidad Ruiz (2006) ..	58
Figura 9 Ejemplo geométrico presentado Carrillo et al (2016)	69
Figura 10 Propuesta del conocimiento del profesor según Shulman (1986)	84
Figura 11 Propuesta del conocimiento del profesor según Ball, Thames y Phelps (2008) ..	88
Figura 12 Propuesta del conocimiento especializado del profesor según el modelo MTSK94	
Figura 13 Representación gráfica del modelo bottom-up, top-down	121
Figura 14 Transcripción inicial de la información	125
Figura 15 Representarán gráfica de las temáticas trabajadas en las 4 sesiones	131
Figura 16 Escuadra de 45 grados usada por la profesora para explicar la relación entre ángulos iguales a lados iguales en un triángulo.	140
Figura 17 Representación gráfica del problema de la altura de un pino usando una escuadra de 60 grados	141
Figura 18 Situaciones del segundo punto de la guía de trabajo	147
Figura 19 Situaciones del tercer punto de la guía de trabajo	148
Figura 20 Situaciones del cuarto punto de la guía de trabajo	148
Figura 21 Situación de proporcionalidad entre lados de un cuadrilátero, donde AM es paralelo a DP	149
Figura 22 Procedimiento elaborado por la profesora comprobando la proporcionalidad de dos parejas de lados	150
Figura 23 Ejercicios del quinto y sexto punto de la guía de trabajo	152
Figura 24 Ejercicio del séptimo punto de la guía de trabajo	153
Figura 25 Posición de las escuadras presentada por la profesora y la de un estudiante	155

Figura 26 Construcción de líneas paralelas hecha por uno de los estudiantes	156
Figura 27 Representación gráfica del teorema de Tales presentado por la profesora.	158
Figura 28 Establecimiento de las razones para comprobar su proporcionalidad	161
Figura 29 Ubicación del segmento de referencia	162
Figura 30 Representación elaborada por la profesora donde se presentan las propiedades de un triángulo rectángulo isósceles, relacionándola con la escuadra de 45 grados	165
Figura 31 Representación de las diferentes posiciones del sol con respecto a la hora en Colombia	166
Figura 32 Establecimiento de segmentos homólogos.....	167
Figura 33 Representación del problema propuesto por la profesora	168
Figura 34 Representación gráfica del problema elaborado por la profesora.....	170
Figura 35 Primera estrategia de solución presentada por la profesora	171
Figura 36 Segunda estrategia presentada por la profesora	171
Figura 37 Representación usada por la profesora para resolver el problema.	176
Figura 38 Representación elaborada por la profesora	179
Figura 39 Representación gráfica presentada por la profesora.....	180
Figura 40 Representación gráfica presentada por la profesora.....	182
Figura 41 Representación gráfica propuesta por uno de los estudiantes para resolver el problema	184
Figura 42 Representación gráfica construida por la profesora	185

1. INTRODUCCIÓN

La investigación y la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas es un amplio campo de estudio que contribuye en la elaboración de nuevas propuestas curriculares de formación de profesores, pues estas indagaciones aportan a la construcción de propuestas de aprendizaje y a la comprensión de las necesidades de formación de los profesores de matemáticas.

En lo conceptual, y desde la antigüedad, la proporcionalidad ha tenido una importancia capital en la matemática, primero en los estudios de Euclides de Samos, uno de los primeros matemáticos que hace un estudio sistemático de este concepto en un contexto geométrico presente en los libros V al X de *Los Elementos*. De igual forma, este concepto ha desempeñado un rol de relevancia en disciplinas como la arquitectura, la economía, el arte y hasta la culinaria, revelando así la importancia de la proporcionalidad en la construcción de un acervo cultural en la humanidad desde una perspectiva transdisciplinar.

Desde esta perspectiva, la proporcionalidad como concepto matemático ha sido utilizada desde las primeras civilizaciones hace más de 5000 años y ha sido de gran importancia en el desarrollo del diario acontecer de diferentes grupos humanos. Justamente, esta característica hace que la comprensión del conocimiento especializado del profesor acerca de la proporcionalidad sea un concepto clave en el campo de la investigación en educación matemática, pues este concepto está presente desde la Educación Primaria, en el uso de la estructura multiplicativa, las fracciones y los porcentajes; en la Educación Secundaria es necesaria para la comprensión de fenómenos como función lineal, congruencia y semejanza; y en la universidad, en la construcción de relaciones de variación entre magnitudes para llegar a los conceptos de derivada o integral.

Se considera que el concepto de proporcionalidad es de gran importancia porque constituye la base de conocimientos matemáticos más avanzados, dado que el uso de pensamiento proporcional establece una conexión entre la aritmética y el inicio al pensamiento algebraico y variacional. Para autores como Lamon (2005), el razonamiento proporcional desempeña un rol importante en las aplicaciones de los principios físicos como la mecánica, la fuerza, la óptica y la acústica.

Dada la trascendencia de este concepto, se puede inferir que la comprensión de la proporcionalidad es un proceso dispendioso y complejo, que se construye a lo largo de todo el proceso educativo; sin embargo, diversas investigaciones de autores como Rivas, Godino y Castro (2012), Ruiz (2006), Rivas, Rondón y Triviño (2017), Oller (2012), Godino y Batanero (2012), Fernández y Llinares (2012), Ceballos (2012), Caputo y Soto (2013), Balderas y Guerra (2014) entre otros han indagado sobre la construcción del pensamiento proporcional, la relación entre el conocimiento especializado del profesor y la proporcionalidad; también han señalado la persistencia de las dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de la proporcionalidad tanto en los estudiantes como en profesores en ejercicio, dando énfasis así a una tensión o conflicto entre la importancia y transversalidad de la proporcionalidad y la persistencia de las dificultades relacionada con su comprensión y uso a lo largo de diferentes etapas escolares.

La anterior tensión o conflicto entre la importancia de la proporcionalidad y la persistencia de las dificultades de su enseñanza genera la necesidad de elaborar investigaciones que indaguen en la comprensión del conocimiento que moviliza un profesor para la enseñanza de este concepto en los contextos educativos, buscando así una reflexión y comprensión que permita abordar una transformación de las prácticas pedagógicas. En el siguiente esquema se presenta la situación que generó la necesidad de hacer la presente investigación y cómo esta puede aportar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

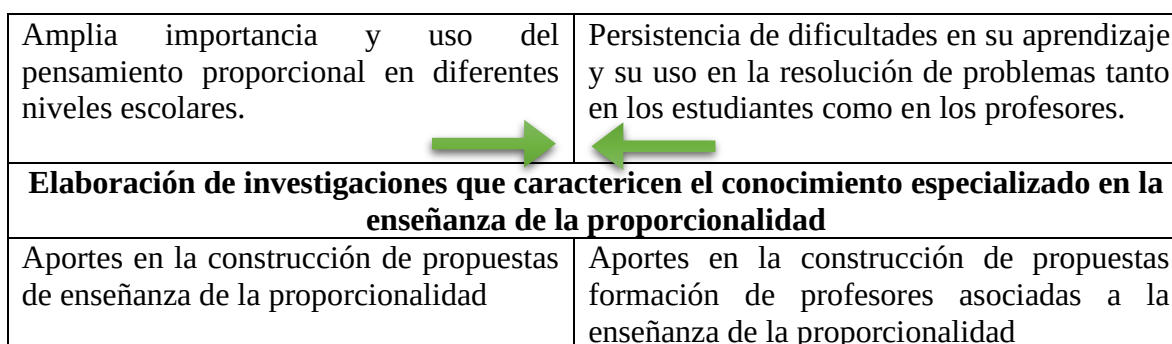


Figura 1 Representación gráfica del problema de investigación

Una vez se ha detectado una tensión o problema de investigación y una posible respuesta, conjeturamos que estas están asociadas a la comprensión del conocimiento del profesor; ello justifica la implementación de los aportes sobre la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas construidos a partir del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) y del modelo MTSK en la Universidad de Huelva, donde se han dirigido diferentes tesis doctorales acerca del conocimiento especializado del profesor, lo cual posiciona tanto al SIDM como al modelo MTSK como herramientas necesarias dada su larga trayectoria en la investigación del tema.

En el presente documento se muestra una aproximación al conocimiento especializado del profesor de matemáticas asociado al concepto de proporcionalidad. Para esto, en primera medida, se hace una sensibilización teórica a partir de un recorrido a través modelos del conocimiento profesional del profesor, que aportan al modelo MTSK (Mathematics Teachers' Specialized Knowledge), el cual es desarrollado por la universidad de Huelva. Además, posteriormente, se realiza una reflexión teórica respecto del concepto de proporcionalidad y su relación con el currículo escolar como una estrategia de vital importancia para comprender el conocimiento que se puede asociar al profesor de matemáticas.

Con respecto al marco metodológico, es importante clarificar que el presente estudio se basa en un estudio de caso como tipo de investigación, además del uso de la estrategia bottom-up, top-down, la cual se caracteriza por plantear una relación entre constructos teóricos y la práctica, además del uso de estudios de caso para la creación de nuevas teorías. Posteriormente, en este apartado también se mencionarán los criterios de selección de la informante, en este caso fue seleccionada una profesora de matemáticas de educación secundaria en un colegio público de la ciudad de Bogotá, además se fundamenta la forma en la cual se obtuvieron los datos a analizar.

Con respecto a la sección de análisis de la información, en este apartado se presentan las categorías emergentes encontradas de acuerdo a la sistematización de los datos, las cuales aportan a la comprensión del objeto de investigación en conjunto. Finalmente, en el apartado

metodológico se propone una relación entre las categorías emergentes y el modelo teórico usado para la comprensión del conocimiento especializado (MTSK), complementando con reflexiones y algunas proyecciones.

Se considera que este tipo de investigaciones aportan a la identificación y caracterización de elementos que deberían tener en cuenta las instituciones universitarias en la creación de sus currículos, además de brindar un espacio de reflexión y la mejora de la práctica pedagógica en matemáticas.

En cualquier investigación es necesario delimitar los alcances, para esto es importante precisar que la pregunta de investigación en este caso será ¿Qué conocimiento especializado de proporcionalidad moviliza un profesor de enseñanza secundaria cuando enseña proporcionalidad? Para poder responder esta incógnita se usará el MTSK como una propuesta teórica que conceptualiza el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, siendo el objetivo principal de la presente investigación:

- Identificar, por medio del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), las características del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas cuando enseña el concepto de proporcionalidad

Para lograr este objetivo se plantean como objetivos específicos:

- Comprender las categorías emergentes de los datos recolectados relacionándolos con la propuesta del MTSK.
- Establecer relaciones entre los subdominios del MTSK relativos al concepto de proporcionalidad.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Una vez se ha expuesto el problema a investigar, los objetivos y sus alcances en el marco de la presente investigación, además de una primera aproximación a una justificación del uso del modelo MTSK para la comprensión del conocimiento especializado del profesor en la enseñanza de la proporcionalidad, es necesario presentar una aproximación al contenido que será centro de la investigación (proporcionalidad). Este primer acercamiento obrará como estrategia de sensibilización teórica para la comprensión del conocimiento especializado asociado a la enseñanza de la proporcionalidad.

El presente apartado está compuesto por cuatro elementos. Inicialmente se abordará del concepto de proporcionalidad como construcción humana siguiendo las conceptualizaciones históricas y su relación con el currículo escolar de matemáticas. Posteriormente, se hará una presentación de las propuestas teóricas acerca del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, seguida de la presentación del modelo MTSK como una propuesta organizadora del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, en este caso del conocimiento con respecto al concepto de proporcionalidad.

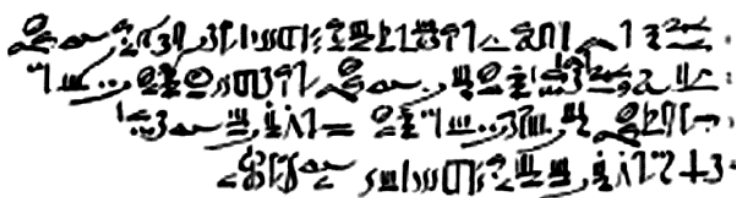
2.1. La proporcionalidad: Una breve revisión teórica

Para comprender aspectos fenomenológicos que permitan establecer las características y la evolución de la proporcionalidad, se hace necesario presentar algunos elementos del desarrollo histórico de este concepto. Posteriormente se presentarán algunos antecedentes de investigación con respecto a la didáctica relacionada con el conocimiento del profesor respecto de la proporcionalidad, después se mostrarán algunos antecedentes asociados a la enseñanza de la proporcionalidad y finalmente se hará una presentación del currículo Colombiano en matemáticas de la educación básica en relación con el concepto de proporcionalidad, dado que el contexto en el cual se recolectó la información fue un colegio público de este país.

En el desarrollo del concepto de proporcionalidad se pueden identificar varios hitos. Primero están los problemas prácticos desarrollados por las culturas Egipcia, China e Hindú; luego, están los aportes del mundo Griego en *Los Elementos* (Siglo III A.C.); posteriormente,

están los aportes de la cultura China cifrados en el comentario de Liu Hui al Jiu Zhang Suang Suan Shu (Siglo III); después están los aportes del mundo árabe dados por el proceso de aritmetización de la proporcionalidad en la edad media hechos por Ommar al Khayyam a *Los Elementos* (Siglo XI); finalmente, está la introducción de estos aportes al continente Europeo detrás la traducción de *Los Elementos* por parte de Giovanni Campano (Siglo XIII).

Unos de los primeros antecedentes del tratamiento de la proporcionalidad provienen de la resolución de problemas prácticos en contexto real y uno de los más antiguos ejemplos está presente en el famoso papiro del Rhind, el cual data del siglo XVII A.C. En este texto se presentan y se resuelven diferentes problemas matemáticos relacionados con la vida cotidiana del Antiguo Egipto.



Problema 66 del papiro del Rhind: “Si 10 hekats¹ de grasa deben durar un año, ¿Cuánta grasa puede usarse en un día?”

1	365
2	730
4	1460
8	2920
2/3	243 1/3
1/10	36 1/2
1/2190	1/6
Total	$8 \frac{2}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2190}$

Solución: Convertir los 10 *hekat* a ro ²; para obtener 3200 *ro*, convertir el año a días (365). Obtener 3200 operando en 365. El resultado es $8 \frac{2}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2190}$. Esto hace que sea un día $\frac{1}{64}$ *hekat* $3 \frac{2}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2190}$ *ro* Chace (1979) p. 129

Por otro lado, existen otros textos de la cultura China del siglo II A.C. e Hindú, de la misma época, presentados por autores como Cullen (2007) y Patwardan (2001) en los que se pueden caracterizar problemas prácticos asociados a la proporcionalidad en los cuales se presentan técnicas y algoritmos³ diferentes a los que serán planteados posteriormente.

¹ Unidad de volumen del Antiguo Egipto que equivale a 4.5 litros

² Unidad de volumen del Antiguo Egipto que equivale a 1/320 de heka

³ Por ejemplo, encontrar la cantidad que obtenida con base una cantidad dada de producto en un proceso que involucra una proporción fija que se desperdicia o resolver problemas asociados a la distribución de productos y dinero a tasas proporcionales.

Justamente las culturas de Grecia y China buscaron trascender la resolución de problemas prácticos sobre proporcionalidad al teorizar acerca de este concepto. En la propuesta Griega expuesta en *Los Elementos*, se recoge sistemáticamente el tratamiento de este concepto por matemáticos como Pitágoras, Eudoxo o Tales; por otro lado, está la propuesta China en el “Comentario de Liu Hui al Jiu Zhang Suang Suan Shu” (más conocido como Los Nueve Capítulos), se propone una perspectiva de naturaleza, técnica y razonamientos diferentes a los presentados por el paradigma Griego. A continuación, se profundizará sobre las características de cada una de estas propuestas.

La razón y proporción en el mundo Gringo

Los Elementos son la obra cumbre de la matemática y de la geometría de la Grecia Clásica, su elaboración se ubica alrededor del año 300 A.C. por el matemático Euclides quien vivió en Alejandría. Actualmente se le ha entendido como registro y sistema del conocimiento matemático existente en el mundo clásico además de los aportes de culturas predecesoras como la Babilónica⁴.

Una de las principales características de las matemáticas griegas, y aún más en las matemáticas contenidas en *Los Elementos*, es la presentación de un sistema axiomático deductivo que deja de lado los fenómenos reales y los problemas prácticos.

En los trece tomos que constituyen *Los Elementos*, el libro V es dedicado a las magnitudes y el libro VII a la aritmética de magnitudes. En estos libros se hacen diferentes aproximaciones al concepto de razón, por ejemplo, en el libro V se aportan dos definiciones sobre razón:

Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas. Definición 3, Libro V.

⁴ Como, por ejemplo, el planteamiento el Teorema de Pitágoras el cual era usado por los Babilonios mil años antes de la publicación de *Los Elementos*, este elemento se pudo verificar en la tablilla Yale.

Guardan una razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra. Definición 4, Libro V.

Para autores como Fowler (1979), estas aproximaciones no definen de forma clara y precisa el concepto de razón, pues en estas definiciones sólo se indica que la razón entre dos magnitudes está relacionada con su longitud y que, utilizando lenguaje moderno, exige la propiedad arquimediana, la cual propone que dadas dos cantidades a y b siempre existirá un n natural tal que n multiplicado por a sea mayor o igual a b .

Para el autor, el carácter no numérico de las razones en *Los Elementos* está relacionado con el hecho de que apenas se da un tratamiento sistemático a las operaciones entre razones, además de que nunca se habla de igualdad de razones sino de guardar la misma razón o guardar una razón mayor, característica que limita la comprensión de los conceptos de razón y proporcionalidad, pues este tipo de definiciones muestran como si estos conceptos debieran estar relacionados únicamente con longitudes.

Antes del desarrollo de la teoría de proporciones de Eudoxo, que fuera expuesta por Euclides en el libro VII, la obtención de la razón entre dos números o magnitudes homogéneas venía dada por un proceso llamado antifairesis o antaneiresis⁵

Para Fowler (1979), la definición de razón presentada en el libro V de *Los Elementos* es usada para construir la teoría de proporciones del libro VII. Esta característica generó una dificultad en su tratamiento, haciendo que se relegara a la teoría original de proporciones únicamente en un contexto aritmético. Para la construcción de razones usando magnitudes, fue necesaria una nueva teoría propuesta por Eudoxo, quien optó por dejar indefinido el concepto de razón y definir únicamente aquello que importaba desde un punto de vista

⁵ Dados dos números o magnitudes homogéneas, se halla una medida común; dicha medida se puede obtener por medio de la sustracción reiterada de una de las magnitudes a la otra. Esta sustracción genera una n -upla de números que describen la razón entre ambos dos números o magnitudes homogénea. La definición de razón mediante la antifairesis refuerza el carácter no numérico de concepto junto con su íntima relación con un proceso de medida, aclarando así por qué para el mundo Griego únicamente era necesario considerar las razones entre magnitudes homogéneas.

geométrico, es decir, definir lo que significa “guardar la misma razón” y “guardar una razón mayor”.

Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y cogidos en el orden correspondiente.
Definición 5, Libro V

Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda, pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.
Definición 7, Libro V

La potencialidad de la propuesta de Eudoxo está relacionada con la presentación de definiciones que son válidas para cualquier tipo de magnitud (conmensurables o inconmensurables) dejando de lado la necesidad de calcular la antifairesis de las magnitudes y ampliando así la interpretación del concepto de razón para otras magnitudes que no sean longitudes.

Un aspecto para tener en cuenta en el tratamiento de la proporcionalidad en *Los Elementos* es el uso y desarrollo de dos teorías aparentemente distintas; una para los números y otra para las magnitudes. Esta característica hace necesario que se prueben en dos ocasiones los resultados, algo que podría decirse que viene motivado por la forma en que el mundo Griego se concebían las magnitudes. Esta separación ha generado obstáculos en el proceso de aprendizaje de razón y proporcionalidad, pues ha separado y desvinculado conceptos como semejanza y porcentajes o regla de tres, debido a que estos aparentemente están en contextos diferentes. Se considera que esta disociación y sus implicaciones deben ser tenidas en cuenta por el profesor en el momento de enseñar la proporcionalidad.

Otra característica que también está presente en *Los Elementos* el uso de razón únicamente entre magnitudes homogéneas, lo cual deja de lado el producto de magnitudes, es decir que, desde esta perspectiva, el producto de dos longitudes no será una superficie, característica que se podría interpretar como un obstáculo en el aprendizaje de la proporcionalidad.

Finalmente, se puede comentar que sólo hasta el libro X de *Los Elementos* se relacionarán estas dos formas de tratar la proporcionalidad (entre segmentos y entre números), al demostrar que dos magnitudes son conmensurables si y sólo si guardan la misma razón que un número de otro número.

Para culminar este apartado, es necesario expresar que la inicial diferenciación de la proporcionalidad en dos contextos (numéricos y magnitudes) generó dificultades en la comprensión que los números como magnitudes, pues autores como Heath (1957) mencionan que en *Los Elementos* no se aclaró que la proporción de números se incluya en la proporción de magnitudes como un caso particular; por ejemplo, el autor Euclides debió haber probado que magnitudes proporcionales en el sentido de la definición 20 del libro VII también son en el sentido de la definición 5 del libro V.

La división entre proporcionalidad numérica y proporcionalidad entre magnitudes generó obstáculos haciendo que se retrasara por mucho tiempo la comprensión de la proporcionalidad entre magnitudes diferentes a las longitudes, como la masa, la fuerza y el tiempo, elemento que será retomado en Europa hasta el renacimiento con el contacto comercial con culturas orientales como la árabe y la china.

Los Nueve Capítulos y la propuesta China

Para autores como Dauben (1998), los matemáticos chinos también se preocupaban por algo más que la aplicación de métodos o algoritmos asociados a la proporcionalidad. Por ejemplo, en el texto de *Los Nueve Capítulos* documento del siglo III, se muestra una serie de problemas con sus respectivas soluciones. El principal aporte y novedad de este documento son los comentarios que hizo Lui Hui en el proceso de edición del libro, pues justamente en sus comentarios se pueden identificar algunos elementos de fundamentación teórica en matemáticas. Para autores como Chemla (2005), en los comentarios de Lui Hui se puede identificar otro origen diferente al Griego del concepto de demostración matemática.

En el antiguo texto se presenta el concepto de proporcionalidad como *Lu*, el cual se define como un conjunto de números correlacionados y se enumeran diferentes propiedades y operaciones, algunas de estas son:

Las *lu* pueden convertirse unas en otras, si hay fracciones en una *lu*, ésta puede convertirse en otra en enteros multiplicando por un número adecuado. Las *lu* se pueden simplificar reduciéndolas, usando el común denominador. Kangshen (1999) p.80

Desde esta perspectiva, se están proponiendo varias magnitudes directamente proporcionales y una *lu* como un conjunto de valores de dichas magnitudes, interpretando así la razón entre dos magnitudes como su *lu* cuando una de ellas toma el valor de 1. Esta caracterización es diferente en forma y naturaleza a la definición de *Los Elementos* y al concepto de antifairesis⁶.

Para Kangshen (1999), el concepto de *Lu* es fundamental para comprender el razonamiento en la construcción de la regla de tres. Esta característica que hace que la propuesta de proporcionalidad china se adapte mucho más a las dinámicas comerciales y mercantiles que la propuesta Griega, pues desde el inicio la propuesta china establece relaciones entre un conjunto de números, dejando de lado que sean homogéneas. De hecho, el autor menciona que en la propuesta china se analiza directamente la relación existente entre pares de magnitudes diferentes, predominando la idea de razón externa frente a la interna.

A modo de conclusión de esta primera etapa de la proporcionalidad en el mundo antiguo, se pueden identificar varios elementos, los cuales son:

- El concepto de razón no se define rigurosamente en *Los Elementos* y la idea de razón definida por antifairesis sólo aparece en el algoritmo de la división.

⁶ Denominado también como algoritmo de Euclides, el método básicamente consiste en hallar una medida común a dos magnitudes dadas. Dicha medida se puede obtener por medio de la sustracción reiterada de una de las magnitudes a la otra. Esta sustracción genera una n-upla de números que describen la razón entre ambos objetos.

- En *Los Elementos* sólo se admite la composición de dos razones de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{c}$ para obtener a:c lo cual es llamado razón doble.

Estas dos situaciones generaron que, una vez colapsara el impero Romano y el mundo occidental entrara en decadencia, se olvidaran los aportes del mundo clásico; razón por la cual la cultura árabe aportó posteriormente en la comprensión de otras características, propiedades y definiciones de la proporcionalidad tomando las propuestas del mundo oriental asociadas a diferentes técnicas para resolver problemas como la regla de tres, la cual no estaba planteada en la teoría griega de proporciones, dado que en la propuesta oriental se usan magnitudes no homogéneas.

Se considera que los aportes de la cultura china ayudaron significativamente en la construcción del concepto de proporcionalidad desde una perspectiva diferente a la de *Los Elementos*, propuesta en la cual únicamente se construyen razones entre segmentos. De esta forma, se considera que estos aportes deben ser tener tenidos en cuenta por el profesor para la enseñanza de proporcionalidad, además del uso de estos diferentes significados de la proporcionalidad como parte de su conocimiento en la disciplina matemática.

De los comentarios de Omar Al-Khayyam a la propuesta Griega

Con la caída del Imperio Romano y el olvido del conocimiento de la antigüedad clásica, las culturas de medio oriente cobraron un valor importante en la preservación de estos conocimientos. Autores como Rashed (1999) muestran la traducción de los comentarios que hace Omar Al- Khayyam a *Los Elementos*, quien fue un matemático árabe del siglo XI que habitó en el actual Irán. En los comentarios que hace el matemático se puede observar la superación de la idea de magnitud como una construcción únicamente geométrica.

En los comentarios a *Los Elementos* también se pueden apreciar los aportes de la interpretación de la proporcionalidad de la cultura china aplicada en los escritos árabes del siglo XI, aspecto que construyó una interpretación más amplia de la proporcionalidad. Se evidencia así que la indagación histórica sobre el conocimiento del desarrollo de la

proporcionalidad aporta en la identificación y superación de obstáculos y dificultades por medio de la comprensión más rica de la proporcionalidad.

Uno de los aportes de Omar Al- Khayyam fue la presentación de una definición alternativa de igualdad de razones a la dada por Euclides. Para el autor, dos razones son iguales si ambos pares de magnitudes dan lugar a misma sucesión de enteros tras el proceso de antifairesis; a esta definición él la llama la “razón verdadera” y a la definición geométrica de Euclides la define como la “razón usual”.

Al utilizar una concepción de razón diferente a la concepción geométrica propuesta en *Los Elementos*, el autor puede elaborar la composición de razones, demostrando que dadas tres magnitudes a , b y c , la razón $\frac{a}{c}$ es la composición de las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{c}$.

Gracias a la construcción de las razones usando números y no segmentos, además de la composición de razones por medio de la multiplicación numérica, se pudo establecer el resultado para una cantidad cualquiera de magnitudes; rompiendo así los límites generados por la propuesta griega de razón asociada únicamente con un lenguaje geométrico, ampliándose así el significado de la proporcionalidad.

Campano y la reinterpretación del pensamiento griego

Posteriormente, a inicios del siglo XIII la zona que hoy se denomina Italia era una de las regiones económicamente más activas e importantes de toda Europa, pues a los puertos de ciudades como Génova y Venecia llegaban cantidades exorbitantes de mercancías del Medio Oriente y África. Junto con esas mercancías venían cientos y cientos de comerciantes con conocimientos que enriquecían lo que en el mundo Europeo medieval fue el conocimiento del mundo clásico griego con aportes del mundo árabe y chino, en este caso, las interpretaciones, representaciones y propiedades sobre la proporcionalidad como concepto matemático.

Este es el caso del monje italiano Campanus de Novara, quien en 1255 publicó en latín *Los Elementos*, una de las traducciones con mayor éxito en la Europa cristiana medieval. Uno de los aportes del autor está en la definición del concepto de “denominación de una razón”, definido como:

Se dice denominación de una razón, específicamente de un número más pequeño en relación con uno más grande, a la parte o las partes de este (número) menor que está en el mayor. Y (de una razón) de un número más grande en relación con otro más pequeño, al múltiplo o al múltiplo y la parte o las partes según las cuales el mayor lo es. Rommevaux (1999) p. 97

Con esta definición, el autor buscó aritmetizar la idea de razón propuesta en *Los Elementos*, pues en la propuesta de Euclides la razón se presenta como una relación entre magnitudes homogéneas (segmentos), en cambio, en la propuesta de Campano se buscó asociar un número a cada razón, esta propuesta se relaciona con la asignación en la que actualmente se asocia una razón a un número racional, característica que enriquece la comprensión de la definición y las propiedades de la construcción de las razones y las proporciones.

De esta forma, con la propuesta de Campano se busca pasar de la identificación de una razón a la asociación de un número con una razón, trascendiendo la propuesta griega que asociaba la razón únicamente como segmentos. Se considera que por medio de la aritmetización de las razones se está asociando una razón a un número racional, proceso que fue fundamental en la comprensión de la razón como fracción y como número racional. Esta característica será necesaria para la comprensión de la proporcionalidad como igualdad entre razones, lo cual enriquece elementos matemáticos para tener en cuenta en la enseñanza de las propiedades de la proporcionalidad.

2.2. Conocimiento matemático sobre el concepto de proporcionalidad

Una vez se ha hecho una aproximación a la construcción histórica de la construcción de la proporcionalidad, se considera necesario tener en cuenta el conocimiento matemático o disciplinar como parte de la construcción de una comprensión más amplia y rica de la proporcionalidad del objeto matemático; esto, con el propósito de aportar en la resolución

del problema de investigación: la comprensión el conocimiento especializado del profesor de matemáticas asociado a la proporcionalidad.

En este sentido, inicialmente es necesario caracterizar las diferentes definiciones, significados, propiedades y representaciones asociados a la proporcionalidad, pues un conocimiento amplio y rico en el tema será necesario en el proceso de comprensión del conocimiento movilizado por la informante en la enseñanza de la proporcionalidad.

La proporcionalidad se puede definir desde diferentes perspectivas, en la presente investigación se mostrarán tres puntos de vista. El primero es la propuesta de Fiol y Fortuny (1990), quienes hacen uso de las teorías sobre funciones para mencionar que dos magnitudes son proporcionales si se puede establecer un isomorfismo entre sus cantidades $f: M \rightarrow N$ tal que:

I. Si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$, la relación de orden es monótona.

II. y $f(a + b) = f(a) + f(b)$, es decir, se conserva el orden y la suma.

III. Si la magnitud es continua, la proporcionalidad f queda unívocamente determinada dando la cantidad homóloga $f(a)$ de una cantidad cualquiera y en particular las cantidades correspondientes $f(a)$ a una unidad.

En efecto si $a = r \cdot e$, entonces $f(r \cdot e) = rf(e)$, así las medidas de cantidades correspondientes, a, $f(a)$ con unidades correspondientes, $e, f(e)$ son iguales

$$a = re ; f(a) = rf(e)$$

De igual forma, los autores definen la constante de proporcionalidad a partir de M y N como dos magnitudes proporcionales continuas, donde f sea la correspondencia entre sendas cantidades e y u dos unidades respectivas de M y N .

$$f: M \rightarrow N$$

$$e \rightarrow u$$

Esto quiere decir que si $f(e) = k \cdot u$, se podrá decir entonces que k es la constante de proporcionalidad respecto de las unidades e y u . En este sentido, la constante de la

proporcionalidad es una representación de la correspondencia y por eso se denota como $k = [f] \{e\} \{u\}$. Como las magnitudes M y N pueden ser descritas completamente por sus medidas m_e y m_u respectivamente, entonces la proporcionalidad f puede expresarse como una aplicación g de R^+ en R^+ .

Esta primera definición construida a partir de isomorfismos aporta, por un lado, a la superación de la idea de que la proporcionalidad se asocia únicamente a segmentos, además de aportar a la comprensión de la proporcionalidad desde una perspectiva analítica a partir del uso de funciones; elementos que serán necesarios para el profesor en el conocimiento del objeto matemático.

De igual forma, Fiol y Fortuny (1990) proponen la definición de razón entre magnitudes a partir de dos cantidades a, b , donde la razón entre ambas se puede definir sin hacer referencia directa a la medida, considerando la cortadura (p_1, p_2) sobre los números racionales positivos

$$p_1 = \left\{ \frac{m}{n} ; m, n \in N \mid na < mb \right\},$$

$$p_2 = \left\{ \frac{m}{n} ; m, n \in N \mid na \geq mb \right\}$$

Entonces el número real r que define será la razón entre dichas cantidades a y b . Se indicará simbólicamente que $\frac{a}{b} = r$, donde toda razón entre cantidades determina una proporcionalidad entre las cantidades de la misma magnitud. De la misma forma, propone la definición de la proporción de dos cantidades a y b como el cociente $p(a, b) = \frac{\max(s, t)}{\min(s, t)}$, donde s, t representan las medidas de a y b en una unidad determinada, mostrando que la proporción es una aplicación P que a todo par de cantidades asigna un número mayor o igual que 1, es decir:

$$P: M \times M \rightarrow (1, +\infty)$$

$$(a, b) \rightarrow p(a, b)$$

Donde se cumplen las propiedades de simetría $P(a, b) = P(b, a)$ para todo $a, b \in M$, semejanza $P(ra, rb) = P(a, b)$ para todo $r > 0$ $a, b \in M$ y aditividad $P(a, b) + P(a, c) = P(a, b + c)$ si $a \leq b$ y $b \leq c$, siendo $a, b, c \in M$.

Una vez más la definición dada por los autores aporta a la superación de la idea de que la proporcionalidad está asociada únicamente con segmentos, por medio de conceptos desde perspectivas analíticas como las cortaduras, los números reales y las propiedades de simetría y aditividad.

Otro elemento para tener en cuenta en la definición matemática de la proporcionalidad es la caracterización de esta como una relación de equivalencia entre dos cantidades de magnitud. Para esto, es necesario comentar que el estudio de la proporcionalidad surge ante la necesidad de comparar la cuantificación de cualidades, como las temperaturas, la amplitud angular, la longitud, el peso, la superficie, la capacidad, la masa, la velocidad, entre otras, las cuales serán entendidas como magnitudes, en este caso, cuando se hace la comparación de dos cantidades de magnitudes (razón) y se tenga el mismo valor, se le llamará proporcionalidad.

En la segunda perspectiva para la definición del concepto de proporcionalidad se tendrán en cuenta los planteamientos de Carrillo, Contreras, Climent, Montes, Escudero y Flores (2016), quienes presentan la proporcionalidad como relación entre cantidades de una o distintas magnitudes que se da en dos situaciones. La primera, cuando se tienen cantidades difíciles de medir, por lo que deben obtenerse en función de otras a las cuales se les conoce la medida; como en el cálculo de la medida de la altura de un edificio tienen función de una altura conocida que permita establecer relaciones entre las sombras de estos dos objetos. Y la segunda, cuando se busca realizar la propia relación entre cantidades de magnitudes, donde se estudia, por ejemplo, las escalas o el salario devengado en función de las horas de trabajo, comparando cantidades de magnitud, con lo cual se determinan dos fenómenos reales o situaciones de aplicación de la proporcionalidad.

De esta manera, el proceso para llegar a la comprensión de la proporcionalidad como objeto matemático se debe iniciar con el reconocimiento de diferentes magnitudes, comparar las cantidades de magnitudes y medirlas trazando relaciones entre ellas, para, de esta forma,

construir el concepto de razón y posteriormente construir la proporcionalidad como la igualdad entre dos razones.

Para los autores, el tratamiento de la magnitud lleva directamente al concepto de cantidad de magnitud como aquella característica común de un conjunto de elementos con respecto de una magnitud, es decir, como un subconjunto que tenga la misma cantidad de magnitud; por ejemplo, un conjunto de objetos de hogar que tienen el mismo peso o la misma longitud.

De igual forma, los autores mencionan la importancia de especificar la proporcionalidad como una propiedad asociada únicamente a magnitudes extensivas, donde la unión de la cantidad de magnitud se pueda sumar, como, por ejemplo, la cantidad de superficie.

En caso contrario, no se podrá hablar de proporcionalidad. Es decir, cuando la unión no sea igual a la suma de estas (cuando sean magnitudes intensivas), por ejemplo, parte de este tipo de magnitud es la temperatura, pues cuando se mezcla un líquido con una temperatura de 10 grados centígrados con otro de una temperatura de 60 grados centígrados, el resultado de esta unión no será un líquido con una temperatura de 70 grados centígrados.

Lo anterior da cuenta de la característica de magnitud extensiva como una propiedad necesaria para la existencia de proporcionalidad y como un elemento conceptual a ser tenido en cuenta por el profesor para la enseñanza del objeto matemático.

Una tercera forma de caracterizar y definir el concepto de proporcionalidad desde una perspectiva disciplinar es la presentación de esta como una relación multiplicativa entre magnitudes, lo cual permite determinar el valor cantidad de magnitud en función de otra cantidad de magnitud de la cual se conoce su medida, estableciendo relaciones de proporcionalidad entre cantidades de distintas magnitudes, como, por ejemplo, cuando se relacionan la cantidad de litros de leche y gramos de harina en una receta, o de la misma magnitud, como cuando se relaciona el valor de unos artículos que están al 50% de descuento.

La anterior definición aporta una comprensión disciplinar del objeto matemático, pues, por medio de esta, se establece la proporcionalidad como una relación numérica que se puede presentar entre magnitudes que necesariamente no son homogéneas, enriqueciendo así el conocimiento de las características que debe tener en cuenta el profesor.

Una vez se presentaron estos tres planteamientos, se considera necesario un espacio para relacionar las tres formas de definir la proporcionalidad, pues sí se selecciona una única forma o perspectiva no se tendría una comprensión amplia del concepto. Se considera que definir la proporcionalidad únicamente a través de funciones de proporcionalidad representadas por medio de relaciones numéricas establecidas entre las variables dependiente e independiente, delimita un campo de problemas relacionados con el concepto de proporcionalidad. Sin embargo, esta definición tiene la potencialidad de asociar la proporcionalidad con situaciones del contexto real, es decir, del mundo físico, donde por medio situaciones sobre proporcionalidad aritmética se pueden establecer relaciones entre diferentes cantidades de magnitud, aspecto que también hace parte del conocimiento del profesor de matemáticas.

Con respecto a la relación entre los planteamientos de Fiol y Fortuny (1990) y Carrillo *et al* (2016), se considera que estas dos perspectivas presentan propuestas complementarias que brindan una mayor comprensión más amplia del concepto; por un lado, desde la teoría de funciones y por el otro desde las relaciones entre cantidades de magnitud, elementos necesarios para caracterizar sistemáticamente el conocimiento especializado asociado a la proporcionalidad del profesor de matemáticas.

Finalmente, también se considera necesario que el profesor reflexione acerca de la ubicación de dos cantidades de magnitud como un aspecto propio del conocimiento matemático disciplinar asociado a la proporcionalidad; cantidades de magnitud como, por ejemplo, la relación entre chicos y chicas en el aula de una ciudad o en un país; la relación entre el peso y el número de vacas, pues estas relaciones deben establecerse en un tiempo y en un lugar; etc.

Las anteriores relaciones evidencian que estas expresiones numéricas se pueden relacionar siempre que expresen cantidades de magnitudes mensurables, además se considera necesario reflexionar sobre ejemplos en los cuales esta relación no se puede establecer, como la relación entre el número de una casa y el número de personas que viven en ella, pues la cantidad de casas es un código que no indica una cantidad de magnitud. Los anteriores ejemplos muestran la importancia de la ubicación de la proporcionalidad como relación en un contexto determinado, aspecto que también hace parte del conocimiento disciplinar que debe tener en cuenta el profesor para la enseñanza de este objeto matemático.

Otro elemento para tener en cuenta en el proceso de comprensión del conocimiento disciplinar asociado a la proporcionalidad es la reflexión sobre algunas propiedades de esta relación, como, por ejemplo, comprender que las relaciones de proporcionalidad deben ser establecidas entre cantidades sumables (extensivas), en caso contrario, dicha relación no existirá. También es necesario comprender que para que las cantidades tengan una relación de proporcionalidad, esta relación debe permanecer, aunque se varíe una de las cantidades, por ejemplo, el espacio que recorre un móvil, el tiempo que tarda en hacerlo siempre y cuando la velocidad del móvil sea constante; se establece así que en cada unidad de tiempo se recorre la misma cantidad de espacio. Caso contrario, la relación entre la estatura de una persona y los años que tiene dicha persona, pues no es constante el crecimiento de la persona en cada unidad de tiempo, es decir, no existe la proporcionalidad.

A modo de cierre, se puede mencionar que también deberá ser parte del conocimiento del profesor saber que dos magnitudes mensurables y sumables serán proporcionales si entre las cantidades de dichas magnitudes existe una relación funcional, en el sentido matemático, este sentido matemático se trasladará al mundo de las magnitudes mensurables nombrándolo como “condición de regularidad entre las cantidades implicadas”; siendo esta condición la relación constante entre una unidad de una magnitud y la cantidad correspondiente de otra magnitud.

2.2. 1. Proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa

Una vez ya se ha caracterizado el concepto de proporcionalidad desde una perspectiva disciplinar matemática, ahora como parte de un proceso necesario para comprender este objeto matemático desde una perspectiva amplia y compleja que aporte en la resolución del problema de investigación, el cual está asociado con la comprensión del conocimiento especializado del profesor, es necesario caracterizar la proporcionalidad entre magnitudes desde dos perspectivas: la directa y la inversa. La primera se define como una relación entre magnitudes que permite obtener la medida de cantidad de la otra magnitud multiplicando una constante por la medida de cantidad de esta u otra magnitud; esta relación se expresa simbólicamente como $y=kx$, donde x e y son medidas de cantidades de magnitudes, y k es la constante o razón de proporcionalidad.

Un ejemplo de proporcionalidad directa es cuando aumenta tanto la variable dependiente como la independiente. Podría ser cuando se menciona que en la preparación de una mezcla de concreto se necesitan 2 kilos de arena por cada 14 bultos de cemento, la expresión algebraica para esta situación sería $y=7x$, siendo y la cantidad de bultos de cemento y x la cantidad de kilos de arena, y 7 como la constante de proporcionalidad de la cantidad de bultos de cemento necesitados respecto a la cantidad de arena necesitada.

De forma similar, la proporcionalidad inversa se define como una relación entre magnitudes que permiten obtener la medida de una cantidad de magnitud multiplicando una constante por la inversa de la medida de otra cantidad de magnitud; un ejemplo clásico de este tipo de proporcionalidad es la relación entre la cantidad de personas y el tiempo necesario para hacer una actividad, pues a mayor cantidad de personas se necesitará menos tiempo para hacer dicha tarea. Si 3 albañiles tardan 12 días para poner el piso de una casa, 6 albañiles tardarán 6 días. Su expresión simbólica será $y = k 1/x$, donde x e y representan las medidas de las cantidades de magnitudes, y k representa la constante o la razón de proporcionalidad.

En el ejemplo de los albañiles, la expresión simbólica está dada por la cantidad de albañiles = 36 (1/cantidad de días) o en términos de la cantidad de días sería = 36 (1/ cantidad de pintores), en el caso de que el tiempo necesitado para acabar el piso de la casa sean sólo 2 días, la relación sería $y=36 (1/2) = 18$ albañiles.

De este modo, se puede mencionar que en una relación proporcional se cumple que el cociente entre las medidas de pares de cantidades relacionadas siempre será el mismo; este cociente será llamado constante o razón de proporcionalidad. En el caso del ejemplo de la arena y el cemento, la constante era $7\frac{1}{7}$, en una relación inversa se cumple que el producto de las medidas de pares de cantidades relacionadas es constante, en ese caso, ese producto será la constante o la razón de proporcionalidad, en el caso de los albañiles será 36.

La presentación de la proporcionalidad directa e inversa aporta significativamente a la comprensión de la definición, características y propiedades de cada una de estas, pues es un aspecto necesario para comprender el conocimiento especializado del profesor, dado que este pertenece al conocimiento disciplinar matemático del objeto matemático estudiado.

2.2.2. Proporcionalidad aritmética y geométrica

En el proceso de comprensión de otras características y propiedades de la proporcionalidad, como una estrategia de adquisición de sensibilidad teórica que aporte a la identificación del conocimiento especializado movilizado en la enseñanza de este concepto, es necesaria la ubicación de la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa en dos contextos: el aritmético y el geométrico. Estos contextos también se consideran como dos formas de abordar la proporcionalidad.

Inicialmente, se puede mencionar que cuando se busca encontrar una relación de proporcionalidad directa o inversa entre dos cantidades de magnitud es necesario hacer uso de la proporcionalidad numérica, en cambio, se hará uso de la proporcionalidad geométrica cuando se indague por cuerpos, formas, objetos de los cuales se quieren replicar a diferente tamaño o cuando su medición no sea físicamente posible, por ejemplo, la construcción de maquetas, mapas o la medición de alturas de edificios de grandes alturas.

Con respecto a la proporcionalidad aritmética, es importante mencionar que esta busca calcular la medida de una cantidad de magnitud a partir de otra, o también encontrar

una cuarta cantidad de magnitud dadas tres cantidades de magnitudes proporcionales. En Carrillo *et al.* (2016), se propone el siguiente ejemplo de proporcionalidad directa, en el cual se indaga por el valor de 5 cuadernos.

Cant. de cuadernos	2	5
Precio (euros)	3	?

Para los autores, la primera cuestión en este tipo de problemas es la identificación que en la situación descrita se puede expresar por medio de una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de cuadernos y el precio, es decir, se debe identificar que el costo por la cantidad de cuadernos sea constante igual al costo de un cuaderno, como en este caso la expresión, si es proporcional, se puede representar por medio de la siguiente tabla.

Cant. de cuadernos	2	4	1	5
Precio (euros)	3	6	1,5	7,5

Por medio de este tipo de razonamientos se concluye que la razón está dada por la expresión $3 \text{ euros} / 2 \text{ cuadernos} = 1,5 \text{ euros por un cuaderno}$, es decir, que para saber el costo de los 5 cuadernos se establece una relación multiplicativa entre 1,5 y 5, o sea, $1,5 \text{ euros} \times 5 \text{ cuadernos} = 7,5 \text{ euros}$, de esta forma se proponen elementos para resolver problemas asociados a proporcionalidad directa como:

- Calcular la constante de proporcionalidad e igualarla a la relación entre el segundo par de cantidades.
- Calcular el precio de una unidad de la magnitud determinada (un cuaderno, en este caso), a esto se le conoce como reducción a la unidad.
- Aplicar propiedades de proporcionalidad directa, en este caso, la aditividad de la proporcionalidad directa.

En el caso de la proporcionalidad inversa, desde la perspectiva aritmética, en el texto propuesto por los autores, se preguntaba si 3 albañiles tardan 12 días para poner el piso de

una casa, cuántos días se demorarían 6 albañiles. Sabiendo que la constante de proporcionalidad en este caso es $12 \times 3 = 36$, por lo que $36 = 6 \times x$, donde x representa la cantidad de días que demorarían 6 albañiles para construir el piso de una casa, en este caso también es necesario hacer uso de la reducción a la unidad y para esto será de ayuda la construcción de tablas.

Albañiles	3	6	2	1
Días	12	6	18	36

Se considera que este tipo de análisis (reducción a la unidad) y representaciones le dará un mayor significado a procedimientos que se presentarán posteriormente como la regla de tres, la cual generalmente es presentada algorítmicamente.

Otro elemento que enriquece la comprensión de las propiedades de la proporcionalidad es el conocimiento del profesor con respecto al tratamiento de la proporcionalidad aritmética compuesta. Esta se caracteriza por tener dos o más relaciones de proporcionalidad entre magnitudes.

Por ejemplo, si 8 obreros construyen una casa en 60 días trabajando 10 horas al día, ¿cuántos días tardarán 10 obreros si trabajan 12 horas al día? De esta forma, si se trabajan 10 horas al día, 1 obrero tardaría 480 días (8×60) en construir la casa, es decir que si un obrero trabaja 10 horas al día construirá la casa en 480 días. Por lo tanto, los 8 obreros tardarían 60 días ($480/8$) y 10 obreros 48 días ($480/10$); si en lugar de trabajar 10 horas trabajaran 1 hora al día, manteniendo los 10 obreros, tardarían 480 días (48×10) y si trabajan 12 horas al día, se necesitarían 40 días ($480/12$).

8 obreros $\rightarrow$ 60 días $\rightarrow$ 10 horas diarias

10 obreros $\rightarrow$? días $\rightarrow$ 12 horas diarias

1 obrero $\rightarrow$ 60 días $\cdot$ 8 obreros = 480 días si trabaja 10 horas diarias

$$\frac{480}{10 \text{ obreros}} = 48 \text{ días si trabaja 10 horas diarias}$$

$$48 \text{ días} \cdot 10 \text{ horas} = 480 \text{ días}$$

$$\frac{480 \text{ días}}{12 \text{ horas}} = 40 \text{ días}$$

Al explorar otras características y propiedades de la proporcionalidad geométrica, se puede mencionar que la proporcionalidad directa también permite el estudio entre las medidas de cantidades de magnitudes en contextos geométricos.

En el contexto de medida de cantidades de longitud en contextos reales, se puede caracterizar un ejemplo de proporcionalidad geométrica cuando se hace la comparación entre una fotografía ampliada y una fotografía real, pues describen la misma forma con diferente tamaño, característica que a su vez está relacionada con el concepto de semejanza entre polígonos; este concepto está presente cuando se tienen ángulos correspondientes iguales y los lados correspondientes tienen la misma razón, lo cual se llamará, en este caso, razón de semejanza.

Por ejemplo, cuando se amplía una imagen a razón de semejanza de x , la medida de las distancias de la imagen resultante será x veces mayor que la inicial, además de tener todos los ángulos correspondientes iguales entre sí, tal y como lo muestra la figura 2.

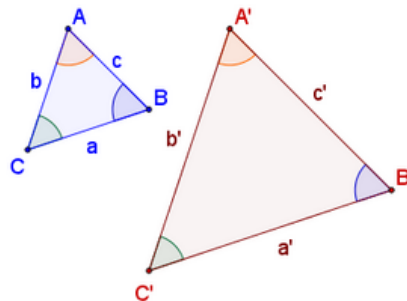


Figura 2 Triángulos semejantes

Otro tipo de representación asociada a la semejanza como proporcionalidad geométrica se muestra en la siguiente imagen, en la cual se puede observar una pareja de triángulos semejantes donde la razón de semejanza es 4. En la figura 3 se puede determinar que:

$$\frac{f'}{c'} = \frac{d'}{a'} = \frac{e'}{b'} = 4$$

$$f' = 4 \cdot c' ; d' = 4 \cdot a' ; e' = 4 \cdot b'$$

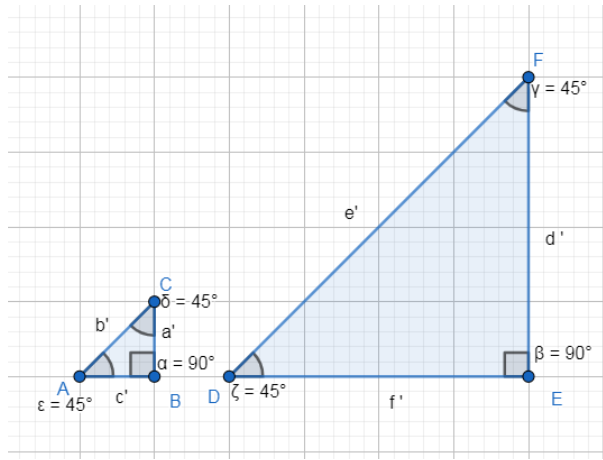


Figura 3 Triángulos cuya razón de semejanza es 4

Lo anterior evidencia la semejanza como un ejemplo de proporcionalidad desde una perspectiva geométrica, donde no sólo se pueden comparar sus lados, sino, también, se pueden comparar sus superficies. Esta característica aporta en la comprensión y sensibilización teórica con respecto a la proporcionalidad desde la perspectiva geométrica, en especial en la identificación del rol de las representaciones gráficas como herramientas para identificar y caracterizar las propiedades de la proporcionalidad geométrica como una relación. Este aspecto debe formar parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la enseñanza de la proporcionalidad.

Otro contexto en el que se presenta la semejanza en situaciones reales y que también aporta en la comprensión de los fenómenos asociados a la proporcionalidad es la elaboración de maquetas, la elaboración de mapas o planos en los que se usen escalas. En estos casos, el uso de las medidas de las distancias reales resulta ser proporcional a sus correspondientes en el plano o mapa. Elementos como las escalas numéricas generalmente vienen presentados como una fracción, donde el numerador muestra la unidad de medida en el mapa y el denominador la medida equivalente en la unidad en la realidad. Por ejemplo, si se ve un mapa con una escala de 1:500, a la medida de un segmento del plano representará 500 veces esa

medida, es decir que cada metro en la realidad representa como si se hubiera reducido 500 veces parte del terreno real.

En la figura 4 se muestran dos ejemplos de mapas en los cuales se puede visualizar la escala numérica.

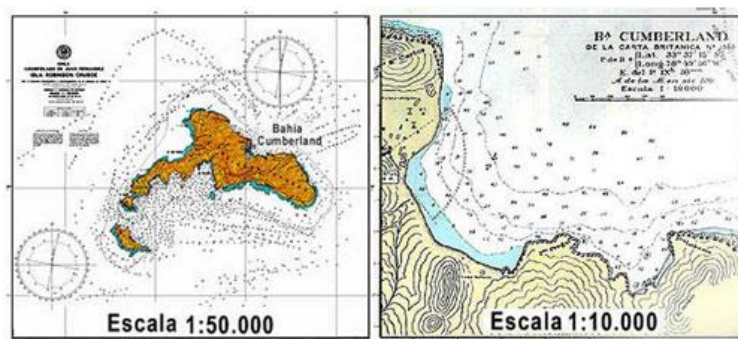


Figura 4 Mapas con diferentes escalas numéricas

Por otro lado, el uso de escalas gráficas es otro tipo de representación de semejanza como ejemplo de proporcionalidad, pues un segmento muestra la unidad de longitud sobre el terreno real. En la figura 5 se muestra un mapa de la región autónoma de Andalucía donde el segmento o la escala gráfica representa 50 kms en la realidad.



Figura 5 Mapa con escala gráfica de la región autónoma de Andalucía

Finalmente, se considera que otra característica que aporta en la sensibilización teórica relacionada con la semejanza como proporcionalidad geométrica es la relación existente de proporcionalidad directa en el estudio de objetos geométricos, por ejemplo, la medida de la longitud de un arco de circunferencia es directamente proporcional al ángulo

central correspondiente, además de expresar el área de un sector circular usando la proporcionalidad directa entre esta área y la amplitud del ángulo correspondiente.

De igual forma, se considera que la presentación de diferentes herramientas como el uso de escalas, diferentes contextos y representaciones en las cuales se puede evidenciar la semejanza como proporcionalidad desde una perspectiva geométrica aportan en la sensibilización teórica del investigador con respecto al objeto matemático, además de la comprensión del conocimiento especializado desde una perspectiva disciplinar, aspecto que será indispensable en el proceso de investigación.

2.2.3 Una aproximación sobre la proporcionalidad en el contexto escolar

Una vez se presentaron algunas características, definiciones y propiedades de la proporcionalidad como relación desde una perspectiva disciplinar, se considera necesario presentar un segundo apartado donde se muestre una aproximación a la proporcionalidad desde una perspectiva didáctica. Se quiere así hacer énfasis en la enseñanza, pues este segundo apartado aportará significativamente a la sensibilización teórica y a la comprensión más amplia de este concepto. También se establecerán las relaciones de la proporcionalidad con otros conceptos y se conocerán las estrategias y ejemplos usados para su enseñanza, entre otros elementos que se profundizarán a continuación.

La proporcionalidad es un concepto muy importante tanto disciplinar matemático como concepto práctico en las matemáticas escolares pues, por medio de esta, se pueden relacionar temas de cálculo numérico, así como el pensamiento geométrico. Además se puede mostrar la importancia de este concepto desde el punto de vista del desarrollo del conocimiento matemático, pues, desde la psicología cognitiva Piagetiana, se considera que el pensamiento proporcional es uno de los esquemas operatorios a los que el individuo debe acceder para pasar del estudio de las operaciones concretas al de las operaciones formales, además de haber sido objeto de estudio de reconocidos investigadores en educación matemática como Karplus, Freudenthal, Streefland, Hart, entre otros.

En contextos escolares, la proporcionalidad se puede abordar desde diferentes propuestas. Fiol y Fortuny (1990) comentan que los términos de razón, proporción y proporcionalidad adquieren un significado al ubicárseles a partir de la noción de función lineal, pues esta noción es un modelo que sintetiza diversos lenguajes, situaciones, expresiones y fenómenos. Para los autores, justamente el concepto de la función lineal puede considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de proporcionalidad. Desde la perspectiva de los autores, en la función lineal se representa la estructura de la proporcionalidad, sirviendo esta para visualizar diferentes estados de variación, expresando así un comportamiento cualitativo desde una perspectiva funcional.

Los autores consideran que la comprensión de la proporcionalidad puede realizarse dando diferentes representaciones, mostrando la importancia de la conversión de una representación a otra. Algunos ejemplos de esta traslación se muestran en la tabla 1; en esta se hace énfasis en descripciones verbales, tablas de valores, gráficas, formulas y ejemplos.

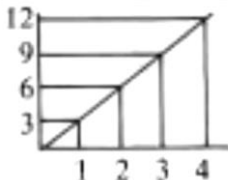
<i>De</i> \ <i>A</i>	<i>Situaciones descripción verbal</i>	<i>Tablas de valores</i>	<i>Gráficas</i>	<i>Fórmulas</i>	<i>Ejemplos</i>										
<i>Situaciones descripción verbal</i>	Analogía Redacción	Mediaciones Particularizar Concretar	Esbozar Visualizar	Algebraizar Obtener un modelo	(el perímetro de un triángulo equilátero es el triple del lado)										
<i>Tablas de valores</i>	Reflexiones Describir	Interpretar Extrapolar	Señalizar	Generalizar Relacionar Ajustar	<table><tr><th>x lado</th><th>y perímetro</th></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>12</td></tr></table>	x lado	y perímetro	1	3	2	6	3	9	4	12
x lado	y perímetro														
1	3														
2	6														
3	9														
4	12														
<i>Gráficas</i>	Interpretar	Seleccionar Lectura de puntos	Cambios de sistema de referencia Cambio de escala	Generalizar Relacionar Ajustar											
<i>Fórmulas</i>	Explicar Reconocimiento de parámetros	Calcular Tabular	Esboza Representa	Transformación algebraica Operaciones	$y = 3x$ $\frac{y}{x} = 3$										

Tabla 1 Representaciones sobre proporcionalidad propuestas por Fiol y Fortuny (1990)

La anterior tabla se considera fuente importante en el proceso de sensibilización teórica, pues el conocimiento de diferentes tipos de registros de representación porta la comprensión de qué elementos debe priorizar el profesor en la enseñanza de la proporcionalidad, además de establecer posibles dificultades que el estudiante pueda tener al pasar de un tipo de representación a otra como, por ejemplo, el paso de la interpretación de una tabla a una representación gráfica, o la relación existente entre una representación algebraica y la representación gráfica.

De igual forma, es importante comentar que los autores consideran que la proporcionalidad como un núcleo del cual se puede partir y unificar en líneas básicas de nociones como razón y proporción, fracción y número racional, número decimal y problema de la medida, cambio de unidades, cambio de escalas, problemas de repartos proporcionales, problemas de regla de tres, porcentajes, probabilidad, gráficas de funciones lineales, teorema de Tales, semejanza de figuras, problemas de mezclas y aleaciones, escalas, mapas y maquetas, además de funciones trigonométricas y el número π , conceptos claves que deberá tener en cuenta el profesor en su horizonte de temas a abordar en el futuro.

Con base en lo anterior, se puede definir la proporcionalidad como uno de los objetos más importantes del aprendizaje de las matemáticas, pues es usada frecuentemente en muchos de los conceptos de física y química, además aparece incluso en el currículo de ciencias sociales bajo formas como la densidad de población, tasa de natalidad, así como en la lectura de mapas y de diversos tipos de gráficos.

También se considera importante establecer diferentes representaciones de la proporcionalidad, pues estos elementos también aportan en su comprensión desde una perspectiva de su enseñanza. Autores como Solomon (1987) presentan algunas de estas representaciones que deben ser tenidas en cuenta para la elaboración de propuestas de enseñanza de la proporcionalidad. De la propuesta de la figura 6 se puede inferir la riqueza y la complejidad en términos de relación de la proporcionalidad con otros conceptos matemáticos.

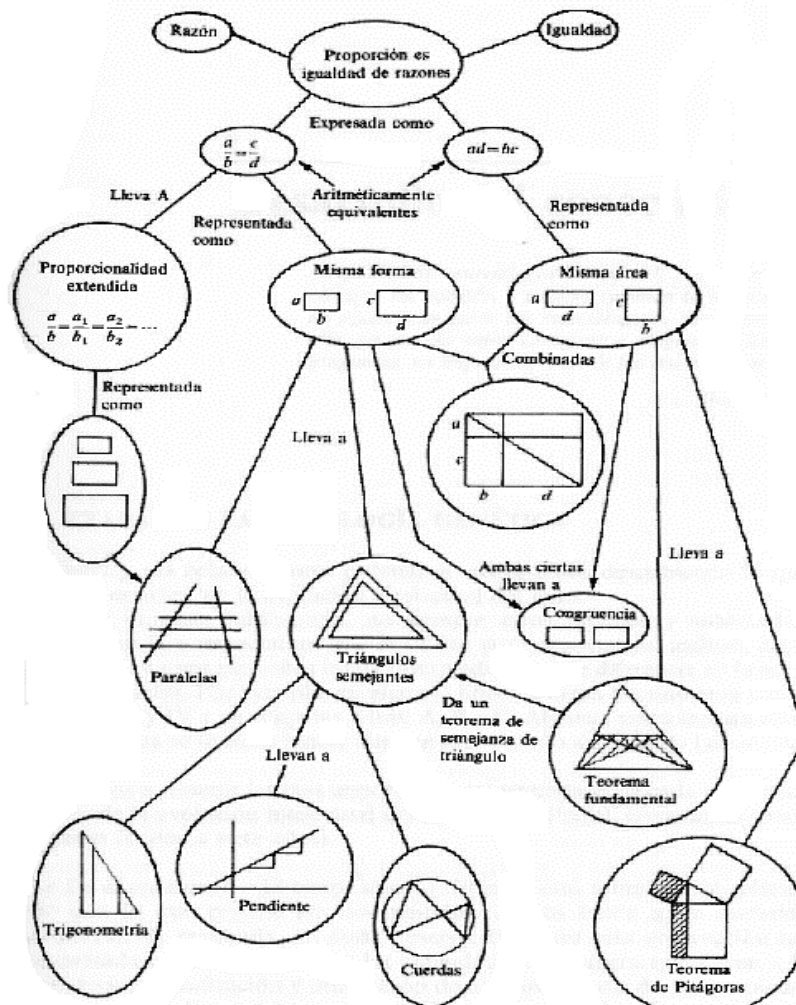


Figura 6 Relación de conceptos matemáticos relativos a la proporcionalidad Solomon (1987)

El esquema presentado por Solomon (1987) se caracteriza por hacer énfasis en los contextos gráficos, elemento fundamental para la iniciación en la comprensión de la proporcionalidad como relación entre dos razones, además es muy valioso en términos del establecimiento de asociaciones o relaciones entre diferentes conceptos sobre proporcionalidad. Lo anterior muestra el aporte en la proyección de temáticas futuras relacionadas con la proporcionalidad como la trigonometría y el teorema de Pitágoras. Se considera que por medio de este esquema se complementa la propuesta de Fiol y Fortuny (1990) quienes hacían énfasis únicamente en el uso de diferentes tipos de representaciones y el paso de un tipo a otro.

Por otro lado, un autor que aporta en la comprensión de la proporcionalidad como objeto a enseñar es Rapetti (2003), quien señala que el aprendizaje de la noción de proporción no es simple y que requiere que los estudiantes se enfrenten a una gama de situaciones diferentes en complejidad numérica, además del uso de distintos tipos de magnitudes relacionadas, puesto que es necesario considerar las cantidades en relación unas con otras, más allá de abordarlas de modo absoluto. Lo anterior constituye un problema para los estudiantes, y se convierte en un obstáculo en la comprensión de contenidos asociados a la noción de proporcionalidad. Lo cual está relacionado con los planteamientos de la psicología cognitiva, pues esta propone que los estudiantes construyen el concepto de proporcionalidad en la etapa de las operaciones formales, en este proceso es importante diferenciar la adquisición de un algoritmo que se aplica para resolver una situación a la construcción de una noción de proporcionalidad usando la observación, la reflexión y la argumentación en diferentes contextos. En este sentido, la construcción del concepto de razón, proporción y proporcionalidad toma importancia en el plan de estudio de las matemáticas escolares, pues es requisito para comprender conceptos fundamentales en matemáticas como fracción y función, para lo cual es trabajada desde los grados iniciales.

Para Rapetti (2003), el concepto de razón aritmética está definido como la división entre dos cantidades de magnitud o entre dos números. Esta definición coincide con la utilizada disciplinarmente en las funciones de proporcionalidad directa y, por tanto, goza de todas las garantías de corrección y de validez.

Para el autor, en el contexto de la enseñanza de la matemática, los conceptos no deben presentarse directamente desde una expresión formal; antes de esto se debe presentar un momento de modelización en el mundo de los objetos físicos para una mejor comprensión del objeto. Así, cuando se enseña el concepto de proporcionalidad desde lo algorítmico y cuando se presenta la razón únicamente como cociente, se debe a la poca atención que se presta a la medida de cantidades de magnitud y a la priorización de los cálculos y transformaciones en el sistema métrico decimal en detrimento de los aspectos conceptuales; además de la creencia de que la medida de cantidades no enteras queda englobada en el

significado de la fracción como relación parte-todo y la presunción de que los estudiantes tienen ideas sólidas sobre la fracción como cociente.

Por tanto, desde los planteamientos del autor, es importante ubicar el concepto de razón en el contexto de la medida, donde la razón aritmética entre una cantidad a de la magnitud M y una cantidad b de la magnitud N , indica que a/b unidades de la magnitud M se corresponden con 1 unidad de la magnitud N .

De esta forma, el concepto de razón debería ser entendido como la relación entre dos magnitudes, y la proporción entendida como la relación de equivalencia entre dos o más razones, teniendo en cuenta que cuando las magnitudes sean del mismo tipo se identificarán como razones internas y en contraste con las razones externas, concepto que está vinculado a las magnitudes de distinta naturaleza propuestas por Freudenthal (1983).

Por otra parte, Guarín y Escolano (2009) presentan tres elementos para tener en cuenta en la enseñanza de la proporcionalidad, consideraciones que aportan significativamente en la comprensión del componente didáctico asociado a la proporcionalidad y la construcción de propuestas para la enseñanza de esta.

Los autores inician su planteamiento basándose en un análisis de libros de textos que son usados en la enseñanza de la proporcionalidad. Con base en este análisis mencionan que en los libros de textos de enseñanza de la matemática consultados no hay una preocupación explícita por situar la práctica pedagógica en un amplio campo de su fenomenología asociada a la proporcionalidad, lo que quiere decir que, desde la perspectiva de los autores, en los libros de texto la enseñanza no se ocupa de delimitar y precisar las condiciones exigibles a dos cantidades de magnitud para poder establecer relaciones de proporcionalidad entre ellas.

Por otro lado, con respecto a las consideraciones para la enseñanza sobre las cantidades de magnitud, los autores mencionan que en los libros de texto se presenta la razón como un número y no como medida, es decir, como un ente abstracto desconectado de las magnitudes. Esto evidencia que las propuestas de enseñanza se están ocupando únicamente

de los aspectos numéricos, desatendiendo la delimitación de la magnitud resultante y de sus unidades de medida.

En referencia a la constante de proporcionalidad, los autores mencionan que los libros de texto tienden a presentar la constante de proporcionalidad mediante la construcción de tablas de valores directamente proporcionales en las que el cociente de dos valores correspondientes son constantes, pero no se hace referencia a esta constante en partes posteriores de las secuencias de enseñanza, lo cual genera un bajo grado de comprensión por no incidir ni en el significado de la constante de proporcionalidad, ni el importante rol que desempeña dentro del razonamiento proporcional. Se considera que la comprensión y superación de este tipo de dificultades aporta significativamente a la comprensión de los elementos presentes en la enseñanza de la proporcionalidad, además de sensibilizar teóricamente respecto del conocimiento usado por el profesor de matemáticas en la enseñanza de este concepto.

Otra reflexión presentada por Guarín y Escolano (2009), que se considera que aporta en comprensión de los conocimientos asociados a la enseñanza de la proporcionalidad, está relacionada con la forma cómo se inicia la enseñanza de la proporcionalidad aritmética, pues se presenta directamente la idea de razón. En otras propuestas de enseñanza se inicia su enseñanza por medio de una reseña histórica, sin embargo, estas propuestas no se ocupan de delimitar y precisar las condiciones exigibles a dos cantidades de magnitud para poder establecer relaciones de proporcionalidad entre ellas.

Con respecto a la enseñanza del concepto de razón entre las cantidades de una magnitud, los autores comentan que los libros de texto consultados tienden a presentar la constante de proporcionalidad por medio de ejemplos además de la introducción del concepto de constante de proporcionalidad. Posterior a esto, prácticamente, se termina la presencia de la constante de proporcionalidad en la secuencia de enseñanza, pues no se vuelve a hacer referencia a ella; esto hace que los estudiantes tengan un bajo grado de comprensión del concepto al no incidir ni en el significado de la constante de proporcionalidad, ni dar cuenta del importante rol que desempeña dentro del razonamiento proporcional. Se considera de este

modo que la identificación y caracterización de la constante de proporcionalidad es otro elemento del conocimiento a ser tenido en cuenta en la tarea de comprensión del conocimiento del profesor en la enseñanza de la proporcionalidad.

Con respecto a la enseñanza de la proporción entre razones, los autores mencionan que en los libros de textos consultados se hace una única formulación de la proporción como la igualdad de dos razones, esta definición se realiza considerando las razones como entes numéricos abstractos, lo cual permite establecer la existencia de proporciones mediante el producto cruzado de los valores numéricos de las dos fracciones, además de justificar algunas propiedades o la existencia de varias posibles proporciones a partir de situaciones problemáticas contextualizadas en el ámbito de las magnitudes mensurables.

Para los autores, el uso de esta definición de proporcionalidad muestra una despreocupación por delimitar los aspectos cualitativos de las razones que se igualan, haciendo que el concepto de proporción se refiera a la igualdad de fracciones numéricas y no a la igualdad de las cantidades de magnitud, aspecto que será clave en la comprensión de las interpretaciones de proporcionalidad que deberá tratar el profesor en el proceso de enseñanza.

Con respecto a las consideraciones para la enseñanza de las magnitudes directas e inversamente proporcionales, Guarín y Escolano (2009) mencionan que en los libros de texto consultados se hace uso de frases estandarizadas como “para la proporcionalidad directa: al aumentar una magnitud la otra también aumenta, y si disminuye una, la otra también lo hace”, en cambio para caracterizar la proporcionalidad inversa se mencionan frases como “cuando una aumenta, la otra disminuye”, especificando que, aunque se trata de evitar el uso de estrategias aditivas, es necesario verificar las relaciones multiplicativas entre cantidades de las magnitudes, al expresar “al aumentar una magnitud el doble o el triple la otra también aumenta el doble o el triple” o “cuando disminuye una a la mitad o a un tercio, la otra también disminuye a la mitad o a un tercio”; respecto de estos planteamientos es necesario que el profesor defina y caracterice adecuadamente el concepto de magnitudes directa o inversamente proporcionales más allá de una explicación genérica de los conceptos.

Con respecto a las consideraciones para la enseñanza de la regla de tres como un procedimiento asociado a la proporcionalidad, los autores comentan que este concepto es presentado a partir de la formulación de técnicas no uniformes, pues en algunos libros se actúa de forma vertical, formando dos razones dividiendo en cada una los valores pertenecientes a una misma magnitud, mientras en otros libros las razones se forman en horizontal, presentándolas a partir de las dos magnitudes que intervienen en cada una de las situaciones.

Además de estas estrategias tradicionales, en los libros de texto se presenta el “método de reducción a la unidad” que consiste en relacionar una de las cantidades con una unidad de la otra cantidad a través de la división, sin embargo, para los autores, este tipo de propuesta de enseñanza, una vez introducidas las técnicas de unitización⁷, se interesa por mostrar al estudiante la variedad y utilidad de dichas técnicas en situaciones del mundo físico como repartos proporcionales, porcentajes, escalas, interés simple; limitándose así a la descripción de las técnicas sin justificar sus aspectos conceptuales subyacentes en las relaciones entre los conceptos mencionados anteriormente.

Para superar las dificultades y obstáculos anteriormente encontrados en los libros de textos, Guarín y Escolano (2009) proponen las siguientes acciones:

- Determinar la existencia de proporcionalidad aritmética haciendo explícita la condición de regularidad entre las magnitudes.
- Dar significado a la razón como medida de la cantidad de una magnitud que se relaciona con una unidad de otra magnitud.
- Determinar la constante de proporcionalidad analizando el papel que juegan todas las magnitudes que intervienen en el problema.

⁷ Entendiendo la unitización como el proceso de identificación de variación de una unidad magnitud con relación a otra magnitud.

- Controlar que la modificación de las cantidades de magnitud no modifique la proporción entre dichas cantidades.
- Clasificar la tipología de las magnitudes atendiendo la existencia de una razón entre ellas y el valor de la constante de proporcionalidad.
- Calcular la cantidad desconocida a partir de la razón en los problemas de proporcionalidad directa.
- Utilizar la relación de una cantidad de una de las magnitudes con la unidad de la otra magnitud, o el valor de la constante de proporcionalidad, en los problemas de proporcionalidad inversa.
- Delimitar y precisar las condiciones exigibles a dos cantidades de magnitud para poder establecer relaciones de proporcionalidad entre ellas.

Se considera que las acciones propuestas por los autores aportan en la caracterización y comprensión del conocimiento especializado del profesor, en este caso enfatizando desde una perspectiva de la enseñanza de la proporcionalidad.

De igual forma, Azcárate y Deulofeu (1990) mencionan la utilidad de la proporcionalidad para abordar la enseñanza del modelo de función, haciendo necesario el estudio previo de conceptos como razón y proporción, así como la resolución de problemas de proporcionalidad, evidenciando así una relación entre estos conceptos, además de establecer una alternativa de orden de temáticas a abordar en propuestas de clase.

Para los autores, al observar el tratamiento de la proporcionalidad en el contexto escolar se puede detectar que la aritmetización de las razones puede tener dos caminos del concepto Euclidiano de razón: entre dos cantidades de una misma magnitud (como longitudes) o entre dos números (cantidades), esto se puede observar en la definición de razón de diferentes libros de texto en matemáticas.

Este punto de vista puede ser complementado con trabajos de autores como Vega (2006), quien presenta un análisis didáctico del concepto de proporcionalidad en un libro de texto de octavo grado, en el que comenta que cuando se trabaja con tablas dadas únicamente en forma numérica, es decir sin especificar de qué magnitudes, se trata el cálculo de la constante en un simple cálculo numérico sin interpretación alguna, elemento que debe conocer el profesor en el momento de enseñar conceptos como la constatación de proporcionalidad de una función.

De igual forma, el autor menciona que cuando no se habla de magnitudes inmersas en los problemas, dado que parece más fácil trabajar con números, se redunda en que el trabajo a nivel netamente aritmético elija algunos problemas vitales en el proceso de comprensión de las características y propiedades de la proporcionalidad, por ejemplo, ¿cómo interpretar la constante?, ¿cómo pueden los estudiantes interpretarla en términos de la situación planteada? y ¿cómo podrían aprender a interpretar la constante en otras situaciones?

El autor concluye los planteamientos mencionando que algunos libros de texto dejan mucho trabajo bajo la responsabilidad de los profesores. Considera que para que ese trabajo resulte positivo para los estudiantes es necesario que los profesores descubran la importancia del análisis didáctico de los libros de texto, aspecto para el cual, en general, no han sido preparados. Este último elemento también hace parte del conocimiento que el profesor debe tener en cuenta en el proceso de enseñanza de la proporcionalidad.

Por otra parte, otros autores que aportan en la comprensión del concepto de proporcionalidad desde una perspectiva para la enseñanza son Godino y Batanero (2002), quienes hacen una aproximación al concepto contemplando diferentes bloques temáticos.

El primero está relacionado con los números y operaciones, en el que se aborda intuitivamente la idea de porcentaje, usando los conceptos y principios sobre los números naturales, enteros, fraccionales y decimales, porcentaje de una cantidad, etc.; el uso de la multiplicación y división como una referencia explícita a la proporcionalidad, por ejemplo,

la multiplicación como suma abreviada, proporcionalidad (doble, triple, etc.); la división como reparto y relaciones de proporcionalidad como la mitad, la tercera parte, etc.

En el segundo bloque temático, los autores incluyen la interpretación, cálculo y comparación de porcentajes, la formulación y comprobación de conjeturas sobre la regla que sigue una serie o clasificación de números además de la elaboración de estrategias personales de cálculo mental y los porcentajes sencillos.

Finalmente, en el tercer bloque, los autores proponen relacionar la orientación y representación en el espacio. En este se incluyen los hechos, conceptos y principios que le otorgan un rol relevante a la representación del espacio mediante planos, mapas, maquetas, uso de escalas (doble, mitad, triple, tercio), escalas gráficas; algunos de los procedimientos propuestos en este bloque son: la lectura, interpretación y construcción a escala de planos y maquetas y la lectura, interpretación y reproducción a escala de mapas.

Para Godino y Batanero (2002), el razonamiento proporcional se considera como uno de los componentes más importantes del pensamiento formal adquirido en la adolescencia, donde las nociones de comparación y covariación están en la base del razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de los conceptos de razón y la proporción.

Desde esta perspectiva, para los autores, la deficiencia en la comprensión de la estructura proporcional obstaculiza el pensamiento cuantitativo en disciplinas como el álgebra, la geometría, la biología, la física y la química. De igual forma, plantean que algunos elementos que pueden ayudar en la mejora de la comprensión de esta estructura son:

- Reconocer que los métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo de “regla de tres” para resolver problemas de proporcionalidad no son apropiados para desarrollar el razonamiento proporcional y no se deberían introducir hasta que los estudiantes tengan un

cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente.

- Proporcionar una amplia variedad de tareas sobre razones y proporciones en diversos contextos que pongan en situación relaciones multiplicativas entre distintas magnitudes.
- Estimular la discusión y experimentación en la comparación y predicción de razones.
- Relacionar el razonamiento proporcional con otros procesos matemáticos.

A partir de estas consideraciones se puede mencionar que en la enseñanza tradicional de la proporcionalidad se presenta la razón como un número y no como medida, mostrando así la razón como un ente abstracto desconectado de las magnitudes; lo cual se ocupa únicamente de aspectos numéricos y se desatiende la delimitación de la magnitud resultante y de sus unidades de medida, aspectos que deben ser comprendidos y superados por el profesor en el momento de diseñar estrategias y situaciones para la enseñanza de la proporcionalidad.

Seguidamente, otro aporte de Obando, Vasco y Arboleda (2014), en la comprensión del conocimiento de la enseñanza de la proporcionalidad, se refiere al análisis de diferentes líneas de investigación desde perspectivas cognitivas, didácticas, curriculares y epistemológicas de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, para señalar la existencia de dificultades con la enseñanza y el aprendizaje de estos objetos de conocimiento. Se considera que este tipo de estudios también hacen parte del conocimiento asociado con la enseñanza de la proporcionalidad.

Otro elemento que aportan los autores es la presentación de la necesidad de construir nuevos tipos de análisis de los procesos en la enseñanza de la proporcionalidad, de tal forma que en estos nuevos análisis se separen entre los análisis epistemológicos (orientados a la estructura matemática de la situación), de los análisis cognitivos (orientados a las prácticas

de los individuos) y de los análisis instrumentales (orientados a las técnicas utilizables en función de los instrumentos disponibles).

Estos planteamientos se tienen en cuenta en la presente investigación, pues, al indagar en las diferentes categorías del MTSK, como la categoría de conocimiento de los temas (KoT), por medio de definiciones sobre proporcionalidad, fenomenología, aplicaciones, propiedades y sus fundamentos, se encuentran relaciones con el análisis epistemológico y los análisis de tipo cognitivo en la categoría de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), elementos como el conocimiento sobre recursos y materiales para la enseñanza, el conocimiento de actividades, tareas, ejemplos y estrategias, y la categoría de conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), con elementos como las formas del aprendizaje del contenido..

De igual forma, se considera que por medio de la indagación de elementos de la categoría de del conocimiento de los temas (KoT), como el estudio de los procedimientos, se tienden vínculos con los análisis tipo instrumentales. Finalmente, los autores plantean tres cuestiones o problemas abiertos relacionados con la investigación en la enseñanza de la proporcionalidad, situaciones que también servirán como elementos para tener en cuenta en análisis del conocimiento movilizado por la profesora, además de reflexionar cómo la presente investigación puede aportar en estas cuestiones, estos problemas son:

- Comprender mejor las relaciones y las rupturas, entre lo aditivo y lo multiplicativo, de tal forma que los procesos escolares se puedan orientar a potenciar la transformación cualitativa de los razonamientos aditivos hacia los razonamientos multiplicativos.
- Comprender mejor cómo se establecen las relaciones desde los primeros aprendizajes propios de las estructuras multiplicativas como multiplicación, división, fracción, razón, hasta la comprensión de los números racionales y las relaciones lineales y no lineales.

- Comprender mejor el papel de los diferentes tipos de proporcionalidad en particular, y de correlación en general, en la construcción del concepto de función, incluso de funciones no polinomiales como trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, entre otros.

Con base en lo anterior, también se considera importante caracterizar algunas secuencias o propuestas de enseñanza de la proporcionalidad, entre estas: la propuesta de Fiol y Fortuny (1990), quienes enfatizan en iniciar con la manipulación de material concreto, haciendo sistematización y diferentes tipos de representación por medio de situaciones problemas, para posteriormente establecer situaciones de aplicación de la proporcionalidad en conceptos como cálculo comercial, escalas y temas de las áreas de física y química.

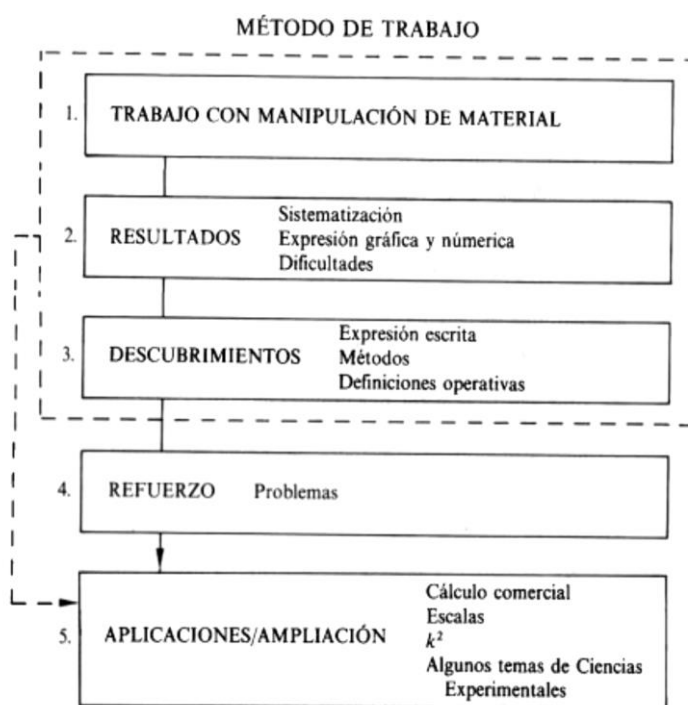


Figura 7 Primer método de trabajo presentado en Fiol y Fortuny (1990)

De igual forma, los autores mencionan la importancia de iniciar desde fuentes geométricas, primero a partir de dibujar o aparejar triángulos semejantes y más adelante rectángulos semejantes, cualificando sus relaciones, comparando sus bases y sus alturas para, posteriormente, iniciar la comparación de longitudes de figuras semejantes, tarea que es complementada por medio de material manipulable, lo cual aporta desde la percepción visual

a establecer dichas relaciones. Posteriormente, proponen trabajar conceptos asociados a la proporcionalidad como el porcentaje, la escala, la densidad además de la interpretación de libro “Los viajes de Gulliver”.

Esta propuesta de enseñanza aporta significativamente en la comprensión de las diferentes interpretaciones que se hacen de la proporcionalidad desde una perspectiva para la enseñanza, en especial, el hacer uso de contextos geométricos para construir los conceptos de razón y proporción.

Por otro lado, en la propuesta de Ruiz (2006) se muestran las diferentes agrupaciones de representaciones asociadas con el concepto de proporcionalidad, para esto, se mencionan los temas comunes en las propuestas de varios profesores, entre estos la “constante de proporcionalidad” y los “gráficos cartesianos” en la enseñanza de la proporcionalidad directa, además del uso de “tablas” y de la “regla de tres simple”. En la figura 8, se muestran las diferentes representaciones asociadas; se considera que esta propuesta aporta significativamente a la comprensión de la enseñanza de la proporcionalidad, pues establece una categorización cuando existe proporcionalidad directa o inversa, o cuando no existe dicha propiedad.

Proporcionalidad directa	Constante de proporcionalidad, gráficos cartesianos, tablas, reglas de tres simple directa, razones y proporciones, propiedades, magnitudes directamente proporcionales, funciones directamente proporcionales, regla de tres compuesta.
Proporcionalidad inversa	Constante, gráficos cartesianos, tablas, regla de tres simple inversa, propiedades, magnitudes inversamente proporcionales, funciones inversamente proporcionales
No proporcional	Funciones inversamente proporcionales

Figura 8 Representaciones asociadas a la enseñanza de la proporcionalidad Ruiz (2006)

En la propuesta de la autora se presentan los tipos de tareas propuestos para la enseñanza de la proporcionalidad, entre estas se encuentran la construcción de tablas y la identificación de la constante de proporcionalidad, lo cual establece una relación entre estas representaciones. Para la autora, este tipo de propuestas de enseñanza reflejan las creencias y los supuestos de los profesores sobre qué puede hacer el estudiante con el objeto matemático, en este caso la proporcionalidad, además de cuáles aspectos el profesor

considera necesarios para que el estudiante se apropie del concepto, elementos que aportarán en la comprensión del conocimiento sobre la enseñanza que el profesor empleará en sus clases.

Por otro lado, un autor que aporta en la comprensión del conocimiento de la enseñanza de la proporcionalidad es Ceballos (2012), quien propone la enseñanza a partir de la teoría de campos conceptuales de Vergnaud y el aprendizaje significativo de Ausubel. Para esto, el autor propone iniciar con una prueba de conocimientos previos, pasando posteriormente por el uso de situaciones de proporcionalidad geométrica y, finalmente, de presentación de situaciones problemas de aplicación relacionadas con proporcionalidad en diferentes contextos (geométrico y aritmético).

Desde la perspectiva del autor, se considera que este tipo de propuestas de enseñanza aportan a la construcción de una red de conceptos enlazados que inciden en la comprensión de las propiedades y aplicaciones de la proporcionalidad, como la relación entre los números racionales, equivalencias de fracciones, los números decimales, la semejanza de figuras, las medidas; conceptos considerados desde la perspectiva del autor como la piedra angular de las matemáticas superiores.

Fernández y Linares (2012) aportan en la comprensión del conocimiento asociado a la enseñanza de la proporcionalidad con un estudio sobre las características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. Como conclusiones de este trabajo mencionan la necesidad de contemplar los significados de la relación «uno a muchos» con los significados de la relación a es b cuando a y b tienen una relación multiplicativa no entera, construyendo un significado más rico de razón que no se reduce a un cociente entre dos números. Como resultado de la investigación, los autores también indican que los estudiantes deben complementar el significado del concepto de razón proveniente de la estructura aditiva (significado de uno a varios), incorporando así nuevos significados generados independientemente de las estructuras aditivas. Esto evidencia la necesidad de ampliar este tipo de estudios empleando diferentes tipos de problemas, por ejemplo, problemas de comparación numérica donde, dadas dos razones, estas deben ser

comparadas o problemas cualitativos que requieran una comparación sin usar la pendiente de valores numéricos específicos.

Los elementos presentados por los autores aportan en la comprensión de los conocimientos sobre la enseñanza de la proporcionalidad al señalar la importancia del paso de las estructuras aditivas a las estructuras multiplicativas, elemento que deberá ser tenido en cuenta por el profesor en la enseñanza de la proporcionalidad.

De igual forma, este tipo de investigaciones generan diferentes aportes en la enseñanza de la proporcionalidad, entre los que se cuentan la presentación de un currículo que incluya tanto situaciones proporcionales como no proporcionales (por ejemplo, situaciones aditivas), además de proporcionar a los estudiantes la oportunidad de diferenciar ambos tipos de situaciones realizando comparaciones multiplicativas de cantidades del mismo espacio de medida y de diferente espacio de medida seguido de una inferencia analógica entre las comparaciones obtenidas.

Una segunda implicación de la propuesta de los autores está relacionada con la necesidad de usar diferentes tipos de razones (enteras y no enteras) al introducir la idea de razón como un índice comparativo, además de utilizar diferentes tipos de problemas en contexto aritmético y geométrico buscando mostrar relaciones proporcionales y no proporcionales. Lo anterior busca desarrollar en los estudiantes la capacidad de hacer diferenciaciones a través de actividades de clasificación, sin necesidad de proponer resoluciones utilizando actividades de clasificación de problemas. Esto permite que los estudiantes establezcan las diferentes relaciones entre las cantidades y no en la realización de operaciones, ampliando así el significado de la idea de razón e incorporando significados que no proceden de la estructura aditiva, además de dejar de lado el énfasis en el uso de algoritmos numéricos.

Finalmente, otros planteamientos que aportan en la comprensión del conocimiento especializado asociado con la enseñanza de la proporcionalidad son presentados por Torres y Deulofeu (2018), quienes hacen un análisis del proceso de enseñanza de la

proporcionalidad, mostrando el caso en el cual un estudiante entiende erróneamente el concepto de proporcionalidad al asociar el concepto de proporcionalidad al hecho de doblar o triplicar magnitudes. En este caso, el estudiante no entiende la proporcionalidad como una relación de doble sentido, es decir, no establece puentes entre las técnicas de cálculo de que al doble o al triple de una magnitud le corresponde el doble o el triple de la otra, aunque domine la técnica de reducción a la unidad, no comprende la diferencia entre magnitudes proporcionales y no proporcionales, lo cual explica la dificultad de relacionar aspectos cualitativos y cuantitativos.

Finalmente, otros conocimientos que aportan en la comprensión de los conocimientos asociados a la enseñanza de la proporcionalidad están presentes en los planteamientos de Khoury (2002), quien presenta un cuadro con los cuatro niveles de razonamiento proporcional (tabla 2). En dicha propuesta se hace énfasis en el proceso que debería tener un estudiante en el proceso de comprensión de las características y las propiedades de la proporcionalidad, especialmente el paso de un nivel aditivo a uno multiplicativo (nivel razón).

Nivel ilógico	El estudiante no proporciona explicación, exhibe un cálculo ilógico o una adivinanza, o realiza una estimación general sobre la base de una observación descriptiva.
Nivel aditivo	El estudiante se enfoca en las diferencias entre 6 y 4 botones, y luego asume que la misma diferencia debe existir cuando se usan los clips.
Nivel transicional	El estudiante usa un enfoque aditivo dirigido a la correspondencia entre las medidas de cada figura, por cada dos botones hay un clip adicional.
Nivel razón	El estudiante usa una relación de razón constante o hace una comparación multiplicativa de las medidas de ambas figuras.

Problema: La altura de un señor bajito es 4 botones, mientras la altura de un señor alto es de 6 botones. Si usamos clips, la medida del señor bajito es de 6 clips. ¿cuál será la altura de señor alto en clips?

Tabla 2 Niveles de razonamiento proporcional en Khoury (2002)

Una vez se han expuesto los planteamientos de diferentes autores con respecto a la enseñanza de la proporcionalidad, se considera necesario establecer una tabla de tal forma que se puedan identificar elementos en común y resultados más relevantes, así como una

herramienta de análisis de los datos recolectados (tabla 3), por medio de la división en categorías temporales asociadas con la enseñanza de la proporcionalidad. Este tipo de organización de las propuestas servirá para establecer relaciones y elementos en común a ser tenidos en cuenta en la comprensión del conocimiento movilizado por la profesora.

Categoría/ Autores	Características asociadas a la enseñanza de la proporcionalidad
-------------------------------	--

Conocimientos previos a la proporcionalidad	Trabajo preliminar de conceptos como razón y proporción. Trabajo de la fracción como racional y decimal. Razón aritmética como división entre dos cantidades de magnitud. Comprensión de la división como reparto (la mitad, la tercera parte) y la multiplicación como suma abreviada (el doble, el triple). Uso y comparación y medición de razones. Exploración de razones no enteras. Razón como índice comparativo. Operaciones con Naturales, Enteros, fracciones y racionales, y porcentajes. Presentar el concepto de razón por medio del contexto de la medida. Trabajar aspectos cualitativos sobre las razones. Trabajar la razón como la medida de cantidad de una magnitud relacionada con otra cantidad de magnitud. Modelización del mundo real y material concreto. Trabajo con magnitudes de diferente naturaleza. Trabajo con métodos intuitivos para posteriormente introducir el método de regla de tres. Uso de contextos geométricos. Uso de gráficas cartesianas y tablas. Trabajar el significado de la relación de 1 a muchos. Exploración de situaciones aditivas a situaciones multiplicativas. Uso de diferentes sistemas de representación y conversión entre estos.
--	--

Conocimientos en la iniciación a la proporcionalidad	Interpretación de tablas y de las magnitudes tratadas. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Uso situaciones de proporcionalidad geométrica, para posteriormente trabajar otros contextos.
---	---

Fiol y Fortuny (1990), Solomon (1987), Vega (2006), Fiol y Fontuny (1990), Ruiz (2006), Ceballos (2012),	Método de unitización.
---	-------------------------------

Torres, y Deulofeu
(2018), Guarín y
Escolano (2009)

Conocimientos asociadas a la proporcionalidad	Establecer las condiciones cuando exista o no la proporcionalidad entre dos razones. Método de regla de tres con diferentes medios. Método de reducción a la unidad, para posteriormente trabajar repartos proporcionales, porcentajes, escalas e interés simple. Cálculo de cantidades desconocidas. Proporcionalidad inversa. Aritmetización de razones, ya sean de la misma o diferente magnitud. Problemas de comprensión de la proporcionalidad trascendiendo el uso aritmético. Uso de relaciones multiplicativas. Proporcionalidad como relación en ambos sentidos. Trabajo de proporcionalidad como igualdad entre razones aritméticamente equivalentes $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; ad = bc$ Semejanza de triángulos y polígonos.
Fernández y Linares (2012), Guarín y Escolano (2009), Azcarte y Deulofeu (1990), Vega (2006), Godino y Batanero (2012), Torres y Deulofeu (2018), Solomon (1987) Guarín y Escolano (2009), Solomon (1987)	

Conocimientos que aportan a conceptos posteriores asociados a la proporcionalidad	Trabajo de proporcionalidad asociado al concepto de función. Trabajo sobre paralelismo, cuerdas de una circunferencia, establecimiento de la pendiente. Uso de la observación, reflexión y argumentación para comprender los conceptos de fracción y función. Relacionar el pensamiento proporcional con otros procesos matemáticos.
--	--

Fiol y Fortuny
(1990),
Azcarte y Deulofeu
(1990), Solomon
(1987), Rapetti
(2003), Godino y
Batanero (2012)

Tabla 3 Síntesis de las características de propuestas de enseñanza de la proporcionalidad

2.2.3.1. Errores y obstáculos epistemológicos del concepto de proporcionalidad

Con base en lo comentado anteriormente, se puede señalar que la construcción histórica de un concepto aporta en la identificación de cuáles fueron los errores y obstáculos

que el ser humano tuvo que superar para tener una comprensión cada vez más amplia, rica y compleja de una realidad. En ese sentido, se considera que una reconstrucción histórica también aporta al proceso de identificación del conocimiento del profesor, pues por medio de la identificación de los errores y obstáculos históricos se pueden establecer errores u obstáculos que el estudiante pueda encontrar en su proceso de aprendizaje, lo cual contribuye a prever las dificultades de los estudiantes, además de establecer estrategias para superar estos errores y obstáculos. Podemos así apoyarnos en la evolución histórica del concepto, a partir de los aportes de la cultura griega, la cultura china, pasando por los aportes árabes y por aquellos de los autores del renacimiento.

Un ejemplo de este planteamiento está relacionado con los obstáculos del tratamiento de comprensión de la proporcionalidad generado por el uso exclusivo de proporcionalidad entre magnitudes homogéneas, lo cual genera obstáculos en la comprensión del concepto de función.; debido a que cuando se trabaja con proporciones desde la perspectiva griega (geométrica a partir de segmentos), es difícil distinguir la relación existente entre dos magnitudes no homogéneas como en el caso del concepto de función.

Se considera que esta situación se debe a que los griegos comparaban únicamente magnitudes de la misma naturaleza, ignorando la posible dependencia proporcional existente entre magnitudes de distinta naturaleza. Parece así que esta dificultad se presenta debido al significado únicamente geométrico que tenían las magnitudes para los griegos, quienes comparaban longitudes con longitudes o áreas con áreas, mostrando así que una razón entre magnitudes distintas carecía de significado.

Por otro lado, autores como Rodríguez y Pérez (2003) mencionan tres dificultades que se presentan al tratar la proporcionalidad, a saber:

- Coordinar la atención en situaciones en las que se presenta una variación simultánea de dos cantidades, por ejemplo, cuando se debe determinar el valor de una cantidad desconocida en términos de otra conocida.

- La no utilización de la estrategia del valor unitario en la resolución de un problema, por ejemplo, cuando no se establece el valor de un objeto, una vez dado el valor de una docena.
- Falta de construcción de un significado del porcentaje como una aplicación específica del concepto de proporción. Por ejemplo, cuando se desconoce la relación entre magnitudes para establecer un procedimiento para determinar un porcentaje.

Con respecto a estos tres planteamientos, se considera que todos están relacionados con un correcto manejo de los sistemas de representación, además de la comprensión de procedimientos auxiliares como el tratamiento algebraico de situaciones, aspectos que se tendrán en cuenta en la presente investigación como parte del conocimiento especializado que debe tener el profesor al enseñar la proporcionalidad.

Por otra parte, Guarín y Escolano (2009) presentan una propuesta de sistematización de los errores presentados por los estudiantes en el proceso de aprendizaje del concepto de proporcionalidad. Los autores mencionan que existen dos tipos de respuestas dadas por los estudiantes al responder este tipo de situaciones; en el primer tipo realizan operaciones aditivas donde los estudiantes recurren a operaciones entre números considerados como entes abstractos y no como expresiones de las distintas cantidades de magnitud, en el segundo tipo de respuesta se emplean relaciones algebraicas, algunas de estas presentando errores como la definición errónea el valor de las incógnitas, la interpretación errónea de la solución y el erróneo establecimiento de las relaciones algebraicas.

Otras dificultades encontradas están en Rivas (2013), quien las organiza en tres categorías. La primera está relacionada con aspectos epistémicos y cognitivos en los cuales se incluye la comprensión de la razón como un índice comparativo, que generalmente expresa una relación multiplicativa entre dos medidas. Por ejemplo, las dificultades relativas a componentes claves involucrados, entre las que están la dificultad de distinguir entre situaciones que son organizadas de manera apropiada por razones de aquellas que no lo son

y el proceso de modelización que permite hacer las transformaciones requeridas para moverse con facilidad entre el uso de una razón como una fracción y viceversa.

En la segunda categoría están las dificultades debidas al contexto, las cuales se describen en términos de dos variables, una referida al dominio físico-empírico y otra al dominio matemático, entendiendo por dominio físico-empírico los tipos de razón que se manifiestan de acuerdo con las situaciones: razones de dos cantidades heterogéneas (por ejemplo, la velocidad), de medida, de mezcla, de alargamiento y de cambio de unidad. Respecto del dominio matemático, se refiere al uso de la recta numérica, la escritura de fracciones y números decimales.

La tercera categoría asocia las dificultades como complejidad del contenido, entendida esta como la complejidad involucrada en torno al aprendizaje de aspectos matemáticos más avanzados que implican la comprensión de situaciones de razón y proporción. El autor menciona que en este sentido existe una variedad considerable de problemas en los que se usa razonamiento proporcional, como, por ejemplo, problemas de valor faltante proporcional, de comparación numérica, de predicción y comparación cualitativa, de porcentajes, de escalas, de conversión - transformación de unidades de medidas, entre otros tipos de problemas de variada la complejidad que consisten en razonar proporcionalmente distinguiendo las diferencia entre situaciones donde existen o no proporciones.

Se considera que, por medio de la construcción de estas tres categorías sobre tipos de dificultades, el autor buscó mostrar las dimensiones en las cuales puede estar un concepto matemático; una dimensión epistémica cognitiva, una dimensión contextual y una asociada con conceptos futuros, elementos que denotan la complejidad de los conocimientos inmersos en la enseñanza de un concepto, en este caso, la proporcionalidad.

De igual forma, en Rivas (2013) se proponen errores relativos a la resolución de problemas sobre proporcionalidad, entre estos están el uso incorrecto de una estrategia apropiada, el uso de una estrategia inapropiada, el ignorar parte de los datos, el uso de

operaciones al azar con parte de los datos, el utilizar estrategias aditivas erróneas como, por ejemplo, cuando se establece la relación entre las razones y se calcula a través de la sustracción entre sus términos, y luego la diferencia es aplicada para obtener la segunda razón, haciendo el cálculo de la diferencia no sólo entre los términos de una misma razón, sino entre los términos correspondientes de dos razones diferentes.

De igual forma, Rivas (2013) asume el término de obstáculo epistemológico como aquel obstáculo correspondiente a un conocimiento que ha construido el sujeto. Algunos de estos son, por ejemplo, la tendencia de un sujeto a usar la linealidad en contextos donde no es aplicable, la sobrevaloración de la linealidad al resolver problemas pseudo proporcionales o no proporcionales en diversos contextos. Estos elementos constituyen parte del conocimiento especializado del profesor, además de obstáculos para tener en cuenta por el profesor en el momento de la enseñanza de la proporcionalidad.

Por otro lado, autores como Yáñez *et al.* (2016) mencionan que para que el concepto de proporcionalidad se construya significativamente es necesario el uso de situaciones reales que sean intuitivas para el estudiante, lo cual imprime un énfasis en las relaciones multiplicativas entre las cantidades de magnitud y su diferenciación de las relaciones aditivas, pues usualmente los estudiantes, para resolver situaciones de tipo multiplicativo, usan estrategias de tipo aditivo, englobando así este tipo de errores en un primer tipo de error asociado a la resolución de problemas usando proporcionalidad.

Los autores sugieren iniciar la enseñanza de la proporcionalidad a partir de un contexto aritmético, presentando cantidades de magnitudes y observando sus posibles relaciones, es decir, partiendo de relaciones fácilmente detectables como la mitad y el doble, además de presentar relaciones no proporcionales como la edad de una persona y su peso, y de magnitudes que varían por tramos. Una vez se hayan abordado este tipo de situaciones sencillas de proporcionalidad directa, además de abordar temáticas relacionadas con la proporcionalidad como los porcentajes, puede pasarse a un contexto geométrico.

Para trabajar la proporcionalidad aritmética desde contextos geométricos como una manera natural de acercar al estudiante a este concepto, puesto que desde la primera infancia el estudiante adquiere la capacidad de reconocer formas, figuras y tamaños esto puede ser un inicio para el trabajo de la semejanza. Allí se puede emplear material concreto como muñecas rusas y figuras geométricas para construir los conceptos de los criterios de semejanza (igualdad de ángulos y lados correspondientes proporcionales); lo cual permite iniciar por la proporcionalidad entre lados de los rectángulos y después la igualdad de ángulo con los triángulos y finalizar con las circunferencias.

Según los planteamientos de los autores, el aprendizaje de la proporcionalidad posibilita comparar la variación de pares de cantidades de diferentes formas, pero en este proceso surgen diferentes tipos de errores. Un error clásico es la identificación equivocada de relaciones proporcionales de cantidades de magnitudes cuando no lo son, donde se cree que cuando aumenta o disminuye la cantidad una magnitud la otra también aumenta o disminuye en el caso que la proporcionalidad directa, o que cuando aumenta o disminuye una cantidad de magnitud la otra cantidad de magnitud disminuye o aumenta respectivamente.

Para los autores este error se debe a la relación de cantidades de manera aditiva y no multiplicativa, por ejemplo, en la tabla 4 se muestra cómo los estudiantes generalmente piensan que la relación es proporcional porque la resta de las cantidades de una magnitud con las correspondientes de la otra magnitud (8-5; 7-4; 12-9) obtiene la constante 3, desconociendo que para establecer la relación de proporcionalidad se deben identificar los cocientes de las cantidades correspondientes, los cuales deben ser los mismos.

	Cant. chicos	Cant. Chicas
Clase A	5	8
Clase B	4	7
Clase C	9	12

Tabla 4 Identificación de constante de proporcionalidad Yáñez et al (2016)

Asimismo, desde la perspectiva de los autores, la aplicación de estrategias aditivas suele ser una fuente de errores en la resolución de problemas de proporcionalidad; esto se puede evidenciar en la figura 9, donde un estudiante cuantifica erróneamente haciendo una

sustracción entre $12 - 6 = 6$ y aplica la diferencia para determinar el lado desconocido $8 - 6 = 2$, sin establecer las relaciones multiplicativas, en este caso $\frac{12}{6} = \frac{8}{x}$

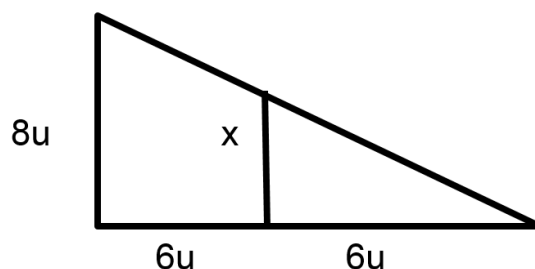


Figura 9 Ejemplo geométrico presentado Carrillo et al (2016)

De la anterior situación se puede comentar que las dificultades en la resolución de problemas de proporcionalidad varían de acuerdo con el tipo de procedimiento usado, por ejemplo, cuando en los problemas de regla de tres el estudiante reproduce con facilidad los pasos que hay que seguir, pero se le dificulta la elección de un procedimiento adecuado.

Con respecto a lo anterior, los autores comentan que cuando el concepto de proporcionalidad no está bien construido se tiende a aplicar la regla de tres directa sin considerar si el problema es de proporcionalidad directa o inversa, a tal punto de aplicar regla de tres en situaciones en las que las relaciones entre cantidades de magnitudes no son proporcionales; para los autores esto suele suceder cuando se expone a los estudiantes a ejercicios algorítmicos y no a situaciones contextualizadas que faciliten la construcción del concepto.

Con respecto a las dificultades relacionadas con escalas numéricas se considera que estas surgen cuando no se indican las unidades, lo cual hace que el estudiante no entienda que la escala es independiente de la unidad elegida. Por ejemplo, cuando no se entiende que una escala 1:50 quiere decir que una unidad de la maqueta equivale a 50 unidades en la realidad, y que se puede medir la maqueta en la unidad que se desee y multiplicar por 50, en este caso, para obtener la medida del objeto real en la unidad de medida elegida.

Otra dificultad de los estudiantes en la comprensión de la proporcionalidad, para Carrillo *et al.* (2016), se presenta cuando se quiere calcular las medidas reales teniendo que el numerador de la escala numérica no es la unidad. Por ejemplo, cuando en un mapa a escala 2 :1000, se calcula una medida real multiplicándola por el valor de esta en el mapa por 1000, en este caso, en vez de multiplicar $\frac{1000}{2}$ que es el valor de la unidad.

Para los autores, uno de los elementos que genera este tipo de confusiones es el tratamiento descontextualizado, sin la búsqueda de comprensión conceptual de la proporcionalidad, muchas veces causado por el abuso de la regla de tres.

El anterior procedimiento de cálculo, junto con la habitual aritmetización de la medida, provoca la pérdida del significado de las magnitudes que se abordan y llevan a los estudiantes a decantar su razonamiento proporcional con base en la estructura de la propia regla de tres en vez de su comprensión de las magnitudes consideradas y sus relaciones, situación que se considera debe ser tomada en cuenta por el profesor en la enseñanza de la proporcionalidad.

A modo de cierre de esta sección, a continuación, se presentará la tabla 5, en la cual se resumen las dificultades y errores señalados anteriormente con el propósito de establecer elementos en común entre los distintos autores, además de establecer una herramienta que aportará en el análisis de la información recolectada.

Categorías/ Autores	Dificultad o error asociado a la proporcionalidad
Asociadas a conceptos previos a la proporcionalidad	Errores en el significado de la fracción como relación parte-todo y como cociente.
Rapetti (2003), Rivas (2013), Fernández y Llinares (2012)	No comprensión de la razón como un índice comparativo, que generalmente expresa una relación multiplicativa entre dos medidas.
	No establecer la relación entre el uso de una razón como una fracción y viceversa.
	No usar razón como un índice comparativo.

Asociadas a la iniciación a la proporcionalidad

Fiol y Fortuny (1990), Godino y Batanero (2002), Rodríguez y Pérez (2003), Carrillo *et al.* (2016),

No iniciar la enseñanza desde fuentes geométricas, primero a partir de dibujar o aparejar triángulos semejantes y más adelante rectángulos semejantes, cualificando sus relaciones, comparando su base y su altura, para posteriormente iniciar la comparación de longitudes de figuras semejantes.

Uso de métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo de “regla de tres” sin introducir el dominio de otros intuitivos.

La no utilización de la estrategia del valor unitario en la resolución de un problema.

El no uso de situaciones reales que sean intuitivas para el estudiante, haciendo énfasis en las relaciones multiplicativas entre las cantidades de magnitud y diferenciarlas de las relaciones aditivas.

Identificación equivocada de relaciones proporcionales de cantidades de magnitudes cuando no lo son.

Asociados al significado de conceptos relacionados a la proporcionalidad

Guarín y Escolano (2009), Khoury (2002), Vega (2006), Godino y Batanero (2002), Rodríguez y Pérez (2003), Carrillo *et al.* (2016)

Realización de operaciones aditivas por medio de operaciones entre números como entes abstractos y no como expresión de las distintas cantidades de magnitud.

Cálculo de la constante es un simple cálculo numérico sin interpretación alguna.

Uso de tablas dadas únicamente en forma numérica, es decir, sin especificar de qué magnitudes se trata.

Considerar las razones como entes numéricos abstractos.

Presentar la razón como un número y no como medida, mostrando a la razón como un ente abstracto desconectado de las magnitudes ocupándose solamente de los aspectos numéricos.

Falta de construcción de un significado del porcentaje como una aplicación específica del concepto de proporción.

Uso de la linealidad en contextos donde no es aplicable, la sobrevaloración de la linealidad al resolver problemas pseudo proporcionales o no proporcionales en diversos contextos.

Tratamiento descontextualizado, sin la búsqueda de comprensión conceptual de la proporcionalidad, causado por el abuso de la regla de tres.

Uso exagerado de procedimientos de cálculo, junto con la habitual aritmetización de la medida, que provocan la pérdida del significado de las magnitudes.

**Asociados
pensamiento
variacional**

Guarín y Escolano (2009), Rodríguez y Pérez (2003), Torres y Deulofeu (2018), Rivas (2013)

al Definición errónea del valor de las incógnitas.

Interpretación errónea de la solución y el erróneo establecimiento de las relaciones algebraicas.

Resolución de situaciones en las que se presenta una variación simultánea de dos cantidades.

Creer que “para la proporcionalidad directa: al aumentar una magnitud la otra también aumenta, y si disminuye una, la otra también lo hace”, en cambio para caracterizar la proporcionalidad inversa se mencionan frases como “cuando una aumenta, la otra disminuye”, sin mencionar la constante de variación.

Asociar el concepto de proporcionalidad únicamente al hecho de doblar o triplicar magnitudes, en este caso el estudiante no entiende la proporcionalidad como una relación de doble sentido.

**Asociado al uso de
estrategias de
proporcionalidad
erronas**

Fernández y Linares (2012), Torres y Deulofeu (2018), Rivas (2013), Carrillo *et al.* (2016)

de No complementar el significado del concepto de razón proveniente de la estructura aditiva (significado de uno a varios), incorporando nuevos significados generados independientemente de las estructuras aditivas.

No trabajar situaciones no proporcionales.

No usar diferentes tipos de razones (enteras y no enteras).

No distinguir entre situaciones que son organizadas de manera apropiada por razones de aquellas que no lo son.

Dificultad de razonar proporcionalmente distinguiendo las diferencias entre situaciones en las que existen proporciones y en las que no.

Dificultades por dominio físico-empírico (uso inadecuado de tipos de razones de dos cantidades heterogéneas) y por dominio matemático (uso inadecuado de la recta numérica, la escritura de fracciones y números decimales).

Uso incorrecto de una estrategia apropiada, el uso de una estrategia inapropiada, el ignorar parte de los datos, el uso de operaciones al azar con parte de los datos.

Utilizar estrategias aditivas erróneas como cuando se establece la relación entre las razones, la cual es calculada a través de la sustracción entre sus términos.

Errores en el uso de escalas numéricas; considera que surgen cuando no se indican las unidades, entendiendo la escala como independiente de la unidad elegida.

Errores al calcular las medidas reales cuando el numerador de la escala numérica no es la unidad.

Tabla 5 Síntesis de errores y dificultades en la enseñanza de la proporcionalidad

2.2.4. Antecedentes de investigaciones sobre el conocimiento del profesor respecto de la enseñanza de la proporcionalidad

En los anteriores apartados se han caracterizado algunos conocimientos con respecto a la proporcionalidad desde una perspectiva disciplinar y desde la enseñanza de ese objeto matemático. En este apartado consideramos necesario presentar investigaciones previas sobre el conocimiento del profesor con respecto a la enseñanza de la proporcionalidad, esto ayudará a establecer y comprender las características y relaciones existentes del conocimiento especializado del profesor.

Block (2001, 2006) aporta en dicha comprensión al indagar en los conocimientos de profesores de primaria sobre la proporcionalidad. Para ello utiliza un cuestionario en el que, en la primera parte, se exploran conocimientos explícitos de los maestros sobre las principales propiedades de una relación proporcional entre cantidades (conservación de las razones internas, existencia de un factor constante de proporcionalidad, propiedad aditiva) y mediante la segunda y tercera parte se explora el grado en que los maestros prevén el efecto

de ciertas variables didácticas en la dificultad de los problemas y en los procedimientos que se utilizan para resolverlos.

Para el autor, la comprensión de la noción de razón progresa a la par con el desarrollo de los procedimientos numéricos que permiten manipular las razones: la suma iterada, la multiplicación (y la división) como razón interna que se conserva y la multiplicación como operador, expresión de una razón constante, etc. Block encuentra algunas dificultades por parte de los profesores para identificar procedimientos que de hecho utilizan sus estudiantes y, con ello, para valorar el rol que éstos pueden desempeñar en el proceso de construcción de otras nociones.

La segunda dificultad encontrada por el autor fue la ausencia de un procedimiento que se comparte con los estudiantes, esto implica no contar con una alternativa más accesible que la del operador constante, o la de los productos cruzados, que puede ser importante en la introducción de la noción de operador multiplicativo fraccionario.

El autor concluye que se identificaron ciertos procedimientos no canónicos en la práctica de docentes de los dos primeros grados de primaria, en contraste, los docentes con experiencia en grados superiores, quinto y sexto, recaen en prácticas que redundan en errores similares a los que cometen los estudiantes. Esto sugiere que un mayor dominio de técnicas aritméticas más generales puede venir acompañado de una pérdida de sensibilidad hacia los procesos por los que pasan los estudiantes y hacia la forma en que determinadas variables de los problemas pueden afectar sus resoluciones.

Rivas, Godino y Castro (2012) indagan en el desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria, para lo cual emplean el enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemática GROS. Por medio de esta investigación, se estableció una red de objetos y significados puestos en juego en la resolución de un problema matemático sobre proporcional, esta red se basó en la comprensión e identificación de los diferentes objetos matemáticos como elementos lingüísticos, conceptuales, procedimentales, proposiciones y argumentos, en

correspondencia con sus respectivos significados, puestos en juego en la resolución de un problema matemático en un contexto instruccional.

Para la elaboración de dicha red, fue necesario elaborar un análisis epistémico sobre estos objetos matemáticos, de tal forma que se pudiera explicar la resolución de problema sobre proporcionalidad más allá del uso de reglas, buscando así que las informantes (profesoras en formación) cuestionaran los significados en los cuales se ponen en juego los términos razón y proporción.

Además de dicha red, los aportes proporcionan alternativas por medio de la evidencia de la evolución de las profesoras en formación en varios sentidos, como el epistémico, al pasar de estados de menor conocimiento a estados de mayor conocimiento; la competencia matemática, al resolver correctamente el problema; y el didáctico, al proponer una solución al problema vinculada con las posibilidades de razonamiento de los estudiantes.

Estos aportes son complementados por los planteamientos de Rivas (2013), quien en su tesis doctoral por medio del EOS hace un análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de Educación Primaria en formación en la Universidad de Granada.

En una primera parte, se hace un estudio con un grupo de profesores en formación, en el cual se establece el conocimiento matemático de los futuros profesores respecto de la proporcionalidad como una construcción desarticulada y basada en aspectos parciales, que no termina de integrarse en un conocimiento significativo. En una segunda parte de la investigación con otro grupo de estudiantes, se hace una acción formativa centrada en el análisis epistémico de tareas de proporcionalidad propias de educación primaria, la cual aporta en el desarrollo del conocimiento especializado del contenido, además de dimensionar la complejidad del dominio instrumental de dicha herramienta.

Por su parte, autores como Balderas y Guerra (2014) presentan una investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas con respecto a la proporcionalidad. Para esto aplican a un grupo de profesores una prueba de ocho preguntas en las cuales indagan por diferentes interpretaciones de la proporcionalidad. Con lo cual se observa que en la mayoría de las soluciones presentan tres tendencias: fuerte incidencia de los procedimientos

“clásicos”, la regla de tres y el valor unitario; presencia menor de los procedimientos “internos” (al doble, el doble) que suelen ser menos formales, más intuitivos; además de una presencia más pequeña de procedimientos algebraicos.

Estos planteamientos son complementados por la propuesta de Torres (2015), quien en su tesis doctoral indaga el conocimiento de un profesor de Primaria y uno de Secundaria, por medio del Knowledge Quartet. Allí identifica 39 indicadores pertenecientes a las categorías (11 para fundamentos, 11 para transformación, 7 para conexión, 4 para contingencia y 6 para la categoría general). El primer indicador asocia proporcionalidad a una relación entre magnitudes mensurales y el segundo a un factor de cambio. Esto indica que el profesor de primaria no problematiza la definición de proporcionalidad, mientras el de Secundaria sí lo hace, logrando que el estudiante construya su propia definición de proporcionalidad.

Con respecto a los indicadores establecidos por el autor, a continuación, se presenta un listado más detallado de dichos indicadores teniendo en cuenta las categorías del modelo Knowledge Quartet, que en la primera categoría (fundamentos) presenta 11 indicadores, los cuales son reagrupados en los siguientes tipos de conocimiento:

- Identificación de magnitudes, asignación de una medida a una magnitud y características de las magnitudes (discretas y continuas).
- Utilización de incremento gradual aditivo y utilización del incremento gradual multiplicativo.
- Explicitación del procedimiento de reducción a la unidad.
- Trabajo en relación de proporcionalidad entre pares de valores de las dos magnitudes y de la relación entre pares de valores de la misma magnitud: la razón de proporcionalidad y la razón escalar.
- Tipo de razón de proporcionalidad (entera o no, mayor o menor que la unidad) y de razón escalar (entera o no, mayor o menor que la unidad)
- Explicitación de la razón dada por el problema.

- Explicitación de la constante de proporcionalidad obtenida al hacer la reducción a la unidad para obtener la función de proporcionalidad.

Debido a las características presentadas, esta categoría está asociada a los conceptos principales sobre proporcionalidad y las relaciones entre los mismos desde una perspectiva disciplinar. Se considera que estos conceptos pueden aportar en el establecimiento de indicadores propios para la presente investigación.

Con respecto a la categoría de transformación, el autor propone otros 11 indicadores, los cuales son reorganizados o agrupados en los siguientes indicadores:

- Explicitación de que se va a enseñar una técnica para aquellos casos en que la razón de proporcionalidad no sea entera y explicitación que permite diferenciar una técnica de un concepto.
- Uso de una representación de la situación del problema mediante dibujos o esquemas y uso de un dibujo para construir un modelo.
- Asignación de un valor concreto a la representación en tabla de valores.
- Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad nivel de visualización gráfica y elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad utilizando un contexto adecuado.
- Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de razón de proporcionalidad.
- Uso que se hace de los ejemplos para conducir al estudiante a descubrir la razón de proporcionalidad, a aplicar la técnica de la reducción a la unidad, a descubrir la función lineal.

De acuerdo con estas características, se puede comentar que estos indicadores igual que en el modelo MTSK, concibe el conocimiento en acción, de tal forma que esta categoría hace énfasis en cómo el conocimiento sobre proporcionalidad se transforma para ayudar a los estudiantes en la comprensión del concepto, por ejemplo, cuando se elige determinada analogía, ilustraciones, ejemplo, explicaciones, representaciones o tipo de lenguaje.

Con respecto a la categoría de conexiones, el autor reorganiza los 7 indicadores encontrados en los siguientes indicadores:

- Relación y comparación de la técnica de reducción a la unidad con otras técnicas como la regla de 3 y la técnica basada en la propiedad fundamental de las proporciones.
- Énfasis en el descubrimiento de un modelo dentro del problema y búsqueda por parte de los estudiantes de dicho modelo dentro del problema.
- Énfasis en la relación entre la razón de proporcionalidad y la técnica de reducción a la unidad.
- Énfasis en la relación entre la razón de proporcionalidad y la función lineal.
- Énfasis en la relación entre la técnica de reducción a la unidad y la función lineal.
- Visión del horizonte matemático hacia adelante: la proporcionalidad como modelo de función y visión hacia atrás: modelos aditivos y multiplicativos.

Con base en estas características, esta categoría se puede asociar a una relación entre las elecciones y decisiones con respecto al contenido matemático, en especial con respecto a la coherencia de la planeación o en la enseñanza en el transcurso de varias sesiones.

Con base en la categoría de contingencia se presentan 4 indicadores, los cuales son:

- Gestión de intervenciones en las que el estudiante usa métodos aritméticos informales.
- Gestión de intervenciones en las que el estudiante generaliza la razón de proporcionalidad a partir de casos concretos.
- Gestión de intervenciones en las que el estudiante utiliza la razón de proporcionalidad inversa.
- Gestión de intervenciones en las que el estudiante utiliza la razón escalar entre pares de valores de la misma magnitud.

De acuerdo con estos planteamientos, esta categoría está asociada con el conocimiento y manejo sobre acontecimientos de la clase que no han sido planificados por el profesor o que se desvían de esta, es decir, un conocimiento que surge por medio de la interacción en el aula, mostrando así la capacidad de poner en juego sus conocimientos sobre la marcha, elemento que también es considerado en el modelo MTSK, dado que este modelo concibe el conocimiento como un constructo en y para la práctica.

Finalmente, con respecto a la categoría general se proponen 6 indicadores. El autor relaciona estos en esta categoría debido a que no se pueden ubicar en la propuesta del profesor Rowland, además de que no están los cuales son reorganizados directamente con la proporcionalidad, ni con los procedimientos, ni con las situaciones de contingencia. Estos 6 indicadores son planteados como:

- Explicitación de los objetivos marcados para la clase y claridad en el camino a seguir para llegar al objetivo.
- Generación por parte del profesor de una situación de aula interactiva.
- Explicitación reiterada de lo que se hace.
- Discusión activa del problema en la pizarra, escribiendo explícita y continuamente.
- Recapitulación del trabajo de los estudiantes en relación con los objetos de la clase.

Aunque estos últimos indicadores no están asociados directamente con el concepto de proporcionalidad, se considera que por la identificación de otros indicadores que no están en las categorías del modelo del profesor Rowland es necesario complementar o ampliar dicho modelo, en este caso, se cree conveniente, por medio del modelo MTSK elaborado en la Universidad de Huelva.

En términos generales la investigación de Torres (2015), aporta en varios sentidos a los planteamientos planteados en la presente investigación; entre estos, el planteamiento del conocimiento del profesor como un constructo en constante transformación puesto en juego

en el aula de clase activamente: la importancia de un conocimiento disciplinar amplio y profundo, el rol del conocimiento del profesor sobre cómo puede usar ejemplos, representaciones, tipo de lenguaje o analogías para promover los aprendizajes de los estudiantes, además del cómo el conocimiento del profesor es usado para justificar decisiones con respecto a la coherencia de la planeación desde el contenido matemático.

Otros elementos de la investigación de Torres (2015) que aportan a la presente investigación son la comprensión de cómo el profesor dirige situaciones y preguntas que no habían sido contempladas inicialmente, además de la existencia de indicadores que no están totalmente ligados a la proporcionalidad pero que sí hacen parte del conocimiento especializado como, por ejemplo, la capacidad de recapitular el trabajo de los estudiantes en relación con los objetos de la clase o el diseño de situaciones interactivas para la clase.

Recientemente, autores como Amado y Muñoz (2015) presentan la caracterización de los conocimientos que debería tener el profesor de matemáticas a la luz de lo reportado en investigaciones en educación matemática con respecto a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. Esta caracterización se hace a partir de una búsqueda bibliográfica de la cual se obtuvieron 274 documentos entre artículos, libros y tesis de maestría y doctorado, que datan del año 1929 hasta el año 2014, para esto, hacen uso del modelo Hill, Ball y Schilling (2008). Con base en este modelo, los autores concluyen que en los artículos seleccionados para este trabajo se centran en gran medida en solo dos de los subdominios utilizados: el conocimiento del contenido y del estudiante y el conocimiento del contenido y de la enseñanza, lo cual permite observar un claro sesgo por parte de los investigadores en educación matemática.

Por otra parte, los autores reflexionan acerca del rol que le compete a las instituciones formadoras de futuros profesores de matemáticas respecto a los vacíos en la formación de jóvenes en temas como razón, proporción y proporcionalidad, ya que la investigación reporta que los estudiantes para profesor de matemáticas tienen dificultades para reconocer situaciones no proporcionales, de unidad en contextos de medida con el significado parte-todo y para usar el significado multiplicativo de la idea de operador.

Con respecto a los métodos de solución, el autor pudo evidenciar la importancia del uso de técnicas para la resolución de problemas, haciendo énfasis de la interpretación de la regla de tres como el valor unitario en un problema, sin embargo, no evidenció un espacio donde se caractericen situaciones en las que haya cantidades directamente proporcionales y el uso de las propiedades aditivas y de los factores internos. Lo anterior también ha de ser tenido en cuenta en el proceso de comprensión del conocimiento especializado del profesor de la enseñanza de la proporcionalidad; se considera que todas estas investigaciones previas dan un marco de referencia vital, el cual se retomará y se usará en la presente investigación.

2.3 El conocimiento profesional del profesor

El concepto de conocimiento profesional es usado para comprender y explicar la naturaleza, los saberes y las actitudes que el profesor pone en juego para el cumplimiento de los objetivos de los estudiantes, lo cual está condicionado o delimitado por elementos como pruebas realizadas a profesores como TEDS-M⁸, los estándares nacionales, el currículo y los objetivos institucionales.

Para una autora como Climent (2005), el conocimiento profesional del profesorado es la conjunción de los saberes y experiencias que un profesor posee y que usa en el desarrollo de su labor, los cuales se construyen desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional. Para la autora, hay tres elementos que caracterizan este conocimiento, el primero es la cosmovisión, las concepciones y las creencias, pues estas generan un actuar específico en la práctica del profesor y hacen parte de un ámbito personal y no académico; el segundo es la experiencia profesional, pues por medio de esta el profesor modifica y adquiere nuevos conocimientos y sus concepciones, mostrando así el carácter práctico del conocimiento profesional; y, por último, el conocimiento académico, el cual incide sobre el conocimiento en la materia y sus concepciones sobre esta.

De igual forma, para la autora, este tipo de conocimiento tiene una naturaleza y características especiales que, diferencian el conocimiento del profesor del conocimiento del

⁸ *Teacher Education and Development Study in Mathematics*

investigador; algunas de esas características específicas contemplan el conocimiento como una construcción situada y contextualizada, con lo que se hace referencia a que está asociado con los contextos profesionales por medio del uso de la perspectiva del aprendizaje situado. Esto hace hincapié en el carácter social del aprendizaje, el cual no está simplemente situado en un espacio y tiempo, además considera el aprendizaje como una parte integral de toda actividad.

Además, al incluir el calificativo situado para hacer relación a la comunidad educativa y el entorno en el cual el profesor desarrolla su labor, menciona que es social e individual, haciendo referencia a conocimiento como una construcción social que es aprendida por medio de la experiencia. La autora caracteriza el conocimiento profesional como:

Personal, con lo que se quiere mostrar que el conocimiento es propio de cada individuo y diferente de un profesor a otro, pues depende de sus concepciones, valores y actitudes, además de su experiencia docente y vital.

Dinámico, Integrado y complejo, conocimiento como una construcción cambiante, en evolución continua el cual se complejiza y enriquece por medio de las interacciones con los estudiantes y las experiencias profesionales.

Parcialmente tácito, conocimiento como saber desde la acción evidencia la importancia de la experiencia; entre mayor sea la experiencia, el profesor tendrá un saber tácito que será mayor y más espontáneo, lo cual enriquece y complejiza su conocimiento profesional. Esta perspectiva permite entender la reflexión desde la acción como aspecto que posibilita y convierte la acción en saber.

Práctico y Crítico, pues justamente en este contexto es donde el conocimiento se activa y se valida, mostrando así el conocimiento como resultado de la formación y la experiencia. Sin embargo, es necesario presentar esta característica más allá de la dicotomía teoría – práctica, en la cual la reflexión, la práctica y la teoría se reúnen de tal forma que la reflexión sobre la práctica permite la identificación de marcos teóricos relevantes para el análisis de las situaciones, mostrando así una acción reflexiva, crítica y autónoma.

Como complementos a esta caracterización del conocimiento profesional, un autor como Carrillo (1998) menciona que el conocimiento profesional se organiza de forma interactiva entre lo que se piensa, se vive y lo que se lee, de tal forma que sea necesario leer teorías, tener experiencias, reflexionar y contrastar.

Los anteriores planteamientos fueron de vital importancia para el presente apartado de la investigación, pues permitieron hacer varias reflexiones sobre las características, la naturaleza y los componentes del conocimiento profesional del profesor como una construcción colectiva, producto de las concepciones, las creencias, la formación académica y la experiencia profesional y de vida. De este modo, el conocimiento del profesor se entiende como una relación entre las vivencias colectivas y las construcciones personales, características que aportarán significativamente a la comprensión de modelos como el MTSK, el cual será presentado con mayor profundidad a continuación.

2.4 Antecedentes del modelo MTSK

En el numeral anterior se presentó una caracterización general de los aspectos del conocimiento del profesor, sin embargo, ya desde los años ochenta autores como Elbaz (1983) planteaban que en el conocimiento profesional del profesor debe estar presente el saber de la materia, lo cual genera la necesidad de establecer modelos teóricos de análisis y estudio del conocimiento del profesor de matemáticas.

A continuación, se presentarán algunas propuestas teóricas precedentes al MTSK como un proceso de comprensión y estudio del conocimiento del profesor de matemáticas:

El primer antecedente es propuesto por Shulman (1986), quien habla del paradigma perdido ante la comprensión del conocimiento del profesor. El autor plantea la necesidad del estudio del contenido de la materia y su interacción con la pedagogía, lo cual busca rescatar los contenidos disciplinarios como la forma más adecuada de evaluar a un profesor, sin olvidar la pedagogía en el proceso. El autor propone un modelo o caracterización del

conocimiento del profesor, el cual es clasificado en conocimiento de contenido, conocimiento curricular y conocimiento didáctico del contenido. Esta propuesta ayudó a establecer una mirada a la especificidad del contenido, estableciendo otras categorías que complementen la comprensión de este conocimiento.

Como lo muestra la figura 10, en Shulman (1986) se proponen los conocimientos que debe tener el profesor y que se agrupan en tres categorías:

- Conocimiento del contenido de la materia específica (Subject Matter Knowledge, SMK): es decir, conocimiento disciplinar.
- Conocimiento didáctico del contenido (Pedagogical Content Knowledge, PCK): relación entre el conocimiento disciplinar y pedagógico que pertenece únicamente a la práctica del profesor.
- Conocimiento curricular (Curricular Knowledge, CK): dominio de los instrumentos y herramientas para la planeación, ejecución y evaluación de la práctica pedagógica del profesor.

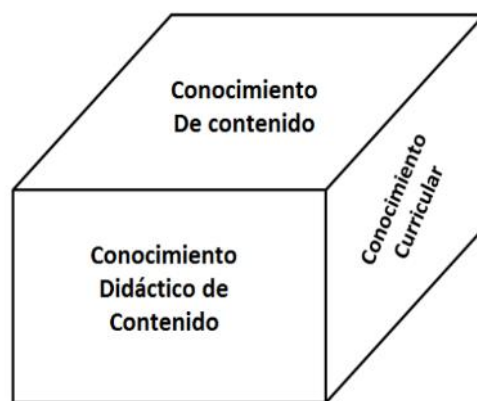


Figura 10 Propuesta del conocimiento del profesor según Shulman (1986)

Algunos aportes de esta primera propuesta son la diferenciación entre el conocimiento de la disciplina y el conocimiento pedagógico, la presentación de la necesidad de estudiar el pensamiento del profesor en la enseñanza del contenido de una asignatura por medio del planteamiento del Conocimiento Didáctico de Contenido (CDC). El autor incluye relaciones entre los conocimientos disciplinares y didácticos del profesor, lo cual transforma la enseñanza. En este mismo documento, Shulman define y caracteriza el conocimiento didáctico de contenido como:

Las formas más útiles de representación de estas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas, en una palabra, las formas de representación y formulación de la materia que hacen a esta comprensible a otros... Incluye un conocimiento [o comprensión] de lo que hace que el aprendizaje de un tópico específico sea fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y experiencias traen consigo al aprender estos tópicos y lecciones frecuentemente enseñados con anterioridad. Shulman (1986) p.89.

El autor distingue tres componentes básicos del CDC, el conocimiento que tiene un profesor:

- **Conocimiento del contenido de la disciplina por enseñar**

Este primer nivel de conocimiento se define como la cantidad y organización de conocimiento *per se* en la mente del profesor. Este es un elemento esencial y previo a su labor de enseñar, pues el profesor debe tener un dominio del contenido que se propone enseñar; no sólo conocer o comprender un contenido, sino además saber también por qué ello es así.

Lo anterior hace alusión al sólido conocimiento matemático disciplinar que debe tener un profesor para desempeñarse, lo que aumenta la capacidad del profesor para realizar actividades diferentes en el aula, coordinar y dirigir las intervenciones y preguntas de los estudiantes, además de generar un cúmulo de estrategias de enseñanza vinculadas al contenido, así como profundizar en el porqué y el para qué de la asignatura.

Dos autores que aportan en la caracterización del conocimiento de contenido de la disciplina a enseñar son Ma (1999) y Bromme (1994). Ma establece la noción de conocimiento profundo de las matemáticas disciplinares como una parte fundamental, profunda, vasta y extensa, incluyendo los conceptos, sus interconexiones y la comprensión de la estructura conceptual, junto con las actitudes básicas de matemáticas. Como complemento a lo anterior, Bromme propone cinco campos del conocimiento que son necesarios para la enseñanza: (a) conocimiento acerca de las matemáticas como una disciplina; (b) conocimiento acerca de las matemáticas escolares; (c) la filosofía de las matemáticas escolares; (d) conocimiento pedagógico general (y, a propósito, psicológico); y

(e) conocimiento didáctico de la materia específica, planteamiento que aporta en la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

- **Conocimiento de la didáctica específica (representaciones o estrategias instruccionales para la enseñanza del tópico)**

Además de tener un dominio disciplinar, el profesor debe tener un conocimiento de cómo enseñar ese contenido de manera efectiva, así como organizar, secuenciar y presentar el contenido para promover el interés y habilidades de los estudiantes. Para esto el profesor debe tener un conocimiento pedagógico adaptado al contexto específico de la materia. Esto se considera como conocimiento de la didáctica específica, el cual está definido como las formas más útiles de representación de estas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más poderosas, en una palabra, las formas de representación y formulación de la materia que hacen a ésta comprensible a otros.

En el conocimiento de la didáctica específica se conjugan dos elementos centrales del CDC, los cuales son el conocimiento del profesor acerca de las representaciones de la materia y el conocimiento del profesor de las estrategias instruccionales asociadas al contenido específico que se enseña.

- **Conocimiento del estudiante**

El tercer elemento hace referencia al conocimiento de los procesos de aprendizaje del estudiante sobre el contenido que se desea enseñar. Este evidencia la necesidad de incorporar al conocimiento del profesor los errores, obstáculos, preconcepciones y concepciones de los estudiantes y las condiciones instruccionales necesarias para lograr transformar estas concepciones de manera adecuada y correcta.

Posteriormente Ball, Thames y Phelps (2008) presentaron otras categorías que deben ser contempladas para comprender el conocimiento del profesor de matemáticas, las cuales van más allá de un conocimiento disciplinar.

La propuesta de estos autores también hace el planteamiento de dos grandes categorías: el conocimiento de contenido y el conocimiento didáctico de contenido. La primera categoría está dividida a su vez en tres, las cuales son: el conocimiento común del contenido (CCK), definido como los conocimientos y habilidades matemáticas usadas fuera de la enseñanza, que se refiere a la formación en matemática disciplinar; el conocimiento especializado del contenido (SCK), que se presenta como los conocimientos y habilidades exclusivos de la enseñanza y el conocimiento del horizonte matemático (HCK), definido como la conciencia de la manera en que están distribuidos los contenidos a lo largo del currículo, lo cual fue posteriormente presentado por Jakobsen, Thames y Ribeiro (2013) como una orientación hacia la familiaridad con la disciplina que contribuye a la enseñanza de la materia escolar, proveyendo a los profesores de un sentido de la forma en que el contenido abordado está situado y conectado con el territorio disciplinar.

Los autores proponen un conjunto de situaciones en las que está involucrado el CCK, algunas de éstas son: la presentación de ideas matemáticas; responder las preguntas de los estudiantes; encontrar ejemplos para abordar un elemento matemático específico; identificar determinadas representaciones; establecer la conexión de un tema con otros de años futuros o anteriores; explicar los propósitos matemáticos a los padres; evaluar y adaptar el contenido de libros de texto; modificar tareas para hacerlas más sencillas o más complejas; usar lenguaje y notación matemática, así como la inspección de equivalencias.

Con respecto a la segunda categoría, los autores presentan tres subdominios, los cuales hacen énfasis en la enseñanza, los estudiantes, y el currículo. El conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS) es planteado como un tipo de conocimiento que combina conocer sobre los estudiantes y conocer las matemáticas, planteándolo como un elemento intrínseco y dándole un espacio propio en el proceso de comprensión del conocimiento del profesor.

El conocimiento de la enseñanza del contenido (KCT), como un conocimiento de la enseñanza y del área de matemáticas, muestra la necesidad de saber matemáticas para diseñar, gestionar, y evaluar tareas, secuencias y dinámicas de aprendizaje en el contexto de

la clase. Finalmente, se presenta el conocimiento curricular, el cual no presenta cambio alguno desde la propuesta de Shulman. En la figura 11 se representan gráficamente los subdominios propuestos por los autores que complementaron la propuesta de Shulman (1986).

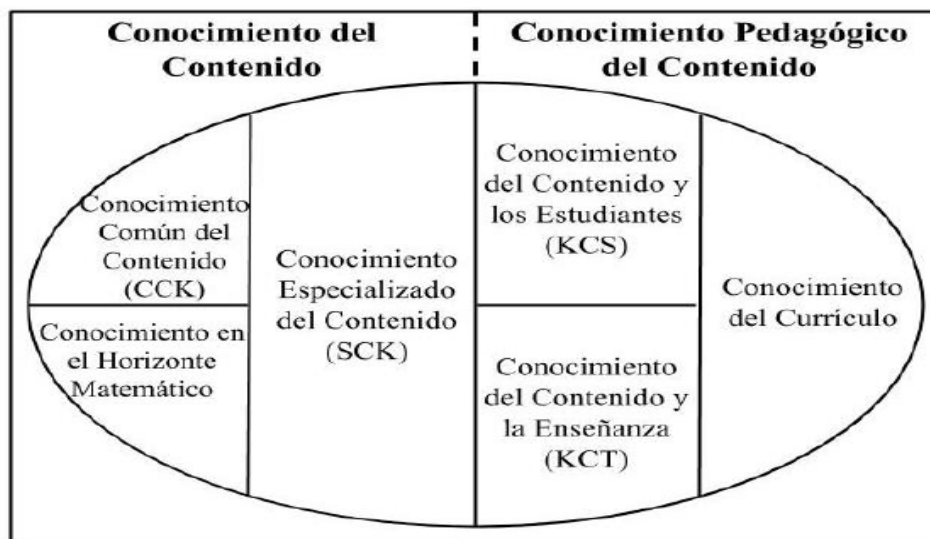


Figura 11 Propuesta del conocimiento del profesor según Ball, Thames y Phelps (2008)

Con base en los anteriores planteamientos, se considera que un aporte de la propuesta de MKT radica en el rescate de la observación del profesor en su práctica, lo cual permitirá evidenciar el conocimiento en acción, además de la presentación del saber especializado como un concepto clave para conocer la competencia del profesor; sin embargo, quedan algunos vacíos, cuestiones como ¿cómo considerar cuál es un conocimiento especializado y cuál no?, ¿en qué situaciones se puede diferenciar el conocimiento común del especializado? De igual forma, esta propuesta permite analizar el conocimiento del profesor respecto de cualquier contenido, pues sus categorías son amplias y no se limitan a conocimientos específicos en matemáticas, lo cual permite complementar y proponer conocimientos específicos desde las matemáticas.

El tercer modelo o antecedente que aportó en la construcción del modelo MTSK fue el Knowledge Quartet, en el que se entiende el conocimiento del profesor como una construcción en acción, característica que también es tomada en cuenta por el posterior modelo

del MTSK. Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep (2009) presentan el modelo por medio de cuatro grandes componentes (conexiones, fundamentos, transformación y contingencia).

Con respecto a los fundamentos, los autores afirman que las otras tres categorías se apoyan en esta, puesto que se constituye en los saberes aprendidos en diferentes etapas académicas, tanto la formación disciplinar como de formación docente y pedagógica; esta se caracteriza por ser una colección de saberes del profesor. Los tres componentes de este subdominio son:

El conocimiento y comprensión de las matemáticas *per se*, comprendidos como el conocimiento de la pedagogía ligada a la matemática y las creencias sobre las matemáticas, incluyendo las creencias sobre qué y cómo debe aprenderse en matemáticas. Este subdominio posee una naturaleza diferente, pues, para los autores, no hace referencia directa a un conocimiento en acción. Con respecto a la categoría de transformación, se puede mencionar que está relacionada con el PCK, pues contiene el uso de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones.

De igual forma, este dominio se puede relacionar con la idea francesa de Transposición Didáctica propuesta por Chevallard (1991), pues en las dos propuestas se busca transformar un objeto disciplinar llamado “saber” en un objeto didáctico llamado “enseñanza”. Con respecto a la conexión, se puede comentar que está relacionada con la conectividad y coherencia que debe tener el profesor tanto desde la matemática como desde su expresión en el proceso de enseñanza. Lo cual no sólo se limita a la conectividad del contenido matemático en la mente del profesor y su enseñanza, sino también debe incluir la secuencia entre los temas a enseñar dentro de cada sesión de clase, mostrando un orden entre las tareas y los ejercicios propuestos.

Finalmente, con respecto a la categoría de contingencia, se considera que está relacionada con las situaciones fortuitas o no previstas en las que el profesor se encuentra con una pregunta de un estudiante, o en las que en la dinámica de la sesión se desvíe su planificación inicial. Para los autores, este tipo de situaciones contingentes ponen a prueba

el conocimiento del profesor, pues por medio de éstas demuestra la capacidad de solucionar y superar situaciones no esperadas.

Una de las potencialidades presentadas por esta propuesta es la presentación del ya mencionado dominio de contingencia, pues en este tipo de situaciones el profesor pone en juego todos sus conocimientos. Este aspecto es también tenido en cuenta por el modelo del MTSK. Sin embargo, dado que este modelo quiere buscar situaciones en las cuales el profesor moviliza su conocimiento, estaría generando un modelo para la clasificación e identificación de dichas situaciones, dejando de lado el estudio de la naturaleza de estas.

En este modelo algunos de los subdominios pueden ser difusos, por ejemplo, cuando un profesor, al realizar una transformación del contenido, toma elementos de conexión al buscar elementos que le faciliten conectar los conocimientos que poseen los estudiantes con los que pretende el profesor que desarrollen, con lo cual también puede hacer uso del conocimiento del subdominio de la fundamentación tanto didáctica como matemáticamente.

La cuarta propuesta o modelo antecedente del MTSK es presentada por el profesor Norteamericano Alan Schoenfeld, influido por el trabajo del profesor Polya, lo que se evidencia en su modelo teórico al incluir la resolución de problemas y las concepciones, elementos que son uno de los principales aportes de este autor en la comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas.

En Schoenfeld (2010) se presenta al profesor desde una perspectiva alternativa, pues no se centra en un conocimiento teórico y una posterior práctica, más bien, su propuesta se basa en tres componentes: las metas, que están compuestas por aquellos objetivos que el profesor plantea, consciente o inconscientemente, las cuales pueden ser a corto, medio o largo plazo; las orientaciones, en las cuales se incluyen los gustos, las creencias, las concepciones, las preferencias y las actitudes, es decir, las características más personales del profesor que generan la priorización de ciertas metas y del conocimiento usado en cada situación; y los recursos, en los que el autor hace un énfasis y que desglosa en cuatro categorías.

La primera de estas cuatro categorías es el conocimiento procedimental, la cual hace referencia al saber hacer, a cómo aplicar algoritmos, reglas, formas estandarizadas de proceder con diferentes niveles de complejidad; la segunda categoría es el conocimiento conceptual, relativo al saber argumentar por qué y cómo las relaciones matemáticas establecidas son válidas o no; la tercera categoría son los hechos, entendidos como elementos de conocimiento aislado, que no necesariamente han de estar fundamentados como propiedades y definiciones; y la cuarta categoría son las estrategias de resolución de problemas, aspecto que hace referencia al trabajo del autor y da impronta propia a este modelo. Para Schoenfeld conocer las distintas estrategias para resolver problemas debe formar parte del conocimiento del profesor.

Algunos elementos para resaltar de esta propuesta son la presentación del modelo de componentes personales del profesor como las metas y las orientaciones (incluyendo las concepciones) en la comprensión del conocimiento del profesor, además de la inclusión del conocimiento en la resolución de problemas.

Los aportes de Schoenfeld, como una visión integradora de propuestas previas en modelos de comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas, hacen que la comunidad académica reflexione sobre el rol de las concepciones en la comprensión del profesor de matemáticas y en la presentación de este, no sólo como un listado teórico que debe poseer, sino como una construcción basada en conocimiento académico y experiencias personales.

Por otro lado, Thompson (1992) menciona que la concepción de un profesor de la naturaleza de las matemáticas puede ser observada por medio de las creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias, conscientes o no relacionadas con la disciplina matemática. Para comprender esta inclusión es necesario diferenciar los conceptos de creencia, concepción y conocimiento, lo cual hace necesario tener en cuenta las definiciones planeadas por Ponte (1994), que menciona Contreras (1999).

El concepto de creencia es definido como las verdades personales y no controvertibles sustentadas por cada persona como producto de la experiencia. Con respecto al término de concepción, este se define como los marcos organizativos que soportan los conceptos de forma cognitiva, y, finalmente, el término de conocimiento se presenta como una red de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes. De esta forma, las concepciones y creencias son parte del conocimiento. En este sentido, se muestran tres niveles a indagar sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, los cuales son: las concepciones sobre las matemáticas, las creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las concepciones sobre una temática específica, en este caso, sobre la proporcionalidad.

Estos dos primeros niveles (concepciones y creencias) hacen referencia a interpretaciones de tipo epistemológico y filosófico que evidencian la necesidad de indagar las diferentes perspectivas propuestas en Ernest (1991), las cuales fueron desarrolladas en categorías y descriptores por Carrillo y Contreras (1995); las tres categorías de las concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje son:

La Platónica: propone a las matemáticas como un conjunto de conocimiento preexistente dotado de una estructura lógica, lo que les otorga un sentido objetivo, absoluto, universal, abstracto y libre de valores. Desde esta perspectiva el objetivo de la creación de conocimiento matemático es el acceso a los aspectos netamente disciplinares, no existe un interés en sus aplicaciones en el mundo real.

La Instrumentalista: presenta las matemáticas como un conjunto de resultados, dotándolas de un carácter utilitario, en la cual su veracidad y existencia no se discuten. El propósito de la creación de conocimiento matemático desde esta perspectiva es su uso en otras disciplinas, especialmente a través de la creación de algoritmos.

La Resolución de Problemas: se basa en la idea de que el fin de la matemática es comprender su proceso de construcción, desarrollando las capacidades mentales del resolutor.

Estos tres planteamientos muestran las matemáticas como un conocimiento sometido a revisión constante dependiente del contexto, lo que quiere decir que las matemáticas se construyen por medio de la interacción social, para dar respuesta a problemáticas sociales, culturales, económicas de diferentes pueblos.

De igual forma, es importante considerar las cuatro tendencias didácticas del profesor presentadas en Carrillo y Contreras (1995), a saber: la tradicional, la tecnológica, la espontaneísta y la investigativa, las cuales también aportan en la comprensión de las concepciones y creencias de los profesores de matemática. Para finalizar, se debe destacar en la propuesta de Schoenfeld, la inclusión de las concepciones como aquel elemento que condiciona el actuar del profesor, lo cual se centra en el pensar epistemológico y filosófico acerca de las ideas sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y sobre temáticas específicas, elementos que serán profundizados y ampliados en la propuesta del MTSK.

2.5 El modelo MTSK

Como fruto de la reflexión de los anteriores modelos de estudio del conocimiento del profesor de matemáticas, en el Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (SIDM) se ha elaborado un modelo que enriquece la comprensión del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. En Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz (2013) se presenta el modelo MTSK (Mathematics Teachers' Specialised Knowledge) como una propuesta teórica de comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas, el cual presenta dos grandes dominios.

El primer dominio es el del conocimiento matemático (MK), el cual contiene como subdominios el conocimiento de los temas (KoT), que hace referencia a la fenomenología, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, definiciones y procedimientos, el conocimiento de la estructura matemáticas (KSM), que integra las conexiones de complejización, las conexiones de simplificación, las conexiones de contenidos transversales y las conexiones auxiliares y, finalmente, el conocimiento de la práctica matemática (KPM) que contiene las prácticas ligadas a la matemática en general y las prácticas ligadas a una temática en matemáticas.

El segundo dominio es conocido como el conocimiento didáctico de contenido (PCK), el cual contiene los subdominios de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (MKT), que hace referencia a las teorías personales o institucionales de enseñanza, los recursos materiales y virtuales y las actividades, tareas, ejemplos y ayudas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) que se refiere a las formas de aprendizaje, las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático y las concepciones de los estudiantes sobre matemáticas, y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), que hace referencia los contenidos matemáticos requeridos a enseñar, el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, y la secuenciación de diversos temas.

Una característica particular de este modelo teórico es la inclusión de las creencias de las matemáticas, de su aprendizaje y enseñanza como motor de las acciones de las categorías como un nuevo elemento que presentan los autores en la propuesta de conceptualización del conocimiento del profesor de matemáticas, característica que diferencia el modelo MTSK de propuestas anteriores de comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas. A continuación, en la figura 12, se muestra una representación gráfica del modelo.

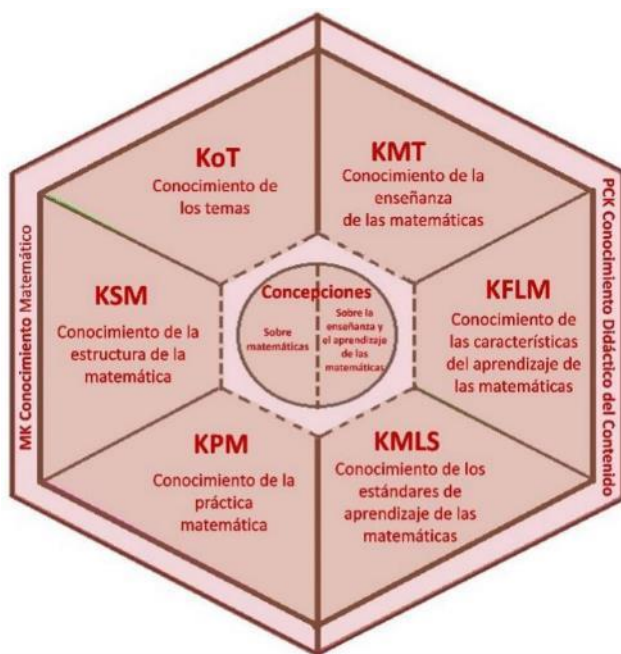


Figura 12 Propuesta del conocimiento especializado del profesor según el modelo MTSK

Se considera que este modelo complejiza y amplía los modelos preexistentes del conocimiento del profesor por varios motivos. En primer lugar, el conocimiento especializado del profesor de matemáticas se caracteriza como aquel que el profesor necesita y usa para explicar matemáticas por la naturaleza de la propia enseñanza del área, prescindiendo de consideraciones pedagógicas generales no relacionadas a la disciplina.

Por otro lado, este es un modelo en el que se considera el conocimiento que sustentan las acciones. Asimismo, se considera que en el desarrollo de cierta acción de enseñanza puede existir conocimiento de diferentes subdominios, es decir, que no existe una relación unívoca entre una acción y un subdominio, lo cual evidencia la simultaneidad y complejidad del modelo. Este modelo considera que la observación no es suficiente para acceder al conocimiento del profesor, por lo cual es necesario implementar diferentes aproximaciones metodológicas, como entrevistas, cuestionarios, simulaciones de episodios de aula y foros.

En esta propuesta se considera que las creencias de los investigadores sobre las matemáticas, su enseñanza y la investigación en educación matemática influyen en la construcción teórica desarrollada. De igual forma, considera que las creencias y concepciones del profesor sobre la enseñanza, aprendizaje, la matemática, los conceptos e ideas matemáticas, no forman parte de su conocimiento, sin embargo, son parte de lo que afecta su práctica y sus reflexiones.

Para presentar esta propuesta es necesario caracterizar de forma ordenada y con ejemplos cada una de las categorías de los subdominios propuestos por el grupo SIDM, las cuales serán expuestas a continuación, además es importante comentar que esta experiencia de ejemplificación de elementos del MTSK con respecto a la proporcionalidad es parte del proceso bottom-up, top-down, el cual se basa en la relación entre conceptos teóricos y prácticos como estudios de caso, además de establecer la manera en que la práctica aporta a la construcción de nuevos conceptos teóricos.

2.5.1 El conocimiento matemático (MK)

Esta primera categoría está relacionada con la propuesta por Shulman llamada “conocimiento de contenido”. En el modelo del MTSK será nombrada “conocimiento

matemático”, ya que en la propuesta de Shulman se hablaba del conocimiento en términos generales y en esta propuesta se especifica el conocimiento relativo a las matemáticas.

El conocimiento de los temas (KoT)

El primer subdominio que consideraremos es el “conocimiento de los temas”. Un primer elemento para tener en cuenta es saber que un profesor necesita tener un conocimiento y comprensión de lo que explica, en este caso se dará cuenta respecto del concepto de proporcionalidad.

Las matemáticas consideradas en este subdominio son las que construyen los estudiantes y se formalizan por medio de procedimientos o fundamentos teóricos. Desde esta perspectiva, para conocer las matemáticas como profesionales de la enseñanza, se requiere una imagen más amplia de la disciplina, por lo cual es necesario que el profesor conozca la fenomenología y los significados de los conceptos abordados. Estos aspectos son tratados por un autor como Rico (1997), quien menciona que un conocimiento profundo de la materia le permitirá encontrar los razonamientos matemáticos que subyacen a un algoritmo, además de evaluar la coherencia de los argumentos dados por los estudiantes.

En este primer subdominio, el uso de ejemplos toma importancia, pues por medio de éstos el profesor puede explicar usando el conocimiento de los fundamentos teóricos y procedimientos, teniendo en cuenta fenomenologías y significados cercanos y comprensibles para los estudiantes.

Este conocimiento permite que el profesor pueda desenvolverse con el contenido siendo consciente de los aspectos matemáticos que surgen y pueden surgir durante la explicación de una sesión, además de tenerlos en cuenta en su preparación, desarrollo o evaluación de la clase y en general de su práctica.

Con respecto al KoT, respecto del concepto de proporcionalidad, se pueden mencionar aspectos como la definición matemática del concepto de proporción, la cual puede iniciar con la definición presentada en la definición 5 y 6 del libro V de *Los Elementos* de Euclides, donde se habla de las magnitudes proporcionales:

Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y cogidos en el orden correspondiente. Dicho tipo de magnitudes se llaman proporcionales. Euclides (1991) p. 22

Autores como Corry (1994), quien es reconocido por su trabajo sobre la interpretación de Dedekind en la teoría de proporciones de Eudoxio, considera que esta definición de proporcionalidad permitirá manejar las magnitudes inconmensurables, o los números irracionales, característica que fue usada por Dedekind en su definición de los irracionales como una cortadura del conjunto de los números racionales.

Desde una perspectiva geométrica, autores como Valverde (2012) mencionan que una proporción está formada por a, b, c y d , en tanto, si la razón entre $a : b = c : d$, en donde a, b y d son diferentes a cero, leyéndola como a es a b como c es a d .

En este mismo espacio se deben presentar aspectos como ejemplos y contraejemplos relacionados con la proporcionalidad como los propuestos por Godino (2002):

Se considera proporcional la situación cuando intervienen dos pares de números que se corresponden, por ejemplo, cuando a 21 le hacemos corresponder 6, y a 28 le corresponde 8. En este caso, $6=21$ y $=21, (2/7)$. Por tanto, las dos series de números decimos que forman una proporción. Se escribe en forma de igualdad de dos razones: $\frac{6}{21} = \frac{8}{28}$ o también $\frac{6}{8} = \frac{21}{28}$. Godino y Batanero (2012, p. 422).

Asimismo, en este tipo de conocimiento, es importante mencionar las propiedades de la proporcionalidad, además de los procedimientos relacionados con ésta, por ejemplo:

- Dada la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow axd = bxc$ conocer que entonces $a = \frac{bxc}{d}; d = \frac{bxc}{a}; b = \frac{axd}{c}, c = \frac{axd}{b}$

- De toda proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, o de su expresión equivalente $axd = bxc$, pueden derivarse otras tres proporciones diferentes, las cuales son: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \frac{b}{a} = \frac{d}{c}; \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

- Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{mxa}{nxb} = \frac{mxc}{nxd}$

- Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{c}{d} = \frac{e}{f} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

- Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ y $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$
- Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $a > b \rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ y $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$
- Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $a > b \rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
- Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$ y $\frac{a+c}{a} = \frac{b+d}{b}$
- Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $a > c \rightarrow \frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$ y $\frac{a-c}{a} = \frac{b-d}{b}$
- Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $a > c \rightarrow \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$
- Sí $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ y $a > c \rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$

Otro aspecto del KoT es el estudio fenomenológico del concepto de proporcionalidad que está presente en Rico (s.f), quien menciona que la proporcionalidad directa entre magnitudes es una relación que se presenta en multitud de fenómenos naturales y convencionales.

Entre los primeros encontramos las relaciones que puede haber entre un número de objetos (ej. sillas) y el número correspondiente de algún elemento destacable dentro de estos objetos (ej. cantidad de patas); situaciones de mezclas de pinturas u otros productos, que se necesitan para obtener un determinado resultado; recetas de cocina; dimensiones de objetos semejantes; problemas de sombras; velocidades; gastos producidos al adquirir un producto; resultados del trabajo realizados por un número variable de personas; recorridos de velocidad constante.

De igual forma, Oller (2012) presenta diferentes contextos reales que se relacionan con la proporcionalidad, los problemas relacionados con intercambio (intercambio de mercancía, compra y venta, cambio de divisas), problemas con repartos, problemas con préstamos, problemas con mezclas y aleaciones y otros problemas (grifos, persecuciones, de adivinación, descomposición de números, problemas de proporcionalidad compuesta).

Finalmente, con respecto del KoT de la proporcional, es importante mencionar el conocimiento que debe tener el profesor de los registros de representación, los cuales son presentados en la tabla 6 por medio de planteamientos de Valverde (2012):

Representación

Simbólica: Por medio de esta representación se busca hacer uso de símbolos que aportan a comprender la definición y las propiedades sobre la proporcionalidad, por ejemplo, símbolos de escritura formal en matemáticas.

Verbal: Este tipo de representación busca hacer una conexión entre el lenguaje natural y los diferentes tipos de representaciones escritas.

Algebraica: Por medio de este tipo de representación se construye un lenguaje formal, estableciendo generalizaciones sobre propiedades asociadas a la proporcionalidad.

Cartesiana: Este tipo de representación busca asociar, relacionar o comparar los elementos de dos conjuntos o ejes, lo cual es necesario para establecer relaciones como razones y proporciones.

Gráfica: Por medio de este tipo de representación se puede establecer, por ejemplo, la pendiente de una función lineal, su punto de corte con el eje x, o simplemente establecer si la variación entre dos cantidades de magnitudes es constante o no, lo cual es necesario para comprender la proporcionalidad como un fenómeno en diferentes contextos.

Tablas: Este tipo de representación busca establecer relaciones entre dos magnitudes, lo cual es clave para identificar y poder establecer conceptos claves como la constante de variación o la pendiente de una función, todos estos asociados a la proporcionalidad.

Ejemplos

$$a: b$$

$$a: b :: c: d \rightarrow b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$40 \% \text{ y } 60\%$$

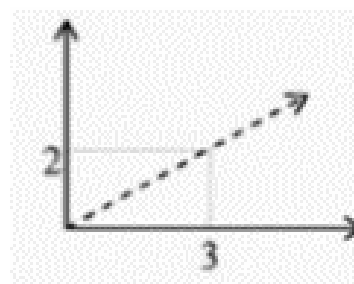
$$3: 2 = 1,5$$

Por cada “a” elementos hay “b” elementos
“a” es a “b” como “c” es a “d”

$$f(x) = mx$$

$$y = f(x) \frac{k}{y}$$

$$A \times B \{ (a, b) / a \in A \wedge b \in B \}$$



x	y
4	12
9	27

Iconos y diagramas: Junto con la representación verbal, esta es una de las representaciones iniciales y más naturales en el proceso de comprensión de propiedades asociadas a la proporcionalidad, dado que por medio de estas se puede tener una aproximación a conceptos como razón y proporción sin necesidad de usar un código formal matemático o lenguaje algebraico.

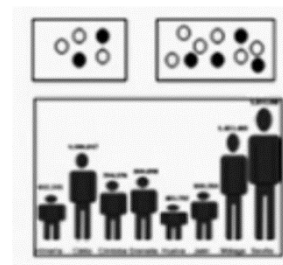


Tabla 6 Representaciones de la razón y la proporcionalidad propuesta en Valverde (2012)

Con respecto a los planteamientos del autor, se considera que uno de los elementos clave que debe potenciar el profesor en clase con sus estudiantes con respecto a la proporcionalidad es la capacidad de presentar situaciones y problemas en diferentes contextos, de tal forma que cada uno de estos aporte en el uso y la comprensión de diferentes tipos de representación, además del paso de un tipo de representación a otra.

El conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)

El KSM es el constructo personal que el profesor desarrolla sobre la forma en que están secuenciados y conectados los temas matemáticos en las matemáticas, tanto científicas como escolares. Estos procesos de complejización y simplificación del contenido matemático buscan generar consciencia sobre la construcción del concepto a futuro; este conocimiento estaría presente cuando se explicita la conexión de un tema con elementos anteriores del mismo curso o cursos previos que conozcan los estudiantes.

Por medio de este conocimiento, el profesor puede ser consciente de en qué punto está desarrolla la construcción matemática para poder establecer una serie de etapas o puntos conceptuales por los que quiera pasar para que los estudiantes construyan el concepto. De igual forma, se considera que, al poder reconocer posibles conexiones establecidas por un estudiante, permitirá afrontar con mayor facilidad situaciones de contingencia o inesperadas.

Este subdominio contiene todas las nociones que facilitan la relación del conocimiento con conocimientos anteriores y posteriores, en este caso se puede ejemplificar en el estudio del concepto de razón antes de iniciar con el estudio de la proporcionalidad como se presenta en el esquema de la tabla 7:

Razón	
Externa (parte-parte):	Interna (parte- todo):
Comparar cantidades de dos magnitudes diferentes	Comparar cantidades de la misma magnitud
Reparto	Comparación multiplicativa
Magnitud intensiva (razones, velocidad, precio unitario, densidad, temperatura)	Escalar
Hay 3 niños por cada 4 niñas	De cada 7 personas, 3 son niños
Proporcionalidad	
Razón externa constante:	Razón interna constante:
A cada unidad de M1 corresponde las mismas unidades de M2	A doble de M1 el doble de M2

Tabla 7 Conocimientos que facilitan la relación del conocimiento con conocimientos anteriores y posteriores

Con base en la tabla presentada por el autor, se pueden identificar algunas relaciones entre la comprensión de la razón y la proporcionalidad, como por ejemplo la necesidad de establecer una comparación ya sea entre dos cantidades de magnitud para construir razones o entre dos razones para construir proporciones, además del establecimiento de la constante de proporcionalidad también por medio de la comparación entre cantidades de magnitud y razones respectivamente.

El conocimiento de la práctica matemática (KPM)

En este subdominio el profesor debe conocer distintos tipos de razonamientos, así como las reglas sintácticas de la matemática cuando el profesor actúa como hacedor de matemática, entre lo que podemos incluir los conocimientos de las características de las definiciones y las distintas formas de validación, también se contempla el conocimiento de diferentes heurísticos usados en resolución de problemas. Ese subdominio considera dos

tipologías en el conocimiento de la práctica matemática, los cuales son el conocimiento general, y el ligado al tópico.

Autores como Brodie (2010) mencionan que el razonamiento matemático responde a tres cuestiones centrales a la actividad matemática, a saber:

- *¿Qué es lo que es verdad?:* esta pregunta hace referencia al conocimiento que deberá tener el profesor que no se limita únicamente a conocer los razonamientos, sino, también, a tener la capacidad de intuir la veracidad o no de un razonamiento dado por un estudiante.
- *¿Cómo puedo estar seguro [de la veracidad]?:* haciendo relación a los tipos de demostración y estrategias de abordaje de estas que el profesor debe conocer para asegurar la veracidad de una afirmación.
- *¿Por qué es verdad?:* esta pregunta hace referencia a que no solo es necesario que el profesor sepa que existe un tipo de demostración que ratifica la veracidad de un enunciado, sino también es necesario que él conozca cómo funciona ese tipo de demostración.

Relacionar este subdominio con la proporcionalidad, puede ejemplificarse por medio de los argumentos mencionados por el profesor con respecto a los aportes o hipótesis planteadas por los estudiantes. Por ejemplo, en Goizueta (2011) se hace un estudio sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesores, en un apartado hacen un análisis de los argumentos mencionados por un profesor en el proceso de enseñanza de la proporcionalidad:

Cada vez que una variable aumenta 1 la otra aumenta 1.75... 'Lo que importa para que sea directamente proporcional es que cada vez que una aumenta la otra también y siempre igual'.

Para el autor, esto es una argumentación porque infiere una conclusión: que las dos variables son directamente proporcionales a partir del hecho (premisa) de que al aumentar 1 en una de ellas, la otra aumenta 1.75. Goizueta (2011) p.44

2.5.2 El conocimiento didáctico de contenido (PCK)

La segunda categoría propuesta por el modelo del MTSK incluye los componentes que son necesarios para considerar que el profesor es un transmisor de las matemáticas. Este concepto es estudiado por Shulman (1987) como el conocimiento propio de la enseñanza y complementario al MK. Desde la perspectiva del autor, el conocimiento didáctico del contenido (PCK) tiene importancia desde tres puntos de vista, desde el contenido a enseñar, desde el contenido a aprender y desde la visión general de los estándares del aprendizaje, que incluyen el currículo vigente en cada país y en cada momento y las investigaciones asociadas a la materia.

Para comprender esta categoría es necesario tener en cuenta que existen varios elementos en todo proceso comunicativo, los cuales son el mensaje, las matemáticas y el receptor; de esta manera, las interacciones con el contenido matemático deben ser parte del conocimiento que debe tener un profesor para impartir su clase. Además, en este sentido se debe incluir la forma de transmisión de los conocimientos matemáticos, la forma de inducir a los estudiantes a desarrollar el conocimiento matemático, además de cómo los materiales y recursos permiten que la comunicación sea más efectiva.

En este dominio es importante tener en cuenta los aspectos relacionados con la verbalización que usa el profesor, además de considerar las influencias externas que recibe el profesor para guiar, mejorar o condicionar su práctica. A continuación, se desglosarán cada uno de los componentes del dominio.

El conocimiento de las características del aprendizaje en matemáticas (KFLM)

Este subdominio hace referencia a la inclusión del estudiante en los procesos de enseñanza, en los que el profesor debe tener en cuenta las capacidades, errores, obstáculos y dificultades en el uso y comprensión de un concepto de los estudiantes. De esta manera, se considera que el profesor debe prever cómo los estudiantes construirán sus conocimientos trabajados en clase. Este subdominio también hace referencia a las ideas previas que tienen los estudiantes acerca del concepto a trabajar y al proceso de interacción del estudiante con

el concepto. También es necesario tener en cuenta la dimensión afectiva de este proceso, lo que supone la comprensión y el entendimiento del lenguaje y el vocabulario usado por sus estudiantes.

Por medio de este conocimiento, el profesor puede mejorar la comunicación en el aula; se considera que este tipo de conocimiento hace que se comprenda o prevea cómo los estudiantes desarrollarán su actividad con relación al concepto abordado, lo cual permite que la preparación de clases tome en cuenta este tipo de situaciones, lo que requiere adaptar los conocimientos a construir de la forma más adecuada, además de poder afrontar fácilmente las situaciones imprevistas.

Al relacionar este tipo de conocimiento con la proporcionalidad se puede mencionar el trabajo de Caputo y Soto (2013), quienes hacen un estudio con respecto a los errores y las dificultades del aprendizaje de la proporcionalidad utilizando diferentes tipos de enunciados. A continuación, se presentará una de las situaciones discutidas por las autoras junto con los errores encontrados:

Problema 1: Se tienen 37 latas de pintura de 20 litros cada una. ¿Cuántos baldes de 3 litros se podrán llenar?” (Requiere para su solución reconocer la relación de proporcionalidad inversa existente entre las magnitudes intervinientes; podría decirse que es un ejercicio tipo de regla de tres simple. La respuesta correcta, es que se llenan 246 baldes o que se llenan 246 baldes y sobran 2 litros de pintura). “

Error 1-1: Confusión entre el tipo de proporcionalidad existente entre las magnitudes intervinientes.

Error 1-2: Existe la idea de que deben plantearse productos entre las magnitudes intervinientes. Sin embargo, no puede advertirse que se tenga en claro qué propiedades tienen dichos productos.

Error 1-3: Consiste en, conocida la constante de proporcionalidad, aplicar regla de tres simples inversas.

Error 1-4: Proviene del hecho de no reconocer la existencia de proporcionalidad entre la cantidad de pintura y la capacidad del recipiente que la contiene, de ahí que se adopten procedimientos aditivos.

Error 1-5: Aplicación errónea del algoritmo. Caputo y Soto (2013) p.55

En la tabla 5 del apartado 2.2.3.1 se resumieron algunos errores y obstáculos que se pueden encontrar en el proceso de comprensión de la proporcionalidad, los cuales están categorizados en 5 momentos o tipologías. En la primera categoría se propusieron tipos de errores asociados a conceptos previos a la proporcionalidad, como errores sobre el significado de una fracción o no establecer la relación entre el uso de una razón como una fracción y viceversa. En la segunda categoría (asociada a la iniciación a la proporcionalidad), se proponen errores como la no utilización de la estrategia del valor unitario en la resolución de un problema o identificación equivocada de relaciones proporcionales de cantidades de magnitudes cuando no lo son. La tercera categoría relaciona errores como: considerar las razones únicamente como entes numéricos abstractos, la falta de construcción de un significado del porcentaje como una aplicación específica del concepto de proporción o el uso de la linealidad en contextos donde no es aplicable.

En la cuarta categoría de errores propuesta, están errores como la definición equívoca del valor de las incógnitas, la interpretación errada de la solución y el inexacto establecimiento de las relaciones algebraicas o el asociar el concepto de proporcionalidad únicamente al hecho de doblar o triplicar magnitudes, en este caso el estudiante no entiende la proporcionalidad como una relación de doble sentido.

Finalmente, en la quinta categoría se proponen errores como el uso incorrecto de una estrategia apropiada, el ignorar parte de los datos dados, el uso de operaciones al azar con parte de los datos, el uso de estrategias aditivas erróneas como cuando se establece la relación entre las razones calculadas a través de la sustracción entre sus términos o el uso inadecuado de escalas numéricas que se considera que surgen cuando no se indican las unidades, entendiendo la escala como independiente de la unidad elegida.

Además de las anteriores categorías sobre errores asociados a la proporcionalidad, es necesario expresar que otro ejemplo de este tipo de subdominio está expuesto en Godino (2002), quien menciona como obstáculo la no superación de interpretación de fracciones y números racionales únicamente como comparación entre dos partes, pues, para comprender conceptos como proporcionalidad es necesario que el estudiante reconozca e interprete expresiones como $\frac{2}{5}$ en términos de razón, estableciendo así que no siempre este tipo de

expresiones son sinónimos de “fracción”, lo que puede acarrear dificultades de comprensión de la proporcionalidad para los estudiantes.

El Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Este subdominio hace mención del conocimiento que debe poseer el profesor para la selección y el uso de distintos canales comunicativos, así como la conciencia de cómo y cuándo usarlos en el proceso de enseñanza de un concepto. Estos canales son diversos pues incluyen numerosas estrategias conceptuales y metodológicas que un profesor utiliza para el abordaje de un concepto; el motivo de la elección de una estrategia u otra puede subyacer en otros subdominios, mostrando así la interrelación entre los diferentes subdominios del modelo.

Este subdominio considera que, además de las estrategias que conoce el profesor, existen factores externos a la acción del profesor, como recursos y materiales que pueden ser usados para fomentar la comprensión de un concepto. De este modo, no sólo se trata de conocer qué recurso se puede relacionar con un contenido, sino, también es necesario saber cómo usarlo, en qué temas funciona mejor y por qué, cómo pueden los estudiantes usarlo, además de las potencialidades y limitaciones del recurso. De igual forma se considera que los diferentes tipos de verbalización que elige el profesor son parte de este subdominio. Este aporta en la comprensión de la interacción con los estudiantes, puesto que por medio de su uso se puede conocer cómo y cuándo ayudar a los estudiantes en su trabajo con un contenido, de igual forma este subdominio contiene los recursos, estrategias, o tipos de ayudas disponibles que permitirán al profesor responder de una forma adecuada y óptima en función de los requerimientos de la situación.

El KMT se podría observar en las relaciones entre cada uno de estos momentos propuestos por Oller (2012) en el proceso de enseñanza:

- Razón y proporción
- Proporcionalidad directa
- Proporcionalidad inversa
- Búsqueda de cantidades desconocidas en situaciones de proporcionalidad simple

- Proporcionalidad compuesta
- Búsqueda de cantidades desconocidas en situaciones de proporcionalidad compuesta
- Aplicaciones de la proporcionalidad.

Se considera que estos momentos pertenecen mayoritariamente al KMT, dado que el énfasis de la propuesta del autor gira en torno a la enseñanza, al cómo enseñar y cómo construir adecuadamente el pensamiento proporcional, sin embargo también es necesario comentar que la propuesta del autor puede estar relacionada con los demás elementos del MTSK, pues para la elaboración de una propuesta de enseñanza es necesario tener una amplia comprensión del dominio de los temas KoT, de las dificultades y errores que pueden presentar los estudiantes, de los materiales y herramientas que facilitarán su aprendizaje, entre otros componentes.

De esta forma, se considera también que se debe incluir el conocimiento de las posibilidades y limitaciones de los materiales y de las estrategias que fomentan el aprendizaje de la proporcionalidad. Con respecto a este aspecto, autores como Godino y Batanero (2002) plantean las siguientes estrategias:

<i>Estrategias</i>	<i>Potencialidades</i>
El uso de objetos emparejados con monedas o billetes	Es una manera de introducir el precio como una razón, este tipo de actividades lleva a los estudiantes a realizar una comparación numérica multiplicativa y no visual, e introduce la noción de razón como tasa (comparación de cantidades de magnitudes diferentes).
Progresiones crecientes y decrecientes de cantidades	Se puede proponer a los estudiantes para introducir las series proporcionales, puede ser la continuación de series de cantidades que se corresponden según un factor de escala y que se refieren a situaciones familiares
Actividades de construcción y medición	Hacer mediciones para construir modelos físicos o visuales de razones equivalentes con el fin de proporcionar ejemplos tangibles de proporciones y observar relaciones numéricas.
Dibujos a escala Sobre papel cuadriculado	Comparar las razones de las longitudes de los distintos lados.

Razones entre Al construir un edificio con la misma forma, pero de mayor o menor longitudes, áreas y tamaño se pueden comparar las medidas de los lados, las áreas y los volúmenes volúmenes.

Tabla 8 Posibilidades y limitaciones de los materiales y de las estrategias para la enseñanza de la proporcionalidad según Godino y Batanero (2002)

Cada una de estas estrategias aporta desde un punto de vista diferente a una comprensión amplia de la proporcionalidad, por ejemplo, el uso de objetos emparejados puede aportar en la comprensión de la razón como una magnitud aritmética y no únicamente como la comparación de dos segmentos, como se suele enseñar tradicionalmente; cuando se usan progresiones crecientes o decrecientes aporta en la construcción de las características de la constante de proporcionalidad, el uso de actividades de medición aporta a comprender la razón desde una perspectiva geométrica (Euclidiana clásica), el dibujo con papel cuadriculado aporta en la comprensión de la semejanza desde la perspectiva de la semejanza, y el uso de razones entre áreas y volúmenes aporta a comprender la proporcionalidad como una propiedad aplicable tanto en contextos numéricos como en contextos aritméticos.

Con respecto a los materiales para enseñar el concepto de proporcionalidad, Godino (2012) propone:

Potencialidades

Materiales

Manipulativas visuales: Se puede observar gráficamente la fracción correspondiente a un porcentaje determinado.

Páginas web (todo sobre razones) Construcción de la idea de razón y comparación de razones.

Tabla 9 Materiales para enseñar proporcionalidad según Godino (2012)

Complementando lo anterior, autores como Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011) proponen el uso de Puzzles en 2D, los cuales aportan en la construcción de los conceptos de congruencia y semejanza, ejes de simetría, perímetro, área se puede construir en concepto de proporcionalidad.

Tanto en los planteamientos de Godino y Batanero (2002) como de Flores et al (2011) se considera especialmente importante inicialmente hacer uso de material tangible para lograr

una aproximación al concepto de razón desde la percepción visual, lo manipulativo y lo geométrico, pues este tipo de estrategias generan una primera comprensión del concepto a partir de lo sensorial y lo intuitivo.

El Conocimiento de los estándares de aprendizaje matemáticos (KMLS)

Este subdominio contiene los conocimientos que tiene el profesor sobre los condicionantes que influyen en su enseñanza de las matemáticas, cuya fuente no es su propia construcción de conocimiento. En este subdominio se define el estándar de aprendizaje como un indicador, externo al profesor, que muestra el nivel de conocimiento matemático que debe poseer un estudiante en un determinado momento.

En el KMLS se proponen tres grandes categorías, las cuales son:

- El conocimiento de los contenidos enseñables en un curso determinado.
- El conocimiento del grado de desarrollo conceptual esperable en un estudiante en un curso determinado.
- El conocimiento de la organización y secuenciación de los contenidos de un curso.

Este subdominio se propone como un complemento al contenido del conocimiento curricular de Shulman (1986), y de Ball, et al. (2008), pues en la propuesta del MTSK se quiere ampliar la idea de currículo, extendiéndose de consideraciones netamente curriculares a consideraciones sobre lo esperable en el conocimiento de un estudiante en un cierto momento. Por medio de este subdominio se aporta en la adecuación de recursos o grados de complejidad de un concepto a un determinado curso escolar, con base en el grado de desarrollo esperable en los conocimientos y habilidades esperados en los estudiantes, teniendo en cuenta lo planteado por los documentos curriculares.

Con respecto al KMLS referente a la enseñanza de la proporcionalidad, se puede incluir el conocimiento de la proporcionalidad a través de diferentes grados. En el caso de Colombia se tienen como referente curricular los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), los cuales son un conjunto de criterio que explicita los aprendizajes estructurantes para un grado y un área particular.

Se entienden los aprendizajes como la conjunción de unos conocimientos, habilidades y actitudes que otorgan un contexto cultural e histórico a quien aprende; su importancia radica en que plantean elementos para construir rutas de enseñanza que promueven la consecución de aprendizajes año a año para que se alcancen los Estándares Básicos de Competencias (EBC) propuestos por cada grupo de grados. Sin embargo, es importante tener en cuenta que los DBA por sí solos no constituyen una propuesta curricular, pues estos deben ser articulados con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos definidos en cada establecimiento educativo en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales (PEI) materializados en los planes de área y de aula.

Cada DBA está compuesto por tres elementos, el enunciado al que hace referencia el aprendizaje estructurante para el área, las evidencias que expresan indicios claves que muestran a los maestros si se está alcanzando el aprendizaje expresado en el enunciado y el ejemplo que concreta y complementa las evidencias de aprendizaje.

A continuación, se presentan los DBA que se listan en MEN (2017), en los cuales se relaciona la proporcionalidad en los diferentes grados escolares del currículo colombiano.

Grado	Enunciado	Evidencia	Ejemplo
3	Establece comparaciones entre cantidades y expresiones que involucran operaciones y relaciones aditivas y multiplicativas y sus representaciones numéricas.	1. Realiza mediciones de un mismo objeto con otros de diferente tamaño y establece equivalencias entre ellas. 2. Utiliza las razones y fracciones como una manera de establecer comparaciones entre dos cantidades. 3. Propone ejemplos de cantidades que se relacionan entre sí según correspondan a una fracción dada. 4. Utiliza fracciones para expresar la relación de “el todo” con algunas de sus “partes”, asimismo diferencia este tipo de relación de otras como las relaciones de equivalencia (igualdad) y de orden (mayor que y menor que).	Algunos sistemas económicos usan monedas para representar fracciones de la unidad. En Estados Unidos se utiliza como unidad un dólar, y algunas monedas representan fracciones de esta unidad. En Colombia, las monedas que representaban fracciones de peso, desaparecieron hace ya varios años. Existían monedas con denominaciones de uno, dos, cinco, diez, veinte, veinticinco y cincuenta centavos. Construye ese tipo de monedas. En una de las caras diseña la denominación de la moneda en centavos, y en la otra, diseña la denominación de la moneda en fracción (semejante a como se denominan en Estados Unidos). La moneda de un cuarto de peso, ¿a cuántos centavos equivaldría? La moneda de 10 centavos ¿a cuál fracción equivaldría? Si 50 centavos son lo mismo que dos monedas de 20 centavos y una de 10 centavos. Es decir, $50 = 2(20) + 1(10)$ En fracciones sería: medio de peso equivale a 2 monedas de quinto y una moneda de décimo. Es decir, $1 \text{ medio} = 2 \text{ quintos} + 1 \text{ décimo}$

4 Interpreta las fracciones como razón, relación parte todo, cociente y operador en diferentes contextos.

1. Describe situaciones en las cuales puede usar fracciones y decimales.

2. Reconoce situaciones en las que dos cantidades varían y cuantifica el efecto que los cambios en una de ellas tienen en los cambios de la otra y a partir de este comportamiento determina la razón entre ellas.

5 Describe e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de gráficas.

1. Propone patrones de comportamiento numéricos y patrones de comportamiento gráficos.

2. Realiza cálculos numéricos, organiza la información en tablas, elabora representaciones gráficas y las interpreta.

Mónica tiene 70 centavos en monedas, Carlos tiene dos monedas de 20 centavos, Paula tiene cinco monedas de 10 centavos. Representa estos valores usando la denominación en forma de fracción de cada moneda.

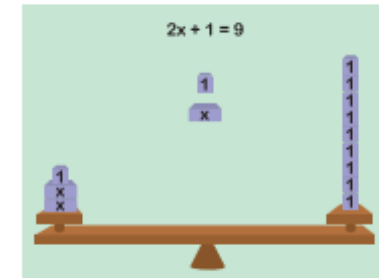
Las limonadas de don Diego son famosas. Tienen un sabor característico, quien las haya probado es capaz de identificarlas en cualquier parte. Aunque no se conoce la receta de don Diego, sí se sabe que él utiliza para un litro de agua, seis limones y tres cucharadas de azúcar.

a) Si don Diego dispone de 18 limones, averigua la cantidad de agua y azúcar que debería utilizar si quiere preparar su limonada.

b) Propone otras posibilidades de preparar limonadas con el sabor característico de don Diego variando las cantidades de los ingredientes.

c) Explica qué ocurre si las personas utilizan diferentes medidas para las cucharas de azúcar. Un recipiente cilíndrico recto se llena con una llave que vierte 4 litros de agua cada 2 minutos. El cilindro tiene capacidad de 28 litros. Determina cuánto tiempo tarda el recipiente cilíndrico en llenarse. Determina cuántos litros hay en el recipiente a los cinco minutos después de abrir la llave. Determina qué ocurre con el nivel del agua a los 16 minutos.

3. Trabaja sobre números desconocidos para dar respuestas a los problemas.



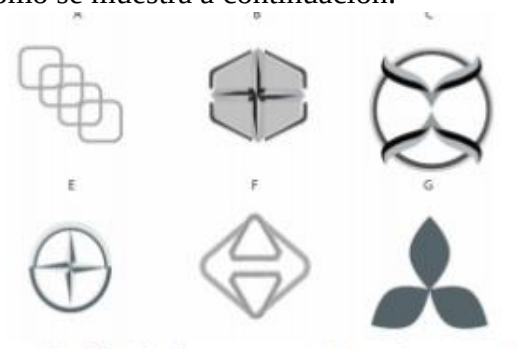
- | | | | |
|---|--|--|--|
| 6 | Reconoce y establece diferentes relaciones (orden y equivalencia) entre elementos de diversos dominios numéricos y los utiliza para argumentar procedimientos sencillos | <ol style="list-style-type: none"> 1. Determina criterios de comparación para establecer relaciones de orden entre dos o más números. 2. Describe procedimientos para resolver ecuaciones lineales. | <p>En la figura se muestra una secuencia de imágenes que ilustran formas de encontrar el valor de x.</p> <p>Describe diferentes procedimientos o acciones que le permitan conocer el valor de x y pone a prueba esos procedimientos.</p> |
| 7 | Describe y utiliza diferentes algoritmos, convencionales y no convencionales, al realizar operaciones entre números racionales en sus diferentes representaciones (fracciones y decimales) y los emplea con sentido en la solución de problemas. | <ol style="list-style-type: none"> 1. Construye representaciones geométricas y pictóricas para ilustrar relaciones entre cantidades. 2. Calcula e interpreta el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo entre números enteros. | <p>Calcula el área de un rectángulo que se construye en un software de geometría dinámica o en papel milimetrado.</p> <p>Los lados del rectángulo podrán variar en algún dominio específico, por ejemplo, de 0 a 5, tomando todos los números en el intervalo hasta con un dígito decimal.</p> |
| 8 | Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que | <ol style="list-style-type: none"> 1. Discrimina casos de semejanza de triángulos en situaciones diversas. | <p>Las grandes empresas invierten en el diseño de la imagen corporativa que las representa. Por ejemplo, en sus logotipos o iconos que las diferencian en el mercado. Las empresas</p> |

configuran el diseño de un objeto.

2. Resuelve problemas que implican aplicación de los criterios de semejanza.

3. Compara figuras y argumenta la posibilidad de ser congruente o semejantes entre sí.

buscan que los símbolos además de sencillos sean inconfundibles, para que las personas siempre los distingan entre las demás marcas. En muchos de los logotipos de las grandes marcas priman las regularidades geométricas como se muestra a continuación:



Identifica las figuras congruentes que hay en cada uno de los logotipos. Argumenta las congruencias encontradas en cada logotipo.

9 Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Tales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.

1. Justifica procedimientos de medición a partir del Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras y relaciones intra e interfigurales.

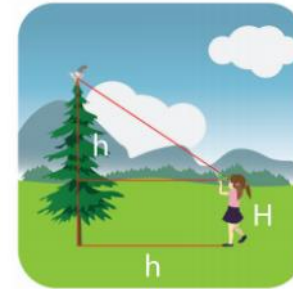
2. Valida la precisión de instrumentos para medir longitudes.

Camila observa un ave en un árbol y desea determinar la altura a la que se encuentra. Para ello utiliza un instrumento (una escuadra isósceles y un pitillo). Además, en uno de los extremos ata un pedazo de hilo con un objeto que actúa como plomada.

Se observa la técnica que utiliza Camila para medir la altura a la que se encuentra el ave. Ella mira a través del pitillo y se aleja o se acerca del árbol hasta ubicarse en un punto donde

3. Propone alternativas para estimar y medir con precisión diferentes magnitudes.

pueda visualizar el ave. Luego, fija este lugar con una marca en el piso y mide la distancia h desde este punto hasta la base del árbol.



Identifica y describe las figuras geométricas que usó Camila en el proceso de medición y completa la tabla.

Nombre	Lados paralelos	Lados congruentes	Ángulos

Justifica el procedimiento que utilizó Camila para establecer la altura a la que se encuentra el ave como $h+H$ y propone mejoras al instrumento para realizar mediciones más precisas.

Al lanzar un cohete, el combustible se quema durante algunos segundos, acelerando hacia arriba. Después de consumirse el combustible, el cohete sigue ascendiendo durante un tiempo y luego comienza a caer. Una pequeña carga

10 Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para

1. Utiliza la razón entre magnitudes para tomar decisiones sobre el cambio.
2. Relaciona características algebraicas de las funciones, sus

estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes.

- 11** Usa propiedades y modelos funcionales para analizar situaciones y para establecer relaciones funcionales entre variables que permiten estudiar la variación en situaciones intraescolares y extraescolares.

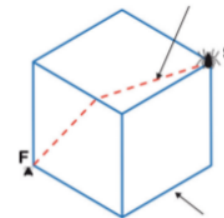
1. Plantea modelos funcionales en los que identifica variables y rangos de variación de las variables.

2. Relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.

explosiva expulsa un paracaídas poco después que el cohete comienza a descender. El paracaídas evita que el cohete se estrelle.

Determinar: la velocidad del cohete cuando se para el motor, el tiempo de funcionamiento del motor, el tiempo cuando alcanzó el cohete el punto más alto y su velocidad en ese momento.

Una araña ubicada en una esquina quiere cazar a una mosca que se encuentra en la esquina inferior izquierda de una caja cúbica cuyo lado mide un metro. La araña usará un camino recto señalado en línea punteada. Encuentra el camino más corto que ha de seguir la araña para llegar hasta la mosca.



2.5.3 Las concepciones y las creencias

Un tercer subdominio presentado por el modelo MTSK está relacionada con las concepciones y las creencias como elementos que tienen relación con la actividad del profesor. Al hablar de esta categoría se debe tener en cuenta la propuesta de Carrillo y Contreras (1995), quienes realizan un estudio de las concepciones y creencias de un grupo de profesores.

Los autores plantean la existencia de una relación entre las concepciones y los modos de resolver problemas, de igual forma mencionan que las informaciones sobre concepciones deben ser enriquecidas por el contraste de la observación del profesor, el análisis de situaciones de práctica virtual y los datos provenientes de los procesos que se utilizan en la resolución de problemas. Desde esta perspectiva, las concepciones sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje son un elemento que permite obtener una imagen más completa del profesor.

Con respecto a la relación entre creencias y enseñanza de la proporcionalidad, autores como Correal y Rico (2016) presentan algunas concepciones de un grupo de profesores de básica primaria con respecto a la razón y las fracciones. Algunos de los aspectos mencionan que las creencias y concepciones de la razón determinan sus actuaciones en la planeación y ejecución de las clases. Asimismo, mencionan que existen otros factores que entran en juego respecto de que el profesor tenga unas u otras creencias, por ejemplo, el tiempo de experiencia orientando el área de matemáticas y la motivación que siente el profesor. De esta forma, se presentan las creencias y las concepciones como elementos relacionadas con el perfil del profesor a investigar, además, esto muestra cómo las concepciones del investigador sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje influyen en la toma de decisiones, sistematización y análisis de los productos de su investigación.

Finalmente es importante considerar que en las concepciones y creencias también están presentes las diferentes propuestas de la filosofía de las matemáticas y estas permean todos los subdominios del MTSK.

3. MARCO METODOLÓGICO

Para la elaboración de una tarea, en este caso, la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas con respecto a la enseñanza de la proporcionalidad, es necesario tener claros los objetivos a cumplir, además de ser conscientes de que toda investigación y en especial la investigación en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas por medio el modelo MTSK, hay que tener en cuenta que algunas de las limitantes están relacionadas con el saber (matemático y del aprendizaje de las matemáticas) del investigador, pues justamente esta característica condiciona la recolección y la comprensión del fenómeno a investigar.

La anterior limitante se puede superar por medio de un par académico o un coinvestigador, en este caso, los compañeros pertenecientes al SIDM (Seminarios de Investigación en Didáctica de la Matemática) como agentes que aportan y complementan el análisis del investigador. La segunda condicionante que se puede contemplar son las concepciones del investigador, pues es necesario ser consciente de que no sólo el profesor investigado tiene concepciones y creencias sino también el propio investigador las posee a tal punto que puede condicionar muchos aspectos del análisis de la información, para superar esta limitante se debe evitar tener una actitud valorativa o evaluativa con respecto a la información recolectada y el conocimiento del profesor.

La tercera condicionante es la adhesión a los instrumentos, donde el investigador puede creer que los instrumentos diseñados inicialmente son los únicos válidos. Para superar esta condicionante es necesario estar abierto a poder matizar y mejorar los instrumentos de recolección y análisis de acuerdo con las necesidades o las situaciones que surjan naturalmente en el transcurso de la investigación.

La última condicionante que será contemplada en la elaboración de la presente investigación es el cumplimiento de objetivos, pues de una u otra forma, una variable como el tiempo, por ejemplo, es finita y, de una u otra forma, la entrega de artículos de investigación o la entrega de informes de investigadores se necesitan cumplir en un lapso determinado, aunque esta limitante no puede ser superada es necesario ser consciente de esta para el cumplimiento de los objetivos propuestos.

3.1 Caracterización del estudio

Para la tarea de la comprensión del conocimiento especializado del profesor respecto de la enseñanza de la proporcionalidad, se han tenido en cuenta las limitantes y las posibilidades de superarlas comentadas en el apartado anterior. Dado que el objetivo de la presente investigación es la comprensión de un fenómeno, es necesario hacer uso de un paradigma cualitativo interpretativo, donde, por medio de un estudio de caso, se pueda dar cuenta de los conocimientos especializados movilizados por un profesor en la enseñanza del concepto de proporcionalidad.

Este paradigma considera el conocimiento como una construcción social, lo cual quiere decir que se debe ser consciente de que el concepto de realidad es un constructo múltiple, holístico y construido, lo cual obliga a renunciar a la idea de objetividad y neutralidad. En este sentido, se considera que las relaciones entre el investigador y el objeto estudiado son indisolubles, así como que se puede hacer un cuerpo ideográfico de conocimientos capaz de describir el caso del objeto de investigación, también, que la investigación está influida por el investigador, la elección del paradigma con el que se va a trabajar, la elección de una teoría utilizada para la recolección, análisis de los datos y la interpretación de los resultados, además de los valores que forman parte del contexto en el que se desarrolla el trabajo.

Otro elemento importante dentro de la caracterización del estudio es el uso de la estrategia top down - bottom up, conceptos pertenecientes a la teoría dirigida y teoría generada por Grbich, (2007). El primer momento, top-down (de arriba hacia abajo), se caracteriza por hacer una indagación teórica acerca del objeto a estudiar, y permite la reflexión respecto de cómo esta información puede aportar para el análisis de la información.

Posteriormente, en el segundo momento, bottom-up (de abajo hacia arriba), se establece el modo en que los datos del estudio de caso pueden aportar en la construcción de cuerpos teóricos nuevos o complementarios a los ya existentes. Por medio de esta propuesta se construye una teoría emergente de los datos, cuyos fundamentos están en una recogida y análisis sistemáticos de los mismos, por medio de una continua reflexión y análisis. En la

figura 13 se representa de forma gráfica cada uno de los momentos propuestos en la presente investigación.



Figura 13 Representación gráfica del modelo bottom-up, top-down

De igual forma, al caracterizar el presente estudio es necesario comentar que para este proceso es de vital importancia tener en el horizonte una constante reflexión sobre varias preguntas respecto del conocimiento especializado del profesor, entre estas es necesario preguntarse, ¿cuál es el conocimiento de la proporcionalidad como tema del profesor?, ¿cuál es el conocimiento de la proporcionalidad en relación con otros temas?, ¿cuál es el conocimiento del profesor respecto de cómo se trabaja en matemáticas?, ¿qué caracteriza sus concepciones y creencias sobre las matemáticas y su enseñanza?, ¿cuál es el conocimiento de las estrategias y recursos para la enseñanza de la proporcionalidad?, ¿cuál es el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes y sus dificultades con respecto a la proporcionalidad?, además de ¿cuál es el conocimiento de lo que se espera que aprendan los estudiantes con respecto a la proporcionalidad en un nivel educativo determinado?

3.2 Caracterización del contexto de la profesora Sonia

La profesora Sonia nació en Pasca, un pequeño municipio próximo a Bogotá, la capital de la república de Colombia, en su formación escolar tuvo la posibilidad de estudiar en el Colegio Normal de Pasca, donde se formó como bachiller académico, además de seguir estudios complementarios en la misma institución para ser profesora de primaria con el título de Normalista, cargo que ocupó inicialmente en veredas de la zona rural del municipio. Posteriormente debido a la difícil situación económica por la que atravesó el país en la década

de los ochenta, ella, como miles y miles de colombianos, tuvo que emigrar del campo a la ciudad en busca de oportunidades y mejor calidad de vida, pasando su lugar de residencia a Bogotá, ciudad en la cual se pudo formar como ingeniera civil, dado su gusto por las matemáticas, profesión que ejerció durante algunos años.

Sin embargo, con el pasar del tiempo, la profesora Sonia sintió que su verdadera vocación y donde se sentía más a gusto, siendo creativa y autónoma, era enseñando, tal y como lo hacía en las escuelas veredales de su pueblo natal, motivo por el cual se presentó al concurso nacional de méritos para optar por una codiciada plaza de profesora de matemáticas en los colegios públicos de Bogotá. Esta plaza la obtuvo por su destacado desempeño en los diferentes filtros, exámenes y entrevistas hechas por el comité evaluador en competencias pedagógicas por su formación como normalista y disciplinares en el área de las matemáticas por su formación como ingeniera.

Una vez posicionada en su plaza de profesora de matemáticas en propiedad, optó por seguir formándose para cada vez ser mejor profesora, tomando cursos de actualización y especialización en matemática educativa. Actualmente lleva más de 18 años como profesora en una institución educativa pública de la localidad de Kennedy, ubicada al suroccidente de Bogotá. En esta institución se ha caracterizado por participar activamente en las actividades, proyectos y dinámicas pedagógicas propuestas, es tenida en alta estima por los estudiantes por su paciencia y afectividad al enseñar y por los demás profesores por ser una compañera dispuesta al diálogo, comprensiva y siempre propositiva.

Justamente por esta historia de vida, por su disciplina y templanza, su actitud de siempre seguir aprendiendo, su formación pedagógica como normalista, matemática como ingeniera civil, sus postgrados en matemática educativa, además de su amplia experiencia se consideró su participación para ser una informante idónea con el fin de comprender el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, en este caso, asociado a la enseñanza de la proporcionalidad.

De igual forma, se considera necesario comentar que la selección de la profesora Sonia también se debió a la confluencia de otro tipo de intereses como, por ejemplo, los intereses comunes con respecto a la comprensión de la enseñanza de las matemáticas y la posibilidad

de mejorar las prácticas pedagógicas, la proximidad de nuestros sitios de trabajo y la afinidad de jornada laboral, considerando así que de una u otra forma estos aspectos también intervienen en la selección de un informante idóneo que aporte en la comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas.

Con respecto al contexto de la profesora Sonia, se hace importante explicitar algunos aspectos: dado que la presente investigación es un estudio de caso, como se ha comentado anteriormente, los datos fueron recolectados en el transcurso de 4 clases, cada una de dos horas, en grado décimo, con estudiantes cuyas edades oscilan entre 14 y 16 años en las instalaciones de un colegio de carácter oficial (público) en la localidad de Kennedy, al suroccidente de Bogotá. Estas instituciones se caracterizan por atender a la población más vulnerable del país, cada grupo o salón tiene entre 37 y 43 estudiantes. Se considera que los anteriores elementos caracterizan o condicionan la información recolectada, por lo cual es necesario comentarlos.

3.3 Estudio de caso: Diseño de la propuesta de investigación

Dado que el objetivo es analizar e interpretar una realidad, en este caso, el conocimiento movilizado por un profesor en la enseñanza del concepto de proporcionalidad, es necesario posicionarse en un paradigma interpretativo, para lo cual se seguirá. En un estudio de caso de tipo instrumental presentado en Stake (2005), que tiene en cuenta instrumentos de recolección de la información como la grabación de las sesiones, la observación no participante y el cuaderno de campo.

3.4 Técnicas de recolección de la información

La tarea de recolectar información en la presente investigación está centrada en la observación de cuatro sesiones de clase por medio de la grabación en vídeo y la toma de notas de campo y realización de entrevistas cortas relacionadas con las acciones de la profesora; en este caso se contó con el apoyo de las directivas y padres de familia del grupo de estudiantes del grado grabado.

La cámara fue situada en las primeras filas de los estudiantes con el objetivo de centrarse en la gestión de la profesora, además de analizar las participaciones de los estudiantes y cómo se gestionan dichos aportes. Paralelo a la recolección de la información por medio de vídeo, se realizaron tomas de notas sobre lo observado en clase, entrevistas cortas sobre aspectos específicos observados en clase, además de evidencias fotográfica de los trabajos y soluciones de los estudiantes; aspectos que han aportado en el análisis de las grabaciones, clarificándolas y mostrando las relaciones entre los diferentes subdominios del conocimiento especializado del profesor.

De igual forma, es necesario mencionar que investigaciones previas sobre MTSK, como Liñán (2017), han expresado que en cuanto a la observación no existe información pura, puesto que está organizada por nuestros conocimientos, de esta forma, una observación debe entenderse como la construcción de una representación o de un modelo de una situación.

3.5 Técnicas de tratamiento, sistematización y análisis de la información

Una vez se recolectó toda la información por medio de grabaciones, notas de campo, fotografías, se procedió a organizar las sesiones por medio de temáticas u organizadores curriculares, haciendo la respectiva transcripción de las sesiones y de las entrevistas. Liñán (2017) comenta que en este proceso es necesario ser consciente de que es necesario hacer énfasis en los elementos que interesa observar, en este caso, se incluirán la contextualización de las situaciones de cada sesión, las intenciones, los gestos y movimientos de los estudiantes y de la profesora en el proceso de enseñanza.

Dado que el paradigma cualitativo interpretativo no cree en la existencia de la objetividad absoluta o de la neutralidad, la selección de información fue seguida por medio de la utilidad de acuerdo con los elementos que se querían analizar. En este sentido, la transcripción no será una información objetiva, sino una construcción interpretativa realizada por el investigador. El mismo proceso de transcripción genera un reto para el investigador, pues durante este proceso se enuncian y rememoran situaciones, gestos, preguntas que pueden ayudar a establecer un análisis preliminar de la información.

Inicialmente se hizo la transcripción de las cuatro sesiones observadas en un mismo documento, dividiéndolas por unidades que fueron entendidas como frases o argumentos para expresar una idea; al leer cada unidad de la transcripción inicial se asociaba a un dominio, un subdominio, una categoría del MTSK, estas asociaciones eran organizados en una tabla cronológica donde se narraba lo sucedido en cada sesión.

13 DE MARZO 2018 RAZÓN Y PROPORCION DE SEGMENTOS

1. EL día de hoy específicamente vamos a ver cómo se da la proporción entre dos segmentos
2. Cuando hablamos de segmentos, a cada segmento le asociamos una longitud, entonces vamos a hacer un segmento que mide 2 unidades.
3. Este segmento mide 2 unidades y ésta 4 unidades,
4. La razón entre segmentos es comparar la longitud que hay entre los segmentos AB y CD, entonces ¿Cuál es la razón entre segmentos?, es el cociente entre los segmentos AB y CD, esto se expresa como $\frac{AB}{CD}$
5. La longitud AB mide 2 unidades y la longitud CD mide 4 unidades, entonces la razón se expresa como: 2 es a 4. ¿sí recuerdan? Ustedes habían manejado razones entre números enteros, pero cuando, pero cuando hablamos de segmentos tenemos que tener en cuenta la longitud del segmento.
6. Algo importante que deben tener en cuenta, es que los dos segmentos deben estar en las

- CC CHRISTIAN CAMILO FUENTES LEAL
MK - KoT - Definiciones
- CC CHRISTIAN CAMILO FUENTES LEAL
MK - KoT - Ejemplos
Usa un ejemplo para reforzar la definición, lo que justificaria su inclusión en KoT (definiciones, propiedades y sus fundamentos) y en KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)
- CC CHRISTIAN CAMILO FUENTES LEAL
PCK - KMLS - Secuenciación con temas anteriores o posteriores

Figura 14 Transcripción inicial de la información

Posteriormente, como lo muestra la tabla 10, se organizaron las unidades poniendo como criterios los organizadores curriculares en un primer momento y después las categorías, teniendo en cuenta el siguiente esquema donde en S_n n representa el número de la clase en la que está ubicada cada unidad, entendiendo cada unidad de información como un fragmento de los diálogos transcritos en los cuales se puede identificar claramente una relación con alguna categoría de análisis.

<i>Subdominio</i>	<i>Categoría</i>	<i>Organizador</i>	<i>Segmento</i>	<i>Comentario/Justificación curricular</i>
D_{S_n}				
Fecha				

Tabla 10 . Malla de sistematización de la información recolectada

Es importante mencionar que en el proceso de sistematización y análisis previo de la información se usaron los términos de evidencia, indicio y oportunidad, los cuales fueron seleccionados como diferentes tipos de información que hacen referencia al nivel de certeza sobre la relación de una determinada unidad con una categoría del MTSK. En el caso que se esté totalmente seguro de que una unidad pertenece a una determinada categoría, se dirá que es una evidencia, mientras tanto se dirá que una unidad es un indicio cuando no se está

totalmente seguro de que pertenece a determinada unidad, por lo cual es necesario usar otros tipos de instrumentos para indagar con la informante si realmente existe dicha relación.

Con respecto a las oportunidades, se dirá que una unidad es una oportunidad cuando se concibe que esta unidad posiblemente tenga una relación con alguna categoría, por lo cual da pie a profundizar indagando por medio del uso de instrumentos complementarios que confirmen dicha relación entre una unidad y una categoría del modelo MTSK.

En una primera aproximación al análisis de la información recolectada se procedió a hacer un conjunto de mapas conceptuales o esquemas gráficos que dieran cuenta del MTSK presente preliminarmente en el transcurso de las cuatro sesiones observadas, teniendo como referencia cada uno de los subdominios y categorías del MTSK. Debido al tamaño y la complejidad para establecer estas relaciones entre categorías, fue necesario elaborar pequeños mapas conceptuales con respecto a organizadores curriculares específicos presentes en las sesiones de clase, estas fueron las razones entre segmentos, las rectas paralelas, los segmentos homólogos y la semejanza.

Una vez se tuvo una idea general de los conocimientos movilizados en las sesiones, fue necesario expresar de una forma más metódica el análisis de episodios específicos, para lo cual se hizo uso de un sistema de códigos (tabla 11), a saber:

<i>Código</i>	<i>Significado</i>
P	Profesora
E	Estudiante en términos generales, no se diferenciará entre un estudiante y otro.
[...]	Fragmento que no se tiene en cuenta por no ser útil en el análisis.
Texto entre paréntesis: ()	Explicación de algo que está ocurriendo en el aula, pero no se verbaliza.
Texto entre comillas: “ ”	Lectura de partes del libro de texto o de otros libros que se usan en el aula. Puede haberse realizado por la maestra o por los estudiantes.
a,b	Inicio y fin de las unidades a analizar.
[E. x. y, U a-b]	Código usado para citar determinada sección, ubicando el episodio y la ubicación de las unidades. Por ejemplo, el código [E. 1.3, U 66-78] representa el apartado de la sesión 1, episodio 3, entre las unidades 66 hasta la 78.

Tabla 11 Codificación de las transcripciones

Después de presentar el análisis de esos episodios específicos, se consideró necesaria la construcción de tablas donde se presentará toda la información con respecto a cada uno de los subdominios del MTSK. En la tabla 12 se presenta el ejemplo del subdominio del conocimiento de los temas KoT.

Subd.	Categoría	Unidad de Información	Evidencia o indicio en el MTSK
Kot	Definiciones, propiedades y fundamentos	(4,4) La razón entre segmentos es comparar la longitud que hay entre los segmentos AB y CD, entonces ¿Cuál es la razón entre segmentos?, es el cociente entre los segmentos AB y CD, esto se expresa como $\frac{AB}{CD}$	Definición de razón entre dos pares de segmento
	Procedimientos	(43,43) Entonces cuando dos pares de segmentos tiene la misma razón, se llama una proporción, los llamaremos segmentos proporcionales, entonces 2 es a 6 es proporcional a 3 es a 9. (49,52) 2 por 9 debe ser igual a 3 por 6, miremos $2 \times 9 = 3 \times 6$ $18 = 18$ Esta es una manera de verificar que los dos pares de segmentos son proporcionales o que guardan la misma razón	Uso de la ejemplificación para definir proporcionalidad entre segmentos Procedimiento para comprobar si las razones de dos pares de segmentos son proporcionales.

Tabla 12 Organización de la información por subdominios.

Una vez se tuvo esta información, fue necesario establecer relaciones entre categorías por medio de mapas y esquemas visuales. Un aspecto importante para resaltar sobre el análisis de la información es la validación del análisis de esta por medio de la triangulación de expertos propuesta en Flick (2007), quien define la triangulación de expertos como una de las cuatro formas de triangulación, y que consiste en que diferentes observadores participan de una forma u otra en la validación de los datos, lo cual hace nula o mínima la posibilidad de sesgo (causado por el investigador) en los mismos. Esto debe realizarse a través de equipos de investigación y mejoraría si forman parte de ellos expertos diferentes

entre sí, en este caso, como ya se ha indicado, los participantes el SIDM y el director de este trabajo.

4. ANÁLISIS CRONOLÓGICO

Introducción al contenido observado

El contenido observado que se describe en los episodios que siguen muestra la construcción del pensamiento proporcional en estudiantes de noveno y décimo; cabe destacar que, en contextos escolares oficiales (públicos) de Colombia, en raras ocasiones se hace uso de libros de texto. La primera clase observada se inicia con la construcción del concepto de razón, usando contextos geométricos que facilitan la visualización de las características de este elemento mencionado por autores como Fiol y Fortuny (1990), quienes postulan que la enseñanza de proporcionalidad debe partir desde fuentes geométricas, primero, a partir de dibujar o aparejar triángulos semejantes y, más adelante, rectángulos semejantes, cualificando sus relaciones, comparando su base y su altura, para posteriormente iniciar la comparación de longitudes de figuras semejantes, y, seguidamente, comprender la proporcionalidad a partir de la relación entre magnitudes aritméticas.

Posteriormente, establece la relación de proporcionalidad entre segmentos a partir de una relación de equivalencia de razones entre dos pares de segmentos. Para ello, se hace uso de situaciones en las cuales se busca encontrar el valor de un segmento dados otros tres, teniendo en cuenta que estos son proporcionales, con lo cual se hace referencia, por ejemplo, a cómo Tales de Mileto encontró la altura de la pirámide de Keops en Egipto.

Como complemento al tema trabajado a lo largo de la primera sesión, también se buscó establecer la razón entre dos pares de segmentos dados, lo cual complementó la definición de proporcionalidad como una relación de equivalencia entre las razones de dos pares de segmentos, para esto se hace uso de herramientas como el tratamiento algebraico de situaciones, equivalencia entre fracciones.

Un segundo tema de trabajo es el teorema de Tales como una aplicación de la proporcionalidad partiendo de la comprobación de este por medio de construcción de líneas transversales y de una recta paralela dada una recta cualquiera a través del uso de escuadras. En este proceso fue necesario hacer uso del concepto de segmentos homólogos para poder establecer las relaciones entre los segmentos y sus razones, y así verificar si estos son proporcionales o no; además del uso de unidades de medida submúltiplos de metro (milímetros, centímetros). Como una segunda parte del trabajo, la profesora aborda el

teorema de Tales a través de la resolución de problemas contextualizados, en los cuales se busca el valor de un segmento entre dos rectas transversales cortadas por rectas paralelas, por medio del uso del tratamiento algebraico de situaciones, en el establecimiento de proporciones entre segmentos correspondientes.

El tercer tema de trabajo fue la semejanza de triángulos, para lo cual se retoma el problema de la búsqueda de la altura de la pirámide de Keops en Egipto, situación que es solucionada por medio de la semejanza de triángulos rectángulos. Posteriormente se trabajan situaciones de semejanza de triángulos en situaciones contextualizadas como la búsqueda de la altura de un árbol, edificios o segmentos desconocidos de triángulos semejantes en diferentes posiciones por medio del tratamiento algebraico de situaciones y la identificación de segmentos correspondientes.

En la figura 15 se representan a modo de resumen las temáticas trabajadas en cada sesión para posteriormente hacer un análisis más profundo sobre cada sesión y sus respectivas sesiones.

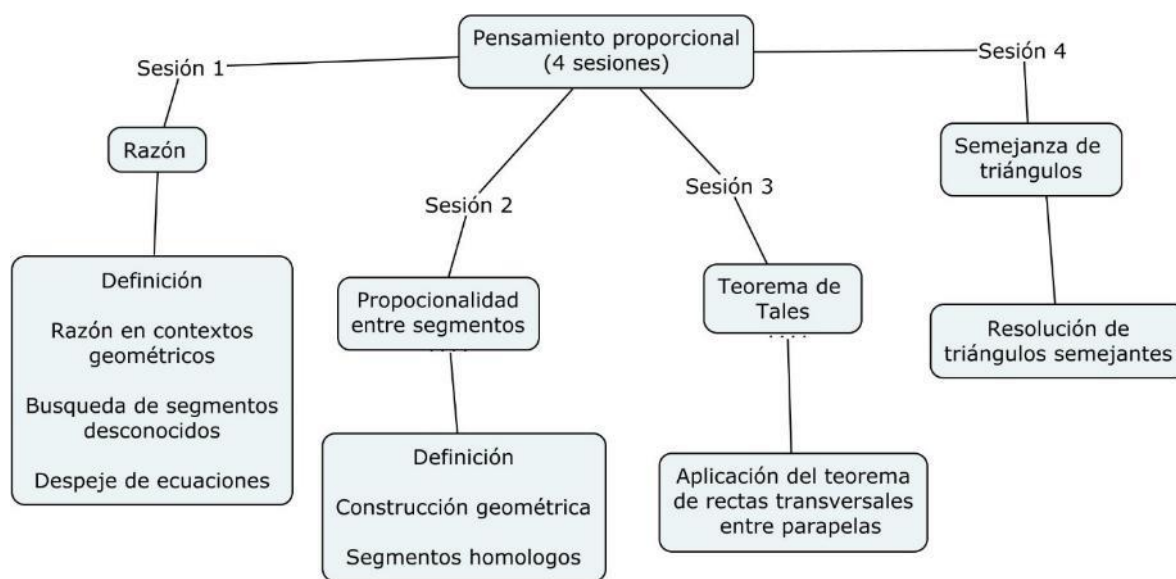


Figura 15 Representarán gráfica de las temáticas trabajadas en las 4 sesiones.

Sesión 1 – Razón y proporcionalidad de segmentos

Resumen

La profesora inicia esta sesión explicando el nuevo tema que aprenderán los estudiantes, en este caso, la razón entre dos segmentos, para lo cual usa un contexto geométrico: dota de una longitud diferente a cada segmento para poder establecer relaciones entre los mismos. Posteriormente, presenta estrategias y procedimientos para establecer cuándo dos pares de segmentos son iguales por medio del tratamiento algebraico de situaciones y la “regla de productos y extremos”, una vez es presentada esta estrategia, es aplicada a diferentes problemas de búsqueda de segmentos desconocidos y las razones cuando están en proporcionalidad haciendo uso de representaciones gráficas, pictóricas y algebraicas.

En esta sesión se analizarán cinco episodios: en el primero se presenta la idea de razón; en el segundo se muestra el procedimiento para encontrar el valor de un segmento cuando existe la proporcionalidad; en el tercero se hace uso de la fenomenología para resolver una situación real por medio de la búsqueda de segmentos desconocidos a través de relaciones de proporcionalidad; en el cuarto se resuelve el valor de una incógnita por medio del uso de medios y extremos; y en el quinto episodio se resuelven diferentes problemas asociados con la construcción y resolución de razones y proporciones en contextos geométricos.

Código	Contenido
Episodio 1 [E1.1, U 1-46]	Introducción del concepto de razón entre segmentos
Episodio 2 [E1.2, 47-82]	Procedimiento para encontrar el valor de un segmento cuando exista proporcionalidad
Episodio 3 [E1.3, 63-92]	Resolución de situación real usando proporcionalidad para encontrar el valor de un segmento
Episodio 4 [E1.4, 93-112]	Resolución de ejercicios en contextos matemáticos usando proporcionalidad para encontrar el valor de un segmento

Episodio 5 [E1.5, 114-156]	Resolución de problemas sobre razón y proporción en contextos geométricos
-------------------------------	---

Tabla 13 Episodios de la sesión 1

Análisis

Episodio 1. [E1.1, U 1-46] Introducción del concepto de razón entre segmentos

La profesora Sonia considera importante iniciar la clase con la presentación del tema haciendo una definición preliminar del concepto de razón (KoT, definiciones), asociando a cada segmento un valor o longitud para luego mostrar, por medio de la ejemplificación, pasando del lenguaje natural al lenguaje matemático para expresar la razón de dos segmentos como una división de estos (KoT, registros de representación). [E1.1, U2-4]

2. *P: Cuando hablamos de segmentos, a cada segmento le asociamos una longitud, vamos a hacer un segmento que mide 2 unidades.*
3. *P: Este, entonces, segmento mide 2 unidades y éste 4 unidades,*
4. *P: La razón entre segmentos es comparar la longitud que hay entre los segmentos AB y CD, entonces ¿Cuál es la razón entre segmentos?, es el cociente entre los segmentos AB y CD, esto se expresa como $\frac{AB}{CD}$*

En este proceso hace referencia a que los estudiantes ya habían trabajado razones entre números enteros, comentando que cuando se trabaja razones entre segmentos se debe asociar una longitud a cada segmento, mostrando así la secuenciación de los temas al hacer referencia a que ya habían trabajado razones con números enteros (KMLS, secuenciación). Por demás, muestra un dominio de la enseñanza de la matemática al presentar un ejemplo de razón entre segmentos explicando a los estudiantes la diferencia entre la construcción de razones en contextos numéricos y en contextos geométricos (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Posteriormente, hace se referencia a que, para la construcción de una razón en la comparación de los dos segmentos, debe haber la misma unidad de medida, ejemplificando que en este caso la unidad de medida serán los cuadros con los cuales cuenta el tablero (KoT, propiedades y fundamentos). Cuando un estudiante le pregunta a la profesora si la razón entre

dos segmentos siempre será la mitad, dado que el ejemplo presentado fue 2 es a 4 para construir la relación $\frac{2}{4}$, la profesora expresa que no siempre será la mitad, para lo cual hace uso de un ejemplo más transparente en el que la relación entre los segmentos no genere dificultades en la comprensión de los estudiantes (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Con el nuevo ejemplo presentado por la profesora, un segmento que mide 3 unidades y el otro que mide 5 unidades, es más complejo establecer la razón; los estudiantes inicialmente establecen la razón “tres quintos”, ante esta respuesta, la profesora comprende la dificultad mostrada por los estudiantes (KFLM, fortalezas y dificultades de aprendizaje) y explicita cómo se debe nombrar esta razón (KoT, registros de representación) [E1.1, U7-11]

7. *P: Esta razón se puede escribir como 2 es a 4 o también se puede expresar como 2 : 4, esa es la razón.*
8. *E: ¿siempre será a mitad?*
9. *P: No, depende de la longitud del segmento, por ejemplo, yo puedo tener un par de segmentos, un segmento AB 3 de unidades y el segmento CD de 5 unidades. ¿Cuál es la razón entre esos dos segmentos?*
10. *E: tres quintos*
11. *P: Entonces, nuevamente la longitud del segmento AB (3) entre la longitud del segmento CD (5), lee 3 es a 5 no se lee tres quintos, ¿listo?*

Para clarificar las características y la definición del concepto de razón, la profesora hace uso de una representación tabular en la cual muestra varios ejemplos de cómo construir razones además de cómo nombrarlas (KoT, registros de representación y KMT estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Cuando un estudiante menciona que la razón de un segmento A y otro C es “A sobre C” la profesora comenta que la expresión adecuada es A es a C, (KoT, registro de representación) mostrando por segunda vez las dificultades de los estudiantes para nombrar razones, de esta forma, parece que el conocimiento de las fracciones es un primer obstáculo para la comprensión de la razón, puesto que hay una dificultad para establecer cómo se debe nombrar una razón.

En la tabla se presenta el caso cuando la razón a establecer es dos segmentos que miden 2 unidades [E1.1, U-14], en este caso, $\frac{2}{2}$, la profesora hace referencia a que en este caso se puede simplificar la razón por medio de sacar la mitad en el numerador y el denominador para quedar la razón $\frac{1}{1}$ es decir 1 (KoT, procedimientos). [E1.1, U13-17]

13. P: Vamos a analizar. Yo le voy a cambiar la longitud al segmento y vamos a mirar que pasa con la razón entre segmentos.

14. (elaboración de una tabla de 3 columnas, longitud del segmento AB, longitud del segmento CD y razón entre las longitudes)

Longitud del segmento AB	Longitud del segmento CD	Razón entre las longitudes
A	C	a/c
2	2	$2/2 = 1/1 = 1$

15. P: Yo voy a decir que la longitud del segmento AB es a, y la del segmento CD es c, ¿cuál sería la razón?

16. E: ¿a sobre c?

17. P: a es a c

Al ver esta representación, la profesora presenta otros ejemplos que puedan ayudar a los estudiantes a simplificar las fracciones para establecer las razones (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), donde un segmento AB mide 3 unidades y el segmento CD mide 9 unidades, explicitando que se puede simplificar la expresión al sacar tercera en ambos lados (KoT, procedimientos); además de hacer la referencia a recordar a los estudiantes que simplificar significa dividir numerador y denominador por el mismo número primo, lo cual hace referencia a un tema visto con anterioridad (KoT, definiciones; KMLS, secuenciación).[E1.1,U22-25]

22. P: Ahora este mide (AB) 3 unidades y este (CD) mide 9 unidades, ¿su razón sería?

23. E: 3 es a 9 (escribiendo 3/9),

24. P: Que lo podemos simplificar sacándole tercera a ambos lados como 1 es a 3 (escribiendo 1/3), recuerden que simplificar es dividir el número de arriba y el de abajo por el mismo.

25. P: Puedo expresar por ejemplo el segmento AB 6 unidades y este (CD) mide 3 unidades, 6 es a 3, le saco tercera 2/1, es decir, 2 es a 1 ó sea la razón es 2.

En el siguiente ejemplo, la profesora toma el segmento AB, que mide 6 unidades, y el segmento CD, que mide 3 unidades, al sacar tercera en ambas partes se obtiene la razón $\frac{2}{1}$, es decir, 2, la razón es 2, lo cual evidencia el conocimiento con respecto al procedimiento de simplificar, y, además, la profesora selecciona un ejemplo que es más transparente para la comprensión del tema a presentar (KoT, procedimientos; KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

El uso de estos ejemplos ayuda a caracterizar y definir una primera idea sobre la definición del concepto de razón; se puede establecer una relación entre el KoT (definiciones, propiedades, registro de representaciones y procedimientos), el KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y el establecimiento de algunos elementos del KMLS (secuenciación de temas anteriores).

Una vez los estudiantes trabajaron diferentes ejemplos de razón, se discutió la definición de este concepto. Cuando un estudiante menciona que cree que la razón es la división entre dos longitudes, la profesora menciona que la razón es el cociente entre dos longitudes, seguidamente pregunta “¿Qué te permite decir que la razón es de $1/3$, $2/5$ o de 2 ?, ¿Qué está indicando ese número?” [E1.1, U29], como una estrategia para que los estudiantes comprendan la razón como la relación que se establece entre dos segmentos (KMT, estrategias)

Cuando la profesora comenta que en una tabla se pueden presentar razones iguales aunque los segmentos sean diferentes (KoT, Propiedades), usa dos parejas de segmentos, la primera con la razón $2/6$ y la otra con la razón $3/9$, para lo cual hace una representación gráfica y numéricamente (KoT, registros de representación; KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), situación que cumple efectivamente su objetivo pues un estudiante comenta que “El (numerador 2) es tres veces este (denominador 6) , y en el otro par de segmentos también este (numerador 3) cabe tres veces acá (denominador 9), entonces AB es $1/3$ del segmento CD, y en la segunda pareja sucede exactamente lo mismo, donde el segmento más pequeño también resulta ser a tercera parte del mayor en ambos casos”. [E1.1, U38]

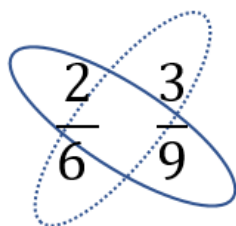
Como complemento a la explicación dada por el estudiante, la profesora comenta que otra forma de saber si tienen la misma razón es simplificarlas, en el caso de la primera pareja al sacar la mitad se obtiene $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ y en la segunda pareja como ni 3 ni 9 tienen mitad entonces al encontrar tercera se obtiene que $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ (KoT, procedimientos). Una vez mostrado este método, la profesora procede a presentar el concepto de proporcionalidad como el caso cuando dos pares de segmentos tienen la misma razón (KoT, definiciones). [E1.1, U39-45]

39. *Esto (la existencia de tener la misma razón, aunque los números sean diferentes) lo podemos mirar cuando simplificamos las dos razones,*
40. *$2/6 = 1/3$ mitad de 2, 1 y mitad de 6 es 3*
41. *$3/9 = 1/3$ tercera de 3 es 1 y tercera de 9 es 3*
42. *Entonces cuando dos pares de segmentos tienen la misma razón, se llama una proporción, los llamaremos segmentos proporcionales, entonces 2 es a 6 es proporcional a 3 es a 9.*
43. *P: ¿Por qué son proporcionales?*
44. *E: Porque tienen la misma razón,*
45. *P: Exactamente*

Episodio 2 [E1.2, 47-82] Procedimiento para encontrar el valor de un segmento cuando exista proporcionalidad

En el segundo episodio se indaga por el procedimiento para establecer cuando dos pares de segmentos son proporcionales (KoT, procedimientos), para lo cual se emplean diferentes tipos de representación (KoT, registros de representación) y en un ejemplo un tipo específico (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). En este caso la profesora presenta el método de medios y extremos para verificar si dos pares de segmentos son proporcionales; este método se basa en multiplicar los extremos y los medios, cotejando que se obtenga el mismo resultado, lo cual indicará la proporcionalidad o no de los pares de segmentos [E1.2, U47-52].

47. *P: Hay una manera de verificar si dos pares de segmentos son proporcionales, y es multiplicando esos dos términos, ¿recuerdan que estos se llaman los extremos (encerrándolos con una línea continua) y estos de acá se llaman los medios (encerrándolos con una línea punteada)?*



48.
 49. *P: 2 por 9 debe ser igual a 3 por 6, miremos*
 50. *P: $2 \times 9 = 3 \times 6$*
 51. *P: $18 = 18$*
 52. *P: Esta es una manera de verificar, que los dos pares de segmentos son proporcionales o que guardan la misma razón.*

En un segundo ejemplo, la profesora precisa que necesita dos segmentos de forma que uno sea la mitad de otro [E1.2,U52], mostrando así que busca establecer una estrategia de enseñanza a través de un ejemplo donde se pueda verificar la veracidad del procedimiento anteriormente explicado, dado que ya se sabe que los dos pares de segmentos son proporcionales porque cada segmento será el doble del otro (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

La profesora da los primeros segmentos “5 es a 10” [E1.2,U 53], solicitando otro par de segmentos que tengan también como razón ser el doble, un estudiante responde “2 es a 4” [E1.2,U 54], dado que ya se sabe que los dos pares de segmentos tienen la misma razón (ser el doble). La profesora pregunta cómo se puede verificar la verdad de esto, lo cual genera que los estudiantes comprueben si efectivamente son proporcionales por medio del procedimiento de medios y extremos, mediante lo cual se muestra una relación entre la pregunta dada por la profesora como una estrategia para movilizar la comprensión del procedimiento anteriormente presentado (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) y del procedimiento con los datos del ejemplo (KoT, procedimientos). [E1.2, U53-62]

53. *P: Tomemos 2 segmentos que uno sea la mitad del otro, 10 y 5, bien*
 54. *P: 5 es a 10 ¿Cómo?*
 55. *E: 2 es a 4*
 56. *P: nosotros ya sabemos que estas 4 longitudes son proporcionales, ¿cómo podemos verificar que esto es cierto?*
 57. $\frac{5}{10} = \frac{2}{4}$

58. *P: Entones $5 \times 4 = 20$ y también $10 \times 2 = 20$, verificándolo al simplificar también obtenernos la misma igualdad.*

59. $\frac{5}{10} = \frac{2}{4}$

60. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

61. *P: Esto es un ejemplo de proporción, ¿alguien tiene alguna duda sobre qué es una proporción?*

62. *E: No*

Episodio 3 [E1.3, 63-92] Resolución de situación real usando proporcionalidad para encontrar el valor de un segmento

En este episodio, la profesora hace uso de un contexto real para la ejemplificación del concepto de proporcionalidad entre dos pares de segmentos, (KoT, fenomenología y aplicaciones). En este proceso, la profesora usa una escuadra⁹ de 45 grados de grandes dimensiones que ayuda a visualizar las condiciones en las cuales la sombra de un objeto es igual a su altura (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), es decir, cuando se tiene un ángulo recto y dos de 45 grados, pues ángulos iguales subtienden lados iguales o de otra forma si los ángulos de las bases de un triángulo son iguales, los ángulos de sus bases también lo serán, lo cual hace referencia a la proposición V¹⁰, libro I de *Los Elementos* de Euclides. (KoT, propiedades).

⁹ El término “escuadra” para referirse a la plantilla en forma de triángulo rectángulo isósceles y “cartabón” para la que tiene forma de triángulo rectángulo escaleno, usada para construir diferentes tipos de triángulos.

¹⁰ La proposición V, del libro I de *Los Elementos*, plantea una propiedad que será usada a lo largo de diferentes sesiones, esta proposición menciona que en triángulos isósceles los ángulos en la base son iguales y, si los lados iguales se alargan, los ángulos situados sobre la base serán iguales entre sí.



Figura 16 Escuadra de 45 grados usada por la profesora para explicar la relación entre ángulos iguales a lados iguales en un triángulo.

Un segundo ejemplo, relacionado con el contexto real es la búsqueda de la altura de un triángulo rectángulo que representa la altura de un pino y donde se tiene información de otros dos triángulos rectángulos que son proporcionales a mayor, tal como lo comenta la profesora (KoT, fenomenología y aplicaciones) *“La sombra pequeña es proporcional a su altura, como la sombra mediana es proporcional a su altura, como la sombra mayor a su altura, los datos de las estacas las conocemos, sin embargo, no sabemos la altura del pino, entonces vamos a colocar los datos conocidos y desconocidos”* [E1.3,U 68] (KoT, propiedades).

Teniendo en cuenta esta característica del problema y esa propiedad, la profesora procede a incluir los datos dados en el problema (se dan las bases de los tres triángulos y las alturas del pequeño y mediano, teniendo como incógnita la altura del triángulo mayor) obteniendo la relación $\frac{50}{75} = \frac{60}{90}$ utiliza el procedimiento medios y extremos para verificar que los lados sean proporcionales (KoT, procedimientos), característica que efectivamente se cumple. En este proceso la profesora hace uso de la representación gráfica de problema (que se puede apreciar en la figura 17), la expresión numérica de la relación proporcional entre los lados del triángulo pequeño y mediano (KoT, registros de representación) y el uso de la escuadra para construir triángulos con un ángulo de 60 grados (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

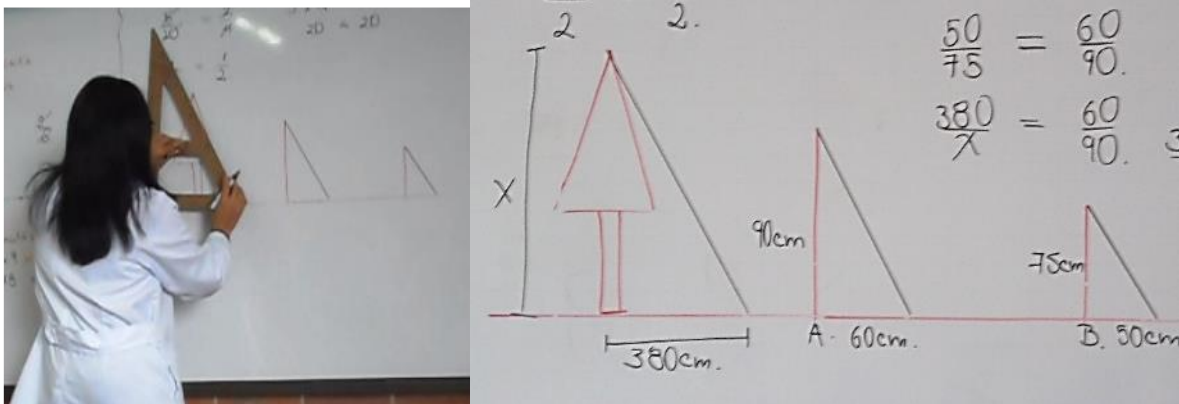


Figura 17 Representación gráfica del problema de la altura de un pino usando una escuadra de 60 grados

En la segunda parte de la resolución del problema, la profesora relaciona la medida de los triángulos mediano y mayor con el propósito de encontrar el valor desconocido (altura del triángulo mayor) para tener la relación $\frac{380}{x} = \frac{60}{90}$ donde la profesora relaciona la base del triángulo mayor y su altura (desconocida) con la base del triángulo mediano y su altura, mencionando que se debe proceder usando el método de extremos y medio (KoT, procedimientos) para obtener la igualdad $(380 \cdot 90) = (60 \cdot X)$. Posteriormente, usa diferentes preguntas que orientan a los estudiantes para el despeje del valor de X (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) por medio de los principios del inverso aditivo y multiplicativo (KoT, fundamentos) [E1.3, U 80-84]

80. P: "Recuerden que para despejar una ecuación ¿qué debemos hacer con la X ?, ¿Qué me está sobrado allí?"
81. E: el 60
82. P: ¿qué hago con el 60?, el 60 está multiplicando entonces.
83. E: lo divido
84. P: lo dividimos a ambos lados de la igualdad por 60, esto lo podemos hacer simplificado"

Posteriormente, la profesora procede a simplificar la expresión construida hasta el momento (KoT, procedimientos), la siguiente expresión $\frac{380 \cdot 90}{60} = x$ inicialmente sacando la décima, eliminando los ceros de 90 y 60, para dejar 9 y 6, y, posteriormente, sacar la tercera de 6, lo que permite encontrar 3 y 2 respectivamente para la expresión $\frac{380 \cdot 3}{2} = x$. Al dividir

380 entre dos, se obtiene 190, lo cual, al multiplicarse por 3, se convierte finalmente en la altura del triángulo mayor que representa la altura del pino que, en el problema, es 570.

El procedimiento anterior muestra justamente cómo, por medio del conocimiento sobre la simplificación de fracciones, puede ser útil en la resolución de problemas de proporcionalidad, pues la simplificación de la fracción $\frac{90}{60}$ a $\frac{3}{2}$ facilitó el cálculo del valor de la incógnita x . [E1.3,U73-90]

73. *P: ¿Cómo hacemos para averiguar la altura (del pino)?*
74. *E: Buscando un número que multiplicado por 60 me dé lo mismo que 380 por 90.*
75. $\frac{380}{x} = \frac{60}{90}$
76. *P: Entonces multipliquemos los extremos.*
77. $380 \cdot 90 = 60 \cdot X$
78. *Recuerden que para despejar una ecuación ¿qué debemos hacer con la X?*
79. *¿Qué me está sobrando allí?*
80. *E: el 60*
81. *P: ¿qué hago con el 60?, el 60 está multiplicando entonces.*
82. *E: lo divido.*
83. *P: lo dividimos a ambos lados de la igualdad por 60, esto lo podemos hacer simplificado.*
84. *Decima de 90 y decima de 60, (eliminando los ceros).*
85. *9 y 6 son múltiplos de 3, entonces tercera de 6.*
86. *E:2*
87. *P: y tercera de 9.*
88. *E: 3*
89. *P: 2 y 380 son pares, saquémosles la mitad, mitad de 2 es 1 y de 380 es 190, entonces me quedaría 190 por 3, es decir que la altura del pino es de 570.*
90. *Entonces para esto nos sirven las proporciones, para encontrar un valor determinado siempre y cuando tengamos la certeza de que los segmentos son proporcionales*

Para finalizar el episodio, la profesora enfatiza en que este tipo de procedimiento llamado producto de medios y extremos o regla de medios y extremos, que es usado para la búsqueda de un segmento desconocido cuando se sepa que los pares de segmentos son proporcionales, se basa en multiplicar en forma de equis las cantidades ubicadas en el numerador y denominador de dos razones, posteriormente será ejemplificado dicho algoritmo (KoT, procedimientos), lo cual muestra de fondo las intenciones que buscaba la profesora: mostrar la utilidad y las aplicaciones de la proporcionalidad en el mundo real

(KoT, aplicaciones). De igual forma, es importante mencionar que, en el transcurso de este episodio, se presentó desde una forma no explícita la propuesta de resolución de problemas propuesta por Polya (KPM).

Inicialmente se hace una lectura de los problemas con el propósito de entender los datos dados en la situación, posteriormente, la profesora establece un plan, en este caso establecer relaciones entre los segmentos, para, luego, ejecutar el plan usando tratamiento algebraico de situaciones y verificar si el plan y la ejecución fueron adecuadas, verificando así la proporcionalidad de los dos pares de segmentos. Esta estructura de resolución de problemas de proporcionalidad se presenta en el transcurso de diferentes episodios [E1.3, U73-90], [E3.4, U271-293], [E4.2, U309-318] y [E4.6, U359-371] y a lo largo de varias de las sesiones; se considera que el uso de las fases de resolución de problemas de Polya como una muestra del conocimiento de la jerarquía y planificación en la resolución de problemas es una categoría perteneciente al KPM.

Episodio 4 [E1.4, U93-112] Resolución de ejercicios en contextos matemáticos usando proporcionalidad para encontrar el valor de un segmento

Una vez los estudiantes ya tuvieron un acercamiento a una situación del contexto real (la altura de un pino), la profesora considera necesario resolver un problema donde su contexto sea matemático para confirmar el conocimiento del tema por parte de los estudiantes hasta el momento; para lo cual presenta un ejemplo donde es fácil encontrar el segmento faltante que cumpla la proporcionalidad, pues esta razón ya había sido trabajada junto con la simplicidad de la razón expuesta (ser el doble de) [E1.4 U93-100].

Para resolver esta situación la profesora hace uso de preguntas orientadoras como “¿Cuál es el valor del segmento x para que sean proporcionales los dos pares de segmentos y ¿Sabemos que son proporcionales?” [E1.4, U-94], de tal forma que los estudiantes puedan expresar sus conocimientos construidos hasta el momento con respecto a la idea de proporcionalidad, siendo consciente que de fondo se está discutiendo sobre las condiciones para que dos pares de segmentos sean proporcionales (KoT, propiedades y fundamentos). Posteriormente, recuerda el significado del concepto de proporcionalidad como una

estrategia para que los estudiantes puedan relacionarlo con la situación propuesta (KoT, definiciones) y (KMT, estrategias). [E1.4, U93-101]

- 93. *Miremos este par de segmentos, 2 es a 4 como 1,5 a X.*
- 94. *¿Cuál es el valor del segmento x para que sean proporcionales los dos pares de segmentos?*
- 95. *E: 3*
- 96. *P: ¿sabemos que son proporcionales?*
- 97. *E: Sí, porque el primer segmento es la mitad del segundo*
- 98. *P: ¿seguros?*
- 99. *E: sí porque siempre son la mitad*
- 100. *P: lo que pasa es que dice que son proporcionales cuando el cociente entre los dos pares de razones es el mismo.*
- 101. *Recuerden que proporcionales quiere decir que tienen la misma razón, o sea, en este caso, la razón acá es 2 es a 4 como 1,5 al segmento que no sabemos, ¿cierto?*

Una vez es recordada la definición de proporcionalidad, la cual la profesora plantea como la igualdad entre dos razones o igualdad entre dos cocientes, se presentan los datos en forma de dos razones donde se desconoce uno de los segmentos (KoT, procedimientos), los estudiantes responden que el valor del segmento faltante es 3, porque saben que la razón del otro par de segmentos es 2. Para ampliar esta argumentación dada por los estudiantes, la profesora comenta que una razón se puede expresar como la cantidad de veces que cabe un segmento en el otro, además de que no siempre las razones serán enteras (KoT, propiedades y sus fundamentos) *“Te estás dando cuenta de que este cabe dos veces, o lo podremos expresar como 2 es la mitad de 4 y entonces 1,5 también es la mitad de 3. Mucha atención porque no siempre los números son enteros y así de sencillos de determinar”* [E1.4, U107].

Para finalizar la situación, la profesora muestra el procedimiento de despeje de la incógnita que en este caso representa el segmento desconocido de una relación proporcional de cuatro segmentos (KoT, procedimientos), donde confirma las respuestas dadas por los estudiantes (el valor de x es 3). En este último momento es importante resaltar el procedimiento usado para despejar el valor de una incógnita [E1.4, U81]; la profesora divide en ambos lados de la igualdad, mostrando por un lado el procedimiento (KoT, procedimientos) y además como estrategia (KMT, estrategias) con la cual busca que los

estudiantes comprendan por qué se debe dividir por 2 en ambos lados de la igualdad para eliminar el 2 de la expresión $2x = 6$ (KoT, fundamentos).[E1.4, U99-103]

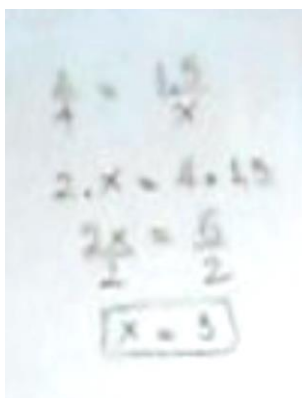
108. *P: La otra manera de verificarlo (la proporcionalidad entre las dos razones), ¿Cuál sería?, pues multiplicando los extremos*

109. $2x = 4 \cdot 1,5$

110. *Sabemos que $4 \cdot 1,5$ es 6, Divido en 2 a ambos lados de la igualdad*

111. $\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$

112. *Y me queda $x = 3$ y listo, ahora si comprobamos que son proporcionales.*



$$\begin{aligned} \frac{4}{x} &= 1,5 \\ 2 \cdot x &= 4 \cdot 1,5 \\ 2x &= 6 \\ \frac{x}{2} &= \frac{6}{2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{4} &= \frac{1,5}{x} \\ 2 \cdot x &= 4 \cdot 1,5 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{6}{2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Dado que el problema se basa en la búsqueda de la altura de un pino, problema que es representado gráficamente por medio de triángulos semejantes haciendo uso de la escuadra de 60 grados, se considera que cuando se hace uso de triángulos semejantes y se pregunta luego qué información puede extraerse de esa propiedad la profesora está mostrando conocimiento sobre el KSM, pues el conocimiento sobre triángulos semejantes será necesario a futuro para asociar la proporcionalidad en contextos geométricos por medio de la semejanza.

Episodio 5 [E1.5, 114-156] Resolución de ejercicios asociados a la razón y proporción en contextos geométricos

En el quinto episodio, la profesora hace entrega de una guía de trabajo en la cual los estudiantes deberán hacer uso de los conocimientos construidos hasta el momento. Inicialmente se hace una presentación de las características de la proporción aurea como un tipo específico de proporcionalidad [E1.5, U115-118]. Sin embargo, este elemento sólo sirve

como un indicio, pues sólo se presenta una definición somera sin una profundidad suficiente para establecer evidencias con respecto al conocimiento de la proporción aurea.

Posteriormente con la guía de la profesora, un estudiante inicia a leer en voz alta la información presentada en la guía de trabajo, donde el estudiante se equivoca al leer la relación $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$ como “ABCD igual a EFGH” y no como “AB es a CD como EF a GH” [E1.5, U119-121], lo cual es corregido por la profesora (KoT, registros de representación), quien, posteriormente, recuerda a los estudiantes el procedimiento para verificar si dos pares de segmentos son proporcionales: multiplicando en cruz (regla de medios y extremos) (KoT, procedimientos).

Después, la profesora comenta en términos generales qué se debe hacer. En el primer ejercicio, que está compuesto por 2 situaciones, la profesora comenta que se deben escribir las unidades de cada longitud y establecer la proporción entre estas (KoT, procedimientos). Aspecto que se presentó claramente pues en [E1.5, U123-124] se puede observar cómo un estudiante pudo establecer las razones y verificar que estas son proporcionales por medio del procedimiento de multiplicar medios y extremos. [E1.5, U119-125]

119. “una estudiante empieza a leer una tabla relacionada con segmentos proporcionales”

120. E: AB CD es igual a EF GH

121. P: recuerda que se lee AB es a CD como EF a GH, 2 es a 4 como 3 es a 6.

122. ¿cómo se puede verificar?, 2 es la mitad de 4 y 3 es la mitad de 6, entonces la razón es ser la mitad o sea $1/2$, si multiplican los extremos daría $2 \cdot 6 = 12$ y también $3 \cdot 4 = 12$

123. en primer punto de la práctica se debe colocar las unidades de los segmentos y escribir la proporción.

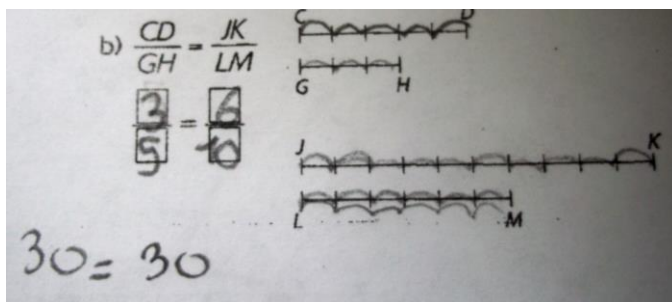
a) $\frac{PQ}{RS} = \frac{TV}{MN}$

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$12 = 12$

124.

125.



En el segundo ejercicio, que también está compuesto por dos situaciones, se solicita de una forma más específica el establecimiento de las razones y la verificación de si estas son proporcionales, lo cual es comentado por la profesora al mencionar que para responder estos ejercicios se debe hacer la razón entre cada par de segmentos, luego compararlos para confirmar si estos son proporcionales o no (KoT, procedimientos).

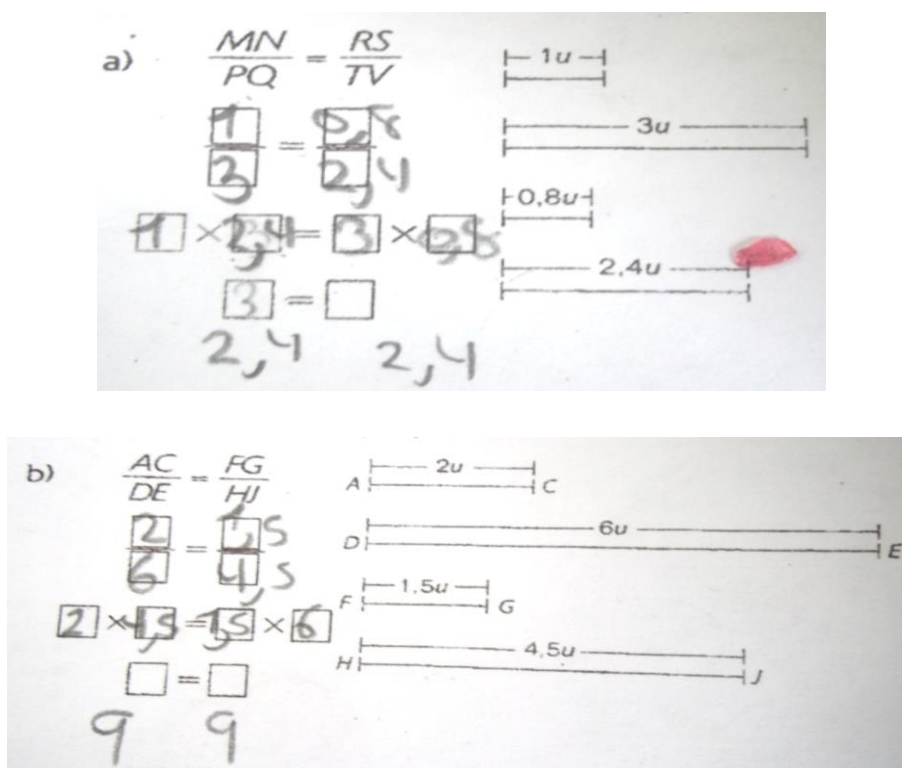


Figura 18 Situaciones del segundo punto de la guía de trabajo

En el tercer ejercicio, donde se aborda la proporcionalidad entre los lados opuestos de dos cuadriláteros, la profesora comenta que para resolver este problema es necesario comparar los lados opuestos de los cuadriláteros para establecer si estos son proporcionales

o no (KoT, procedimientos); de igual forma en este punto la profesora quiere presentar a los estudiantes que la proporcionalidad puede aplicarse a lados opuestos de cuadriláteros (KoT, propiedades).

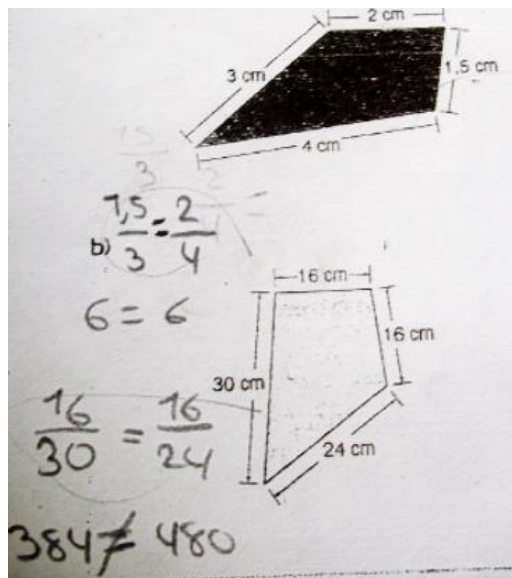


Figura 19 Situaciones del tercer punto de la guía de trabajo.

En el cuarto punto se presenta un cuadrilátero que es cortado por dos rectas paralelas, en las cuales se pregunta sobre la veracidad o la falsedad de diferentes afirmaciones, al respecto, la profesora comenta que se debe comparar un par de segmentos con otro par de segmentos (KoT, procedimientos).

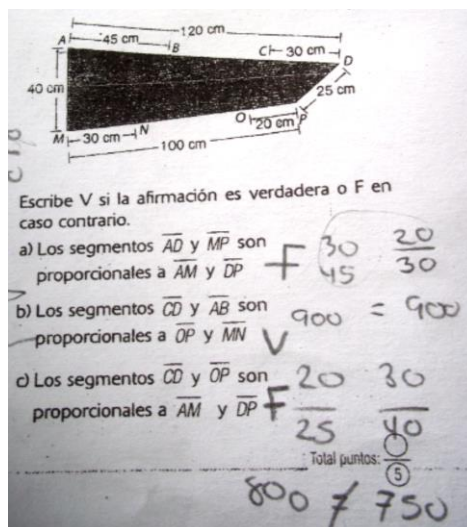


Figura 20 Situaciones del cuarto punto de la guía de trabajo

Antes de empezar a resolver el cuarto problema, la profesora expresa “la razón 5 es a 3, esto no se puede simplificar porque ambos son impares y además no tienen divisores comunes” [E1.5 U138] haciendo referencia a las condiciones que debe tener una razón para que pueda ser simplificada (KoT, propiedades).

Posteriormente, se hace un análisis del cuarto problema, pues hasta el momento no se habían trabajado relaciones proporcionales entre lados de cuadriláteros cortados por rectas paralelas (característica necesaria para establecer relación de proporcionalidad entre dos parejas de rectas). En este problema se pregunta si las parejas de lados opuestos son proporcionales, para esto, inicialmente, la profesora hace una representación gráfica en el tablero del problema (KoT, sistemas de representación), además de mencionar que el lado puesto del lado DP es AM, considerando que, si esto lados son proporcionales, entonces se debe verificar con la regla del producto de medios y extremos (KoT, procedimientos)

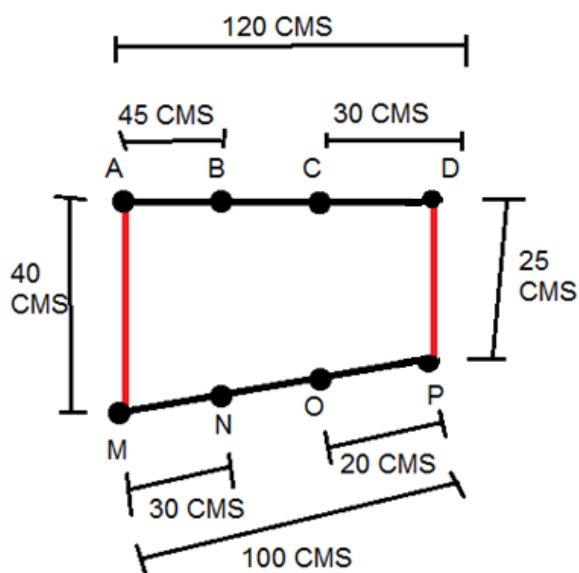


Figura 21 Situación de proporcionalidad entre lados de un cuadrilátero, donde AM es paralelo a DP

Una vez la profesora reemplaza la información dada para obtener la expresión $\frac{40}{25} = \frac{120}{100}$, al ejecutar la multiplicación en cruz, asociada a la verificación de la proporcionalidad, y obtener (KoT, procedimientos), comenta que “efectivamente vemos que como no hay

igualdad entonces no hay proporcionalidad” [E1.6 U147] haciendo referencia a la definición de que aquello no es proporcional (KoT, definiciones). De cierta forma, este problema también podría ser considerado como una estrategia, pues se está construyendo el significado de la proporcionalidad por medio de ejemplos que no son proporcionales, es decir por contraejemplo (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). [E1.6, U141-147]

141. *P: Recuerden que en este caso me están preguntando si las parejas de lados opuestos son proporcionales.*

142. *P: ¿Cuál es el opuesto al lado DP?*

143. *E: AM*

144. *Si son proporcionales entonces reemplacemos los valores opuestos*

145. *Entonces 40 es a 25 como 120 es a 100, verifiquemos multiplicando medios y extremos,*

$$146. \quad \frac{40}{25} = \frac{120}{100}$$

147. *Sería 25 multiplicado por 120, debería ser igual a 40 por 100 para que sean proporcionales. Verifiquemos acá. Efectivamente vemos que como no hay igualdad, entonces no hay proporcionalidad*

Posteriormente, solicita a los estudiantes establecer cuáles son los lados del cuadrilátero en el cual sí se presenta proporcionalidad, iniciando con la relación de 40 es 20 como 120 es a 100, al hacer el respectivo procedimiento en el tablero (KoT, procedimientos), se encuentra que esta relación tampoco es proporcional [E1.6 U149].

$$\frac{AM}{DP} = \frac{KD}{MP}$$

$$\frac{40}{25} = \frac{120}{100}$$

$$40 \times 100 \neq 120 \times 25.$$

$$4000 \neq 3000 \quad \text{NO SON PROP.}$$

$$\frac{40}{25} = \frac{120}{100}$$

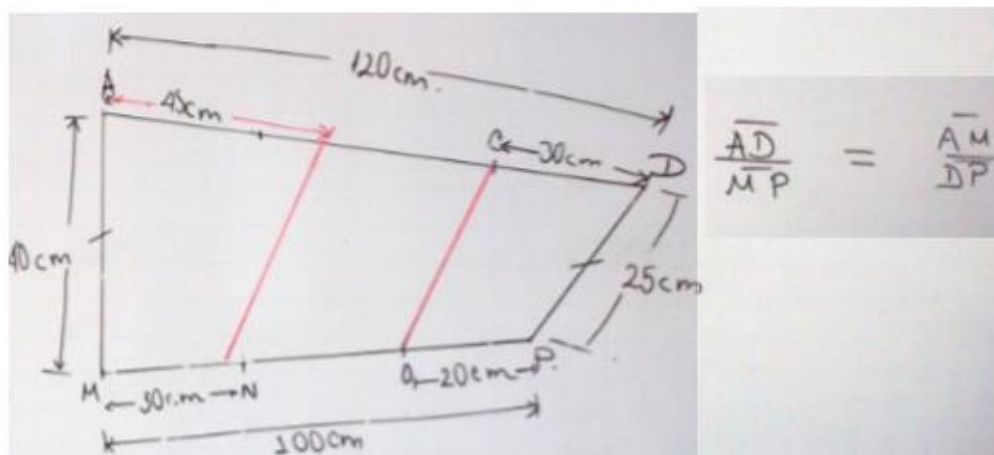
$$\frac{8}{5} = \frac{6}{5} \quad \text{NO SON PROP.}$$

Figura 22 Procedimiento elaborado por la profesora comprobando la proporcionalidad de dos parejas de lados

Finalmente, la profesora solicita a los estudiantes verificar si AD es a MP como AM a DP, relación que al ser reemplazada por los datos se obtiene la relación $\frac{120}{100} = \frac{40}{25}$ donde, después de efectuar el procedimiento de medios y extremos (KoT, procedimientos), la profesora llega a la igualdad $300=4000$, que resulta falsa; así se concluye que estas parejas tampoco serían proporcionales (KoT, definiciones). Este es otro ejemplo en el cual no siempre todas las parejas de lados cumplen la proporcionalidad. Con ello, se ponen de relieve las características de la proporcionalidad a través de contraejemplos. [E1.5, U150-156]

150. *P: Ahora verifiquemos si se cumple la siguiente igualdad AD es a MP como AM a DP*

151.



152. $\frac{120}{100} = \frac{40}{25}$

153. *Haciendo multiplicación de extremos y medios tendríamos que:*

154. $120 \text{ por } 25 = 40 \text{ por } 100$

155. *300 es diferente 4000*

156. *Entonces, tampoco sería proporcional porque no tenemos el mismo resultado.*

En esta situación, aunque no se toca directamente la propiedad de paralelismo entre rectas para determinar la proporcionalidad entre rectas que se cortan, la profesora hace uso de diferenciación entre las rectas paralelas (rojas) y las otras que no lo son, esta característica puede ser identificada como un indicio, pues es necesario indagar más al respecto sobre el significado del uso del color para diferenciar rectas paralelas de las que no lo son.

Con respecto al quinto y sexto punto, en el quinto se necesita encontrar un segmento dados tres segmentos, cuyas razones son proporcionales Ante esto la profesora comenta que en este punto “dan otra vez dos pares de segmentos y nos dan uno que no conocemos, es

decir que debemos determinar el valor” [E1.5 U132] (KoT, procedimientos). En el sexto problema se dan las bases y las alturas de dos rectángulos y se necesita saber si estos son proporcionales o no, para esto la profesora expresa que se deben “comparar” las alturas y las bases, aludiendo a la idea de comparación de razones (KoT, procedimientos.)

Profundiza

6 Encuentra la longitud del cuarto segmento, de manera que los dos pares de segmentos formen una proporción.

a) $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$, $\overline{CD} = 6 \text{ cm}$, $\overline{EF} = 3 \text{ cm}$, $\overline{GH} = ?$

b) $\overline{MN} = 2 \text{ cm}$, $\overline{PQ} = 3 \text{ cm}$, $\overline{RS} = 4 \text{ cm}$, $\overline{TU} = ?$

Handwritten work for problem a):

$$\frac{4}{6} = \frac{3}{x}$$

$$4x = 18$$

$$x = 4.5$$

Handwritten work for problem b):

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

7 Determina si la altura y la base del par de rectángulos son segmentos proporcionales.

Handwritten work for problem 7:

$$\frac{6}{5} = \frac{4}{3}$$

$$18 = 20$$

Handwritten work for problem 8:

$$\frac{4}{3} = \frac{6}{5}$$

$$20 = 18$$

Handwritten work for problem 9:

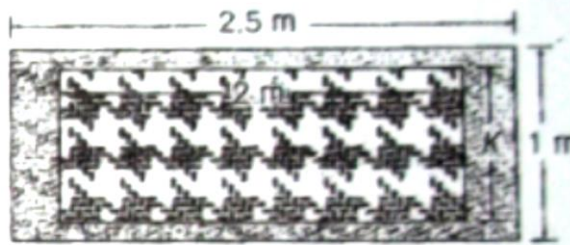
$$\frac{4}{3} = \frac{6}{5}$$

$$20 = 18$$

Figura 23 Ejercicios del quinto y sexto punto de la guía de trabajo

En el séptimo problema se hace una alusión a un problema contextualizado de dos tapetes en los cuales se debe buscar una longitud para que los dos sean proporcionales (KoT, aplicaciones), para esto, la profesora comenta que en este problema “El primer tapete mide de largo 2,5 Mts y de altura 1 Mts, la parte interior mide 2 Mts y la parte desconocida mide K, entonces debemos averiguar el valor de K para que quede proporcional” [E1.5 U134] con lo que hace referencia a las condiciones que deben tener dos pares de segmentos para que sus razones sea proporcionales (KoT, propiedades).

Un diseñador de tapetes quiere hacer dos modelos.



¿Cuál debe ser la longitud desconocida, de manera que los lados del rectángulo exterior sean proporcionales a los lados del rectángulo interior en cada tapete?

Figura 24 Ejercicio del séptimo punto de la guía de trabajo

Sesión 2 – Proporcionalidad geométrica e introducción al teorema de Tales

Dado que ya se han construido las características y definiciones, además de diferentes ejemplificaciones de los conceptos de razón y proporcionalidad desde un contexto geométrico, así como de la búsqueda de longitud de segmentos desconocidos por medio del uso de la proporcionalidad, en la segunda sesión se hace una aproximación al teorema de Tales como una aplicación de los principios de la proporcionalidad. Para esto inicialmente se propone comprobar la veracidad de este teorema, por medio de una construcción geométrica con el uso de diferentes tipos de procedimientos y de materiales como las escuadras. Posteriormente, se establecen diferentes relaciones de proporcionalidad por medio del concepto de segmentos homólogos. Para finalizar la sesión, se plantea un ejercicio de búsqueda de parejas de segmentos proporcionales dado un segmento, lo cual es una aplicación de las relaciones de proporcionalidad entre segmentos.

Código	Contenido
Episodio 6 [E2.1, U 157-171]	Construcción de rectas paralelas
Episodio 7 [E2.2, 172-193]	Comprobación de relaciones de proporcionalidad en la construcción
Episodio 8 [E2.3, U194-215]	Segmentos homólogos
Episodio 9 [E2.4, U215-232]	Búsqueda de dos pares de segmentos homólogos dado un segmento

Tabla 14 Episodios de la sesión 2

Episodio 6 [E2.1, U157-171] Comprobación de relaciones de proporcionalidad en la construcción

El énfasis de la segunda sesión está en el tema del teorema de Tales como una aplicación de la proporcionalidad geométrica. En esta ocasión, la profesora igual que en la clase anterior, al iniciar la clase enuncia el teorema (KoT, propiedades) “*Si dos rectas transversales las cortamos con líneas paralelas, estas determinan segmentos proporcionales sobre las transversales*” [2.1, U159]. En este episodio se analizará el protocolo de construcción y verificación de dicho teorema, para lo que, inicialmente, la profesora solicita a los estudiantes que tracen en un folio en blanco dos rectas transversales, recordando que dos líneas son transversales si no tienen la misma inclinación (KoT, definiciones). Dado que en este episodio el objetivo es la construcción, es necesario hacer un uso adecuado de los materiales (en este caso la escuadra), además de saber las potencialidades y limitaciones de su uso, aspectos que en el transcurso del episodio se podrán observar.

Como primera medida, la profesora traza en el tablero las dos rectas transversales y nombra cada una de estas rectas de acuerdo con las convenciones establecidas ($\vec{r}$, $\vec{s}$) (KoT, registros de representación); posteriormente se procede a explicitar cómo construir una recta

paralela a una recta dada (KoT, procedimientos) haciendo marcas en una de las rectas transversales cada 10, 20, 30 y 40 milímetros.

Después de esto, la profesora hace uso de las escuadras de 60 y 45 grados para construir líneas paralelas “...al tomar la escuadra de 60 grados y la coloco sobre la línea roja y la escuadra de 45 grados la coloco debajo, de tal forma que me quede una línea recta, de tal forma que cuando yo vaya corriendo sobre la escuadra de 45 grados, la de 60 grados pueda trazar las rectas paralelas, es decir, que tienen la misma inclinación.” [2.1, U168]

Para explicitar el uso de las escuadras en la construcción de una recta paralela a una recta dada, la profesora menciona paso a paso la posición que deben tener la escuadra de 45 grados (sobre la recta dada) y la escuadra de 60 grados (sobre uno de los lados de la escuadra) para tener rectas con la misma inclinación, y así construir rectas paralelas a la dada inicialmente en cada una de las marcas hechas inicialmente (10mm, 20mm, 30mm y 40mm), tal y como lo muestra la figura 25.

En este proceso, la profesora hace referencia a diferentes procedimientos que son válidos para la construcción de las líneas paralelas, como, por ejemplo, la prolongación de rectas (KoT, procedimientos), además de argumentar las razones por las cuales las rectas construidas son paralelas (KoT, propiedades) “¿Qué me garantizó esto? (ser rectas paralelas), pues que moví una escuadra sobre la otra.” [E2.1, U172].

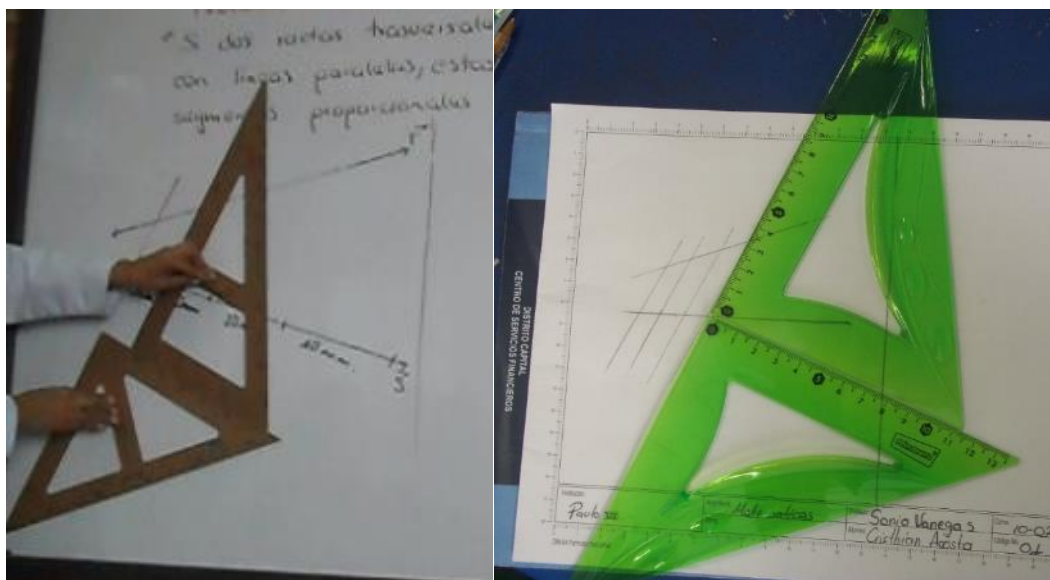


Figura 25 Posición de las escuadras presentada por la profesora y la de un estudiante

Para finalizar el episodio, la profesora solicita a los estudiantes que, haciendo el uso de la escuadra de la misma forma que lo hizo ella, tracen rectas paralelas a 10 mm, 20mm, 30mm y 40mm sobre una de las transversales construida inicialmente; pasando por los puestos de los estudiantes y verificando que la posición de las escuadras sea la adecuada.

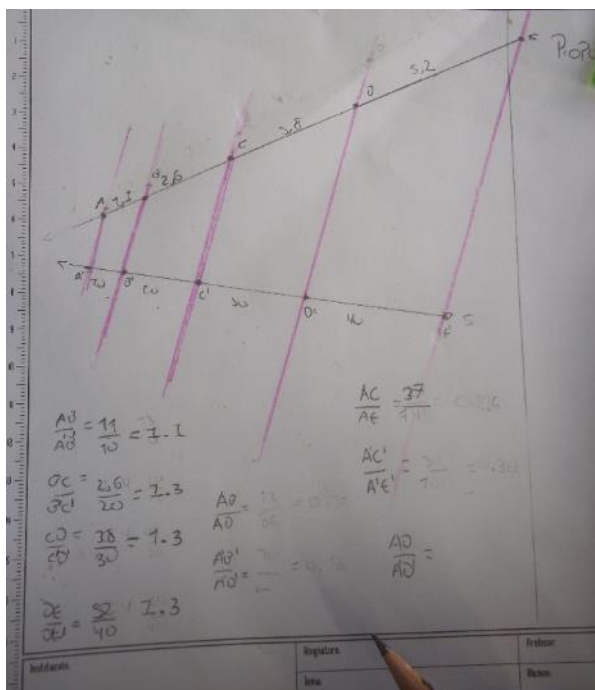


Figura 26 Construcción de líneas paralelas hecha por uno de los estudiantes

Este episodio pone de manifiesto la resolución de un ejemplo específico presentado en el tablero (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos), además del uso y el aprovechamiento de un recurso material como las escuadras de 45 y 60 grados (KMT, recursos y materiales virtuales), lo que evidencia una relación entre las categorías del KMT (estrategias, técnicas tareas y ejemplos recursos y materiales virtuales) y del KoT (procedimientos) en el proceso de construcción de rectas paralelas a una paralela dada. Además del uso del KoT y KMT, se considera que también se hace uso del KSM, pues el hecho de dedicar ese espacio de tiempo a explicar cómo construir rectas paralelas se observa una consciencia sobre la construcción del concepto a futuro, considerando la construcción de

las rectas paralelas como una primera etapa para comprender y aplicar correctamente el Teorema de Tales.

Episodio 7 [E2.2, U172-193] Comprobación de relaciones de proporcionalidad en la construcción

Dado que ya se construyeron rectas paralelas a una recta dada, en este episodio se busca que cada estudiante verifique el teorema de Tales por medio del estudio de las razones entre los diferentes segmentos de la construcción geométrica elaborada en el episodio 6.

Inicialmente se nombra cada punto de intersección entre las rectas paralelas y las rectas transversales, asociando cada letra con la de su homólogo (A, A' ; B, B' ; C, C' ; D, D' ; E, E') (KoT, procedimientos). Después, la profesora menciona el enunciado del teorema de Tales (KoT, propiedades) asociándolo a la construcción geométrica del tablero *“Entonces qué me dice el teorema de Tales, que los segmentos que quedaron sobre la línea serán proporcionales, por ejemplo, que AB es proporcional a $A'B'$ como la de BC es a $B'C'$, cuando decimos que son proporcionales es que tienen la misma razón”* [E2.2, U 173].

En esta ocasión se está asociando el teorema de Tales (KoT, propiedades) con el ejemplo presentado en el tablero KMT (estrategias, técnicas tareas y ejemplos), para el cual se tuvo que hacer una serie de procedimientos (KoT, procedimientos) y utilizar efectivamente el juego de escuadras (KMT, recursos y materiales virtuales); lo cual evidencia las relaciones existentes entre los diferentes subdominios de conocimiento especializado del profesor de matemáticas, que en este caso son necesarios para enseñar las propiedades de la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica.

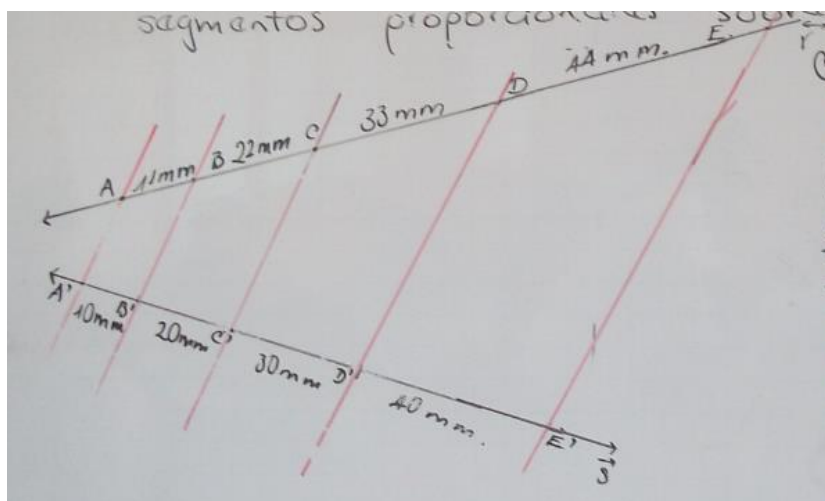


Figura 27 Representación gráfica del teorema de Tales presentado por la profesora.

Una vez la profesora enuncia el teorema de Tales y lo relaciona con los segmentos de la construcción del tablero, solicita a los estudiantes que midan la longitud de cada segmento sobre las rectas transversales de sus construcciones para verificar la razón entre cada segmento y sus opuestos, es decir $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ aclarando que la línea sobre los puntos es una forma de representar segmentos (KoT, sistemas de representación) [E2.2, U175-177]

175. P: Ahora ustedes me van a verificar la razón entre cada par de segmentos, es decir, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$. Tengan en cuenta que la línea de encima significa segmento.

176. P: me encuentran la razón entre $\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$, la de $\frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}}$, en mi caso al medir me dio que

177. P: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{11}{10}$

En el ejemplo presentado por la profesora se obtiene la relación $\frac{11}{10}$ y $\frac{22}{20}$, de tal forma que se da el espacio para que la profesora pueda recordar la definición de razón como relación entre dos segmentos, además de comentar que una razón también se puede expresar como número decimal (KoT, propiedades) [E2,2 U183], procedimiento que es hecho justamente para llegar a la definición de proporcionalidad [E2,2 U183-186].

183. P: La razón entre dos números también la puedo establecer como un número decimal, en este caso al dividir 11 entre 10 es 1,1 y 22 dividido en 20 también me da 1,1

184. *P: Entonces, ¿cómo son las razones en este caso?*
 185. *E: Son iguales*
 186. *P: Y si dos razones son iguales entonces se forma una proporción, validando así el teorema de Tales.*

En este caso, los estudiantes hacen las dos divisiones y obtienen el mismo cociente, situación que la profesora usa para establecer que estas dos razones efectivamente eran proporcionales, comprobando así el teorema de Tales.

Por medio de esta situación, también se puede observar cómo se hace uso del KSM, ya que se muestra una forma de validación del Teorema de Tales, usando como medio de la validación ejemplos. Además, es importante mencionar la aclaración que hace la profesora al referirse a que en las construcciones geométricas de los estudiantes es posible que las razones no estén exactamente iguales, aludiendo a un posible error de medición, con lo cual se anticipa al hecho de que los estudiantes piensen que la razón siempre es un número entero (KFLM, formas del aprendizaje del contenido matemático), además de tener en cuenta la medición en el contexto real como una limitación en la comprensión de la proporcionalidad (KFLM, dificultades de aprendizaje).

Una vez hace esta aclaración, la profesora pregunta por la relación de proporcionalidad entre $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{C'E'}}$, como una estrategia para que los estudiantes puedan verificar que todas las razones entre segmentos homólogos de la construcción son iguales sin importar que tengan diferentes longitudes (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos) [E2.2, U187-189]

187. *P: Puede que no les dé exacto, porque podemos cometer errores en la medición, pero el cociente nos debe dar aproximadamente igual.*
 188. *P: ¿será que yo puedo decir que el segmento AC es proporcional a A'C'?*
Vamos a mirar.
 189. *P: $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{C'E'}}$*

Al finalizar el episodio, un estudiante menciona que no está seguro si su construcción y sus razones están bien hechas, situación que es aprovechada por la profesora para presentar

otro tipo de ejemplo de razones proporcionales entre transversales cortadas por rectas paralelas (teorema de Tales). Al construir las razones entre segmentos homólogos, se obtuvo una razón 1,6 y la otra 1,65, situación que ya había sido prevista por la profesora pues anteriormente había asociado este tipo de inexactitudes en el proceso de medición [E2.2, U193] (KFLM, formas del aprendizaje del contenido matemático).

190. E: *no sé si la mía quedó bien hecha*

191. P: *Vamos a ver las medidas que tiene Erika en su hoja,*

192. E: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{16}{10} = 1,6$ $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{33}{20} = 1,65$

193. P: *En este caso no nos dio igual porque tal vez hubo un error de medición o al trazar las líneas, sin embargo, ese desfase es mínimo, entonces en este caso también tenemos una proporción. [E 2.2, U190-193]*

Episodio 8 [E2.3, U194-215] Construcción de segmentos homólogos

La tarea propuesta en este episodio es encontrar las razones entre los otros lados faltantes de la construcción, es decir, comprobar la proporcionalidad entre $\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$; $\frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}}$ y $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$; $\frac{\overline{CE}}{\overline{C'E'}}$ igualdad que efectivamente se cumple, comprobándose, una vez más, la veracidad del teorema de Tales para rectas transversales que son cortadas por varias paralelas.

Hasta el momento se ha comprobado la proporcionalidad entre las razones compuestas por los lados opuestos. En esta segunda parte de la clase, la profesora quiere establecer relaciones de proporcionalidad entre otros tipos de razones (KoT, propiedades), tal y como se puede evidenciar en la figura 28 “*De esta forma vamos a ver si este segmento pequeño es a este más largo como el pequeño de la recta inferior al más largo de la misma recta*” [E2.3, U201].

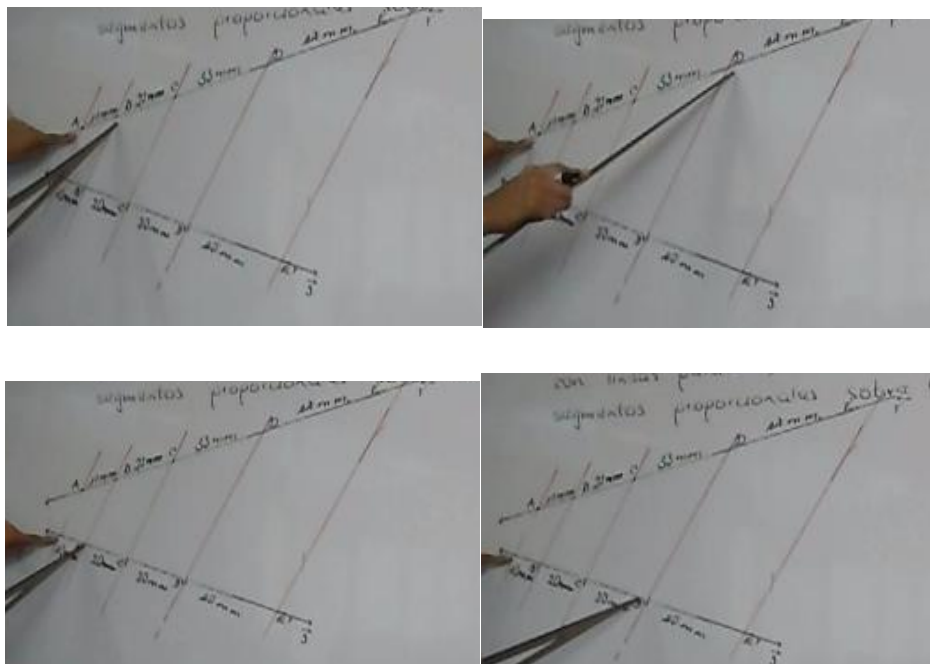


Figura 28 Establecimiento de las razones para comprobar su proporcionalidad

Tras esta tarea, la profesora busca ampliar el conocimiento de los estudiantes al establecer otras relaciones que pueden existir al comprobar la proporcionalidad entre dos razones de segmentos entre rectas transversales cortadas por rectas paralelas. En esta ocasión la profesora usa el anterior ejemplo para definir el concepto de segmento homólogo (KoT, definiciones) “el segmento homólogo AB será A'B' porque es el correspondiente sobre la otra línea, en este caso, $\frac{AB}{AD} = \frac{11}{66}$; $\frac{A'B'}{A'D'} = \frac{10}{60}$. Al dividir en los casos obtenemos 0,1 en los dos lados, entonces son proporcionales “[E2.3, U207].

Después de hacer esta comprobación de proporcionalidad entre estas dos razones y mencionar la definición de segmentos homólogos, la profesora pregunta cuál es el homólogo del segmento DE. Como una estrategia de verificación de que el concepto sí esté claro, pregunta que es respondida por un estudiante al dar un resultado numérico y no los puntos homólogos (D'E'), confirmando así que la definición del concepto de segmento homólogo no quedó totalmente clara (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos).

Para superar esta dificultad en la comprensión sobre segmentos homólogos como se evidencia en la figura 29, señala en el tablero el segmento DE para que los estudiantes puedan

observar el segmento de referencia, lo cual facilita la identificación del segmento homólogo D'E', mostrando que los gestos también pueden ser empleados para construir interpretaciones del concepto de segmento homólogo (KMT, recursos).

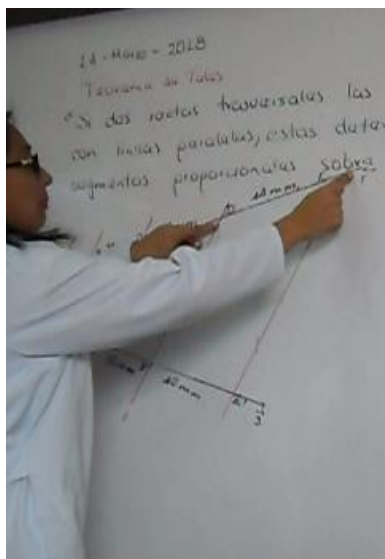


Figura 29 Ubicación del segmento de referencia

Episodio 9 [E2.4, U225-232] Búsqueda de dos pares de segmentos homólogos dado un segmento

La tarea propuesta en este último episodio de la segunda sesión se basa en buscar un par de segmentos de tal forma que sean proporcionales con un par de segmentos dados, es decir, encontrar otra razón igual a la dada para cumplir la proporcionalidad; lo cual deja claro que para verificar la proporcionalidad no se debe hacer el uso de la medición. [E2.4, U225-227]

225. P: Entonces, yo les doy un segmento y ustedes me encuentran dos pares de segmento que sean proporcionales sin necesidad de medirlos.

226. P: $\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{B'D'}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{C'E'}}$

227. P: Estamos hablando de dos segmentos sobre la primera recta, es decir que debemos comparar otros dos segmentos de la segunda recta, entonces, por favor, me completan las demás razones faltantes.

Con esta actividad, la profesora busca que los estudiantes pasen de un estado de geometría concreta que usa la medición y los casos específicos a un nivel superior, donde se deben establecer relaciones más amplias de acuerdo a propiedades como a segmentos homólogos (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos) *“Estamos hablando de dos segmentos sobre la primera recta, es decir que debemos comparar otros dos segmentos de la segunda recta, entonces, por favor, me completan las demás razones faltantes.”* [E2.4, U227]

Finalmente, como tarea fuera de clase, la profesora solicita a los estudiantes visitar el blog¹¹ de la clase que es elaborado por ella, en el cual muestra un vídeo donde puede observarse cómo el matemático Tales de Mileto estableció la altura de la pirámide de Keops; esta estrategia se convierte en una forma de mostrar a los estudiantes una situación de la vida real donde se puede usar la proporcionalidad (KoT, aplicaciones).

Sesión 3 – Teorema de Tales

En la tercera sesión, una vez la profesora ya había construido las nociones de conceptos como razón, proporcionalidad y el teorema de Tales entre rectas paralelas (*“Si dos transversales son cortadas por dos paralelas, los segmentos correspondientes son proporcionales entre sí”*), ahora busca hacer aplicaciones de estos conceptos en diferentes situaciones del contexto real, iniciando por la búsqueda de la longitud de un entrepaño cuyas repisas son paralelas, lo cual se puede asociar como un ejemplo de la aplicación del teorema de Tales para encontrar el valor de longitudes desconocidas.

Posteriormente se aborda la resolución de un problema en el cual se buscan dos longitudes de los entrepaños de una repisa a partir de cuatro rectas paralelas que cortan dos rectas transversales, para ello se usan diferentes estrategias que serán expuestas en los siguientes episodios. A continuación, en la tabla 15 se presenta una tabla donde se resumen los contenidos tratados en la sesión.

¹¹<https://svmatematicas.wordpress.com/grado-9/geometria/segmentos-proporcionales/slideshare-id45052020docsegmentosproporcionales-150223215648-conversion-gate02typed/>

Código	Contenido
Episodio 10 [E3.1, U 234-240]	Teorema de Tales para encontrar la altura de la pirámide de Keops
Episodio 11 [E3.2, U241-254]	Presentación del teorema de Tales entre dos rectas transversales y rectas paralelas
Episodio 12 [E3.3, U254-270]	Resolución de un segmento usando teorema de Tales entre tres rectas paralelas
Episodio 13 [E3.4, U271-293]	Resolución de dos segmentos usando teorema de Tales entre cuatro rectas paralelas

Tabla 15 Episodios de la sesión 3

Episodio 10 [E3.1, U 234-240] Teorema de Tales para encontrar la altura de la pirámide de Keops

Dado que la mayoría de los estudiantes no vieron el vídeo que había propuesto la profesora como tarea, al inicio de la clase se hace una presentación del teorema de Tales, recordando conceptos previos como razón y proporcionalidad entre razones (KoT, definiciones) “¿Qué es la razón de dos segmentos?, es cuando se comparan dos segmentos y vemos cuantas veces puede caber uno en el otro, recordemos: ¿Qué es el teorema de Tales?, dice que si dos transversales son cortadas por dos paralelas, los segmentos correspondientes son proporcionales entre sí.” [E3.1, U235,238], lo cual pone en evidencia que la profesora considera necesario que los estudiantes deban tener claro el concepto de razón y reconocer qué dice el teorema de Tales para poder hacer aplicaciones de dicho teorema en situaciones reales. Esto se podría identificar como un indicio del conocimiento de la secuenciación de los temas (KMLS, secuenciación con temas anteriores y posteriores), además de KSM, dado que muestra una consciencia de la construcción de un concepto a futuro.

Posteriormente la profesora recuerda que, por medio del teorema de Tales, se encontró la altura de la pirámide de Keops (KoT, aplicaciones); especifica que Tales necesitó saber a qué hora el sol estaba a 45 grados. Muestra así su conocimiento sobre las propiedades de los triángulos pues, dado que la situación hace referencia a un triángulo rectángulo, la profesora sabe que para que la sombra de la pirámide sea igual a la altura (igualdad de los dos catetos del triángulo) y si ya se tiene un ángulo recto, es necesario que cada uno de los ángulos restantes sean la mitad de uno recto para así completar los dos rectos; además de saber que los lados iguales subtienden a ángulos iguales (KoT, propiedades y fundamentos).

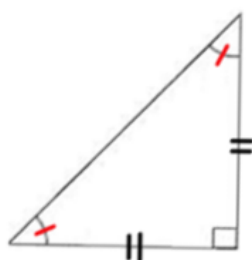


Figura 30 Representación elaborada por la profesora donde se presentan las propiedades de un triángulo rectángulo isósceles, relacionándola con la escuadra de 45 grados

En la parte final de este episodio, la idea que quiere presentar la profesora pierde fuerza en la explicación geométrico-numérica, pero gana en otros aspectos, pues enriquece con otros saberes en el momento en el que un estudiante pregunta “¿a qué hora del día el sol está a 45 grados?”, [E3.1, U239], pues la profesora apela a argumentos sobre astronomía, dejando de lado las propiedades de los triángulos rectángulos. Sin embargo, la profesora es consciente de que este tipo de preguntas puede potencializar la comprensión de las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos rectángulos, pues pide como tarea consultar, en el mes de marzo (momento en el cual se grabó la clase), la hora a la que el sol está a 45 grados (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos).

La intervención del estudiante se pudo haber tomado como una oportunidad para presentar propiedades y características de los ángulos con relación a los lados de los triángulos, dado que Colombia, país donde se grabaron las clases, está ubicado en la línea del Ecuador, lo cual hace que la variación entre horas de luz y oscuridad en diferentes momentos

del año sean mínimas, casi imperceptibles, amaneciendo alrededor de las 6 de la mañana y anocheciendo a las 18 horas.

En la figura 31 se presenta un esquema que pudo haber sido una representación útil para resolver la pregunta del estudiante y así comprender mejor por qué para saber la altura de la pirámide era necesario medir su sombra cuando el sol estuviera a 45 grados.

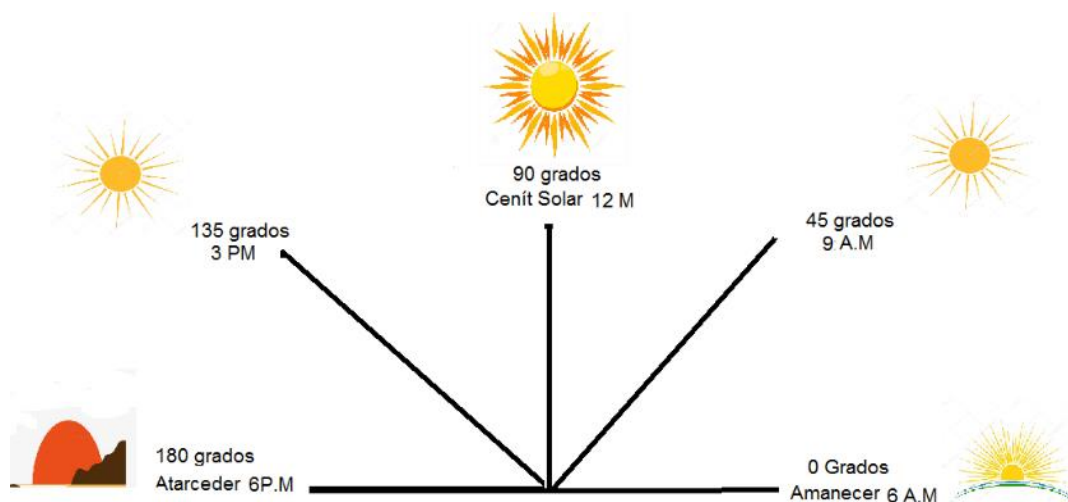


Figura 31 Representación de las diferentes posiciones del sol con respecto a la hora en Colombia

Episodio 11 [E3.2, U241-254] Presentación del teorema de Tales entre dos rectas transversales y rectas paralelas

En este episodio, inicialmente la profesora deja en claro que el propósito de la situación que va a presentar es la contextualización del teorema de Tales, para lo que construye dos rectas R y S. Dado que el propósito del ejercicio no es la construcción de las rectas paralelas con escuadras, la profesora solicita que tracen líneas paralelas usando la cuadrícula de las hojas del cuaderno de cada estudiante, muestra así un conocimiento sobre las características de cada tipo de material (folio en blanco, hoja cuadrículada), las cuales tienen un propósito de acuerdo a la temática que se desea estudiar. En la clase anterior, el propósito era construir con regla y compas líneas paralelas, para lo cual se hizo necesario usar papel en blanco, en esta ocasión, como el propósito era dar un contexto real y aplicar el

teorema de Tales, se usó el papel cuadriculado como un recurso que facilita la comprensión de los datos presentados en el problema a resolver (Indicio, KMT, recursos).

Después de trazar las rectas paralelas en el papel cuadriculado, la profesora empieza a nombrar las rectas transversales (R,S) y las paralelas (M,N,O), también nombra los segmentos contruidos a partir del paso de las rectas paralelas sobre las transversales (AB, BC y AC) en la recta R y $A'B'$, $B'C'$ y $A'C'$ en la recta S (KoT, procedimientos). Una vez ya han sido nombrados esos puntos, la profesora solicita establecer dos razones para comprobar que dicha construcción es proporcional, para esto, como estrategia, usa el señalamiento de los segmentos a comparar, en este caso, inicialmente, la profesora establece la razón entre los segmentos AB, $A'B'$; BC, $B'C'$ y AC, $A'C'$ respectivamente, aludiendo a que al comparar estas razones estas serán iguales y por lo tanto serán proporcionales (KoT, propiedades definiciones).

Cuando la profesora señala los segmentos a comparar como lo muestra la figura 32 hace el uso de una estrategia para que los estudiantes puedan asociarlos como segmentos homólogos y así establecer la proporcionalidad, mostrando que en este caso los gestos también pueden ser utilizados para construir interpretaciones del concepto de proporcionalidad (KMT, recursos).

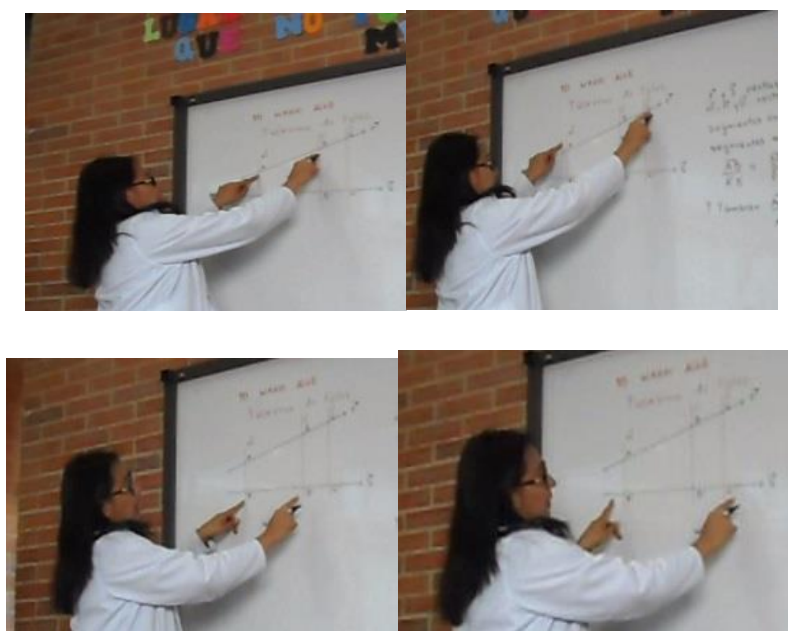


Figura 32 Establecimiento de segmentos homólogos.

Episodio 12 [E3.3, U254-270] Resolución de un segmento usando teorema de Tales entre tres rectas paralelas

En este episodio la profesora busca resolver un problema en el cual se indaga por una longitud desconocida entre rectas paralelas, asociándola a la búsqueda del tamaño de uno entrepaño entre unas repisas paralelas. Para esto, inicialmente, igual que en el episodio anterior, nombra los puntos de intersección entre las rectas transversales y las paralelas, las cuales representan los entrepaños y las repisas; este nombramiento se hace con el propósito de establecer los segmentos a comparar y sus homólogos (KoT, procedimientos).

Posteriormente hace una pregunta orientadora que puede aportar en la creación en las estrategias de resolución del problema por parte de los estudiantes “¿Qué proporción puedo establecer con la representación que acabamos de hacer?” [E3.3, U259]

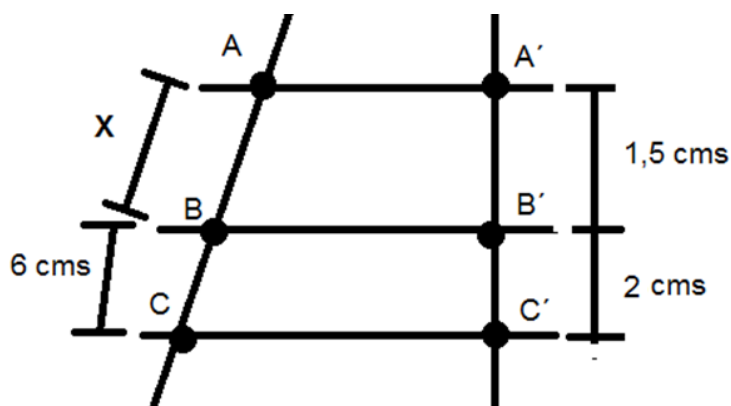


Figura 33 Representación del problema propuesto por la profesora

Seguidamente a su pregunta, la profesora establece una relación entre el segmento AB con A'B' y CD con C'D', para posteriormente reemplazar con los datos del problema presentado (KoT, procedimientos), y, finalmente, despejar la incógnita. En este proceso la profesora enfatiza el uso de una misma unidad estableciendo relaciones entre longitudes al construir las razones (KoT, propiedades) “Cuando vayamos a resolver un ejemplo debemos tener en cuenta que todos los segmentos queden en la misma unidad, ahora tenemos una proposición con una incógnita” [E3.3., U261]

Para finalizar el episodio, la profesora reemplaza la proporción con los datos del problema obteniendo la igualdad $\frac{x}{6} = \frac{1,5}{2}$, donde el valor de x es despejado por medio de las propiedades de la igualdad (KoT, procedimientos y propiedades) [E3.3, U261]

261. *P: Ahora tenemos una proposición con una incógnita ¿Cómo se resuelven?,*
262. *E: Despejando la incógnita.*
263. *P: ¿Cómo despejo?*
264. *E: Multiplicando extremos por extremos, o sea, 2 por x y medios por medios, o sea, 6 por 1,5*
265. *P: Entonces $2x$ es igual a 9*
266. *P: ¿Ahora como despejo la X ?*
267. *P: Al dividir por 2 a ambos lados tenemos que la X es igual a 9 dividido entre 2, o sea, que X es igual a 4,5 [E3.3., U261-267]*

Las longitudes dadas en el problema muestran de fondo una estrategia de la profesora, pues uno de los segmentos no tiene un valor entero; esta característica hace que los estudiantes tengan una comprensión más amplia de la proporcionalidad, dado que esta se puede aplicar a cualquier tipo de longitud sin diferenciar si esta es entera o no (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos)

Episodio 13 [E3.4, U271-293] Resolución de dos segmentos usando teorema de Tales entre cuatro rectas paralelas

En el último episodio de esta sesión se busca resolver un problema de proporcionalidad geométrica en el cual hay tres entrepaños y cuatro líneas paralelas, para lo cual se usa el decímetro como unidad de medida. En el problema hay dos incógnitas, pues los puntos de la construcción no tienen sus homólogos fácilmente identificables por medio del uso del índice primo (KoT, aplicaciones).

Con este problema la profesora busca que el estudiante comprenda la situación desde una perspectiva más amplia de la proporcionalidad, usando una unidad de medida diferente (decímetro), pues ya se habían usado milímetros y centímetros. Además, otra característica diferente de este problema, con respecto a los anteriores, es que este tiene dos incógnitas, las cuales están asociadas con el contexto real (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos). A

continuación, en la figura 34, se muestra la representación elaborada por la profesora (KoT, sistemas de representación).

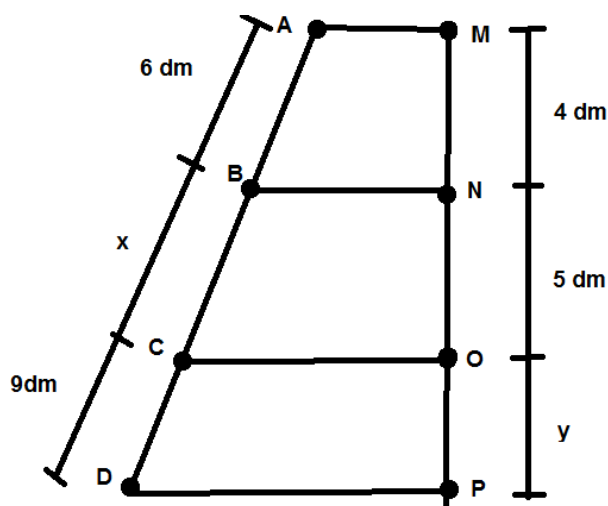


Figura 34 Representación gráfica del problema elaborado por la profesora

Después de la representación gráfica del problema, la profesora establece la comparación de segmentos a partir de los segmentos homólogos de la representación, es decir, menciona que AB es a BC como MN es a NO, además de que BC es a CD como NO a OP (KoT, propiedades). Posteriormente, la profesora reemplaza los datos en el problema en las razones de los segmentos homólogos; su estrategia radica en, primero, despejar el valor de la incógnita x llegando a la igualdad $\frac{6}{x} = \frac{4}{5}$, para despejarla usa el principio de medios y extremos al obtener $4x = 30$, es decir $x = 7,5 \text{ dm}$; mostrando así a los estudiantes que el valor de la primera incógnita x es $7,5 \text{ dm}$ (KoT, procedimientos)

Una vez se tiene el valor de la primera incógnita x , se procede a despejar la segunda incógnita y por medio del reemplazo de los datos en las razones construidas inicialmente; se pasa de la igualdad $\frac{x}{9} = \frac{5}{y}$ a la igualdad $\frac{7,5}{9} = \frac{5}{y}$. Para despejar el valor de la incógnita y como se puede evidenciar en la figura 35 la profesora usa los principios de medios y extremos para obtener la igualdad $7.5y = 45$, concluyendo que $y = 6 \text{ dm}$ (KoT, procedimientos).

Handwritten mathematical work for Figure 35:

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{x}{9} &= \frac{5}{y} \\ \frac{7,5}{9} &= \frac{5}{y} \\ 7,5 \cdot y &= 5 \cdot 9 \\ \frac{7,5 y}{7,5} &= \frac{45}{7,5} \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Figura 35 Primera estrategia de solución presentada por la profesora

Un elemento significativo de este episodio es cuando la profesora comenta que se puede establecer una segunda forma de resolver el problema, lo cual implica una relación del segmento AB y CD, y de MN con OP, donde, al reemplazar los valores numéricos, se tendrá la relación 6 es a 9 como 4 es a la incógnita y. De esta forma se evidencia que existen diferentes estrategias de resolución del problema, con lo que amplía la comprensión de la proporcionalidad (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos) “Vamos a ver si podríamos usar otra proporción, entonces sería AB es a CD como MN es a OP, al reemplazar los valores numéricos sería 6 es a 9 como 4 es a y, me debe dar exactamente lo mismo” [E3.4 U 284]

Handwritten mathematical work for Figure 36:

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \frac{AB}{CD} &= \frac{MN}{OP} \\ \frac{6}{9} &= \frac{4}{y} \\ 6y &= 4 \cdot 9 \\ \frac{6y}{6} &= \frac{36}{6} \\ y &= 6 \end{aligned}$$

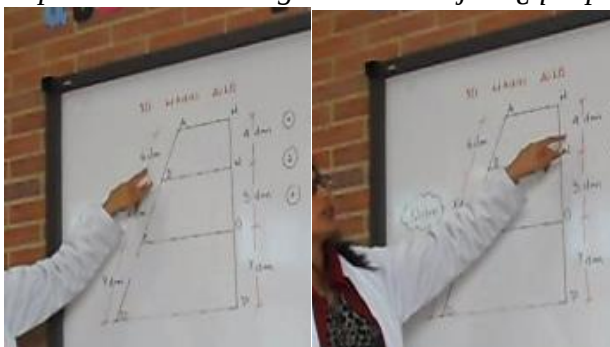
Figura 36 Segunda estrategia presentada por la profesora

Una vez la profesora presenta estas diferentes formas de reemplazar y despejar los valores para encontrar las dos longitudes desconocidas, un estudiante pregunta si siempre es necesario colocar las razones como letras para después reemplazarlas; pregunta a la cual la profesora responde que no es necesario, pues lo realmente necesario es reconocer los segmentos a comparar, es decir, los segmentos homólogos. Con lo cual muestra una comprensión de que uno de los casos en los que se establece la proporcionalidad entre razones es cuando se tienen segmentos homólogos entre rectas paralelas (KoT, propiedades).

Para dejar claro el anterior argumento, la profesora hace uso de un ejemplo como una estrategia más específica (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos) [E3.3 U288-293]

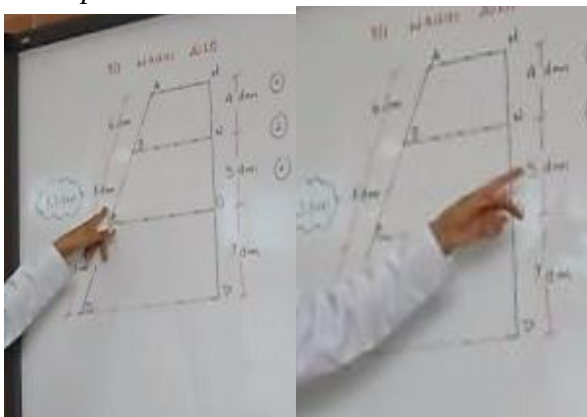
288. E: ¿es necesario siempre inicialmente colocar las razones con las letras y después reemplazarlas?

289. P: No es necesario, lo que debemos tener en cuenta es reconocer cuales son los segmento que se van a comparar, por ejemplo, en este caso, 6 es a X como 4 es a 5, todo depende de cuales segmentos se elijan. ¿qué pasa si yo tomo 6 es a 4?



290.

291. Debo poner como X es a 5



292.

293. De esta forma sabemos que se pueden establecer las proporciones en diferente orden, pero, ojo, los segmentos tienen que ser correspondientes.

Para finalizar su explicación, la profesora menciona que este tipo de problemas (de búsqueda de longitudes entre transversales y paralelas) pueden ser resueltos estableciendo las razones de diferentes formas, siempre y cuando los segmentos sean correspondientes y homólogos, mostrando así un conocimiento matemático del tema asociado al problema (KoT, propiedades) [E3.3 U293]

Sesión 4 – Semejanza de triángulos

En esta última sesión, la profesora se aproxima a situaciones donde es necesario usar principios de proporcionalidad para encontrar los lados de triángulos semejantes. Para esto se hace el uso de un vídeo¹² donde se muestra la estrategia usada por Tales de Mileto para encontrar la altura de la pirámide de Keops en Egipto, del cual surgen los conceptos de semejanza de triángulos a través de la comparación de las bases y sus alturas que representan su sombra y de altura de la pirámide respectivamente.

Para presentar el concepto de semejanza de triángulos la profesora muestra los criterios para que un triángulo sea semejante a otro (KoT, propiedades). Estos criterios son usados y comprobados en un problema del contexto real, buscando conocer la altura de un árbol usando su sombra y la altura de una vara y su sombra.

Posteriormente presenta otro problema, en el cual no se usa un contexto real, en este se debe encontrar la longitud de un triángulo usando los lados de otro triángulo, teniéndose que uno de los lados son rectas paralelas. Este problema resalta por la explicitación que hace la profesora con respecto a las condiciones necesarias para que dos triángulos sean considerados semejantes (KoT, propiedades).

En el tercer ejercicio se resuelve otro problema de búsqueda de un lado del triángulo haciendo un cambio de posición de la figura y haciendo explícitas las propiedades de la igualdad usadas para el despeje de una incógnita (KoT, propiedades). Posteriormente, la profesora presenta otro ejercicio de búsqueda del lado desconocido de un triángulo, cambiando una vez más la posición y el tamaño de los triángulos, para lo cual hace un análisis de los ángulos de los triángulos y establece así que dos triángulos semejantes (KoT, propiedades).

Finalmente, la profesora propone cuatro ejercicios a resolver, en los cuales los estudiantes deben utilizar los procedimientos y las propiedades mostradas en los anteriores ejemplos. Por motivos de tiempo solo logra resolver dos de los cuatro problemas, dejando

¹² <https://www.youtube.com/watch?v=I5mUIKf14cg>

los otros dos como tarea. Al resolver el primer problema se hace uso del teorema de Tales, de forma directa, para encontrar la altura de un edificio. En el segundo problema se encuentran dos lados de dos triángulos semejantes que comparten un ángulo y tienen dos ángulos correspondientes iguales por estar entre paralelas. A continuación, se presentarán los episodios seleccionados en esta sesión.

Código	Contenido
Episodio 14 [E4.1, U295 -308]	Criterios de semejanza de triángulos
Episodio 15 [E4.2, U309-318]	Aplicación de los criterios de semejanza en un contexto real
Episodio 16 [E4.3, U319-328-]	Resolución de triángulos semejantes en contexto matemático
Episodio 17 [E4.4, U329-339]	Resolución de triángulos semejantes en contexto matemático, explicitando el despeje de incógnitas
Episodio 18 [E4.4, U340-357]	Resolución de triángulos semejantes por medio de sus ángulos
Episodio 19 [E4.4, U359-371]	Aplicación del teorema de Tales en la búsqueda de la altura de un edificio
Episodio 20 [E4.4, U372-382]	Resolución de triángulos semejantes con dos incógnitas en contexto matemático

Tabla 16 Episodios de la sesión 4

Episodio 14 [E4.1, U295 -308] Criterios de semejanza de triángulos

La profesora proyecta un vídeo en el que se presenta el procedimiento que hizo Tales de Mileto para encontrar la altura de la pirámide de Keops. Aunque este procedimiento se había comentado y expuesto en las clases anteriores, parece que la profesora considera que, al usar recursos como los vídeos que expresan en otras palabras y con otras representaciones,

se mejora la comprensión de la aplicación del teorema de Tales para encontrar la longitud de una recta entre rectas paralelas (KMT, recursos).

Una vez se proyecta el vídeo, la profesora procede a representar gráficamente el problema real (encontrar la altura de la pirámide), para ello usa procedimientos y propiedades matemáticas, expresando los ángulos que son congruentes y los argumentos por los cuales estos son congruentes (KoT, registros de representación, propiedades) “*P: Como las dos alturas de los triángulos rectángulos están sobre rectas paralelas, entonces el triángulo grande es semejante al pequeño, vamos a ponerle nombre a los puntos A B y C y A' B' y C' . P: Sabemos que BC es paralela a $B'C'$, entonces el triángulo ABC es semejante a $A' B' C'$ ” [E4.1 U295-297].*

Después de presentar el nombramiento de los puntos de los triángulos y de señalar los lados paralelos, la profesora, como una estrategia para recordar la definición de proporcionalidad trabajada en las clases pasadas, pregunta qué implica la semejanza de los triángulos, a lo cual un estudiante establece la relación entre la semejanza de los triángulos y el planteamiento de una misma razón entre los lados homólogos de los triángulos, es decir, la proporcionalidad (KMT, estrategias, técnicas y ejemplos). [E4.1 U298-300]

298. “*P: ¿Los triángulos cuándo son semejantes?, E: Cuando al dividir los lados nos da el mismo número.*

299. *P: ¿Cómo llamamos cuando nos da la misma razón?, E: Proporcionales,*

300. *P: En este caso veremos que tiene unos elementos iguales entre sí, los ángulos.”*

La estrategia de preguntar acerca de las condiciones para que un triángulo sea semejante a otro tiene como propósito relacionar los conceptos de semejanza de los triángulos con la proporcionalidad entre sus lados al tener la misma razón. Se muestra de esta forma un conocimiento entre la relación de estos dos conceptos (KoT, propiedades), además del conocimiento respecto de preguntas orientadoras que llevan a la identificación de estas relaciones entre la semejanza y la proporcionalidad (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos).

Posteriormente, la profesora analiza los criterios de semejanza en la resolución del problema presentado en el vídeo, en el cual se mostraba la estrategia usada por Tales de Mileto para encontrar la altura de la pirámide de Keops. Para esto, inicialmente establece las relaciones de igualdad entre los diferentes ángulos por medio de la representación gráfica tal y como lo muestra la figura 37; la profesora analiza la representación mencionando que el ángulo A es un ángulo en común, los ángulos B, B' y C, C' son iguales entre sí porque son correspondientes entre paralelas (KoT, propiedades), por lo cual cumple la primera condición de semejanza.

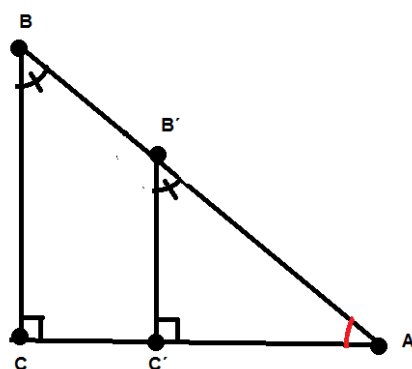


Figura 37 Representación usada por la profesora para resolver el problema.

Para verificar la proporcionalidad de los lados, como la segunda condición para establecer la semejanza entre los triángulos, se menciona que CB debe ser a C'B' como CA es a C'A', haciendo referencia a la definición de proporcionalidad (KoT, definiciones). Para clarificar esta definición, se usa la ejemplificación como una estrategia para mostrar el significado de la proporcionalidad en la resolución del problema (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos) [E4.1 U.307].

307. vamos a suponer que son proporcionales en el doble, si la base del triángulo pequeño es 2, entonces, la del triángulo mayor será 4, y si la altura del triángulo pequeño es 3, la del triángulo grande será 6; si la hipotenusa del triángulo pequeño mide 3,5, la hipotenusa del triángulo mayor medirá el doble, es decir 7

El episodio finaliza cuando la profesora concluye mencionando que, por medio del problema, se había podido identificar una de las aplicaciones del teorema de Tales,

refiriéndose a encontrar la medida de objetos que se encuentran a determinadas distancias (KoT, aplicaciones), develando así la intención que tenía la profesora al resolver este problema.

En este episodio se hace uso de representaciones gráficas asociadas a triángulos semejantes, se considera que cuando se hace uso de triángulos semejantes y se pregunta luego qué información puede extraerse de esa propiedad, la profesora está mostrando conocimiento sobre el KSM, pues el conocimiento sobre triángulos semejantes será necesario a futuro para asociar la proporcionalidad en contextos geométricos por medio de la semejanza.

Episodio 15 [E4.2, U309-318] Aplicación de los criterios de semejanza en un contexto real

En este episodio se busca la altura de un árbol, usando los procedimientos y las propiedades de los criterios de semejanza de dos triángulos rectángulos, para lo cual se hace uso de un contexto real para aplicar los conocimientos presentados en el episodio 14 (criterios de semejanza de triángulos). La profesora hace inicialmente una representación gráfica del problema como una estrategia que puede facilitar la comprensión de los datos dados y los datos faltantes (KoT, Registros de representación).

Posteriormente, la profesora pide a los estudiantes establecer las razones de proporcionalidad. Dado que la primera razón fue la comparación de la base mayor con la base menor ($\frac{12}{4,5}$), la segunda razón debería ser la establecida por la altura mayor con la altura menor ($\frac{x}{1,5}$), sin embargo, un estudiante comenta que la otra razón debe ser la altura menor sobre la altura mayor ($\frac{1,5}{x}$), quedando patente así que los estudiantes aún tienen dificultades en el establecimiento de las razones a comparar.

Ante esta respuesta errada la profesora usa como estrategia preguntar si esta respuesta es verdadera, recordando que la razón que se estableció inicialmente fue de la base mayor a la base menor, con el propósito de que los estudiantes establezcan la otra razón como la altura

mayor (desconocida) a la altura menor ($\frac{x}{1,5}$) (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos)

[E4.2, U311-314]

311. P: En este caso nos preguntan cuánto mide el árbol

312. P: Iniciemos entonces a relacionar entonces 12 es a 4,5 primero estamos tomando la base del triángulo grande y comparándola con la base del pequeño, ahora, esto es igual como a

313. E: ¿1,5 es a X?

314. P: ¿seguros?, recuerden que inicialmente se tomó la base mayor, entonces sería como X es a 1,5.

Después de hacer esta aclaración, la profesora procede a escribir la igualdad entre razones para comprobar que estas sean proporcionales, y después de esto buscar el valor de la incógnita (KoT, procedimientos) por medio del uso de las propiedades de la igualdad (KoT, propiedades), posteriormente cierra este episodio mencionando que este tipo de criterios de semejanza de triángulos se emplea para encontrar los lados de los triángulos, haciendo referencia una de las aplicaciones del teorema de Tales entre triángulos semejantes (KoT, aplicaciones). [E4.2 U314-318]

314. $\frac{12}{4,5} = \frac{x}{1,5}$

315. $12 \cdot 1,5 = 4,5 \cdot x$

316. $\frac{18}{4,5} = \frac{4,5 \cdot x}{4,5}$

317. $4 = x$

318. Entonces estamos viendo que los triángulos semejantes se usan para saber unos lados teniendo otros.

Por medio de esta situación contextualizada en el mundo real se pueden determinar varios propósitos de la profesora: por un lado, en este problema se usan longitudes no enteras, lo cual revela que las relaciones de proporcionalidad se pueden aplicar a cualquier tipo de longitudes, no únicamente a longitudes enteras (KoT, propiedades); y, por otro lado, se puede establecer la importancia del manejo de los sistemas de representación, en este caso, la representación gráfica del problema como una forma de organizar y establecer relaciones entre la información dada (KoT, registros de representación).

Episodio 16 [E4.3, U319-328-] Resolución de triángulos semejantes en contexto matemático

En este episodio se busca un segmento desconocido de un triángulo construido a partir de la intersección de dos rectas transversales y dos paralelas; en este caso, no se hace uso de un contexto real para generar otros significados en los estudiantes. Una vez la profesora hace la representación gráfica del problema a resolver como lo muestra la figura 38, se empieza a analizar las relaciones entre los lados de los dos triángulos (triángulo ABC y triángulo ADE). Para esto, inicialmente comenta que DE es paralela a BC, característica que hace que las líneas transversales (AB y AC) estén entre líneas paralelas, además de ser condición necesaria para aplicar los principios de la proporcionalidad.

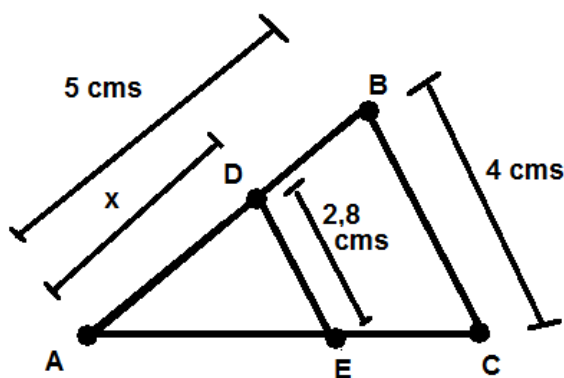


Figura 38 Representación elaborada por la profesora

Una vez la profesora comenta que la situación cumple las condiciones para establecer relaciones de proporcionalidad, construye una relación entre la semejanza de triángulos y la proporcionalidad de los lados (KoT, propiedades), para posteriormente seleccionar los lados a comparar y sus respectivas razones ($\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$) y efectuar el despeje de la incógnita x. Para esto reemplaza los datos del problema en la razón construida anteriormente llegando a la igualdad $\frac{4}{2,8} = \frac{5}{x}$, donde por medio de las propiedades de la igualdad se despeja el valor de la incógnita x, llegando finalmente a que el valor de la incógnita es 3,5 cms (KoT, procedimientos)

Episodio 17 [E4.4, U329-339] Resolución de triángulos semejantes en contexto matemático, explicitando el despeje de incógnitas

En este episodio la profesora presenta los datos a considerar del problema, resaltando sus características y propiedades. En este caso, la existencia de dos rectas paralelas entre dos rectas transversales, lo cual explicita una posición que la profesora llama “posición de Tales” (KoT, propiedades), además de mencionar qué se está solicitando en el problema (longitud del lado DE del triángulo ADE). [E4.4, U329-331]

329. *Tenemos 2 triángulos en posición de Tales, porque hay dos líneas paralelas, además, sabemos que las rectas DE y BC son paralelas entre sí, nos están preguntando por la longitud del segmento DE.*

330. *Inicialmente debemos establecer las razones entre los segmentos respectivos, es decir*

331.
$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

Después de hacer la representación gráfica del problema, la cual se puede observar en la figura 39 como una estrategia de establecimiento de las relaciones entre los lados de dos triángulos compuestos por dos rectas transversales y por dos rectas paralelas, la profesora elabora la proporción por medio de la comparación del lado menor de un triángulo con su lado mayor y la base menor del triángulo con la base mayor, llegando a la expresión $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ para, posteriormente, reemplazar los datos existentes y tener la igualdad $\frac{8}{12} = \frac{y}{5}$, pues en este caso se desconoce la base del triángulo más pequeño (KoT, procedimientos).

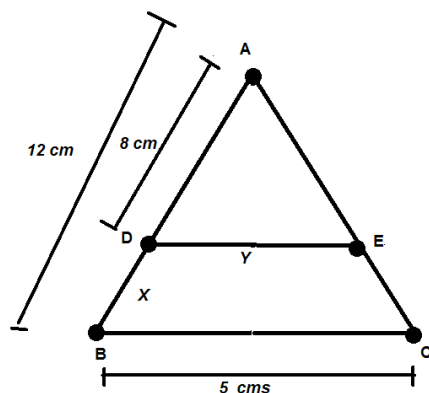


Figura 39 Representación gráfica presentada por la profesora

Una vez se tiene la proporción, se hace uso de las propiedades de la igualdad para despejar el valor de la variable y , multiplicando medios y extremos y pasando por “la regla de la balanza” y el “inverso”, para lo cual se hace referencia a la eliminación del número 12 que está en la igualdad $8 \cdot 5 = 12 \cdot y$ (KoT, propiedades). Para concluir, se señala que la incógnita es igual al cociente de 40 entre 12, es decir 3,3 cms.

En este problema, a diferencia del problema del episodio 16, la profesora hace un cambio de posición de los triángulos y se pregunta un lado diferente del triángulo, pues en este caso se pregunta por la base de uno de los triángulos a diferencia del anterior en el cual se preguntaba, por un lado.

Este tipo de cambios propuestos por la profesora hace que al variar los datos el estudiante pueda comprender que el teorema de Tales se puede aplicar a cualquiera tipo de triángulos, siempre y cuando estén cortados por dos rectas paralelas, sin importar sus longitudes, tamaños, posiciones o el lado desconocido (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos).

Episodio 18 [E4.5, U340-357] Resolución de triángulos semejantes por medio de sus ángulos

Este episodio comienza con la pregunta que hace un estudiante que quiere indagar si la posición de los triángulos semejantes siempre debe ser la misma, para responder a esta inquietud, la profesora usa un ejemplo para responder al estudiante con lo que incentiva a que él mismo pueda establecer una respuesta a la pregunta (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos).

En el ejemplo presentado por la profesora se muestran dos triángulos opuestos escalenos acutángulos unidos por uno de sus vértices, como lo muestra la figura 30 en la cual se evidencia la representación gráfica hecha por la profesora en el tablero.

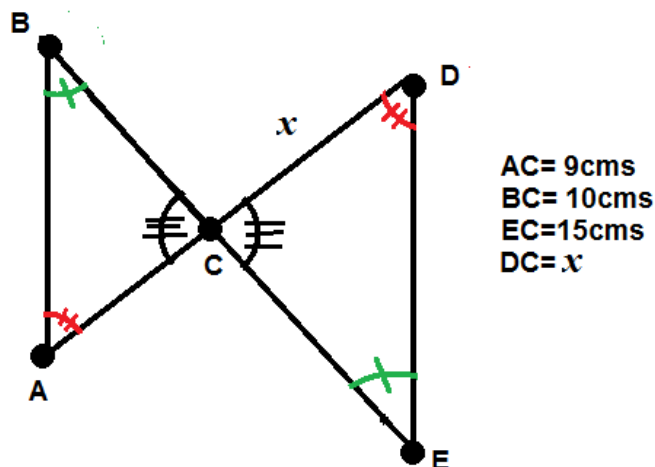


Figura 40 Representación gráfica presentada por la profesora

Una vez hace la construcción en el tablero, la profesora menciona que los segmentos AB y DE son paralelos, que se comprobará y que, aunque la posición de los triángulos ABC y CDE es diferente, los triángulos seguirán siendo semejantes. Para esto menciona diferentes propiedades, estableciendo que se cumple la congruencia de ángulos entre estos triángulos (KoT, propiedades). [E4.5. U344]

344. *Iniciemos a analizar los ángulos, los ángulos DCE y BCA son iguales porque son opuestos entre el vértice, ahora el ángulo CDE y CAB son iguales porque son ángulos entre paralelas, esto nos lleva a concluir que el tercer ángulo también debe ser igual con su respectivo en el otro triángulo, en este caso, como son semejantes, esto quiere decir que sus lados son proporcionales*

Una vez establecido el cumplimiento de la congruencia de ángulos correspondientes (KoT, procedimientos), la profesora procede a preguntar qué lados se deben relacionar para establecer las razones, y así poder despejar el segmento desconocido DC usando el teorema de Tales; aclara que se debe tener en cuenta que para poder resolver el problema la igualdad debe tener una única incógnita (KoT, procedimientos).

345. *P: ¿Ahora si los lados son proporcionales, qué lado comparo con cuál? ¿cómo establecer la proporción?*

346. *E: ¿AB?*

347. *P: pilas, porque en este caso primero desconocemos el valor de AB y en caso que lo eligiéramos tendríamos que elegir DE, lado que también desconocemos, entonces mejor tomemos AC es a CD [E4.5 U345-347]*

Al tomar la razón de los segmentos AC sobre CD, los estudiantes proponen la razón BC sobre CE, con lo cual evidencian la comprensión sobre segmentos correspondientes entre los dos triángulos; ante esta respuesta, la profesora complementa el procedimiento para establecer los lados correspondientes (KoT, procedimientos).

349. P: ...Debemos fijarnos en cuales son los ángulos que son iguales y así determinar cuáles son los lados correspondientes, en este caso, el ángulo D es igual al ángulo A, entonces, los ángulos correspondientes deben ser AC y CD. [E4.4 U349]

Una vez establecidas estas razones, la profesora reemplaza los valores para obtener la igualdad $\frac{9}{x} = \frac{10}{15}$, en la cual se usa el principio de proporcionalidad para llegar a la igualdad $9 \cdot 15 = 10 \cdot x$ para, posteriormente, llegar por medio de las propiedades de la igualdad a que $x=13,5$ (KoT, procedimientos y propiedades). Lo cual demuestra que los principios de la proporcionalidad se pueden aplicar para cualquier tipo de triángulos cortados por dos líneas paralelas (KoT, propiedades).

En este episodio se puede apreciar que la profesora quiso responder la pregunta que hace un estudiante por medio de un ejemplo, de tal forma que el estudiante pueda establecer sus propias inferencias y conclusiones; al respecto de la situación preguntada (aplicación del teorema de Tales para triángulos entre paralelas en diferentes posiciones) (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos).

Episodio 19 [E4.6, U359-371] Aplicación del teorema de Tales en la búsqueda de la altura de un edificio

En este episodio se resuelve un problema relacionado con la búsqueda de la altura de un edificio (KoT, aplicaciones) por medio de las relaciones de proporcionalidad entre los lados de dos triángulos entre rectas paralelas. En este problema se incluye una nueva variable, pues se sugiere cambiar a otra unidad de medida de longitud (de metros a centímetros), haciendo énfasis en que para establecer las razones entre los lados es necesario que estén en la misma unidad de medida, como una característica que deben tener el resultado del problema.

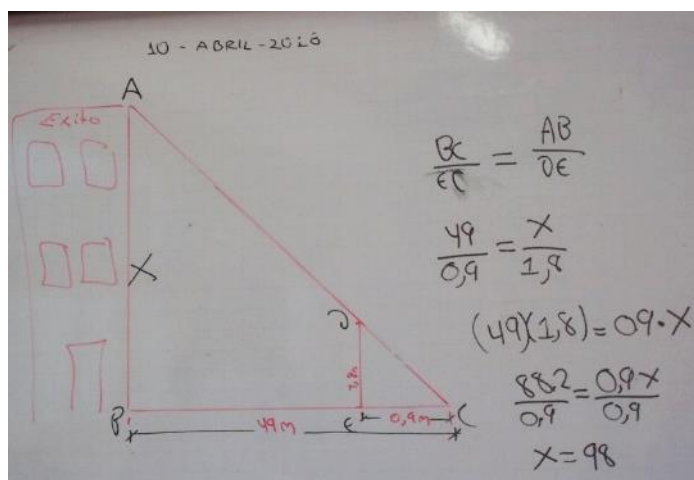


Figura 41 Representación gráfica propuesta por uno de los estudiantes para resolver el problema

En la resolución de este problema se hace explícito que la necesidad hacer el uso de representaciones gráficas para identificar las informaciones dadas y las incógnitas (KoT, registro de representaciones), además de comentar que una vez se tenga la representación gráfica del problema, es necesario establecer las proporciones de los lados correspondientes (KoT, procedimientos). Se explicita que es necesario hacer una lectura detenida de la información dada para establecer una relación entre los datos y el rol de la proporcionalidad para resolver el problema. Lo anterior puede entenderse como una estrategia de enseñanza que mejora la capacidad heurística de comprensión del tema (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos). [E4.6, U364]

364. P: vamos a resolver el primer punto, para esto usaremos representaciones gráficas del problema, el edificio será un cateto del triángulo mayor y su sombra otro cateto, con respecto al hombre y su sombra, en este caso, serían los catetos del triángulo menor. Nombremos el triángulo mayor como ABC y el menor como DEC, ahora establezcamos las proporciones según sean los lados correspondientes, entonces miremos BC es a EC como AB a DE, porque estamos comparando las dos alturas respectivas con las dos bases respectivas de los dos triángulos

Una vez se establecen las proporciones, la profesora solicita reemplazar los valores de la igualdad $\frac{BC}{EC} = \frac{AB}{DE}$, llegando a la igualdad $\frac{49}{0.9} = \frac{x}{1.8}$ para, posteriormente, usar la regla de extremos y medios y obtener la expresión $49 \cdot 1.8 = 0.9 \cdot x$; finalmente, se obtiene la

expresión $\frac{882}{0,9} = \frac{0,9 \cdot x}{0,9}$ que, al ser operada, se obtiene el valor de la incógnita $x = 98$ (KoT, procedimientos).

Por medio de este problema se puede observar que la profesora quiere usar problemas en los cuales se emplean unidades de medida diferente a los centímetros (metros) y así mostrar otros tipos de problema donde se puede aplicar el teorema de Tales (KMT, estrategias, técnicas tareas y ejemplos).

Episodio 20 [E4.7, U372-382] Resolución de triángulos semejantes con dos incógnitas en contexto matemático

En el último episodio de esta cuarta clase se resuelve un problema sobre semejanza de triángulos en un contexto matemático donde se tienen dos incógnitas. Para esto, inicialmente se establecieron los valores de cada segmento, a saber, que, primero, se necesita despejar la incógnita y y para posteriormente despejar la incógnita x . Para lo cual, se construye inicialmente la razón $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ que involucra la incógnita, en este momento la profesora hace explícitas las condiciones para establecer las razones, en las cuales se debe comparar la longitud del triángulo pequeño con respecto al triángulo grande (segmentos correspondientes), es decir AE con AB y AD con AC como lo muestra la figura 42.

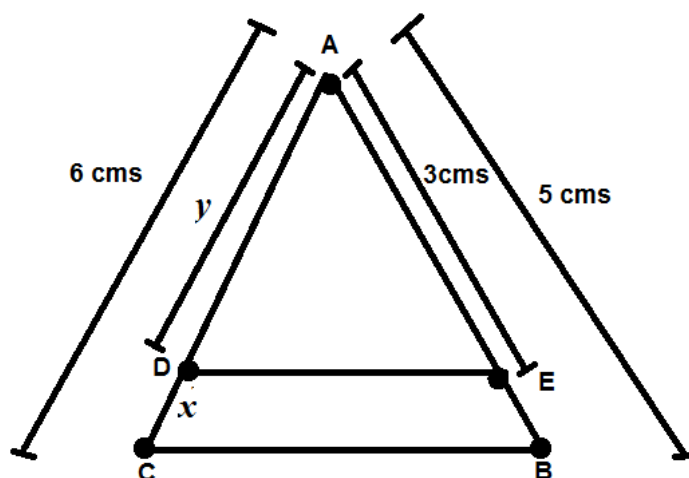


Figura 42 Representación gráfica construida por la profesora

Posteriormente, los valores son reemplazados para obtener la igualdad $\frac{3}{5} = \frac{y}{6}$ que, al hacer el procedimiento de medios y extremos, es $3 \cdot 6 = 5 \cdot y$, para despejar el valor de la incógnita y , se tiene que $\frac{18}{5} = \frac{5y}{5}$, es decir que el valor de la incógnita es $\frac{18}{5}$ o 3,6 cms (KoT, procedimientos). Para finalizar el razonamiento para la resolución del problema, la profesora encuentra el valor de la longitud x por medio de la diferencia entre la longitud total (6cms) y la longitud despejada ($y=3,6$), concluyendo que $x=2,4$ cms (KoT, procedimientos), mostrando así otro tipo de problemas en los cuales se puede hacer uso de la proporcionalidad y cerrar así el tema.

En este episodio, igual que en el episodio 19, se considera que, dado que la profesora plantea una actividad con un paso adicional a la del episodio 19, complejizando los ejercicios anteriormente trabajados, restando dos longitudes para obtener el valor de otra, se estaría movilizado conocimiento relacionado con la categoría KMT, pues esta estrategia aporta en la comprensión más amplia de la proporcionalidad como fenómeno.

5. ESTABLECIENDO EL MTSK DE LA PROFESORA.

Una vez se ha presentado la información encontrada en las cuatro clases utilizadas por la profesora para la enseñanza del concepto de proporcionalidad, por medio de episodios cronológicamente organizados, es necesario establecer una nueva organización que permita comprender el conocimiento especializado movilizado por la profesora usando como marco de referencia el modelo MTSK. Para esto, inicialmente, se presentarán unas tablas que permitirán organizar la información, asociando las evidencias e indicios con las respectivas unidades de información a la categoría y el subdominio establecido. Ello supone una oportunidad para contrastar entre sí evidencias de un mismo subdominio y/o categoría, mostrando el grado de homogeneidad que ha tenido el análisis.

La reflexión sobre estas relaciones es de vital importancia en el cumplimiento del objetivo de la investigación, el cual está relacionado con la comprensión del conocimiento especializado movilizado por la profesora en la enseñanza de la proporcionalidad. Una vez se muestra la organización de la información, se evidencia la interpretación del investigador acerca de las relaciones entre los distintos subdominios, categorías e indicadores, lo cual permitirá elaborar una malla de conexiones como un aporte en la comprensión del conocimiento especializado para la enseñanza de la proporcionalidad, distinguiendo los diferentes elementos del conocimiento implicados. Dichas tablas podrán ser consultadas en los anexos 12.1, donde se presentan las relaciones identificadas de los subdominios del MTSK de la profesora y en el anexo 12.2, donde se muestran las relaciones evocadas de los subdominios del MTSK de la profesora.

De igual forma que en Liñán (2017), se establece una gráfica para visualizar estas conexiones, permitiendo así una visión panorámica del conocimiento expuesto. En este caso se usará una flecha bidireccional para señalar cuál es la interpretación que se tiene de las categorías, además se numerarán dichas conexiones como una forma de sintetizar las relaciones establecidas en el transcurso de los episodios, las cuales se pueden consultar en el anexo 12.3 las relaciones identificadas y en anexo 12.4 las relaciones evocadas. A continuación, se presenta una tabla donde se organiza la información sistematizada.

Se presentará una primera tabla donde se muestran los diferentes indicadores identificados en el transcurso de las 4 clases usando el modelo MTSK.

Subd.	Cat.	Unidad Información	Evidencia o indicio en el MTSK de la profesora
KoT	Definiciones propiedades y sus fundamentos	[E1.1, U4] [E3.1, U235-238]	Definición de razón
		[E1.1, U6] [E3.3, U261]	Propiedad: Necesidad de usar la misma unidad de medida para construir una razón entre dos segmentos
		[E1.1, U-24]	Definición de simplificación de fracciones
		[E1.1, U-35-38]	Propiedad: Una razón puede ser la misma, aunque sus segmentos sean diferentes
		[E1.1, U-42-45] [E1.4, U-94] [E1.4, U-101] [E2.2, U 173] [E2.2, U183-186] [E3.1, U235-238] [E3.2, U249]	Definición de segmentos proporcionales cuando tienen la misma razón
		[E1.2, U63-65]. [E3.1, U 234-240]	Propiedad: Lados iguales subtienden lados iguales
		[E1.3, U 68] [E3.4, U288-289] [E4.1, U295-297]. [E4.7, U372-382]	Propiedad: Relación entre lados homólogos para establecer la proporcionalidad
		[E1.4, U-107] [E2,2 U183]	Propiedad: Una razón no siempre se puede expresar como un número entero
		[E1.4, U99-103]	Fundamento: Dividir en ambos lados de la igualdad para despejar una incógnita
		[E1.5, U118]	Indicio Propiedades: Expresar la definición de proporción aurea
		[E1.5, U128-129]	Propiedad: La proporcionalidad es aplicable a los lados de cuadriláteros
		[E1.5, U134-135]	Propiedad: Dados tres lados de dos cuadriláteros se puede encontrar otro lado tal que sus razones sean proporcionales
		[E1.5, U138]	Propiedad: Razones por las cuales una razón no se puede simplificar una razón

		[E1.5, U147] [E1.5, U150-156]	Propiedad: Si dos razones no son iguales, entonces no existe proporcionalidad
		[E2.1, U157] [E2.1, U186]	Propiedad: El teorema de Tales es una aplicación de la proporcionalidad entre dos pares de segmentos
		[E2.1, U159]	Propiedad: Expresar oralmente el enunciado del teorema de Tales
		[E2.1, U172]	Propiedad: Al poner una escuadra sobre una recta y moverla sobre otra, la escuadra traza rectas paralelas a la recta inicial
		[E2.3, U201]	Propiedad: La proporcionalidad también se aplica a segmentos homólogos, aunque no sean opuestos
		[E3.3, U293]	Propiedad: Se puede establecer las longitudes entre transversales y paralelas estableciendo razones de diferentes formas, siempre y cuando los segmentos sean correspondientes y homólogos.
		[E4.1, U298-300] [E4.1, U305-306] [E4.4, U329-331] [E4.5. U344]	Propiedad: La proporcionalidad entre los lados de dos triángulos es un criterio de la semejanza.
		[E4.1 U301-304] [E4.4, U329-331] [E4.5. U344]	Propiedad: La igualdad entre los ángulos de los lados de dos triángulos es un criterio de la semejanza
	Procedimientos	[E1.1, U-13-17]	Procedimiento para conocer la razón como el cociente entre dos segmentos
		[E1.1, U-25] [E1.3, U84-90]	Establecimiento de una razón usando simplificación de fracciones
		[E1.1, U-41-45]	Establecimiento de dos razones iguales donde sus segmentos son diferentes usando simplificación de fracciones

		[E1.2, U49-52] [E1.2, U53-60] [E1.3, U69-72] [E1.5, U123-124] [E1.5, U144-146] [E1.6 U149] [E1.6 U153-156]	Método de medios y extremos para verificar si dos pares de segmentos son proporcionales
		[E1.3, U76] [E1.3, U80-85] [E3.3, U261-267]	Método de medios y extremos, y tratamiento algebraico de situaciones para encontrar una longitud desconocida sabiendo que estas son proporcionales
		[E1.4, U-103] [E1.5, U127-128]	Construcción de razones proporcionales dados cuatro segmentos
		[E1.4, U-110-112]	Despeje de una incógnita para encontrar la longitud de un segmento cuyas razones son proporcionales
		[E1.5, U128-129] [E1.5, U130-131] [E1.5, U132-135]	Comprobar la proporcionalidad entre lados de cuadriláteros
		[E1.6 U168-170].	Trazar una recta paralela a una recta dada
		[E2.2, U 171] [E3.2, U 244-248] [E3.3, U 256-267]	Nombrar los puntos de intersección de rectas para establecer segmentos homólogos y sus respectivas razones
		[E2.3, U201] [E4.5. U344] [E4.6, U364]	Verificar la relación de proporcionales entre segmentos homólogos
		[E2.4, U225-227]	Búsqueda de un par de segmentos de tal forma que sean proporcionales con un par de segmentos dados
		[E3.4, U278-282]	Conocimiento de las propiedades de la proporcionalidad teniendo dos incógnitas, despejando primero una incógnita para posteriormente despejar la segunda incógnita

		[E4.2, U314-318] [E4.3, U319-327]	Método de medios y extremos, y tratamiento algebraico de situaciones para verificar dos triángulos son semejantes
		[E4.3, U319-327]	Comprobación de la congruencia de los tres ángulos de dos triángulos para verificar su semejanza.
		[E4.4, U330-338] [E4.7, U372-382]	Método de medios y extremos, y tratamiento algebraico de situaciones para verificar dos triángulos son semejantes con dos incógnitas
		[E4.5, U344]	Método de medios y extremos, y tratamiento algebraico de situaciones para verificar dos triángulos son semejantes con una incógnita
	Fenomenología y sus aplicaciones	[E1.2, U63-65]	Conocimiento de situaciones del contexto real para establecer proporcionalidad entre dos pares de segmentos por medio del método de medios y extremos directamente
		[E1.3, U66-91].	Conocimiento de situaciones del contexto real para conocer la longitud de un segmento en el que se encuentran rectas transversales entre rectas paralelas
		[E1.5, U134-135]	Conocimiento de situaciones del contexto real entre cuadriláteros para establecer una longitud desconocida
		[E2.4, U232] [E3.1, U 234-240] [E3.4, U271-293]	Conocimiento de una situación del contexto real donde se usa el teorema de Tales para establecer una longitud desconocida
		[E4.2, U309-318] [E4.2 U314-318]	Conocimiento de una situación del contexto real donde se usa el teorema de Tales para establecer la semejanza entre dos triángulos
		[E4.6, U359-371]	Conocimiento de una situación del contexto real donde se usa el teorema de Tales para establecer el valor de un lado de un triángulo
	Registros de representación	[E1.1, U2-4],	Representación escrita de una razón como una división de dos segmentos
		[E1.1, U11] [E1.1, U17]	Representación verbal de una razón entre dos segmentos
		[E1.1, U14]	Representación tabular de tres columnas para establecer la razón entre dos segmentos
		[E1.1, U38]	Representación gráfica de segmentos para establecer sus razones

		[E1.2, U47].	Representación escrita del método de medios y extremos, resaltando cuáles son los términos para multiplicar
		[E1.3, U 67] [E4.1, U304]	Representación gráfica de un problema de proporcional entre segmentos donde se desconoce uno de los segmentos
		[E1.5, U119-121]	Representación verbal de la proporcionalidad entre dos pares de segmentos
		[E1.5, U140]	Representación gráfica de un problema de proporcionalidad entre cuadriláteros donde se desconoce uno de los lados
		[E1.5, U163]	Representación escrita de rectas como $\vec{r}$, $\vec{s}$
		[E2.2, U175-177]	Representación escrita de segmentos por medio de expresiones como $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ y $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$
		[E3.4, U271-293]	Representación gráfica de un problema de proporcionalidad con dos incógnitas
		[E4.2, U309] [E4.4, U339] [E4.5, U343] [E4.6, U365]	Representación gráfica de un problema de semejanza de dos triángulos
Subd.	Cat.	Unidad Información	Evidencia o indicio en el MTSK de la profesora
KSM	Conexión transversal	[E1.2, U49-52] [E1.2, U53-60] [E1.3, U69-72] [E1.5, U123-124] [E1.5, U144-146] [E1.6 U149] [E1.6 U153-156]	Concepto de ecuación

	Conexión auxiliar	[E1.2, U49-52] [E1.2, U53-60] [E1.3, U69-72] [E1.5, U123-124] [E1.5, U144-146] [E1.6 U149] [E1.6 U153-156]	Tratamiento algebraico de situaciones para encontrar la longitud de un segmento dados segmentos entre rectas paralelas
KPM	Formas de validación y demostración	[E1.6 U168-171]. [E2.2, U172-193]	Pruebas informales en geometría a través de la representación gráfica. Comprobación empírica del teorema de Tales
		[E2.1, U157-171] [E2.2, U172-193] [E2.3, U194-215] [E3.4, U271-293]	La comparación de los resultados obtenidos en distintos registros de representación como medio de validación de un modelo matemático
		[E1.6, U147] [E1.5, U150-156]	Uso del ejemplo para mostrar casos en los que no se cumple lo propuesto (contraejemplo)
		[E1.5, U163]	Uso de símbolos específicos como $\vec{r}$, $\vec{s}$ para nombrar rectas
	Papel simb. del uso de	[E2.2, U175-177]	Uso de símbolos como $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ para nombrar segmentos
		[E1.3, U73-90] [E3.4, U271-293] [E4.2, U309-318] [E4.6, U359-371]	Fases de Polya (entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás)
	Jer. plan. RP		
	Prác. Mat.		
	Cond. n. y s.		

Subd.	Cat.	Unidad Información	Evidencia o indicio en el MTSK de la profesora
MKT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	[E1.1, U5]	Uso de ejemplo numérico para definir la razón entre segmentos
		[E1.1, U9]	Uso de ejemplo más transparente en el cual la razón entre segmentos no sea el doble
		[E1.1, U14]	Uso de tablas de tres columnas para establecer la razón entre dos segmentos
		[E1.1, U18]	Uso de ejemplos para encontrar razones entre dos segmentos usando la simplificación.
		[E1.1, U29]	Uso de preguntas orientadoras para definir la razón como una relación entre dos segmentos
		[E1.1, U34-37]	Uso de un ejemplo donde la razón es la misma, aunque sus segmentos sean diferentes
		[E1.2, U49-52]	Uso de un ejemplo que cumple con la relación de proporcionalidad para probar el método de medios y extremos
		[E1.2, U53-60]	Uso de un ejemplo donde la razón sea el doble para comprobar el método medios y extremos
		[E1.2, U63-65]	Uso de un ejemplo donde se relacionan los catetos iguales de un triángulo y los ángulos de sus bases
		[E1.3, 773-89]	Uso de ejemplos del contexto real donde se desconoce una longitud
		[E1.4, U-93-101] [E4.1 U298-300]	Evocación de conceptos contruidos previamente (razón y proporción) como herramienta para resolver un problema de proporcionalidad
		[E1.4, U108-112]	Uso de diferentes razones entre segmentos homólogos para encontrar el valor de una longitud desconocida
		[E1.5, U141-147] [E1.5, U150-156]	Uso de ejemplos de situaciones no proporcionales para definir la proporcionalidad por contraejemplos
		[E2.2, U172-193]	Uso de un ejemplo de proporcionalidad para que sea replicado por los estudiantes
		[E2.2, U187-189]	Preguntar por la relación entre dos razones para establecer la proporcionalidad entre estas.
		[E2.3, U207]	Uso de un ejemplo gráfico para definir el concepto de segmento homólogo

		[E2.4, U227]	Proponer un ejemplo donde se deben encontrar razones proporcionales sin necesidad de hacer medición de segmentos.
		[E3.3, U259]	Uso de preguntas orientadoras para definir la proporcionalidad como una relación entre dos pares de segmentos
		[E3.3, U261-267]	Uso de ejemplos de segmentos proporcionales donde los segmentos no son enteros
		[E3.4, U271-293]	Uso de un ejemplo del teorema de Tales donde se tienen dos incógnitas
		[E3.4, U284]	Uso de un ejemplo de proporcionalidad que puede ser solucionado de diferentes formas
		[E3.4, U288-293] [E4.2, U311-314]	Uso de un ejemplo para mostrar cómo establecer los segmentos homólogos
		[E4.1 U 307] [E4.5, U340-357]	Uso de un ejemplo para definir la semejanza de dos triángulos
		[E4.3, U319-328] [E4.4, U329-339] [E4.5, U340-357] [E4.7, U372-382] [E4.6, U359-371] [E4.7, U372-382]	Cambiar de posición, tamaño y valores diferentes ejemplos de triángulos semejantes
	Recursos, materiales virtuales	[E1.3, U 65]	Uso de la escuadra de 45 grados para explicar la relación entre ángulos iguales a lados iguales en un triángulo.
		[E1.6 U168-170].	Uso de escuadras de 45 y 60 grados para construir una recta paralela a una paralela dada
		[E2.2, U210]	Uso de gestos para representar conceptos geométricos (segmentos homólogos)
		[E3.2, U242]	Indicio- potencialidades y limitaciones de hoja en blanco para haces construcciones geométricas
		[E3.2, U252-254]	Uso de gestos para representar conceptos geométricos (proporcionalidad entre segmentos homólogos)

		[E4.1, U294]	Uso de vídeos para ejemplificar problemas relacionados con la búsqueda de segmentos desconocidos usando la proporcionalidad
KFLM	Fortalezas y dificultades	[E1.1, U11]	Identificación de la dificultad de nombrar una razón, de tal forma que supere la idea de fracción
		[E2.2, U172-193]	Conocimiento de las dificultades de la comprensión de proporcionalidad cuando se involucran situaciones de medición que usan milímetros
	Formas de interacción con el cont. matemático	[E2.2, U187] [E2.2, U193]	Conocimiento de posibles errores de medición en la construcción de razones
KMLS	Secuenciación con temas anteriores y posteriores	[E1.1, U5]	Indicio de trabajo previo del uso de razones enteras en clases anteriores.
		[E1.1, U-24]	Conocimiento de simplificación de fracciones previamente trabajado en clase.
		[E3.1, U235,238]	Tener claridad sobre los conceptos de razón y reconocer qué dice el teorema de Tales para poder hacer aplicaciones de dicho teorema en situaciones reales

Otra forma de ilustrar los conocimientos desde una perspectiva más amplia de la profesora es mediante la tabla 17, en la cual se presenta una síntesis de la cantidad de indicadores de los subdominios del modelo MTSK con sus respectivos porcentajes.

Subd.	Categoría	Cant de Indicadores	Porcentaje
KoT	Definiciones propiedades y sus fundamentos	41	23,1 %
	Procedimientos	35	19,7 %
	Fenomenología y sus aplicaciones	9	5,0 %
	Registros de representación	17	9,6 %
KSM	Conexión transversal	7	3,9 %
	Con. Aux	7	3,9 %
KPM	Formas de validación y demostración	6	3,3 %
	Papel de los símbolos y el lenguaje formal	4	2,2 %
	Jerarquía y plan. Para la res. De problemas	4	2,2 %
	Práctica Matemática.	0	0 %
MKT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	33	18,6 %
	Recursos, materiales virtuales	7	3,9 %
KFLM	Fortalezas y dificultad	2	1,1 %
	Formas de interacción con el cont. Matemático	2	1,1 %
KMLS	Secuenciación con temas	3	1,5 %

Tabla 17 Síntesis de número de indicadores encontrados

Con base en la distribución, se puede mencionar que el 72,9 % de los indicadores pertenecen al dominio del conocimiento matemático (MK), mientras tanto el restante 27,1 % pertenece al dominio del conocimiento didáctico de contenido (PCK). Llama la atención especialmente las categorías pertenecientes al KoT, pues representan el 57,4% del total de todos los indicadores identificados.

Esta característica muestra la preeminencia del conocimiento matemático disciplinar en los procesos de enseñanza, sin embargo, también es importante resaltar el rol del conocimiento asociado a la didáctica de las matemáticas, mostrando así que no basta únicamente con tener un conocimiento matemático disciplinar para gestionar situaciones de enseñanza, sino que, por el contrario, también es necesario hacer uso de un conocimiento didáctico asociado en este caso a la proporcionalidad. Una vez se han observado estas

tendencias en los datos recolectados, es necesario establecer relaciones entre estos indicadores, dado que el modelo MTSK considera que los subdominios están en constante comunicación e interrelación y así tener una mayor comprensión del conocimiento movilizado por la profesora en el transcurso de las 4 clases.

5.1 Relaciones entre los subdominios del MTSK de la profesora

Para presentar las relaciones entre los subdominios del MTSK movilizado por la profesora, por cuestión de orden, inicialmente se mostrarán las relaciones dentro del conocimiento matemático (MK), partiendo del conocimiento del tema (KoT), para seguir con el conocimiento de la estructura matemática (KSM) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM), posteriormente, se abordan las relaciones del conocimiento didáctico de contenido (PCK), iniciando por el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), pasando por el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y finalizando con la categoría del conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS.

Se considera que este esquema de presentación facilitará la comprensión de las relaciones encontradas, además de ser una estrategia que garantiza el cubrimiento de la totalidad de subdominios y categorías propuestas por el modelo del MTSK.

Tras observar la información presentada en la tabla de las evidencias y los indicios del MTSK movilizado por la profesora, se puede señalar que el conocimiento de proporcionalidad de la profesora está fundamentado sobre el conocimiento de los temas (KoT), especialmente, en las definiciones, propiedades y sus fundamentos, procedimientos y registros de representación, y, en menor medida, fenomenología y aplicaciones, mostrando así la visión de la matemática presentada por la profesora como un espacio donde predomina el uso de definiciones y propiedades; dejando un poco de lado las situaciones del mundo físico que hicieron que surgiera el concepto de proporcionalidad como una herramienta para solucionar un problema práctico.

En las situaciones propuestas por la profesora se observa que considera que las situaciones del contexto real deben ser usadas para aplicar conceptos, mas no las contempla como un punto de partida de donde se puedan establecer propiedades que lleven a construir el concepto de proporcionalidad.

No se pudieron identificar indicadores en los cuales la profesora justifique por qué funciona el procedimiento de medios y extremos para comprobar la proporcionalidad entre dos pares de segmentos o por qué funciona el tratamiento algebraico de situaciones para encontrar la longitud de un segmento desconocido que está en posición de Tales, características que muestran una visión estática del pensamiento proporcional; presentándolo principalmente por el método de medios y extremos como un procedimiento válido para comprobar la existencia de la proporcionalidad o para encontrar un segmento entre dos o más rectas transversales entre paralelas.

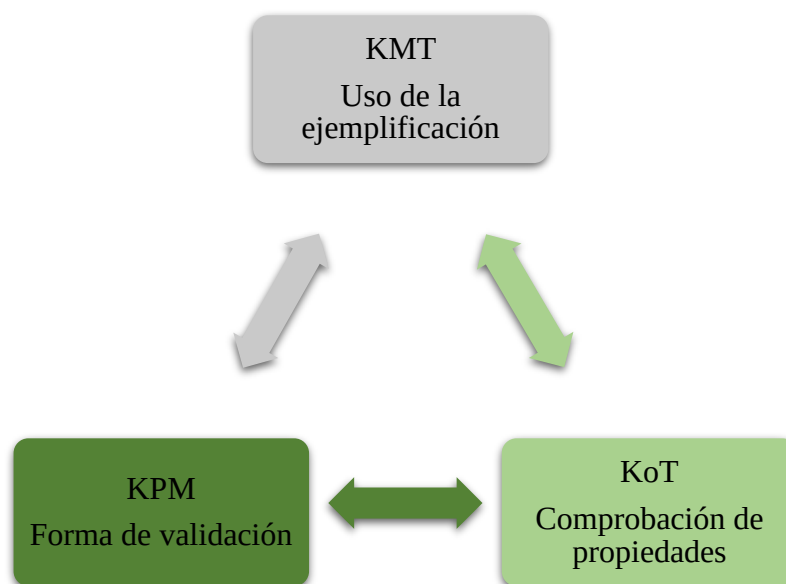
Sin embargo, se pueden apreciar fundamentos matemáticos cuando la profesora expresa cuándo se puede establecer relaciones de proporcionalidad entre segmentos. En esos momentos se resalta la importancia de la existencia de rectas paralelas, además del uso de una misma unidad de medida y la identificación de segmentos homólogos [E3.4, U288-289], *“Lo que debemos tener en cuenta es reconocer cuales son los segmento que se van a comparar, por ejemplo, en este caso, 6 es a X como 4 es a 5, todo depende de cuáles segmentos se elijan.”*; además de mencionar que cuando se tengan dos incógnitas a despejar se debe encontrar una para posteriormente despejar la segunda [E3.4, U278-282] *“Vamos a ver la segunda incógnita, al remplazar las proporciones, tendríamos inicialmente dos incógnitas, pero como ya sabemos el valor de X, simplemente la remplazamos diciendo que 7,5 es a 9 como 5 es a Y, usando medios y extremos”*

Análisis con Respecto al Conocimiento Matemático (MK)

La fundamentación utilizada por la profesora está basada en el conocimiento de las propiedades y definiciones que son usadas en diferentes situaciones, especialmente de ejemplificación, como una herramienta para comprobar propiedades o para refutarlas por medio de contraejemplos, lo cual se puede evidenciar en los indicadores [E1.6 U147], [E1.5, U150-156], cuando la profesora muestra dos cuadriláteros en los cuales se supone que sus

lados son proporcionales y usa el procedimiento de medios y extremos, con lo cual concluye que no son proporcionales porque las razones entre sus lados no son las mismas; hace, de este modo, la definición de proporcionalidad por contraejemplo.

En este sentido, se puede establecer una primera relación **(1)** entre el uso de la ejemplificación (KMT) para la comprobación de propiedades (KoT) y como forma de validación usada por la profesora (KPM), por medio de construcciones empíricas y pruebas informales del teorema de Tales. Esto se puede observar, por ejemplo, cuando se usan escuadras para construir geoméricamente una línea paralela a una recta dada [E1.6 U168-171], o cuando se comprueban las relaciones de proporcionalidad entre rectas transversales que cortan dos rectas paralelas construidas previamente [E2.2, U172-193].



Con respecto a los procedimientos movilizados por la profesora, se pueden apreciar dos grandes grupos, los numéricos y los geométricos. Con respecto a los numéricos se encuentran tres grupos. El primer grupo de procedimientos está asociado al establecimiento de una o varias razones como cociente y la simplificación de fracciones; en el segundo grupo de procedimientos está el método de medios y extremos para verificar o construir dos pares de segmentos proporcionales; y en el tercer grupo están los procedimientos asociados al despeje de una o dos incógnitas en ecuaciones, los cuales son usados para la búsqueda de un segmento y la comprobación de la proporcionalidad de razones o la semejanza de triángulos

Con respecto a los procedimientos geométricos se puede diferenciar entre los que buscan elaborar construcciones como, por ejemplo, trazar una recta paralela a una recta dada [E1.6 U168-170], nombrar los puntos de intersección de rectas para establecer segmentos homólogos y sus respectivas razones [E2.2, U 171], [E3.2, U 244-248], [E3.3, U 256-267], o comprobar la congruencia de los tres ángulos de dos triángulos para verificar la semejanza de triángulos. [E4.3, U319-327].

Para el uso de los procedimientos, tanto numéricos como geométricos es necesario hacer un uso adecuado de los registros de representación, como por ejemplo al despejar el valor de una incógnita, hacer uso de la representación escrita de la ecuación [E1.2, 47-82], o al construir triángulos semejantes; es necesario que la representación gráfica cumpla con la congruencia de sus ángulos y proporcionalidad entre sus lados [E4.1, U295 -308], lo que muestra una segunda conexión evidenciada en las clases de la profesora (2).



Se destaca la variedad de registros de representación de los diversos conceptos abordados usados por la profesora, iniciando por la razón a partir de sus representaciones escritas en el lenguaje natural, como fracción y su expresión verbal y gráfica, asimismo, con el uso de una tabla de tres columnas donde en la primera y segunda columna se presentaban dos segmentos, y en la tercera se escribía la razón, mostrando esta representación como herramienta útil para construir el concepto de razón como comparación a partir de diferentes ejemplos.

De igual forma, los registros de representación se hacen evidentes al mostrar conceptos como la proporcionalidad entre dos pares de segmentos y semejanza de triángulos, pues la profesora hace uso inicialmente de representaciones verbales para que el estudiante identifique los segmentos homólogos a comparar, y representaciones de tipo escrito para expresar el método de medios y extremos, además de hacer uso de lenguaje matemático especializado al nombrar rectas como $\vec{r}, \vec{s}$ [E1.5, U163] o expresar las razones entre

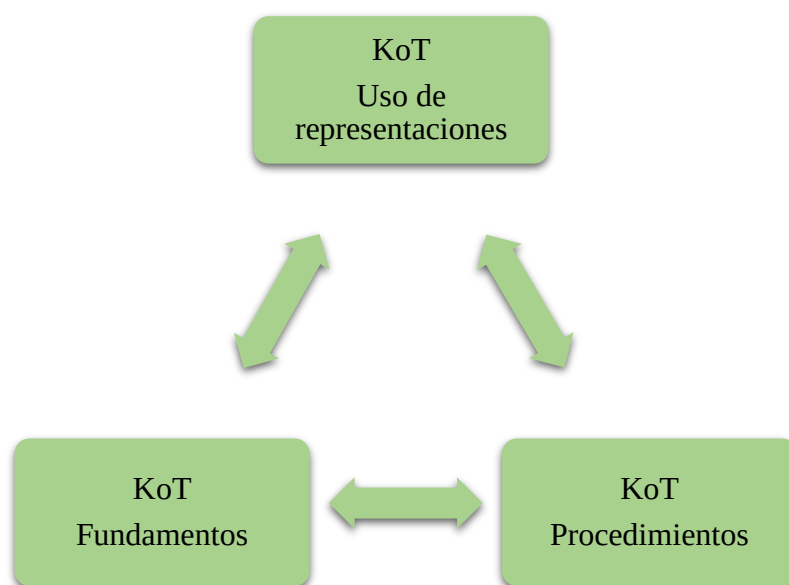
segmentos como $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ y $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ [E2.2, U175-177]. Esto evidencia una tercera relación entre los registros de representación (KoT) y el papel simbólico del uso de lenguaje formal (KPM) (3), pues sin el manejo del uso de un lenguaje formal para nombrar una recta o una razón no sería posible establecer sus representaciones ni comprender su significado, ni su rol en la resolución de una situación problema relacionada con la proporcionalidad.

Sin embargo, la representación más potente y con mayor presencia a lo largo de las clases fue la representación gráfica, que se empleó para la interpretación de información de problemas asociados a la construcción de razones, la comprobación de la proporcionalidad, la búsqueda de un segmento desconocido y el establecimiento de semejanza entre dos triángulos. Se considera que este tipo de representación prima respecto de las demás, porque los contextos usados para la enseñanza de la proporcionalidad son situaciones de tipo geométrico, donde se tenía como tarea, por ejemplo, la búsqueda de uno o dos segmentos desconocidos.



Como se comentó anteriormente, no se pudo encontrar evidencia de que la profesora considerara necesario hacer uso de situaciones reales como punto de partida para la identificación y establecimiento de propiedades, lo que matizó la potencialidad del estudio de los fenómenos del mundo real como una oportunidad para la construcción y uso del concepto de proporcionalidad. La propuesta de la profesora se caracterizó por usar las situaciones del contexto real como una herramienta para aplicar definiciones, procedimientos y propiedades anteriormente enseñados, los cuales estaban relacionados con la construcción de razones proporcionales, la búsqueda de uno o dos segmentos desconocidos, y la comprobación de la semejanza entre dos triángulos.

De la anterior situación se puede establecer una relación entre el uso de fundamentos y de procedimientos por medio de representaciones (escritas y gráficas) válidas para resolver problemas del contexto real relacionados con proporcionalidad **(4)**. Esto se puede observar en la resolución de un problema en el cual se quería encontrar la altura de un edificio [E4.4, [U359-371], o de un pino [E1.3, 63-92], donde se emplean las propiedades de la proporcionalidad, el método de medios y extremos, con su respectiva representación gráfica como una herramienta para la en la identificación de segmentos homólogos, y la resolución del problema.

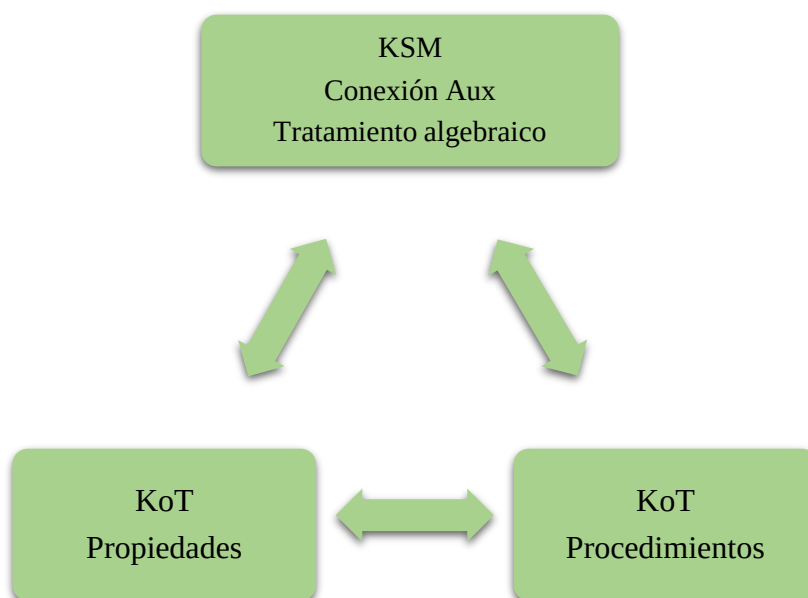


Conocimiento de la estructura matemática KSM

Con respecto al conocimiento de la estructura de la matemática (KSM) perteneciente al MK, se considera que por el uso limitado que se le da a la fenomenología y sus aplicaciones, es complejo que afloren conexiones. Cabe mencionar el uso del concepto de ecuación como una conexión transversal [E1.2, U49-52], [E1.2, U53-60], [E1.3, U69-72], [E1.5, U123-124] [E1.5, U144-146], [E1.6 U149] y [E1.6 U153-156], en la medida en que es un concepto que facilita la comprensión de la proporcionalidad, pues, a partir de dos expresiones algebraicas y por medio del uso de la igualdad, se establece un mismo valor. Otra conexión se establece en el tratamiento algebraico de situaciones como una conexión auxiliar que se encuentra durante la mayoría de las clases, pues, aunque es un contenido

diferente a la proporcionalidad, tiene cualidades que facilitan la comprensión de este concepto.

En las situaciones en las cuales aparece esta conexión auxiliar (tratamiento algebraico de situaciones lineales) se relacionan categorías del KoT, como propiedades y procedimientos, lo que pone de manifiesto la quinta relación encontrada **(5)**, por ejemplo, cuando se necesita establecer el valor de una longitud desconocida en un segmento que se encuentra entre rectas paralelas [E1.5, U123-124], [E1.5, U144-146], [E1.6 U149].



Conocimiento de la práctica matemática KPM

Con respecto al conocimiento de la práctica matemática (KPM) que también pertenece al MK, se pudo identificar que las formas de validación se caracterizan por comprobaciones empíricas de propiedades y teoremas, previamente mencionados por la profesora, además de pruebas informales de geometría usando registros de representación de tipo gráfico y escrito (KoT), lo cual es evidencia de una sexta relación **(6)**.

Un ejemplo de esta relación se aprecia cuando la profesora construye rectas paralelas geométricamente [E1.6 U168-171], o cuando se comprueba la relación entre las razones de una construcción geométrica [E2.2, U172-193]. De igual forma, este tipo de relaciones se puede encontrar cuando la profesora utiliza varios tipos de representación (gráfica, escrita)

para validar y comprobar las propiedades y procedimientos planteados inicialmente por ella, por ejemplo, cuando se construyen rectas paralelas [E2.1, U157-171], cuando se comprueban las razones entre segmentos que cortan rectas paralelas [E2.2, U172-193], o cuando se establece el valor de un segmento desconocido por medio del teorema de Tales [E3.4, U271-293].



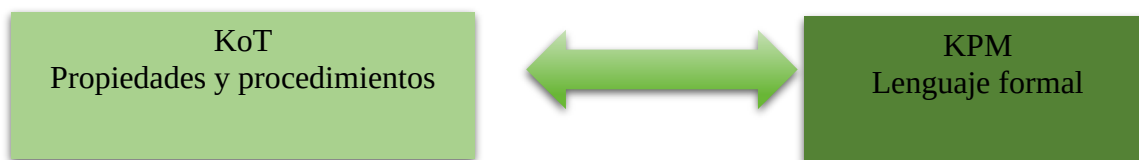
En la información resalta el uso del contraejemplo como un instrumento para definir o para verificar una propiedad, es decir, el uso del contraejemplo como una forma de validar o argumentar en los problemas presentados por la profesora. Se considera que este uso como parte del conocimiento de la práctica matemática asociado al uso de procedimientos y propiedades por medio de diferentes registros de representaciones, todos estos pertenecientes al KoT (7), evidencia una séptima relación, en este caso, entre los procedimientos, propiedades y registros de representaciones (KoT) y el uso de contraejemplos como parte del conocimiento de la práctica matemática (KPM).

Se considera que estas relaciones se dan justamente porque la profesora presenta los problemas de aplicaciones después de haber enunciado propiedades, definiciones y ejercicios en el contexto matemático, mostrando que una vez que se expresan propiedades con respecto a la proporcionalidad, se usan diferentes formas de validación para verificar estas propiedades por medio de ejercicios en contextos matemáticos.



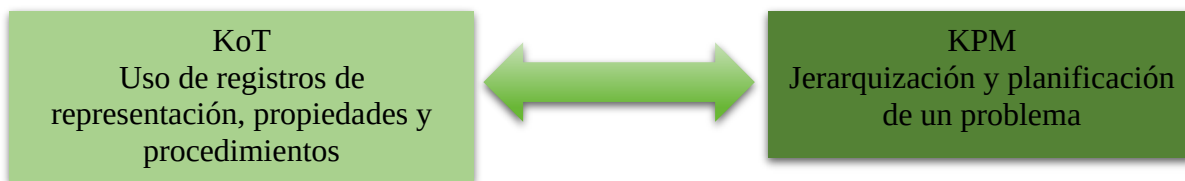
Con respecto al papel simbólico del uso de lenguaje formal, la profesora, en dos ocasiones, hace referencia explícita a la importancia del uso de símbolos y lenguaje (escrito) formal, pues estos son necesarios para expresar determinadas propiedades y hacer

procedimientos necesarios para resolver problemas de proporcionalidad, como, por ejemplo, el uso de las expresiones $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ para nombrar segmentos [E2.2, U175-177], o el uso de símbolos específicos como $\vec{r}$, $\vec{s}$ para nombrar rectas paralelas o transversales [E1.5, U163], , mostrando así la octava relación **(8)**.



Con respecto a la jerarquización y planificación en resolución de problemas, resalta el uso de las fases de Polya, pues la profesora inicia la resolución de un problema leyendo detenidamente el problema, es decir, entendiendo el problema. Posteriormente, representa de manera gráfica el problema y establece los segmentos homólogos en la construcción, es decir, configura un plan para, seguidamente, con tratamiento algebraico de situaciones, encontrar el segmento desconocido, lo que quiere decir que ejecuta el plan y, finalmente, examina la solución obtenida, preguntándose cómo verificar el resultado.

Aunque se ven estos momentos en diferentes resoluciones de problemas [E3.4, U271-293], [E4.2, U309-318], la profesora no los presenta de una forma esquemática o explícita para los estudiantes. Se considera que este tipo de planificación para resolver un problema de proporcionalidad se relaciona con el uso de propiedades, procedimientos y registros de representación válidos para llegar a una solución del problema, lo cual es evidencia de la novena relación **(9)**, en este caso, entre la jerarquización y planificación de la resolución de problemas y el KoT.



Otra forma de validación encontrada fue la comparación de los resultados obtenidos por diferentes métodos y diferentes formas de representación, por ejemplo, cuando se

compara geométricamente y numéricamente la proporcionalidad entre segmentos correspondientes de rectas transversales cortadas por dos rectas perpendiculares [E2.1, U157-171], [E2.2, U172-193], [E2.3, U194-215], o cuando se usan registros de representación gráficos y algebraicos para el despeje de dos segmentos usando teorema de Tales entre cuatro rectas paralelas [E3.4, U271-293]; este tipo de validación usada por la profesora se puede relacionar con el KoT, (registros de representación) **(10)**, pues se hace uso de representaciones gráficas, algebraicas y verbales para validar los resultados obtenidos por medio de los procedimientos en la resolución de problemas sobre proporcionalidad.

No se encontraron indicadores para establecer las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones. Se considera que esto se debe a que en las clases la profesora daba las definiciones y las propiedades a los estudiantes, dificultando así las características que deben tener en cuenta los estudiantes para hacer su propia definición de conceptos como razón, segmentos homólogos, proporcionalidad y semejanza.



Análisis con Respecto al Conocimiento Didáctico de Contenido (PCK)

La profesora muestra su conocimiento didáctico del contenido matemático sobre todo en dos subdominios: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), y, en menor medida, el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). En el primer subdominio destacan las categorías de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos y, en menor medida, recursos, materiales virtuales. En el segundo subdominio resalta el conocimiento sobre las fortalezas y las dificultades de los estudiantes respecto del contenido y formas de interacción con el contenido matemático. Con respecto al tercer subdominio, sólo se pudo evidenciar el contenido de la secuenciación con temas anteriores y posteriores.

Conocimiento de la enseñanza de la matemática KMT

Con referencia al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) movilizado por la profesora, se puede observar un predominio del uso de ejemplos como herramientas para reflexionar y analizar propiedades relacionadas con la proporcionalidad por medio de uso de diferentes registros de representación. Por ejemplo, cuando se usa un ejemplo gráfico para definir el concepto de segmento homólogo [E2.3, U207], cuando usa un ejemplo donde la razón es la misma, aunque sus segmentos sean diferentes [E1.1, U34-37], cuando se usa un ejemplo donde se relacionan los catetos iguales de un triángulo y los ángulos de sus bases [E1.2, U63-65], cuando se usan ejemplos de segmentos proporcionales donde los segmentos no son enteros [E3.3., U261-267], o cuando cambia de posición, tamaño y valores diferentes ejemplos de triángulos semejantes [E4.3, U319-328] [E4.4, U329-339].

Los anteriores ejemplos muestran una relación entre el uso del ejemplo como estrategia (KMT) para establecer propiedades usando registros de representación (KoT), lo que evidencia la décimo primera relación **(11)** del análisis del MTSK de la profesora, en este caso, entre el KMT y el KoT.



De igual forma, destaca el uso del ejemplo como una herramienta para establecer la definición de un concepto, por ejemplo, cuando se usa un ejemplo numérico para definir la razón entre segmentos [E1.1, U5], cuando se usan ejemplos de situaciones no proporcionales para definir la proporcionalidad por contraejemplos [E1.5, U141-147], [E1.5, U150-156], cuando se usa un ejemplo gráfico para definir el concepto de segmento homólogo [E2.3, U207], o cuando se usa un ejemplo para definir la semejanza de dos triángulos [E4.1 U 307], [E4.5, U340-357]; lo cual es evidencia, en todos estos casos, de cómo se hace uso, por un lado, del ejemplo como herramienta para la enseñanza (KMT) y al mismo tiempo se hace necesario tener claridad con respecto a los conceptos a definir, es decir, un conocimiento rico

de los temas, en este caso, de las definiciones (KoT), evidenciando así la décimo segunda relación **(12)** encontrada del MTSK movilizado por la profesora.



También se pudo observar el uso de preguntas orientadoras como herramientas para establecer definiciones o propiedades, lo cual se considera como otra evidencia de relación entre el KMT y el KoT movilizado por la profesora **(13)**, por ejemplo, cuando se hacen preguntas orientadoras para definir la razón como una relación entre dos segmentos [E1.1, U29], cuando se pregunta por la relación entre dos razones como estrategia para establecer la proporcionalidad entre estas [E2.2, U187-189], o cuando se hacen preguntas orientadoras para definir la proporcionalidad como una relación entre dos pares de segmentos [E3.3, U259].



Asimismo, se observó el uso de los ejemplos como una herramienta para mostrar procedimientos como otra relación entre el KMT y el KoT movilizado por la profesora **(14)**, por ejemplo, cuando se muestran ejemplos para encontrar razones entre dos segmentos usando el procedimiento de la simplificación. [E1.1, U18], cuando se usa un ejemplo que cumple con la relación de proporcionalidad para probar el método de medios y extremos [E1.2, U49-52], el uso de un ejemplo de proporcionalidad geométrica entre rectas transversales y paralelas para que sea replicado por los estudiantes [E2.2, U172-193], o el uso de un ejemplo del teorema de Tales, donde se tienen dos incógnitas para mostrar el procedimiento de medios y extremos y el tratamiento algebraico de situaciones [E3.4, U271-293].



En una menor medida se evidencia el uso de la evocación de conceptos construidos previamente para resolver en problema de proporcionalidad, pues sólo se pudo observar en dos ocasiones, cuando se evoca la definición de proporcionalidad para resolver un problema de relación entre razones [E1.4, U-93-101] y cuando se evoca el concepto de semejanza para resolver un problema de la búsqueda del lado de un triángulo que es semejante a otro [E4.1 U298-300].

Se considera que, para hacer una evocación como estrategia efectiva, es necesario que la profesora tenga claridad sobre la propiedad o la definición que desea abordar, en este caso, la proporcionalidad y la semejanza; es decir, una claridad sobre el conocimiento de los temas (KoT), lo cual evidenciaría la relación entre la evocación como una estrategia (MKT) y el conocimiento de las propiedades y las definiciones de proporcionalidad y semejanza (KoT) **(15)**



Con respecto al conocimiento de recursos y materiales virtuales, se pudo observar que la profesora, en el transcurso de todas las clases para mostrar registros de representación verbales, escritos y gráficos **(16)**, hace un uso adecuado del tablero como recurso para visualizar propiedades y procedimientos asociados al establecimiento de razón, proporcionalidad, tratamiento algebraico de situaciones y semejanza entre triángulos.



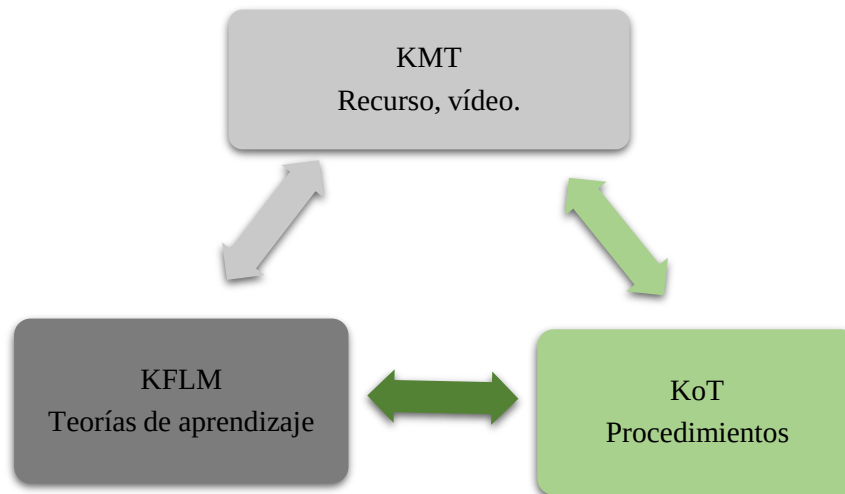
El uso de las escuadras como recurso se destacó en varias sesiones de clase. Una relación que se pudo establecer entre este subdominio y las categorías del KoT **(17)** fue la relación existente entre el uso de este recurso y la presentación de propiedades como la relación entre ángulos iguales a lados iguales en un triángulo [E1.3, U 65] o procedimientos como la construir una recta paralela a una paralela dada [E1.6 U168-170].



De igual forma, se evidenció el uso del lenguaje gestual como un recurso para representar conceptos geométricos, por ejemplo, el concepto de segmentos homólogos [E2.2, U210] y la proporcionalidad entre segmentos homólogos [E3.2, U252-254]. Para esto es necesario que la profesora tenga el dominio, por un lado, de la propiedad o el concepto a mostrar (KoT, propiedades) y, por el otro, del uso de uno o varios sistemas de representación como el verbal, escrito o gráfico (sistemas de registro), mostrando así una relación entre estas categorías **(18)**.



En menor medida se evidenció el uso de vídeos para ejemplificar problemas relacionados con la búsqueda de segmentos desconocidos usando las propiedades de la proporcionalidad [E4.1, U294]. Se considera que el uso de este tipo de recursos puede relacionarse con la presentación de las aplicaciones en el mundo real y el establecimiento del procedimiento del teorema de Tales; todos estos elementos pertenecientes al KoT. Esto también puede relacionarse con el KFLM, pues, por medio vídeos, se pueden observar y adquirir una mejor comprensión de las representaciones y los procedimientos sobre proporcionalidad, estableciendo así otra conexión **(19)**.



Finalmente, se observó un indicio de la categoría de recursos, materiales virtuales, con respecto al uso, potencialidades y limitaciones, del tipo de papel seleccionado para elaborar construcciones geométricas. Esto se aprecia dado que inicialmente se usa una hoja en blanco para construir rectas paralelas a una recta dada, la cual corta dos rectas transversales, y en la siguiente sesión se usa una hoja con cuadrícula. Se considera que la decisión de usar hojas en blanco está relacionada con la comprensión del procedimiento de construcción de rectas paralelas sin necesidad de usar una unidad de medida o una cuadrícula de guía (KoT) [E2.1, U157-171], en cambio en la sesión posterior se usa hoja cuadrículada, pues ya no es relevante la construcción de las rectas paralelas, sino el establecimiento de segmentos homólogos y el procedimiento de medios y extremos [E3.2, U242].

De esta forma, la decisión de usar un determinado material podría considerarse como una estrategia para construir y clarificar las propiedades o las definiciones de conceptos como rectas paralelas, segmentos homólogos o el procedimiento de medios y extremos, lo cual evidencia una relación entre el uso de recursos (KMT) y el KoT como la relación establecida número veinte (20).

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas KFLM

Con respecto al conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), se establecieron cuatro evidencias relacionadas con las fortalezas y dificultades. La

profesora identifica la dificultad que tienen los estudiantes para nombrar una razón, pues usan las fracciones como “tres quintos” para nombrar la razón “tres es a cinco”, al observar esta dificultad emplea su conocimiento sobre registros de representación verbal respecto del concepto de razón para superar la dificultad de comprensión de la razón como un cociente entre segmentos y no como fracción; en esta situación se observa una relación entre las fortalezas y dificultades (KFLM) y el registro de representación (KoT) **(21)**



La segunda evidencia de fortalezas y dificultades está relacionada con el conocimiento movilizado por la profesora al tratar las dificultades de la comprensión de proporcionalidad cuando se involucran situaciones de medición que usan milímetros [E2.2, U172-193], pues, aunque los estudiantes hacen mediciones y calculan las razones entre lados homólogos, no encuentran que estas razones sean totalmente iguales debido a que usaron los milímetros como unidad de medida. Esta dificultad es superada por la claridad que tiene la profesora con respecto al conocimiento de la igualdad entre razones de segmentos homólogos de rectas transversales que son cortadas por paralelas (propiedades KoT), pues ella menciona que de acuerdo al teorema de Tales, aunque las razones construidas por los estudiantes no den exactamente el mismo cociente, la igualdad se cumple, y el desajuste se debe al uso de una unidad de medida como el milímetro; evidencia, en este caso, de una relación entre KFLM y las propiedades KoT **(22)**.



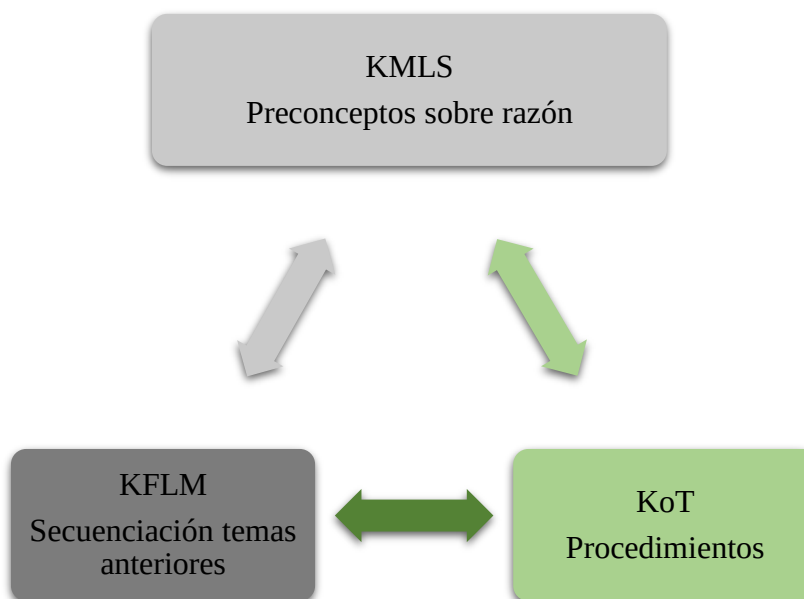
Con respecto a la categoría de formas de interacción con el conocimiento matemático, se pudo encontrar que la profesora moviliza el conocimiento de posibles errores de medición en la construcción de razones [E2.2, U187], [E2.2, U193] como una situación a la que se

puede enfrentar un estudiante. Por medio de su conocimiento de las propiedades de la proporcional menciona que, aunque estos procesos de medición no sean exactos, el teorema de Tales se aplicará para cualquier pareja de segmentos homólogos, mostrando una relación entre KMLS y su conocimiento del tema, en este caso las propiedades (KoT) (23).



Conocimiento de los estándares del aprendizaje de las matemáticas KMLS

Finalmente, con respecto a la secuenciación con temas anteriores y posteriores (KMLS), se pudo observar que la profesora emplea esta técnica en tres ocasiones. Las dos primeras aparecen cuando menciona, como trabajo previo, el uso de razones enteras en clases anteriores [E1.1, U5] y cuando menciona el trabajo de simplificación de fracciones hechas con antelación [E1.1, U-24]; en estas se hace referencia una relación entre el KFLM y un dominio de procedimientos específicos asociados a la proporcionalidad como el establecimiento de una razón o la simplificación de una fracción (KoT) (24).



Mientras tanto, en la tercera ocasión, hace uso de la secuenciación de temas cuando la profesora menciona la importancia de tener claridad sobre los conceptos de razón y reconocer qué dice el teorema de Tales para poder hacer aplicaciones de dicho teorema en situaciones reales [E3.1, U235,238], lo cual está más asociado a la comprensión que tiene la profesora sobre las propiedades del tema y cómo este debe ser aprendido, es decir, se muestra una relación entre KFLM y propiedades (KoT) (25).



6. CONSTRUYENDO EL MTSK PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD

Después de hacer un análisis cronológico acerca de los elementos pertenecientes al MTSK observados en las cuatro sesiones de clase y establecer las relaciones entre los subdominios del MTSK de la profesora, se considera importante dar cuenta de una segunda parte de la discusión de los resultados en la cual se evidencien las oportunidades del conocimiento especializado que evoca al investigador, de acuerdo con lo observado en el aula. El concepto de oportunidad se enciende como aquellas situaciones evidenciadas en la práctica que pueden ser enriquecidas por la teoría tal y como lo propone la metodología bottom-up, top-down, pues por medio de estudio de caso, se están construyendo nuevas comprensiones sobre el conocimiento movilizado por la informante sobre la enseñanza de la proporcionalidad.

Este segundo apartado fue elaborado por el investigador con la validación del grupo de expertos, aspecto que aporta a la veracidad del análisis presentado. Este se basó en la relación partiendo de la sensibilidad teórica de Strauss y Corbin, (2002) y la información sistematizada en las sesiones, tal y como lo expone la propuesta bottom-up, top-down.

Se considera que el establecimiento de las oportunidades aportó como información complementaria del MTSK usado por la profesora en la enseñanza de la proporcionalidad, lo cual fue presentado en el apartado anterior. Las evidencias, los indicios y las oportunidades

observados en el MTSK de la profesora han sido integrados a los elementos teóricos consultados inicialmente, los cuales aportaron a la sensibilización teórica sobre la proporcionalidad.

En este apartado, igual que en el apartado anterior, se organizará la información usando los subdominios de MTSK e igualmente se emplearán tablas al finalizar la discusión de cada subdominio para enunciar los indicadores propuestos. Una vez terminada la discusión, se presentarán las conexiones existentes entre cada conocimiento para relacionarlo finalmente en un gráfico, lo cual servirá de base, junto al ya diseñado respecto del conocimiento observado de la profesora, para establecer las relaciones que permitan responder a la pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento especializado puede identificarse en el análisis de episodios de aula que permita una aproximación a la caracterización del conocimiento especializado sobre proporcionalidad? Se presentarán estos conocimientos poniendo primero el foco en los relativos al MK, y después los relativos al PCK, aunque se mostrarán también las relaciones entre estos dos dominios.

MK

El primero de los subdominios que se incluye es el conocimiento de los temas (KoT), el cual se entiende como el conocimiento disciplinar que incluye la fenomenología y aplicaciones de un contenido, los procedimientos, las definiciones, propiedades y sus fundamentos, y los diferentes registros de representación. Evocando lo observado en las clases y usando los planteamientos de los fundamentos teóricos, se pueden observar diferentes oportunidades que aportan a la reflexión sobre cuáles otros conocimientos especializados sobre proporcionalidad podrían movilizarse en una gestión alternativa de los contenidos trabajados por la profesora, los cuales serán comentados a continuación.

Dado que la profesora inicialmente busca definir los conceptos de razón y proporción por medio de diferentes ejemplos, se considera esta primera característica como una oportunidad para construir previamente definiciones de conceptos previos a la idea de razón y proporción, como, por ejemplo, los conceptos de magnitud y cantidad de magnitud, sus definiciones, propiedades, características, ejemplos y representaciones, elementos que

antecedes a la construcción del concepto de razón (1, KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos, procedimientos)



También se considera que la construcción de conceptos como magnitud y cantidad de magnitud son necesarios para establecer el concepto de razón e igualdad entre razones como proporcionalidad, además de abordar la proporcionalidad como una relación multiplicativa entre cantidades extensivas (mensurables y sumables) (2, KoT, Propiedades).



Los elementos planteados en la relación 1 y 2, concuerdan; este planeamiento concuerda con las ideas expresadas por Fiol y Fortuny (1990), quienes comentan que previo a la construcción de la proporcionalidad se debe tener un manejo y comprensión de conceptos como razón y proporción, planteamiento enriquecido por Rapetti (2003), quien también propone que sean vistas previamente las relaciones entre la fracción como racional y decimal.

La propuesta de enseñanza movilizadora por la profesora puede ser una oportunidad para incluir las interpretaciones de proporcionalidad inversa y proporcionalidad aritmética (3, KoT, propiedades), aprovechando situaciones como el establecimiento de una razón que use magnitudes diferentes a la longitud, como el peso, la masa, el volumen, la fuerza o el precio de un determinado objeto, para así presentar una visión más amplia del concepto de proporcionalidad, pues en los conocimientos movilizadas por la profesora únicamente se ha abordado la proporcionalidad directa desde una perspectiva geométrica usando como magnitud la longitud. La consideración de la importancia de trabajar además de situaciones de proporcionalidad directa, situaciones de proporcionalidad inversa y situaciones expuestas por Ruiz (2006), pues desde la perspectiva del autor, cada tipo de estas tres situaciones aportan en la construcción del pensamiento proporcional como fenómeno.



Con respecto a los procedimientos, en la mayoría de ocasiones se observó que la profesora trabajó la verificación de la proporcionalidad entre cantidades de magnitudes y la búsqueda de segmentos desconocidos, sin embargo, se considera que la proporcionalidad también debe relacionarse con procedimientos como el uso de escalas numéricas y gráficas, el establecimiento de porcentajes y el uso de la regla de tres para conocer un valor desconocido y el establecimiento de la función de proporcionalidad a partir de un abordaje desde la proporcionalidad aritmética (KoT, procedimientos).

Para aplicar estos procedimientos es necesario usar diferentes tipos de registros de representación asociados a la proporcionalidad, como el verbal, el tabular, el icónico, la representación en el plano cartesiano, y las expresiones algebraicas o ecuaciones, estableciendo así una relación entre los registros de representación como una forma de acceder a los procedimientos (4), argumento que coincide con los planteamientos de autores como Valverde (2012), Fiol y Fortuny (1990), quienes presentan tablas donde se relaciona la importancia del paso de un tipo de representación a otra, por ejemplo, cómo por medio de representaciones tabulares o gráficas se aporta en la generalización y la relación entre variables, el uso adecuado de escalas o la interpretación e interpolación de datos.



De igual forma, evocando situaciones como la búsqueda de segmentos desconocidos que estén en posición de Tales y los procedimientos como la regla de tres para determinar un segmento desconocido, se considera que estos pueden ser una oportunidad para establecer una relación entre las propiedades de la proporcionalidad, como la existencia del isomorfismo de medidas para establecer la proporcionalidad entre magnitudes extensivas y la desigualdad triangular (KoT, propiedades), y la construcción de representaciones gráficas (KoT, registro

de representación) usando adecuadamente instrumentos como escuadras, reglas y compás (KMT, recursos y materiales) (5).

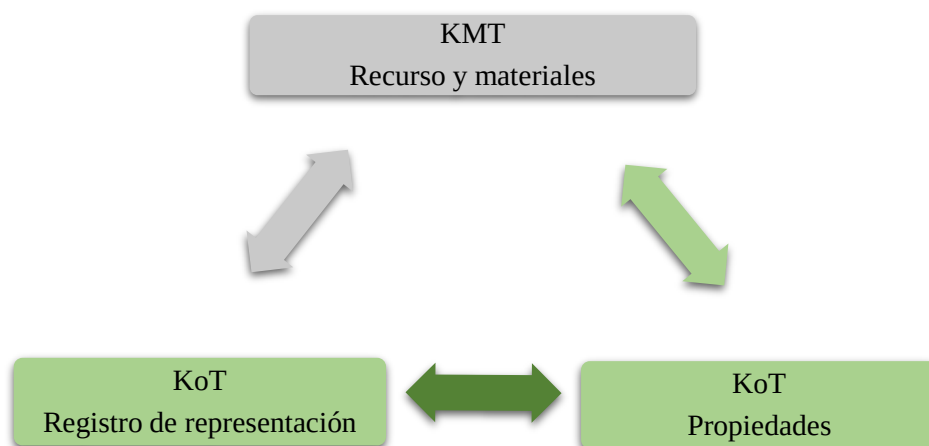
Justamente, la definición y comprensión de la proporcionalidad desde la perspectiva de isomorfismos es propuesta de Fiol y Fortuny (1990), quienes hacen uso de las teorías sobre funciones para mencionar que dos magnitudes son proporcionales si se puede establecer un isomorfismo entre sus cantidades $f: M \rightarrow N$ tal que:

I. Si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$, la relación de orden es monótona.

II. y $f(a + b) = f(a) + f(b)$, es decir, se conserva el orden y la suma.

III. Si la magnitud es continua, la proporcionalidad f queda unívocamente determinada dando la cantidad homóloga $f(a)$ de una cantidad cualquiera y en particular las cantidades correspondientes $f(a)$ a una unidad.

Desde esta perspectiva se aporta, por un lado, en la superación de la idea de que la proporcionalidad se asocia únicamente a segmentos y, por otro lado, en la comprensión de la proporcionalidad desde una perspectiva analítica a partir del uso de funciones, característica que hace necesario hacer diferentes tipos de representaciones y diferentes tipos de materiales.



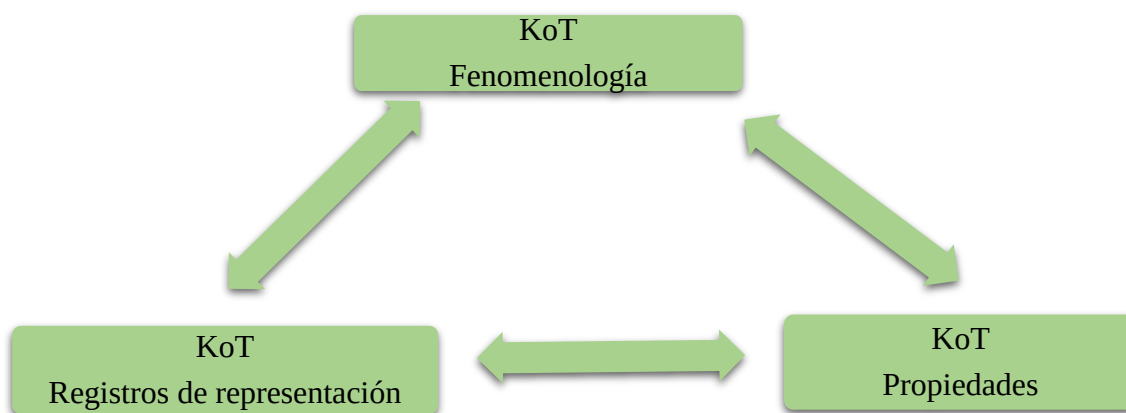
Con respecto a la fenomenología y las aplicaciones relacionadas con la proporcionalidad, la profesora usó algunas situaciones en contexto real donde se buscaba la aplicación de procedimientos para encontrar una longitud desconocida que se encontraba en posición de Tales. Sin embargo, se considera que para establecer elementos desde lo fenomenológico y las aplicaciones, es necesario el estudio en clase de la evolución histórica de este concepto, pues puede aportar en la comprensión de las situaciones reales que aportaron en la construcción de la proporcionalidad y la elaboración de situaciones del contexto real donde se puede hacer uso de la proporcionalidad.

Esta idea coincide, por ejemplo, con los planteamientos de Chase (1997), quien menciona la importancia de la comprensión de los problemas 66 y 69 del papiro Egipcio del Rhind, donde se buscan cantidades desconocidas y que pueden aportar en la identificación de la relación de proporcionalidad entre cantidades de magnitud (KoT, propiedades); conocer el procedimiento griego de antifairesis, que puede aportar en la caracterización del concepto de razón (KoT, procedimientos); o comprender los problemas de “Los Nueve Capítulos” propuestos en China, o los comentarios del matemático árabe Omar Al-Khayyam, los cuales aportan en la comprensión de que una razón se puede también establecer entre cantidades de magnitud diferentes a las longitudes, trascendiendo la comprensión del concepto de proporcionalidad únicamente desde lo geométrico y construyendo un significado más amplio del concepto (KoT, propiedades). Lo anterior evidencia la relación de la fenomenología con el KoT, especialmente con propiedades (6) y procedimientos (7).



De igual forma, un aspecto que se considera como relación entre los registros de representación, las propiedades de la proporcionalidad y la fenomenología y sus aplicaciones, es el uso del Teorema de Tales para dividir un ángulo en varias partes iguales o para dividir un segmento en partes iguales (8). Relación que es apoyada por los planteamientos de Fiol y Fortuny (1990), quienes comentan que los términos de razón, proporción y proporcionalidad adquieren un mayor significado cuando se usan diversos lenguajes, situaciones, expresiones

y fenómenos. Además, es importante mencionar los aportes de Rapetti (2003), quien menciona que, en el contexto de la enseñanza de la matemática, los conceptos no deben presentarse directamente desde una expresión formal, antes de esto se debe presentar un momento de modelización en el mundo de los objetos físicos para una mejor comprensión del objeto, aspecto que claramente es tenido en cuenta por la profesora al presentar posibles aplicaciones en el mundo real del teorema de Tales.



Al establecer las oportunidades relacionadas con los registros de representación, se observó que la profesora hacía uso de registros de tipo gestual, verbal, tabular, icónico, la representación en el plano cartesiano, y las expresiones algebraicas o ecuaciones, las cuales eran usadas para ejemplificar procedimientos o propiedades. Se considera que el uso de diferentes registros de representación también se puede relacionar con el conocimiento de las fortalezas y dificultades de los estudiantes (KFLM) en el proceso de construcción del concepto de proporcionalidad, por ejemplo, cuando la profesora presentó la razón $\frac{2}{4}$, al observar que los estudiantes la llaman “dos cuartos”, se hace un cambio de registro de representación alterna como $2 : 4$ o “dos es a cuatro”, las cuales buscan superar la dificultad de asociación entre una fracción y una razón (9).



Con respecto a esta relación se puede comentar que esta dificultad ya había sido planteada por Rapetti (2003), quien menciona que uno de los errores clásicos asociados a los conceptos previos a la proporcionalidad es el significado erróneo de la fracción como relación parte-todo y como cociente. Se considera que por medio de la presente investigación se puede establecer cómo el conocimiento sobre determinadas propiedades o procedimientos podrían superar dicha dificultad.

De igual forma, es importante mencionar la relación entre el uso de la representación gráfica y la resolución de problemas en contextos geométricos (prácticas particulares del quehacer matemático, KPM) (10), la cual se puede observar, por ejemplo, cuando se busca establecer el valor de un segmento desconocido que está entre rectas paralelas que son cortadas por rectas transversales, pues para resolver esta situación es necesario elaborar una representación gráfica con el fin de establecer cuáles serán los segmentos homólogos, para así poder aplicar el Teorema de Tales y el tratamiento algebraico de situaciones lineales.



En este caso, se considera que se pudo determinar que la claridad sobre las prácticas del quehacer matemático hace que el profesor y el estudiante puedan tener claridad sobre preguntas como ¿qué es verdad?, ¿cómo se puede estar seguro de lo que se considera verdad? y ¿por qué es verdad?, incógnitas analizadas por Brodie (2010). Se considera que por medio de la presente investigación se da cuenta de la importancia del rol del manejo de un amplio sistema de registros de representación como herramientas para argumentar como práctica del quehacer matemático.

Con respecto al conocimiento de conexiones, en esencia es el conocimiento de la estructura matemática (KSM) que permite disponer de una visión de conjunto del conocimiento matemático con sus conexiones de simplificación o complejización (que

permiten ver tanto un contenido elemental desde una perspectiva avanzada, como un conocimiento avanzado desde una perspectiva elemental), las conexiones auxiliares (que permiten hacer un uso instrumental de un concepto o procedimiento en el trabajo con otro contenido), y las conexiones transversales (que se refieren a ideas matemáticas que enlazan varios núcleos de contenidos).

En ese sentido, en el transcurso de las sesiones aparecen conceptos, definiciones, procedimientos o propiedades que están relacionados con otras partes de las matemáticas, que se convertirán en un conocimiento necesario para una comprensión amplia de las mismas, en este caso emergen conceptos como recta, segmento y las propiedades de los triángulos, el caso de la proporcionalidad geométrica (11) y los conceptos de pendiente, función lineal en el caso de la proporcionalidad aritmética (12).



Con respecto estas relaciones de complejización se puede mencionar que coinciden con los planeamientos de Fiol y Fortuny (1990), quienes comentan que los términos de razón, proporción y proporcionalidad adquieren un significado ubicándolos con la noción de función lineal, pues esta noción es un modelo que sintetiza diversos lenguajes, situaciones, expresiones y fenómenos, mostrando así la función lineal como un escenario para la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de proporcionalidad.

Lo anterior es complementado con los aportes de Solomon (1987), quien menciona la importancia de hacer énfasis en los contextos gráficos, pues demuestran ser muy valiosos en términos del establecimiento de asociaciones o relaciones entre diferentes conceptos sobre proporcionalidad, aportando en la proyección de temáticas futuras relacionadas con la proporcionalidad como la trigonometría, teorema de Pitágoras.

Con respecto a las conexiones de simplificación, los conceptos y las propiedades de las fracciones y las relaciones multiplicativas emergen como conceptos que permiten la comprensión de la proporcionalidad, desde una perspectiva más elemental (13).



Algunos de estos elementos están planteados por autores como Godino y Batanero (2012), Fernández y Linares (2012), Khoury (2002), quienes mencionan la importancia de conceptos como la razón aritmética como división entre dos cantidades de magnitud, el uso y comparación y medición de razones, la exploración de razones no enteras, el trabajo de aspectos cualitativos sobre las razones y el uso de gráficas cartesianas y tablas, como estructuras previas a la construcción de pensamiento proporcional.

De acuerdo con las oportunidades observadas y la sensibilidad teórica, se pueden establecer como conexiones transversales los conceptos y las propiedades de la igualdad y la constante de variación, pues son aquellos conceptos que pueden enlazar varios aspectos de la proporcionalidad (14).



Con respecto a la constante de variación como conexión transversal, Guarín y Escolano (2009) mencionan la importancia de presentar dicha constante más allá de la construcción de tablas de valores directamente proporcionales, mostrando la necesidad de que esta sea trabajada en diferentes contextos y se muestre como un concepto que relaciona transversalmente con la proporcionalidad.

Con respecto a las conexiones auxiliares, se considera que pueden estar las representaciones numérica y gráfica de los porcentajes, dado que este tipo de representaciones son necesarias para la comprensión de una parte del concepto de proporcionalidad, a partir de la proporcionalidad a través de los porcentajes (15).



Esta relación coincide con las ideas de Fiol y Fortuny (1990), quienes consideran la proporcionalidad como un núcleo que debe ser construido por medio de conceptos auxiliares como fracción y número racional, número decimal y problema de la medida, cambio de unidades, cambio de escalas, problemas de repartos proporcionales, problemas de regla de tres, porcentajes, probabilidad, gráficas de funciones lineales, teorema de Tales, semejanza de figuras, problemas de mezclas y aleaciones, escalas, mapas y maquetas. Propuesta que es complementada por los planteamientos de Godino y Batanero (2002), quienes posicionan el uso interpretación, cálculo y comparación de porcentajes, además de la elaboración de estrategias personales de cálculo mental y los porcentajes sencillos como parte de un bloque temático necesario para la comprensión de la proporcionalidad junto con la comprobación de conjeturas sobre la regla que sigue una serie o clasificación de números.

Al establecer el conocimiento de la práctica matemática, inicialmente es necesario comprender este conocimiento como aquellas formas de proceder características del trabajo matemático, relacionando aspectos como la comunicación, la argumentación y la demostración en matemáticas, así como el conocimiento sobre qué es definir y qué características debe tener un enunciado matemático (definiciones, proposiciones o propiedades), el conocimiento de procesos asociados a la resolución de problemas (heurísticos) además de prácticas del quehacer matemático como la modelización.

De acuerdo con las oportunidades observadas y la sensibilidad teórica, se puede mencionar que la elaboración de representaciones gráficas puede aportar en la comprensión de un problema desde la proporcionalidad geométrica, en las etapas iniciales de resolución de problemas de acuerdo con Polya, especialmente, para responder preguntas como, ¿cuál es la incógnita?, ¿hay suficiente información?, ¿cuáles son los datos que hacen parte del problema? o ¿a dónde se quiere llegar? (16).



Aspecto que también es presentado por Goizueta (2011), quien menciona la importancia de la argumentación en la comprensión y resolución de un problema sobre proporcionalidad por medio de una investigación sobre los argumentos mencionados por un grupo de profesores con respecto a los aportes o hipótesis planteadas por los estudiantes en el marco de resolución de problemas sobre proporcionalidad en diferentes contextos.

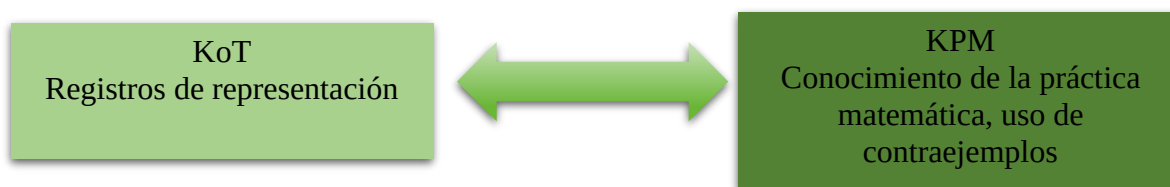
De igual forma, se considera que las representaciones gráficas sean una herramienta que puede aportar en la construcción de heurísticas para la resolución de problemas como la visualización, la exploración y la reformulación, pues, por medio de estas, se pueden establecer relaciones como razones entre segmentos o cantidades de magnitud e identificación de segmentos homólogos (17).



Lo anterior coincide con los planteamientos de Valverde (2012), quien hace una juiciosa presentación de diferentes registros de representación asociados a la proporcionalidad, entre estos: el simbólico, el verbal, el algebraico, el cartesiano, el gráfico, el tabular, los iconos y diagramas. Se considera que por medio del presente trabajo se puede evidenciar que este tipo de sistemas de representación, la capacidad de pasar de un tipo de representación a otro y las relaciones entre diferentes tipos de representaciones, pueden ser heurísticos para resolver problemas asociados a la proporcionalidad.

Dado que la profesora sólo verifica con ejemplos específicos la demostración del teorema de Tales, se considera que por medio de representaciones gráficas que muestren

contraejemplos se pueden establecer características de la veracidad o falsedad de una demostración (18).



Con respecto a la relación entre estos elementos, Godino (2002) también menciona la importancia de la presentación de ejemplos y contraejemplos, donde se cumple la proporcionalidad como propiedad. Esta investigación da cuenta de que para hacer una efectiva presentación de estos ejemplos y contraejemplos es necesario hacer un uso adecuado un conjunto de registros de representación.

A modo de síntesis, en la tabla 18, en la que se presentarán las categorías del subdominio MK de acuerdo con las evocaciones y la sensibilidad teórica, se puede complementar el MTSK movilizado por la profesora.

Subd.	Cat.	Evidencia o indicio del MTSK
KoT	Definiciones y sus propiedades y fundamentos	Características de la proporcionalidad geométrica
		Características de la proporcionalidad aritmética
		Características de la proporcionalidad directa
		Características de la proporcionalidad inversa
		Propiedades de magnitudes extensivas
		Propiedades de cantidades de magnitud
		Relaciones multiplicativas entre cantidades extensivas
		Propiedades de isomorfismos de medidas
		Propiedad de la desigualdad triangular
		Equivalencia entre definiciones de razón y proporcionalidad desde una perspectiva geométrica y aritmética
	Procedimientos	Establecimiento de proporcionalidad entre cantidades de magnitudes
		Construcción de escalas numéricas y gráficas
		Establecimiento de porcentajes
		Uso de la regla de tres para conocer un valor desconocido
		Establecimiento de la función de proporcionalidad

		Elaboración de repartos proporcionales
	Fenomenología y sus aplicaciones	Problemas de búsqueda de cantidades desconocidas usando principios de proporcionalidad
		Problemas de construcción de razones por medio de antifairesis
		Problemas de establecimiento de razones entre cantidades de magnitud diferentes a las longitudes
		Uso del Teorema de Tales para dividir un ángulo en varias partes iguales o para dividir un segmento en partes iguales
	Registros de representación	Representación gestual de rectas paralelas
		Representación gestual de segmentos homólogos
		Representación verbal relacionando linealmente dos cantidades de magnitud
		Representación tabular de la variación de dos magnitudes
		Representación icónica de la variación de dos magnitudes
		Representación en el plano cartesiano de las relaciones lineales entre dos variables
		Representación de expresiones algebraicas o ecuaciones para establecer una relación lineal entre dos variables
KSM	Con. Simul	Interpretación de fracciones como razón
		Relaciones multiplicativas
	Con. Compl	Recta, segmento y las propiedades de los triángulos
		Pendiente, función lineal
	Conexión transversal	Igualdad entre expresiones algebraicas
		Constante de variación
	Conexión auxiliar	Representaciones numérica y gráfica de porcentajes
KPM	Formas de val. y dem.	Representaciones gráficas que muestren contraejemplos se puede establecer características de la veracidad o falsedad de una demostración
	apel. simb.	
	er. plan.	Uso de representaciones gráficas para interpretar la información dada en un problema en contextos geométricos y aritméticos

	Prác. Mat.	Visualización, exploración y reformulación de problemas de proporcionalidad aritmética y geométrica
	Cond. n. y s.	

Tabla 18 Evidencias e indicios del dominio MK

PCK

En esta segunda parte del análisis se indagará por las oportunidades generadas a partir del conocimiento didáctico del contenido con referencia al conocimiento de la enseñanza del concepto de proporcionalidad, para dar cuenta de esto, se hará uso del conocimiento observado en las clases, además de la sensibilidad teórica con respecto a la proporcionalidad.

Para dar cuenta de las oportunidades relacionadas con el KMT se iniciará por el rol de las estrategias y ejemplos (KMT, estrategias) y su relación con el conocimiento de las propiedades y sus fundamentos, pues se pudo observar que la claridad con la que cuenta la profesora con respecto a la definición y las propiedades del concepto de razón y proporción desde una perspectiva geométrica facilitó, por ejemplo, el uso de diferentes tipos de representaciones como la verbal, gráfica y algebraica (KoT, registros de representación) (19).



Además, por medio de la claridad del conocimiento de las propiedades y sus fundamentos (KoT), se pudieron ver oportunidades como el cambio en los tipos de ejemplos de razón y proporcionalidad que se presentaron a los estudiantes (KMT, ejemplos) (20), por ejemplo, cuando la profesora cambió el ejemplo de proporcionalidad mostrado (2 es a 4 como 4 es a 8), observó que los estudiantes supusieron que la proporcionalidad significaba la mitad, ante esto, cambió el ejemplo (2 es a 6 como 3 es a 9), mostrando así que, para establecer la proporcionalidad, lo importante es que los dos pares de segmentos tengan la misma razón.



Con respecto a las relaciones 19 y 20, se puede comentar que estas coinciden con los planteamientos de Fiol y Fortuny (1990), pues ellos indagan sobre la relación entre el conocimiento de un amplio repertorio de representaciones y cómo estas pueden enriquecer y potencializar la elaboración de ejemplos transparentes¹³. Los autores comentan la importancia de la interpretación de la constante de proporcionalidad en diferentes tipos de representación como las cartesianas, tabulares y algebraicas en el proceso de construcción de significado de la proporcionalidad.

Por medio de la presente investigación también se considera importante mencionar que además de los conocimientos sobre los registros de representación es necesario resaltar el rol de las propiedades y sus fundamentos, pues son los elementos que finalmente se quieren mostrar por medio de los registros de representación.

En relación con los materiales y recursos, se pueden determinar oportunidades como la elaboración de mapas y puzles, los cuales están asociados con la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica, recursos que están directamente relacionados con el conocimiento de las propiedades y fundamentos (KoT) (21), pues, por ejemplo, cuando la profesora se inclina por hacer un acercamiento de la proporcionalidad por medio de la proporcionalidad geométrica, hace uso de recursos que potencializan la visualización de características y propiedades de conceptos como razón y proporcionalidad. Lo cual es mencionado por Fiol y Fortuny (1990), quienes proponen iniciar la enseñanza desde fuentes geométricas, primero a partir de dibujar o aparejar triángulos semejantes y más adelante rectángulos semejantes, cualificando sus relaciones, comparando su base y su altura, para, posteriormente, iniciar la comparación de longitudes de figuras semejantes.



¹³ Se entiende como transparente un ejemplo en el cual se pueda evidenciar claramente, sin ambigüedades, la propiedad o definición que se quiera de mostrar.

Además, se considera que el uso de mapas y puzles (KMT, recursos) también está relacionado con las teorías de enseñanza (22), pues cuando la profesora usa materiales como estos para trabajar la proporcionalidad geométrica y aritmética, está haciendo uso de los planteamientos propuestos de enseñanza como la de Fiol y Fortuny (1990), quienes hacen énfasis en la manipulación de material concreto haciendo sistematización y diferentes tipos de representación (como la gráfica) asociados a la proporcionalidad.



De igual forma, se considera que, de acuerdo con las oportunidades observadas y la sensibilización teórica, el conocimiento de diferentes acercamientos de enseñanza de la proporcionalidad está relacionada con aspectos como el uso de determinados ejemplos (23), pues en la propuesta de Godino (2002) para la enseñanza de la proporcionalidad, el autor propone inicialmente hacer una aproximación a los conceptos de razón y proporción de números enteros, aspecto que es tenido en cuenta por la profesora. Esta característica puede ser una oportunidad para abordar otros elementos mencionados por el autor, como, por ejemplo, la interpretación, el cálculo y la comparación de porcentajes, además de la orientación y representación del espacio.



Con respecto a la relación entre las teorías de aprendizaje y el conocimiento de diferentes procedimientos relacionados con proporcionalidad (24), se considera que, aunque la profesora sólo hace explícito un procedimiento para encontrar el valor de una longitud desconocida que se encuentra en posición de Tales, es un punto de partida para explorar diferentes procedimientos aritméticos y geométricos y las relaciones entre estos. Para esto,

es necesario hacer uso, por ejemplo, del concepto de campos conceptuales de Vergnaud, que, en la propuesta de Ceballos (2012), es usado como una herramienta que articula el paso de relaciones aditivas a relaciones multiplicativas por medio de una propuesta de enseñanza; para esto es necesario comprender los campos conceptuales como un conjunto de situaciones de interacción que requieren el dominio de conceptos, variantes operatorios, significados, significantes y representaciones simbólicas que interactúan entre sí.



De igual forma, se considera que las teorías de aprendizaje (niveles de pensamiento proporcional) se relacionan con el uso de diferentes registros de representación (25). Esta relación está planteada en la propuesta de Ruiz (2006), que muestra las diferentes agrupaciones de representaciones relacionadas con el concepto de proporcionalidad. Aunque la profesora hace uso de representaciones gráficas, verbales, tabulares y algebraicas de la proporcionalidad, se considera que estas son oportunidades para hacer una aproximación a representaciones en el plano cartesiano y funcional de la proporcionalidad a través de un modelo funcional, además de hacer uso de representaciones gráficas de diagramas de porcentajes y escalas por medio de mapas, maquetas u otras gráficas.



Además, es necesario considerar la relación entre el conocimiento de las teorías de aprendizaje sobre proporcionalidad y el conocimiento de las fortalezas y debilidades (26), pues se considera que al comprender las propuestas de aprendizaje se pueden prever algunas dificultades que pueden tener los estudiantes en el aprendizaje de conceptos como razón y proporción, por ejemplo, cuando la profesora observa que los estudiantes entienden

erróneamente la proporcionalidad como el doble o el triple de una cantidad de magnitud, modifica los ejemplos presentados para que los estudiantes centren la atención en situaciones en las que se evidencia la proporcionalidad como una variación simultánea de dos cantidades de magnitud.



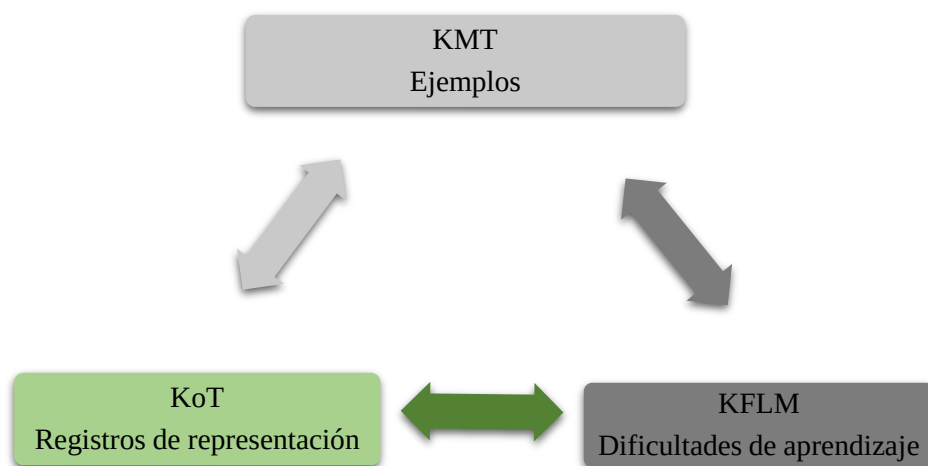
Esta relación entre teorías de aprendizaje y dificultades asociadas a la proporcionalidad, es evidente en Ceballos (2012), quien elabora una propuesta de enseñanza a partir de la teoría de campos conceptuales de Vergnaud y el aprendizaje significativo de Ausubel, iniciando con un test de conocimientos previos, pasando posteriormente por el uso de situaciones de proporcionalidad geométrica, para, seguidamente, presentar situaciones problemas de aplicación relacionadas con proporcionalidad en diferentes contextos (geométrico y aritmético).

Por medio de la propuesta, se busca construir una red de conceptos enlazados que aportan en la comprensión de las propiedades y aplicaciones de la proporcionalidad; entre estos, la superación de las dificultades en la comprensión de conceptos como los números racionales, la equivalencia de fracciones, los números decimales, la semejanza de figuras, las medidas.

De igual forma, el conocimiento de las teorías de aprendizaje ayuda a prever dificultades, como, por ejemplo, el no uso de la estrategia del valor unitario para determinar la constante de variación entre dos magnitudes o la falta de construcción de un significado del porcentaje, como una aplicación específica del concepto de proporción. Un autor como Rivas (2013) presenta categorías de errores sobre proporcionalidad, en las cuales incluye los errores relativos a la solución de problemas sobre proporcionalidad, el uso de estrategias aditivas y las dificultades de la interpretación y el uso de escalas, elementos que también son tenidos en cuenta en los planteamientos de las teorías de aprendizaje.

Al analizar las dificultades de aprendizaje de la proporcionalidad, también es necesario establecer una relación entre esta, los ejemplos y los registros de representación (27), pues de acuerdo con el conocimiento que el profesor tenga sobre las dificultades que puede tener el estudiante para comprender los conceptos de razón y proporcionalidad, podrá presentar registros de representación y ejemplos específicos que aporten a la superación de estas dificultades.

Algunos ejemplos de estas relaciones son: el uso de registros de tipo tabular para establecer la constante de variación entre dos magnitudes, el uso de representaciones gráficas para construir el significado del concepto de porcentaje y su relación con la proporcionalidad, las representaciones en el plano cartesiano, así como la comprensión de las características y las propiedades de las escalas y el uso de problemas que necesiten representaciones algebraicas para hacer el paso de estrategias aditivas a estrategias de tipo multiplicativa.



Estos aspectos son expuestos por diferentes autores, por ejemplo, Rodríguez y Pérez (2003), quienes mencionan la dificultad que presentan los estudiantes al no poder establecer la estrategia de un valor unitario para la resolución de un problema, situación que se puede asociar a determinados tipos de representación y la presentación de determinados ejemplos

para superar dicha dificultad. O, por ejemplo, Rivas (2013), quien muestra errores en el uso de escalas numéricas que se consideran por no indicar las unidades, entendiendo la escala como independiente de la unidad elegida, escenario que también está asociado a un registro de representación (geométrica) y la posible elaboración de ejemplos que puedan ayudar a superar dicho error.

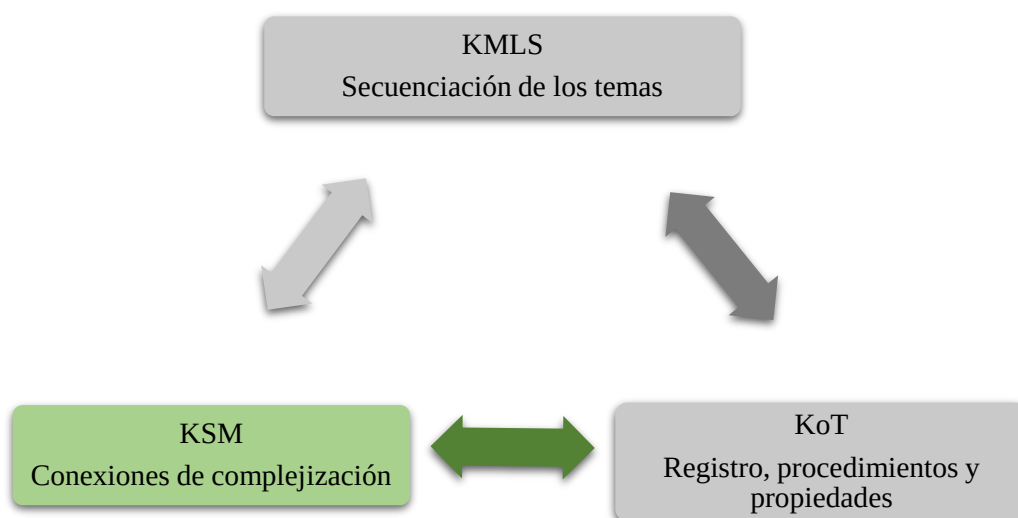
Con respecto al KMLS, se considera que, con base a lo observado en las clases y la sensibilidad teórica adquirida con anterioridad, se pueden determinar varias oportunidades y relaciones, especialmente en relación con cómo la profesora toma decisiones con respecto a los temas que deberían enseñarse, y cómo esos contenidos deberían adaptarse a las necesidades intelectuales y culturales de los estudiantes. En este caso, se observó que la profesora esperó que los estudiantes tuvieran un desarrollo cognitivo relacionado con la clasificación de triángulos, tratamiento algebraico de situaciones lineales, uso de instrumentos como la escuadra, estimación de segmentos y simplificación de fracciones; estos elementos claramente están relacionados con los registros de representación de los procedimientos (KoT) (28).



De igual forma, se considera que el desarrollo conceptual o procedimental esperado está relacionado con el conocimiento de la tensión existente entre los estándares promovidos por instituciones como el Ministerio de Educación y el currículo oficial, el cual, en este caso, dista considerablemente de dichos planteamientos, pues aunque, de acuerdo a MEN (2017), la temática de la proporcionalidad está ubicada en séptimo grado, cuando los estudiantes tienen de 13 a 15 años, en esta ocasión se enseñó a estudiantes de décimo grado, cuyas edades oscilan entre 15 y 18 años; y aunque se suponía que los estudiantes ya deberían conocer ciertos conceptos, representaciones y procedimientos, evidenciaron dificultades en actividades que se supone ya deberían manejar como la estimación de medidas de longitud,

el tratamiento algebraico de situaciones lineales, la simplificación de fracciones y la clasificación de triángulos. Situación que hace reflexionar sobre cuáles podrían ser las variables que hacen que en algunas ocasiones no se cumpla el desarrollo cognitivo esperado y cuál es el rol del registro de representaciones y los ejemplos como estrategias para superar esta situación, lo cual está ligado a las dos últimas relaciones que serán comentadas a continuación.

Estas dos últimas relaciones están asociadas al conocimiento de la secuenciación de los temas anteriores y posteriores, se considera que este elemento se vincula con las conexiones de complejización (KMLS) (29) y al mismo tiempo con el conocimiento de registros de presentación, procedimientos y propiedades (KoT) (30), pues, de acuerdo a lo observado y a la sensibilidad teórica, se puede mencionar que los conocimientos de proporcionalidad, tanto desde una perspectiva geométrica como aritmética, son necesarios para comprender temas posteriores como función lineal y función a fin. Autores como Valverde (2012) afirman que, por ejemplo, la representación gráfica puede establecer características de la pendiente de una función lineal, su punto de corte con el eje x , o simplemente establecer si la variación entre dos cantidades de magnitudes es constante o no, aspectos necesarios para comprender la proporcionalidad. Fiol y Fortuny (1990) mencionan que el concepto de función lineal puede considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de proporcionalidad, pues, para los autores a partir de la función lineal, se representa la estructura de la proporcionalidad, sirviendo esta como visualización de diferentes estados de variación, expresando así un comportamiento cualitativo desde una perspectiva funcional.



En la tabla 19 se sintetizan las evidencias o indicios encontrados en el proceso de sistematización y análisis de la información asociada al PCK, estos indicadores se caracterizan por no tener una total claridad sobre estos elementos, mostrando la necesidad de utilizar otros instrumentos para indagar más al respecto con el propósito de clarificar que efectivamente determinado indicador pertenece a un determinado subdominio del MTSK.

Subd.	Cat.	Evidencia o indicio del MTSK
KMT	Ejemplos y Teorías de enseñanza los y materiales estrategias	Énfasis en la manipulación de material concreto haciendo sistematización y diferentes tipos de representación asociados a la proporcionalidad. Aproximación a los conceptos de razón y proporción de números enteros, para seguir con la interpretación, el cálculo y la comparación de porcentajes y la orientación y representación del espacio. Uso de campos conceptuales de Vergnaud para el paso de relaciones aditivas a relaciones multiplicativas. Elaboración de mapas asociados a la proporcionalidad. Elaboración de Puzzles asociados a la proporcionalidad. Uso de ejemplos asociados a propiedades de la proporcionalidad desde una perspectiva aritmética.

KFLM	Teorías de aprendizaje	Actividades y tareas	Uso de ejemplos asociados a procedimientos de la proporcionalidad desde una perspectiva aritmética. Uso de ejemplos asociados a representaciones tabulares, gráficas y algebraicas de la proporcionalidad desde una perspectiva aritmética. Uso de situaciones en las que se presenta la proporcionalidad como una variación simultánea de dos cantidades de magnitud. Uso de niveles de pensamiento proporcional.
	Fortalezas y dificultades		No uso de la estrategia del valor unitario para determinar la constante de variación entre dos magnitudes. Uso de estrategias aditivas únicamente ante problemas de proporcionalidad. Falta de construcción de un significado del porcentaje, como una aplicación específica del concepto de proporción. Dificultades de la interpretación y el uso de escalas.
KMLS	Exp. de Aprendizaje		
	Con. desarrollo conceptual o procedimental esperado	Con. de la secuenciación de temas anteriores o posteriores	Clasificación de triángulos. Tratamiento algebraico de situaciones lineales. Uso de instrumentos como la escuadra Simplificación de fracciones. Estimación de la longitud de segmentos. Función lineal Función afín

Tabla 19 Evidencias e indicios del dominio PCK

Finalmente, como una estrategia para identificar en qué sitios están ubicados los indicadores e indicios fruto de las evocaciones de lo observado en clase, se presenta en la tabla 20 la cuantificación y los porcentajes de cada subdominio del MTSK.

Subd.	Categoría	Cant de oportunidades	Porcentaje
KoT	Definiciones propiedades y sus fundamentos	10	16,39 %
	Procedimientos	6	9,83 %
	Fenomenología y sus aplicaciones	4	6,55 %
	Registros de representación	7	11,47 %
KSM	Conexión transversal	2	3,27 %
	Conexión auxiliar	1	1,63 %
	Conexión simplificación	2	3,27 %
	Conexión complejización	2	3,27 %
KPM	Formas de validación y demostración	1	1,63 %
	Papel de los símbolos y el lenguaje formal	0	0 %
	Jerarquía y plan. Para la res. De problemas	1	1,63 %
	Práctica Matemática.	1	1,63 %
	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	3	4,91 %
MKT	Teorías de enseñanza	3	4,91 %
	Recursos, materiales virtuales	2	3,27 %
	Fortalezas y dificultad	4	6,55 %
KFLM	Teorías de aprendizaje	1	1,63 %
	Formas de interacción con el contenido matemático	5	8,19 %
	Secuenciación con temas	2	3,27 %
KMLS	Desarrollo conceptual o procedimental esperado	4	6,55 %

Tabla 20 Oportunidades identificadas en el modelo MTSK

De esta tabla se puede comentar que, de un total de 61 indicadores, 37 pertenecen al dominio del MK, representando un 60,65% de los datos, mientras tanto los otros 24 indicadores pertenecen al dominio del PCK representando un 39,35% del total de los indicios identificados.

Esta información coincide con la primera clasificación de indicadores, pues la mayoría de los indicadores en este caso también pertenecen a la subdominio KoT. Este aspecto hace

reflexionar respecto del rol preponderante que tuvo en esta investigación el conocimiento de las definiciones, propiedades, procedimientos, registros de representación, fenomenología y sus aplicaciones, y cómo este conocimiento disciplinar se relacionó con los demás subdominios del MTSK, para lo que será necesario un espacio para discutir y reflexionar sistemáticamente sobre todos los elementos encontrados, los cuales se abordarán en el siguiente capítulo.

De igual forma, se consideró necesario establecer representaciones que ayudarán a facilitar la comprensión del MTSK movilizado por la profesora, por lo cual se elaboraron, por ejemplo, los anexos 10.1 y 10.2, los cuales muestran la tabulación de las relaciones identificadas en la profesora y las relaciones evocadas entre los subdominios del MTSK respectivamente. Además, se consideró necesario representar gráficamente dichas relaciones, que se podrán apreciar en el anexo 10.3, en el cual se muestran gráficamente las Relaciones identificadas en la profesora entre subdominios de y en el anexo 10.4, donde se evidencian gráficamente las relaciones evocadas entre subdominios del MTSK. Se considera que este tipo de representaciones gráficas aportan en la comprensión de dichas relaciones en conjunto desde un punto de vista más amplio y sistemático.

7. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Una vez se han presentado los indicadores y las relaciones entre los diferentes subdominios, se mostrarán sistemáticamente diferentes reflexiones que aportan a la comprensión del MTSK movilizado por la profesora, para lo que, inicialmente, se abordarán reflexiones con respecto a en qué medida la presente investigación aporta a investigaciones previas, después, se abordará cómo la presente investigación aportó en aspectos teóricos y metodológicos del modelo MTSK, para posteriormente dar cuenta de las limitaciones y las proyecciones de esta propuesta de investigación.

7.1 Con respecto a las investigaciones previas

Con respecto a los resultados obtenidos, inicialmente es importante relacionar estos resultados con las investigaciones previas o los antecedentes consultados sobre el conocimiento del profesor asociado a la proporcionalidad, pues por medio de esta relación se puede establecer cómo la presente investigación aporta a los estudios realizados previamente.

Con respecto a los aportes de Block (2001, 2006), se observó que igual que en lo comentado por el autor, predominó el uso de la estrategia de los productos cruzados como una herramienta que desempeñó un papel importante en la introducción de la noción de operador multiplicativo fraccionario. Se considera que la presente investigación indagó sobre la relación entre contextos geométricos y numéricos asociados a la proporcionalidad, contextos que no son indagados directamente por el autor, mostrando así la relación entre contextos numéricos y geométricos de la proporcionalidad y la forma en que pueden aportar en la comprensión del conocimiento movilizado por el profesor en la enseñanza de la proporcionalidad.

Además, se considera que por medio de esta investigación se aportó en una comprensión sistemática que los errores que los estudiantes pueden presentar al tratar la proporcionalidad en ambos contextos. Este aspecto se entiende como parte del conocimiento del profesor, algunos de estos errores o dificultades encontrados en la presente investigación y que puede aportar a los estudios de Block (2001, 2006) son:

- El uso de unidades de medida de longitudes inadecuadas para construir rectas proporcionales o el uso de escuadras para construcciones geométricas.
- La dificultad de nombramiento de una razón, trascendiendo el significado de fracción.
- Construcción de razones con segmentos y cantidades.
- Identificación de segmentos homólogos para comprobar la proporcionalidad de dos pares de segmentos.
- Interpretación de la letra como incógnita.
- Tratamiento algebraico de situaciones lineales por medio de las propiedades de la igualdad.

Con respecto a los planteamientos de Obando, Vasco y Arboleda (2014), quienes proponen tres escenarios pendientes a indagar sobre la enseñanza de la proporcionalidad, se considera que por medio de la presente investigación se aportó con respecto a la mejora de la comprensión de las relaciones y las rupturas entre lo aditivo y lo multiplicativo, iniciando por la importancia que debe tener una aproximación cualitativa de los razonamientos aditivos para posteriormente indagar razonamientos multiplicativos.

El segundo escenario presentado por los autores está asociado a la comprensión de las relaciones desde los primeros aprendizajes propios de las estructuras multiplicativas como multiplicación, división, fracción y razón hasta la comprensión de los números racionales y las relaciones lineales y no lineales, elementos que fueron evidenciados en la sistematización y análisis de las evidencias, indicios y oportunidades, en especial, sobre la importancia de la construcción de diferentes interpretaciones del concepto de razón por medios geométricos para posteriormente abordar la proporcionalidad.

Finalmente, con respecto al tercer escenario presentado por los autores, el cual está asociado con la comprensión del papel de los diferentes tipos de proporcionalidad en particular, y de correlación en general, en la construcción del concepto de función, incluso de funciones no polinomiales como trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, entre otras, se considera que por medio de la presente investigación se comprendió cómo la construcción

de conceptos como la constante de proporcionalidad puede aportar en la futura caracterización de elementos como la pendiente de una función lineal.

Otros autores que han indagado respecto del conocimiento del profesor asociado a la proporcionalidad son Rivas, Godino y Castro (2012), quienes investigaron sobre el conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria utilizando el enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemática EOS. Se pudieron encontrar varios aspectos en común entre la presente investigación y la de los autores, como, por ejemplo, comprender que existen un conjunto de elementos lingüísticos, conceptuales, procedimentales, proposiciones y argumentos que se ponen en juego en la resolución del problema sobre proporcionalidad, y que su identificación fomenta el desarrollo del conocimiento especializado del profesor.

Dado que los autores analizan las respuestas de estudiantes para profesores sobre problemas de proporcionalidad, encontraron que aunque son capaces de resolver correctamente el problema utilizando reglas, existen limitaciones para reconocer los significados de los objetos matemáticos puestos en juego en la resolución, característica que también se pudo evidenciar en la presente investigación, pues en las clases observadas se encontró un especial énfasis en el uso de definiciones, propiedades y procedimientos, especialmente el producto de extremos para despejar una incógnita en una situación de proporcionalidad.

Otros elementos comunes encontrados fueron: la utilización de un único método de resolución que permita resolver todos los problemas de razonamiento proporcional, además de concebir que la reflexión sobre este tipo de situaciones e investigaciones como una oportunidad para evolucionar en varios sentidos, como el epistémico, pues se pasa de un estado de menor conocimiento a estados de mayor conocimiento, el de la competencia matemática, al resolver correctamente un problema y el didáctico, cuando se propone una solución al problema vinculada con las posibilidades de razonamiento de los estudiantes.

Por medio de la presente investigación se aporta a la indagación de Rivas, Godino y Castro (2012) en aspectos como, por ejemplo, la comprensión de elementos que ellos

presentaron como dificultades observadas en los profesores en formación, pero no como dificultades sino como parte del conocimiento movilizado por el profesor como la capacidad de encontrar los errores cometidos por estudiantes al resolver problemas sobre proporcionalidad, la capacidad del profesor para comprender, reconocer y explicar un tipo de respuesta diferente a la mostrada por él, además del conocimiento de objetos y significados relativos a la proporcionalidad por medio de la reflexión durante el proceso de resolución de un problema. Se considera que eso se debió en parte a la amplia experiencia de la profesora informante, pues, por medio de esta, la profesora ya podría prever posibles dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas sobre proporcionalidad.

Por otra parte, Rivas (2013) es otro autor que indaga acerca del conocimiento especializado del profesor sobre proporcionalidad; en su tesis doctoral el autor hace un análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de Educación Primaria en formación en la Universidad de Granada por medio del EOS. En una primera parte se hace un estudio con un grupo de profesores en formación en el cual se establece el conocimiento matemático de los futuros profesores sobre proporcionalidad como una construcción desarticulada y basada en aspectos parciales que no terminan de integrarse en un conocimiento significativo sobre esa noción.

En la segunda parte de la investigación se hace una acción formativa centrada en el análisis epistémico de tareas de proporcionalidad propias de educación primaria con otro grupo de estudiantes, lo cual aporta en el desarrollo del conocimiento especializado del contenido, además de dimensionar la complejidad del dominio instrumental de dicha herramienta.

En este caso, tanto en la investigación de Rivas (2013) como en la presente investigación, se coincide en destacar elementos del conocimiento del profesor como:

- La identificación de la importancia del uso de representaciones gráficas como recurso útil en la resolución de problemas, puesto que se concluye que permiten establecer vínculos entre el mundo real y el mundo matemático.
- El conocimiento sobre interpretación de la razón como una nueva unidad.

- La movilización fluida entre las diferentes interpretaciones y relaciones entre fracción, fracción/razón y razón.

Se considera que al tener estos puntos en común la presente investigación puede aportar a la de Rivas (2013) por medio de la reflexión sobre cómo la selección de determinada forma de representación y ejemplos puede potencializar u obstaculizar la comprensión de definiciones, propiedades o procedimientos, también forma parte del conocimiento especializado del profesor.

Con respecto a la propuesta de Torres (2015), quien indaga en el conocimiento de un profesor de Primaria y uno de Secundaria, por medio del Knowledge Quartet identifica 39 indicadores, se considera que la presente investigación aporta a la del autor por medio del enriquecimiento de indicadores que inicialmente no se contemplan, como, por ejemplo, los 7 indicadores presentados en la categoría de conexión podrían ser enriquecidos como indicadores producto de esta investigación: la capacidad de anticiparse a la complejidad de un problema de razonamiento proporcional, la capacidad de hacer relaciones entre conceptos como fracción y razón, semejanza y teorema de Tales, tratamiento algebraico de situaciones y proporcionalidad.

Además de enriquecer los indicadores para otras categorías, como, por ejemplo, incluir identificación de errores de unidades de medida y medición, la identificación de errores de tratamiento algebraico de situaciones, de identificación de segmentos homólogos o de construcción de rectas paralelas, o el uso de simbología especializada para representar rectas, segmentos en la categoría de fundamentos o la capacidad de seleccionar determinada representación o unidad de medida para ejemplificar una definición, propiedad o procedimiento en la categoría de transformación.

Finalmente, unos autores que también indagaron sobre el conocimiento especializado del profesor y la proporcionalidad son Amado y Muñoz (2015), ellos presentan una caracterización de los conocimientos que debería tener el profesor de matemáticas a la luz de lo reportado en investigaciones en educación matemática con respecto a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. En esta investigación los autores reflexionan sobre

papel que les compete a las instituciones formadoras de futuros profesores de matemáticas respecto a los vacíos en la formación en temas como razón, proporción y proporcionalidad, pues se evidenciaron dificultades para reconocer situaciones no proporcionales, además de reconocer la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo y en el uso del significado multiplicativo de la idea de operador.

Un elemento que se tuvo en común con esta investigación fue la importancia del conocimiento sobre el uso de técnicas para la resolución de problemas, haciendo énfasis en la interpretación de la regla de tres como valor unitario en un problema. Sin embargo, dado que los investigadores no evidenciaron un espacio donde se caracterice situaciones en las que haya cantidades directamente proporcionales, el uso de las propiedades aditivas y de los factores internos, se considera que por medio de la presente investigación se puede dar cuenta de aspectos que pueden complementar la propuesta de los autores como, por ejemplo, la relación entre los conocimientos de registros de representación y cómo en estos se pueden evidenciar propiedades y procedimientos asociados a la proporcionalidad, además de la elaboración de representaciones teniendo en cuenta las dificultades de los estudiantes, o la presentación de procedimientos asociados a temáticas posteriores.

Finalmente, se considera importante que en una segunda parte de la discusión de los resultados se resalte la importancia de la relación entre el conocimiento especializado de la profesora y el conocimiento especializado de las oportunidades evocadas por el investigador basándose en las situaciones de clase. Se han establecido estos momentos como necesarios para comprender el conocimiento especializado movilizado por la profesora para la enseñanza de la proporcionalidad, por medio de la reflexión y la problematización del saber profesional desde la misma acción, mejorando así la consciencia y comprensión del conocimiento especializado y la reflexión sobre, en y para la práctica.

Para contestar a la pregunta de investigación: ¿qué conocimiento especializado moviliza una profesora para la enseñanza de la proporcionalidad?, se necesitó reflexionar sobre cómo el modelo ha permitido sistematizar la información obtenida en el análisis desde MTSK y cómo esta nueva organización del conocimiento para el profesor, unida a las evidencias e indicios de su conocimiento, nos ha dado lugar a una primera aproximación a

dicha caracterización. Para hacer esta aproximación se abordará cada uno de los subdominios del MTSK.

7.2 Con respecto al MTSK

Dominio de conocimiento matemático

El Conocimiento de los Temas (KoT)

El análisis de este subdominio se ha centrado en el conocimiento que tiene la profesora sobre el qué y el porqué de los contenidos asociados a proporcionalidad desde un punto de vista netamente matemático. El análisis de cada episodio amplió el mapa de conocimiento que se ponía en evidencia para este subdominio, puesto que se encontraban evidencias que permitían ir complementando información o confirmando indicios de conocimiento. Algunos de estos conocimientos podían estar vinculados o no con la actividad o tarea que se abordaba. A continuación, se desglosarán los conocimientos que asignamos a este subdominio siguiendo el esquema de categorías descritas en el marco de referencia.

Conocimiento de las propiedades y sus fundamentos atribuibles a un contenido matemático

Con respecto a esta primera categoría, se puede mencionar que esta hace referencia al conocimiento netamente matemático que usó la profesora para llevar a cabo sus clases sobre proporcionalidad, para esto se focalizará sobre las propiedades y los fundamentos asociados a la proporcionalidad observados en el transcurso de las clases, además del conocimiento sobre una definición asociada a la proporcionalidad.

Desde la primera sesión, la profesora es consciente de que es necesario que los estudiantes comprendan la definición de razón como una comparación entre dos cantidades de magnitud, en este caso, desde una perspectiva geométrica a través del uso de segmentos, pues una vez se tenga una comprensión del concepto de razón se podrá contemplar la proporcionalidad como la equivalencia entre dos razones.

Sin embargo, donde más se observó énfasis fue en el conocimiento de las propiedades y la importancia de estas en el transcurso de la enseñanza de procedimientos,

representaciones o formas de resolver un problema asociado a la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica. Por ejemplo, en el episodio 1 se hace referencia a la necesidad de usar la misma unidad de medida para construir una razón entre dos segmentos, la propiedad que menciona que una razón puede ser la misma, aunque sus segmentos sean diferentes y la propiedad que menciona que una razón no siempre se puede expresar como un número entero.

De igual forma, se hace uso de las propiedades geométricas de rectas paralelas, triángulos y cuadriláteros que se pueden asociar a la proporcionalidad; la relación entre lados homólogos para establecer la proporcionalidad; el establecimiento de las longitudes entre transversales y paralelas definiendo razones de diferentes formas, siempre y cuando los segmentos sean correspondientes y homólogos; la aplicación de proporcionalidad entre segmentos homólogos, aunque no sean opuestos; la propiedad que relaciona lados iguales subtendentes a lados iguales; la aplicabilidad de la proporcional a los lados de cuadriláteros; y la propiedad que menciona que dados tres lados de dos cuadriláteros se puede encontrar otro lado tal que sus razones sean proporcionales. Además de esto, se hace uso del teorema de Tales como una aplicación de la proporcionalidad entre dos pares de segmentos.

Un caso que fue de particular interés para la profesora fue la construcción geométrica de la proporcionalidad a través del uso de escuadras. Con base en este trabajo, se pudo establecer que cuando se pone una escuadra sobre una recta y se mueve sobre otra, la escuadra traza rectas paralelas a la recta inicial, propiedad que será usada en diferentes problemas asociados a la búsqueda de segmentos desconocidos que se encuentran en posición de Tales o cuando son homólogos.

Asimismo, se observaron propiedades asociadas a la proporcionalidad y la semejanza, como, por ejemplo, la proporcionalidad entre los lados de dos triángulos como un criterio de la semejanza; además, se determinaron fundamentos como los argumentos necesarios para establecer que en algunos casos es necesario dividir en ambos lados de la igualdad para despejar una incógnita y la presentación de las razones por las cuales una razón no se puede simplificar.

Es importante mencionar que los conocimientos relacionados con las definiciones, propiedades y fundamentos, mencionados anteriormente, están relacionados con un abordaje de la proporcionalidad desde una perspectiva eminentemente geométrica, lo cual no quiere decir que la profesora únicamente posea este tipo de conocimiento asociado a la proporcionalidad; se considera que de acuerdo a lo comentado por la profesora, considera que la perspectiva geométrica, al ser de una naturaleza gráfica y al ser más susceptible a trabajar con material concreto como escuadras y lápiz, será de una más fácil comprensión por parte de los estudiantes, este aspecto también plantea una relación entre KMT y KFLM, cuestión que será discutida en las conclusiones sobre el PCK.

Conocimiento de la fenomenología asociada a un contenido matemático

Con respecto a esta categoría, en la primera clase se pudieron identificar conocimientos relacionados con el uso de situaciones del contexto real para establecer la proporcionalidad entre dos pares de segmentos por medio del método de medios y extremos directamente, el uso de situaciones del contexto real para conocer la longitud de un segmento en el que se encuentran rectas transversales entre rectas paralelas y el uso de situaciones del contexto real entre cuadriláteros para establecer una longitud desconocida. Estas características dan cuenta de la importancia que le da la profesora al uso de la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica como modeladora de situaciones reales, en especial con la búsqueda de segmentos desconocidos.

Mientras tanto, en la segunda, tercera y cuarta clase se evidenciaron conocimientos relacionados con el uso de una situación del contexto real donde se usa el teorema de Tales para establecer una longitud desconocida, el uso de una situación del contexto real donde se usa el teorema de Tales para establecer la semejanza entre dos triángulos y el uso de una situación del contexto real donde se usa el teorema de Tales para establecer el valor de un lado de un triángulo. En esta segunda parte del conocimiento sobre la fenomenología y las aplicaciones se pudo evidenciar que se hace un énfasis en el uso de las propiedades de la proporcionalidad en la semejanza de triángulos, pasando así de la proporcionalidad entre segmentos a la semejanza entre triángulos.

Por medio de esta categoría se ha podido caracterizar que de acuerdo con la aproximación geométrica que hizo la profesora sobre proporcionalidad, esta se basa en el uso de situaciones donde se desconoce el valor de un segmento, centrándose por medio de propiedades asociadas a la proporcionalidad entre rectas paralelas o lados de triángulos semejantes.

Conocimiento de los registros de representación asociados a un contenido matemático

Desde la primera clase, se pudo observar una gran variedad de registros de representación usados por la profesora para la enseñanza de la proporcionalidad, estas representaciones fueron modificadas y enriquecidas con el transcurso de las sesiones y de las preguntas y dificultades observadas por los estudiantes, característica que llevó a una reflexión sobre la relación de esta categoría con el KMT y el KFLM.

Para dar cuenta del conocimiento de los registros de representación observados se clasificarán de acuerdo con sus características. En el primer grupo están las representaciones verbales de la razón entre dos segmentos, y la proporcionalidad entre dos pares de segmentos. Se considera que esta primera aproximación a estas propiedades es la más natural y cercana a la cotidianidad de los estudiantes.

En el segundo grupo están las representaciones gráficas, caracterizadas como aquellas herramientas que aportan en la comprensión y resolución de un problema asociado a la proporcionalidad; en este grupo se pueden incluir conocimientos asociados a representación gráfica de segmentos para establecer sus razones, la representación gráfica de un problema de proporcionalidad entre segmentos donde se desconoce uno de los segmentos, la representación gráfica de un problema de proporcionalidad entre cuadriláteros, donde se desconoce uno de los lados, la representación gráfica de un problema de proporcionalidad con dos incógnitas y la representación gráfica de un problema de semejanza de dos triángulos.

En el tercer grupo están las representaciones escritas, las cuales pueden ser de naturaleza notacional, como la representación escrita de segmentos por medio de expresiones

como $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ y $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$; la representación escrita de una razón como una división de dos segmentos y la representación escrita de rectas como $\vec{r}, \vec{s}$ o algebraica como la representación escrita del método de medios y extremos, resaltando cuales son los términos a multiplicar o la representación tabular de tres columnas para establecer la razón entre dos segmentos.

Conocimiento de los procedimientos matemáticos asociados a un determinado contenido

Se pudo establecer un especial énfasis de la profesora en los conocimientos sobre esta categoría, los cuales se clasificarán para facilitar su exposición. En el primer grupo están los procedimientos de construcción como el establecimiento de una razón, usando simplificación de fracciones, la construcción de razones proporcionales dados cuatro segmentos, trazar una recta paralela a una recta dada, la búsqueda de un par de segmentos de tal forma que sean proporcionales con un par de segmentos dados y el nombramiento de los puntos de intersección de rectas para establecer segmentos homólogos y sus respectivas razones.

En el segundo grupo están los procedimientos algebraicos, como, por ejemplo, el método de medios y extremos, y tratamiento algebraico de situaciones para verificar cuando dos triángulos son semejantes con una incógnita, el método de medios y extremos, y tratamiento algebraico de situaciones para verificar que dos triángulos son semejantes con dos incógnitas, el método de medios y extremos, y el tratamiento algebraico de situaciones para verificar que dos triángulos son semejantes, el conocimiento de las propiedades de la proporcionalidad teniendo dos incógnitas, despejando primero una incógnita para, posteriormente, despejar la segunda incógnita, el despeje de una incógnita para encontrar la longitud de un segmento, cuyas razones son proporcionales, el método de medios y extremos, y tratamiento algebraico de situaciones para encontrar una longitud desconocida sabiendo que estas son proporcionales, y el método de medios y extremos para verificar si dos pares de segmentos son proporcionales.

Y en el último grupo, los procedimientos de verificación, entre los cuales está la verificación de la relación de proporciones entre segmentos homólogos, la comprobación de

la proporcionalidad entre lados de cuadriláteros y la comprobación de la congruencia de los tres ángulos de dos triángulos para verificar su semejanza.

Un aspecto importante del conocimiento de los procedimientos usados por la profesora es la relación de este amplio conjunto de métodos y procedimientos con el conocimiento con el KMT y el KFLM, pues los procedimientos ejemplificados por la profesora fueron variando de acuerdo con las dificultades presentadas por los estudiantes, por ejemplo, construyendo la noción de razón iniciando con cantidades de magnitud enteras para posteriormente usar cantidades de magnitud racionales.

Es preciso señalar que en la mayor parte del conocimiento observado en las clases de la profesora se pueden identificar patrones o elementos comunes propuestos para la resolución de problemas por medio de la proporcionalidad, como, por ejemplo, la representación gráfica del problema a solucionar, la identificación de segmentos homólogos, la construcción de razones y el tratamiento algebraico de situaciones para establecer el valor de un segmento desconocido, pasos que están directamente asociados con diferentes sistemas de representación y el uso de diferentes propiedades (KoT).

Conocimiento de la práctica matemática (KPM)

Dado que este subdominio pertenece al MK, está relacionado con el conocimiento de las reglas sintácticas de la matemática, además del conocimiento de la jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, las formas de validación y demostración, el uso del papel de los símbolos y el lenguaje formal, los procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones y las prácticas particulares del quehacer matemático como, por ejemplo, la modelación y la algoritmización.

Dado que la mayoría de los elementos asociados al conocimiento matemático están relacionados con las propiedades, registros de representación y procedimientos, el conocimiento sobre la práctica matemática se pudo identificar inicialmente con respecto a las formas de validación y demostración usadas por la profesora.

Se pudo identificar que desde la primera clase hace uso de pruebas informales en geometría a través de la representación gráfica, la comprobación empírica del teorema de Tales, la comparación de los resultados obtenidos en distintos registros de representación como medio de validación de un modelo matemático y el uso del ejemplo para mostrar casos en los que no se cumple lo propuesto (contraejemplo).

Estos elementos muestran que la profesora hace uso de la verificación de propiedades o teoremas sin necesidad de hacer uso explícito de demostraciones matemáticas, sin embargo, se considera que sí se hace uso del conocimiento del papel de simbolización y el uso del lenguaje matemático, en este caso, con la simbolización de conceptos matemáticos con lenguaje formal como, por ejemplo, cuando se usan símbolos específicos como $\vec{r}, \vec{s}$ para nombrar rectas, o cuando se usan símbolos como $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ para nombrar segmentos, elementos que son importantes en la construcción de una estructura argumentativa en los estudiantes.

Por otro lado, se pudo identificar que la profesora hace uso implícito de las fases de resolución de problemas de Polya (entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás).

Se considera que este uso es implícito porque la profesora no se detiene a explicar en cada uno de los momentos propuestos por Polya en la resolución de un problema asociado a la proporcionalidad, sin embargo, en la resolución de estos problemas se pueden identificar elementos en común, por ejemplo, la comprensión del problema por parte de los estudiantes, la construcción de un plan de trabajo, su ejecución y posterior evaluación sobre la validez o falsedad del plan ejecutado.

Por ejemplo, cuando se desea conocer el valor de un segmento que está en posición de Tales, para la profesora es necesario inicialmente identificar cuál es el segmento desconocido y establecer la relación entre segmentos homólogos para posteriormente despejar la incógnita por medio de la resolución de ecuaciones lineales. Finalmente, como una estrategia de comprobación, la profesora comprueba que una vez se obtiene el segmento desconocido, las dos razones son equivalentes, es decir que efectivamente sean proporcionales. Se considera que detrás de estos pasos o momentos presentados en clase se

muestra un conocimiento sobre las fases de Polya para resolver un problema, conocimiento que está asociado a la jerarquización y planificación en la resolución de problemas, perteneciente al conocimiento de la práctica matemática.

De igual forma, es importante comentar que los elementos anteriormente mencionados también permiten reflexionar sobre la relación existente entre la resolución de problemas (KPM) y el KFLM, en especial con las teorías de aprendizaje, en el sentido de cómo la profesora pone en juego sus conocimientos sobre la resolución de problemas (fases de Polya) en función de la enseñanza del concepto de proporcionalidad geométrica.

Sobre el conocimiento de la estructura de la matemática (KSM)

Conocimiento de conexiones transversales entre contenidos

Desde la primera clase la profesora hace uso del concepto de ecuación como una igualdad (en este caso ecuación lineal y su tratamiento algebraico) como conexión transversal, pues este es un concepto que es necesario para la caracterización y comprensión de la proporcionalidad. Se considera el concepto de función lineal como conexión transversal, pues tiene la potencialidad de conectar diferentes contenidos asociados a la proporcionalidad como, por ejemplo, los conceptos de razón, igualdad entre razones, búsqueda de segmentos desconocidos y la resolución de triángulos semejantes.

Se considera que el uso del concepto de ecuación, como conexión transversal, muestra la relación entre un concepto que usualmente es considerado como algebraico y otras áreas del conocimiento matemático, como la geometría, por medio de la proporcionalidad geométrica de segmentos en posición de Tales y la resolución de triángulos semejantes, además de la relación entre el concepto de ecuación y la aritmética pues, al verificar si dos razones son iguales; es decir, están en proporción. Es necesario comprobar que los cocientes de estas son los mismos, para ello será necesario hacer uso de procedimientos y propiedades de tipo aritmético.

Por otro lado, se pudo identificar el tratamiento algebraico de situaciones para encontrar la longitud de un segmento, dados segmentos entre rectas paralelas, como una

conexión auxiliar, pues, aunque hace parte de un conocimiento diferente a la proporcionalidad, el conocimiento sobre el tratamiento algebraico de situaciones es necesario para comprender y verificar representaciones, procedimiento y propiedades de la proporcionalidad entre dos pares de segmentos.

Dominio de conocimiento didáctico del contenido

Sobre el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

Conocimiento de teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático

En diferentes episodios se pudieron identificar conocimientos relacionados con la resolución de problemas, en especial con el conocimiento de las fases de Polya, pues se considera que el uso de estas facilitó la comprensión y la resolución de problemas asociados a la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica. Entre estas se destacan la comprensión de problemas en los que usualmente se preguntaba por el valor de un segmento desconocido, ya sea de una recta cortada entre paralelas o un lado de una pareja de triángulos semejantes; la construcción de un plan, el cual en la mayoría de las ocasiones estaba relacionado con la elaboración de representaciones gráficas y establecimiento de segmentos homólogos, y, posteriormente, a la ejecución del plan por medio de las propiedades de la proporcionalidad, se hacía una validación o verificación del plan, el cual constaba en la verificación de la igualdad entre las dos razones generadas por dos pares de segmentos.

Dado que no se pudo observar en las clases grabadas una propuesta de enseñanza de la proporcionalidad aritmética o la proporcionalidad inversa, no se pudieron identificar otros tipos de conocimientos asociados a teorías de aprendizaje de la proporcionalidad.

Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático

Con respecto al conocimiento movilizado sobre las fortalezas y debilidades asociadas a la proporcionalidad, se pudo observar el conocimiento sobre la capacidad de identificar la dificultad de nombrar una razón, de tal forma que se supere la idea de fracción. Esto se observó cuando la profesora expresaba la razón entre dos segmentos como una fracción. Dado que los estudiantes ya habían tenido un acercamiento al concepto de fracción, nombraban, por ejemplo, la razón $2/5$ como “dos quintos” y no como una razón propiamente dicha “dos es a cinco”. Al ver esta dificultad, la profesora realizó el cambio de representaciones de la numérica a la verbal para que los estudiantes comprendieran efectivamente el concepto de razón.

De igual forma, en el segundo episodio se observó el conocimiento de las dificultades de la comprensión de proporcionalidad cuando se involucran situaciones de medición que usan milímetros. La profesora una vez identificó que los estudiantes construían razones con segmentos usando diferentes unidades de medidas (milímetros y centímetros), rápidamente aclaró que, para la construcción de razones, es necesario que estas tengan la misma unidad de medida.

Para superar esta dificultad evidenciada en los estudiantes, presentó diferentes ejemplos usando las mismas unidades de medida para longitud (milímetros, centímetros y metros). Se considera que la superación de esta dificultad muestra una fuerte relación con el KMT (ejemplos) y el KoT (propiedades y registros de representación).

Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático

Con respecto a esta categoría se pudieron encontrar algunas oportunidades, sin embargo, no se encontraron evidencias explícitas sobre el rol de la profesora respecto de la interacción de los estudiantes con el concepto de proporcionalidad. Se considera que esto se debe a diferentes factores, entre estos, la metodología tratada por la profesora, la cual constaba en presentar o verificar por medio de ejemplos propiedades y definiciones, para,

posteriormente, proponer problemas a solucionar por parte de los estudiantes de forma individual.

Se considera que, si se hubieran presentado actividades de tipo grupal, se podrían haber identificado con mayor facilidad elementos como el rol del lenguaje y argumentación en la resolución de problemas asociados a la proporcionalidad. También hubiera sido posible observar la manera en que los estudiantes interactúan con las diferentes representaciones y procedimientos enseñados por la profesora.

Conocimiento de los principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático

Igual que en la categoría anterior, en esta categoría sólo se pudieron identificar algunas oportunidades. Se considera que esto, similar a la categoría anterior, se debe a la metodología propuesta por la profesora, pues, en experiencias de aula como enseñanza por medio de proyectos o modelación de situaciones reales, se trabaja a partir de los intereses, expectativas y necesidades de los estudiantes. Mientras que en metodologías más tradicionales no prima la atención en estos elementos, más bien el interés están en el cumplimiento de las temáticas asignadas en un periodo de tiempo determinado.

Sobre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Conocimiento de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático

Con respecto al conocimiento identificado en esta categoría, sólo se puede mencionar que, de acuerdo con las evocaciones hechas, la profesora hace uso elementos de propuestas de enseñanza de la proporcionalidad. Entre estos se hace énfasis en la manipulación de material concreto haciendo sistematización y diferentes tipos de representación asociados a la proporcionalidad; la aproximación a los conceptos de razón y proporción de números enteros; la interpretación, el cálculo y la comparación de porcentajes; y la orientación y representación del espacio. Además, la profesora hace uso de elementos de la teoría de campos conceptuales de Vergnaud para hacer la transición del paso de relaciones aditivas a relaciones multiplicativas.

Sin embargo, no se tienen evidencias suficientes para poder decir que la profesora conoce una teoría específica de enseñanza asociada a la proporcionalidad, pues la propuesta de enseñanza se caracteriza por tener elementos de diferentes teorías; desde la tradicional, haciendo uso de ejercicios, hasta las propuestas de geometría activa, en la cual hace uso de material tangible e instrumentos de medida para longitudes.

Conocimiento de recursos materiales o virtuales de enseñanza asociados a un contenido matemático

Esta categoría se puede categorizar en cuatro grupos de conocimientos. El primero está relacionado con el conocimiento del uso de instrumentos; un aspecto interesante observado en las clases de la profesora fue el conocimiento del uso de instrumentos como las escuadras para representar gráficamente problemas, además de la verificación de propiedades asociadas a la proporcionalidad geométrica, por ejemplo, la construcción de rectas paralelas para confirmar qué líneas transversales entre rectas paralelas tienen la misma razón. En este primer grupo hay indicadores como el uso de la escuadra de 45 grados para explicar la relación entre ángulos iguales a lados iguales en un triángulo y el uso de escuadras de 45 y 60 grados para construir una recta paralela a una paralela dada.

En el segundo grupo está el conocimiento sobre el uso de vídeos para ejemplificar problemas relacionados con la búsqueda de segmentos desconocidos usando la proporcionalidad. Este tipo de herramientas está asociado al uso de la tecnología en función de la enseñanza de las matemáticas. Se considera que este tipo de conocimiento está relacionado con el uso del teorema de Tales (KoT, propiedades) y la modelación de situaciones reales (KoT, fenomenología y aplicaciones).

En el tercer grupo se encuentran el uso de lenguaje corporal como material que pueden facilitar el aprendizaje y la comprensión de los estudiantes de las propiedades, representaciones y procedimientos asociados a la proporcionalidad geométrica. Un ejemplo de esto se da cuando la profesora señala con sus brazos el tamaño de los segmentos homólogos o cuando indica cuáles son los segmentos homólogos para establecer las razones y comprobar la proporcionalidad entre estos. En este grupo se encuentran indicadores como el uso de gestos para representar conceptos geométricos (proporcionalidad entre segmentos

homólogos) y el uso de gestos para representar conceptos geométricos (segmentos homólogos).

El último grupo identificado está relacionado con los indicios, los cuales son aquella parte de la información sistematizada con la cual no se tuvo total claridad para afirmar que existía un indicador. En este espacio está el indicio sobre el conocimiento de las potencialidades y limitaciones de hoja en blanco para dar construcciones geométricas, pues la profesora hace uso de esta como una herramienta que potencializa el razonamiento para la construcción geométrica del teorema de Tales. Este elemento es confirmado por la profesora cuando menciona que el empleo de la hoja garantiza que el estudiante haga uso adecuado de las unidades de medida para longitud y la adecuada construcción de rectas paralelas usando escuadras.

Conocimiento de las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza de un contenido matemático

En esta categoría, la mayoría de los indicadores están relacionados con el uso del ejemplo como estrategia para la enseñanza de propiedades, procedimientos y representaciones asociadas a la proporcionalidad geométrica. Al clasificar los indicadores identificados se pudieron establecer tres grupos de indicadores. En el primero está el uso del ejemplo, el cual incluye el uso de ejemplos para mostrar definiciones o propiedades, como los numéricos para definir la razón entre segmentos, el uso de un ejemplos del teorema de Tales, donde se tienen dos incógnitas; el uso de ejemplos en los que se relacionan los catetos iguales de un triángulo y los ángulos de sus bases; el uso de ejemplos de situaciones no proporcionales para definir la proporcionalidad por contraejemplos; el uso de un ejemplo gráfico para definir el concepto de segmento homólogo; el uso de ejemplos de segmentos proporcionales donde los segmentos no son enteros; el uso de un ejemplo para definir la semejanza de dos triángulos; el uso de un ejemplo donde la razón es la misma, aunque sus segmentos sean diferentes; y el uso de preguntas orientadoras para definir la razón como una relación entre dos segmentos.

Por otro lado, en un segundo grupo se encuentra el uso de los ejemplos para mostrar procedimientos como en los que se deben encontrar razones proporcionales sin necesidad de

hacer medición de segmentos; el uso de ejemplos para encontrar razones entre dos segmentos usando la simplificación; el uso de un ejemplo que cumple con la relación de proporcionalidad para probar el método de medios y extremos; el uso de un ejemplo donde la razón sea el doble para comprobar el método de medios y extremos; el uso de ejemplos del contexto real donde se desconoce una longitud; el uso de un ejemplo de proporcionalidad entre dos pares de segmentos para que sea replicado por los estudiantes; y el uso de un ejemplo para mostrar cómo establecer los segmentos homólogos.

En el tercer grupo, se encuentra el uso del ejemplo como herramienta para clarificar dudas o superar dificultades, entre ellos están indicadores como el uso de ejemplo más transparente, en el cual la razón entre segmentos no sea el doble y el uso de un ejemplo de proporcionalidad que puede ser solucionado de diferentes formas.

En el último grupo de esta categoría se pudieron identificar estrategias como las preguntar por la relación entre dos razones para establecer la proporcionalidad entre estas; el uso de preguntas orientadoras para definir la proporcionalidad como una relación entre dos pares de segmentos; la evocación de conceptos construidos previamente (razón y proporción) como herramienta para resolver un problema de proporcionalidad; el uso de tablas de tres columnas para establecer la razón entre dos segmentos; y el cambio de posición, tamaño y valores diferentes ejemplos de triángulos semejantes.

Se considera que el conocimiento de un amplio repertorio de ejemplos está relacionado con el conocimiento matemático, especialmente, con las categorías de propiedades, procedimientos, registro de representaciones (KoT), además de las formas de validación y demostración (KPM), pues los ejemplos usados por la profesora, por un lado, fueron ideados especialmente para denotar determinadas propiedades como la igualdad de razones entre dos pares de segmentos, como también para clarificar procedimientos específicos como la construcción de razones usando longitudes de diferentes tamaños y el tratamiento algebraico de situaciones lineales.

Sobre el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar

Con respecto al KMLS, sólo se pudieron identificar indicadores pertenecientes a nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado. En esta categoría se apreciaron conocimientos con respecto a la secuenciación con temas anteriores y posteriores. Esto se logró por medio de indicadores como el conocimiento de simplificación de fracciones previamente trabajado en clase y la claridad sobre los conceptos de razón y reconocimiento de qué dice el teorema de Tales para poder hacer aplicaciones de dicho teorema en situaciones reales.

De igual forma, se pudo establecer un indicio relacionado con la creencia de la profesora sobre el conocimiento que deberían tener los estudiantes sobre razones entre segmentos, basándose en un trabajo previo del uso de razones enteras en clases de grados anteriores. Este aspecto fue desmentido, pues, inicialmente, los estudiantes tenían dificultades para nombrar una razón entre dos segmentos para construir razones, además de para establecer cuándo una razón era igual a otra.

8. CONCLUSIONES

8.1 Aportes teóricos y metodológicos que ofrece el MTSK

Desde el planteamiento del problema se ha considerado el modelo MTSK como una propuesta que aporta a la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, por medio de la reflexión en y para su práctica pedagógica, a través del establecimiento de una relación entre los indicadores e indicios establecidos en la práctica evidenciada en un aula y las oportunidades apoyadas en la teoría. Para esto fue necesario hacer una sistematización y análisis minucioso de los episodios de las cuatro clases observadas.

De esta forma, se considera importante que para resolver la pregunta de investigación es necesario reflexionar sobre cómo el modelo MTSK aporta en la comprensión de una primera aproximación del conocimiento especializado que el profesor moviliza en la enseñanza de la proporcionalidad.

En el caso de la profesora, el análisis sistemático elaborado muestra el uso del conocimiento especializado puesto en acción a través de evidencias e indicios, además de las oportunidades aportadas por medio de la reflexión teórica en las evidencias y los indicios establecidos. Para dar cuenta de este conocimiento, inicialmente se presentaron cronológicamente los conocimientos (evidencias e indicios) observados en las cuatro clases grabadas, posteriormente, como estrategia de verificación de tener características similares, validación y sistematización de esta información, se tabularon todas las evidencias e indicios por cada una de las subcategorías del MTSK, además de hacer un acercamiento al establecimiento de las primeras relaciones observadas.

Al hacer una primera aproximación al conocimiento movilizado por la profesora para enseñar la proporcionalidad, se encontraron diferentes momentos que surgen como oportunidades para establecer otros conocimientos especializados que se pudieran movilizar en la enseñanza de la proporcionalidad. También se observaron otras posibles relaciones entre categorías del MTSK que inicialmente no fueron contempladas, lo cual permite establecer una relación entre el conocimiento práctico de un aula de clase y el conocimiento

teórico sobre la enseñanza del concepto de proporcionalidad. Esto evidencia el aporte y enriquecimiento mutuo entre práctica y teoría.

Para iniciar, y de forma general, se puede comentar que en la profesora se puede observar un conocimiento especializado, tanto desde el conocimiento del contenido como del conocimiento didáctico de ese contenido, especialmente en el KoT y el MKT. Para poner de relieve este peso específico hemos cuantificado los indicadores de indicios, oportunidades y evidencias totalizado tanto aquellas relativas a la información recolectada en la fase de recolección de datos en clase como en el establecimiento de oportunidades. De un total de 237 indicadores y oportunidades identificadas, 166 pertenecen al MK, representando un 70,04%, y 71 indicadores y oportunidades pertenecen al PCK, representando un 29,96%. Además, se puede comentar que, del total de 55 relaciones identificadas, 25 de estas relaciones establecidas entre los subdominios del MTSK pertenecen a la primera etapa de análisis de la información (evidencias e indicios) y las restantes 30 pertenecen a las relaciones adicionales al establecer las oportunidades.

En la tabla 21 se presenta la cuantificación de la ubicación de las evidencias, indicios y las oportunidades, en la cual se puede observar la mayoría de los elementos identificados pertenecientes al KoT y al MKT.

Subd.	Categoría	Cant de indicadores e indicios	Cant de oportunidades.	Totales
KoT	Definiciones propiedades y sus fundamentos	41	10	51
	Procedimientos	35	6	41
	Fenomenología y sus aplicaciones	9	4	13
	Registros de representación	17	7	24
KSM	Conexión transversal	7	2	9
	Conexión auxiliar	7	1	8
	Conexión simplificación	-	2	2
	Conexión complejización	-	2	2
KPM	Formas de validación y demostración	6	1	7
	Papel de los símbolos y el lenguaje formal	4	-	4

	Jerarquía y planificación para la resolución de problemas	4	1	5
	Práctica Matemática	-	1	1
MKT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	33	3	36
	Teorías de enseñanza	-	3	3
	Recursos, materiales virtuales	7	2	9
KFLM	Fortalezas y dificultades	2	4	6
	Teorías de aprendizaje	-	1	1
	Formas de interacción con el contenido matemático	2	5	7
KMLS	Secuenciación con temas	3	2	5
	Desarrollo conceptual o procedimental esperado	-	4	4

Tabla 21 Totalización de las evidencias, indicios y las oportunidades

Con respecto a las relaciones, se puede comentar que, de las 55 relaciones establecidas entre indicadores, indicios y oportunidades, se pudieron establecer 43 tipos de relaciones en las cuales resaltan conocimientos asociados al KoT y MTK. Por ejemplo, la relación entre los conocimientos de registros de representación y cómo en estos se pueden evidenciar propiedades y procedimientos asociados a la proporcionalidad; la elaboración de representaciones teniendo en cuenta las dificultades de los estudiantes; o la presentación de procedimientos asociados a temáticas posteriores.

A continuación, se presenta en la tabla 22 la distribución de relaciones entre las categorías tanto en el establecimiento de indicadores e indicios como en el establecimiento de oportunidades.

Relación	indicadores e indicios	oportunidades	Totales
KoT (propiedades), KMT (uso ejemplificación), KPM (formas de validación)	1	-	1
KoT (propiedades, procedimientos), KoT (registros de representación)	2	3	5
KSM (Con. aux) KoT (procedimientos)	1	-	1
KMP (formas de validación) (registros de representación) KoT	2	-	2
KMP (formas de validación) (procedimientos) KoT	1	-	1

KPM (uso lenguaje formal) KoT (procedimientos)	1	-	1
KPM (jerarquización y planificación en resolución de problemas) KoT (registros de representación)	1	-	1
KPM (jerarquización y planificación en resolución de problemas) KoT (procedimientos)	1	-	1
KMT (uso de ejemplos) (KoT) registros de representación	1	-	1
KMT (uso de ejemplos) KoT (definiciones)	1	-	1
KMT (estrategias, uso de preguntas orientadoras) KoT (definiciones y propiedades)	1	-	1
KMT (uso de ejemplos), KoT (propiedades, procedimientos)	1	1	1
KMT (estrategias, evocación) KoT (propiedades)	1	-	1
KMT (recursos, uso tablero) KoT (propiedades y procedimientos)	1	-	1
KMT (recursos, escuadras) KoT (propiedades de triángulos)	1	-	1
KMT (recursos, uso gestos) KoT (propiedades y registros de representación)	1	-	1
KMT (recursos, uso vídeos) KoT (procedimientos)	1	-	1
KMT (recursos, uso hoja en blanco) KoT (procedimientos)	1	-	1
KFLM (identificación de dificultades) KoT (registros de representaciones)	1	1	2
KFLM (identificación de dificultades) KoT (propiedades)	1	-	1
KMLS (secuenciación temas anteriores y posteriores) KoT (procedimientos)	2	-	2
KMLS (secuenciación temas anteriores y posteriores), KFLM (identificación de dificultades)	1	-	1
KMT (recursos) KoT (propiedades, registros de representación)	-	1	1
KoT (fenomenología) KoT (propiedades)	-	1	1
KoT (fenomenología) KoT (procedimientos)	-	1	1

KoT (fenomenología) KoT (registros de representación, propiedades)	-	1	1
KPM (prácticas particulares del quehacer matemático) KoT (registros de representación)	-	1	1
KSM (conexiones complejización) KoT (propiedades)	-	2	2
KSM (conexiones de simplificación) KoT (propiedades)	-	1	1
KSM (conexiones transversales) KoT (propiedades)	-	1	1
KSM (conexiones auxiliares) KoT (registros de representación)	-	1	1
KPM (fases de Polya) KoT (registros de representación)	-	1	1
KPM (heurísticas para la res. de problemas) KoT (registros de representación)	-	1	1
KPM (características de la veracidad o falsedad de una demostración) KoT (registros de representación)	-	1	1
KoT (propiedades) KMT (uso ejemplos)	-	1	1
KMT (recursos, puzles) KoT (propiedades y fundamentos)	-	1	1
KMT (recursos, puzles) KMT (teorías de enseñanza)	-	1	1
KMT (teorías de enseñanza) KMT (uso ejemplos)	-	1	1
KFLM (teorías de aprendizaje) KMT (uso procedimientos)	-	1	1
KFLM (teorías de aprendizaje) KMT (ejemplos) y KoT (registros de representación)	-	1	1
KMLS (desarrollo cognitivo esperado) KoT (registros de representación)	-	1	1
KMLS (secuenciación de los temas anteriores y posteriores) KSM (conexiones de complejización)	-	1	1
KMLS (secuenciación de los temas anteriores y posteriores) KoT (procedimientos y propiedades)	-	1	1

Tabla 22 Relaciones entre las categorías del MTSK

Con base a la anterior información se puede señalar, en términos generales, que, dado que la pregunta de investigación gira en torno a la comprensión del conocimiento especializado movilizado en la enseñanza de la proporcionalidad, en primera medida es importante comentar la importancia que tiene el KoT como base para la enseñanza desde una perspectiva matemática (MK) y didáctica (PCK). En este caso especialmente se hace referencia al conocimiento de la definición de conceptos claves para entender la proporcionalidad como magnitud, cantidad de magnitud, razón, segmentos homólogos e igualdad entre razones. De igual forma se hace referencia a propiedades relacionadas con las razones, rectas paralelas, triángulos y cuadriláteros, además de procedimientos como la simplificación de fracciones, el establecimiento de razones entre dos segmentos, el método de medios y extremos para verificar la proporcionalidad, el tratamiento algebraico de situaciones lineales, la construcción de una recta paralela a una recta dada y la comprobación de la semejanza de un par de triángulos.

Esta característica coincide con los resultados de la tesis doctoral de Escudero (2015), quien menciona que en su investigación se encontró que, además de que la mayoría de los indicadores estaban relacionados con el KoT, se detectaron múltiples relaciones entre el KoT y los demás subdominios del MTSK. En este sentido es necesario considerar el KoT como un eje sobre el cual se relacionan y organizan los demás conocimientos del MTSK, lo cual resulta lógico para la autora si se tiene en consideración que, como punto de partida, los conocimientos que debe tener un profesor de matemáticas son los contenidos matemáticos.

Además de esto, destaca un conjunto rico de registros de representaciones, como representaciones escritas de conceptos como razón, proporción, recta, segmento; representaciones verbales para nombrar razones y proporciones; gráficas de segmentos proporcionales; de problemas geométricos relacionados con el teorema de Tales; de problemas geométricos asociados a solución de cuadriláteros con lados semejantes; de problemas de semejanza de triángulos con una o dos incógnitas; y la categoría de fenomenología en una menor medida.

Lo anterior también coincide con las conclusiones de Escudero (2015), quien menciona que el conocimiento y manejo de estos distintos registros permitió reconocer aspectos específicos de la matemática que sirven al profesor como base para plantearse un

uso didáctico de los registros de representación, así como para el diseño de tareas y la evaluación de procedimientos de solución de estas tareas llevadas a cabo por estudiantes. Este tipo de conocimiento puede estar ligado directamente al dominio de conocimiento didáctico, en especial al KMT y al KFLM.

La siguiente categoría que resaltó en su aparición reiterativamente fue el KMT. Algunos conocimientos que resaltan de esta categoría son el uso del ejemplo como herramienta para mostrar propiedades, procedimientos o definiciones. Además del uso de los ejemplos como herramienta para clarificar dudas o superar dificultades. El uso adecuado de los ejemplos es necesario para emplear los registros de representación y propiedades adecuadas a las fortalezas y dificultades observadas en los estudiantes (KFLM).

De igual forma, otro elemento del KMT que emergió fue el uso de estrategias como preguntar por la relación entre dos razones para establecer la proporcionalidad entre estas; el uso de preguntas orientadoras para definir la proporcionalidad como una relación entre dos pares de segmentos; la evocación de conceptos construidos previamente (razón y proporción) como herramienta para resolver un problema de proporcionalidad; el uso de tablas de tres columnas para establecer la razón entre dos segmentos y el cambio de posición, tamaño y valores diferentes ejemplos de triángulos semejantes. También, para hacer un uso adecuado de estas estrategias, la profesora empleó adecuadamente los registros de representación y propiedades en torno a las fortalezas y dificultades observadas en los estudiantes (KFLM). Esta información lleva a concluir que con base en lo anterior se puede establecer una fuerte relación entre el KoT, KMT y KFLM.

Lo anterior coincide con el análisis presentado por Liñán (2017), quien menciona que en su tesis doctoral también se observaron importantes relaciones entre KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, y el KFLM, fortalezas y dificultades, lo cual pone de manifiesto cómo estas dos categorías son de gran importancia en el conocimiento de la geometría para el profesor. Se considera que esta coincidencia sucedió en parte porque la profesora Sonia usó un contexto geométrico para enseñar la proporcionalidad.

Desde los planteamientos de la autora, esta relación se puede determinar cuándo se tiene un elenco variado y rico de ejemplos usado para mostrar los contenidos, procesos y

procedimientos en conexión directa con el KFLM en su categoría de fortalezas y dificultades, puesto que dependiendo de estas podremos usar unos ejemplos u otros, lo cual implicará un conocimiento cohesionado en la enseñanza y el aprendizaje.

8.2 Impactos de los resultados

En la introducción del documento se plantearon algunas posibles implicaciones de los resultados de la presente investigación. Gracias a la sistematización y análisis de la información recolectada se puede comentar que efectivamente se aportó en diferentes dimensiones, las cuales serán comentadas a continuación:

Formación de profesores: se considera que, por medio de la identificación del conocimiento especializado movilizado en la enseñanza de la proporcionalidad, se encontraron algunos elementos que aportan a la construcción de programas de formación de profesores de matemáticas, pues desde la perspectiva del MTSK esta formación debe estar compuesta de un componente disciplinar (conocimiento matemático) y un contenido pedagógico y didáctico relacionado con la disciplina (conocimiento didáctico de contenido). Componentes condicionados o dependientes por las creencias sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y el aprendizaje.

Inicialmente, se considera que el anterior planteamiento se debe aplicar en la enseñanza de conceptos como la proporcionalidad, pues, como se ha observado, no basta con tener un conocimiento disciplinar sobre las definiciones, propiedades, registros de representación o procedimientos asociados a la proporcionalidad sino, también, es necesario tener conocimientos de tipo didáctico como el conocimiento de teorías de aprendizaje de la proporcionalidad; el uso de ejemplos adecuados y transparentes para mostrar una definición, propiedad o procedimiento; el conocimiento sobre errores – obstáculos epistemológicos sobre proporcionalidad y de estrategias de cómo superarlos; además del conocimiento y limitantes de determinados recursos y materiales, además de entre otros.

La presente investigación aporta en la creación de conciencia sobre la relación entre los diferentes tipos de conocimiento que pone en juego el profesor en la enseñanza de la

proporcionalidad, de esta forma, se considera que un escenario ideal donde se debe reflexionar profundamente y socializar sobre las relaciones de conocimientos asociados a la proporcionalidad son las carreras de magisterio y todos los espacios de formación de profesores posgradual y espacios donde el estudiante que se prepara para ser profesor, gracias a investigaciones como la presente, puede construir y usar herramientas efectivas con el fin de enfrentar de una mejor forma su práctica desde un ámbito disciplinar, didáctico y pedagógico.

Finalmente, se considera que la presente investigación puede impactar en la creación de espacios académicos en el marco de las carreras de magisterio donde se reflexione y estudie sobre los elementos presentados. Por ejemplo, se puede examinar la superación de las dificultades en la comprensión de conceptos como razón, la construcción de la unidad de medida y proporción, las dificultades y potencialidades del uso de ejemplos en diferentes contextos para la construcción del significado de la proporcional, la relación de la proporcionalidad con conocimientos previos como el significado de la noción parte-todo, unidad de medida y posteriores como tratamiento algebraico de situaciones.

Identificación de necesidades de formación: con respecto a esta segunda dimensión, se considera que por medio de investigaciones donde la sistematización de un caso se puede dar para aportar a la reflexión del profesor sobre qué aspectos de la práctica pueden ser mejorados e invitar a la academia y las carreras de magisterios a reflexionar sobre cómo se pueden fortalecer y mejorar los programas; por medio de la identificación de cuáles son las necesidades de formación con respecto a la proporcionalidad para que cuando el profesor llegue al aula esté mejor preparado y pueda afrontar de una mejor forma las dinámicas de clase.

Diseño de secuencias de enseñanza: esta tercera dimensión está relacionada con las dos anteriores, pues si se hace un trabajo juicioso de reflexión y transformación de las prácticas de los profesores, esto impactaría en la construcción de secuencias didácticas para la enseñanza de la proporcionalidad que sean creativas, innovadoras y que tengan en cuenta los elementos presentados en esta investigación, como, por ejemplo, la superación del uso de

la razón como una fracción; la superación de problemas de medida de longitudes con diferentes unidades de medida; el uso de contextos numéricos y gráficos; el paso de diferentes tipos de representación asociados a la proporcionalidad; el uso adecuado de escuadras para la construcción de segmentos paralelas; diferentes estrategias de tratamiento algebraico de situaciones lineales, entre otros.

Comprensión de dificultades y errores de aprendizaje asociados a la proporcionalidad: se considera que por medio del presente trabajo se aportó en la identificación, caracterización y establecimiento de estrategias para superar dificultades y errores, pues, por medio de la reflexión del actuar de la informante, se pudieron describir estrategias, formas de representar, tipos de ejemplos y conocimientos que la profesora puso en situación para posibilitar un mejor aprendizaje en los estudiantes.

En una segunda sección de este apartado, se quiere señalar el uso del MTSK como una propuesta potente de caracterización y comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, entendiendo el conocimiento como aquel que es puesto en juego. Se considera que la presente experiencia es una aportación a la consolidación y fortalecimiento como una herramienta de reflexión en y para la práctica del profesor de matemáticas y para la posible elaboración de propuestas de formación de profesores.

Dado que el objetivo de la presente tesis es comprender el conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de la proporcionalidad, se considera que para esto fue necesario describir, sistematizar, identificar y caracterizar el conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas a través del análisis de su conocimiento especializado. El anterior análisis ha permitido obtener algunas conclusiones sobre de las características específicas de los subdominios del dominio matemático y del dominio de conocimiento didáctico.

Con respecto al KoT, se pudo identificar que fue donde más indicadores se pudo obtener información. Los procedimientos, propiedades y registros de representación se presentaron como aquellos contenidos asociados a la proporcionalidad que deberían ser enseñados por medio de diferentes hilos conductores como por medio de prácticas

matemáticas, ejemplos, estrategias, teorías de enseñanza y aprendizaje, conocimiento de fortalezas y dificultades, entre otros. Este primer elemento es importante, pues, en el conocimiento de los temas, está el saber especializado del profesor que responde a la pregunta de qué se va a enseñar.

Finalmente, respecto del KPM, se puede mencionar que, con base en la información analizada, aunque la clase fue grabada con estudiantes de 15 a 17 años, no se hizo uso de lenguaje para demostraciones, implemente se hizo uso de algunas notaciones formales para denotar conceptos, además de la verificación de propiedades por el uso de ejemplos; de igual forma, se hace uso de ejemplos y contraejemplos como instrumentos de variación. Estos elementos invitan a reflexionar sobre los procesos de la formalización del lenguaje matemático como un proceso a largo plazo que puede trascender los presupuestos sobre las construcciones que los estudiantes ya deberían tener.

Asimismo, se puede concluir que los pocos indicadores relacionados a las prácticas particulares del quehacer matemático, como la modelación, pueden estar relacionados también con los pocos indicadores e indicios encontrados sobre teoría de enseñanza (KMT) asociados a la modelación y la resolución de problemas.

En un análisis juicioso del KSM, se puede concluir que esta categoría facilitó ver cuál es la imagen que tiene la profesora sobre de la matemática como un conjunto de conceptos, procedimientos, representaciones y lenguajes relacionados entre sí. Además de mostrar desde la perspectiva de la profesora, cuál conocimiento se debe ver previamente (razón) para posteriormente llegar a otro (proporcionalidad).

Teniendo en cuenta que el dominio de PCK indaga en preguntas relacionadas al cómo enseñar, es decir, qué aspectos didácticos, pedagógicos, conceptuales y cognitivos se deben tener en cuenta para la enseñanza. Al indagar sobre la categoría del KMT, se puede mencionar que en este caso se pudieron establecer diferentes relaciones entre esta categoría y el KoT, pues la claridad que poseía la profesora sobre propiedades, definiciones o registros de representaciones facilitó la puesta en juego de los conocimientos sobre la elaboración de ejemplos y la presentación de estrategias para superar dificultades presentadas por los estudiantes.

Con respecto a este dominio, también se puede concluir que la mayoría del conocimiento identificado está asociado a la categoría del KMT, especialmente a la subcategoría de las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos; exactamente 33 indicadores observados y 3 evocados. Por medio de estos indicadores se pudo determinar que el uso de los ejemplos y contraejemplos puede tener varios usos, entre estos: definir, mostrar procedimientos, propiedades, y clarificar dudas o superar dificultades.

Además, se puede concluir que, por medio del uso de ejemplos y contraejemplos, la profesora pudo demostrar su conocimiento sobre las potencialidades y limitaciones de estos. Además del conocimiento de las propiedades, definiciones, prácticas matemáticas y de un rico conjunto de representaciones (gestuales, verbales, numéricas, gráficas, icónicas, algebraicas, tabulares, en el plano cartesiano, entre otros).

De igual forma, se puede concluir que se pudo identificar una mezcla entre las teorías institucionales como la resolución de problemas y las fases de Polya, y las teorías personales producto de la experiencia. Ejemplo de esto es la asunción de que se debe iniciar por proporcionalidad desde una perspectiva geométrica, debido a que esta se puede representar de una forma naturalmente gráfica. Esto facilita la comprensión de las características y propiedades como un rasgo entre cantidades de magnitudes.

Con respecto al conocimiento de los recursos y materiales virtuales, se puede concluir que, de acuerdo con los indicadores, indicios y oportunidades identificadas, estos están relacionados con el conocimiento de los temas KoT, además del KFLM, en especial con el conocimiento de las fortalezas y dificultades, en el sentido de que es necesario que el profesor comprenda cómo determinado material puede potencializar o limitar la comprensión de las definiciones, propósitos, procedimientos o representaciones asociados al concepto de proporcionalidad, como, por ejemplo, el uso de escuadras y hojas blancas para las construcciones geométricas.

Al reflexionar sobre posibles conclusiones con respecto al KFLM, se puede comentar que se pudieron identificar indicadores asociados especialmente al conocimiento de las fortalezas y dificultades que pueden tener los estudiantes en el proceso de comprensión de la proporcionalidad que, como se comentó anteriormente, está asociado al conocimiento de los

temas como definiciones, propiedades, procedimientos y representaciones (KoT). A esto se suman los ejemplos, posibles materiales que puedan facilitar el aprendizaje (KMT).

De igual forma, se puede concluir que el conocimiento de las fortalezas y dificultades presentadas por los estudiantes con respecto a la proporcionalidad también está asociadas a las teorías de aprendizaje (institucionales y/o personales). Por medio de la caracterización de los indicadores se pudo apreciar que, en el planteamiento de los ejemplos y representaciones presentadas por la profesora, ella verificaba que dicho ejemplo mostrara fácilmente la propiedad, el procedimiento o la definición que quería destacar, en caso de que los estudiantes presentaran alguna dificultad de comprensión o confusión de la propiedad o definición a mostrar.

Por ejemplo, la profesora identifica la dificultad cuando los estudiantes al suponer que la proporcionalidad es “ser el doble de” en vez de comprender la proporcionalidad como igualdad entre razones, entonces cambia el ejemplo presentado, es decir, cambia las razones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ por las razones $\frac{3}{9}$ y $\frac{4}{12}$, mostrando así un ejemplo más transparente. Muestra así un conocimiento asociado con las fortalezas y las debilidades (KFLM), y las propiedades (KoT) y la función de sus teorías institucionales y personales de aprendizaje (MKT) sobre cómo se debería enseñar la definición del concepto de proporcionalidad entre segmentos.

Finalmente, con respecto al KMLS, se puede concluir que la mayoría de los indicadores identificados están asociados a los conocimientos sobre la secuenciación de temas anteriores y posteriores, en especial en cómo la proporcionalidad puede aportar en la comprensión de fenómenos de constantes de variación por medio de conceptos como función lineal y función afín.

Con respecto a los conocimientos previos que la profesora considera necesarios que los estudiantes ya deberían manejar, se destacaron el conocimiento de uso de razones enteras, la simplificación de fracciones y la comprensión del concepto de razón para la aplicación del teorema de Tales. Todos estos conocimientos previos están relacionados con definiciones, propiedades, procedimientos y representaciones, es decir, con el conocimiento de los temas (KoT), lo que evidencia la relación entre el KMLS y el KoT.

De igual forma, se pudo concluir que, con respecto al desarrollo conceptual o procedimental esperado, se identificaron oportunidades como la clasificación de triángulos, el tratamiento algebraico de situaciones lineales, el uso de instrumentos como la escuadra, la simplificación de fracciones y la estimación de la longitud de segmentos. Estos elementos que también están asociados a la categoría de temas, en especial las definiciones, propiedades, procedimientos y representaciones, evidencian una vez más el rol protagónico que ha tenido el KoT en este estudio de caso, además de mostrar cómo los demás subdominios del MTSK se relacionan entre sí en función del conocimiento de los temas.

8.3 Limitaciones y proyecciones

Para finalizar, se quiere resaltar la importancia de construcción de otras experiencias que, igual que esta, aporten en la comprensión del conocimiento especializado del profesor por medio su enriquecimiento.

Entre las experiencias que aportaron significativamente en la elaboración de la presente investigación está Liñán (2017), quien, por medio de su tesis doctoral sobre el conocimiento especializado para la enseñanza de la geometría en un aula de quinto grado, aportó en aspectos como la codificación y organización de la información recolectada, la comprensión de la importancia de la triangulación de expertos de la información y el uso de diferentes instrumentos de recolección de la información, para dotar de una verdadera consistencia y validez científica de los análisis.

Aguilar (2015), en su tesis doctoral sobre el conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas, aportó en aspectos como comprender que la indagación sobre la consciencia de la profesora respecto del conocimiento movilizado, o conocer si sus conocimientos coinciden con los inferidos en el análisis es un aspecto, aunque necesario, complementario a la investigación para la comprensión del conocimiento.

En su caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria, este autor aportó en la comprensión de relaciones de dependencia del KMT con respecto al KoT que posee el profesor. Su estudio pone de manifiesto que los conocimientos didácticos sobre el contenido

matemático tienen como base los conocimientos matemáticos del contenido, aspecto que también se evidenció en el presente trabajo. También está la comprensión de las características y momentos de la propuesta top-down, bottom-up. Esta propuesta se entiende como metodología que proporciona un doble acercamiento a los datos que aportará perspectivas diferentes sobre el análisis de estos y la caracterización de estudio de caso como diseño de investigación que busca un examen minucioso de características significativas del objeto de estudio.

Con respecto a las limitaciones, es necesario aclarar varios elementos que se consideran importantes dado que la presente investigación fue un estudio de caso hecho desde una perspectiva interpretativa cualitativa que indagaba el conocimiento especializado del profesor de matemáticas por medio del modelo MTSK y la metodología bottom- up, top-down. Algunos de estos elementos son:

- La información recolectada, sistematizada y analizada en la presente experiencia de investigación es producto de condiciones únicas no repetibles, pues factores como la profesora seleccionada, el momento en el cual se grabaron las clases y la institución son variables que afectaron la información y su posterior interpretación. Por lo cual se considera importante hacer otros estudios de casos en otros contextos, de tal forma que puedan seguir enriqueciendo la comprensión del conocimiento especializado del profesor sobre proporcionalidad.

- Con respecto a la sistematización de la información, y con ello la elaboración de tablas de indicadores, y construcción de mapas de relaciones de subdominios del MTSK, se consideró importante tener en cuenta los aportes de investigaciones anteriores sobre MTSK, pues es necesario nutrirse de las fortalezas y aprender de la superación de las dificultades de aquellas experiencias previas en el proceso de construcción y enriquecimiento del modelo MTSK.

- En el establecimiento de los indicadores y relaciones entre subdominios del MTSK, somos conscientes de que este trabajo en parte no es objetivo o neutral, pues se considera que elementos como la sensibilidad teórica y la experiencia propia aportaron en la

construcción de estos elementos. De igual forma, se considera importante mencionar que por medio de estrategias como la triangulación de expertos y triangulación de instrumentos de recolección, como la transcripción de los vídeos, la entrevista, y la guías de trabajo, se pudieron hacer consensos para establecer acuerdos con respecto a la asociación de determinado enunciado a un indicador específico.

Finalmente, con respecto a las proyecciones, se considera que, dado que los procesos investigativos deben ser considerados como procesos cíclicos y no lineales, es lógico que se dejen aspectos para seguir indagando. Con base en los elementos presentados en este documento, algunos de estos elementos a seguir investigando serían:

Observando el rol predominante del KoT en la enseñanza de la proporcionalidad, ¿cómo dar cuenta de las creencias y concepciones del profesor sobre qué contenidos y cómo enseñar la proporcionalidad?, ¿en qué medida el conocimiento sobre los registros de representación asociados a la proporcionalidad puede potenciar o limitar el PCK?, ¿qué elementos del MTSK hacen que un profesor presente un ejemplo más o menos transparente para mostrar una definición, una propiedad o un procedimiento?

De igual forma, dado que uno de los posibles impactos de esta investigación es la construcción de espacios de reflexión sobre el conocimiento especializado del profesor y la elaboración de secuencias de enseñanza de la proporcionalidad, otras situaciones a seguir indagando serían: ¿qué elementos disciplinares y didácticos debe tener esta secuencia de enseñanza?, ¿qué elementos conceptuales (disciplinares y didácticos) se deberían reflexionar en espacios de formación de profesores sobre la enseñanza de la proporcionalidad?, ¿cómo usar el modelo MTSK para investigar sobre el conocimiento especializado de profesores en formación?

9. BIBLIOGRAFÍA

- Aguilar, A. (2015). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas. Un estudio de caso.* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva. Disponible en <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/12006>
- Amado, A. y Muñoz, J. (2015). *Caracterización del conocimiento que debería poseer el profesor de matemáticas respecto a razón, proporción y proporcionalidad.* Tesis maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Disponible en <http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/263/TO-18357.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Azcárate, C., y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas.* Madrid: Síntesis.
- Balderas, R., y Guerra, M. (2014). Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestro de secundaria. *Revista Educación Matemática*, 26 (2), 7-32.
- Ball, D.L., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407
- Block, D. (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico.* (Tesis doctoral). México: CINVESTAV-IPN. Disponible en http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/93552/2001_Block_Tesis.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Block, D. (2006). Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad. 19a. *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, (pp. 675-680). Montevideo: RELME. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/5601/1/BlockConocimientosAlme2006.pdf>
- Brodie, K. (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms.* Johannesburg, Sudáfrica: Springer
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge". En R. Biehler, R. Scholz, R. SträBer y B. Winkelmann (Eds). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. 73-88. Dordrecht: Kluwer Academic
- Caputo, L. y Soto, N. (2013). *Proporcionalidad directa e inversa: Dificultades en su aprendizaje.* Facultad de Cs. Exactas y Naturales y Agrimensura - UNNE. Disponible en <http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2002/09-Educacion/D-008.pdf>
- Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

- Carrillo, J., y Contreras, L. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática*, 7(3), 79-92.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L, y Muñoz, M. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. *Proceedings of Eighth ERME Congress*. Antalya. (en prensa).
- Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Montes, N., Escudero, D., y Flores E. (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Paraninfo
- Chace, A. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus*. Reston, Washington: National Council of Teachers of Mathematics.
- Chemla, K. (2005). The interplay between proof and algorithm in 3rd century China: The operation as prescription of computation and the operation as argument. In Mancosu, P. et al (editors) *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*, pp. 123-145. Dordrecht; Springer.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Alque.
- Ceballos, E. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja*. Documento de trabajo. disponible en <http://www.bdigital.unal.edu.co/7758/>
- Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. (Tesis doctoral). Michigan: Universidad de Michigan.
- Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Correal, J. Rico, C. (2016). *Creencias y concepciones de los profesores de básica primaria en relación con la enseñanza del concepto de fracción*. Universidad de Medellín. Disponible en http://repository.udem.edu.co:8080/bitstream/handle/11407/3497/T_MEM_31.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Corry, L. (1994). La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. *Revista Mathesis*, 10, 1-24. Disponible en <https://m.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Dedekind-Eudoxus.pdf>
- Cullen, C. (2007). The suan shu shu, “writings on reckoning”: rewriting the history of early chinese mathematics in the light limits of knowledge. *International journal of engineering science*, 36 (12-14), 1339-1359. Disponible en <https://reader.elsevier.com/reader/sd/pii/S0315086005001084?token=10D02A70FBD>

7EB338060E374E8937052BF50622461D10D11CAD0588DDEF1E49085BBCD8D0DC1456A1176395AE1CE475E

Dauben, J. (1998). Ancient Chinese mathematics: the Liu Hui al Jiu Zhang Suang Suan Shu vs Euclid's Elements. *International Journal of Engineering Science*, 36 (12-14) 1339-1359.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. London: Croom-Helm

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva. Disponible en <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456>

Euclides (1991). *Elementos, Libros V-IX*, Editorial Madrid: Gredos.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (1), 129-142.

Fiol, L., y Fortuny, M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid.: Síntesis.

Flick, U. (2007). *Introducción a la Investigación Cualitativa*. Madrid: Morata.

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1946/1/libro_MATREC_2011.pdf

Fowler, D. (1979). Ratio in early Greek mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1 (6), 807-846.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Godino, J., y Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad para maestros*. Proyecto Edumat Maestros. España.

Goizueta, M. (2011). *Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesoras*. Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible en www.uab.cat/servlet/BlobServer?blobtable=Documentyblobcol.../pdf

Grbich, C. (2007). *Qualitative Data Analysis: An Introduction*. Thousand. Oaks: Sage Publications.

- Guarín, J. y Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Revista Suma* 62, 5-48. Disponible en https://revistasuma.es/IMG/pdf/62/SUMA_62.pdf
- Hearth, T. (1957). *The thirteen books of the Elements*. New York: Dover.
- Hill, H., Ball, D., y Schilling, S. (2008). Content Knowledge: Conceptualizing and measuring teachers topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400. Disponible en <https://www.jstor.org/stable/40539304>
- Jakobsen, A., Thames, M.H., y Ribeiro, M. (2013). Delineating issues related to Horizon Content Knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* .3055-3064. Antalya: ERME.
- Kangshen, S. (1999). *The nine chapters on the mathematical art*. Beijing: Oxford University Press.
- Khoury, H. (2002). Classroom challenge. exploring proportional reasoning: Mr. Tall/Mr. short. In: B. Litwiller; G. Bright (Eds.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, p. 100 - 102.
- Liñán, M. (2017). *Conocimiento Especializado en Geometría en un aula de 5º de Primaria*. (Tesis doctoral) Universidad de Huelva. Disponible en <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/14230>
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Hillsdale: Erlbaum.
- Ministerio de Educación Nacional- MEN (2017). *Derechos básicos de aprendizaje área de matemáticas versión 2*. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá: Colombia. Disponible en <https://es.slideshare.net/sbmalambo/dba-derechos-bsicos-de-aprendizaje-matemáticas>
- Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L. (2014). Enseñanza Y Aprendizaje De La Razón, La Proporción Y La Proporcionalidad: Un Estado Del Arte. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 17(1), 59–81. <http://doi.org/10.12802/relime.13.1713>
- Oller, A. (2012). *Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid. Disponible en <https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/1118/1/TESIS196-120828.pdf>
- Patwardan, K. (2001). *Lilavati of Bhaskaracarya. A treatise of mathematics of vedic tradition*. Delhi, India. Motital Publishers

- Ponte, J. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. Ponte, J.F. Matos (Eds.), *Actas del PME 18*, Vol. 1, 195-210. Lisbon.
- Rashed, R. (1999). *Al- Khayyam mathematicien*. Paris : Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.
- Rapetti, V. (2003). Proporcionalidad. Razones internas y razones externas. *Revista suma*, (44). 65-77. Disponible en <https://revistasuma.es/IMG/pdf/44/065-070.pdf>
- Rico, L. (Coord.) (1997), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Rico, L. (s.f) *Apuntes sobre fenomenología*. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/485/1/RicoL97-99.PDF>
- Rivas, M. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Disponible en https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Mauro_Rivas_tesis.pdf
- Rivas, A., Godino, J. y. Castro, W. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. *Boletim de Educação Matemática*. 26. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574008>
- Rivas, M., Rondón, Y., Triviño, L. (2017). Conocimiento de futuros profesores de matemática sobre proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html
- Rodríguez, A., y Pérez, J. (2003). *La noción de proporcionalidad*. México: Ethos Educativos.
- Rommevaux, S. (1999). *La proportionnalité numérique dans le livre VII del Éléments de Campanus*. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 5 (1), 83-126.
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. London: SAGE Publications
- Ruiz, M. (2006). La proporcionalidad como objeto de enseñanza del docente- *Memorias I REPEM La Pampa, Argentina*, Disponible en <http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Relatos/CRE12.pdf>
- Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. Nueva York: Routledge.

- Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs for the study of teaching. En M. C. Wittrock (ed.). *Handbook of Research on Teaching*. Nueva York: Macmillan, 3-36.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22. Traducción castellana (2005): Conocimiento y enseñanza: fundamento de la nueva reforma. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 9(2), <http://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf>
- Solomon, A. (1987). Proportion: interrelations and meaning in mathematics. *FLM. Montreal*. (7) 1, 14-22.
- Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Strauss, A. y Corbin, J. (2002) *Bases de la Investigación Cualitativa. Técnicas y Procedimientos para Desarrollar la Teoría Fundamentada*. Bogotá - Colombia: CONTUS - Editorial Universidad de Antioquia.
- Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 127-146. Nueva York: McMillan.
- Torres, E. (2015). *Conocimiento del profesor en la práctica: la enseñanza de la proporcionalidad*. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible en https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2015/hdl_10803_290741/etm1de1.pdf
- Torres, E; y Deulofeu, J. (2018). *La enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en el paso de la educación primaria a la secundaria: el caso de Ainoa*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (99). 105-126. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/12902/>
- Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/8445/>
- Vega, B. (2006). La proporcionalidad en el análisis didáctico de un libro de texto. *Revista educación matemática*. (21). Universidad Nacional de Córdoba. 1-13. Disponible en http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_21/pro_4.pdf

10. ANEXOS

10.1 Relaciones identificadas en la profesora entre subdominios del MTSK

Relación	Descripción
1	Uso de la ejemplificación (KMT) como comprobación de propiedades (KoT) y como forma de validación usada por la profesora (KPM), por medio de construcciones empíricas y pruebas informales del teorema de Tales
2	Uso de los procedimientos, tanto numéricos como geométricos haciendo uso adecuado de los registros de representación (KoT)
3	Relación entre los registros de representación (KoT) y el papel simbólico del uso de lenguaje formal (KPM), mostrando el uso de un lenguaje formal para nombrar una recta o una razón, estableciendo sus representaciones, significados, y su rol en la resolución de una situación problema relacionada con la proporcionalidad
4	Uso de fundamentos y de procedimientos por medio de representaciones (escritas y gráficas) válidas para resolver problemas del contexto real relacionados con proporcionalidad (KoT)
5	Uso de conexión auxiliar (tratamiento algebraico de situaciones lineales) relacionadas con las categorías del KoT, como propiedades y procedimientos
6	Uso de formas de validación (KPM) caracterizadas por comprobaciones empíricas de propiedades y teoremas, además de pruebas informales de geometría usando registros de representación de tipo gráfico y escrito (KoT)
7	Uso de contraejemplos como parte del conocimiento de la práctica matemática (KPM) asociado al uso de procedimientos y propiedades por medio de diferentes registros de representaciones (KoT)
8	Uso del simbólico del uso de lenguaje formal (KPM), al hacer referencia explícita a la importancia del uso de símbolos y lenguaje (escrito) formal, para expresar determinadas propiedades y hacer procedimientos necesarios para resolver problemas de proporcionalidad (KoT)
9	Uso de jerarquización y planificación en resolución de problemas (KPM), relacionado con el uso de propiedades, procedimientos y registro de representación válidos para llegar a una solución del problema (KoT)
10	Uso de la validación (KPM) por medio de la comparación de los resultados obtenidos por diferentes métodos y diferentes formas de representación (KoT)
11	Uso de ejemplos como estrategia (KMT) para establecer propiedades usando registro de representación (KoT)
12	Uso del ejemplo como una herramienta (KMT) para establecer la definición de un concepto (KoT)
13	Uso de preguntas orientadoras como herramientas (KMT) para establecer definiciones o propiedades (KoT)
14	Uso de los ejemplos como una herramienta para mostrar procedimientos como otra relación entre el KMT y el KoT movilizado por la profesora
15	Uso de la evocación como una estrategia (MKT) para establecer propiedades y definiciones de proporcionalidad y semejanza (KoT)
16	Uso de registros de representación verbales, escritos y gráficos, relacionado con el uso adecuado el tablero (KMT) como recurso para visualizar propiedades y procedimientos (KoT)

17	Uso de las escuadras como recurso (KMT) para la presentación de propiedades como la relación entre ángulos iguales a lados iguales en un triángulo (KoT)
18	Uso del lenguaje gestual como un recurso para representar conceptos geométricos (KMT), mostrando el dominio por un lado la propiedad o el concepto a mostrar (KoT, propiedades) y por el otro el uso de uno o varios sistemas de representación como el verbal, escrito o gráfico (sistemas de registro KoT)
19	Uso del vídeo como recurso (KMT) puede relacionarse con la presentación de las aplicaciones en el mundo real y el establecimiento del procedimiento del teorema de Tales (KoT), esto también puede relacionarse con el KFLM, pues por medio de este se puede vídeo se pueden observar y adquirir una mejor comprensión de las representaciones y los procedimientos sobre proporcionalidad
20	Indicio sobre recursos (KMT), materiales virtuales, con respecto al uso, potencialidades y limitaciones del tipo de papel (blanco o cuadriculado) que se elija para elaborar construcciones geométricas.
21	Identificación de la dificultad que tienen los estudiantes para nombrar una razón, pues usan las fracciones como “tres quintos” para nombrar la razón “tres es a cinco”, para superar la dificultad de comprensión de la razón como un cociente entre segmentos y no como fracción; mostrando una relación entre las fortalezas y dificultades (KFLM) y el registro de representación (KoT)
22	Identificación de las dificultades en la comprensión de proporcionalidad cuando se involucran situaciones de medición que usan milímetros (KFLM), superándola por medio del conocimiento la igualdad entre razones de segmentos homólogos de rectas transversales que son cortadas por paralelas (propiedades KoT)
23	Identificación que, aunque estos procesos de medición no sean exactos, el teorema de Tales se aplicará para cualquier pareja de segmentos homólogos, mostrando una relación entre KMLS y su conocimiento del tema, en este caso las propiedades (KoT)
24	Uso de la secuenciación con temas anteriores y posteriores (KMLS), mencionando trabajo previo del uso de razones enteras en clases anteriores y mencionando el trabajo de simplificación de fracciones hechas con antelación. En estas se hace referencia una relación entre el KFLM y el un dominio de procedimientos específicos asociados a la proporcionalidad como el establecimiento de una razón o la simplificación de una fracción (KoT)
25	Uso de la secuenciación de temas KFLM cuando la profesora menciona la importancia de tener claridad sobre los conceptos de razón y reconocer qué dice el teorema de Tales para poder hacer aplicaciones de dicho teorema en situaciones reales (KoT)

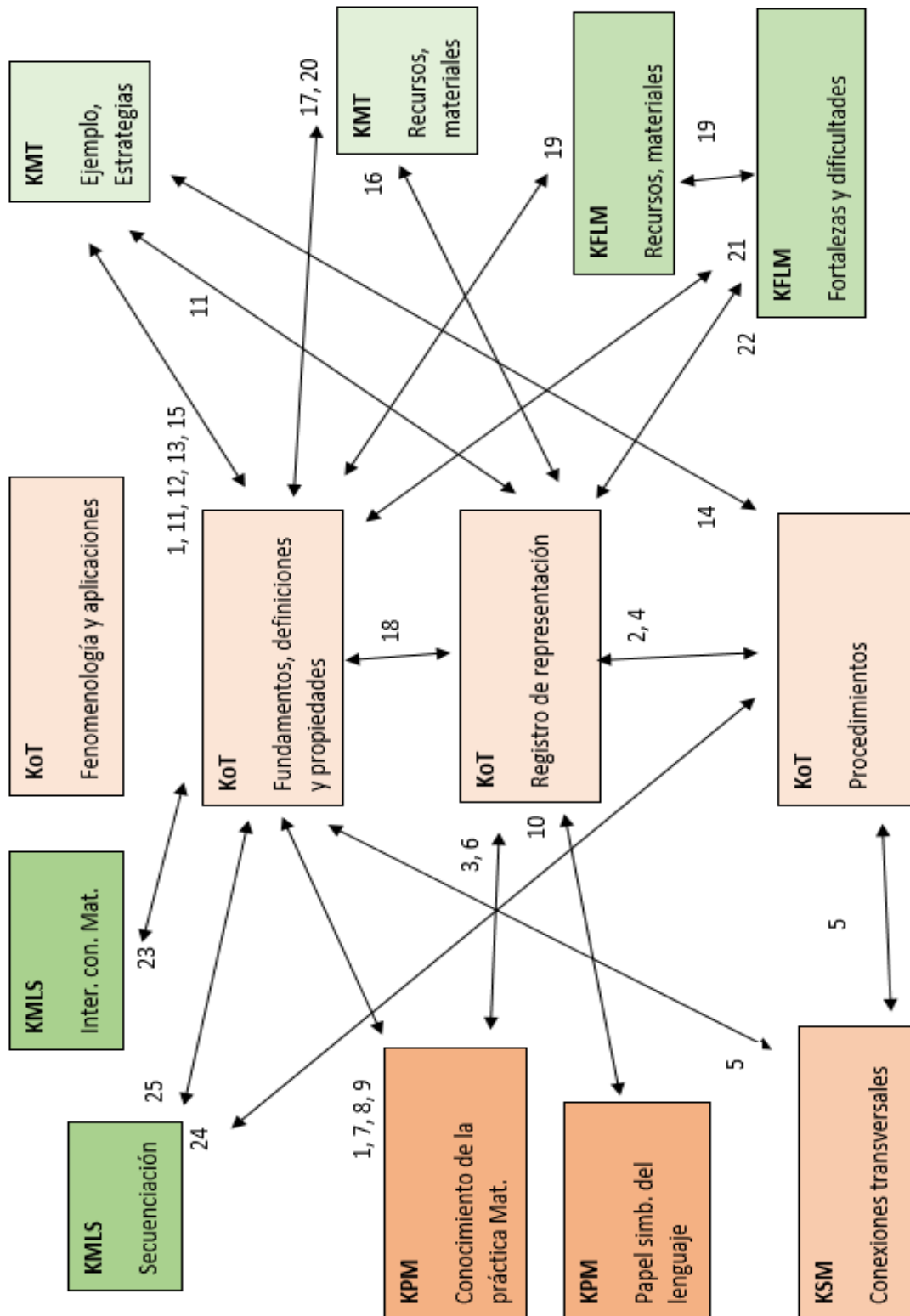
10.2 Relaciones evocadas entre subdominios del MTSK

Relación	Descripción
1	Relación de construcción de definiciones de conceptos previos a la idea de razón y proporción, como por ejemplo los conceptos de magnitud y cantidad de magnitud, sus definiciones, propiedades, características, (KoT, propiedades) por medio de ejemplos y representaciones, elementos que anteceden a la construcción del concepto de razón (KoT, registros de representación).
2	Relación entre la construcción de conceptos como magnitud y cantidad de magnitud (KoT, propiedades) para establecer el concepto de razón e igualdad entre razones como proporcionalidad, además de abordar la proporcionalidad como una relación multiplicativa entre cantidades extensivas por medio del uso de diferentes registros de representación (KoT, registros de representación).
3	Relación entre las interpretaciones de proporcionalidad inversa y proporcionalidad aritmética (KoT, propiedades), por medio del uso de situaciones como el establecimiento de una razón usando magnitudes diferentes a la longitud, como el peso, la masa, el volumen, la fuerza o el precio de un determinado objeto (KMT, ejemplos)
4	Relación entre el uso de escalas numérica y gráfica, el establecimiento de porcentajes y el uso de la regla de tres para conocer un valor desconocido y el establecimiento de la función de proporcionalidad a partir de un abordaje desde la proporcionalidad aritmética (KoT, procedimientos). y los diferentes tipos de registros de representación asociados a la proporcionalidad, como la verbal, la tabular, la icónica, la representación en el plano cartesiano, y las expresiones algebraicas o ecuaciones (KoT, registros de representación)
5	Relación entre las propiedades de la proporcionalidad, como la existencia del isomorfismo de medidas para establecer la proporcionalidad entre magnitudes extensivas y la desigualdad triangular (KoT, propiedades), y la construcción de representaciones gráficas (KoT, registro de representación) usando adecuadamente instrumentos como escuadras, reglas y compás (KMT, recursos y materiales)
6	Relación entre el estudio de la evolución histórica de la proporcionalidad (KoT, fenomenología), y la identificación de la relación de proporcionalidad entre cantidades de magnitud diferentes a la longitud (KoT, propiedades)
7	Relación entre estudio de la evolución histórica de la proporcionalidad (KoT, fenomenología) y conocer el procedimiento griego de antifairesis, aportando en la caracterización del concepto de razón (KoT, procedimientos).
8	Relación entre los registros de representación (KoT, registros de representación), las propiedades de la proporcionalidad (KoT, propiedades) y la fenomenología y sus aplicaciones (KoT, fenomenología), es el uso del Teorema de Tales para dividir un ángulo en varias partes iguales o para dividir un segmento en partes iguales.
9	Relación entre el uso de diferentes registros de representación (KoT, registros de representación) y el conocimiento de las fortalezas y dificultades de los estudiantes (KFLM)
10	Relación entre el uso de la representación gráfica (KoT, registros de representación) y la resolución de problemas en contextos geométricos (prácticas particulares del quehacer matemático, KPM), la cual se puede observar, por ejemplo, cuando se busca

	establecer en valor de segmento desconocido que esta entre rectas paralelas que son cortadas por rectas transversales.
11	Relación entre proporcionalidad geométrica (KoT, propiedades) y conceptos como recta, segmento y las propiedades de los triángulos, como conexión de complejización (KSM, conexiones de complejización)
12	Relación entre proporcionalidad aritmética (KoT, propiedades) emergen lo conceptos de pendiente, función lineal (KSM, conexiones de complejización)
13	los conceptos y las propiedades de fracciones y las relaciones multiplicativas emergen como conceptos que permiten la comprensión de la proporcionalidad, desde una perspectiva más elemental (KSM Conexiones de simplificación)
14	conexiones transversales los conceptos y las propiedades de la igualdad y la constante de variación, pues son aquellos conceptos que pueden enlazar varios aspectos de la proporcionalidad
15	Relación entre las conexiones auxiliares se considera que pueden estar las representaciones numérica y gráfica de los porcentajes, dado que este tipo de representaciones son necesarias para la comprensión de una parte del concepto de proporcionalidad, a partir de la proporcionalidad a través de los porcentajes
16	Relación entre la elaboración de representaciones gráficas (KoT, registros de representación) puede aportar en la comprensión de un problema desde la proporcionalidad geométrica, en las etapas iniciales de resolución de problemas de acuerdo con Polya (KPM)
17	Relación entre la elaboración de representaciones gráficas (KoT, registros de representación) como una herramienta que puede aportar en la construcción de heurísticas para la resolución de problemas como la visualización, la exploración y la reformulación (KPM)
18	Relación entre las representaciones gráficas (KoT, registros de representación) que se muestra como contraejemplos se puede establecer características de la veracidad o falsedad de una demostración (KPM)
19	Relación entre las estrategias y ejemplos (KMT, estrategias) y su relación con el conocimiento de las propiedades y sus fundamentos, pues se pudo observar que la claridad con la que cuenta la profesora con respecto a la definición y las propiedades del concepto de razón y proporción desde una perspectiva geométrica facilitó, por ejemplo, el uso de diferentes tipos de representaciones como la verbal, gráfica y algebraica (KoT, registros de representación)
20	Relación entre la claridad del conocimiento de las propiedades y sus fundamentos (KoT), y el cambio en los tipos de ejemplos de razón y proporcionalidad que se presentaron a los estudiantes (KMT, ejemplos)
21	Relación entre la elaboración de mapas y puzles (KMT, recursos), los cuales están asociados con la proporcionalidad desde una perspectiva geométrica, recursos que están directamente relacionados con el conocimiento de las propiedades y fundamentos asociados a la proporcionalidad (KoT, fundamentos y propiedades)
22	Relación entre el uso de mapas y puzles (KMT, recursos) y las teorías de enseñanza (KMT, teorías de enseñanza), pues cuando la profesora usa materiales como mapas y puzles para trabajar la proporcionalidad geométrica y aritmética, está haciendo uso de los planteamientos propuestas de enseñanza.

23	Relación del conocimiento de diferentes teorías de enseñanza (KMT, teorías de enseñanza) de la proporcionalidad está relacionada con aspectos como el uso de determinados ejemplos que clarifican definiciones o propiedades (KMT, ejemplos)
24	Relación entre las teorías de aprendizaje (KFLM) y el conocimiento de diferentes procedimientos relacionados con proporcionalidad (KoT, procedimientos), como un punto de partida para explorar diferentes procedimientos aritméticos y geométricos y las relaciones entre estos
25	Relación entre las teorías de aprendizaje (niveles de pensamiento proporcional) (KFLM) y el uso de diferentes registros de representación (KoT, registro de representación)
26	Relación entre el conocimiento de las teorías de aprendizaje sobre proporcionalidad (KFLM) y el conocimiento de las fortalezas y dificultades (KFLM), pues se considera que al comprender las propuestas de aprendizaje se pueden prever algunas dificultades que pueden tener los estudiantes en el aprendizaje de conceptos como razón y proporción.
27	Relación entre las dificultades de aprendizaje de la proporcionalidad (KFLM) y los ejemplos (KMT, ejemplos) y los registros de representación (KoT, registros de representación), pues de acuerdo con el conocimiento que el profesor tenga sobre las dificultades que puede tener el estudiante para comprender los conceptos de razón y proporcionalidad, podrá presentar registros de representación y ejemplos específicos que aporten a la superación de estas dificultades.
28	Relación entre desarrollo cognitivo esperado relacionado con la clasificación de triángulos, tratamiento algebraico de situaciones lineales, uso de instrumentos como la escuadra, estimación de segmentos y simplificación de fracciones (KMLS) y los registros de representación los procedimientos (KoT, registros de representación)
29	Relación entre el conocimiento de la secuenciación de los temas anteriores y posteriores (KMLS), y las conexiones de complejización (KSM).
30	Relación entre el conocimiento de la secuenciación de los temas anteriores y posteriores (KMLS) y el conocimiento de registros de presentación, procedimientos y propiedades (KoT) asociados a los conceptos de razón y proporcionalidad.

10.3 Relaciones identificadas en la profesora entre subdominios del MTSK



10.4 Relaciones evocadas entre subdominios del MTSK

