CONHECIMENTO MATEMÁTICO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR: DISCUTINDO UM CASO NA FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE DIVISÃO

C. Miguel Ribeiro. Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações, Universidade do Algarve, Portugal e UNESP, Rio Claro; Rúbia Amaral. UNESP, Rio Claro; Hélia Pinto. Escola Superior de Educação e Ciências Sociais de Leiria, Portugal; Eric Flores. Universidade de Huelva, Espanha.

Introdução

Os estudos internacionais (como PISA e TIMMS) consideram como uma das bases sustentadoras de uma literacia matemática a capacidade de resolver problemas, capacidade essa que não se traduz numa mera aplicação direta de um determinado procedimento ou técnica (MULLIS et al., 2012). Para além dessa capacidade de resolver problemas os alunos devem ter um conhecimento que lhe permita, também, formular problemas. Este objetivo geral deverá ser encarado como transversal a todas as etapas educativas (desde a educação infantil), de modo a que seja possível ir criando, desde cedo, um conhecimento matemático sólido/fundamentado, englobando necessariamente, para além dos conteúdos, uma ampla capacidade de raciocínio e argumentação.

De modo a contribuir para melhorar a aprendizagem dos alunos, ultrapassando as suas maiores dificuldades, e sendo o professor e o seu conhecimento considerados o fator crucial nessa aprendizagem dos alunos (GROSSMAN, 2010), é essencial que a formação de professores se foque no que é, efetivamente, necessário (RIBEIRO; CARRILLO, 2011). Nesse sentido, a identificação e discussão de situações matematicamente críticas, com uma abordagem a partir de situações da prática (*practice-based approach*), com foco no conhecimento do professor associado às especificidades da atuação docente, configura-se como um aspeto essencial no desenvolvimento desse conhecimento do professor (e.g., CHARALAMBOUS; JAKOBSEN; RIBEIRO, 2013; PINTO; RIBEIRO, 2013). Dentre a multiplicidade de formas possíveis de encarar o conhecimento do professor, este é entendido, aqui, no sentido do *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* – MTSK (CARRILLO et al., 2013), e acreditamos que identificar e desenvolver esse conhecimento permitirá que os professores (atuais ou futuros) não ensinem como foram ensinados (COONEY, 1994; MELLADO; RUIZ; BLANCO, 1997), ou como consideram que o foram[1].

Considerando as dificuldades dos alunos, e a relação destas com o conhecimento do professor, um dos temas críticos está associado às operações. Porém, apesar das várias evidências das dificuldades dos alunos, as investigações neste âmbito têm tido um foco essencialmente nos alunos e nas suas formas de raciocínio ou processos de resolução de problemas (PINTO, 2011; AZEVEDO, 1998) encarando-os simultaneamente como origem e produto da problemática. São, ainda, raras as pesquisas que têm como ponto de partida identificar aspetos problemáticos no conhecimento matemático que é associado, especificamente, àquele necessário à atuação docente, e ponto de chegada nas perspetivas sobre formas de contribuir para uma melhoria dessa formação, de modo a suprir as possíveis falhas (MARTINS; RIBEIRO, 2013).

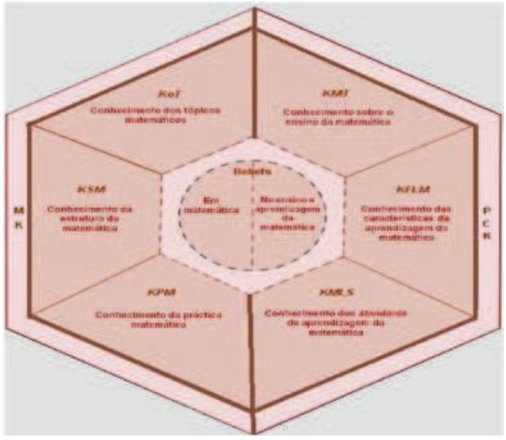
Tendo por base estas problemáticas, estamos desenvolvendo uma pesquisa que tem como um dos seus objetivos identificar e desenvolver o conhecimento matemático especializado do professor das séries iniciais no âmbito do sentido de número e das operações. Com essa motivação, aqui iremos debruçar-nos sobre a seguinte questão:

> *Que conhecimento matemático especializado revelam futuros professores das séries iniciais ao resolverem expressões de divisão, e formularem problemas para essas expressões, e como podemos caracterizar esse conhecimento de modo a identificar aspetos relevantes a explorar na formação?*

Conhecimento matemático especializado do professor sobre divisão

As dificuldades dos alunos na compreensão dos vários conceitos envolvendo os algoritmos sustentam-se, segundo Huinker (2002) e Sharp, Garofalo e Adams (2002), essencialmente, no fato de as suas explorações passarem pela memorização e pela prática rotineira de exercícios. De modo a promover uma conexão entre conceitos e procedimentos e entre números racionais e a realidade dos alunos, permitindo que estes atribuam sentido ao que fazem e porque o fazem, é essencial uma prévia compreensão conceitual que permita relacionar o sentido de número com o algoritmo. Esta conexão encontrar-se-á, também, na base de uma profunda compreensão associada à resolução de problemas e, por consequência, à formulação de problemas por parte dos alunos, encarando esta última também como um dos processos/formas de incrementar a sua compreensão sobre os tópicos em questão.

Nesse sentido é essencial promover o desenvolvimento do sentido de número racional, sendo que, segundo Pinto (2011), uma das cinco componentes se refere à utilização de símbolos e linguagem matemática formal com significado, incluindo-se aqui, desenvolvimento nos alunos de um conhecimento integrado sobre números e operações apenas será possível/exequível se os professores possuírem, eles próprios, por um lado, sentido de número racional (considerando todas as suas dimensões, tal como referido, por exemplo, em Ponte e Serrazina (2004)), bem como, por outro, um conhecimento que lhes permita entender, efetivamente, o sentido de número racional e das operações que os envolvem – em todas as suas componentes, e também um conjunto diversificado de formas possíveis de as relacionar e representar de modo matematicamente adequado.



Este foco no conhecimento do professor sustenta-se, ainda, pelo fato de o seu conhecimento ser considerado um fator crucial na aprendizagem dos alunos (NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004). Este conhecimento do professor pode ser considerado sob distintas perspetivas, sendo que a maioria destas encontra a sua gênese nos trabalhos de Shulman (1986). Aqui consideramos o conhecimento do professor na perspetiva do MTSK (CARRILLO et al., 2013). Esta concetualização considera os domínios do conhecimento do conteúdo e didático do conteúdo subdivididos, cada um deles, em três subdomínios[2].

No subdomínio denominado *Knowledge of Topics* (KoT), incluem-se aspetos do conhecimento do professor associado, entre outros, à fenomenologia, significados, definições, exemplos, dimensões que caracterizam aspetos do conteúdo matemático concreto, para além de se referir ao conhecimento do conteúdo disciplinar da Matemática. Assim, no contexto da divisão, e formulação de problemas, ao professor cumpre, entre outros, um conhecimento que lhe permita efetuar corretamente a operação, aplicando ou não um determinado algoritmo; reconhecer respostas incorretas; utilizar notações matemáticas corretamente ou resolver corretamente um determinado problema (conhecimento matemático na ótica do utilizador). Corresponde a, por exemplo, reconhecer 44,7 como resposta incorreta da divisão de 536 por 12 quando aplicamos um algoritmo. Para além deste saber fazer (associado também, frequentemente, ao conhecimento de um indivíduo qualquer com formação matemática), ao professor que pretende possibilitar que os seus alunos entendam, a cada momento, o que fazem e porque o fazem cumprirá, também, um conhecimento matemático associado à variabilidade e (im)possibilidade de um conjunto de exemplos para abordar a divisão inteira ou não inteira com sentido e significado que lhe permita, entre outros, compreender respostas alternativas dos seus alunos, a partir dos fundamentos matemáticos que as sustentam.

Relativamente ao *Knowledge of the Mathematical Structure* (KSM), que se refere ao conhecimento do professor associado à existência de um sistema integrado de conexões que lhe permitam compreender e desenvolver conceitos avançados, a partir de uma perspetiva elementar, e conceitos elementares a partir de uma abordagem do ponto de vista da matemática avançada. Assim, no caso concreto da divisão e da formulação de problemas relaciona-se, entre outros, com o sentido de número e operação (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; SLAVIT, 1999) os motivos matemáticos que permitem encarar a divisão como medida, partilha, adição, subtração ou multiplicação, mas também as suas relações com as frações ou as relações com a existência de quantidades do tipo dízimas infinitas periódicas ou não periódicas, ou ainda a determinação de comprimentos, áreas ou volumes de figuras fractais.

No *Knowledge of Mathematics Practice* (KMP) inclui-se o conhecimento das formas de conhecer, criar ou produzir matemática (também denominado conhecimento sintático por Schwab (1978)), bem como conhecimento de aspetos associados à comunicação.

Apesar de a formulação de problemas se configurar como uma das formas de o professor identificar a compreensão conceitual dos seus alunos (SILVER; CAI, 1996), podendo toma-lo como contexto para o seu desenvolvimento, para que isso se torne realidade é essencial que o professor detenha um conhecimento do conteúdo (KoT, KSM e KMP) associado ao conteúdo abordado, em particular, à formulação de problemas – no âmbito desse conteúdo e que lhe permita efetuar conexões tanto dentro do mesmo tópico como com outros tópicos, recorrendo também a uma linguagem matematicamente adequada. Isso possibilitará que os alunos possam, eles mesmos, formular problemas e sintam-se preparados para discutirem a razoabilidade dessas formulações bem como possíveis implicações.

Contexto e método

Este texto é parte integrante de um projeto mais amplo que tem como objetivo elaborar atividades para a formação de professores que contribuam, de modo efetivo, para a melhoria da formação e, por conseguinte, do seu conhecimento matemático especializado. Para tanto, a fase inicial, em que nos encontramos, requer a identificação e discussão de situações matematicamente críticas reveladas por professores e futuros professores de modo que seja possível, posteriormente, desenvolver esse conhecimento. Este projeto foi iniciado em Portugal, envolvendo várias instituições de formação de professores das séries iniciais, tendo sido expandido recentemente também a instituições brasileiras.

Aqui focamo-nos numa das partes desse estudo mais amplo, que combina uma análise descritiva com um estudo de caso instrumental (STAKE, 2005), tendo os dados sido coletados por meio de um conjunto de atividades realizadas por futuros professores do

Ensino Fundamental. Estas atividades envolvem um conhecimento que qualquer aluno do 5°. ano deveria dominar e relacionam-se com a determinação do resultado de um conjunto de divisões e a formulação de problemas envolvendo essas expressões. Aqui iremos referir-nos apenas às respostas relativamente a uma das cinco expressões fornecidas (536:12), bem como aos problemas formulados para essa expressão. A escolha das atividades se baseia também no fato de pretendermos discutir, posteriormente, com os estudantes, o conhecimento matemático especializado em sua compreensão plena, possibilitando que os futuros professores sejam confrontados com situações similares às que esperamos que venham vivenciar com seus alunos (na linha do que refere MAGIERA; VAN DEN KIEBOOM; MOYER, 2011).

As atividades foram realizadas individualmente e aqui focamo-nos nas respostas de um conjunto de 18 futuros estudantes que frequentavam o terceiro ano da Licenciatura em Educação Básica[3] numa das Instituições em Portugal. Estes estudantes apenas terão mais uma Unidade Curricular (UC) de Matemática, correspondendo a uma UC no âmbito da Organização e tratamento de dados.

A análise que apresentamos nesse texto centra-se na discussão das diferentes respostas fornecidas para a operação 536:12, e dos problemas formulados, com base em um conjunto de categorias prévias, presentes em Leung e Silver (1997) e que classifica os problemas segundo cinco tipos, a partir dos dados do enunciado e da possível resolução: (i) não problema, (ii) problema não matemático, (iii) impossível, (iv) insuficiente e (v) suficiente. Segundo essa classificação, um não problema corresponderá a uma frase solta ou uma descrição (o João tem 536 figuras e 12 balas); um problema não matemático contém uma questão mas que não se associa à Matemática (o João vai fazer uma viagem de São Paulo a Joinville, que tem 536 km de distância e fará isso em 12 horas. A qual o Estado que pertence Joinville?); num problema impossível nenhuma resposta pode ser encontrada, mesmo que seja fornecida informação complementar (a escola do João tem 536 alunos e ele quer dividi-los por 12 turmas. Quantos alunos ficam em cada turma?); um problema é insuficiente quando, ao ser fornecida informação complementar este passa a poder ser resolvido (o João tem 536 figurinhas para dividir por 12 amigos. Quantas figurinhas recebeu cada amigo? Sobra alguma figurinha?); um problema suficiente pode incluir no seu enunciado informação extra (o João foi a uma fábrica de sucos que tem 12 funcionários que produzem, por hora, 536 litros de suco. Se essa produção for distribuída por 12 recipientes para ser enviado para revenda, qual a capacidade mínima de cada recipiente?).

Alguns Resultados e discussão

Como dissemos, uma das propostas da atividade foi que os estudantes fizessem a operação 536:12 (sem o recurso à calculadora) e formulassem um problema que para ser resolvido fosse necessário utilizá-la. Dentre as operações apareceram quatro tipos de solução: 44 (7 estudantes); $44,\overline{6}$; 44,(6) ou 44,6... (6 estudantes); 44,66 (3 estudantes) e 44,7 (2 estudantes). Consideramos do mesmo grupo os alunos que apresentaram 44,(6); 44,6... ou $44,\overline{6}$ por entendermos que esses estavam representando de forma diferente a mesma quantidade (e apontaram que a resposta é uma dízima periódica). A existência destes quatro tipos de solução indicam, em primeira análise, diferentes aspetos do conhecimento matemático destes futuros professores que se relacionam, por um lado, com o sentido de número e de operação (e.g., MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; SLAVIT, 1999) e, por outro, com as representações que utilizam para uma determinada quantidade e o fato de considerarem, inclusive, o número 44,7 como uma resposta possível para a divisão solicitada.

Já no que tange à segunda parte da atividade, podemos referir, em primeiro lugar, que todos os estudantes tentaram formular problemas que consideravam associados à operação fornecida. No entanto, os tipos de problemas formulados revelam alguns aspetos do conhecimento destes futuros professores relativos: ao sentido de número e operação (mas nem todos de forma consistente em relação à resolução que forneceram à primeira questão); à importância das variáveis selecionadas; à necessidade, ou não, de poderem considerar a divisão inteira; e à incapacidade de relacionar a operação efetuada anteriormente com o problema formulado – encarando-as como duas coisas distintas.

Considerando a categorização de Leung e Silver (1997), podemos referir que 13 estudantes formularam problemas *impossíveis*, ou seja, que não poderiam ser resolvidos tendo em consideração, conjuntamente, as quantidades e o contexto em que são formulados. Por exemplo, "*O Pedro comprou 536 camisolas*[4] *para usar durante os 12 meses do ano. Quantas usa ele por mês*?". O contexto deste tipo de problema demandaria valores que se obtivesse como resultado um número inteiro, ou alguma questão relativa ao "resto", neste caso as 8 camisolas que sobrariam na divisão. Vale ressaltar que problemas dessa natureza foram identificados em todos os tipos de respostas ao algorítmo. Dessa maneira, há alunos que mesmo encontrando um valor decimal (seja ele 44,7, ou 44,66, ou ainda 44,6...), formularam um problema que não pode ter como resposta o número obtido na operação, uma vez que não há "décimos de camisetas", no caso do exemplo mencionado, denotando não estar aptos a navegar entre diferentes representações (RIBEIRO, 2011), aqui, em particular, formas de representar números e quantidades expresso pela incapacidade em perceber a relação entre o algorítmo realizado e o problema formulado. Provavelmente foi assumido que essas eram duas atividades distintas que tinham que fazer, revelando desconhecerem que uma operação cujo resultado se expressa em termos de uma dízima infinita não pode nascer de um problema que trata de variável discreta. Este desconhecimento poderá ser considerado relacionado também às conexões que efetuam (KFLM) e com o conhecimento (dos futuros professores) com relação aos diferentes tipos de variáveis no contexto da Estatística (e.g., MARTINS; PIRES; BARROS, 2009; RIBEIRO; MARTINS, 2011).

Houve ainda um dos estudantes que elaborou um problema do tipo *insuficiente*: "*A mãe de Tiago tem doze filhos, incluindo o Tiago. Ela recebeu um bônus no trabalho e quer dividir o dinheiro,* 536€*, pelos seus doze filhos. Com quantos euros fica cada um? E quantos euros sobram para a mãe comprar uma camisola para ela*?". Diferente dos anteriores, este problema faz menção ao resto, quando pergunta "*quantos euros sobram?*". Esse aluno apresentou como resposta ao algorítimo o número 44. Assim, com base em sua divisão, supõe-se que a resposta esperada é 44€ para cada filho e 8€ para a mãe. Porém, tal como está enunciado, o problema tem mais de uma solução, que se encontram associadas a diferentes tipos de conexões (KSM). Essa multiplicidade de soluções advém do fato de o contexto do problema envolver a moeda monetária (€) que tem uma base centesimal. Assim, a suposta resposta de 44€ corresponde apenas a uma das possíveis soluções, pois podemos considerar também, por exemplo, 44,60€ ou 44,66 €. Essas conexões associam-se, assim, por exemplo, a uma busca do valor mínimo ou máximo que cada um dos filhos, e consequentemente a mãe, receberá – estudo de funções e sua optimização.

Os problemas formulados pelos demais quatro estudantes estão na categoria *suficiente*, sendo que em 3 deles é perguntado explicitamente qual o resto. Por exemplo: "*O pai do João tem 536 porcos e que dividi-los por 12 currais. Quantos porcos terão que estar num curral? Quantos sobram?*". Vale ressaltar que todos esses alunos encontraram em seu algorítmo (na primeira questão) um número decimal, e o que apontamos para reflexão nesse texto é o fato de formularem propostas de problemas que, na sua resolução, necessitam de inteiros como solução. Nesse sentido, ampliamos aqui a contribuição de Leung e Silver (1997), ao questionar sua classe de problemas que denomina de *suficiente*. Do ponto de vista do problema (encarado de forma isolada) constatamos que as informações são suficientes para serem representadas pela operação 536:12 e desenvolvida considerando a existência do resto. Mas, conjugando as duas questões (e a resolução do estudante à primeira, envolvendo uma quantidade não inteira), emerge a necessidade de criar uma sub categoria associada à correspondência entre a operação solicitada e a sua resolução e o problema proposto, sub categoria essa que denominamos de ausência de correspondência.

Um único estudante, o último dos 4 *suficientes*, elaborou uma situação considerada *suficiente* com correspondência: "*Existem 536 litros de água para 12 hortas. Quantos litros leva cada horta?*". Forneceu como resposta à operação uma dízima infinita periódica e formulou um problema associado a uma variável contínua.

Considerações finais

As dificuldades reveladas por estes estudantes no cálculo da conta e da formulação de problemas de modo isolado e, por conseguinte na conjunção dos dois aspetos, evidenciam sérias carências tanto ao nível do conhecimento relativo à divisão (algoritmo e sentidos) e ao sentido de número (SLAVIT, 1999), mas também relativamente ao papel e importância dos tipos de variáveis (e contextos) que se consideram e suas implicações. Estas dificuldades na divisão sustentam-se, essencialmente, em aspetos contidos no KoT e que influenciam, assim, os demais subdomínios do conhecimento especializado do professor, o que se configura como preocupante e, também, por outro lado, por ser a (resolução e) formulação de problemas um dos aspetos que deveria ser central numa aula de Matemática (SINGER; ELLERTON; CAI; SILVER, 2009) correspondendo a uma importante parte do trabalho do professor (OLSON; KNOTT, 2013) – para que os alunos possam desenvolver a sua capacidade de resolver problemas, bons problemas têm de ser enunciados.

Os resultados revelam que os estudantes não desenvolveram um conhecimento matemático durante sua vivência escolar sobre os dois aspetos aqui centrais (divisão e formulação de problemas), e que estes não foram também foco de atenção na formação de professores. Essa falta de atenção na formação não lhes permite estabelecer conexões entre diferentes atividades que lhe são propostas, como esta que solicitava entrelaçamento entre a resposta e o problema (tanto ao nível do KoT como de KSM), correspondendo-se, a situações matematicamente críticas que urge colmatar e em que a formação se deverá centrar de modo a possibilitar o desenvolvimento do MTSK do professor.

Outro aspeto que destacamos como resultado, mas que por falta de espaço não vamos aprofundar, é uma questão já abordada na literatura e que se confirma nesse estudo, que é o fato de que a operação de divisão muitas vezes é tratada apenas como partilha, e muito pouco com o conceito de medida. Nessa atividade, por exemplo, dos 18 alunos apenas um deles criou um problema que fosse de medida e que ainda assim se enquadra nos problemas impossíveis. Identificar esse tipo de tratamento dos conceitos matemáticos é também essencial para que se possa mudar a formação dos professores, sendo que consideramos como uma das formas de o fazer o fato de confrontarmos os professores (atuais ou futuros) com situações envolvendo a formulação de problemas e, posteriormente, a discussão da sua possibilidade, ou não, associadas às expressões fornecidas.

Apesar de nos referirmos aqui a problemas numéricos, o mesmo tipo de abordagem pode ser efetuado fora do âmbito dos números e operações (algo sobre o qual nos debruçaremos numa próxima etapa). Complementarmente também o confronto e discussão com os professores de respostas, abordagens e comentários "pouco comuns" a determinados problemas se configuram como uma das formas de desenvolver o seu conhecimento especializado e, em particular, um conhecimento que consideramos essencial na tarefa de ensinar e que se associa ao atribuir sentido às respostas de outros (RIBEIRO; MELLONE; JAKOBSEN, 2013). Nesse sentido será essencial identificar e discutir, com os professores (atuais ou futuros) questões como a que apresentamos anteriormente e que se configuram como situações matematicamente cíticas (que, na prática, se poderão encontrar associadas a improvisações de conteúdo (RIBEIRO; MONTEIRO; CARRILLO, 2009)), tornando assim possível uma mudança conceitual (e.g., VOSNIADOU, 2007) promovendo um incremento do seu MTSK.

Agradecimentos

Este artigo foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia e faz parte do projeto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), financiado pelo Ministerio de Ciencia e Innovación (Espanha). Ademais, contou também com o apoio financeiro da Pró-Reitoria de Pós-Graduação da UNESP-Universidade Estadual Paulista (Brasil) e da FAPESP - Auxílio à Pesquisa – Regular, de Processo N. 2013/22975-3 (Brasil).

Referências

AZEVEDO, L.L. *Uma proposta de mudança, na Licenciatura em Matemática do ICLMA, apoiada na metodologia de "ensino de Matemática via resolução de Problema"*. 1998. 220f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de São Paulo / UNESP, Rio Claro, 1998.

BARNETT-CLARKE, C. et al. *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. NY: NCTM. 2010.

CARRILLO, J. et al. Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In: (Ed.). *Proceedings of the 8th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME8).* Antalya: ERME, 2013.

CHARALAMBOUS, C. et al. *Using a Practice-Based Approach to understand Horizon Content Knowledge*. European Association for Research on Learning and Instruction, 15th Biennial conference - Responsible teaching and sustainable learning Munique: EARLI, 2013.

COONEY, T.J. Research on teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.25, p.608-636. 1994.

GROSSMAN, P.L. Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation. *Nea policy brief*, May. 2010.

HUINKER, D. Examining dimensions of fractions operation sense. In: LITWILLER, B.; Bright, G. (Ed.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions*: 2002 Yearbook. Reston: NCTM, 2002, p.72-78.

LEUNG, S.K.S.; SILVER, E.A. The role os task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. Mathematics Education Research Journal. v. 9(1), p.5-24.

LORTIE, D.C. *Schoolteacher: a sociological study*. Chicago: The University of Chicago Press. 1975. 284 p.

MAGIERA, M. et al. Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. In: Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35thIGPME Conference.* Ankara, Turkey: PME, v.3, 2011. p.169-176.

MARTINS, C. et al. Conhecimento estatístico: Um estudo com futuros professores. *XIX EIEM - Números e estatística: Reflectindo no presente, perspectivando o futuro*. Vila Real: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2009.

MARTINS, F.; RIBEIRO, C.M. Atribuir sentido aos raciocínios associados às resoluções de alunos no caso da subtração: discutindo o conhecimento de futuros professores. In: CADIMA, R. et al. (Ed.). *Atas da Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação*. Leiria: ESECS, 2013. Atribuir sentido aos raciocínios associados às resoluções de alunos no caso da subtração: discutindo o conhecimento de futuros professores, p.192-200.

MCINTOSH, A. et al. A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, v.12, n.3, p.2-8, 44. 1992.

MELLADO, V.J. *et al.* Aprender a enseñar Ciencias Experimentales en la formación inicial de maestros. *Bórdon*, v.49, n.3, p.275-288. 1997.

NCTM. Principles and standards for school mathematics. In: RESTON, V.A. (Ed.). *National Council of Teacher of Mathematics*, 2000.

NYE, B. et al. How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, v.26, n.3, p.237-257. 2004.

OLSON, J.C.; KNOTT, L. When a problem is more than a teacher question. *Educational Studies in Mathematics*, v.83, p.27-36. 2013.

PINTO, H. *O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais*. Tese (doutorado em Educação). Universidade de Lisboa. Lisboa: Instituto de Educação, 2011.

PINTO, H.; RIBEIRO, C.M. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas*, v.3, n.1, p.85-105. 2013.

PONTE, J.P. et al. *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC. 2007.

PONTE, J.P.; Serrazina, M.D.L. *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta. 2004.

RIBEIRO, C.M. Uma abordagem aos números decimais e suas operações no primeiro ciclo. A importância de uma "eficaz navegação" entre representações. *Educação e Pesquisa*, v.37, n.2, p.407-422. 2011.

RIBEIRO, C.M.; CARRILLO, J. Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In: Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35thIGPME Conference*. Ankara, Turkey: PME, v.4, 2011. p.41-48

RIBEIRO, C.M.; MARTINS, F. *Conhecimento Matemático para o Ensino de futuros professores dos primeiros anos*: os pictogramas. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife: UFPE 2011.

RIBEIRO, C.M. et al. Professional knowledge in an improvisation episode: the importance of a cognitive model. In: GUERRIER, V.D. et al. (Ed.). *Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6).* Lyon, France: ERME, 2009, p.2030-2039.

RIBEIRO, C.M. et al. Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions. In: LINDMEIER, A.M.; Heinze, A. (Ed.). *Proceedings of the 37thIGPME Conference*. Kiel, Germany: PME, v.4, 2013, p.89-96.

ROWLAND, T. et al. Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v.8, p.255-281. 2005.

SCHWAB, J.J. Education and the structure of the disciplines. In Westbury, I.; WILKOF, N.J. (Eds). *Science, curriculum and liberal education*, University of Chicago Press: Chicago. 1978, 229-272.

SHARP, J. et al. Children'n development of meaningful fraction algorithms: a kid's cookies and a puppy's pills. In: LITWILLER, B.; BRIGHT, G. (Ed.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions*: 2002 Yearbook. Reston: NCTM, 2002, p.18-28.

SHULMAN, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v.15 (2), p.4-14. 1986.

SILVER, E.; CAI, J. An analysis of arithmetic problem posing by middle school students *Journal for Resarch in Mathematics Education*, v.27, p.521-539. 1996.

SINGER, F.M. et al. Problem posing in mathematics learning: Establishing a theoretical base for research. In: TZEKAKI, M. et al. (Ed.). *Proceedings of the 33thIGPME Conference*. Thessaloniki: PME, v.1, 2009, p.299.

SLAVIT, D. The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics*, v.37, n.3, p.251-274. 1999.

STAKE, R.E. Qualitative Case Studies. In: DENZIN, N.K.; LINCOLN, Y.S. (Ed.). *The Sage handbook of qualitative research*. Thousand Oaks: Sage Publications, 2005. Qualitative Case Studies, p.443-466.

VOSNIADOU, S. The Cognitive-Situative Divide and the Problem of Conceptual Change. *Educational Psychologist*, v.42, n.1, p.55-66. 2007.

[1] Nos detemos sempre a apenas uma visão parcial do processo de ensino (LORTIE, 1975).
[2] Pelo contexto específico do trabalho que temos vindo a desenvolver aqui, abordamos apenas o domínio do conhecimento do conteúdo com os subdomínios *Knowledge of Topics, Knowledge of the Structure of Mathematics and Knowledge of the Practice in Mathematics.* Optamos por utilizar a nomenclatura em inglês por ser a forma que nos permite garantir minimizar desvios e concretizar o que dizemos de forma mais explícita.
[3] Curso para formação de professores de Educação Infantil e Ensino Fundamental I.
[4] Os estudantes referidos são de Portugal dai o uso da palavra “camisolas” correspondendo às “camisetas” e da utilização da moeda europeia: o euro.