

Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía



La construcción del concepto de área a través de la resolución de problemas : las interacciones y el análisis cognitivo

**Memoria para optar al grado de doctora
presentada por:**

Graciela Beatriz García Amadeo

Fecha de lectura: 14 de noviembre de 2013

Bajo la dirección de los doctores:

**José Carrillo Yáñez
María de la Cinta Muñoz Catalán**

Huelva, 2013





Universidad
de Huelva

Depto. Didáctica de las Ciencias y Filosofía

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

LAS INTERACCIONES Y EL ANÁLISIS COGNITIVO

TESIS DOCTORAL

Graciela Beatriz García Amadeo

HUELVA, 2013



**Universidad
de Huelva**

Dpto. Didáctica de las Ciencias y Filosofía

**LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA
A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:
LAS INTERACCIONES Y EL ANÁLISIS COGNITIVO**

Tesis doctoral

Graciela Beatriz García Amadeo

Dirigido por los doctores:

José Carrillo Yáñez y María de la Cinta Muñoz Catalán

Huelva, 2013

A la memoria de mis padres
Graziella Amadeo y Osvaldo Adolfo García

Agradecimientos

Este trabajo evidencia mi trayectoria de aprendizaje. En este proceso, me he sentido acompañada por personas que, de distinta forma, me han allanado el camino para lograrlo.

Mi profundo agradecimiento a mis directores, Dr. José Carrillo Yáñez y Dra. María de la Cinta Muñoz Catalán. Por enseñarme a descubrir el mundo de la investigación y brindarme la oportunidad de comenzar a incursionar su camino. También por el tiempo, la paciencia y dedicación que me han dispensado todos estos años. Por animarme, por alentarme a proseguir, por la predisposición permanente e incondicional en aclarar mis dudas y por sus substanciales sugerencias durante la redacción de este trabajo. Les estoy profundamente agradecida por la amistad que me han brindado.

Al grupo DESYM y al Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de la Universidad de Huelva, por el afecto que he recibido de sus integrantes en las distintas oportunidades de estancia en la universidad y la ayuda económica proporcionada para llevar adelante las mismas.

Mi profundo reconocimiento a mi ahijada, Lara, por la valiosa y desinteresada ayuda en las traducciones realizadas.

Al Dr. Ángel Gutiérrez, por las orientaciones recibidas respecto al modelo de Van Hiele.

Al personal directivo de la escuela N° 2 de Carmen de Patagones por abrirme las puertas de la institución, y muy especialmente a Susana Gentili por

involucrarse en todos mis proyectos, por permitirme compartir sus clases y aceptar las sugerencias que permitieron consumir este trabajo.

Al personal directivo y docente de la Escuela “La Divina Providencia” de Stroeder, por permitirme mejorar los instrumentos.

A mis tías, Hebe y Anita, por allanarme el camino con mis compromisos familiares y administrativos, al momento de emprender este proyecto.

A mis amigas, Nora Blok y Mirta Rodríguez, por la lectura atenta de algunos de los originales. A Susy Biondi por el diseño de las tapas y la paciencia manifiesta en el armado y compaginación del trabajo.

Muy especialmente a Emy, por su acogida, su generosidad para compartir sus amigas, las cuales, con su hospitalidad y cariño, me facilitaron las jornadas trascurridas en Huelva. Mi reconocimiento también, pues tanto ella como Diana me alentaron permanentemente a finalizar este trabajo.

Durante estos años conté con personas que me brindaron su amistad, su apoyo y me impulsaron a seguir adelante con este proyecto que muchas veces sentía inalcanzable. Algunas, como las que he referido, están conmigo y otras, en mis recuerdos y en mi corazón; no obstante, quiero manifestarles mi agradecimiento por lo que me han brindado.

Deseo manifestar mi gratitud y cariño a los niños y niñas del curso, pues sin ellos este trabajo no hubiera sido posible.

Por último, pero no menos importante, a Eduardo, por su acompañamiento y su comprensión ante mis ausencias, durante todo el tiempo que dediqué a este trabajo de Tesis.

A todos, muchísimas gracias.

INDICE GENERAL

	Nº de página
Agradecimientos.....	i
Índice de la tesis.....	iii

CAPITULO 1: INTRODUCCIÓN

<i>-Índice del capítulo.....</i>	1
1.1.-Motivación.....	3
1.2.-Objeto de estudio y contextualización.....	5
1.3.-Estructura del trabajo.....	7

CAPITULO 2: MARCO TEÓRICO

<i>-Índice del capítulo.....</i>	11
2.1.-La acción de aprender: Un abordaje desde el constructivismo social.....	13
2.2.-El conocimiento escolar.....	21
2.3.-La construcción de conceptos.....	25
2.3.1.-Caracterización y representación para Indicar los avances cognitivos alrededor de un concepto: El modelo de Pirie y Kieren.....	30
2.3.2.-Caracterización del Folding Back.....	38
2.4.- El concepto de área.....	41

	Nº de página
2.4.1.-El conocimiento matemático.....	41
2.4.2.-La comprensión del desarrollo del concepto en el niño Desde las investigaciones.....	45
2.4.3.-El conocimiento escolar pretendido en el Currículo.....	54
2.4.4.-El conocimiento escolar deseable en este Trabajo.....	58
2.4.4.1.-Categorización del concepto.....	59
2.7.4.2.-Fundamentación de la unidad de aprendizaje.....	61
2.5.- La resolución de problemas.....	72
2.5.1.-Caracterización de la resolución de problemas.....	78
2.5.2.-La resolución de problemas en los documentos y diseños curriculares en Argentina.....	82
2.5.3.-La resolución de problemas como estrategia metodológica.....	85
Síntesis del capítulo.....	90
 CAPITULO 3: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN	
-Índice del capítulo.....	93
3.1.- Explicitación del problema – preguntas y objetivos.....	97
3.2.- Caracterización de la investigación.....	101
3.3.- Perspectivas metodológicas: Fundamentos y decisiones.....	102
3.3.1.- Coherencia de nuestra perspectiva con el interaccionismo simbólico	103
3.3.2.- Enfoque dialógico para el análisis de las Interacciones.....	107
3.4.- Diseño de la investigación: El estudio de caso.....	111
3.4.1.-Caracterización de los casos y el contexto.....	112
3.4.2.-Fases de la investigación.....	115
3.5.- Instrumentos y técnicas de obtención de información.....	119
3.5.1.-Cuestionarios para identificar la comprensión inicial en relación al concepto de área	121
3.5.1.1.-Cuestionario de conocimientos matemáticos pri- mitivos.....	124
3.5.1.2.- Cuestionario de ideas previas acerca del concepto de área.....	131
3.5.2.- La unidad de aprendizaje.....	139
3.5.2.1.-Como instrumento de enseñanza.....	139
3.5.2.1.1- Planificación.....	140
3.5.2.1.1.1- Concreción de objetivos.....	141
3.5.2.1.1.2- Concreción de Contenidos..	142

	Nº de página
3.5.2.1.1.3-La secuencia de Aprendizaje: Características.....	145
3.5.2.1.1.4-A medir superficies.....	151
3.5.2.1.1.5-Al cerrar el desarrollo de la secuencia.....	167
3.5.2.2.-Unidad de aprendizaje como instrumento de Investigación.....	168
3.5.2.2.1-La observación no participante y notas de campo.....	169
3.5.2.2.2- Registro de la secuencia de Aprendizaje.	170
3.5.2.2.3- La producción escrita de los alumnos	172
3.5.3.-Cuestionarios Finales.....	172
3.5.3.1.-Cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje	173
3.5.3.2.-Cuestionario a medio plazo.....	176
3.6.- Proceso e Instrumentos de análisis.....	179
3.6.1.-Categorías e indicadores de aprendizaje del concepto.....	186
3.6.2.-Las capas de comprensión y las categorías vinculadas al concepto de área.....	189
3.6.3.-Instrumento para vincular los problemas, las categorías y las capas de comprensión asociadas al concepto de área..	194
3.6.4.-Categorías referidas a las interacciones producidas durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje.....	233
3.6.5.-Instrumento para el análisis de las interacciones: “Tabla de diálogo”.....	235
3.6.5.1.-En busca de un instrumento adecuado.....	235
3.6.5.2.-Estructura y características del instrumento: “Tabla de diálogo”.....	237
3.6.5.2.1.-Unidad de significado	238
3.6.5.2.2.-Co-participantes de la interacción.....	239
3.6.5.2.3.-Contextos que dan sentido a cada contribución	240
3.6.5.2.4.- Idea unidad.....	247
3.6.5.3-Ejemplo de aplicación del instrumento a un intervalo del desarrollo de una actividad de la secuencia de aprendizaje.....	247
3.6.6.- Codificación Utilizada	249
3.6.7.-Tendencias de las categorías detectadas con relación a la construcción del concepto de área.....	251
3.6.8.- Proceso de análisis de la comprensión del concepto en cada actividad	253

	Nº de página
CAPITULO 4: LOS CASOS	261
4.1.-EL CASO DE PATRICIA	
<i>- Índice del apartado</i>	263
4.1.1.-Análisis de las actividades del cuestionario acerca de sus conocimientos matemáticos previos.....	265
4.1.2.-Análisis de las actividades del cuestionario sobre sus ideas previas acerca del concepto de área.....	278
<i>Actividad IAP1</i>	279
<i>Actividad IAP2</i>	281
<i>Actividad IAP3</i>	283
<i>Actividad IAP4</i>	285
<i>Actividad IAP5</i>	287
<i>Actividad IAP6</i>	287
<i>Actividad IAP7</i>	290
<i>Actividad IAP8</i>	291
4.1.2.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Patricia.....	293
4.1.3.-Análisis de las actividades resueltas en la secuencia de aprendizaje.....	296
<i>Actividad SP1</i>	297
<i>Actividad SP2</i>	299
<i>Actividad SP3</i>	306
<i>Actividad SP4</i>	317
<i>Actividad SP5</i>	322
<i>Actividad SP6</i>	322
<i>Actividad SP7</i>	338
<i>Actividad SP8</i>	339
<i>Actividad SP9</i>	365
<i>Actividad SP10</i>	371
<i>Actividad SP11</i>	379
<i>Actividad SP12</i>	386
<i>Actividad SP13</i>	396
4.1.3.1.- Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Patricia.....	401

N° de página

4.1.4.-Análisis de las actividades del cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje.....	409
<i>Actividad EP1</i>	409
<i>Actividad EP2</i>	409
<i>Actividad EP3</i>	412
<i>Actividad EP4</i>	415
<i>Actividad EP5</i>	417
4.1.4.1.-Relación entre los gráficos de comprensión Deseable y el de Patricia.....	419
4.1.5.-Análisis de las actividades del cuestionario a medio plazo	422
<i>Actividad MPP1</i>	422
<i>Actividad MPP2</i>	425
<i>Actividad MPP3</i>	427
<i>Actividad MPP4</i>	430
4.1.5.1.-Relación entre los gráficos de comprensión Deseable y el de Patricia.....	432
4.1.6 .-Tendencias de las categorías detectadas en relación con la construcción del concepto de área.....	435
4.1.7.-Análisis global del proceso de construcción del concepto de área en Patricia.....	442
4.1.7.1.-El crecimiento de comprensión de las categorías involucradas en el concepto.....	442
4.1.7.2.-El papel del folding back en el proceso de crecimiento de comprensión de Patricia.....	458
4.1.7.3.-El papel de las interacciones en el proceso de crecimiento de comprensión de Patricia.....	460
4.2.-EL CASO DE CECILIA	
- Índice del apartado	463
4.2.1.-Análisis de las actividades del cuestionario acerca de sus conocimientos matemáticos previos.....	465
4.2.2.-Análisis de las actividades del cuestionario sobre sus ideas previas acerca del concepto de área.....	476

	Nº de página
<i>Actividad IAC1</i>	478
<i>Actividad IAC2</i>	479
<i>Actividad IAC3</i>	481
<i>Actividad IAC4</i>	482
<i>Actividad IAC5</i>	484
<i>Actividad IAC6</i>	485
<i>Actividad IAC7</i>	485
<i>Actividad IAC8</i>	485
4.2.2.1.-Relación entre los gráficos de comprensión Deseable y el de Patricia.....	487
4.2.3.-Análisis de las actividades resueltas en la secuencia de aprendizaje.....	490
<i>Actividad SC1</i>	491
<i>Actividad SC2</i>	491
<i>Actividad SC3</i>	492
<i>Actividad SC4</i>	500
<i>Actividad SC5</i>	506
<i>Actividad SC6</i>	506
<i>Actividad SC7</i>	515
<i>Actividad SC8</i>	515
<i>Actividad SC9</i>	537
<i>Actividad SC10</i>	544
<i>Actividad SC11</i>	549
<i>Actividad SC12</i>	556
<i>Actividad SC13</i>	565
4.2.3.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Cecilia.....	565
4.2.4.-Análisis de las actividades del cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje.....	573
<i>Actividad EC1</i>	574
<i>Actividad EC2</i>	574
<i>Actividad EC3</i>	576
<i>Actividad EC4</i>	578
<i>Actividad EC5</i>	580
4.2.4.1.-Relación entre los gráficos de comprensión Deseable y el de Cecilia.....	582
4.2.5.-Análisis de las actividades del cuestionario a medio plazo.....	585

	Nº de página
<i>Actividad MPC1</i>	585
<i>Actividad MPC2</i>	588
<i>Actividad MPC3</i>	590
<i>Actividad MPC4</i>	592
4.2.5.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Cecilia.....	595
4.2.6 .-Tendencias de las categorías detectadas en relación con la construcción del concepto de área.....	598
4.2.7.-Análisis global del proceso de construcción del concepto de área en Cecilia.....	605
4.2.7.1.-El crecimiento de comprensión de las categorías involucradas en el concepto.....	606
4.2.7.2.-El papel del folding back en el proceso de crecimiento de comprensión de Cecilia.	624
4.2.7.3.-El papel de las interacciones en el proceso de crecimiento de comprensión de Cecilia.....	626
4.3.-EL CASO DE MIRTA	
- Índice del apartado	629
4.3.1.-Análisis de las actividades del cuestionario acerca de sus conocimientos matemáticos previos.....	631
4.3.2.-Análisis de las actividades del cuestionario sobre sus ideas previas acerca del concepto de área.....	641
<i>Actividad IAM1</i>	641
<i>Actividad IAM2</i>	643
<i>Actividad IAM3</i>	645
<i>Actividad IAM4</i>	647
<i>Actividad IAM5</i>	648
<i>Actividad IAM6</i>	648
<i>Actividad IAM7</i>	649
<i>Actividad IAM8</i>	651
4.3.2.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Mirta.....	651
4.3.3.-Análisis de las actividades resueltas en la secuencia de aprendizaje.....	654

Nº de página

<i>Actividad SM1</i>	655
<i>Actividad SM2</i>	657
<i>Actividad SM3</i>	662
<i>Actividad SM4</i>	668
<i>Actividad SM5</i>	668
<i>Actividad SM6</i>	669
<i>Actividad SM7</i>	675
<i>Actividad SM8</i>	675
<i>Actividad SM9</i>	694
<i>Actividad SM10</i>	701
<i>Actividad SM11</i>	707
<i>Actividad SM12</i>	714
<i>Actividad SM13</i>	721
4.3.3.1.- Relación entre los gráficos de comprensión Deseable y el de Mirta.....	723
4.3.4.-Análisis de las actividades del cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje.....	729
<i>Actividad EM1</i>	729
<i>Actividad EM2</i>	730
<i>Actividad EM3</i>	731
<i>Actividad EM4</i>	734
<i>Actividad EM5</i>	736
4.3.4.1.-Relación entre los gráficos de comprensión Deseable y el de Mirta.....	738
4.3.5.-Análisis de las actividades del cuestionario a medio plazo..	741
<i>Actividad MPM1</i>	742
<i>Actividad MPM2</i>	743
<i>Actividad MPM3</i>	745
<i>Actividad MPM4</i>	747
4.3.5.1.-Relación entre los gráficos de comprensión Deseable y el de Mirta.....	750
4.3.6 .-Tendencias de las categorías detectadas en relación con la construcción del concepto de área.....	753
4.3.7.-Análisis global del proceso de construcción del concepto de área en Patricia.....	760
4.3.7.1.-El crecimiento de comprensión de las categorías involucradas en el concepto	760

Nº de página

4.3.7.2.-El papel del folding back en el proceso de crecimiento de comprensión de Mirta.....	778
4.3.7.3.-El papel de las interacciones en el proceso de crecimiento de comprensión de Mirta.....	780

CAPITULO 5: CONCLUSIONES

<i>-Índice del apartado.....</i>	783
5.1.-Perspectiva de los resultados en relación con las preguntas de Investigación.....	785
5.2.-Aportes, limitaciones del estudio y cuestiones abiertas.....	806
5.3.-Algunas sugerencias para abordar la enseñanza del concepto de área	811

REFERENCIAS.....	815

INDICE DE TABLAS

Tabla 1: Redefinición de las capas de comprensión del concepto de Área.....	36
Tabla 2: Caracterización del Folding Back: Fuente de la intervención.....	40
Tabla 3: Caracterización del Folding Back: Su resultado.....	40
Tabla 4: Los fenómenos como medio de organización.....	66
Tabla 5: Relación entre los organizadores curriculares y las Categorías.....	71
Tabla 6: Características de monologismo y el dialogismo.....	110
Tabla 7: Instrumentos y técnicas de recogida de información y Finalidad.....	119
Tabla 8: Procedencia de las actividades del cuestionario de conocimientos matemáticos, fuente de procedencia y tipología....	130
Tabla 9: Procedencia de las actividades del cuestionario de ideas previas del concepto de área y tipología.....	137
Tabla 10: Procedencia de las actividades de la secuencia de aprendizaje, y tipología.....	149

	Nº de página
Tabla 11: Unidad de significado, en el registro de la secuencia de aprendizaje.....	171
Tabla 12: Procedencia de las actividades de l cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje y tipología.....	176
Tabla 13: Procedencia de las actividades del cuestionario a medio plazo y tipología.....	178
Tabla 14: Instrumentos y proceso de análisis especto de cada uno de los instrumentos de recogida de información del caso.....	180
Tabla 15 (a): Relación entre las capas de comprensión y categorías vinculadas al concepto de área.....	191
Tabla 15 (b): Relación entre las capas de comprensión y categorías vinculadas al concepto de área.....	192
Tabla 15 (c): Relación entre las capas de comprensión y categorías vinculadas al concepto de área.....	193
Tabla 16: Relación entre los problemas del cuestionario acerca de las previas, las categorías e indicadores asociados al gráfico de comprensión asociados al concepto de área.....	196
Tabla 16a: Gráfico de comprensión deseable correspondiente al cuestionario acerca de las ideas previas del concepto de área y el conjunto de indicadores asociados	204
Tabla 17: Relación entre los problemas de la secuencia de aprendizaje, las categorías e indicadores y el gráfico de comprensión. asociados al concepto de área.....	205
Tabla 17a: Gráfico de comprensión deseable correspondiente a la secuencia de aprendizaje y el conjunto de indicadores asociados.....	220
Tabla 18: Relación entre los problemas del cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje, las categorías e indicadores y el gráfico de comprensión asociados al concepto de área.....	222
Tabla 18a: Gráfico de comprensión deseable correspondiente al cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje y el conjunto de indicadores asociados.....	227
Tabla 19: Relación entre los problemas del cuestionario a medio plazo, las categorías e indicadores y el gráfico de comprensión asociados al concepto de área.....	228
Tabla 19a: Gráfico de comprensión deseable correspondiente al cuestionario a medio plazo y el conjunto de indicadores asociados.....	232
Tabla 20: Instrumento de análisis de la interacciones: <i>Tabla de Diálogo</i>	237
Tabla 21: Origen de los verbos utilizados en la Acción.....	241
Tabla 22: Acciones que han emergido durante el análisis.....	241
Tabla 23: Listado de verbos- expresiones utilizados para designar la función comunicativa d e las contribuciones de los niños al	

	Nº de página
discurso, organizadas en las fases de resolución de problemas.....	243
Tabla 24: Listado de verbos-expresiones utilizados para designar la función comunicativa de las contribuciones de la maestra al discurso, organizadas en las fases en que organiza la clase...	245
Tabla 25: Tabla de diálogo, correspondiente al problema 4, unidad del intervalo[1,22].....	248
Tabla 26: Códigos asignados a cada uno de los contenidos e instrumentos de obtención de información.....	249
Tabla 27: Códigos y los instrumentos y secuencia de aprendizaje aplicados a una niña en particular.....	250
Tabla 28: Color asignado a cada instrumento de obtención de datos....	251
Tabla 29: Símbolo asignado al indicador según el logro detectado.....	251
Tabla 30: Tendencia del indicador 2.1: <i>Compara superficies por percepción visual</i>	252
Tabla 31: Folding Back del caso: naturaleza e indicadores involucrados.....	256

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Gráfico de comprensión.....	35
Gráfico 2: Origen y vinculación entre el Interaccionismo Simbólico y el enfoque dialógico (p.155).....	99
Gráfico 3: Mapa conceptual que orienta el desarrollo de la secuencia de aprendizaje.....	142

ÍNDICE DE GRÁFICOS DE COMPRENSIÓN

Gráfico de Comprensión –IA- de Patricia asociado a la actividad 1....	280
Gráfico de Comprensión –IA- de Patricia asociado a la actividad 2....	283
Gráfico de Comprensión –IA- de Patricia asociado a la actividad 3....	285
Gráfico de Comprensión –IA- de Patricia asociado a la actividad 4....	2871
Gráfico de Comprensión –IA- de Patricia asociado a la actividad 6....	289
Gráfico de Comprensión –IA- de Patricia asociado a la actividad 7....	291
Gráfico de Comprensión –IA- de Patricia asociado a la actividad 8....	293

	N° de página
Gráfico Global de Comprensión Deseable sobre sus ideas previas –IA-	294
Gráfico Global de Comprensión –IA- de Patricia.....	295
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 1.....	299
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 2.....	306
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 3.....	317
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 4.....	319
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 6.....	337
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 8(a)....	364
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 8(b)...	364
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 9.....	369
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 10....	379
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 11....	385
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 12....	395
Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 13....	400
Gráfico Global de Comprensión Deseable de la Secuencia de Aprendizaje.....	402
Gráfico Global de Comprensión –S- de Patricia.....	403
Gráfico de Comprensión –E- de Patricia asociado a la actividad 2.....	412
Gráfico de Comprensión –E- de Patricia asociado a la actividad 3.....	415
Gráfico de Comprensión –E- de Patricia asociado a la actividad 4.....	417
Gráfico de Comprensión –E- de Patricia asociado a la actividad 5.....	419
Gráfico Global de Comprensión Deseable sobre Evaluación de la Secuencia –E-	420
Gráfico Global de Comprensión –E- de Patricia.....	421

	Nº de página
Gráfico de Comprensión –MP- Patricia asociado a la actividad 1.....	424
Gráfico de Comprensión –MP- Patricia asociado a la actividad 2.....	426
Gráfico de Comprensión –MP- Patricia asociado a la actividad 3.....	429
Gráfico de Comprensión –MP- Patricia asociado a la actividad 4.....	431
Gráfico Global de Comprensión Deseable a Medio Plazo –MP-.....	432
Gráfico Global de Comprensión –MP- de Patricia.....	433
Gráfico de Comprensión –IA- de Cecilia asociado a la actividad 1.....	479
Gráfico de Comprensión –IA- de Cecilia asociado a la actividad 2.....	480
Gráfico de Comprensión –IA- de Cecilia asociado a la actividad 3.....	482
Gráfico de Comprensión –IA- de Cecilia asociado a la actividad 4.....	484
Gráfico de Comprensión –IA- de Cecilia asociado a la actividad 8....	487
Gráfico Global de Comprensión Deseable sobre sus ideas previas –IA-	488
Gráfico Global de Comprensión –IA- de Cecilia.....	489
Gráfico de Comprensión –S- de Cecilia asociado a la actividad 3.....	498
Gráfico de Comprensión –S- de Cecilia asociado a la actividad 4.....	502
Gráfico de Comprensión –S- de Cecilia asociado a la actividad 6.....	512
Gráfico de Comprensión –S- de Cecilia asociado a la actividad 8(a)...	535
Gráfico de Comprensión –S- de Cecilia asociado a la actividad 8(b)....	536
Gráfico de Comprensión –S- de Cecilia asociado a la actividad 9.....	543
Gráfico de Comprensión –S- de Cecilia asociado a la actividad 10.....	546
Gráfico de Comprensión –S- de Cecilia asociado a la actividad 11.....	556
Gráfico de Comprensión –S- de Cecilia asociado a la actividad 12.....	559
Gráfico de Comprensión –S- de Cecilia asociado a la actividad 13.....	565

	Nº de página
Gráfico Global de Comprensión Deseable de la Secuencia de Aprendizaje.....	566
Gráfico Global de Comprensión –S- de Cecilia.....	568
Gráfico de Comprensión –E- de Cecilia asociado a la actividad 2.....	575
Gráfico de Comprensión –E- de Cecilia asociado a la actividad 3.....	577
Gráfico de Comprensión –E- de Cecilia asociado a la actividad 4.....	579
Gráfico de Comprensión –E- de Cecilia asociado a la actividad 5.....	581
Gráfico Global de Comprensión Deseable sobre Evaluación de la Secuencia –E-.....	582
Gráfico Global de Comprensión –E- de Cecilia.....	583
Gráfico de Comprensión –MP- Cecilia asociado a la actividad 1.....	587
Gráfico de Comprensión –MP- Cecilia asociado a la actividad 2.....	589
Gráfico de Comprensión –MP- Cecilia asociado a la actividad 3.....	592
Gráfico de Comprensión –MP- Cecilia asociado a la actividad 4.....	594
Gráfico Global de Comprensión Deseable a Medio Plazo –MP-.....	595
Gráfico Global de Comprensión Deseable –MP- de Cecilia.....	596
Gráfico de Comprensión –IA- de Mirta asociado a la actividad 1.....	643
Gráfico de Comprensión –IA- de Mirta asociado a la actividad 2.....	645
Gráfico de Comprensión –IA- de Mirta asociado a la actividad 3.....	646
Gráfico de Comprensión –IA- de Mirta asociado a la actividad 4.....	648
Gráfico de Comprensión –IA- de Mirta asociado a la actividad 7.....	650
Gráfico Global de Comprensión Deseable sobre sus ideas previas –IA-.....	652
Gráfico Global de Comprensión –IA- de Mirta.....	653
Gráfico de Comprensión –S- de Mirta asociado a la actividad 1.....	657

	Nº de página
Gráfico de Comprensión –S- de Mirta asociado a la actividad 3.....	666
Gráfico de Comprensión –S- de Mirta asociado a la actividad 6.....	674
Gráfico de Comprensión –S- de Mirta asociado a la actividad 8(a).....	693
Gráfico de Comprensión –S- de Mirta asociado a la actividad 8(b).....	693
Gráfico de Comprensión –S- de Mirta asociado a la actividad 9.....	697
Gráfico de Comprensión –S- de Mirta asociado a la actividad 10.....	703
Gráfico de Comprensión –S- de Mirta asociado a la actividad 11.....	711
Gráfico de Comprensión –S- de Mirta asociado a la actividad 12.....	716
Gráfico de Comprensión –S- de Mirta asociado a la actividad 13.....	722
Gráfico Global de Comprensión Deseable de la Secuencia de Aprendizaje.....	724
Gráfico Global de Comprensión –S- de Mirta.....	725
Gráfico de Comprensión –E- de Mirta asociado a la actividad 2.....	731
Gráfico de Comprensión –E- de Mirta asociado a la actividad 3.....	733
Gráfico de Comprensión –E- de Mirta asociado a la actividad 4.....	735
Gráfico de Comprensión –E- de Mirta asociado a la actividad 5.....	737
Gráfico Global de Comprensión Deseable sobre Evaluación de la Secuencia –E-.....	739
Gráfico Global de Comprensión –E- de Mirta.....	740
Gráfico de Comprensión –MP- Mirta asociado a la actividad 2.....	744
Gráfico de Comprensión –MP- Mirta asociado a la actividad 3.....	747
Gráfico de Comprensión –MP- Mirta asociado a la actividad 4.....	749
Gráfico Global de Comprensión Deseable a Medio Plazo –MP-.....	750
Gráfico Global de Comprensión Deseable –MP- de Mirta.....	751

Nº de página

ANEXOS**PRIMERA PARTE : Instrumentos de recolección de datos**

Anexo I: Cuestionario –de pilotaje-sobre conocimientos matemáticos primitivos.....	2
Anexo II: Cuestionario sobre conocimientos matemáticos primitivos.....	5
Anexo III: Cuestionario –de pilotaje- sobre ideas previas acerca del concepto de área.....	8
Anexo IV: Cuestionario sobre ideas previas acerca del concepto de área.....	11
Anexo V: Registro de la secuencia de aprendizaje.....	14
Anexo VI: Cuestionario Final: Evaluación de la secuencia de Aprendizaje.....	68
Anexo VII: Cuestionario Final: Evaluación a medio plazo.....	69
Anexo VIII: Documento sobre Diseño Curricular para la educación primaria de la provincia de Buenos Aires- Segundo Ciclo -área matemática- Versión 2008-.....	70

SEGUNDA PARTE: Datos recabados para el análisis de cada uno de los casos**CASO PATRICIA**

Anexo IX: Cuestionario sobre conocimientos matemáticos primitivos de Patricia.....	74
Anexo X: Cuestionario sobre ideas previas acerca del concepto de área de Patricia.....	78
Anexo XI: Resolución de la secuencia de aprendizaje implementada por Patricia.....	81
Anexo XII: Cuestionario Final: Evaluación de la secuencia de aprendizaje desarrollada por Patricia.....	99
Anexo XIII: Cuestionario Final: Evaluación a medio plazo desarrollada por Patricia.....	101
Anexo XIV: Tabla sobre el folding back detectado en Patricia durante la resolución de secuencia de aprendizaje.....	102

Nº de página

CASO CECILIA

Anexo XV: Cuestionario sobre conocimientos matemáticos primitivos de Cecilia.....	103
Anexo XVI: Cuestionario sobre ideas previas acerca del concepto de área de Cecilia.....	107
Anexo XVII: Resolución de la secuencia de aprendizaje implementada por Cecilia.....	110
Anexo XVIII: Cuestionario Final: Evaluación de la secuencia de aprendizaje desarrollada por Cecilia.....	120
Anexo XIX: Cuestionario Final: Evaluación a medio plazo desarrollada por Cecilia.....	122
Anexo XX: Tabla sobre el folding back detectado en Cecilia durante la resolución de secuencia de aprendizaje.....	123

CASO MIRTA

Anexo XXI: Cuestionario sobre conocimientos matemáticos primitivos de Mirta.....	124
Anexo XXII: Cuestionario sobre ideas previas acerca del concepto de área de Mirta.....	128
Anexo XXIII: Resolución de la secuencia de aprendizaje implementada por Mirta.....	132
Anexo XXIV: Cuestionario Final: Evaluación de la secuencia de aprendizaje desarrollada por Mirta.....	143
Anexo XXV: Cuestionario Final: Evaluación a medio plazo desarrollada por Mirta.....	144
Anexo XXVI: Tabla sobre el folding back detectado en Mirta durante la resolución de secuencia de aprendizaje.....	145

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

INDICE	N ° de Página
1.1.- Motivación.....	3
1.2.- Objeto de estudio y contextualización.....	5
1.3.- Estructura del trabajo.....	7

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1.-MOTIVACIÓN.

Mejorar la calidad de la educación es una problemática que preocupa a la mayoría de los que integramos el profesorado de Argentina, y el desafío al que nos enfrentamos diariamente los que estamos a cargo de la enseñanza en los institutos de formación docente.

El comienzo de esta investigación cuenta con la motivación de considerar el abordaje de los conceptos matemáticos desde dos miradas: la del alumno y la del docente, que, en el ámbito escolar son evidentes preocupaciones a resolver, puesto que como formadora de profesores de la Enseñanza Primaria, a pesar de los años de transformación o innovación que –a nivel país- se han desarrollado, no se observa el impacto deseado.

Interrogantes que cruzan esta investigación son, por ejemplo, ¿Qué

recorridos realiza el alumno para construir contenidos matemáticos? ¿Qué es lo que hace el alumnado y el docente ante determinadas propuestas didácticas? ¿En qué medida la Resolución de Problemas en la educación matemática es una vía pertinente para arribar a los resultados deseados? Si bien es cierto que cada una de las preguntas iniciales direcciona la tarea que emprendo, fueron muchas más las que surgieron como una de las maneras de identificar problemas e instrumentalizar una intervención adecuada en la evolución de los procesos involucrados.

Sin embargo, es justo señalar que no he perdido de vista que ninguna práctica docente ni ningún proceso de aprendizaje es neutro, pues en ellos las creencias, teorías, valores o intenciones motivan la acción, aunque no definan su curso completo o el flujo de los acontecimientos.

En efecto, lo que creen, las teorías que subyacen, los valores asignados y las intenciones que promueven las acciones de los distintos actores, es un insumo que a veces, como telón de fondo y, en otras oportunidades, de manera explícita adquieren sentido como punto de reparo y de andamiaje.

La cuestión de cómo aprenden los niños determinados contenidos matemáticos es, sin duda, la columna de la presente investigación. Así, en este trabajo, el enfoque está puesto en la construcción realizada por cada sujeto en interacción con otros integrantes de un grupo y, en el marco de la perspectiva dialógica, cada uno de los integrantes construye su interpretación del concepto en la interacción con el grupo, al enfrentar interpretaciones diferentes y al intentar superarlas, revierten en avances cognitivos (Linell 2005a, Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent, 2010b; Muñoz-Catalán, 2012). De manera que estos aspectos cobran sentido en la construcción de conceptos.

Por ello, a lo largo de cada capítulo de esta investigación el lector encuentra situaciones y problemas en los que fácilmente puede observar el actuar de los niños, que aprenden desde diferentes sitios de la práctica; así como ideas, reflexiones, justificaciones y procedimientos que éstos brindan, los cuales nos permiten construir respuestas personales y, a su vez, resignificar otras.

Y ocurre porque no sólo es determinante la selección de contenidos matemáticos realizada, sino medularmente por la metodología de enseñanza-

aprendizaje adoptada y el lugar asignado a la tarea de investigación en una institución educativa en particular.

Sin desligarnos de la motivación inicial, pretendemos¹ recabar información acerca de cómo construyen los niños un concepto en particular cuando se implementa una metodología determinada.

1.2. OBJETO DE ESTUDIO Y CONTEXTUALIZACIÓN

En el nivel primario, nos interesa detectar qué características manifiestan los niños respecto de la construcción de un concepto y cómo construyen el mismo, para posicionarnos fundamentalmente en lo que respecta a los aspectos cognitivos y las interacciones que se desenvuelven en espacios de construcción dialógica con sus compañeros y con la maestra. A fin de analizar estos aspectos, consideramos como metodología de enseñanza-aprendizaje adecuada la resolución de problemas.

La importancia de la resolución de problemas en la educación matemática es obvia para muchos educadores. Los documentos curriculares actuales en la República Argentina la consideran como un medio para la construcción de los conocimientos matemáticos.

Distintos países –España, Estados Unidos, México, Holanda, Francia, entre otros- recomiendan que la resolución de problemas esté en la agenda de la educación primaria, de manera que los niños desde edad temprana comiencen a incursionar en el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas, ayudarlos a adquirir formas de pensamiento y, fundamentalmente, construyan conocimientos matemáticos. (Schoenfeld, 1985; Kilpatrick, 1985; Puig, 1996; Carrillo, 1998; Cai-Nie, 2007; Santos Trigo, 2008).

Ahora bien, ¿Qué concepto matemático podríamos considerar? nos interesa, en particular, el concepto de área de una superficie, pues su comprensión es compleja para el niño y permite que relacione conceptos geométricos y numéricos. Su tratamiento trasciende el pasaje entre unidades de distintos

¹ En este texto alterno la primera persona del singular con la del plural para diferenciar mis motivaciones personales frente a decisiones que han sido consensuadas con los directores del trabajo

órdenes: unidades, múltiplos y submúltiplos, o bien el uso y aplicación de las fórmulas, y conlleva un largo proceso de aprendizaje a lo largo de los distintos niveles educativos, comenzando con superficies de lados rectilíneos hasta considerar superficies de bordes curvos cuyo cálculo de área surge de la aplicación de la integral definida como instrumento adecuado.

Este concepto forma parte de manera relevante en el currículo actual. Sin embargo, en la formación docente, en particular en el nivel primario, he detectado las serias dificultades con las que se enfrentan los estudiantes al resolver problemas en los que de forma directa o indirecta está implicado dicho concepto.

Una de esas dificultades es, como muestra, el apresuramiento por llegar a trabajar con los números, hecho que algunos autores (Chamorro, 1997; Zacharos, 2006) llaman “la aritmetización de la medida” dejando de lado la importancia de medir, la conexión que pueden establecer entre las medidas lineales de los lados de una superficie y el carácter bidimensional de su área expresada en unidades cuadradas (Lehrer, Jaslow y Curtis, 2003; Bonotto, 2003).

Estas nociones les impiden, por ejemplo, admitir la igualdad de área en superficies de distinta forma, o por qué no, la confusión que denotan los niños entre las nociones de perímetro y área, que hasta pueden considerarse como un “obstáculo epistemológico” y requieren un tratamiento específico (Chamorro, 1995; Del Olmo, Moreno y Gil, 1989; De los Reyes, 1999; Mantica, 2005; Owebs & Outhred, 2006).

Una de las funciones de los Institutos de Formación Docente de Argentina (correspondiente al nivel superior no universitario) es la capacitación de los docentes en ejercicio. Desde ese lugar, detecté aquellos docentes que implementaban la resolución de problemas como metodología de enseñanza-aprendizaje.

Así, una de las maestras me permitió ingresar en el aula de una escuela primaria en Carmen de Patagones –Provincia de Buenos Aires- para investigar el proceso que se operaba en los niños al construir un concepto.

Con el objeto de superar aquellos aspectos que llevan a la incomprensión y detectar aquellas características que denoten su construcción, diseñamos junto con

la maestra una secuencia de aprendizaje alrededor del concepto de área de una superficie, adoptando el enfoque metodológico de resolución de problemas.

En este sentido, para el diseño de la secuencia de aprendizaje, los aportes de Freudenthal (1983); Heraud (1987); Perrin-Glorian (1989); Corberán (1996) y Rico (1997, 2001), permitieron abordar el tratamiento cualitativo y cuantitativo que admite el concepto, dando cuenta, cada uno de ellos, de distintos procedimientos (geométricos, gráficos y/o numéricos), los cuales condujeron a diferentes interpretaciones del concepto de área.

En este marco, el presente trabajo tiene por objeto caracterizar, comprender e interpretar el proceso de la construcción del concepto de área cuando se implementa una metodología basada en la resolución de problemas.

1.3.- ESTRUCTURA DEL TRABAJO

Este trabajo está compuesto por cinco capítulos. El capítulo 1 destinado a la introducción, de la cual estos apartados lo conforman. El capítulo 2, por su parte, está construido sobre cinco pilares: el constructivismo social, el conocimiento escolar, la construcción de conceptos; el concepto de área y la resolución de problemas, fundamentales para nuestro trabajo, dado que los mismos constituyen los antecedentes y el contexto teórico de la investigación.

Desde esta organización y al focalizarnos en la acción de aprender, nos posicionamos en el constructivismo, más precisamente en el *constructivismo social* (Vigotsky, 1988; Baquero, 2001, 2004; Ernest, 1991, 1996),

Posicionamiento que aborda tanto lo individual como lo social del aprendizaje, es decir, reconoce la influencia de los procesos sociales en el significado individual alrededor de tareas de orden cognitivo.

De esta manera, su finalidad es promover procesos de crecimiento personal insertos en un marco social. Lo que, además, nos lleva a considerar, desde la perspectiva dialógica, el diálogo como una conversación en la que a partir del debate, cada uno de los integrantes aspire lograr avances cognitivos. (Linell, 2005a; Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent, 2010b; Muñoz-Catalán, 2012).

En cuanto al *conocimiento escolar*, aunque se origina e implementa en el contexto escolar, la pretensión es que sea generalizable a otros contextos en virtud de la interacción y el diálogo entre los miembros del aula (docentes - alumnos; alumno- alumno), lo que facilitará que los niños realicen la reconstrucción individual del conocimiento validado por la sociedad en la que se halla inscrito (García, 1994,1998; Lerman, 1996).

En particular en el conocimiento matemático escolar distinguimos un aspecto *práctico* constituido por los problemas y su resolución, y otro *discursivo* formado por un sistema de reglas y justificaciones. Los cuales se manifiestan a los niños a través de “conversaciones” – orales y/ o escritas- a fin de favorecer su aprendizaje en el contexto del aula.

Respecto de la *construcción de conceptos*, ¿qué comprenden y cómo logran comprenderlo de modo particular? son interrogantes que pretendemos iluminar desde la teoría dinámica para el crecimiento de la comprensión matemática de Pirie y Kieren (1994-1999) a efectos de observar y describir el crecimiento de comprensión en los niños de nivel primario.

En este sentido, prestamos especial atención al folding back (Pirie y Kieren, 1994; Martín, 2008,2009) que se opera en ellos cuando se atascan en el proceso de resolución y deben volver a aspectos de comprensión ya consolidados, para luego regresar con una formación más sólida y profunda, que les permita continuar el proceso. En particular, este modelo constituye una herramienta teórica medular sobre la que se articula este trabajo.

Referirnos, en todo caso, al *concepto de área*, nos lleva a precisar el conocimiento matemático propiamente dicho, y aquellos rudimentos que favorecen su aprendizaje. Por ejemplo, el conocimiento curricular propuesto en el nivel primario y los aportes que brindan las investigaciones respecto a la comprensión del desarrollo de dicha noción en los niños.

Estos aspectos nos permiten, formular un conjunto de categorías acerca de la construcción del concepto y efectuar una caracterización de la unidad de aprendizaje en base a organizadores curriculares (Rico, 1997a, 1997b, 2001).

Por último, abordamos *la resolución de problemas*, esencialmente, como

“un medio para el aprendizaje de conocimientos nuevos”. Es decir, como estrategia metodológica favorecedora de la construcción de concepto en el niño.

Estrategias que persiguen potenciar no solo su “hacer” sino, “su reflexión sobre su hacer” junto con las aportaciones de los integrantes del grupo y/o el maestro. Así, estos pilares pretenden aportar los sustentos teóricos de referencia a utilizarse como respaldo para este estudio.

El capítulo 3, destinado al diseño de la investigación, se enuncia el problema de la investigación, concretamos los objetivos, describimos sus características y nos posicionamos en un paradigma concreto coherente con el problema enunciado.

A efectos de abordar la perspectiva metodológica que fundamentan nuestras decisiones, nos centramos en el interaccionismo simbólico, y el enfoque dialógico. Además; caracterizamos el estudio de caso que abordamos en este trabajo - instrumental y colectivo (Stake, 2007)-, pues nuestra inquietud es efectuar un análisis en profundidad del mismo.

A continuación, describimos, en su orden temporal, cada uno de los instrumentos y técnicas utilizados, con la intención específica y diferenciada de brindar información acerca del estado de construcción del concepto a investigar; puntualizamos el proceso de análisis, caracterizamos cada uno de los instrumentos utilizados, entre ellos, un instrumento para analizar las interacciones, denominado “*tabla de diálogo*” y señalamos cómo hemos procedido y cómo dichos instrumentos han viabilizado la tarea.

El capítulo 4, estructurado alrededor de tres apartados, presenta el análisis de cada uno de los casos –Patricia, Cecilia y Mirta-, subrayando las construcciones conceptuales alrededor de las categorías formuladas sobre el concepto de área, y mostrando nuestra comprensión sobre cómo arriban a ellas.

En consecuencia, efectuamos un análisis longitudinal, en función de la información obtenida en las distintas sub-fases que componen el proceso de recogida de información y culminamos cada caso con el análisis global, a efectos de dar cuenta del proceso de construcción del concepto en cada una de las niñas.

Fundamentalmente, en lo que respecta al crecimiento de la comprensión y el folding back que se opera en dicho proceso.

Concluimos con un análisis global del proceso en cada uno de los casos, todo ello en función de detectar qué características manifiestan en relación a la construcción del concepto de área y en cómo se produce dicha construcción junto al grupo de compañeros y la maestra, cuando se implementa una metodología de resolución de problemas.

En el capítulo 5, en función de las consideraciones arribadas en el estudio de los casos, responde a los objetivos de investigación planteados, explicitamos las principales aportaciones de este trabajo, reflexionamos también sobre sus limitaciones y planteamos cuestiones susceptibles de generar futuras investigaciones. Para finalizar, proponemos algunas sugerencias para la enseñanza del concepto.

A continuación, presentamos los Anexos, dispuestos en dos partes: una de ellas compuesta por los distintos instrumentos implementados durante la fase de obtención de información: los cuestionarios iniciales - de pilotaje y los definitivos- el registro de la unidad de aprendizaje y los cuestionarios finales a implementar y según el orden temporal, para facilitar su localización.

También incluimos un documento relativo a parte del diseño curricular vigente, correspondiente al área de matemática. En la otra parte y en la focalización de cada uno de los casos, hemos incluido la información recabada de los instrumentos implementados y el folding back detectado del análisis realizado.

De esta forma, hemos intentado explicitar las bases con las cuales se construye un determinado conocimiento matemático en torno a pilares cognitivos y sociales en un contexto particular, el aula de primaria, en la cual se implementa una metodología basada en la resolución de problemas.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

INDICE

	N ° de Página
2.1.- La acción de aprender: Un abordaje desde el constructivismo social.	13
2.2.- El conocimiento escolar.....	21
2.3.- La construcción de conceptos.....	25
2.3.1.-Caracterización y representación para indicar los avances cognitivos alrededor de un concepto. El modelo de Pirie y Kieren.....	30
2.3.2.-Caracterización del Folding Back	38
2.4.-El concepto de área.....	41
2.4.1.-El conocimiento matemático.....	41
2.4.2.-La comprensión del desarrollo del concepto en el niño desde las investigaciones.....	45
2.4.3.- El conocimiento escolar pretendido en el Currículo...	54
2.4.4.-El conocimiento escolar deseable en este Trabajo.....	58
2.4.4.1.-Categorización del concepto.....	59
2.4.4.2.-Fundamentación de la Unidad de aprendizaje	61
2.5.- La resolución de problemas.....	72
2.5.1.-Caracterización de la resolución de problemas.....	78
2.5.2.-La resolución de problemas en los documentos y diseños curriculares en Argentina.....	82
2.5.3.- La resolución de problemas como estrategia metodológica.....	85
Síntesis del capítulo.....	90

CAPÍTULO 2:

MARCO TEÓRICO

2.1.- LA ACCIÓN DE APRENDER: UN ABORDAJE DESDE EL CONSTRUCTIVISMO SOCIAL

En la *acción de aprender* pretendemos detectar ciertas características que nos brinden respuesta al qué del concepto a investigar, al cómo construye dicho concepto y desde que ámbito. (Shotter, 1993; Lester, 2002).

De este modo al preguntarnos, ¿cómo se aprende?, nos alejamos del paradigma conductista para adentrarnos en el constructivista como el paradigma educativo² adecuado. Comenzamos reconociendo como significativos, los aportes

² Según Ernest (1994,1996) este paradigma educativo puede expresarse desde una visión a) *ontológica* que comprende la existencia en relación a un status del mundo y de lo que lo forma, b) *epistemológica*, que comprende una creencia de la naturaleza y justificación del conocimiento entendido por una parte como subjetivo y por otro, como convencional o compartido, c) *metodológica*: comprende los métodos y técnicas que permiten generar y justificar el

de Piaget y Vigotsky, quienes aceptan el hecho de que existe un sujeto y un ambiente en el que se desarrolla el aprendizaje.

La concepción constructivista del aprendizaje da cuenta de cómo los niños construyen un determinado concepto. Desde esta posición consideramos fundamental, el protagonismo de la actividad mental constructiva del niño en el aprendizaje, pues la misma nos permite referirnos a la construcción del conocimiento.

Un proceso que se inicia, con dudas, aciertos, errores, construcciones provisionales y reconstrucciones que confluyen progresivamente a formar estructuras cognitivas móviles por momento, para estabilizarse y equilibrarse posteriormente provocando nuevos conocimientos.

Para Piaget el origen del conocimiento está en la acción (Lavinowics, 1986), rol fundamental en la construcción del conocimiento, por tratarse de un proceso dialéctico e interactivo entre el sujeto y el objeto que permite comprender y modificar la realidad.

La característica principal del conocimiento, en particular en matemática, es la habilidad reflexiva, la preocupación por generar comprensión y solución a situaciones nuevas, lo que denomina Vergnaud (2002) conocimiento operativo. La construcción del conocimiento para Piaget, es un proceso individual, en el cual no se observan valores afectivos y compartidos con los otros³. Vigotsky manifiesta *“sus trabajos conducen a creer que el niño es impermeable a la experiencia y considera la socialización del pensamiento como una abolición mecánica de las características de la inteligencia propia del niño”* (Vigotsky, 1982, p. 26).

De todos modos, necesitamos ampliar la mirada y analizar cómo dicho conocimiento se ve influido por la cultura, destacando especialmente el lenguaje, dando importancia a lo social en su construcción, aspectos éstos, especialmente tratados por Vigotsky, quien argumentó que *“el aprendizaje humano presupone*

conocimiento; y d) *pedagógica*: el medio para facilitar el aprendizaje. Esta última visión caracteriza al paradigma como educativo.

³ Barraza Macías (2002) manifiesta que Piaget no hace referencia explícitamente a lo social en el desarrollo del sujeto. Solamente plantea la construcción de las estructuras cognoscitivas - a partir del periodo de las operaciones concretas - depende de un ambiente alentador y favorable para la cooperación.

una naturaleza social específica y un proceso en el que los niños crecen intelectualmente a partir de su entorno” (1978, p. 88, citado por Schoenfeld, 2002, p. 442).

Además, consideró la relación entre sujeto y ambiente enfatizando la influencia exterior en la construcción de conocimiento. Es decir, la construcción del conocimiento para Vigotsky es un proceso social estrechamente vinculado con las manifestaciones de intercambio comunicativas que se producen en un grupo cuando resuelven actividades, de manera reflexiva y en vistas a la elaboración de significados. De lo contrario, el conocimiento es algo que se impone desde fuera, incluso de manera coercitiva. (Lerman, 1996; Castorina, 1999; Barba-Téllez, 2007)

A su vez, el lenguaje, como instrumento cultural, es un sistema de reglas para construir significados, un elemento esencial para la construcción del conocimiento, interviene en sus distintas formas: orales y escritas, resultando uno, vehículo de expresión del otro (Baquero, 2004).

En este sentido, la sociedad y la cultura son mediadas a través de la internalización del uso de instrumentos y de signos, fundamentales en el desarrollo cognitivo del niño. Según Vigotsky (1988): *“En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero entre personas (interpsicológica), y después, en el interior del propio niño (intrapsicológica)”* (p. 94).

Es decir, permiten el desenvolvimiento de funciones mentales o procesos psicológicos superiores, los cuales al manifestarse gradualmente pasan primero por una etapa externa, de carácter exógeno - social, (por ejemplo, la relación entre el niño con otros niños o con los adultos), y más tarde pasa por una etapa interna-individual, o endógeno (en el interior del propio niño).

O sea, los niños primero son capaces de realizar actividades en interrelación con el adulto o con otros niños más competentes y más tarde son capaces, de realizarlas sin ayuda e individualmente, tras haberlas internalizado (Castorina, 1999).

Esta transición del plano social al individual es viable por medio de la

noción de zona de desarrollo próximo, es decir, *“la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver de manera independiente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero”* (Vigotsky, 1988, p. 133).

La diferencia entre los significados que el niño puede aprender solo y lo que aprende a través de la ayuda de otra persona (maestro o compañero), es la Zona de Desarrollo próximo.

Este concepto nos permite explicar el desfase que existe entre la resolución individual en tareas de orden cognitivo y los logros que alcanza con otros compañeros, moderado por debate conceptual que éstos promueven (Baquero, 2001; 2004);

Así, el constructivismo -en sus distintas variedades- parte de la metáfora del trabajo de construcción, de estructuras con piezas diseñadas especialmente para una actividad. Para Pirie y Kieren (1991, citado por Sriraman & Haverhals, 2010; Pirie y Kieren, 1994), las estructuras construidas previamente se transforman en insumos de las posteriores construcciones, por lo que se trata de un proceso recursivo que describe la comprensión realizada.

Los niños construyen un concepto en particular cuando logran una representación interna del mismo. Desempeñan, por tanto, un rol importante sus expectativas, sus intereses, sus motivaciones, sus construcciones personales producidas algunas de ellas, desde la percepción y/o experiencias cotidianas y las relaciones que establecen entre las nuevas nociones con las ya existentes. Nociones que, en algunos casos, se presentan como un obstáculo interfiriendo en el aprendizaje de conceptos nuevos (Carretero, 1997, 2001).

Respecto a ellas, coincidimos con Martínez Delgado (1999, p 495) en la diferenciación que establece entre conocimientos previos e ideas previas. En este trabajo, entonces, consideramos que el conocimiento previo -o disponible- responde al conocimiento en general que ya poseen los niños del contenido y es producto de los conocimientos adquiridos durante la escolaridad, mientras las ideas previas están ligadas al concepto de área en particular y son la expresión o construcción personal del niño, acertada o no, ligadas a su propia experiencia de

acción del mundo cotidiano, basada generalmente, en lo perceptivo.

Las ideas previas son originales de cada niño y presentan dificultad en ser detectadas, pues están ligadas a sus ideas implícitas y algunas de ellas son resistentes al cambio. No obstante, consideramos que estas ideas incompletas, acertadas o no, son importantes como puente para construir nuevos conocimientos.

Consideramos pertinente explicitar esta distinción, pues en nuestro trabajo diferenciamos los conocimientos matemáticos previos, en general, y las ideas previas de un concepto en particular

Asimismo, para reconocer la variación en la comprensión de dicho concepto, consideramos necesario tener en cuenta factores interpersonales, más precisamente, el entorno social en donde se produce –una clase de 5° de Primaria– a fin de detectar aquellas aportaciones de sus compañeros que inciden en la construcción individual en cada una de los sujetos.

Vigotsky, en relación a nuestro posicionamiento, manifiesta *“La verdadera dirección del desarrollo del pensamiento no es del individuo a lo social, sino desde lo social a lo individual”* (1986, p. 32)

Este aspecto le confiere al aprendizaje una naturaleza particular que nos lleva a establecer distinciones entre la teoría sociocultural y el constructivismo social⁴ y seleccionar el que satisfaga los requerimientos enunciados anteriormente. Por lo tanto, nuestro enfoque no está puesto en la construcción del grupo, sino en la construcción realizada por cada sujeto en interacción dentro del grupo.

En este sentido, Boaler (2000) manifiesta que el conocimiento, desde la teoría sociocultural, se produce a través de la participación conjunta entre los integrantes de un grupo. Es decir, el conocimiento individual surge a través de su participación en grupos, uno de los cuales puede ser la escuela. Entiende el conocimiento como relacional entre los individuos y su entorno (Lerman, 2000).

Así el aprendizaje es considerado como parte de una práctica social, una

⁴ Jaworski (1994, citado por Lerman, 1996) manifiesta que la teoría del constructivismo social y la teoría sociocultural ofrece significativos aportes para explicar la construcción del conocimiento matemático de los niños a nivel individual y social en prácticas discursivas.

perspectiva situada que se aparta del foco en los esquemas cognitivos y atributos individuales, para participar e interactuar dentro de un grupo. (Matos, 1999).

En cambio, el constructivismo social es una variedad del constructivismo⁵, propuesto por Ernest (1994a; 1994b, 2006, 2010), que mejor se adecua a nuestro estudio, pues contempla ambas facetas: la social y la individual del aprendizaje.

Además, reconoce la influencia de los procesos sociales en el significado individual. Así lo observamos en las inquietudes que preocupaban al autor y que plasmó en las siguientes preguntas: (Ernest 2006, p.7)

- ✓ *¿Cómo responder a la naturaleza del conocimiento matemático como una construcción social?*
- ✓ *¿Cómo tener en cuenta socialmente el aprendizaje individual y la construcción de las matemáticas?*

El rol de la dimensión social en los procesos individuales, en nuestro caso, de cada una de los niños, nos brinda información para nuestro análisis.

El término *constructivismo social* según Ernest (1994b) se relaciona con la educación matemática a partir de los trabajos de Restivo (1988) y Weinberg y Gavelek (1987), aunque éstos nunca desarrollaron sus ideas.

En cambio, Bartolini-Bussi (1991) indica una amplia gama de aplicaciones

⁵En sus sucesivos artículos, Ernest (1996, 2004, 2006, 2010) reformula y completa sus distintas variedades del constructivismo. En primer lugar define el *Procesamiento de la información*. Se basa en la metáfora de la inteligencia: “la mente como un ordenador” pero vierte conceptos que resultan contradictorios que lo llevan desistir de esta variedad.

Constructivismo Simple (anteriormente lo denomina Constructivismo débil): Considera que el conocimiento no es recibido pasivamente sino es construido activamente por el sujeto. (Primer principio).

Reconoce que el conocimiento es activo e individual. Desde su visión pedagógica sugiere la necesidad de considerar el aprendizaje previo del alumno y sus construcciones, identificando los errores del alumno y formulando una enseñanza diagnóstica.

Constructivismo radical. El sujeto genera esquemas cognitivos para guiar sus acciones y representar sus experiencias. Esta visión del sujeto enfatiza la individualidad (Ernest, 1994 b), los procesos sociales sólo son considerados desde la posibilidad de generar desequilibrios y retos en el sujeto. Argumenta que la metáfora de la inteligencia es un sujeto desarrollado y adaptado pero aislado en un medio desfavorable. Desde su visión pedagógica sugiere considerar las percepciones del alumno del mundo experimental y la naturaleza problemática del conocimiento matemático de manera integral. Goodchild (2010)

Enactivism: es una variedad muy similar al constructivismo radical pero considera que las estructuras cognitivas no son originadas a través de construcciones individuales sino de la interacción entre el sujeto y la situación. Asimismo considera la base corporal en el pensamiento, incluyendo el significado, la imaginación los esquemas de movimiento corporal. Es por ello, desde su visión pedagógica sugiere prestar atención a los gestos y movimientos corporales que realiza el alumno.

en el aula, basadas fundamentalmente en las relaciones entre el conocimiento, la interacción, la conversación y el contexto social.

Esta variedad del constructivismo es reconocida fuertemente por Ernest (1994 a; 1994 b; 1998) como una teoría⁶ de la matemática de raíces vigotskianas, ya que supone al sujeto y al contexto mutuamente interconectado. El sujeto se desarrolla siempre que active sus procesos individuales y la interacción con otros.

La finalidad del constructivismo social es promover los procesos de crecimiento personal insertos en un marco social. El foco en este trabajo, en consecuencia es considerar en cada niño cómo influyen en él las aportaciones que los integrantes del grupo pueden brindar a su proceso de construcción.

Relaciona, a su vez, la dimensión ontológica - considera al mundo socialmente construido- con la dimensión epistemológica -refiriéndose a la metáfora “personas en conversación”⁷ o una mente dialógica – al considerar a las personas involucradas socialmente en interacciones lingüísticas e interpersonales (Shotter, 1993; Ernest, 1994b; 1996; 2004; Muñoz-Catalán, 2012) Esta característica dialógica del constructivismo social es discutida por Roth y Lee (2007, citado por English & Sriraman, 2010) quienes manifiestan que, desde la teoría sociocultural, la naturaleza del conocimiento es dialéctica y el constructivismo considera la visión dualista del sujeto al considerar dos fenómenos distintos dentro del mismo sujeto- el uno con apertura a un otro-.

En todo caso, como el constructivismo social es una variedad del constructivismo se basa en la concepción dualista. El carácter social y la noción de conversación debilita esta aseveración, ejemplo de ello es el constructivismo simple y el radical, expresados en términos individualistas –, mientras que el constructivismo social considera la presencia de otro: y, por lo tanto, es dialéctico.

Por su parte, Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent (2010b) diferencian esta naturaleza dialéctica del conocimiento de la dialógica, pues manifiestan que cuando nos referimos a dialéctica aspiramos, a través del dialogo de sus

⁶ Ernest se refiere a teoría o filosofía indistintamente.

⁷ De los distintos significados que asigna Ernest (2004) al término, nos referimos especialmente a la conversación privada interiorizada, inspirada en Vigotsky, en la cual el pensamiento es un ejemplo y la conversación entre personas desempeña un rol primordial en la constitución de la inteligencia.

integrantes, a llegar a acuerdos conjuntos logrando salvar sus diferencias; en cambio, la naturaleza dialógica del conocimiento genera espacios en donde sus integrantes plantean sus opiniones y diferencias.

Es esta perspectiva dialógica la que asumimos en esta investigación a la hora de analizar las interacciones entre cada sujeto y sus compañeros del grupo. En consecuencia, consideramos el diálogo como la conversación en acción, pues uno de los integrantes interpreta la voz de otro; y en el debate con sus diferencias, pretenden cada uno de ellos, alcanzar avances cognitivos (Linell 2005a, Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent, 2010b).

La conversación, entonces, es la utilización dialógica del lenguaje, se sostiene a través de experiencias y participación compartidas de sus integrantes y la comprensión interiorizada de cada uno de ellos alrededor de una tarea en común. Así, un alumno comunica lo que ha pensado, confronta con otras ideas de sus compañeros, generando “zonas de desarrollo próximos” –ZDP- en el interjuego entre el conocimiento matemático subjetivo- objetivo- subjetivo (Ernest, 2010) en el transito de la transformación de los signos en el dominio: privado-público-privado.

Así expresada, consideramos que esta perspectiva dialógica es fundamental cuando los niños construyen sus aprendizajes. Afirmamos, entonces que el *aprendizaje* es un proceso activo del alumno en el cual piensa, dialoga, discute.....conversa, con otros, algunos de ellos más informados, construyendo significados y/o conceptos, partiendo de su experiencia e integrándola con la información nueva. De este modo, nos focalizamos en el alumno; pero considerando las aportaciones de los otros, su contexto.

Las nociones enunciadas presentan similitudes con la vertida en la normativa y lineamientos curriculares que explicita el Sistema Educativo Argentino, vigente en esa oportunidad⁸, en la provincia de Buenos Aires, más precisamente, en *Aportes para el fortalecimiento de la enseñanza de la matemática* en la EGB (2004) y el Marco General del Diseño Curricular de la Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires (2001)

⁸ En el año 2008 el nivel denominado de Educación General Básica formado por tres ciclos (1°, 2° y 3°) de tres años cada uno, pasa a denominarse Educación Primaria formado por dos ciclos (1° y 2° del plan anterior) y Educación General Básica formado por el otro ciclo del plan anterior.

los cuales afirman que:

*“El conjunto de interacciones del sujeto con la realidad conforma un proceso continuo y dinámico de avances y retrocesos, que le permiten aprehenderla: este proceso es el **aprendizaje**⁹. Los aprendizajes suponen, entonces, experiencias previas que condicionan las nuevas experiencias, pero que también actualizan e integran los nuevos aprendizajes.*

Se acepta así el carácter global y la dimensión subjetiva de este proceso, pero - en correspondencia con la concepción de conocimiento - debe aceptarse también su dimensión social.¹⁰

*Por otra parte, los aprendizajes producen modificaciones en la conducta, las que posibilitan nuevos aprendizajes y los correspondientes procesos de desarrollo personal y social. Y es a través de ellos que el hombre desarrolla sus potencialidades perceptivas, motrices, intelectuales, afectivas, volitivas e intuitivas, y **se educa**.”(pág. 11)*

En esta idea rescatamos la importancia del contexto social y de las relaciones interpersonales alumno-maestro y alumno-alumno. Sin embargo, no hace referencia en forma explícita al rol del lenguaje en la situación. Estas ideas nos impulsan a ratificar nuestro posicionamiento y a analizar el conocimiento desde el ámbito escolar.

2.2.- EL CONOCIMIENTO ESCOLAR

La escuela es la institución encargada de la enseñanza de conocimientos legitimados públicamente. El conocimiento escolar que se construye en ella se vincula con esas intenciones educativas y con formas de conocimiento que presuponen una determinada visión crítica y cambiante de la realidad

Distintos autores (Porlán, 1994; García, 1994, 1998; Rodrigo, 1997, Cubero, 1994) distinguen el conocimiento escolar de otros dos tipos de

⁹ El marcado en negrita es nuestro

¹⁰ el subrayado es nuestro.

conocimiento: el cotidiano y el científico¹¹ Todos ellos tienen orígenes y propósitos diferentes y entre ellos se establecen distintos tipos de relaciones.

Estas relaciones se manifiestan través de las hipótesis de *compatibilidad*, *incompatibilidad* e *independencia*¹² planteadas por Pozo (1994); García (1994). En particular, la hipótesis de *incompatibilidad* considera que ambos conocimientos –cotidiano y científico- parten de epistemologías diferentes, pero se puede ir de un conocimiento a otro- de las ideas intuitivas de los alumnos a las científicas- a través de reestructuraciones, propuestas de cambio conceptual, que se da en todo caso, en la institución educativa.

Sin embargo para caracterizar el conocimiento escolar fue necesario discutir acerca de ciertas cuestiones (García, 1998), por ejemplo:

¿Para poder interpretar la realidad, los niños deben aspirar al conocimiento científico?

¿Existen formas intermedias entre el conocimiento cotidiano y el científico?

¿Tiene sentido comparar ambos tipos de conocimiento?

Asimismo, observemos lo que manifiesta el Marco General del Diseño Curricular de la provincia de Buenos Aires, en el apartado “Consideraciones Didácticas” (2001) al referirse al conocimiento, se entiende por “escolar”:

*“...existe una necesidad que la escuela tienda puentes entre los conocimientos escolares y los que los alumnos conocen en los contextos socio-culturales extraescolares de los que participan...(....)
No obstante trabajar en clase solamente a partir de situaciones de la*

¹¹ En líneas generales entendemos por *conocimiento cotidiano* una forma de discurso natural que se adquiere mediante participación en prácticas de la vida diaria, abiertas y dinámicas y el *conocimiento científico* surge del aprendizaje de un determinado método que exige un nivel explícito de racionalización dando origen a un discurso formal. Otros autores como ser (Pérez Gómez (1991; citado por Parcerisa, 1996) también se refieren al conocimiento escolar como conocimiento académico, y los otros como vulgar y científico respectivamente.

¹² *compatibilidad*: cuando ambos conocimientos parten de epistemologías similares, no habiendo necesidad de reestructuraciones fuertes para pasar de uno a otro, no siendo necesario la instrucción para que se produzca dicho cambio; *independencia*: cuando ambos conocimientos partes de epistemologías y contextos diferentes, concretándose alguna de ellas según el contexto, en este caso la instrucción impartida en la escuela no se efectúa a partir de hechos de la vida cotidiana.

vida diaria, llevaría a que los alumnos tuvieran pocas oportunidades de enfrentarse a problemas diferentes de los que les propone su contexto inmediato. Es necesario que el trabajo escolar amplíe los horizontes de esas mismas situaciones y permita extenderlos hacia otras.....”(p. 30)

Al destacar la importancia de partir de situaciones de la vida cotidiana (conocimiento cotidiano) pretende otorgarle sentido a los conocimientos, de manera tal que aparezcan como la solución a los problemas que se plantean, pero al mismo tiempo identifica los límites de su utilización, cuando se cuestiona en qué caso es necesario apelar a otras propiedades, técnicas o conceptos, o bien detectar aquellas formas más útiles para obtener información. Es decir, apunta a la significación del conocimiento.

Sin embargo, con la intención de superar esta dicotomía cotidiano-científico y responder las preguntas formuladas, podemos decir que ambos conocimientos se complementan, interaccionan y evolucionan conjuntamente, pues el conocimiento cotidiano inmerso en una realidad cambiante de la vida diaria y en interacción con otras formas de conocimiento (salud, contaminación, etc.), evoluciona y cambia. En tanto el *conocimiento escolar*¹³ parte de diversas formas de conocimiento (científico, cotidiano, filosófico, etc.), aunque se origina e implementa en el contexto escolar, se pretende que sea generalizable a otros contextos en virtud de la interacción y el diálogo entre los miembros del aula (docentes - alumnos; alumno- alumno), lo que facilitará que los alumnos realicen la reconstrucción individual del conocimiento validado por la sociedad en la que se halla inscrito (García, 1994,1998; Lerman, 1996)

En este punto, en lugar de enfrentar lo cotidiano con lo científico, deberíamos considerar que la transición de una visión simple del mundo a otra compleja se resuelve desde la reelaboración creativa de conocimientos previamente consensuados socialmente, que exige una fuerte reestructuración, y en la cual la instrucción desempeña un papel crucial.

¹³ En la generación del conocimiento escolar García (1994) considera la posibilidad de interacción entre ambos conocimientos –cotidiano y científico-; la posibilidad o no, de sustituir esos conocimientos en el ámbito de la escuela y de transferir los aprendidos en la escuela a situaciones de la vida diaria; y el grado de generalidad del conocimiento escolar.

Tendríamos que considerar también, la imposibilidad de coexistencia de dos sistemas conceptuales, uno “*para la escuela*”, otro “*para la vida*”. Es decir, el mundo actual presenta a los niños una diversidad de fuentes de conocimiento y la escuela, por su parte, desde la descontextualización de estos y otros conocimientos debe ofrecer los puentes y articulaciones necesarios para que los niños no tiendan a identificar los conocimientos que sirven y exige la escuela y lo que es útil para la vida cotidiana.

Gravemeijer (2000) manifiesta que Freudenthal consideraba prioritaria en la educación matemática familiarizar a los niños en el abordaje de la resolución de problemas pertenecientes a experiencias reales para ellos, no debiendo interpretarlos como problemas de la vida cotidiana, ni de la vida real de todos los días. Es por ello que no nos debe extrañar su oposición a la noción de *transposición didáctica*, expuesta por Chevalard (1991) que toma como punto de partida el conocimiento científico, experto de los matemáticos

Conocimiento escolar que, en definitiva, no se trata de una mera simplificación del conocimiento científico; sino que, decididamente persigue y se propone finalidades, funciones diferentes visto que se corresponden con el tránsito por otras lógicas de producción, desarrollo y difusión.

En particular el documento denominado *Aportes para el fortalecimiento de la enseñanza de la matemática* en la EGB (2004) se refiere al conocimiento matemático como:

“Los conocimientos matemáticos son construcciones a las que ha llegado el hombre después de recorrer largos caminos, dado que el entorno dinámico y cambiante le fue planteando diferentes problemas que generaron nuevas respuestas, diferentes formas de resolución, diferentes habilidades que produjeron nuevos conocimientos”(p. 13)

Esto es, en el *conocimiento matemático escolar* distinguimos un aspecto *práctico* constituido por los problemas y su resolución, y otro *discursivo* formado por un sistema de reglas y justificaciones

Estos aspectos se presentan a los niños con el recurso de “conversaciones” – orales y/ o escritas-a fin de favorecer su aprendizaje en el contexto del aula. De

manera que en la escuela interactúan conocimientos matemáticos, valores, creencias y formas de relacionarse que se atraviesan constantemente, los cuales están prescriptos en los diseños curriculares jurisdiccionales.

Pero, ¿a través de qué situaciones los conceptos matemáticos adquieren sentido? ¿Qué condiciones deben reunir estas situaciones para que los niños puedan reconstruir sus aprendizajes?

2.3.-LA CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS

Al estudiar la psicogénesis del conocimiento matemático, como ya nos hemos referido en 2.1 de este apartado, son importantes los aportes de Piaget y Vigotsky en relación a cómo evolucionan las organizaciones sucesivas de un concepto, la acción como factor primordial del proceso, y el lenguaje como sistema de símbolos, aunque reconocemos que no los contextualizan en el entorno del contexto escolar.

Armendáriz, Azcárate y Deulofeu, (1993) manifiestan que investigadores como Vinner, (1983, 1989), Sfard (1991), Zimmerman (1991), Artige (1990), Vergnaud y Rico (1985); Vergnaud (1990, 1996, 2002) se ocuparon de los procesos cognitivos acerca de la construcción de conceptos. Los vincularon por ejemplo, con la noción de: imagen conceptual, visualización, esquema conceptual, definición conceptual; conceptos, concepción y teoría de los campos conceptuales.

Sin embargo, consideramos que los aspectos mencionados inicialmente son abordados ampliamente por Vergnaud. Este autor supone que un concepto no puede reducirse a una definición, sino que: *“Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemáticos, conduce a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto pone, por tanto, en juego el conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades, y el conjunto de los esquemas puestos en juego por los sujetos en estas situaciones”* (Vergnaud, 1990, p.7). O sea, considera el conjunto de situaciones¹⁴ que dicho concepto permite resolver y otorgar sentido al mismo.

¹⁴ Vergnaud se refiere a *situación* como un instrumento para detectar las dificultades conceptuales que manifiestan los niños.

Si bien el niño se desarrolla en un ámbito escolar, de la definición no se distingue si se refiere a un niño enfrentado a un problema o si considera que éste dialoga entre si con sus compañeros, llegando a acuerdos que quizás solos no hubieran arribado (Godino, 2001).

No obstante se desprenden algunas nociones particulares, por ejemplo: *invariantes operatorios*¹⁵ vinculados con la conducta de los niños respecto a las actividades propuestas, sus producciones -como ya anticipamos en el apartado 2.1.-, *calculo relacional*, acerca de las inferencias o deducciones que se establecen en alrededor de dicho concepto, de sus propiedades, y la relación entre *significado* y *significante*¹⁶. En otras palabras, sus representaciones, internas y externas respectivamente.

Las representaciones internas se refieren a la configuración mental del niño, la cual no es observable, sólo puede percibirse a través de sus representaciones externas, o sea, las acciones manifiestas en su comportamiento tales como las producciones escritas, las expresiones, los gráficos que pueden construir.

Entre ambos tipos de representaciones,- internas y externas- (Kaput, 1996) existen relaciones verticales u horizontales¹⁷ formando un sistema que permite relacionar el conocimiento cotidiano con el científico. Estos sistemas se modifican con el tiempo y permiten caracterizar y otorgar significatividad al aprendizaje.

Acordamos con Vergnaud (1996) cuando expresa que *las representaciones y las manifestaciones de los niños, sus modos de resolver tareas matemáticas, ponen de relieve, aunque puede ser de forma ingenua, conceptos matemáticos.* (p, 220)

El autor ha retomado estos aspectos del concepto piagetiano de esquema,

¹⁵ Nos referimos a *invariante operatorio* a las relaciones y procesos asociados al concepto y que resultan necesarios para formular inferencias o deducciones a partir del desarrollo de actividades. Así los *conceptos en acción* seleccionan y categorizar la información y los *teoremas en acción* permiten efectuar cálculos a partir de los datos y efectuar inferencias las cuales pueden ser verdaderas o falsas.

¹⁶ Se considera *significante/ significado* desde la lingüística y Puig (1997) manifiesta que Freudenthal, desde la semiótica se refiere a *expresión/contenido*

¹⁷ Se refiere a una relación vertical a la interpretación que realiza en niño en base a sus conocimientos previos y su relación con el medio físico y supone una relación horizontal a la que se establece entre distintas representaciones internas.

el cual le permite avanzar sin entrar en contradicción. En los esquemas no nos fijamos solamente en los procedimientos, los cuales son fácilmente observables, sino también en las relaciones, en las propiedades, es decir, en los teoremas o conocimientos en acto¹⁸ – reconocimiento de invariante operatorio como su generalización - los cuales se manifiestan a través de las representaciones.

Todo esto en miras a poder detectar los esquemas que cada uno de los niños vinculan cuando resuelven una tarea matemática, en particular la construcción del concepto de área.

Para detectar estas relaciones entre los esquemas del niño y el conocimiento matemático, desde una perspectiva cognitiva, consideramos el concepto de campo conceptual, como el conjunto de situaciones vinculadas a varios conceptos y diferentes esquemas de significantes conectados entre sí en una entramada red.

Percibimos a través de los conocimientos previos y en las diversas situaciones a implementar, dando cuenta del concepto de área a construir (significado) y los distintos invariantes operativos -conceptos y teoremas en acción- que coexisten en la situación.

Esta organización en campos conceptuales no se produce en el niño de forma ordenada, identificándose filiaciones y rupturas alrededor del concepto, logrando así, su madurez y aprendizaje durante largos períodos de tiempo (Barrantes, 2006).

En particular, para este trabajo consideramos el campo conceptual Área, en el cual podemos distinguir tanto nociones de la geometría como de las estructuras aditivas y multiplicativas. Respecto de la geometría, nos referimos a superficies planas, la distinción de sus formas, con respecto a estructuras aditivas, nos referimos a determinar el área de una superficie a través del conteo de otra superficie, considerada unidad y respecto a estructuras multiplicativas, consideramos en una superficie rectangular o reducible a dicha forma, sus dimensiones lineales y asociamos el producto de las mismas con el número total de unidades de superficie necesarias para pavimentarla totalmente. (Chamorro,

¹⁸ No son un concepto ni un teorema respectivamente, se los vincula con ciertas categorías del conocimiento como son: las proposiciones, las funciones proposiciones y los objeto-argumento

1996). Estas nociones permiten potenciar los procesos, las competencias y las representaciones simbólicas manifiestas, a través de las decisiones que toma el niño cuando evoluciona en sus aprendizajes alrededor dicho concepto.

Consideramos pertinente también tener en cuenta las nociones vertidas por Freudenthal (1983) quien manifiesta que los conceptos e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos¹⁹ del mundo, tanto matemáticos como de la realidad. Los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia y, a través de una nueva relación fenómeno/medios de organización, crea nuevos conceptos matemáticos, una y otra vez. Por ejemplo en nuestro caso, a través de la medición de la cantidad de superficie de las distintas figuras geométricas podemos organizar el mundo de los fenómenos de la magnitud “Área”, en vistas a la construcción de este concepto.

De esta forma Puig (1997) parafraseando a Freudenthal (1983) manifiesta que la fenomenología de un concepto matemático consiste en describir cuáles son los fenómenos para los que es medio de organización y qué relación tienen el concepto con esos fenómenos.

Dicho de otra manera, un concepto matemático sirve para organizar diferentes fenómenos que suceden en contextos diferentes. En cambio la definición de concepto que sostiene Vergnaud a la cual antes hemos hecho referencia, es considerada por Freudenthal como concepción (Puig, 1997,2001).

Si bien Freudenthal distingue distintos tipos de fenomenología- didáctica, genética e histórica- en particular, se refiere a *fenomenología didáctica* cuando se desenvuelve en el mundo de los niños y lo propuesto en las secuencias de enseñanza. La idea central es que los conceptos se manifiestan como procesos cognitivos en el contexto escolar y a ser aprendidos por los niños

Así pues será necesario conocer el fenómeno a ser organizado y enseñar a los niños sus medios de organización. En el próximo apartado, cuando efectuemos el tratamiento del concepto de área, retomaremos estos aspectos con mayor

¹⁹ El autor se refiere a “noumenon” como objeto de pensamiento y a “phainomenon” como fenómenos, es decir, cuando tenemos experiencia en ello. Puig (2001) que ha traducido algunos capítulos de su obra –capítulo 2: El método; capítulo 5: Fracciones y el capítulo 16: El lenguaje algebraico- y un artículo acerca del análisis fenomenológico- manifiesta que solamente se refiere a través de definiciones poco claras a dichos conceptos, en el capítulo “el método” por lo que considera abstenerse y referirse a término “fenómeno”.

detalle.

Consideramos importante manifestar que este autor no se refiere a la adquisición de los conceptos matemáticos sino a la constitución de objetos mentales²⁰, puesto que considera que éstos los preceden y resultan más convenientes para abordarlos en el nivel de enseñanza primario. Nosotros compartimos este aspecto de la constitución de objeto mental pero, para su tratamiento en este trabajo, nos referimos a él como construcción del concepto.

Como señalan Cole y Solé (1989):

“Los significados contruidos por los alumnos son siempre incompletos, o si se prefiere, perfeccionables, de tal manera que, a través de las reestructuraciones sucesivas que se producen en el transcurso de tantas otras situaciones de aprendizaje, estos significados se enriquecen y se complican progresivamente , con lo cual aumenta su valor explicativo y funcional”(p.17)

En base a ello, el diseño curricular de la provincia de provincia de Buenos Aires del 2001 y, con mayor énfasis, el vigente del 2008, manifiesta que, para la construcción de los conocimientos matemáticos, se intenta hacer explícitas sus relaciones, así como los modos de hacer y pensar propios del área.

Las consideraciones enunciadas nos impulsan, en este trabajo, a analizar el concepto como medio de organización de fenómenos, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades de esas acciones, sus vínculos, sus rupturas. Es decir, asumimos que un concepto- objeto mental- está constituido por un conjunto de situaciones que le otorgan significatividad, de invariantes operativos que permiten su tratamiento, y por tipos de representaciones (lenguaje, diagrama, etc.) que permiten interpretar y comunicar sus procesos y resultados. Esta caracterización denota sus concepciones implícitas y explícitas acerca del concepto matemático y constituyen “la historia individual” de su aprendizaje.

²⁰ Considera que *objeto mental* es la representación que el niño tienen en su mente y el *concepto* lo encontramos en la “propia” matemática. El proceso progresivo entre la relación fenómenos/medios de organización, transforma los objetos mentales en conceptos. Muestra de ello es la relación entre las razones de los lados de dos figuras semejantes y sus respectivas áreas. (Sáiz Roldán, 2003)

2.3.1.-CARACTERIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN PARA INDICAR LOS AVANCES COGNITIVOS ALREDEDOR DE UN CONCEPTO: EL MODELO DE PIRIE Y KIEREN

El análisis del proceso involucrado en la construcción de un concepto en particular tiene que ver con intentar responder a la pregunta ¿Qué comprenden y cómo logran, los niños ese concepto?

Para ello Pirie y Kieren (1994, 1999) desarrollaron un modelo teórico constructivista de valiosa información psico-pedagógica para el estudio del aprendizaje, denominado *la teoría dinámica para el crecimiento de la comprensión matemática* a efectos de observar y describir, entre otros, el proceso de comprensión de los niños alrededor de un concepto en particular²¹, aspecto fundamental a los fines de este trabajo.

Estos autores caracterizan el **crecimiento de la comprensión del conocimiento matemático** (personal)²² como un proceso dinámico en su totalidad y activo. Es decir, esta construcción implica un movimiento continuo y no lineal por las diferentes capas o formas de pensamiento

En otras palabras, la comprensión ocurre en la acción, implica un interjuego entre acciones específicas y conceptualizaciones más generales. Dicho proceso no es lineal, sino que se desplaza dinámicamente a través de ocho capas de acción superpuestas y dispuestas a partir de un punto en común.

Éstas se denominan desde la inclusión en todas ellas, Conocimiento Primitivo; y en ese orden, Confección de una imagen²³, Posesión de una imagen, Identificación de propiedades, Formalización, Observación; Estructuración e Invención, respectivamente.

Enunciamos, entonces, las capas desde las interiores hacia más exteriores; teniendo en cuenta que esta disposición no debe interpretarse como una hipótesis

²¹ Este método permite también estudiar en detalle la comprensión sobre distintos temas que se opera en un alumno en particular.

²² Se diferencia del *crecimiento de la comprensión colectiva* dirigida a tipos de acciones matemáticas compartidas por un grupo, a través de un proceso dinámico, interactivo y cambiante. Los acuerdos surgen del discurso y la interacción entre sus integrantes, no se atribuyen a ninguno de ellos en particular. (Martín, 2009).

²³ Considera *imagen* a cualquier representación mental, por ejemplo visual, y el sentido o significado personal que los niños le otorgan a las representaciones, por ejemplo, los diagramas.

lineal de crecimiento en la construcción de la comprensión matemática en los niños.

Otra noción importante en este modelo son los anillo dispuestos en forma intercalado entre dos capas diferentes, cuya función es transmitir la idea que va más allá de los límites, pues el conocimiento en una capa determinada no depende necesariamente de la comprensión de una capa interior, aunque al abordar otra actividad puede partir de ella.

Distinguimos, por lo tanto, los siguientes los anillos: *Producción y Posesión de la imagen*; *Posesión de la imagen* y *Percepción de propiedades* y *Percepción de propiedades y formalización*.

Asimismo, Pirie y Kieren (1994, 1999), Martín (2008, 2009) y Duzenly-Gokalp & Sharma , (2010) manifiestan, por un lado, que la comprensión en acción siempre conlleva al “*folding back*”. El proceso de *folding back* revela su naturaleza no lineal de comprender la matemática.

Sugiere, además, que un alumno cuando se enfrenta a un problema u obstáculo epistemológico en cualquier capa, volverá a una capa interior recordando una noción, combinando imágenes, acciones. Pero realiza este recorrido hacia atrás, de manera tal, que cuando regresa lo hace con una comprensión más profunda, y así va reconstruyendo nuevas imágenes.

Este camino, sin embargo, implica elaboración y crecimiento en las acciones de comprensión de un alumno con los otros y con el medio, en términos de las propias acciones- mentales y físicas- y no como producto de las mismas. De esta forma, durante el desarrollo de las distintas actividades se podrá, en alguna de ellas, retornar a capas interiores para revisar y re-trabajar la imagen solicitada.

En particular, en nuestro trabajo, consideramos el crecimiento de la comprensión de un concepto, como un proceso dinámico pues, surge a través del diálogo entre los integrantes de un grupo²⁴ cuando resuelven problemas alrededor

²⁴ Consideramos el grupo como contexto en el que se produce y favorece el crecimiento conceptual de cada una de las niñas. No lo consideramos grupo colaborativo según Martín (2009), quien entiende por tal el que arriba, a través de tareas diseñadas específicamente para dicho grupo, al crecimiento de comprensión individual de sus miembros, ni como grupo colectivo, que tiende a la construcción conceptual de un concepto a través de ideas y acciones compartidas por todos sus integrantes, siendo la comprensión colectiva un logro interaccional (Yackel, 2002). En nuestro

de la construcción de un concepto, en este caso el área. No es lineal, pues aunque en el gráfico las capas están dibujadas hacia afuera, el crecimiento de la comprensión se produce a través de un movimiento continuo hacia delante y hacia atrás a través de las distintas capas. Así la comprensión involucra un interjuego entre la acción de resolución de problemas y la construcción de significados asociados a los distintos indicadores enunciados.

Se trata de niñas que transitan el nivel de educación básica (primaria), por lo tanto, consideraremos la variación en la comprensión del concepto enfocando el análisis solamente a través de las siguientes cinco capas: *conocimiento matemático primitivo, producción y posesión de una imagen, percepción de propiedades y formalización*.

A los efectos de describir cómo cada una de las niñas construye dicho concepto y cuáles son las características de esa comprensión, cuando se implementa una determinada metodología de enseñanza, en este proceso recursivo, es menester destacar que el niño se desplaza por las diferentes capas y, en alguna de ellas, realiza *folding back*.

Esto es, cuando se atasca en su proceso de comprensión, puede retroceder hacia una capa interior, reconstruir o resignificar sobre su conocimiento disponible para regresar y, al desplazarse hacia delante, a las capas exteriores, alcanzar una comprensión matemática más profunda.

Nos interesa, entonces, el proceso que ocurre hasta arribar a una determinada capa y este proceso no se da linealmente. Sin embargo, ello no evita que recurramos a capas interiores para el aprendizaje de un nuevo concepto o el abordaje de una nueva actividad.

Redefinimos cada uno de los elementos- las capas y anillo - mencionados para este trabajo y asignamos el nombre que mejor denota el proceso respecto del concepto en particular. También, y a título ilustrativo expresamos, para cada uno de ellos, un ejemplo desde el análisis particular de una niña para una mejor ilustración: En cada una de las capas y anillos, la definición que proporcionamos

caso, las tareas son individuales, aunque, por la distribución del aula, se resuelven en cercanía de otros compañeros. Esta cercanía, y no la orientación de la actividad, es lo que propicia la interacción.

se considera como una inferencia que el investigador asume que el estudiante posee sobre la base de sus manifestaciones.

A.-Conocimiento Matemático Primitivo Supone todo lo que el niño sabe y lo que no, lo que puede hacer y lo que no, respecto de los conocimientos matemáticos, excepto el concepto a construir en este trabajo.

Accedemos a este conocimiento primitivo a través del *cuestionario sobre conocimientos matemáticos* que hemos implementado para que los niños completen.

B.-Producción de una imagen: Comienza a familiarizarse con el conocimiento en cuestión, para ello se basa en la visualización, acude a materiales didácticos, a un dibujo o verbalmente, con el objeto de construir distinguir, comparar u ordenar figuras entre otras de su colección. Efectúa estas distinciones para luego usarlas en nuevas circunstancias o en nuevos fines.

Así, para el:

Indicador 2.1.-Compara superficies por percepción visual.

En la actividad 3, se entrega una hoja con dibujos de distintos diseños y se les solicita que indiquen el que necesita la menor cantidad de tela. “Una niña responde: *la tres*, en tanto la maestra manifiesta *¿Cómo tan rápidamente me dicen que es la 3? ¿Cómo lo hicieron?* , la niña responde **Visualmente**”

-el *anillo Producción - Posesión de una imagen*, En algunos casos, acude a materiales didácticos o a un dibujo para construir, comparar, ordenar una o más figuras entre otras de su colección.

Por ejemplo para el:

Indicador 1.4: Representa mentalmente la composición de figuras.

En la actividad 2.b se les entrega tres figuras formadas con piezas del Tangram, y se les solicita que identifiquen las figuras que están formadas con las mismas piezas y verifiquen su afirmación. Se pretende, a través de esta actividad,

que los niños representen la composición de distintas figuras a fin de distinguir que figuras de distinta forma, pueden resultar, componiendo las mismas piezas. Para ello:

Mirta pasa al pizarrón y muestra cómo para las figuras 2 y 3 se utilizan las mismas cuatro fichas, cuadrado, triángulo chico, mediano y grande y verifica su afirmación

C.-Posesión de una imagen: Dispone de la construcción mental de la figura en función de su área, para comparar y/u ordenar con otras de su colección, sin tener, que disponer de materiales didácticos para su realización. Este objeto mental puede ser pensado por el niño y usado como conocimiento matemático.

Por ejemplo para el:

Indicador 4.2.-Elige una unidad adecuada.

En la actividad 4, se les presenta un dibujo con cuatro figuras de distinta forma, se les solicita que vean y expresen las que necesitan más cantidad de papel para realizarlas. Se pretende que los niños cuadriculen las mismas; y sin necesidad de realizar acciones empíricas, puedan decir y distinguir una unidad conveniente.

Muestra de ello es el procedimiento que realiza una niña: *Efectúa el cubrimiento de las superficies con cuadrados congruentes, lo que le permite, desde un aspecto numérico, distinguir que todas las superficies están cubiertas por “cuatro cuadraditos”, demuestra así que posee una imagen mental de una figura como unidad de medida para comparar otras.*

D.-Percepción de propiedades: Manipula y/o combina la imagen del concepto de área o la cantidad de magnitud, para predecir y registrar propiedades de las figuras. Por ejemplo, anticipa y registra acerca de equivalencia entre figuras, relación con el perímetro, dimensiones lineales para expresar su fórmula. Implica ser capaz de predecir y registrar en base a una situación en particular.

Por ejemplo para el:

Indicador 3.2: Reconoce que a mayor/igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/igual/menor perímetro de la misma.

En la actividad 6 bis, se les presenta el mismo dibujo que en la actividad 4, es decir cuatro figuras de distinta forma pero equivalentes y se les solicita bordearlas con un hilo y averiguar si utilizan la misma cantidad de hilo para cada una de ellas, con la intención de que comprueben que figuras equivalentes pueden o no, tener igual perímetro. Muestra de ello es la respuesta que brinda la niña: *“Ah!! Pero no importa, estas tienen además de equivalente el área, el perímetro y la otra no”*. Predice y registra así, la no correspondencia entre la relación área-perímetro.

- el anillo *Percepción de propiedades- Formalización*. Cuenta con una imagen formal en vistas a arribar a una definición.

Por ejemplo para el:

Indicador 3.5.- Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.

En la actividad 6bis la maestra pregunta si se puede construir una figura equivalente a las dadas y de 16 lados de perímetro, una niña responde: *Si!!*. *Pues serían cuadrados sueltos, unidos solamente por un vértice.*

E.-Formalización: Abstrae un método o cualidad común de una noción específica, en este caso, el concepto de área, al que le otorga funcionalidad.

Por ejemplo para el:

Indicador 4.5: Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud.

En la actividad 9 se solicita que averigüen el área de una figura con la utilización de distintas unidades y establezcan la relación entre ellas, a los efectos de promover el establecimiento de la dependencia entre el valor del área y la unidad seleccionada; así como también la relación inversa entre el número de unidades y el tamaño de ésta. Según lo observamos cuando una niña manifiesta *“El triangulo es la mitad de superficie del cuadrado entonces el resultado es el*

doble que si utilizo como unidad el cuadrado”.De esta forma distingue la propiedad enunciada anteriormente.

Por otra parte, las autoras disponen las capas enunciadas en un gráfico de elipses²⁵ con un punto en común en el margen izquierdo. En este estudio lo denominaremos *Gráfico de Comprensión*; pero adecuado a la cantidad de capas que hemos redefinido anteriormente y que asignamos con una letra.

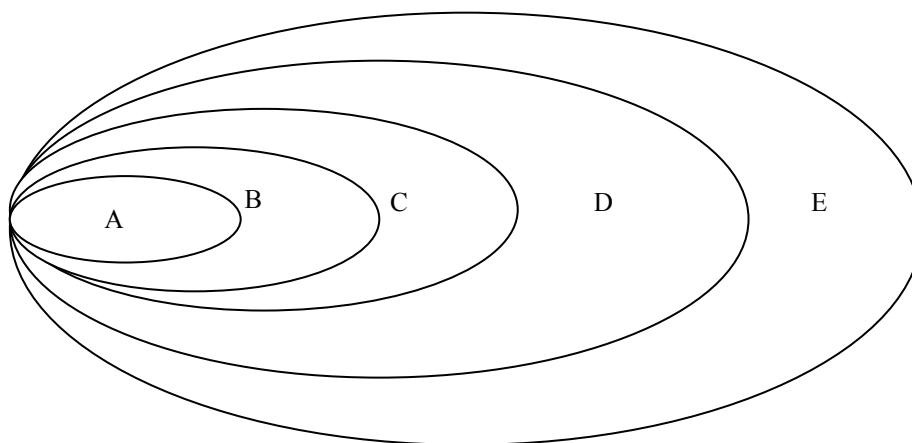


Grafico 1 Gráfico de Comprensión

A los efectos de operativizar las capas del modelo, en la siguiente tabla presentamos cómo define Pirie y Kieren las distintas capas y cómo hemos reformulado las mismas en este trabajo. Insistimos en que no se trata de una modificación del modelo, sino de una redefinición del mismo para, por un lado, adaptarla al concepto de área²⁶, objeto reestudio en este trabajo y, por otro lado, hacer patente la influencia de la etapa (primaria) en que los niños comienzan a interactuar con el concepto, etapa en la que, carece de sentido considerar las capas de observación, estructuración e invención.

<i>Capas y fronteras de Pirie- Kieren</i>	<i>Adaptación a nuestro trabajo</i>
<u>1.-Conocimiento Primitivo.</u> Lo que el investigador asume que el estudiante puede comprender inicialmente respecto de un conocimiento matemático	<u>A.-Conocimiento Matemático Primitivo:</u> Supone todo lo que el niño sabe y lo que no, lo que puede hacer y lo que no, respecto de los conocimientos

²⁵Las capas pueden disponerse de manera concéntrica u otro el punto en común, indistintamente, pero las autoras prefieren el gráfico que presentamos.

²⁶ La investigación que Pirie y Kieren(1994) realizaron sobre el crecimiento de la comprensión se centraba en el tema suma y resta de fracciones

particular.	matemáticos, excepto el concepto a construir en este trabajo
2.- <u>Confección de una imagen</u> : al alumno construye una imagen sobre un tema en particular. Los procesos intuitivos y las imágenes mentales basadas en la experiencia previa- denominado “ojo geométrico”, por Owens y Othred, (2006)- son considerados fundamentales para el aprendizaje.	<i>B.-Producción de una imagen</i> : Comienza a familiarizarse con el conocimiento en cuestión, para ello se basa en la visualización, acude a materiales didácticos, a un dibujo o verbalmente, para construir distinguir, comparar u ordenar figuras entre otras de su colección. Efectúa estas distinciones para luego usarlas en nuevas circunstancias o en nuevos fines.
Anillo: <u>Producción y Posesión de la imagen</u> : cuando tienen una imagen matemática y no necesita acciones para su confección	Anillo: <u>Producción - Posesión de una imagen</u> . En algunos casos acude a materiales didácticos o a un dibujo para construir, comparar, ordenar una o más figuras entre otras de su colección.
3.- <u>Posesión de una imagen</u> : puede manipular o combinar aspectos de las imágenes para construir propiedades relevantes de un contexto determinado	<i>C.-Posesión de una imagen</i> : Dispone de la construcción mental de la figura en función de su área, para comparar y/u ordenar con otras de su colección, sin tener para ello, que disponer de materiales didácticos. Este objeto mental puede ser pensado por el niño y usado como conocimiento matemático.
4.-. <u>Identificación de propiedades</u> : utilizar su imagen de un concepto a partir de sub-partes de la misma	<i>D.-Percepción de propiedades</i> : Manipula y/o combina la imagen del concepto de área o la cantidad de magnitud, para predecir y registrar propiedades de las figuras, por ejemplo, anticipa y registrar acerca de la equivalencia entre figuras, relación con el perímetro, dimensiones lineales para expresar su fórmula. Implica ser capaz de predecir y registrar en base a una situación en particular.
Anillo: <i>Percepción de propiedades y formalización</i> : el alumno tiene una imagen formal de una propiedad matemática	Anillo: <u>Percepción de propiedades- Formalización</u> . Cuenta con una imagen formal en vistas a arribar a una definición.
5.- <u>Formalización</u> : el alumno abstrae un método o cualidad común de la imagen, a partir de las propiedades advertidas.	<i>E.-Formalización</i> : Abstrae un método o cualidad común de una noción específica, en este caso, el concepto de área otorgando funcionalidad al mismo.
6.- <u>Observación</u> : Al formalizar puede	

reflexionar y expresar o enunciar teoremas.	
<u>7.-Estructuración:</u> El alumno detecta cómo un conjunto de teoremas están interrelacionados y solicita justificación a través de un argumento lógico, independiente de acciones algorítmicas.	
<u>8.-Invención.</u> Se separa de sus preconcepciones y es capaz de formular nuevas preguntas en vías a construir un nuevo concepto.	

Tabla 1: Redefinición de las capas de comprensión del concepto de área

Así enunciadas, estas capas van hacia fuera desde el conocimiento existente que el niño trae, pero el crecimiento en la construcción lo observamos a través de la curva que dibujamos y denominamos “trayectoria”. En algunas actividades, durante el proceso de resolución se observa también, cuando los niños realizan *folding back* y el trazado de esta trayectoria da muestra de ello.

La resolución de las distintas actividades permitirá contar con distintas trayectorias. Éstas, a su vez, favorecen la explicación detenida de lo que los alumnos “ven y manifiestan” en estas primeras aproximaciones a la formalización de algunas propiedades del concepto. También, nos permitirán observar las estructuras de pensamiento y su consistente reorganización.

Aproximaciones que, en otro nivel de enseñanza les permitirán acceder a las siguientes capas del modelo, que para este trabajo hemos descartado, y proveer la necesaria estructura axiomática en vista a completar la comprensión del concepto; y dejar al alumno con la libertad de alterar, y continuar construyendo el mismo.

2.3.2. CARACTERIZACIÓN DEL FOLDING BACK.

El proceso de comprensión, ya caracterizado como no lineal y dinámico, facilita la descripción del movimiento por las diferentes formas de pensamiento - sus diferentes capas - con la intención de revisar y detectar las comprensiones de las ideas que el niño va construyendo. De esta forma, cuando éste va resolviendo

una actividad puede ocurrir que deba regresar a una capa de comprensión interior, por el propio enunciado de la actividad.

Pero puede ocurrir que se encuentre imposibilitado de seguir, y para ello, retrocede en su proceso de comprensión a una capa interior con la finalidad de reconstruir o construir indicadores asociados a dicha capa, para regresar con una comprensión más profunda hacia los indicadores dispuestos en capas exteriores. Este proceso se denomina Folding Back.

En definitiva, distinguimos un Folding Back, cuando al regresar a una capa interior, visualizamos el apoyo de un indicador que ha de servir de sustento para recorrer las capas exteriores.

Durante el desarrollo de las actividades resultan significativas las diferentes acciones cognitivas, las interacciones -el dialogo -a través del cual dicha actividad se realiza en vistas a la construcción individual del concepto en cada niña.

En este complejo proceso, el *folding back* es crucial en el crecimiento dinámico de la comprensión matemática y resulta conveniente para su análisis considerar las siguientes categorías propuestas por Martín (2008), que facilitan la descripción del proceso en función de la *fuerza de la intervención y el resultado del mismo*. En las tablas 2 y 3 explicitamos con mayor detalle la definición de cada categoría.

¿Cuál es la fuente de la intervención?			
Maestra: El folding back es inducido por la maestra.	Tipo de Intervención: Se refiere a la acción –verbal o física-	Intencional: tiene como objetivo animar, de alguna forma, al niño a hacer folding back.	Explícita: Sugiere qué concepto o imagen el niño tiene que considerar para hacer folding back
Uno mismo: Cuando hace folding back solo y como resultado de su propio pensamiento y en respuesta al problema que ha percibido			Desenfocada: El niño es estimulado a referirse a su conocimiento primitivo, en lugar de brindarles una respuesta en particular. Es decir, <i>¿estas seguro?</i> <i>Trata pensando en otra forma....</i>
Compañero: El folding back es provocado por un compañero del grupo o del curso total. Materiales : El folding back es provocado por materiales curriculares o recursos (en este caso particular, tangram)			No intencional: llevan al niño a realizar folding back sin tener una intención directa.

Tabla 2: Caracterización del Folding Back: Fuente de la intervención

¿Cuál es el resultado del folding back? Se relaciona con lo que ocurre después e que el alumno se haya involucrado en un crecimiento de la comprensión a través de una de las formas del folding back.
Folding Back Efectivo: El niño es capaz de aplicar lo que ha comprendido a través de este proceso y vuelve a la capa exterior con una comprensión mas profunda, para abordar la resolución del problema. Este retorno a la capa exterior puede ser con o sin sugerencia externa.
Folding Back Ineficaz- A pesar de acudir a una capa más interna y que haya modificado su comprensión existente, no es capaz de aplicarlo al problema original. Por ejemplo, cuando se observa una intervención intencional invocativa de la maestra pero el folding back no ocurre-

Tabla 3: Caracterización del Folding Back: Su resultado

2.4.- EL CONCEPTO DE ÁREA:

Reflexionar acerca del concepto de área nos lleva a precisar algunas componentes ligadas a la comprensión de su aprendizaje y enseñanza. Para ello nos es de utilidad considerar, respecto de esta última: el conocimiento matemático y el conocimiento curricular en el nivel primario.

En cuanto al aprendizaje, los aportes que brindan las investigaciones respecto a la comprensión del desarrollo de dicha noción en los niños, sin que esta enunciación indique el orden de su tratamiento.

Consideramos también, otras dimensiones de reflexión sobre esta noción, los denominados organizadores curriculares (Rico, 1997a, 1997b, 2001), los cuales nos permiten fundamentar la unidad de aprendizaje a implementar en el capítulo siguiente.

2.4.1.- EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Con el objeto de proporcionar la construcción mental vinculada al concepto de área de una superficie, distinguimos dicha noción del número que la mide. Para ello integramos tres representaciones (Douady, 1996; Fioriti, 1998), la geométrica, el de las magnitudes y el numérico.

1) Desde la representación geométrica: nos referimos a una **superficie** como una región del plano limitada por una curva cerrada.

2) Desde la representación de las magnitudes:

Comenzamos precisando algunos “conceptos preliminares”:

a) Una superficie F se puede descomponer en $F_1, F_2, \dots, F_n$ superficies convexas, de manera que $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup \dots \cup F_n$ y cada F_i son no solapados con los restantes, es decir la intersección entre ellos es vacía.

b) Sean F y S dos superficies:

b.1.- Las superficies F y S son congruentes si existe un movimiento del

plano que transforma una en otra, por ejemplo, F en S.

b.2.- La congruencia de superficies goza de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Las superficies que cumplen con ambas condiciones se denominan *homogéneas*, luego, las superficies congruentes son homogéneas.

c) Dos superficies F y S son equivalentes si se puede transformar una en otra a través de una descomposición conveniente.

Es decir:

Dos superficies (F y S) son equivalentes, si partimos de cierto modo una superficie (F) en un número finito de partes y con ellas, las componemos de manera tal, que resulte superpuesta con la otra superficies (S). De esta forma decimos que las superficies equivalentes son homogéneas.

d) Magnitudes medibles

d.1.-El área es una magnitud que permite comparar superficies en función del espacio ocupado. Está asociada a la relación “tienen el mismo área que” es decir que: “la superficie S tiene el mismo área que F si es posible transformar una en otra a través de una descomposición conveniente”.

Si clasificamos las superficies de acuerdo a la relación de equivalencia enunciada, se obtienen subconjuntos (clases de equivalencia) a los que les corresponde una cantidad que se denomina “área”. De esta forma se puede apreciar que el área tal como la hemos definido no es una superficie, ni un número, es una característica de la superficie.

d.2.-Consideremos también la relación “tienen área menor o igual que” así como: “La superficie S tienen área menor o igual que la superficie F” si al descomponer la superficie S no es posible superponer totalmente sobre la otra (F). Entonces a través de esta relación siempre es posible comparar dos superficies.

De todas maneras es dable consignar una observación: las superficies no

son comparables en sí mismas, únicamente son comparables las áreas que le son asociadas.

d.3.-Con esta magnitud se pueden definir la adición, de manera que sea compatible²⁷ con las relaciones definidas precedentemente, de la siguiente manera:

Si se designa con p de área de la superficie S y con r área de la superficie F , entonces, $p + r$ es el área de la superficie que se obtienen componiendo ambas superficies ($S \cup F$) consecutivas y no solapadas.

Esta operación adición satisface las propiedades, conmutativa, asociativa y cancelativa.

Consideremos otra superficie Z equivalente con la superficie S , entonces el área de la superficie ($S \cup F$) consecutivas y no solapadas, es igual al área de la superficie de Z + el área de la superficie F .

d.4.- Se puede también definir el producto de un natural por el área: Sea p el área de una superficie S y n es un número natural, entonces $n \times p$ es el área de la superficie obtenida uniendo “ n ” veces la superficie S , en forma consecutiva y no solapada. Esta propiedad también se cumple si “ n ” es número real positivo.

Así:

✓ La familia de las superficies homogéneas con la relación de equivalencia establecida y la operación “+” como ley interna asociada a las propiedades enunciadas definen una **magnitud**.

Entonces:

Se denomina magnitud área, a la característica de las superficies,

²⁷ La noción de compatibilidad se vincula con la relación de equivalencia, en efecto, sea un conjunto muído de una relación de equivalencia y una ley de composición interna asociada al mismo. Decimos que la relación de equivalencia es compatible con dicha ley de composición interna cuando la composición de pares de elementos respectivamente equivalentes conduce a resultados equivalentes. En este caso particular podemos decir que la relación establecida “tiene la misma área que “es una relación de equivalencia y la adición definida es una ley de composición interna asociada a la magnitud Área. Decimos que la relación es compatible con la operación mencionada cuando al considerar el área de dos superficies de distintas clases, la suma de las áreas de dichas superficies coincide con el área de la superficie que resulta de la unión de dos superficies pertenecientes cada una de las clases de las superficies mencionada, con la condición que las superficies seleccionadas sean consecutivas y no solapadas.

susceptible de variación de una superficie en otra, que las hace igualables y sumables.

✓ Cuando en la familia de las superficies se ha establecido una relación de equivalencia “tienen igual área a ”, una relación de orden “tiene un área menor o igual que”, una ley interna “la operación adición” y una ley externa, “la operación multiplicación” compatibles con las relaciones mencionadas, se dice que **la magnitud es continua y medible.**

✓ Todas las superficies que pertenecen a una misma clase de equivalencia tienen la misma **cantidad de magnitud.**

✓ La **cantidad** de área es lo que tienen en común las superficies equivalentes entre sí, mientras que la **magnitud “área”** es la característica común a todas las superficies.

3) Desde la representación numérica: Medida del Área

La palabra medida tiene muchos significados, en matemática y en el marco de este trabajo entendemos por medición al proceso por medio del cual asignamos un número a elementos de una misma magnitud con el propósito de compararlos.

Existen distintas formas de medir, de manera directa o indirecta²⁸ En el caso particular del área y siendo ésta una magnitud continua²⁹, podemos efectuarlo por composición de aplicaciones³⁰ o en función de una unidad. Por las características de este trabajo, nos centramos en esta última.

A partir de la elección de una unidad, la medida es el número de unidades necesarias para recubrir exactamente y sin superposición la superficie.

Fijamos una unidad de área “ u ” y a la medida del área de una superficie le

²⁸ Nos referimos a la medida directa cuando se encuentra ausente un instrumento que nos permita efectuar la comparación y solamente podemos realizarla a través de estimaciones de tipo visual. En cambio decimos que la medida es indirecta cuando existe un instrumento que nos permita establecer dicha comparación.

²⁹ Denominamos magnitudes continuas cuando admitimos, por hipótesis, que se pueden dividir hasta llegar a obtener una cantidad tan pequeña como queramos.

³⁰ A través del isomorfismo entre el conjunto del área de superficies rectangulares y la medida de sus respectiva. Es decir, la magnitud área a través de la magnitud longitud, como medida indirecta.

asignamos un número por comparación con esa unidad “u”, es decir, establecemos una aplicación que notaremos

$$\text{med}_u(p) = r \quad \text{si y solo si} \quad p = r \cdot u$$

r es el número de veces que hay que iterar u para obtener p .

Entonces también podemos decir que:

Medir el área de las superficies: es establecer una correspondencia entre las áreas mencionadas y un número real positivo denominado medida, tal que a áreas iguales le corresponden medidas iguales, a áreas ordenadas le corresponden medidas ordenadas y a la medida de una suma de áreas le corresponden la suma de las medidas de cada una de las áreas.

- ✓ Si $p = q \Rightarrow \text{med}_u(p) = \text{med}_u(q)$
- ✓ Si $p < q \Rightarrow \text{med}_u(p) < \text{med}_u(q)$
- ✓ $\text{med}_u(p + q) = \text{med}_u(p) + \text{med}_u(q)$

Observación: *Cambio de unidad:*

Sea m la medida de p respecto de la unidad “u” y sea “r” otra unidad. Si pretendemos medir respecto de esta última unidad, es decir, medir p en función “r”.

$$\text{med}_r(p) = \text{med}_u(p) \cdot \text{med}_r(u)$$

2.4.2.- LA COMPRENSIÓN DEL DESARROLLO DEL CONCEPTO EN EL NIÑO DESDE LAS INVESTIGACIONES

Comprender el proceso de medición de la magnitud área en el niño, implica para comenzar, referirnos a los trabajos de Piaget y sus colaboradores, quienes instalaron las bases para posteriores investigaciones. En este sentido ellos establecieron que los niños tienen que haber llegado primero a comprender la invarianza de ciertas cualidades de los objetos vinculados con la conservación y la

transitividad³¹. Es decir:

- a) La conservación de superficies en transformaciones, de manera que no se alteren, al moverlos o disponiendo sus partes de otra forma.
- b) La transitividad de las relaciones a través del uso de superficies intermediarias.

En este proceso Dickson, Browns y Gibson (1991) retoman los estadios enunciados por Piaget acerca del desarrollo de la comprensión de medida en el niño, y enriquece su caracterización, en particular respecto de las magnitudes de longitud y área. A continuación enunciamos estas precisiones acerca del concepto área.

Iniciación del proceso: Se apoya en estimaciones visuales, por ejemplo, respecto de las superficies, señala que una figura es más pequeña, pues es más corta, considerando para ello dimensiones lineales. Le resulta imposible, en este momento, utilizar con significado cualquier instrumento de medida.

Manifestación acerca de la conservación y transitividad: Comienza a percibir la necesidad de utilizar un instrumento de medida intermedio, pero no concibe las superficies de distinta forma, de igual tamaño ni puede reconocerlas en distintas direcciones. Estas características se observan entre los seis y siete años.

Conservación operacional y transitividad: Distingue la medición de superficies desde el contexto bidimensional y es capaz de conservar la cantidad de área, por ejemplo, distinguir la conservación de las áreas en superficies equivalentes. Estas características se observan entre los siete y ocho años.

Concepción de la noción de unidad de medida más pequeña que el objeto que hay que medir: Capta la idea de medición a través de cubrir una superficie, a través del uso de una unidad más pequeña. Suele alcanzarlo entre los ocho y diez años.

Finalización del proceso de medir: alcanza el pensamiento operacional

³¹ Acordamos con Freudenthal cuando manifiesta que es “preciso indicar la transformación respecto de la cual se postula la conservación”.

formal y mide superficies. Estas características lo logran hacia los once o doce años.

La mayoría de las investigaciones realizadas a partir de 1970; parte de la década siguiente, están inspiradas en nociones psicológicas. Hughes, Bell & Roger (1975); Lovell (1986); Clements (1999, citado por Sáenz, 2001).

Todos ellos, realizaron investigaciones cuyo objetivo era analizar el desarrollo conceptual del área para poder así proponer sugerencias para su enseñanza, con lo que confirmaron que los estadios secuenciales propuestos por Piaget, en niños cuyas edades oscilaban entre 7 y 11 años, no guardaban ninguna relación con las edades sugeridas.

Hutton (1978, citado por Dickson, et.al. 1991), investiga la incidencia de la noción de conservación de área en la construcción del concepto y manifiesta que los niños que no lograban construir esa idea podrían tener problemas para deducir las fórmulas de superficies poligonales.

Wagman (1982, citado por Del Olmo, 1993) entrevistó en forma individual a niños de 8 años a 11 años con el propósito de estudiar el desarrollo de la medida del área de superficies poligonales desde un contexto matemático.

Sometió, para ello, a estudio los axiomas de área: aditividad, congruencia y unidad. Los resultados los subdividió en distintas etapas, y las describió en orden decreciente. En la primer etapa, los niños lograban aplicar satisfactoriamente todos los axiomas mencionados en cualquier problema; en la segunda etapa, los niños podían aplicar todos los axiomas, solamente en casos sencillos; en la tercera etapa, los niños podían aplicar solamente algunos de los axiomas y, por último, en la cuarta etapa, los niños tenían algunas nociones de conservación pero no la podían aplicar a todas los problemas.

Demostró, como resultado, que de los niños entrevistados, la mitad de los que tenían 8 años y la tercera parte de los que sus edades oscilaban entre los 10 y 11 años se encontraban en la etapa que no podían aplicar todos los axiomas; solamente la mitad de los que se encontraban entre 10 y 11 años podían aplicar todos los axiomas en problemas simples y necesitaban ayuda para los más complejos.

Los estudios posteriores, si bien reconocen la importancia del trabajo de Piaget, no tienen una orientación psicológica, en su gran mayoría son estudios puntuales. Así, Heraud (1987) focaliza su investigación en la noción de unidad de área con niños de alrededor de 8 años que no tenían experiencia en la temática. De manera individual, éstos debían cubrir diferentes superficies usando diversas unidades. Se observó que los mismos necesitaban interactuar con distintas unidades de medida, antes de considerar el cuadrado como unidad convencional, pues se visualizó una tendencia significativa a seleccionar la unidad en relación con la superficie a cubrir.

Desde una concepción constructivista, Heraud explicita los pasos a seguir para la construcción del concepto distribuidos en dos etapas, aunque lo particulariza para el caso del rectángulo:

En una primera etapa se observa:

- a) *Comprensión Intuitiva*: El niño se basa exclusivamente en la percepción visual para efectuar aproximaciones en cuanto a tamaño y comparación de superficies.
- b) *Comprensión procedimental*: Compara a través de la superposición, recorta, redistribuye las partes.
- c) *Abstracción Lógico-Física*: Noción de transformación de superficies pero no así su área.

En una segunda etapa se observa:

- a) *La comprensión procedimental lógico-matemática*: El niño halla el área de las superficies del rectángulo a través de:
 - ✓ La elección de unidades apropiadas y la iteración de las mismas. Para ello surge la conveniencia de utilizar todas ellas idénticas entre sí, en particular la de forma cuadrada.
 - ✓ *La expresión Área*: $B \times H$ en la cual vincula el número de unidades por fila y el número de unidades por columna ligados éstos, con la medida de longitud de los lados.
- b) *La abstracción lógico-matemática*: la medida de la superficie

permanece invariante ante transformaciones en otra forma. La relatividad del área según la unidad seleccionada y la relación inversa entre la medida y el tamaño de la unidad.

c) *La formalización.* La relación entre la expresión del área y el producto de longitudes de los lados del rectángulo, es decir, establecer la vinculación entre magnitudes bidimensionales y unidimensionales.

Manifiesta que el modelo sólo admite secuencialidad entre las componentes de la primera etapa, pero no prescribe linealidad en su desarrollo, pudiéndose abordar componentes de las dos etapas indistintamente.

Las investigaciones de Figueras & Waldegg (1984); Hershkowitz & Ben-Chaim (1990); desarrollan algunos aspectos sobre la determinación del área de una superficie. Sus estudios fueron realizados con niños de 11 años a 13 años, y detectaron que la conservación de área es más fácil de adquirir que la conservación de volumen.

Ellos, también examinaron el desempeño de los niños en la resolución de problemas, cuando se involucraban en su resolución, la conservación y la iteración de la unidad en la noción de área. Constataron, como ya había manifestado Heraud, que usaban una unidad de forma rectangular solamente cuando se trataba de superficies semejantes.

Perrin – Glorian & Duoady (1989) propuso actividades relacionadas con la conservación del área, los niños resolvieron las mismas, cortando en pedazos, reconstruyendo y usando cuadriculado.

En todos ellos se pudo observar ausencia en el recuento de unidades y en la utilización de procedimientos lineales. Kamii y Kysh (2006, citado por Spieser, 2006) corroboran lo expresado por Perrin-Glorian y Duoady al considerar que los niños para comprender el área como la cantidad de espacio de una superficie, la subdividen en partes, que pueden mover y reubicar, y recién en una etapa posterior, operar significativamente con unidades de forma cuadrangular.

Nunes, Light & Mason (1993), Outhred & Mitchelmore (2000), Lehrer, Jalow & Curtis (2003) y Bonotto (2003) consideran que en la escuela no se da importancia al acto de la medición, pues los niños tienden a identificar una

superficie con su área y el reducir el cálculo a una fórmula – a través de medidas lineales- es un obstáculo para su comprensión. Se consideraron-entonces- mediciones directas y se les solicitó a los niños realizar comparaciones de área y longitud en situaciones donde los procedimientos visuales o por superposición resultaban insuficientes.

Así, por ejemplo, consideraron dos grupos de nivel primario de 4° y 5° grado; y mientras en un grupo hallaban el área de una superficie rectangular aplicando las fórmulas, en el otro, se les presentaba un problema planteando la conveniencia de acudir al uso de una unidad de medida, cubriendo la superficie sin dejar huecos ni superposiciones, para luego contar.

Al volver a “mirar” dicho cubrimiento, distinguían organizaciones en filas y columnas, de modo que asociaban el área de la superficie como el producto de las dimensiones lineales de una matriz - la fórmula-.

Esta estrategia a través del tratamiento matricial de la multiplicación facilitó una reinterpretación de la operación y sus propiedades- conmutativa y asociativa-, por ejemplo, a través de una rotación de la matriz demostró la propiedad conmutativa.

El interés de los investigadores se focalizó en que los niños al calcular el área de una superficie rectangular relacionaran la unidad cuadrada, con las medidas lineales de sus lados - fórmula-. Así, uno de los procedimientos otorga sentido al otro y ambos, denotan su complementariedad.

De esta forma los niños al comparar distintas superficies, las medían, calculando el área de las mismas. Muchas veces la comparación visual resultaba insuficiente y utilizaban otra superficie que funcionaba como unidad, en general de forma cuadrangular, con la cual cubrían la superficie y por distintos métodos anticipaban la cantidad utilizada en dicho cubrimiento. Procedimiento que brindó significado a la fórmula.

Acerca de las estrategias implementadas por los niños y sus ideas erróneas, Zacharos (2006) llevó a cabo una investigación en la que participaron 106 niños dispuestos en dos grupos. A uno de ellos - el experimental - le impartieron clases acerca de la medición de superficies, focalizado en el método euclidiano de la

comparación de áreas y el principio de superposición³².

Se interesaron, también, por detectar si las distintas herramientas³³ de medición podían llevar a los grupos a adoptar distintas estrategias. Destacaron que el proceso de medición es más efectivo cuando la superficie a medir y otra considerada como una herramienta de medición, eran ambas de igual dimensión. Dichas herramientas “orientaron” las estrategias de solución que utilizaron los niños para medir. El otro grupo usaron fundamentalmente las fórmulas para medir el área de figuras.

En cuanto a los errores, los investigadores manifestaron que el uso temprano de las fórmulas en la medición de área llevaban a los niños a no interpretar el significado físico de la representación numérica de dicha noción. Muestra de ello es que los niños -del grupo experimental – denotaron mayor comprensión de este aspecto.

No obstante, los niños del grupo control tendieron a insistir en el uso de algunas estrategias, convirtiéndose algunas de ellas, en un obstáculo. Por ejemplo, cuando las figuras no eran, ni podían subdividirse en formas rectangulares, intentaban utilizar como estrategia las fórmulas. O bien pretendían calcular el área mediante la adición de sus dimensiones, base y altura respectivamente, influenciados por la noción de perímetro, focalizándose en el contorno de la figura, en lugar de “escanear” la misma, según otra superficie considerada como unidad y arribar al resultado a través del número total que la cubría. (Moreira y Contente (1997, citado por Owens & Outhred, 2006).

Así como también, “completar” las figuras para transformarlas en otras de forma rectangular. En general, estos inconvenientes se presentaban, pues- por un lado- la unidad de medición y la superficie a ser medida, según su concepción, tendrían que ser de la misma dimensión; y por otro lado, se observó que la aritmetización prematura de la medición de área no los condujo a construir con

³² El método euclidiano es conocido como “actividad axiomática” (Freudenthal, 1983; Wagman, 1982) pues para comprar dos superficies y probar que son equivalentes, subdivide una de ellas en partes y las reordena para obtener la otra. En cambio se refiere al principio de superposición cuando compara dos superficies aplicando una sobre otra.

³³ Una de ellas es el cuadrado o el centímetro cuadrado - cm^2 - considerado como unidad, pues los niños tienden a considerar cuando tienen que medir figuras de forma rectangular o cuadrangular (Heraud, 1987). Regla graduada y no graduada.

sentido dicha noción.

Estas dos últimas investigaciones, pretendieron detectar posibles diferencias en las estrategias de resolución en la medición de superficies; y arribaron a la conveniencia de abordar tratamientos cualitativos- enfoque geométrico- en este proceso, y evidenciar así, las propiedades físicas de la cantidad a ser medida por los niños.

Con respecto a la confusión entre área y perímetro Kouba (1988), De los Reyes (1999), Moyer (2001) y Owens & Outhred (2006) distinguieron dos tipos de dificultades, una de ellas, cuando confundían los nombres y la otra de orden conceptual, cuando no entendían el carácter bidimensional del área.

Afirmaban que los niños tenían gran dificultad para explicar e ilustrar las ideas acerca de dichos conceptos. En sus trabajos expresaban que si bien las medidas eran diferentes porque consideraban unidades de longitud y de área respectivamente, los niños confundían ambos conceptos. Por tanto, deberían ser contruidos a través de la resolución de problemas en contextos significativos que permitieran otorgar sentido a las representaciones y establecieran relaciones entre ambas.

Curry, Mitchelmore & Outhred (2006) basándose en investigaciones de Hart (1981); Carpenter (1975); Battista & Clements, (1998) y Outhred y Mitchelmore (2000), manifestaron que los niños, en el proceso de medir, a veces, dejaban huecos, no consideraban necesario utilizar unidades congruentes, ni de la misma dimensión. Mostraron dificultad al utilizar la propiedad transitiva en la relación entre el área de varias figuras. Estos aspectos le permitieron enunciar los siguientes principios:

1. La necesidad de unidades congruentes
2. La importancia de utilizar una unidad adecuada
3. La necesidad de usar la misma unidad al comparar objetos
4. La relación entre la unidad y la medida
5. La estructura de la iteración de la unidad

para afirmar que los niños comprendían el proceso de medición de superficies utilizando unidades no convencionales en forma iterada.

Respecto a los programas de instrucción, Owens & Outhred (2006) manifiestan que los primeros trabajos sobre medición se focalizaban en la enseñanza de las conversiones.

Recién en 1987 hubo una sección sobre “Medición” en la memoria de los contenidos abordados en el PME y en el 2003 hubo un plenario referido a *medición* en el cual se presentó un programa de enseñanza denominado Measure Up (MU).

En este programa, los niños comenzaban describiendo atributos físico de objetos, los cuales podían ser comparados y medidos a través del recuento de otro objeto denominado unidad. De manera que los niños de nivel primario, pudieron efectuar representaciones y diagramas.

Otro programa para escuelas primarias dependía del departamento de Educación y Afianzamiento (2003, 2004), y se focalizaba en un marco conceptual acerca de conocimientos y estrategias a implementar por los maestros al gestionar sus clases.

Las actividades prácticas sobre medición eran abiertas y fomentaban la discusión entre los niños. Se destacó la importancia de la bidimensionalidad de la unidad para la comprensión de la noción de área.

Ello ocurrió así dado que, cuando los maestros enfocaban el área a través de las fórmulas- del rectángulo- los niños consideraban las unidades lineales en lugar de considerar las bidimensionales.

Así, surgió como consecuencia que no relacionaban visualmente, la multiplicación entre la cantidad de cuadrados dispuesta en una hilera del rectángulo por la cantidad de filas (Simon & Blune, 1992; Othred & Michelmore, 2000, 2006), coincidiendo éstas, con las longitudes de sus lados.

Esta visión de relegar el tratamiento de las fórmulas al final del proceso de aprendizaje es compartido por Freudenthal (1983); Perrin- Glorian - Douady (1989, 1992); Hershkowitz et.al. (1990); Dickson (1991); Zacharos (2006), quienes manifiestan que, de otro modo, se reduce la comprensión del concepto al

uso de éstas de manera mecánica y sin sentido.

Los resultados expresados nos brindan las siguientes sugerencias para confeccionar la unidad de aprendizaje, de manera que les permitiera a los niños construir el mencionado concepto.

- ✓ Analizar los estadios propuestos por Piaget pero sin considerar las edades estimativas propuestas.
- ✓ Abordar el tratamiento de la conservación del área para poder deducir, en una etapa posterior, la deducción de las fórmulas.
- ✓ Introducir distintas unidades de medida, de variadas formas, antes de presentar la unidad cuadrada.
- ✓ Relegar el tratamiento de las fórmulas al finalizar el proceso, reconociendo el impacto que tiene el modelo lineal en la lógica del niño.
- ✓ Viabilizar la propuesta de Heraud porque puede extrapolarse a otras superficies poligonales, en particular, al cuadrado y al triángulo.
- ✓ Empezar la construcción del concepto a través de la resolución de problemas en contextos que le otorguen sentido.

Por último, los resultados de las investigaciones enunciadas, y de acuerdo especialmente con las manifestaciones de Freudenthal (1983), Heraud (1987), Corberán (1996), Owens & Outhred (2006) consideramos que la incomprensión existente en el concepto de área en el niño se manifiesta, a través de la imposibilidad de estimar los aspectos expuestos, los que dan cuenta de la pobreza manifiesta en el tratamiento de su enseñanza.

2.4.3.- EL CONOCIMIENTO ESCOLAR PRETENDIDO EN EL CURRÍCULO.

En cuanto a las primeras aproximaciones al concepto a construir y a la implementación de la unidad de aprendizaje en el aula,-desde la normativa del sistema educativo a nivel nacional vigente en ese momento,³⁴ se imparten los

³⁴ En diciembre de 2006 se aprobó la Ley de Educación Nacional N° 26.206, que define para el sistema educativo argentino una estructura basada en niveles: Educación Inicial, Educación

lineamientos que cada una de las provincias deben brindar y que se explicitan en el documento denominado “Los Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica (EGB) (1995). En el bloque 5 denominado “Mediciones”, en particular, se expresan aquellos aspectos relacionados con la magnitud AREA:

“En este bloque convergen naturalmente el número, la geometría y el mundo físico. Desde el contexto de las magnitudes se hace necesario que el alumno y la alumna desvinculen la magnitud a considerar de otros datos perceptuales que los confunden, por ejemplo;...el área.(...). Comprender la medida implica comprender el proceso de medir, la inexactitud de los resultados, el concepto de error de medición y a qué puede ser atribuible, y la importancia en la selección de la unidad y del instrumento adecuado para lograr la precisión requerida por la situación planteada,(...)”(p 84)

En base a estos lineamientos, la Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires formula el diseño curricular³⁵ de la Educación General Básica³⁶ (2001). En él se explicitan las expectativas de logro al finalizar cada ciclo y los contenidos³⁷ correspondientes. En particular, los que respecta al tema que nos ocupa en este trabajo, son los siguientes:

Expectativas de logro correspondientes al segundo ciclo (4º, 5º y 6º años):

✓ Interpretación, creación y resolución de situaciones problemáticas

Primaria; Educación Secundaria y Educación Superior. De esta manera, toda referencia al 2º ciclo de EGB debe ser entendida como 4º, 5º y 6º años de escolaridad primaria.

³⁵ Brinda información sobre *qué enseñar* – en cuanto a contenidos y objetivos – *cuándo enseñar* – la organización y secuenciación de contenidos- *cómo enseñar*- actividades a implementar- *qué, cuándo y cómo evaluar* (Rico,1997 a;1997,b). En particular el diseño de la provincia de Buenos Aires desarrolla cada uno de ellos con distinto profundidad, pues no brinda respuestas a *cómo enseñar*.

³⁶ Este diseño se caracteriza por ser *abierto* pues son los docentes quienes interpretan y dan forma a las intenciones formuladas y en situación de enseñanza y de aprendizaje posibilitan su concreción, *flexible* pues se reelabora y ajusta a través de evaluaciones periódicas y *viable* por que tiene en cuenta la institución y su contexto.

A partir del año 2008 se renueva el diseño curricular de nivel primario y si bien reconoce la característica *flexible* y *viable* anterior, plantea una propuesta *prescriptiva*, basada en la documentación escrita y la tradición oral curricular instalada en las escuelas. No solo especifica los contenidos a desarrollar en cada año sino también orientaciones comunes relacionadas con la enseñanza- ejemplos concretos de situaciones de enseñanza- y para la organización de la clase. Orienta claramente al docente sobre *el qué, el cómo y el para qué* de la enseñanza del contenido planteado. Consideran que el diseño se dirige a todas las escuelas de la provincia de Buenos Aires y debe ofrecer los lineamientos comunes que garanticen el derecho de los niños a acceder a los saberes socialmente reconocidos como significativos.

³⁷ El diseño no se refiere al conocimiento escolar sino a los contenidos.

usando unidades del SIMELA.³⁸

- ✓ Reconocimiento de la inexactitud de las mediciones, valorando la estimación y la búsqueda del grado de precisión requerido por la situación, interesándose por crear y utilizar los instrumentos adecuados a la magnitud a medir.
- ✓ Interpretación y cálculo de perímetros y áreas de figuras geométricas, resolviendo problemas mediante la construcción y aplicación de fórmulas y otras estrategias. (tomo I, p. 70)

Contenidos correspondiente al segundo ciclo (4°, 5° y 6° años):

- ✓ Área: Concepto. Unidades. Equivalencias. Área de los polígonos más comunes. Equivalencia de figuras.
- ✓ La medición de superficies mediante técnicas (descomposición en figuras más simples, aplicación de fórmulas).
- ✓ La construcción de las fórmulas y su uso para el cálculo de perímetros y áreas de triángulos, de cuadriláteros (rectángulo, cuadrado, paralelogramo).
- ✓ La interpretación de las relaciones entre los datos y la incógnita en situaciones problemáticas sobre perímetros y/o superficies presentadas en forma oral, escrita, gráfica, concreta o simbólica.
- ✓ Situaciones problemáticas. Aplicación de estrategias de resolución para hallar perímetros de figuras simples y/o combinadas.
- ✓ Resolución de problemas de perímetro, superficies y/o combinados con aplicación de propiedades de las distintas figuras.
- ✓ Estimación de áreas.
- ✓ Medición con selección de la unidad adecuada a la cantidad.
- ✓ Formulación de conjeturas y generalizaciones a partir de la observación, la experiencia y la intuición (tomo II, p 237-238).

³⁸ Se refiere al Sistema Métrico Legal Argentino, el cual adopta las mismas unidades, múltiplos y submúltiplos del Sistema Internacional (SI). Establecido en Argentina como único sistema de unidades de uso, en 1972.

Esta enunciación no prescribe linealidad para su tratamiento, por ende, cada escuela, a través de prácticas institucionales, pedagógicas y didácticas, colectivamente construidas y consensuadas, especifican y delimitan los contenidos a desarrollar en cada uno de los años. En la escuela de Educación General Básica, donde se implementó la propuesta consideran además, los aportes de un documento³⁹ del Programa de Evaluación de la Calidad Educativa de la Provincia de Buenos Aires (2001), estipulando las siguientes dimensiones del contenido – magnitud Área- a desarrollar en quinto año: las estructuras conceptuales, los procedimientos de trabajo y las componentes actitudinales.

A) Estructuras Conceptuales

- ✓ Superficie de figuras planas.
- ✓ Conservación del área de una figura plana.
- ✓ Figuras equivalentes.
- ✓ Cantidad de superficie: Área
- ✓ Fórmulas para el cálculo de áreas.

B) Procedimientos de Trabajo.

- ✓ Identificación de figuras equivalentes y comparación por superposición, descomposición –composición.
- ✓ Medición de superficies por recubrimiento.
- ✓ Deducción de las fórmulas para el cálculo de determinadas superficies.
- ✓ Resolución de problemas aplicando diversas estrategias.

C) Componentes Actitudinales

- ✓ Confianza en las propias capacidades para resolver problemas.
- Investigación conjunta y no competitiva.

³⁹ “Revisando mitos. Qué cambiar en el área de matemática” se refieren a las dimensión *Estructuras conceptuales*, es decir a los datos, concepto y redes de conceptos matemáticos; *Procesos cognitivos*, a los procesos de razonamiento y comunicación matemática; *Procedimientos de trabajo*, a las técnicas y estrategias y *Componentes actitudinales*, a los intereses, las formas de comportamiento y la interacción con sus pares y el maestro, que es posible promover y fortalecer desde el área de matemática

- ✓ Valoración de la importancia de las mediciones y estimaciones en la vida cotidiana.
- ✓ Interés por conocer las estrategias implementadas por sus compañeros para el cálculo de áreas y de perímetros.

Los contenidos vertidos y el análisis de la comprensión del concepto de área en el niño son algunos de los aspectos a considerar para la confección de la secuencia de aprendizaje que propusimos.

2.4.4.-EL CONOCIMIENTO ESCOLAR DESEABLE EN ESTE TRABAJO

La construcción de la noción del área de una superficie es un proceso continuo que requiere el desarrollo de: las mediciones perceptivas, basadas en impresiones sensoriales o en la superficie ocupada por una figura en relación con otras figuras, el número de unidades que conforman la figura, una función de medida, una integral, etc.

En cada caso, las superficies que admiten ser medidas, las reglas empleadas, las comparaciones y el cálculo del área son diferentes. Al considerar estos aspectos, comenzamos y abordamos la estructura conceptual⁴⁰ (Rico, 1997a, 1997b, 2001, Gómez, 2007) de la medición de área.

Como resultado de las investigaciones a las que nos hemos referido en el apartado 2.4.2.- y las sugerencias enunciadas, resulta pertinente explicitar también aquellas tendencias que pueden actuar como obstáculos para la construcción del concepto que nos ocupa en este trabajo y que se vinculan de manera estrecha con el conocimiento escolar, denominados contenidos en el diseño de la provincia. En función de ello, por un lado, formulamos un conjunto de categorías, las cuales nos brindan información acerca de la construcción del concepto y, por otro lado, efectuamos una caracterización de la unidad de aprendizaje.

⁴⁰ La *estructura conceptual* de un contenido en particular incluye la relación entre conceptos y procedimientos.

2.4.4.1. CATEGORIZACIÓN DEL CONCEPTO

Las categorías que enunciamos han surgido, a partir de la caracterización que formulamos acerca de la construcción de conceptos en el apartado 2.3. y los resultados de las investigaciones referidas en el apartado 2.4.2, las cuales nos brindan información acerca de orientaciones que facilitan y, en algunos casos, obstaculizan el proceso, sino también, y además, por el propio proceso de análisis. En función de ello enunciamos cada una de ellas:

1.- Precisar que lo secuenciable es la construcción del concepto y esta construcción no depende de un solo contenido, sino también de las diferentes relaciones que se establecen con otros contenidos.

2.- Proponer actividades que permitan identificar equivalencia entre distintas unidades de medida, sin adentrarnos en las unidades del Sistema Métrico Decimal, pues si bien es relevante su uso social, el pasaje de una a otra apela a las características del sistema de numeración, más precisamente, a la multiplicación y división por la unidad seguida de ceros y al reconocimiento de las propiedades de la proporcionalidad.

Según lo expresado en el apartado 2.4.1, la mayoría de las propiedades enunciadas se vinculan con la conservación del área de una superficie cuando es sometida a transformaciones. Pero este aspecto no es evidente para los niños y es necesario que se conviertan en objeto de aprendizaje.

Así los niños comienzan a incursionar en este aspecto a través de la percepción, es decir el resultado de una serie de fases de procesamiento que ocurren entre la recepción de un estímulo visual y el logro de un precepto (Alsina y Burgués, 1992). En función de ello formulamos las siguientes categorías:

✓ **Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja.**

✓ **Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.**

De esta forma, formulamos diversos procedimientos que permiten

comparar y medir áreas de superficies planas.

3.-Analizar las variables que producen confusión entre los conceptos de área y perímetro. En el país, los informes acerca de los resultados de la evaluación de calidad realizados a alumnos de 7º año en las escuelas de Educación General Básica (2004) arribaron a idénticos resultados formulados en el apartado anterior. Estos señalan gran confusión entre perímetro y área; pero desestiman que el tiempo destinado al tratamiento de la medida sea insuficiente, y argumentan que el enfoque es inadecuado, pues como ya hemos manifestando, se invierte mucho tiempo en tareas de conversión de una unidad a otra en desmedro de actividades de manipulación y exploración, que permiten resignificar conceptualmente las magnitudes involucradas. En vista de ello, recomiendan el abordaje en simultáneo de ambos conceptos, la resolución de actividades de cálculo de área, a través de pavimentación y/o descomposición y, fundamentalmente, aplazar lo más posible el tratamiento de las fórmulas.

Compartimos estas sugerencias y establecemos el tratamiento explícito de la vinculación entre el área y el perímetro en forma más temprana⁴¹, concretamente en 5º año. También consideramos que el tratamiento de las fórmulas en la secuencia ocupe una última instancia porque el cálculo, a partir de dimensiones lineales, esconde la relación entre magnitudes de distinta naturaleza: perímetro -dimensión lineal- y Área, -dimensión bidimensional-. Así, podemos formular las siguientes categorías.

- ✓ **Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro.**
- ✓ **Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo, triángulo como camino más económico.**

4.- El hecho que el niño distinga que la medida del área de una superficie puede tener asociados distintos números, resultados ellos, de considerar distintas unidades de medida, es primordial para comprender el significado de las mismas, conservar la cantidad expresándola en forma diferente (las reducciones); y por ende la función de medir.

⁴¹ En el Diseño Curricula Institucional (DCI) de la escuela EGB N°2, el tratamiento de ese tema figura en 6to año.

Subrayamos la importancia de que los conocimientos que los niños aprenden han de tener sentido para ellos. Charnay (1994) manifiesta que la significación de un conocimiento debe considerarse desde un nivel externo cuando nos preguntamos ¿Cuál es el campo de utilización de ese conocimiento? ¿Cuáles son los problemas que dicho conocimiento permite resolver? ¿Cuáles son los problemas para los que este conocimiento no es suficiente? A un nivel interno cuando nos preguntamos ¿Cómo y por qué funcionan esa fórmula matemática? ¿Cuáles son sus propiedades, cuales las reglas?

Con respecto a la funcionalidad de su aprendizaje, coincidimos con Perkins (1997) cuando afirma que existe una diferencia entre tener cierta información en el archivo de la memoria y poder acceder a él cuando resulta imprescindible; así como disponer de una habilidad y saber cómo utilizarla en contextos similares.

Estas características y la concepción de área asumida, nos permiten enunciar, estas otras dos categorías.

- ✓ **Conceptualización del área como medida de cubrimiento.**
- ✓ **Significatividad y funcionalidad del concepto.**

Estas categorías no prescriben linealidad en su desarrollo, en tanto se van construyendo en forma paulatina, durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje propuesta en la unidad didáctica correspondiente. Las mismas constituyen un instrumento de análisis y las presentamos especialmente, en el capítulo siguiente, apartado 3.6.1.

2.4.4.2. FUNDAMENTACIÓN DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

Rico⁴² (1997a, 2001), a efectos de programar la unidad de aprendizaje y considerando el contexto en el cual se implementa, enuncia algunas dimensiones de reflexión sobre el contenido matemático.

⁴² En un principio y en función del currículo a nivel educativo, propone solamente cuatro componentes- objetivos, contenidos, metodología y evaluación- obviando el contexto en el cual se implementa

A estas dimensiones las denomina *organizadores curriculares* refiriéndose a “*aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas*” (p.45.), concretándose en: Evolución histórica del concepto; Fenomenología; Sistema de representación; Errores y dificultades; Materiales y recursos.

En el caso de considerar un contenido en particular, como el que nos ocupa- la magnitud: área-, Gómez (2007) y Lupiáñez (2009) incluyen estos organizadores en un procedimiento que denominan Análisis Didáctico⁴³.

Estos organizadores ofrecen un espacio de reflexión que muestra el proceso de construcción del conocimiento y los criterios que permiten abordar su complejidad.

En los apartados anteriores, nos hemos referido al conocimiento matemático – disciplinar- y al curricular en base a documentos ministeriales del sistema educativo argentino – nacional y provincial- y las investigaciones realizadas en la cual muchas de ellas, muestran los errores y dificultades detectados en el aprendizaje del concepto.

No obstante, en este apartado, deseamos explicitar los múltiples significados del concepto en el contexto escolar. Es decir, su evolución histórica, la fenomenología de los conocimientos implicados, la diversidad de representaciones de la noción, en vista a formular conjeturas acerca de los posibles caminos por los que se puede desarrollar su aprendizaje. Los materiales y los recursos los trataremos en el próximo capítulo cuando caractericemos esta unidad de aprendizaje.

Organizador Curricular: Evolución histórica del concepto de área

Este organizador se refiere al aspecto epistemológico del concepto dando cuenta de la génesis del mismo y explicita aquellos aspectos que puedan servir

⁴³ Este análisis se estructura en base a: a) *Análisis de contenido*: revisión de los documentos curriculares, identificación y organización de los múltiples significados del concepto a abordar; b) *Análisis cognitivo*: formula hipótesis acerca de cómo los niños progresan en la construcción del concepto cuando resuelvan las actividades propuestas para su aprendizaje.; c) *Análisis de instrucción*: Diseño y selección de las actividades que componen la secuencia de aprendizaje y d) *Análisis de actuación*: determinación de las capacidades que los niños han desarrollado y las dificultades a las que se han enfrentado.

para construir conceptos más complejos, según podemos observar cuando Anacona (2003) afirma “*un estudio histórico-epistemológico da cuenta de la génesis y consolidación de un objeto matemático en el marco de unas condiciones socioculturales*” (p.42).

Para efectuar esta reseña consideramos los aportes realizados por Del Olmo, Moreno y Gil (1993) y nos circunscribimos especialmente a los aspectos de la noción abordados en el nivel primario.

El origen histórico de la noción de área surgió ante la necesidad de comparar objetos. En principio, dicha comparación se efectuaba directamente; pero, a medida que las transacciones comerciales resultaron más complejas, las comparaciones se efectuaban utilizando objetos intermedios que funcionaban como unidad.

Así, la unidad era parte del cuerpo (periodo antropométrico), luego se asoció con objetos realizados por el hombre (período ergométrico), finalmente, los integrantes de la comunidad se vieron obligados a fijar una unidad común (período convencional).

Las matemáticas babilónicas, egipcias y chinas se desarrollaron en torno a la resolución de problemas reales. Se han encontrado en Babilonia tablillas con grupos de problemas. En relación al concepto de área, conocían el área del triángulo, de los trapecios y el valor aproximado del círculo. En los papiros encontrados en Egipto, aparecen problemas relacionados con el cálculo de superficies de distintas porciones de tierra y una muy buena aproximación a la cuadratura del círculo.

En China, en el primer capítulo de la colección “*Nueve capítulos sobre el arte matemático*”⁴⁴ escrita durante el período Han entre 226 a. de C. y 221 a. de C, se encuentran reglas para el cálculo del área del rectángulo, triángulos, trapecios, círculos y segmentos circulares.

En cambio en Grecia – siglo V a de C- surgen problemas geométricos-sistemáticos, ordenados de manera lógica- por ejemplo, los relacionados con la

⁴⁴ obra que ejerció influencia sobre los matemáticos chinos, compuesta por 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, ingeniería, impuestos, calculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos.

cuadratura del círculo⁴⁵. Los matemáticos griegos realizaron numerosos aportes al concepto de área, por ejemplo la idea de inscribir y circunscribir figuras rectilíneas obteniendo una mejor aproximación al cálculo del área de superficies no poligonales (método de exahusición- Arquímedes). En la obra de Euclides ‘Los Elementos’, se aplica este método para determinar la proporcionalidad entre círculos y cuadrados en función de su diámetro, utilizando en su construcción regla y compás.

De este modo se logró establecer la equivalencia entre el área de figuras diferentes sin apelar a una asignación numérica, conllevando a ampliar la noción que se tiene sobre la medida de superficie. Este aspecto se tuvo en cuenta al momento de diseñar las actividades que compongan la unidad de aprendizaje.

Organizador Curricular Fenomenología de los conocimientos implicados

El análisis fenomenológico de un concepto describe y explicita los fenómenos para los que es medio de organización y manifiesta la relación entre dicho concepto y esos fenómenos mostrando de qué manera actúa sobre ellos y de qué poder los dota. (Puig, 1997).

En el apartado 2.3 hemos manifestado que Freudenthal (1983) se refiere más precisamente al objeto mental⁴⁶, pues considera que en la etapa de educación obligatoria y, considerando el concepto que nos ocupa, deben primar el estudio de aquellos procedimientos que permitan medir y comparar el área de superficies antes que pretender construir el concepto exclusivamente matemático. Aunque compartimos sus sugerencias, en el marco de este trabajo, nos referiremos al “concepto” pero consideramos para su construcción los aspectos que el autor propone como objeto mental, en relación con los fenómenos para lo que es un medio de organización.

En particular, los conceptos desde esta fenomenología se tratan como procesos cognitivos que, situados en el contexto educativo, permiten organizar su

⁴⁵ Encontrar la dimensión del lado de un cuadrado equivalente con un círculo conocido su radio o su diámetro.

⁴⁶ Pues considera que éste es la representación mental que tienen el niño, es solo una forma de referirnos al concepto, el que está en la matemática como disciplina.

enseñanza. Los fenómenos organizados para el concepto de área son variados y pueden construir objetos mentales diferentes según el campo de fenómenos que se elija para incursionar en su enseñanza.

Por ejemplo, las figuras se pueden comparar respecto del área directamente, cuando consideramos la superficie ocupada por una figura en relación con otra, o indirectamente, después de transformaciones de cortar y pegar o bien midiéndolas utilizando para ello otra figura que funciona como unidad⁴⁷. Entonces en cada caso, las superficies que admiten ser medidas, las comparaciones y el cálculo del área son diferentes.

Todos estos aspectos son los que tenemos en cuenta cuando intentamos confeccionar la secuencia y ello lo podemos advertir en la tabla 4

⁴⁷ En otro nivel educativo también lo consideramos como una función de medida, como una integral,

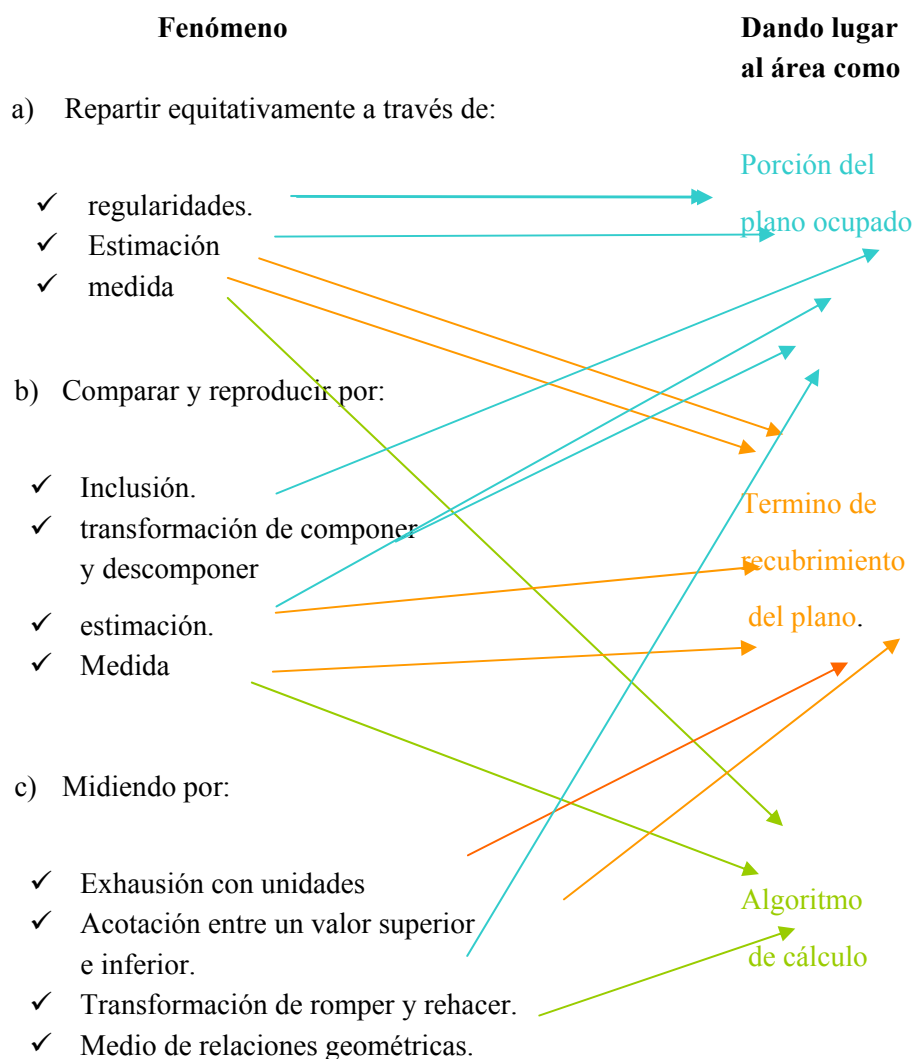


Tabla 4: Los fenómenos como medio de organización.

La lectura de la tabla 4 plantea el tratamiento de la noción de área en relación con actividades asociadas y da lugar a distintos aspectos de esta noción. Por ejemplo, actividades vinculadas con:

a) la repartición equitativa de un objeto, aprovechando regularidades, por estimación o medición.

b) la comparación entre dos o más superficies, la reproducción de una superficie en otra de distinta forma pero de igual área- conservación del área-. Para ello pueden resolverse a través de la inclusión, transformación, estimación o medición.

c) la medida, ya sea para repartir, conservar, comparar. Implica un proceso de exhaustión, acotación, transformación o relaciones geométricas en general.

Organizador curricular: Diversidad de representaciones de la noción

Acordamos con Perrin Glorían (1996) y partimos del ***área como una magnitud autónoma de los objetos que asumen distintas formas geométricas, las cuales pueden ser medidas a través de unidades, otorgándole así un número.*** Diferenciamos así, la superficie del área y de la medida de ésta, asignando a estos términos significados diferentes.

Nos referimos al término representación como “*las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características más relevantes*” (Rico, 2001). Los aspectos mencionados y la posibilidad de enunciar dicho concepto desde representaciones geométricas, gráficas y numéricas nos llevan a considerar un tratamiento cualitativo y cuantitativo del mismo a efectos de construir su sentido.

a.-El *tratamiento cualitativo* se caracteriza por utilizar procedimientos geométricos, estrechamente vinculados con las representaciones geométricas y gráficas, los cuales permiten comparar el área sin necesidad de recurrir a un número y analizar las variaciones que puede experimentar con respecto a la forma y al perímetro, cuando la superficie se somete a transformaciones.

Estos aspectos, fundamentales para percibir las cualidad de lo que se va a medir; unido al análisis de los resultados de investigaciones relacionadas con el concepto (que hemos arribado en el apartado 2.4.2) nos permiten anticipar algunas indicaciones a tener en cuenta en el abordaje de la secuencia de aprendizaje.

Los problemas que la componen se basan bien en comparación directa, a través de la percepción visual, mediante la manipulación de materiales estructurados o bien en la comparación indirecta, abarcando descomposiciones convenientes, a fin de permitir comparaciones que, en un principio, no se manifiestan visibles. Estos aspectos ajustan y delimitan los conocimientos a desarrollar en el marco de este trabajo.

Así, desde este tratamiento, se pretendió efectuar las sucesivas

aproximaciones al concepto de área independientemente de la medida, mediante la inclusión en la secuencia de problemas que permitan:

- ✓ *Reconocer figuras sin realizar ensayos manipulativos*
- ✓ *Efectuar las anticipaciones convenientes para distinguir superficies de igual área – equivalentes – dibujadas en papel liso.*
- ✓ *Diferenciar las nociones de área y perímetro sin recurrir, para ello, a la medida.*

Estos problemas se relacionan con las siguientes categorías anteriormente propuestas:

- ✓ **Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja.**
- ✓ **Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.**
- ✓ **Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro.**

b.-El *tratamiento cuantitativo* se caracteriza por utilizar procedimientos numéricos y, por lo tanto permite asignar un número a la medida del área de una superficie - marco numérico- con el objeto de cuantificarla. Este número resulta de la comparación de la superficie con otra considerada como unidad. Desde este tratamiento, la comprensión de la unidad de medida resulta un aspecto primordial para la comprensión del concepto de área. Nos permite, así, observar el área desde un carácter bidimensional.

Por un lado, se plantean a los niños situaciones en las que pueden realizar la medida del área a través de distintas unidades y establecer la relación inversa entre el tamaño de la unidad y el número resultante de la medida. Y, por otro lado, observamos con atención las posibles confusiones que pueden surgir respecto a la unidad de área y de longitud para calcular el perímetro, sobre los obstáculos que presentan su tratamiento los siguientes autores: Kouba, (1988); Perrin-Glorian y Douady, (1989; 1992); De los Reyes (1999); Moyer (2001); Owens (2006) y la Dirección de Calidad de Educación de la Provincia de Buenos

Aires (2004). En particular, aquellos que se refieren a la disociación de ambos conceptos a partir de la variación y/o conservación del área y/o perímetros cuando uno de ellos es sometido a transformaciones.

Los aspectos mencionados nos llevan a abordar el concepto de área a través de la pavimentación y la unidad de medida, mediante problemas que permitan:

- ✓ *Pavimentar superficies a través de diversas unidades de cubrimiento.*
- ✓ *Variación o conservación del área (equivalencia) a través de transformaciones.*
- ✓ *Expresar la medida del área de superficies en función de una unidad prefijada y los cambios de unidad.*

Estos problemas se relacionan con las siguientes categorías anteriormente propuestas:

- ✓ **Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro.**
- ✓ **Conceptualización del área como medida de cubrimiento.**

Como última instancia, observamos la medición de superficies desde el carácter bidimensional de la medida, y relacionada en especial, con las estructuras multiplicativas, siguiendo a Vergnaud (1985) y a Chamorro (2003). Estos autores se refieren a la estructura de producto de medidas y lo asocian con el producto de dos dimensiones lineales, aspectos éstos, necesarios para dar sentido a las fórmulas. Es decir, lo que ellos señalan es que cuando el niño haya comprendido el área como el número de unidades que recubre la superficie, podrá intentar construir -de manera significativa- el resultado de la misma como producto entre magnitudes lineales. Los aspectos mencionados permiten abordar el concepto de área, mediante problemas que permitan:

- ✓ *Relacionar el carácter bidimensional de la medida, en particular para calcular el área del rectángulo en función de las magnitudes lineales.*
- ✓ *A través de transformaciones convenientes, expresar el área del triángulo y del cuadrado en función del área del rectángulo.*

Estos problemas se relacionan con las siguientes categorías anteriormente propuestas:

- ✓ **Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.**
- ✓ **Comprensión de las formulas del cuadrado, rectángulo, triángulo como camino más económico.**
- ✓ **Significatividad y funcionalidad del concepto.**

Los vínculos expuestos, los conceptos vertidos en los apartados anteriores y los organizadores curriculares nos permiten enunciar los siguientes aspectos del conocimiento escolar a desarrollar en este trabajo.

- ✓ Comparación y ordenamiento de superficies utilizando métodos directos e indirectos de medición
- ✓ Equivalencia de superficie
- ✓ Medida de una superficie
- ✓ Unidades no convencionales
- ✓ Diferencia entre área y perímetro.
- ✓ Transformaciones de figuras de manera de conservar el perímetro y variar el área o viceversa
- ✓ Relación y diferenciación entre ambos
- ✓ Cálculo de área de figuras utilizando cuadrículas
- ✓ Deducción y utilización de formulas para el cálculo del área del rectángulo, del cuadrado y del triángulo

En la siguiente tabla 5⁴⁸ presentamos esquemáticamente los organizadores curriculares y su relación con las categorías propuestas, observando que los

⁴⁸ El organizador *Materiales y recursos* se desarrolla en el capítulo siguiente cuando se presenta la unidad de aprendizaje

mismos conforman un entramado que da cuenta de la estructura conceptual de la noción que nos ocupa. En cuanto a la programación de la unidad se presentará en el capítulo de metodología.

<i>Organizadores Curriculares</i>	<i>Categorías.</i>
<i>Evolución histórica del concepto</i> Históricamente la noción de área surgió ante la necesidad de comparar objetos y se determinó equivalencia entre figuras diferentes, sin apelar a asignación numérica,	-Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja. -Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.
<i>Fenomenología</i> -Favorecer el estudio de procedimientos que permitan medir y comparar el área de superficies antes de construir el concepto matemático -Comparar las figuras respecto del área directamente, indirectamente, o midiendo utilizando otra figura como unidad. En cada caso, las superficies que admiten ser medidas, las comparaciones y el cálculo del área son diferentes.	-Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja. -Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. -Conceptualización del área como medida de cubrimiento.
<i>Errores y dificultades</i> -Límites al efectuar comparaciones visuales. -Dejar huecos en el proceso de medir. -Prescindir de la condición de utilizar figuras congruentes que funcionaran como unidad -Ausencia de recuento de unidades para calcular áreas. -Tienden a identificar una superficie con su área. -Confusión entre las nociones de área y perímetro. Debido a confusión en los nombres o bien en la incomprensión del	-Conceptualización del área como medida de cubrimiento. -Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro. -Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo, triángulo como camino más económico.

carácter bidimensional del área. -Reducir el cálculo del área de una superficie a la implementación de una fórmula a partir de medidas lineales. -Uso temprano de la implementación de fórmulas en el cálculo de área lleva a incomprensión del significado físico de la presentación numérica de la noción. -Pretender calcular el área a través de la adición de sus dimensiones, influenciados por la noción de perímetro. -Imposibilidad de resolver problemas en un contexto que le permitiera otorgar sentido a su representación y sus relaciones.	-Significatividad y funcionalidad del concepto.
<i>Sistema de representaciones</i> -Desde representaciones geométricas, gráficas y numéricas consideramos un tratamiento cualitativo- por procedimiento geométrico- y cuantitativo- por procedimientos numéricos- de la medición de superficie.	-Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja. -Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras -Conceptualización del área como medida de cubrimiento -Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro. -Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo, triángulo como camino más económico. -Significatividad y funcionalidad del concepto.

Tabla 5: Relación entre los organizadores curriculares y las categorías.

2.5.-LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas, en la formación matemática de los estudiantes, comienza a adquirir importancia a partir de 1960, ante la necesidad de cambios tanto curriculares como metodológicos.

En 1980, en la cuarta reunión del ICMI, un grupo abordó la resolución de

problemas y, desde ese entonces, ha ocupado un lugar significativo en la Educación Matemática Internacional (Schoenfeld, 2007; Boero, 2007; Santos Trigo, 2008). Un ejemplo, es el prólogo de la publicación del NCTM en 1980, en el cual podemos apreciar el significado que esta sociedad le otorga a la resolución de problemas en la escuela cuando éstos se manifiestan en ella:

“en la década de los 50 se hablaba de “revolución matemática”, en la década de los 60 se utilizaba el término “matemática moderna”⁴⁹, en los 70 “volver a lo básico” y en los 80 aparece “resolución de problemas”⁵⁰. Pero el termino resolución de problemas es más que una frase. Es una de las habilidades básicas que los estudiantes deben usar cuando dejen la escuela. Esta habilidad, en enseñanza y aprendizaje, causa muchos momentos de ansiedad tanto para estudiantes como a profesores pero es una habilidad que puede y debe ser enseñada” (p. XIV)

En los últimos años se han realizado estudios acerca de la investigación sobre resolución de problemas y su impacto en el currículo en matemática. Revistas como *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik ZDM Mathematics Education*. (2007) y *Journal of Mathematical Behavior* (2005) han dedicado un volumen a la resolución de problemas.

En uno de los artículos de la primera revista, Schoenfeld (2007) destaca la importancia de la publicación de los Stándares (1980, 1989, 2000, 2006) en los que incorpora la resolución de problemas como enfoque para aprender matemática, su influencia en el progreso de la investigación, en el desarrollo de las clases de matemática, etc. lo que cambia el panorama curricular de las últimas décadas. Muir, Beswick y Williamson (2008) consideran la resolución de problemas como una estrategia significativa para mejorar el aprendizaje de la

⁴⁹ Matemáticos como Emma Castelnuovo (1963) y Hans Freudenthal (1973), entre otros, rechazaron esta corriente, pues consideraban que la matemática no podía quedar reducida a objetos y estructuras matemáticas; en cambio se debían considerar actividades que permitieran describir e interpretar el mundo real. En Italia, Castelnuovo fue quien propuso incluir en el currículo de 1979, la resolución de problemas en la educación primaria y a partir de 1985 se destacó en mayor medida en la investigación matemática que en la enseñanza. (Boero, 2007).

⁵⁰ *La resolución de problemas debe ser el foco de la matemática escolar en los 80”,* y enuncia las acciones como por ejemplo, el currículo de matemática debería estar organizado alrededor de la resolución de problemas, priorizando las estrategias, los procesos y modos de representación de gran potencial matemático. Los maestros debían crear las condiciones áulicas, los recursos adecuados y la formulación de programas para su implementación en los distintos niveles educativos. Sin embargo fueron ignoradas durante la década del 80 y el término *resolución de problemas* se convirtió en una moda. (Schoenfeld, 2007).

matemática.

En Italia, según Boero (2007), un grupo de investigadores participa activamente en el PME- - PME-XII; PME-XIII, PME-XIV; PME- XVI- y presenta informes sobre resolución de problemas, dificultades detectadas en el aula y acerca de la enseñanza de diversos temas.

En este sentido cabe destacar, por ejemplo, el rol de la experiencia como recurso en la resolución de problemas y en la construcción del conocimiento (Boero, 1996; Bonotto, 2001).

Entre los investigadores que se han dedicado a esta temática, en el ámbito de la educación, podemos mencionar a, los psicólogos Mayer (1983) y. Vergnaud (1996), el matemático Polya (1984) en el campo de la didáctica de la matemática Kilpatrick (1985); Schoenfeld (1985); Blanco Nieto (1993), Rico (1993); Puig (1996); Carrillo (1996, 1998); Santos Trigo (1996, 1997, 2008), quienes serán referentes en el desarrollo de este trabajo.

En los últimos años, Santos Trigo (2008) manifiesta que se reconoce el rol de la resolución de problemas en estos ámbitos, desde hace más de 30 años. Castro (2008) considera que su papel se ha acrecentado en las propuestas curriculares, y ambos coinciden en que las Tecnologías de la Información y Comunicación -TIC- proporcionan un potencial simbólico y la posibilidad de manipulación de representaciones, que no era posible realizar sin este recurso. Puig (2008), en una conferencia de la SIEM, no comparte totalmente estas apreciaciones y presenta los altibajos a la que se vio sometida en las distintas propuestas curriculares, durante esos años en España. No obstante reconoce la conveniencia de constituir espacios comunes- grupos de trabajo, de investigación y curriculares- en los que la resolución de problemas aparezca como tal. Destacamos, también, que la resolución de problemas es un objeto de interés compartido, desde la orientación francesa.

Recientemente encontramos la publicación de un artículo de English & Siraman (2010) en el cual detalla el campo de la resolución de problemas que se ha investigado últimamente. Por ejemplo, la formulación de problemas (English, 2003; Brown & Walter, 2005); la modelización matemática en los primeros

grados y la resolución de problemas interdisciplinarios (English 2009); la incursión del rol de la complejidad en el currículo matemático (Campbell, 2006; English, 2007); y el rol de la neurociencia educativa para producir mejoras en el aprendizaje matemático de los niños (Campbell, 2006). Los estudios y aportes de estos investigadores, han permitido que la resolución de problemas se constituya en un campo de investigación con características propias y en continuo avance. Existe abundante bibliografía referida al concepto “Problema” y “Resolución de Problemas”; Arcavi & Friedlander (2007) manifiestan al respecto:

“...aún dentro de una misma cultura o en un mismo sistema de educación, los desarrolladores de curriculum, los profesores, los investigadores en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y los matemáticos no necesariamente comparten los mismos puntos de vista sobre lo que es un problema y lo que se enseña en términos de la resolución de problemas”(p.356)

Sin embargo, aunque existan diferencias en cuanto a la visión de estas nociones, en la actualidad, esto tiende a superarse. No obstante, Schoenfeld (1992, citado por Santos Trigo, 2008) sugiere que en todo trabajo de investigación se clarifique el uso del termino en el mismo, en función de ello a continuación, efectuaremos algunas precisiones respecto de las mismas, para distinguir nuestro posicionamiento en este trabajo.

Respecto a la noción de *problema*, concretamos alguna de ellas, desde el campo de la psicología y de la didáctica de la matemática, principalmente las que consideramos significativas para este estudio. Por ejemplo, desde el campo de la psicología y, con el objeto de reflexionar sobre el concepto de problema en las interrelaciones producidas entre el alumno, la adquisición del pensamiento conceptual y su incidencia en torno al aprendizaje, enunciamos la siguiente definición propuesta por Vergnaud (2002):

Problema es todo lo que, de una forma u otra, implica por parte del sujeto la construcción de una respuesta o de una acción que produce un efecto determinado. ...La noción de problema comporta, pues, la idea de novedad, de algo nunca hecho, de algo aún no comprendido (p 91.).

El problema tiene lugar en ocasión de modificar los conocimientos de partida que resultan insuficientes al enfrentarse a la situación planteada. Es decir, hay una adaptación de los conocimientos antiguos y una construcción de otros nuevos que implican un cambio de incógnita, de contexto, del uso de representaciones y/o procedimientos.

En cambio, en el campo de la didáctica de la matemática, Carrillo (1998) recupera la cita de Kantowsky (1980) quien expresa:

“Un problema es una situación para la que el individuo que se enfrenta a ella no posee algoritmo que garantice una solución. El conocimiento relevante de esa persona tiene que ser aplicado en una nueva forma para resolver el problema” (p. 2).

Más adelante, en el mismo documento, este investigador sostiene que:

“El concepto de problema debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares: la conciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento. (p. 9)”

En ambas definiciones, podemos destacar una característica específica, pues se refieren a la aplicación del conocimiento de una forma no mecánica, al mismo tiempo que tienden a equilibrar lo “nuevo”, por producir y lo “viejo”, que ya se sabe.

En un estudio realizado en Israel, los entrevistados manifiestan acerca de esta noción que el problema debe ser comprendido y tener sentido para los niños. (Arcavi & Friedlander, 2007). Asimismo, especifican que lo que constituye un problema en un momento dado, en un futuro podría ya no serlo.

En Argentina, con la Reforma de la Ley de Educación en 1995, en la síntesis explicativa del Bloque 7: “Procedimientos relacionados con el quehacer matemático” en los Contenidos Básicos Comunes (CBC) para la Educación General Básica, observamos estos aspectos en la definición de problema cuando

expresa que “*de la que no se dispone de una forma inmediata*”, en la cita siguiente:

“toda situación con un objetivo por lograr, que requiera del sujeto una serie de acciones u operaciones para obtener su solución, de la que no se dispone de una forma inmediata, obligándolo a engendrar nuevos conocimientos modificando (enriqueciendo o rechazando) los que hasta el momento poseía...” (p 89).

El Diseño Curricular para la Educación Primaria en la provincia de Buenos Aires vigente (2008) hace referencia al desafío y la posibilidad de establecer relaciones para arribar a una respuesta., según podemos observar:

“Un problema es tal en tanto y en cuanto permite a los alumnos/as introducirse en el desafío de resolverlo a partir de los conocimientos disponibles y les demanda la producción de ciertas relaciones en la dirección de una solución posible, aunque esta, en un principio, resulte incompleta o insuficiente”. (p.36)

De esta manera el problema puede ser visto como un recurso de aprendizaje pues, por un lado, permite desplegar diferentes procedimientos, confrontar ideas y aplicar los conocimientos adquiridos y, por otro, supone una forma de aprender nuevos conocimientos o reformular los que ya poseen, a partir del establecimiento de nuevas relaciones o diferentes maneras de representación.

En función de ello, en este trabajo, nos referimos a la noción de **problema⁵¹ cuando frente a una situación que ha de ser resuelta, los niños**

⁵¹ Si analizamos esa definición, se observa que es una situación que implica un objetivo a alcanzar en un ambiente de incertidumbre, de discusión, de comunicación. Esto nos lleva a establecer una diferencia entre los ejercicios y los problemas matemáticos. Un ejercicio puede resolverse en un corto intervalo de tiempo o bien con los conocimientos disponibles del niño. Un problema puede ser útil para optimizar las estrategias de razonamiento, pero un ejercicio debe estar dirigido para esclarecer, aplicar o ejemplificar un concepto teórico. El problema exige al alumno el aporte de algo nuevo, desconocido hasta entonces, lo cual hace que se deba esforzar en una tensión entre la pregunta que se le plantea y su intento de responder. El uso de algoritmos y demás procedimientos rutinarios transforma a los problemas en simples ejercicios memorísticos que no favorecen el desarrollo cognitivo. Un alumno puede estar en presencia de un problema y sin embargo, para otro puede ser solo un ejercicio, todo depende de los conocimientos previos que posea, de su experiencia, habilidades, intereses, etc. Es importante destacar que diferimos de lo que expresa

aplican sus conocimientos previos que, resultan insuficientes para brindar una respuesta; sin embargo en un clima de discusión y reflexión y con las herramientas adecuadas, pueden llegar a ella a la vez que construyen nuevos conocimientos.

Ambos enfoques se complementan para el aprendizaje de la matemática y en especial para la resolución de problemas

2.5.1.- CARACTERIZACIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Desde hace varios años la resolución de problemas, es considerada como una actividad central en el aprendizaje de la matemática en documentos y diseños curriculares. Se hace necesario entonces explicitar qué entendemos nosotros por eso.

Parafraseando lo que expresa el Standard Currículum del National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, 1989) en el contexto de la matemática escolar, la resolución de problemas es un proceso donde los conocimientos adquiridos se resignifican con el objeto de utilizarlos en una situación desconocida. Se pone de relieve las marcadas semejanzas con la definición de problema que adoptamos en el apartado anterior.

La resolución de problemas según diversos autores (Kilpatrick, 1985; Charnay, 1994; Blanco- Nieto, 1993; Puig, 1996 Carrillo, 1998; Gaulin, 2000; Schroeder y Lester, 1989; English, 2003; Santos Trigo, 2008;) puede considerarse como justificación de los conocimientos aprendidos, como una meta de aprendizaje o como un medio de aprendizaje.

La incorporación intencional de *la resolución de problemas en el aprendizaje de matemática* es vista como *justificación de los conocimientos aprendidos*, cuando los niños aplican sus conocimientos en problemas contextualizados de la realidad, es decir distinguen cómo y cuándo aplicar sus conocimientos disponibles.

Arcavi & Friedlander (2007) cuando manifiesta que el pensamiento reflexivo y trabajar hacia la formulación de ideas no son considerados actividades alrededor de problemas.

Es vista, en todo caso, como *una meta de aprendizaje*, cuando lo importante es resolver problemas, es decir, adquirir técnicas que los transformen en eficaces resolutores y son concientes de su progreso.

Finalmente, se presenta, como *un medio de aprendizaje* cuando pone de manifiesto los conocimientos que el niño va construyendo y lo relacionan con el que ya poseen.

En este encuadre, es indispensable proponer problemas en que los niños puedan vislumbrar la necesidad de un conocimiento nuevo para su resolución y los límites de su conocimiento previo.

El primero y segundo supone la resolución de problemas como un objetivo de aprendizaje, en cambio el tercero, lo considera como un medio, un proceso para aprender nuevos conceptos.

Al examinar esta relación entre la resolución de problemas y el aprendizaje de la matemática, Nunokawa (2005) propone un cuarto tipo de enfoque, *enfaticando aquellas sugerencias e ideas que faciliten a los niños mejorar la comprensión del problema*. Por ejemplo, la obtención de nueva información acerca del problema a resolver, la discusión acerca de la validez de propiedades y la implementación de herramientas para una mejor interpretación.

Los problemas realistas son apropiados en este enfoque, pues la comprensión profunda del mismo, su resultado y sus explicaciones resultan interesantes y atractivos para los niños, mostrando el poder de la matemática.

En este trabajo nos referimos justamente a la resolución de problemas como *“un medio para el aprendizaje de conocimientos nuevos”* y sobre la base de ello consideramos indicada la visión que sobre la Resolución de Problemas propone Carrillo (1998).

Este autor la considera como *una tarea compleja, que ofrece la posibilidad para organizar la diversidad de niveles existentes en el aula y es un marco ideal para la construcción de aprendizaje significativo, fomentando el gusto por la matemática y el desarrollo de una actitud abierta y crítica, objetivos éstos, de gran valor educativo*(p 13).

Así como también las ideas de Santos Trigo (2008) que se refieren a la

resolución de problemas como una forma de pensar, donde alumnos y profesor resuelven, contrastan diferentes formas de representación, reconocen y justifican sus respuestas, formulan conjeturas, desarrollan estrategias, recursos y la constante necesidad de reflexionar sobre el propio proceso de construcción del conocimiento.

Este aspecto de la resolución de problemas, como impulsora de la construcción de conocimiento matemático, es considerado también por English (1996), cuando afirma.

“La construcción de las ideas matemáticas....durante el curso de la resolución de problemas es un objetivo fundamental de la educación matemática...Esta construcción de conocimiento se refleja en el desarrollo de la estrategia....cuando trata de dominar una situación problemática que se supone un reto” (p 82-83, en Contreras, 2000, p.17).

El desarrollo de estrategias tienen que ver con procesos de toma de decisiones -conscientes e intencionales- en los cuales el niño selecciona y recupera de manera coordinada, los conocimientos que necesita para cumplimentar el aprendizaje de un determinado tema, favoreciendo la comunicación con sus pares - en un contexto de trabajo con otros- la elaboración de hipótesis, la reflexión de los resultados, el “hacerse cargo” y dar cuenta de relaciones y resultados (Monereo, 1995; Anijovich, 2009).

Estos aspectos generan espacios de aprendizaje y construcción de conceptos, al mismo tiempo que señalan, en la resolución de problemas, la diferencia entre tener éxito y comprender, pues los niños recién pueden elaborar una explicación de lo realizado, una vez que le han otorgado sentido.

Al mismo tiempo, llevan al niño a “hacerse cargo” del procedimientos implementado y resultado arribado. Este enfoque de considerar a la resolución de problemas como un recurso para la construcción de conocimiento y la reflexión que los mismos originan están inspiradas según Artigue & Houdement (2007) en ideas constructivistas subyacentes a la Teoría de los campos conceptuales, las cuales han sido significativas en las aulas de nivel primario en los colegios franceses.

Sin embargo, no son los problemas en sí mismos los que permiten el avance, sino aquellos en cuya resolución intervienen aquellos conocimientos que deseamos que los niños construyan, así como también lo conceptos que postula Anghilieri (1995, citado por Contreras, 2000), cuando señala:

“La participación activa en la Resolución problemas a través de tareas prácticas, buscando modelos y compartiendo lo que se comprende, capacitará a los niños para dar su propio significado a las relaciones que subyacen a todo conocimiento matemático. Trabajando en grupo, los niños se verán envueltos en describir, escuchar, discutir, ..., planificar y evaluar, destrezas de resolución de problemas que serán valoradas socialmente”
(pág 6,7)

La actividad matemática que un problema permite desarrollar alrededor de un concepto depende, fundamentalmente de las interacciones que este concepto puede generar entre los niños.

El diálogo que se genera a la hora de resolver y expresar un procedimiento, exige la explicitación de ciertos conocimientos. Al mismo tiempo, que enriquece la reflexión individual acerca de la noción a construir por el niño. Así las interacciones producidas entre ellos y las oportunas intervenciones del docente, constituyen los elementos significativos para avanzar en la construcción de conceptos.

La resolución de problemas entonces, no es una actividad rutinaria, sino una forma genuina del quehacer matemático, pues favorece el aprendizaje de nuevos contenidos, de estrategias de pensamiento y de resolución.

English & Sriraman (2010) manifiesta que si podemos enfatizar estos aspectos, la resolución de problemas será un medio eficaz para construir conceptos matemáticos⁵², tener éxito en la resolución de problemas fuera del ámbito escolar y resolver situaciones de modelización. En una primera instancia, estas situaciones de modelización han sido reservadas a otros niveles de educación, pero investigaciones recientes (English, 2003; 2006) muestran que niños del nivel primario pueden incursionar en ello.

⁵² En lugar enseñar primero los conceptos para luego practicar a través de la resolución de problemas, que normalmente no involucra a los niños en una resolución autentica de problemas.

2.5.2.-LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS DOCUMENTOS Y DISEÑOS CURRICULARES EN ARGENTINA

En el apartado anterior nos hemos referido a la resolución de problemas como objetivo y medio del aprendizaje matemático. Con el mismo sentido hemos observado que está presente en los documentos curriculares a nivel internacional (Estados Unidos, España, Francia, Israel, México, Italia, etc.).

En particular, vamos a precisar el recorrido de la inclusión de la resolución de problemas en los documentos y diseños curriculares de la Argentina. Aunque advertimos cortes y continuidades, su consideración oficial comienza a partir de la Ley Federal de Educación de 1995.

Los Contenidos Básicos Comunes del Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, es el documento que se implementa a partir de ella, en el cual, la resolución de problemas ocupa un lugar relevante como contenido procedimental y se la considera una herramienta eficaz para utilizar conocimientos ya adquiridos, construir conceptos matemáticos e interpretar situaciones en todas las áreas. Precisamente, en 1996 el artículo de Irma Saiz denominado *Resolución de Problemas* en “*Fuentes para la Transformación Curricular*”, marca un inicio importante, tanto en la definición del concepto de problema en matemática, como en su consideración como instrumento para la construcción del conocimiento matemático.

En la provincia de Buenos Aires, el Documento Curricular: Área matemática C.2., de 1997, considera la resolución de problemas como el “*método de acceso al conocimiento potencialmente relevante para desarrollar los procesos matemáticos*” (pág 46), a la vez que destaca no ser el único posible.

Así, las nociones enunciadas en el apartado anterior, guardan estrecha relación con la concepción que asume el sistema educativo argentino, expresada en el Bloque denominado “Procedimientos relacionados con el quehacer matemático”(1995) en los Contenidos básicos Comunes (CBC) según expresa:

“La resolución de problemas no debe pensarse como un tópico distinto sino como un proceso que debe penetrar todo el diseño curricular y proveer el

contexto en el cual los conceptos a actitudes puedan ser aprendidos” (p. 89)

en la cual se observa el acento en los significados de los conceptos y en la actividad que permite en los niños las construcciones de nociones matemáticas.

En las Disposiciones y los Documentos Curriculares para la Educación General Básica del 2001, aparece la resolución de problemas ligada exclusivamente al aprendizaje de capacidades cognitivas y de competencias instrumentales para resolver situaciones en todos los ejes. En particular, en el diseño curricular no se observan referencias explícitas a la resolución de problemas como medio para la construcción de conceptos matemáticos.

El documento “*problemas de la enseñanza de las matemática*” del 2004 de la Dirección Provincial de la Educación Superior Formación y Capacitación Docente, destinado a establecer los contenidos de la capacitación, considera la resolución de problema como objeto de enseñanza (enseñar a resolver problemas) y destaca como primer núcleo para su tratamiento el papel de la resolución de problemas en la construcción de conocimientos matemáticos, aunque no establece diferencia entre medio y meta, según podemos apreciar en la siguiente cita textual:

“La resolución de problemas se ha convertido en un contenido de alta prioridad porque es, a la vez, un medio para el aprendizaje de conocimientos nuevos y un medio para el desarrollo de estrategias cognitivas” (p 102).

Posteriormente en el año 2005, en la circular técnica N°2, para EPB de la Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, se enuncian algunos criterios para trabajar la resolución de problemas en el Primer Ciclo. Entre otros, enunciamos los siguientes: contar con una diversidad de problemas que se vinculen con el contenido a enseñar, la necesidad de gestar en el aula la circulación y socialización de las producciones, que los alumnos puedan dar cuenta de la validez de los procedimientos empleados y de las soluciones obtenidas.

También en ese año, los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP), sugieren esta estrategia para los aprendizajes en todas las áreas, enunciando el

tratamiento de sus contenidos a través de la resolución de problemas. Además producen *cuadernos para el aula* (2007) que orientan el abordaje de los contenidos, desde este enfoque

Actualmente, los diseños para Educación Primaria en Provincia de Buenos Aires (2008), ponen énfasis en la resolución de problemas, la interacción entre pares como parte del quehacer matemático propicio para la construcción de conocimiento. Algunos párrafos del diseño dan muestra de ello. Por ejemplo:

“Concebir a los problemas como “motor” de producción de conocimientos nuevos implica favorecer y propiciar la aparición de variedad de procedimientos posibles por parte de los niños. Producir nuevos recursos, interpretar otros modos de resolución y establecer relaciones entre ellos es parte del quehacer matemático”. (p.40)

“.... abordar algunos problemas en pequeños grupos de manera tal que las interacciones entre los alumnos funcionen como insumos y enriquezcan la producción” (p.41)

“El desafío consiste en desplegar diversas propuestas que permitan a los alumnos aprender matemática “haciendo matemática”. Iniciarse en el trabajo matemático de esta manera es bien diferente de pensar que primero se enseñan “los elementos”, los “rudimentos” para usarlos más tarde, cuando empiece la “matemática en serio”. Se trata, por el contrario, de hacer matemática “en serio” desde el inicio”. (p171.)

Observamos que se ha optado por hacer explícitas las relaciones entre los títulos, la forma en que son producidos y las prácticas por medio de las cuales se elaboran. Es decir, acerca a los niños no solo a las definiciones y propiedades, sino también a las características de un trabajo matemático, a la resolución de distintos tipos de problemas, que otorgan sentido a los contenidos a ser aprendidos.

Los Currículos de distintos países, fundamentalmente de habla inglesa, enfatiza también la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas. No obstante Stacey (2005) y Boero (2007) resaltan la complejidad de su implementación en las aulas, porque los docentes, por diversas razones, no implementaron la resolución de problemas hasta transcurridos varios años. En la

actualidad, este obstáculo está en vías de superación gracias a la preparación de maestros, el desarrollo de habilidades argumentativas, el uso de nuevas tecnología y el diseño de actividades de resolución de problemas, explicitando el logro de los mismos en función de las edades y las habilidades de los alumnos.

2.5.3.- LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA METODOLÓGICA

El currículo de matemática, impulsa la resolución de problemas como estrategia metodológica apropiada para la construcción de conocimientos matemáticos, en la medida que los mismos sean herramientas para resolver problemas.

En esta investigación, nos centramos en la enseñanza como un medio para la resolución de problemas o la enseñanza a través de la resolución de problemas⁵³. Al respecto Nunokawa (2005) manifiesta que al implementar la

⁵³ En Japón se implementa la resolución de problemas como estrategia metodológica, logrando mejores aprendizajes. Para ello los niños resuelven problemas cuya solución exige conceptos todavía no aprendidos, en un ambiente de trabajo grupal conducidos por el maestro. Los niños resuelven y arriban a la soluciones a través de razonamientos apropiado buscando los conceptos matemáticos y los procedimientos convenientes. Enfatizan la comprensión de las ideas matemáticas en desmedro de la memorización de formulas. La condición para que este tipo de lecciones pueda llevarse a cabo radica fundamentalmente en la preparación de los maestros a cargo de la clase (Ruiz, 2006). En China, la resolución de problemas en el aula es considerada como un enfoque que proporciona oportunidades a los niños para adquirir formas de pensamiento y habilidades de razonamiento para aprender y comprender matemáticas. Un método de enseñanza y una forma de resolver problemas es *enseñar por variación*, es decir se consideran un conjunto de problemas relacionados alrededor de la construcción de un concepto diferenciando las características esenciales de las que no lo son (Cai & Nie; 2007). En la variación, los problemas sirven como medio para conectar un problema conocido a uno desconocido. La experiencia de los niños se manifiesta por la posibilidad de desarrollar ideas matemáticas, aprender estrategias, hacer conexiones significativas a partir de la resolución de estos problemas relacionados. Es decir los alumnos dotan de sentido a la matemática. Sin embargo el tipo de compromiso que genera el maestro en este tipo de enfoque presenta limitaciones a la hora de fomentar habilidades de pensamiento de orden superior en los niños. En Brasil y América Latina, D'Ambrosio (2007) manifiesta que se necesita una reconceptualización de la idea de resolución de problemas, pues se debe prestar más atención a la relación alumno- maestro, prestando atención en la voz del niño cuando desafía el reto de una solución más que enseñar a los alumnos a resolver problemas. Después de la segunda guerra mundial, el libro de Polya, presentó heurísticas y estrategias para resolver problemas no familiares. Estudios recientes (Schoenfeld, 2007; Lester & Kehle, 2003) manifiestan que la enseñanza explícita de dichos heurísticas y estrategias no indica mejoras en la habilidad de los alumnos para resolver problemas sino que distinguir cuándo, dónde, por qué y cómo usarlas es lo que las hace comprenderlas. *El Hombre que calculaba* y *Las mil y una noches* fueron usados en los colegios pues se mostraban problemas que capturaban la imaginación de los niños, al mismo tiempo que el desarrollo de la creatividad, aspectos ambos, no contemplados en la matemática a impartir en las aulas de primaria y secundaria. Usualmente, estos problemas eran propuestos en competencias, olimpiadas – Hungría fue país pionero – la resolución de problemas

resolución de problemas para enseñar un determinado tema matemático, debemos preguntarnos ¿qué características del concepto los niños pueden construir al interactuar con el o los problema/s que proponemos?

Cuando en el apartado 2.3 nos referimos a la construcción de conceptos, observamos que la definición propuesta por Vergnaud se centra en el sujeto; considera que la correspondencia entre el saber matemático estructurado y los diferentes modos en que el niño reelabora su conocimiento no resulta fácil de realizar.

Este hallazgo facilita la comprensión a la hora de entender por qué problemas que son muy similares, desde el punto de vista matemático, son esencialmente diferentes para el niño que está aprendiendo. La consecuencia inmediata se reflejaría y justificaría en abordarlos en la clase de manera diferenciada

Por eso, es determinante la forma en que el maestro concibe el proceso de enseñar matemática y el análisis del concepto a construir y se pregunta ¿Qué tipo de problemas facilita la construcción de un concepto en particular, el área?, ¿Cómo se facilita la construcción de dicho concepto a partir de un conjunto de problemas?, ¿Qué ponen de relieve un conjunto de problemas, respecto del concepto de área?

Con el objeto de responder a estos interrogantes no tratamos de proponer cualquier problema, ni problemas aislados, sino de diseñar una secuencia compuesta por una progresión de problemas convenientemente organizados que ayudan al niño a construir el concepto, a establecer relaciones entre conceptos relacionados y a favorecer las justificaciones de las decisiones que toma.

Asimismo, es importante considerar una gestión de clase en la cual, por un lado, las intervenciones del maestro posibilitan la organización del aprendizaje, privilegiando un ambiente que favorezca instancias de análisis grupal, de validación de conclusiones y explicitación de los saberes que cada problema

prospera en América Latina y como área de investigación esta muy ligada a los Estados Unidos con Schoenfeld. En el documento curricular de 1996 se hace referencia a la resolución de problemas como una habilidad para pasar los exámenes en desmedro de los problemas matemáticos creativos.

impulsa a construir.

A su vez, las diversas intervenciones entre pares del aula y pares /docente inciden en la representación que el niño realiza individualmente en vista a producir respuestas acordes en este proceso.

Focalizamos, entonces, estas intervenciones en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, pues durante el desarrollo de la secuencia, instauran un “clima” en la clase que promueve en los niños la comprensión y construcción de una red de relaciones respecto del concepto a construir. A continuación, caracterizamos el papel de la maestra en cada una de ellas:

1.- *Información:* El maestro detecta los conocimientos matemáticos previos y las ideas previas acerca del concepto de área de los niños, con el objeto de contar con información real de su estructura cognitiva, fundamentalmente, del concepto a construir.

2.- *Orientación dirigida:* Interviene en la medida que los niños lo requieran, brinda indicaciones que los ayuden a superar las dificultades para resolver el problema pero evita explicitar la solución y estimula la participación de los compañeros. A través de esta fase se pretende que los niños encuentren sus propias relaciones y vislumbren cuál es el concepto a construir.

3.- *Explicitación:* Fomenta en todo momento que los niños expliciten sus respuestas mediante sus propias representaciones y validen sus resultados en un contexto de diálogo y comunicación. Al mismo tiempo, propicia espacios que estimulen un trabajo de reflexión en torno a los conocimientos que van construyendo cuando resuelven los problemas.

4.- *Orientación libre:* Plantea problemas que involucren niveles más complejos de representación, de anticipación y de conceptualización con respeto al tema que nos ocupa o propiedades a construir de la misma.=

5.- *Integración o institucionalización:* Todo problema implica una contextualización del concepto al que se apunta, y por lo tanto, pone en juego ciertos sentidos y deja afuera otros. El maestro producirá las organizaciones necesarias para que los niños expliciten lo aprendido, pues a través de las fases anteriores, han aprendido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben

adquirir una visión general de lo que han construido entorno al concepto en particular, a través de la resolución de los problemas propuestos.

Es en esta instancia, cuando se debe fomentar en los niños la comprensión de los conceptos que poseen con el objeto de que les permita la toma de conciencia de los conocimientos a construir, la economía que permite, los límites del mismo, las relaciones con otros conceptos, etc.

Es necesario provocar un proceso mediante el cual los niños puedan reconocer aquello que han elaborado como producto de su actividad, puedan descontextualizarlo de los problemas que originalmente le dieron sentido para poder reutilizarlo en otras situaciones.

Estas fases proporcionan pautas para el desempeño de la maestra que resultan de utilidad en los diferentes momentos del proceso de aprendizaje, en particular en la dinámica del trabajo, en donde prima un ambiente de resolución de problemas como generador de nuevos conocimientos. Todo ello en vista a lograr progresos en el nivel de razonamiento de los niños, objeto de este estudio.

Las consideraciones vertidas hasta el momento nos llevan a concebir la estrategia de resolución de problemas como un *proceso progresivo de diálogo y reflexión*, al promover procesos de crecimiento personal insertos en un marco social, pues los aportes que realizan sus compañeros, permiten completar, resignificar o afianzar los conocimientos para arribar a una respuesta, tal como lo plantea el constructivismo social.

Nos focalizamos entonces, en un alumno-en este caso cada una de las niñas – pues al considerar el diálogo con sus compañeros, interpreta la voz de otro y en la réplica por sus diferencias, avanza en la comprensión de los conceptos. Al mismo tiempo con el maestro, se produce un proceso de reflexión sobre lo que se hace y se ha hecho, favoreciendo el desarrollo de un pensamiento flexible e independiente. (Lerner, 1996; Cobb & Yackel, 1999; Nunokawa, 2005; Santos Trigo, 2008;)

Así en este trabajo, consideramos a cada niña pero teniendo en cuenta no solo su “hacer”, sino “su reflexión sobre su hacer” junto con las aportaciones de

los integrantes del grupo y del maestro, a fin de detectar qué noción en común abordan los problemas propuestos, detrás de apariencias distintas.

Esta estrategia metodológica intenta complementar la fundamentación de la unidad de aprendizaje, a la cual nos referiremos en el apartado 3.5.2.1. y que completaremos en el capítulo siguiente.

SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este capítulo, delineamos la base teórica en la cual sustentamos nuestro trabajo. En primer lugar, desde el constructivismo nos posicionamos para enmarcar el proceso de construcción de conceptos que realizan los niños en el nivel primario.

La construcción del conocimiento del niño según Vigotsky es un proceso social en el que la resolución individual de tareas de orden cognitivo está estrechamente vinculada con los logros que alcanza con otros compañeros, moderado por el debate conceptual que éstos promueven (Baquero, 2001; 2004).

Los niños construyen un concepto en particular cuando logran una representación interna del mismo, las ideas previas -acertadas o no- revisten importancia por las posibilidad de puente que presentan en dicha representación.

Nos posicionamos en el *constructivismo social* (Ernest, 1991,1996) y en la perspectiva dialógica. En el primer caso, nuestro enfoque está puesto en la construcción realizada por cada sujeto en interacción con otros integrantes de un grupo; y, en el marco de la perspectiva dialógica, uno de los integrantes interpreta la voz de otro, y, en el debate, con sus diferencias, cada uno de ellos pretende alcanzar avances cognitivos (Linell 2005a, Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent, 2010a, Muñoz –Catalán, 2012).

El *conocimiento escolar*, aunque se origina e implementa en el contexto escolar, se pretende sea generalizable a otros contextos en virtud de la interacción y el diálogo entre los miembros del aula (docentes - alumnos; alumno- alumno), lo que facilitará que los alumnos realicen la reconstrucción individual del conocimiento validado por la sociedad en la que se halla inscrito (García, 1994,1998; Lerman, 1996). En particular, en el conocimiento matemático escolar distinguimos un aspecto *práctico* constituido por los problemas y su resolución, y otro *discursivo* formado por un sistema de reglas y justificaciones, los cuales se presentan a los niños a través de “conversaciones” – orales y/ o escritas-a fin de favorecer su aprendizaje en el contexto del aula.

Respecto de la *construcción de conceptos* en el contexto de la escuela, los

procesos cognitivos que cada uno de los niños vinculan cuando resuelven una tarea matemática, se abordan desde la noción de esquema conceptual (Vergnaud; 1990, 1996), bajo el supuesto de que un concepto no puede reducirse a una definición, sino a un conjunto de situaciones que se resuelven y otorgan sentido a través de dicho concepto.

Ahora bien, ¿qué comprenden y cómo logran comprender los niños un concepto en particular? son interrogantes que pretendemos iluminar desde *la teoría dinámica para el crecimiento de la comprensión matemática* de Pirie y Kieren (1994-1999) a efectos de observar y describir el crecimiento de comprensión en los niños de nivel primario y fundamentalmente el folding back detectado en dicho proceso.

Reflexionar acerca del *concepto de área*, a su vez, nos llevará a precisar algunas componentes ligadas a la comprensión de su aprendizaje y enseñanza. Para ello nos es de utilidad considerar, respecto de esta última: el conocimiento matemático propiamente dicho y el conocimiento curricular propuesto en el nivel primario y, respecto del aprendizaje, los aportes que brindan las investigaciones respecto a la comprensión del desarrollo de dicha noción en los niños y las sugerencias enunciadas. Resulta pertinente explicitar también aquellas tendencias que pueden actuar como obstáculos para la construcción del concepto que nos ocupa en este trabajo y que se vinculan de manera estrecha con el conocimiento escolar, propuesto en los diseños curriculares de la provincia. En función de ello, por un lado, formulamos un conjunto de categorías, las cuales nos brindan información acerca de la construcción del concepto y, por otro lado, efectuamos una caracterización de la unidad de aprendizaje en base a organizadores curriculares (Rico, 1997a, 1997b, 2001).

Por último, abordamos *la resolución de problemas*, desde las investigaciones realizadas recientemente y que impactan en los diseños curriculares de matemática.

En este trabajo, nos referimos justamente a la resolución de problemas como “un medio para el aprendizaje de conocimientos nuevos” en actividades matemáticas, que prioricen las interacciones puesto que es, en ellas, donde se explicitan ciertos conocimientos, se enriquecen las posibilidades de reflexión

individual y se potencia la intervención docente.

Es decir, la resolución de problemas es utilizada como estrategia metodológica pues el conjunto de problemas constituye un instrumento-cuestionarios y la unidad de aprendizaje- que favorece en cada uno de los casos su “hacer” y “su reflexión sobre su hacer”, en el contexto de las aportaciones de los integrantes del grupo y el maestro.

Mientras los pilares (Constructivismo Social, Conocimiento escolar, Construcción de conceptos; Concepto de área y Resolución de problemas) constituyen los antecedentes y el contexto teórico de la investigación, destacamos el modelo de Pirie y Kieren como la herramienta teórica medular sobre la que se articula este trabajo de investigación.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

INDICE	Nº de Página
3.1.- Explicitación del problema – preguntas y objetivos.....	97
3.2.- Caracterización de la investigación.....	101
3.3.- Perspectivas metodológicas: fundamentos y decisiones.....	102
3.3.1.- Coherencia de nuestra perspectiva con el interaccionismo simbólico	103
3.3.2.- Enfoque dialógico para el análisis de las Interacciones.....	107
3.4.- Diseño de la investigación: El estudio de caso.....	111
3.4.1.-Caracterización de los casos y el contexto.....	112
3.4.2.- Fases de la investigación.....	115
3.5.- Instrumentos y técnicas de obtención de información	119
3.5.1.- Cuestionarios para identificar la comprensión inicial en relación al concepto de área	121
3.5.1.1.- Cuestionario de conocimientos matemáticos primitivos.....	124
3.5.1.2.- Cuestionario de ideas previas acerca del concepto de área	131
3.5.2.- La unidad de aprendizaje.....	139
3.5.2.1.-Como instrumento de enseñanza.....	139
3.5.2.1.1- Planificación.....	140

	N° de Pagina
3.5.2.1.1.1- Concreción de objetivos...	141
3.5.2.1.1.2- Concreción de Contenidos.	142
3.5.2.1.1.3- La secuencia de Aprendizaje: Características.....	145
3.5.2.1.1.4-A medir superficies.....	151
3.5.2.1.1.5-Al cerrar el desarrollo de la secuencia.....	167
3.5.2.2.-Unidad de aprendizaje como instrumento de investigación.....	168
3.5.2.2.1- La observación no participante y notas de campo.....	169
3.5.2.2.2- Registro de la secuencia de Aprendizaje.....	170
3.5.2.2.3- La producción escrita de los alumnos..	172
3.5.3.-Cuestionarios Finales.....	172
3.5.3.1.-Cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje.....	175
3.5.3.2.- Cuestionario a medio plazo.....	176
3.6.- Proceso e Instrumentos de análisis.....	179
3.6.1.-Categorías e indicadores de aprendizaje del concepto....	186
3.6.2.-Las capas de comprensión y las categorías vinculadas al concepto de área.....	189
3.6.3.-Instrumento para vincular los problemas, las categorías y las capas de comprensión asociadas al concepto de área.....	194
3.6.4.- Categorías referidas a las interacciones producidas durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje.....	233
3.6.5.- Instrumento para el análisis de las interacciones: “Tabla de diálogo”.....	235

	N° de Pagina
3.6.5.1.-En busca de un instrumento adecuado.....	235
3.6.5.2.- Estructura y características del instrumento:	
“Tabla de diálogo”.....	237
3.6.5.2.1- Unidad de significado (columna Homónima).....	238
3.6.5.2.2-Co-participantes de la interacción (Columna de los interlocutores (E) y (R))	239
3.6.4.2.3-Contextos que dan sentido a cada contribución.(columna de Acción y Naturaleza de la acción).....	240
3.6.4.2.4- Idea unidad.....	247
3.6.5.3-Ejemplo de aplicación del instrumento a un intervalo del desarrollo de una actividad de de la secuencia de aprendizaje.....	247
3.6.6.- Codificación utilizada	249
3.6.7.-Tendencias de las categorías detectadas con relación a la construcción del concepto de área.....	251
3.6.8.- Proceso de análisis de la comprensión del concepto en cada actividad.....	253
3.6.9.- Proceso de análisis del crecimiento de la comprensión del concepto de área.....	258

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. EXPLICITACION DEL PROBLEMA – PREGUNTAS Y OBJETIVOS

Como anticipáramos en el apartado de introducción y consustanciados con las ideas de Sirvent (2006), consideraremos el *proceso metodológico como el conjunto de decisiones que posibilitan la confrontación entre un material teórico y un material práctico para la construcción del dato científico*⁵⁴. Nos parece

⁵⁴ La autora en este proceso distingue tres dimensiones: epistemológica, general y técnicas de investigación. La *dimensión epistemológica* se refiere a las decisiones relacionadas con el objeto de investigación, en particular aquellas que le permiten seleccionar conceptos, categorías, con los cuales construir el problema de investigación, su enunciación, los objetivos, encuadre teórico, la búsqueda y análisis de antecedentes y explicitar la relevancia del trabajo. La *dimensión de la estrategia general metodológica*: se refiere a las decisiones relacionadas con las formas de operar con los datos de manera de dar respuesta al problema que enunciamos. Identificando para ello la población, las unidades de análisis, la selección de casos, la asunción del rol en el terreno, la elección del tipo de diseño. Por ultimo, la *Dimensión sobre las técnicas de obtención y análisis de la información* se refiere a las técnicas que se prevé utilizar para obtener y procesar la información.

pertinente comentar cuáles han sido las motivaciones que nos impulsaron a seleccionar esta temática, con el objeto de explicitar el problema, enunciar algunas preguntas que nos condujeran a incursionar en esta temática y plantear los objetivos,

No obstante es necesario destacar que este trabajo tiene su punto de partida en el siguiente problema: La construcción del concepto de área utilizando como metodología básica la resolución de problemas.

Como docente de futuros maestros y en observaciones efectuadas a niños de EGB (Educación General Básica), he percibido confusión entre los conceptos de área y perímetro, en problemas vinculados con la manipulación, y en la comparación de diversas superficies, debido a la incomprensión del carácter bidimensional del área y en la relación entre variabilidad de los mismos (Kouba, 1988 ; De los Reyes,1999; Moyer,2001; Owens & Outhred,2006) En cambio, he observado que los conocimientos acerca de la medida en general y del área en particular se vinculan por un lado, fundamentalmente con la utilización de fórmulas para calcular el áreas de superficies clásicas y por otro lado, en la conversión y reducción de una unidad a otra, desde el sistema métrico decimal - sus múltiplos y submúltiplos-. Es decir, un trabajo en torno al cálculo y a las equivalencias que exige poner en juego algunas características del modelo proporcional (en tanto multiplicaciones y divisiones por la unidad seguida de ceros), dando cuenta de la relación entre ellas.

He percibido entonces, ausencia de procedimientos geométricos en la construcción de las mencionadas magnitudes, restando así su sentido.

Partimos de la aceptación del carácter complejo de la construcción de un concepto, y las limitaciones que existen para documentar lo que los niños procesan en su interacción con el concepto. Acordamos con Irwin (1996, citado por Santos Trigo, 1998), cuando afirma que:

El proceso de construir un concepto nunca puede ser completamente entendido, ya que ocurre dentro de las mentes de cada estudiante. Los estudiantes no necesariamente exhiben todo lo que ocurre durante el

Para ello se seleccionan los instrumentos para la obtención de la información y los métodos que se utilizarán en su análisis, en vistas a dar respuesta al problema que enunciamos.

e

proceso de encontrar sentido a las cosas. Lo que ofrece son ventanas para observar parte del proceso de la formación de los conceptos a partir del proceso y las discusiones de lo que hace. (pág 137)

La metodología de resolución de problemas no es hoy un tema desconocido y según nos hemos referido en el capítulo anterior, apartado 2.5., existe una vasta bibliografía que denota su abordaje en la construcción de conceptos. Asimismo consideramos que los niños desarrollan heurísticas propias cuando resuelven problemas que favorezcan la construcción significativa del aprendizaje de las características que tiene esta noción.

También nos interesan, las interacciones que se producen entre los integrantes de un grupo y los aportes que realizan los demás niños de la clase, con el fin de detectar su influencia en la construcción del concepto en un niño en particular.

En vista a los aspectos de referencia, nos proponemos indagar sobre la construcción del mencionado concepto con la metodología enunciada, en quinto año de una escuela de nivel de educación básica (primario).

En función de ello, hemos planteado los siguientes interrogantes sobre los cuales pretendemos aportar información:

-¿Cuáles son las características relativas al proceso de construcción del concepto de área en 5º año de educación básica, cuando la estrategia metodológica es la resolución de problemas?

-¿Cómo se desarrolla el proceso de construcción del concepto de área, en 5º año de educación básica, en el contexto específico de resolución de problemas?

A través de este estudio pretendemos, aproximarnos a las consideraciones mencionadas y, en función de ello, nos planteamos el siguiente objetivo general:

❖ Caracterizar, comprender e interpretar el proceso de la construcción

del concepto de área en quinto de educación básica (primaria), cuando se implementa una metodología de resolución de problemas.

Así enunciado consideramos conveniente analizar ciertos aspectos que marquen de manera más detallada dicho proceso en cada una de las niñas, llevando a desglosar el mismo en los siguientes objetivos parciales o específicos:

Con respecto a la caracterización del concepto pretendemos:

- ✓ Caracterizar el proceso de comprensión del concepto de área , en tres niñas de 5º primaria, cuando la estrategia metodológica es la resolución de problemas

Las contribuciones de los niños, la socialización de las conjeturas que realizan, ayudan a aclarar cuestiones que a veces no resultan tan evidentes. Es por ello que nos interesa saber qué interacciones y cómo éstas influyen en la construcción de un concepto en cada una de tres niñas cuando se implementa una metodología particular de aprendizaje, para ello enunciamos este otro objetivo específico:

- ✓ Profundizar en cómo se produce el proceso de construcción del concepto de área en tres niñas de primaria, cuando se implementa la metodología de resolución de problemas.

Entonces, aspiraremos a efectuar dos miradas en este estudio: una individual, pues nos interesa distinguir qué características del concepto construye cada una de las niñas y cómo incide la interacción con sus compañeros en esa comprensión cuando se desarrolla una metodología de aprendizaje particular; y otra global, ya que los aspectos mencionados nos permitirían esbozar – en la escuela primaria - algunas orientaciones sujetas al abordaje de propuestas de enseñanza sobre el concepto de área, basadas en este enfoque particular

3.2. CARACTERIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Los interrogantes y objetivos mencionados, dan cuenta de la complejidad y dificultad que representa el tema a desarrollar. No pretendemos obtener resultados generales sino comprender e interpretar en profundidad las representaciones que se manifiestan en cada una de las integrantes de un pequeño grupo, acerca del modo de construcción de un determinado concepto. Aspectos que nos llevan a enmarcar la investigación desde una perspectiva *cualitativa*.

En la investigación cualitativa se confrontan los datos y la teoría lo que permite enunciar algunas categorías a efectos de establecer relaciones que facilitan la comprensión sobre la complejidad del concepto a construir. Asimismo enfatiza lo particular en profundidad, puesto que no busca generalizar, sino pretende identificar las características vinculadas a la construcción del concepto, lo que otorga al trabajo fines *ideográficos*, como señala (Latorre, 1997); Colás y Buendía (1998).

Nuestro interés en este trabajo no es controlar y predecir - como afirma el paradigma positivista - ni transformar la realidad como aspira el paradigma crítico. Pretendemos en cambio describir, comprender e interpretar el proceso que efectúan cada una de las niñas alrededor de la construcción de un concepto en particular. Por lo tanto, nos posicionamos en el *paradigma interpretativo* (Latorre, 1997; Ernest, 1998). En este sentido, Muñoz-Catalán (2012), destaca que lo fundamental a la hora de optar por un paradigma es su coherencia con el problema de estudio.

La presente investigación se desarrolla –principalmente - en la realidad del aula, es decir, en situaciones naturales, no controladas, que permiten una comprensión directa de la situación de cada uno de sus integrantes, en correspondencia con un estudio *etnográfico*.

Para lograr estos aspectos, fue necesario realizar un estudio *longitudinal* según Latorre (1997)⁵⁵, pues la investigadora permaneció un cierto tiempo en el campo de estudio. Esto es, durante la implementación de la unidad de aprendizaje, antes y después de su implementación, octubre-diciembre del ciclo lectivo 2001 y

⁵⁵ Lo diferenciamos de los estudios *transversales* en los cuales, se les recoge información a diferentes informantes en un mismo periodo de tiempo y en el mismo momento de observación.

abril del 2002, para realizar una observación repetida y ordenada y dar cuenta de un fenómeno con naturaleza de proceso.

Para obtener y organizar la información en cada uno de estas sub-fases implementamos cuestionarios, grabación en video y notas de campo extraídas tanto de dichos cuestionarios, como del registro de la secuencia de aprendizaje efectuado en audio. Estas están interrelacionadas, y cada uno de ellas genera, nutre y/o modifica el desarrollo de la siguiente sub-fase, lo que determina que esta configuración sea *flexible* a los cambios que se producen con posterioridad.

La decisión se fundamenta en que Gravemeijer & Terwel (2000) manifiesta que para Freudenthal las discontinuidades en el proceso de aprendizaje son esenciales. Estas discontinuidades pueden ser vistas como cortes o la consideración de diferentes perspectivas, pero a través de ellas es donde se puede percibir si un alumno ha alcanzado un cierto nivel de comprensión. Para identificar estas particularidades se realizan estudios individuales que enfatizan la observación de los procesos de aprendizaje. Consideraciones que nos impulsan a manifestar que *el estudio de casos* es lo indicado, pues apunta a la comprensión de las acciones.

3.3.- PERSPECTIVA METODOLOGICA: FUNDAMENTOS. Y DECISIONES.

Reconocemos el carácter complejo y variado del comportamiento humano en los fenómenos educativos. A efectos de centrarnos en nuestra perspectiva metodológica de investigación y en las decisiones instrumentales, que adoptamos en este trabajo, lo hacemos con la convicción que éstas nos permiten realizar una abstracción sobre el proceso de construcción del concepto de área a partir de la resolución de problemas.

Vamos a centrarnos pues, en dos perspectivas: *El interaccionismo simbólico* y *el enfoque dialógico*. Muñoz-Catalán (2012) manifiesta que los principios del primero, fundamenta el otro y ambos, comparten una misma perspectiva: la escuela de Chicago y el Pragmatismo, según observamos en el siguiente gráfico 1:

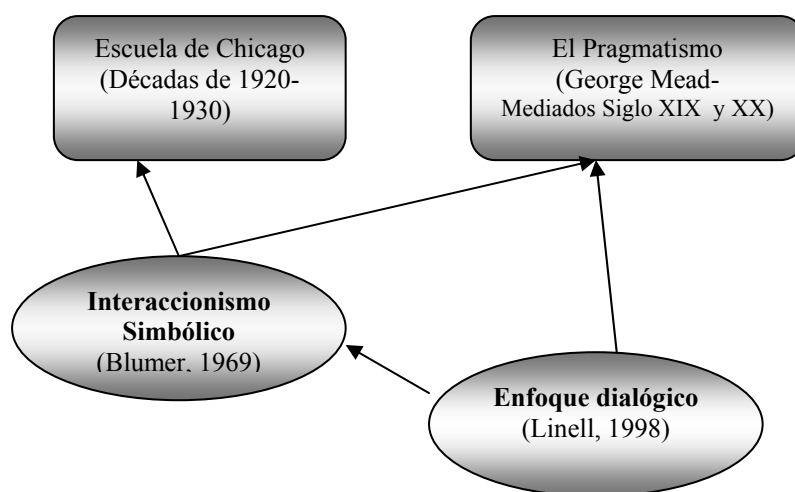


Grafico 2: Origen y vinculación entre el interaccionismo simbólico y el enfoque dialógico
(p.155)

Relaciones importantes que le otorgan coherencia a nuestro trabajo según vamos a desarrollar en los apartados siguientes.

3.3.1.- COHERENCIA DE NUESTRA PERSPECTIVA CON EL INTERACCIONISMO SIMBÓLICO

El interaccionismo simbólico tiene sus orígenes en la Escuela de Sociología de Chicago, entre 1920 y 1930, surge a partir de considerar la comunicación como un hecho social significativo. Se focaliza en el esquema de expresión, interpretación y respuesta, en oposición al esquema de estímulo-respuesta, del conductismo ortodoxo. Entre otros, se destacaron investigadores como Herbert Mead, Robert Ezra Park, aunque Herber Blumer fue el más destacado.

Mead es un filósofo pragmático⁵⁶ del Conductismo Social, considera que los procesos de pensamiento surgen de la acción social - en la interacción- y preceden a la mente, pues el individuo como ser social y en interacción con otros

⁵⁶ Según Forni (2003), la filosofía pragmática esta relacionada con el contexto de los Estados Unidos.

configura su personalidad (Forni, 2003).

Herber Blumer (1969, citado por Muñoz-Catalán, 2012) es el investigador más representativo de esta corriente y la fundamenta desde las siguientes ideas:

1. Los individuos actúan hacia los objetos o hacia otros individuos, según el significado que éstos tienen para ellos, es decir, los símbolos. De esta forma, su comportamiento no está determinado por los estímulos, el símbolo incrementa la capacidad de resolución de problemas y la creatividad.
2. El significado de tales objetos derivan de la interacción social, principalmente de la comunicación, es decir, surgen de los modos en que otros individuos actúan respecto a los objetos y situaciones.
3. Estos significados a situaciones, a otros individuos, y a sí mismos son seleccionados, organizados y modificados a través de la interpretación de cada individuo, en base a sus expectativas y propósitos.

El significado es un producto social, que surge de y a través de las actividades de los individuos en la medida que estos interactúan. Los objetos⁵⁷ se forman, sustentan, debilitan y se transforman por su interacción con otras personas.

Nuestro interés radica fundamentalmente en los significados que las niñas le asignan a un concepto, en este caso el concepto de área, los que cada niña lo construye en y a través de la interacción con sus compañeros. Este proceso evoluciona mediante la interpretación, en la medida en que cada una de ellas va transformándolo en función de la dirección y el contexto en que se genera, es decir el aula de quinto de primaria.

Estas acciones ponen en relieve que el interaccionismo simbólico es una perspectiva adecuada para abordar nuestro objeto de estudio. (Blumer, 1969, Muñoz –Catalán, 2012). De todas maneras intentamos relacionar el mismo con las

⁵⁷ Un objeto es aquello que puede hacerse referencia y su naturaleza se refiere al significado que un individuo puede tener acerca de él.

condiciones formuladas por Woods (1992, citado por Muñoz-Catalán, 2012):

1.- La investigación debe formularse de manera empírica en la realidad social. Es decir, que el estudio debe realizarse en un medio natural, evitando la artificialidad, propias de los experimentos. En nuestro trabajo, los datos se han tomado en y a través de grupos naturales constituidos en el contexto del aula antes mencionado. De esta manera, hemos podido acceder a la realidad que viven las niñas, detectar cómo se implican en la resolución de cada uno de los problemas y registrar cómo interaccionan ellas, en el grupo y con la maestra, en vista a interpretar cómo desarrollan su significado y su comprensión alrededor del concepto de área.

2.- Es necesario asumir que la realidad social no se caracteriza exclusivamente por su amplitud y generalidad, sino por su profundidad.

Para lograr un estudio profundo acerca del proceso de construcción que se opera en cada una de las niñas, hemos utilizado *el estudio de caso*. Ingresamos al aula, y a través de distintos instrumentos, hemos recogido información antes, durante y después de implementar la secuencia de aprendizaje alrededor del concepto (Stake, 2007). Para el análisis de los datos y su interpretación, hemos implementado distintos instrumentos en vista comprender el proceso de construcción que se opera en cada una de las niñas con la profundidad que el mismo requiere.

3.- Debemos acceder a la realidad de las personas que estudiamos, la cual no tiene que coincidir con la que nosotros percibimos.

Nos sentimos limitados de acceder a la realidad desde la óptica de cada una de las informantes, pues son niñas, no obstante trataremos de observar y analizar el proceso de construcción que se produce en ellas e intentaremos no “teñir” con nuestra interpretación, el proceso.

Para no sacar sus manifestaciones del contexto, analizamos las transcripciones, más precisamente las unidades de significado. Esto supone no desligarlo de las contribuciones previas y posteriores con otras niñas del grupo y con la maestra, aspecto fundamental que otorga sentido al mismo (Linell, 1998,

2005.b).

En este sentido nos “colocamos gafas” y tratamos de “mirar” profundamente este proceso en cada uno de los niños, informantes del trabajo.

Abordamos las siguientes condiciones respecto a la cultura del grupo de estudio, la comprensión de sus interacciones y la producción de los significados simbólicos que emergen en ellas de manera conjunta, dadas las características de nuestro estudio que focaliza fundamentalmente entre alumnos y con la maestra. De manera detallada se enuncian y fundamentan a continuación.

4).- *La necesidad de aprender la cultura del grupo al que pertenecen las personas que estudiamos.* 5).- *La comprensión de las interacciones que se estudian implica considerar la relación bidireccional que se establece entre la situación y las perspectivas de las personas, lo cual implica conocer y describir cuidadosamente el contexto en el que acontecen* 6).- *La exigencia principal del interaccionismo simbólico es conocer y comprender los significados simbólicos que emergen durante las interacciones y que son atribuidos en las mismas situaciones donde surgen a lo largo del tiempo.*

Como manifiesta Woods (1992), el grupo en interacción desarrolla una gran cantidad de símbolos, ricos en significados; es labor del investigador captarlos y analizar cómo son interpretados por cada una de sus integrantes: cada una de las niñas que integra el grupo en nuestro caso. El contexto del aula y, en particular las interacciones en el pequeño grupo, dan cuenta de cómo las contribuciones de las niñas contribuyen a la interpretación del proceso de construcción individual ellas. La interpretación “*se convierte en una manipulación de significados...la interpretación es vista como un proceso formativo en el que los significados son utilizados y revisados como instrumento para la orientación y formación de la acción*” (Blumer, 1969, p.3-4)

Nos interesamos por comprender la atribución de significado de cada una de las niñas durante el proceso de interacción, para lo cual contamos con un dispositivo que nos permite mostrar sus contribuciones al proceso de comprensión del concepto de cada niña en particular. Como investigadora, un elemento importante en el estudio de las interacciones es familiarizarnos con el lenguaje de las niñas (Linell, 2005.a; Muñoz-Catalán, 2012).

A su vez desde el constructivismo social, consideramos al lenguaje como un vehículo para manifestar el propio pensamiento. Desde esta perspectiva, no nos interesa el análisis lingüístico, centrado en el interés de los sonidos o estructuras gramaticales, sino nuestra atención se focaliza en el uso de las palabras, de las frases y de los símbolos, pues a través de ellos se expresan los significados (Muñoz-Catalán, 2012). Estos aspectos han sido tenidos en cuenta al construir el dispositivo, -denominado *tabla de dialogo*-, que presentamos en el apartado 3.6.5.-, con el que pretendemos capturar la naturaleza dialógica del discurso.

3.3.2. ENFOQUE DIALÓGICO PARA EL ANÁLISIS DE LAS INTERACCIONES

El *enfoque dialógico* intenta comprender la acción de las personas, la cognición y principalmente la comunicación y el lenguaje. Es decir cómo se construye el conocimiento y cómo le atribuimos significado (Linell, 2005a).

Varios autores (Linell, 1998; Nystrand, 1997; Marková, 1996) han analizado epistemologicamente la ciencia del lenguaje e interpretan el dialogismo como una teoría opuesta al monologismo. La Teoría de los Actos del Discurso considera a los sujetos como agentes individuales y a la cognición como una facultad relacionada con lo individual más que el proceso resultante entre el individuo y su entorno. En cambio, el enfoque dialógico se apoya en el dialogismo (considerado por Linell como Dialogical Approach) cuya finalidad consiste en describir y explicar la acción del individuo y el uso del lenguaje en un contexto determinado. Es decir, trata cómo se construye el conocimiento en interacción. Se focaliza en las acciones relacionales que condicionan el diálogo con otros individuos y el contexto en el que el mismo se desenvuelve. (Linell, 2005a)

De acuerdo con Linell & Marková (1996), entendemos por *diálogo* como el intercambio comunicativo entre dos o más personas (llamadas interlocutores), que se desarrolla a través de un sistema de signos y está orientado a facilitar una mejor comprensión del proceso de construcción del concepto, en cada una de las niñas involucradas

El diálogo se caracteriza por una tensión permanente, pues no habría comunicación si no hubiera diferencias entre los conocimientos de sus integrantes en dicho intercambio. Esta es una característica del dialogismo que lo diferencia del enfoque dialéctico- según los explicitamos en el capítulo anterior, apartado 2.1.- ya que mientras éste supone alcanzar el equilibrio en el diálogo y las contradicciones tienden a superarse, el dialogismo “*proporciona un espacio para las diferencias de perspectivas y opiniones, las asimetrías y discusiones*” (Linell, 2005a, p.25). Así, las interacciones están interconectadas en la dinámica de un diálogo fluido e incompleto.

El sentido que atribuimos al significado surge de la interacción entre el individuo y su entorno, por lo que dichos significados son intersubjetivos, sociolingüísticamente establecidos y socialmente sostenidos (Linell, 2005b).

De esta forma, las interacciones que se producen entre las personas, a través del dialogo entre ellos y fundamentalmente dentro de un contexto particular, caracterizan niveles conceptuales y lingüísticos.

Esta concepción llevó a Linell & Marková (1996); Linell (1998), en función de una serie de propiedades del discurso, a caracterizar las interacciones dialógicas (o las interacciones de Dialogical Approach) según: Co-construcción de los significados, Secuencialidad, Interdependencia entre acto y actividad. Por ejemplo:

a) *Co- construcción de los significados*: Es una característica intrínseca del diálogo, pues, el discurso actúa como vehículo de los fenómenos sociales que se producen en el aula, de manera que las acciones coordinadas- verbales y no verbales- entre sus participantes, permiten construir los significados en él.

b) *El carácter secuencial del discurso*: Es una práctica social en la que cada contribución verbal es dependiente y coordinada desde una determinada posición dentro de una secuencia de intervenciones, es decir, desde su relación con la contribución previa y posterior al diálogo entre los diferentes participantes. De lo contrario, si la intervención se aísla de las otras, no es comprendida. Cada respuesta es interpretada en relación al

contexto dentro de la secuencia explicitada y cada acto se interpreta como parte de un proyecto comunicativo completo.

c) *Multifuncionalidad de las contribuciones al discurso*: Las interacciones dialógicas se sitúan dentro de actividades más generales, por ejemplo, la relacionada con la secuencia en su totalidad, intentando dar sentido a la comunicación. En el caso particular de este estudio los diálogos giran alrededor de la construcción del concepto de área.

d) *Iniciación versus respuesta*: Todo acto constituye una iniciativa discursiva. En particular en este enfoque, cada acto es a la vez respuesta e iniciativa de comunicación: respuesta, porque expresa la comprensión respecto de sus conocimientos previos; iniciación, pues aporta nuevas contribuciones al discurso.

En síntesis, la participación grupal en actividades de índole comunicacional son posibles porque sus miembros se relacionan entre ellos, con los objetos y circunstancias a su alrededor, comparten significados, actúan y se desempeñan en un determinado medio. Por eso es que la interacción, el contexto y el interlocutor con quien se dialoga son conceptos claves.

Estas nociones son compartidas por el constructivismo social ya que los individuos en interacción con otros, construyen y reconstruyen sus percepciones e interpretaciones del mundo.

Como anticipamos, el monologismo y el dialogismo son consideradas teorías opuestas. En base a ello Nystrand (1997) presenta una tabla (6) en la que se observa las diferencias más significativas, en función de algunos factores característicos como por ejemplo, el paradigma que sostienen, al modelo comunicativo, etc.

	Monologismo la enseñanza Organizada	Dialogismo y la enseñanza organizada
Paradigma	Recitación	Discusión
Modelo comunicativo	Transmisión de conocimiento	Transformación de la comprensión del conocimiento
Epistemología	Objetivismo: El conocimiento se da previamente	Dialogismo: El conocimiento surge de la interacción de voces
Fuente de valoración del conocimiento	Maestro, autores de libro de texto. Excluye las interpretaciones realizadas por los estudiantes.	Incluye las interpretaciones realizadas y la experiencia personal de los estudiantes

Tabla 6: Características del monologismo y el dialogismo

Estos autores consideran que si el enfoque dialógico puede aportar a la ciencia cognitiva y a la psicología evolutiva, entonces el diálogo es más importantes que el lenguaje.

La Dialogical Approach, si bien se inspira en el dialogismo, es una perspectiva que aborda cómo se construye el conocimiento en interacción.

El enfoque dialógico, como teoría del lenguaje se basa en los actos comunicativos y sus interrelaciones, de naturaleza dinámica y enfocada hacia la potencialidad y vulnerabilidad, pues los individuos varían sus habilidades para desarrollar tareas comunicativas y cognitivas.

De este modo, y como ya lo anticipamos en el capítulo anterior, apartado 2.1, en este trabajo, consideramos el diálogo como la conversación en acción, pues uno de los integrantes interpreta la voz de otro; y en el debate con sus diferencias, pretenden cada uno de ellos, alcanzar avances cognitivos (Linell 2005.a, Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent, 2010.a; 2010.b; 2010.c). La conversación, entonces, es la utilización dialógica del lenguaje, se sostiene a través de experiencias y participación compartidas de sus integrantes y la comprensión interiorizada de cada uno de ellos alrededor de una tarea en común. Así, un alumno comunica lo que ha pensado, confronta con otras ideas de sus

compañeros, generando “zonas de posibilidades de desarrollo”⁵⁸ –ZPD-(Cobb, 1995) en el interjuego entre el conocimiento matemático subjetivo- objetivo-subjetivo (Ernest, 2010) a través de la transformación de los signos en el dominio: privado-público-privado.

3.4.- DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN: EL ESTUDIO DE CASO

El foco de este trabajo es caracterizar y comprender el proceso de la construcción de un concepto de los integrantes de un pequeño grupo cuando se implementa una metodología de resolución de problemas. Somos concientes de que el proceso de aprendizaje suele presentar discontinuidades que nos conducen a la comprensión de las acciones vinculadas con el concepto en cuestión en cada uno de ellos.

Estas consideraciones nos impulsan a abordar el objetivo expresado a través de un *estudio de caso*, pues nos permite comprender en profundidad el aprendizaje ya señalado en cada uno de los sujetos involucrados y en un contexto particular como es el aula. En función de ello y en coincidencia con Bassey (1999), concebimos “*el estudio de caso como el estudio de una singularidad conducida en profundidad en entornos naturales*” (p. 47), lo que nos permite realizar un análisis en profundidad e intentar comprender las acciones de sus integrantes, con la utilización de la observación no participante durante un periodo determinado (Goetz & Le-Compte, 1988; Witrock, 1989; Latorre, 1997).

Esta noción nos brinda el enfoque adecuado para responder las preguntas que nos hemos formulado, relacionadas con "qué" aspectos del concepto particular construye cada caso, intentando interpretar las representaciones acerca del desarrollo de algunas categorías conceptuales en torno al mismo.

Nos interesa además analizar “cómo” lo construye y así profundizar en el proceso y crecimiento de la comprensión de los elementos que caracterizan esa noción en un conjunto de casos, que se constituyen en un medio para comprender

⁵⁸ Cobb(1998) define *zona de posibilidades de desarrollo* a aquella en la que un individuo puede recibir asistencia de un compañero más competente o puede interactuar con él para comprender mejor un concepto.

dicho proceso. Esta motivación, en términos de Stake (2007) nos permite manifestar que se trata de un estudio de *caso instrumental*⁵⁹ y *colectivo*.

Consideraciones que nos impulsan a establecer en este estudio de caso, sus límites desde una perspectiva espacial y temporal. Por lo tanto, estimamos conveniente realizarlo sobre tres niñas del curso de 5° año de primaria, pues podrá brindarnos información acerca de las construcciones conceptuales alrededor de las categorías, las cuales pueden completarse con la información emergente del análisis de cada caso y comprender cómo arriban a ellas. Los resultados así obtenidos no pueden extrapolarse a todos los niños ni a otros contextos.

Retomamos y completamos lo expresado en el apartado anterior, al manifestar que se trata de un *estudio de caso* no comparativo (Echeverría, 2005), pues con respecto a los casos, interesa solamente distinguir qué características del concepto construye cada uno de ellos y cómo incide la interacción con sus compañeros en esa comprensión, cuando se desarrolla una metodología basada en la resolución de problemas.

Por otro lado, nos permite obtener una mirada global, con el fin de poder esbozar algunas orientaciones para abordar propuestas de enseñanza basadas en este enfoque particular en las aulas de Educación Primaria.

A continuación, resulta conveniente explicitar con más precisión algunos aspectos que tuvimos en cuenta para seleccionar, entre la totalidad de niños del curso, a los tres casos que se desempeñan como informantes en este estudio.

3.4.1. CARACTERIZACIÓN DE LOS CASOS Y EL CONTEXTO.

En primera instancia, y a efectos de precisar el contexto de este estudio, comenzamos precisando que se realizó durante el año 2001 en Argentina, en una región de la Patagonia, Carmen de Patagones, una ciudad ubicada al sur de la provincia de Buenos Aires, limítrofe con la provincia de Río Negro, en donde se encuentra la ciudad de Viedma, capital de la provincia. Ambas ciudades (Carmen de Patagones y Viedma) separadas por un río denominado Río Negro, constituyen

⁵⁹ *Instrumental* pues el estudio de caso es un instrumento para comprender otra situación, en nuestro trabajo, aspectos en la construcción de un concepto en particular y es *colectivo* cuando el investigador desea adquirir una mejor comprensión de un conjunto de casos.

la denominada Comarca “Viedma- Carmen de Patagones”.

Para comenzar a incursionar en el concepto de área, procedimos a ubicar este tema en el diseño curricular de los distintos niveles del sistema educativo de la provincia de Buenos Aires, vigente en ese momento. Nos situamos entonces, en el nivel de Educación General Básica (EGB) -actualmente nivel primario- en el segundo ciclo, precisamente en quinto año.

Seleccionado el año, debíamos seleccionar la escuela y para ello, resultaba imprescindible que el maestro implementara la resolución de problemas como metodología para planificar la enseñanza de este tema en particular y estuviera dispuesto a participar. Dado que la investigadora se desempeñaba como profesora de los institutos de formación docente y era capacitadora de maestros, pudo detectar y seleccionar aquellas docentes que implementaban la metodología de resolución de problemas en el aula, en particular en quinto año, donde se comienza a abordar el concepto de área. Dado este perfil, contacté con una maestra, interesada en que elaboráramos conjuntamente una unidad didáctica y utilizar como metodología de trabajo la resolución de problemas, permitiéndome así, entrar en el aula. Esto significó el inicio de una serie de reuniones para acordar pautas de trabajo. Al mismo tiempo iniciamos conversaciones y acuerdos con las autoridades de la escuela para llevar adelante la propuesta.

Una vez concluidos estos pasos, la elección quedó circunscrita a una Escuela de EGB, ubicada en el casco céntrico de Carmen de Patagones. A este establecimiento asistían niños de los alrededores. En ese momento se implementaban los tres ciclos de la Educación General Básica, primer ciclo (primero, segundo y tercer año), segundo ciclo (cuarto, quinto y sexto año) y tercer ciclo (séptimo, octavo y noveno año). En segundo ciclo, la estructura curricular adoptaba un modelo de organización areal de contenidos (1999, tomo I, p.19), y la asignatura: matemática, una de ellas. Estas áreas eran impartidas por distinto/as maestros/as. La materia que nos ocupa se desarrollaba en cuatro bloques⁶⁰ semanales con una duración de 60 minutos cada uno.

En este marco, el trabajo se realizó en un quinto año, es decir, en segundo ciclo para el esquema provincial, con niños y niñas cuya edad –en su mayoría- era

⁶⁰ En el marco de este trabajo nos referiremos a sesiones en lugar de bloques.

de diez años.

A solicitud de la maestra, comenzamos a reunirnos con el objeto de comentar cómo trabajaban los niños; surgió así que los distribuía en mesas de cinco o seis alumnos y trabajaba con ellos formando pequeños grupos. Estos se habían constituido de forma natural.

De los tres cursos a su cargo, se optó por dos de ellos. Para realizar dicha elección, se tuvo en cuenta las sugerencias de la maestra respecto al desempeño y actitud de los niños, las dimensiones del aula y la distribución del mobiliario. Este último aspecto se consideró significativo por cuanto nos permitió ingresar cómodamente al aula, pues deseamos que nuestro ingreso en la institución no llamara la atención ni alterara el ritmo normal de trabajo.

La formulación del objetivo de esta investigación nos impulsó a considerar un grupo reducido del curso. La selección de este grupo en cada uno de los cursos seleccionados, se efectuó según *el criterio de variación máxima* (Gotees & Le Compte, 1988), también conocido como grupo natural más heterogéneo (Patton 1984, citado en Latorre, Del Rincón y Arnal, 1997), debido a que Freudenthal (1991, citado por Gravemiejor, 2000) ya en 1945 manifestó que tanto los alumnos “fuertes” como los “flojos” se benefician cuando pueden interactuar al resolver actividades.

La maestra inicialmente comenzó a desarrollar la unidad planificada, en cada uno de los cursos seleccionados pero transcurrida cuatro sesiones, los niños de uno de los cursos dejaron de asistir por razones ajenas a esta investigación, lo que motivó que quedara un solo grupo para su estudio. El grupo seleccionado estaba compuesto por seis integrantes pertenecientes a ámbitos sociales y familiares heterogéneos. En un caso ambos padres eran profesionales, en otro, sólo el padre y la madre era ama de casa, otros dos integrantes, sus padres tenían estudios primarios, y los dos restantes, sus padres eran comerciantes. Con respecto a los niños se podía apreciar también heterogeneidad respecto de sus conocimientos en el campo que nos ocupa. Algunos de sus integrantes mostraban signos de timidez, los cuales incidieron en las formas de manifestarse, según se explicita el capítulo destinados al estudio de los casos.

De los seis integrantes que componían el pequeño grupo seleccioné tres de ellos dada la continuidad en el proceso de observación y la producción sostenida en relación con los instrumentos de obtención de información. Así, las tres niñas que nos ocupan, tenían a la maestra por primera vez y la maestra utilizaba la metodología de resolución de problemas de modo habitual en la implementación de sus clases.

Un aspecto a destacar es que, dentro de sus posibilidades cognitivas o familiares, las tres integrantes del grupo- Patricia, Mirta y Cecilia- tenían una actitud positiva hacia la matemática y respetuosas de las consignas de trabajo. Denominamos a dichas integrantes, *informantes* y constituyen el pequeño grupo de análisis.

Consideramos el grupo como contexto en el que se produce y favorece el crecimiento conceptual de cada una de las niñas. No lo consideramos grupo colaborativo según Martín (2009), quien entiende por tal el que arriba, a través de tareas diseñadas específicamente para dicho grupo, al crecimiento de comprensión individual de sus miembros, ni como grupo colectivo, que tiende a la construcción conceptual de un concepto a través de ideas y acciones compartidas por todos sus integrantes, siendo la comprensión colectiva un logro interaccional (Yackel, 2002). En nuestro caso, las tareas son individuales, aunque, por la distribución del aula, se resuelven en cercanía de otros compañeros. Esta cercanía, y no la orientación de la actividad, es lo que propicia la interacción.

Para el estudio y análisis, contamos con diversos tipos de registros y producciones, producto de la toma de cuestionarios e implementación de la unidad de aprendizaje durante cada una de las sesiones.

3.4.2 FASES DE LA INVESTIGACION

Distinguimos en este trabajo distintas fases: *selección de grupo de estudio, del proceso de recogida de información, de análisis y de interpretación*. En cada una de ellas se desarrollan actividades específicas que a continuación detallamos.

La *fase de selección del grupo de estudio* la detallamos en el apartado anterior arribando a elección de tres niñas de un grupo del aula.

En la *fase del proceso de recogida de información*, nos reunimos con la maestra, a efectos de planificar dicho proceso. Para ello, en principio, nos propusimos analizar los vínculos y rupturas entre los conocimientos relacionados con el concepto que nos ocupa en este trabajo. Consideramos imprescindible detectar los conocimientos matemáticos primitivos e ideas alrededor del concepto de área que poseen los niños, con el objeto de conocer las nociones correctas y erróneas que ellos poseen, en vistas a planificar su aprendizaje. En función de lo mencionado en el capítulo anterior (apartado 2.1), respecto a los conocimientos e ideas previas, consideramos conveniente tomar cuestionarios para detectarlos. Era nuestro interés también, durante el desarrollo de la unidad de aprendizaje del concepto de área, averiguar aquellas representaciones intermedias producidas durante el transcurso de la interacción cuando los niños resuelven los problemas. Con el objeto de detectar el conocimiento personal construido por cada una de las niñas, acerca del concepto de área⁶¹ y la significatividad del mismo, acordamos tomar dos cuestionarios, uno al finalizar la implementación de dicha unidad y otro -transcurrido 6 meses- a medio plazo.

La investigadora durante todo este proceso compartió material bibliográfico y facilitó actividades para la formulación de los cuestionarios y la confección de la unidad de aprendizaje. La selección de las actividades la acometió la maestra junto con la investigadora, teniendo en cuenta las características del curso, y la maestra fue la que evaluó la inclusión o no de las actividades.

Estas consideraciones nos llevaron a estructurar esta fase en cinco sub-fases diferenciadas alrededor del concepto que pretendíamos construir. Enunciamos a continuación cada uno de ellas:

- ✓ Primera sub-fase denominada *Cuestionario Inicial*, compuesto por la toma de dos cuestionarios, denominados a) Conocimientos matemáticos primitivos y b) Ideas previas acerca del concepto de área, respectivamente.

a) “*Conocimientos matemáticos primitivos*”: la maestra suministra a

⁶¹ Como ya nos referimos en el capítulo anterior, nos referimos al concepto como al conjunto de situaciones en la cual dicho concepto aparece y se relaciona a un vocabulario específico que le otorga sentido.

los niños un cuestionario a resolver en forma individual, alrededor de 15 días antes de comenzar a desarrollar la secuencia de aprendizaje. El mismo tenía como finalidad evaluar los conocimientos matemáticos disponibles vinculados al campo conceptual de estudio.

- b) *“Ideas previas acerca del concepto de área”*: pasados dos días, la maestra suministra el cuestionario – a resolver en forma individual – a fin de detectar las ideas previas alrededor del concepto de área.

Es importante destacar que ambos cuestionarios, en vistas a perfeccionar los mismos, se aplicaron antes en calidad de pilotaje, en una escuela de semejantes características del partido de Carmen de Patagones.

- ✓ Segunda sub-fase denominada *“Desarrollo de la secuencia de aprendizaje”* destinado a la resolución de problemas vinculados con el concepto de área, más precisamente, alrededor de contenidos íntimamente vinculados con las categorías enunciadas. Durante la implementación la investigadora filmó lo acontecido, fundamentalmente, las respuestas que brindan los niños del grupo seleccionado, en tanto que una alumna residente y aspirante a maestra realizó un registro de las intervenciones de los niños del grupo a fin de complementar los datos relevados con la filmación. Todo el proceso se organiza en una tabla- en el apartado 3.5.2.2.2. -, más adelante y en vistas a facilitar el análisis en cada una de las niñas respecto del concepto que nos ocupa, detallamos con mayor precisión.
- ✓ Tercera sub-fase denominada *“Cuestionario Final”* compuesto por la toma de dos cuestionarios, denominados a) *Conocimientos final, inmediato a la secuencia de aprendizaje* y b) *“Conocimiento a medio plazo, respectivamente.*
 - a) *“Conocimientos final, inmediato a la secuencia de aprendizaje”* al finalizar de implementar la secuencia de aprendizaje, la maestra

toma a todos los niños del curso un cuestionario a resolver en forma individual, a efectos de detectar los logros acerca de la construcción de conocimientos del concepto de área de los niños, respecto del cuestionario inicial sobre ideas previas.

- b) “*Conocimientos a medio plazo*” destinado a la resolución en forma individual de un cuestionario seis meses después de la toma del cuestionario anterior. La maestra pretende conocer en esta instancia, el estado de construcción de concepto en cada uno de los integrantes del pequeño grupo, en vistas a detectar la funcionalidad y significatividad de los indicadores involucrados.

Durante el desarrollo de estas sub-fases, consideramos indispensable la presencia de la investigadora en el aula, quien, a través de la observación no participante, presencié todas las instancias, en particular, cuando se desarrollaba la secuencia de aprendizaje dando cuenta del proceso de construcción que se operaba en cada uno de los niños.

La información que brindó cada una de estas sub-fases son insumos que nutren y/o modifican el siguiente. De ahí el carácter flexible del diseño de esta investigación, su organización y las categorías iniciales enunciadas.

En la *fase del proceso de análisis* aspiramos lograr una comprensión profunda sobre el proceso de construcción que se opera en cada una de las niñas acerca del concepto de área. Para ello, hemos considerado cada caso en completitud y se han analizado de manera consecutiva: Patricia, luego Cecilia y finalizamos con Mirta. La decisión de analizar cada caso sin mezclarlos nos permitía obtener un conocimiento global de cada uno de ellos. Comenzamos por Patricia porque ya habíamos realizado un trabajo anterior (García-Amadeo, 2005) y por lo tanto, estábamos familiarizado con el mismo.

Para el análisis de los datos, recabamos la información que aportaban los distintos instrumentos elaborados, según el orden en el que fueron tomados, con el fin de ser más sensibles a captar el proceso de construcción del concepto de

área de cada caso a través del tiempo. El proceso de análisis de las actividades que brindan cada uno de ellos, se desarrolla en el apartado 3.6.

3.5.- INSTRUMENTOS Y TÉCNICAS DE OBTENCIÓN DE INFORMACIÓN

En cada uno de las sub-fases a las que nos hemos referido en la fase del proceso de recogida de información, en el apartado anterior, se implementan diversos instrumentos y técnicas, con una intención específica y diferenciada de brindar información acerca del estado de construcción del concepto a investigar.

Consideramos conveniente y esclarecedor para la organización de la lectura, la tabla 7, en la cual indicamos el instrumento y técnicas de recogida de información y la finalidad de cada uno de ellos.

Sub-fases	Instrumentos y técnicas de recogida de información		Finalidad ⁶²
1°.-Cuestionario Inicial	Cuestionario: -Conocimientos matemáticos Primitivos Cuestionario: -Ideas previas acerca del concepto de área	Artefacto: -Producciones escritas	Detectar y describir la situación inicial de los niños respecto de los conocimientos matemáticos relacionados al concepto de área y las ideas acertadas o no, de dicho concepto.
2°.-Desarrollo de la secuencia de aprendizaje	La Unidad de aprendizaje Observación no participante -Notas de campo Artefacto: -Producciones escritas		Profundizar en el proceso de construcción que realizan los integrantes del pequeño grupo en general y de cada niña, en particular, durante el desarrollo de la unidad didáctica.
3°.- Cuestionario Final	Cuestionario: -“Conocimientos al finalizar la secuencia de aprendizaje Cuestionario -“Conocimientos a medio plazo”	Artefacto: -Producciones escritas	Detectar y describir la construcción y significatividad del concepto lograda por cada caso, al final del proceso y en los dos momentos considerados.

Tabla 7. Instrumentos y técnicas de recogida de la información y finalidad

⁶² Se enuncia sólo la finalidad fundamental

Así enunciados, cada uno de los instrumentos y técnicas fueron aplicados con una intención explícita y diferenciada en cada uno de los momentos enunciados anteriormente y el resultado fue insumo para el desenvolvimiento del momento siguiente.

En cuanto a la validez de estos instrumentos, concretamente respecto a los cuestionarios sobre conocimientos matemáticos previos y sobre ideas previa acerca de la noción de área, destacamos tres etapas:

1.- El primer lugar, los instrumentos se construyeron con la maestra sobre una versión inicial elaborada por la investigadora.

2.- Se aplicaron en otra institución, como muestra piloto, según especificamos en el apartado 3.5.1.

3.- A posteriori y, con los resultados obtenidos, fueron revisados haciendo uso del por un juicio de expertos. En función de las apreciaciones brindadas se configuró su formato final.

En el caso de la secuencia de aprendizaje y de los cuestionarios al finalizar la misma y a medio plazo, el papel de la maestra jugó un papel significativo en el proceso de validación de los instrumentos, especialmente porque sus consideraciones nos permitieron cambiar y redefinir las preguntas en función de los conocimientos que ella poseía del grupo de alumnos en los que se iba a aplicar esta investigación. Asimismo, la versión final pasó por un juicio de expertos.

De alguna manera, estos instrumentos no son genéricos, sino que están pensados para este grupo de alumnos en particular. El seguimiento de estas etapas, incluyendo las consideraciones de los expertos a los que hemos hecho referencia, es lo que otorgan la validez a los instrumentos de recogida de datos utilizados.

A continuación y de manera más detallada, caracterizamos cada uno de ellos.

3.5.1.-CUESTIONARIOS PARA IDENTIFICAR LA COMPRENSIÓN INICIAL EN RELACIÓN AL CONCEPTO DE ÁREA

En el primer y segundo sub-fases de las cinco explicitadas se tomó un cuestionario abierto (Cruz, 1996), con el propósito de indagar por un lado, sobre el nivel de adquisición de aquellos conocimientos matemáticos – disponibles - y que estaban vinculados con el campo conceptual en el cual el concepto de área se hallaba inserto. Estos conocimientos constituyen el *Conocimiento Matemático Primitivo* de cada niño (Pirie & Kieren, 1994, 1999; Martín, 2008). Por otro lado, deseábamos detectar también las ideas previas que poseían los niños respecto del concepto de área. Nos referimos a las “ideas” pues todavía no se había abordado el concepto en etapas anteriores. Y en ambos, explorar las estrategias de resolución de problemas que utilizan los niños

Con respecto a los contenidos del cuestionario, las sugerencias formuladas por el Grupo Cero (1990) nos permitieron determinar los contenidos relacionados con el campo conceptual de la magnitud Área, los contenidos de área propiamente dicho y las posibles conexiones entre ellos. A continuación los enunciamos.

Los contenidos matemáticos (M)

- M.1. Resolución de problemas de multiplicación y división que involucran organizaciones rectangulares.
 - M.1.1. Asociación de la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
 - M.1.2. Diversas posibilidades de expresar un número como producto de otros dos.
 - M.1.3. Establecimiento de relaciones entre la multiplicación y la división.
- M.2. Formación del triángulo, el rectángulo o el cuadrado utilizando otras figuras de su familia.
- M.3. Interpretación y anticipación de regularidades geométricas que permiten predecir series numéricas.
- M.4. Resolución de problemas que impliquen:
 - M.4.1 Repartición equitativa aprovechando regularidades según lo expresado por Freudenthal.

- M.4.2. Sumar y restar con naturales en situaciones que amplíen su significado considerando, en particular, complemento y diferencia
- M.4.3. Proporcionalidad:
 - CM.4.3.1. Relación entre variables
 - CM.4.3.2. Análisis de proporcionalidad entre variables.
- M.5. Determinación de diferentes fracciones de la unidad desde el contexto parte – todo, es decir, como subárea de una región unitaria.
 - M.5.1. Asignación del número fraccionario independientemente de la forma.
- M.6. Estimación, aproximación por truncamiento.
- M.7. Medición de longitud. Unidad de medida.

Las ideas acerca del concepto de área (A)

- A.1. Descomposición, composición y reconocimiento de figuras que dan forma a otra.
- A.2. Distinción de la noción de conservación de área cuando una figura se descompone y se recompone con otra forma.
- A.3. Ordenamiento de figuras respecto del área, por inclusión o por romper y rehacer
- A.4. Relación de figuras respecto de sus áreas a través del concepto de fracción como parte- todo
- A.5. Distinción y relación entre los conceptos de área y perímetro, utilizando medidas no convencionales.
- A.6. Comprensión de la medición como la reiteración de una unidad de medida a partir de pavimentado o cubrimientos sin superposiciones y sin dejar huecos
 - A.6.1. División y pavimentación de la superficie a medir y conteo del número de unidades empleado.
 - A.6.2. Cálculo del número de unidades empleado como producto de medidas lineales.

Conexiones

- C.1. Aproximación al concepto de área.
- C.2. Conceptualización de fracciones desde el concepto parte –todo, por ejemplo, partes de distintas formas representan la misma parte respecto del todo. Es decir las fracciones con respecto al concepto de área cobran sentido y permiten interpretar la lectura desde el

marco numérico al marco geométrico

- C.3. Organizaciones rectangulares del campo multiplicativo y el área. Es decir, Relación entre el número total de cuadrados que existe en una figura rectangular a través de su cubrimiento y la multiplicación entre el número de filas y la cantidad de cuadrados por cada fila, como etapa previa para acceder a la construcción comprensiva de las formulas.

Para la implementación de estos cuestionarios y a fin de brindar confiabilidad y rigor a los mismos, se aplicó el cuestionario- a modo de prueba “piloto” – a la totalidad de los niños de un quinto año de una escuela privada de la región. Su población escolar poseía características similares al grupo a investigar, pues si bien la formación profesional de sus padres era heterogénea, todos se preocupaban por la educación de sus hijos.

A través de este cuestionario, se pretendió comprobar si los problemas o actividades propuestas resultaban comprensibles para los niños y si las respuestas eran pertinentes para esta investigación. Se aplicó a la totalidad de los niños aunque podían o no, incluir su nombre. La información que brindaron los cuestionarios de pilotaje resultó rica y significativa para realizar la construcción definitiva del instrumento.

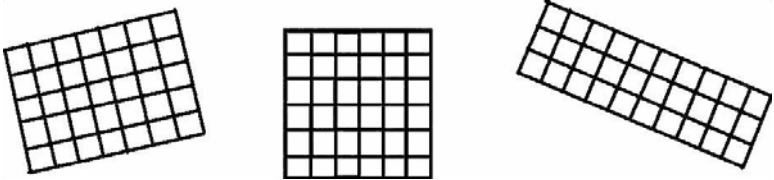
En la toma de cada uno de los cuestionarios- en las instancias de pilotaje como en la investigación - se le brindó a cada uno de los niños una copia escrita y ellos los resolvieron en hoja aparte de forma individual. La maestra leyó los enunciados con el objeto de evitar errores de interpretación, facilitar la familiarización con las actividades a resolver y les expuso que en cada actividad escriban las razones por las que arribaron al resultado. Se aplicó en días no sucesivos, durante dos sesiones de sesenta minutos.

Los resultados obtenidos en el cuestionario sobre los conocimientos matemáticos primitivos y sobre las ideas acerca del concepto de área serían insumos para el diseño de la unidad de aprendizaje. Es por ello que la maestra no hizo puesta en común inmediata pues el análisis de cada actividad era referente para comentarios posteriores inmersos en el desarrollo de la secuencia de aprendizaje. Las respuestas obtenidas se registraron a través de la producción escrita.

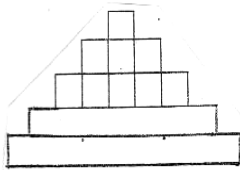
3.5.1.1- CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS PRIMITIVOS (CM)

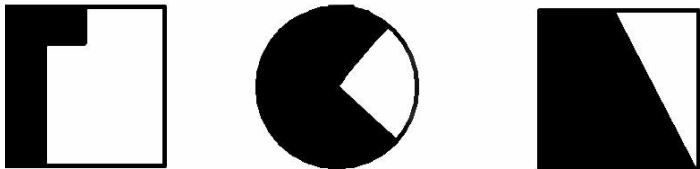
Como mencionamos en el apartado anterior, previamente se aplicó un cuestionario en calidad de pilotaje (Anexo I) con el objeto de efectuar las modificaciones necesarias para que los problemas escogidos cumplieran con los objetivos propuestos. El cuestionario se componía de nueve actividades.

A continuación vamos enunciar las consideraciones que se tuvieron en cuenta para esa disposición, en base a los resultados arribados en la toma piloto. Al mismo tiempo, se explicitan el contenido abordado y la intención que nos guió para su aplicación. Por ejemplo: El primer ítem presentó dificultades pues los niños desconocían aquellos cálculos multiplicativos que corresponden al tipo de producto de medidas (disposiciones rectangulares). No obstante, la maestra consideró que su inclusión era pertinente pues los niños habían llegado a comprender la multiplicación desde esa perspectiva.

Ítem N° 1	
<i>Contenidos:</i> M.1.- Resolución de problemas de multiplicación y división que involucran organizaciones rectangulares. M.1.1.-Asociación de la cuadrícula con el modelo multiplicativo.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
Cada uno de ustedes recibirá distintas cuadrículas. Pueden enviarme un mensaje, a través de un cálculo, que indique cuáles son las cuadrículas recibidas 	Anticipar la cantidad de cuadraditos de cada una de las cuadrículas, a través del cálculo más económico e identificar la operación (a .b) como recurso para su resolución. En función de la estructura multiplicativa propuesta por Verg-naud (1991) quien lo asocia con el producto de medidas.

La segunda y la tercera actividad se dispusieron en el mismo orden en que estaban dispuestos.

Item N° 2	
Contenidos: M.3.-Interpretación y anticipación de regularidades geométricas en figuras que permiten predecir series numéricas.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
¿Cuántos cuadraditos habrá en ésta fila? ¿Y en ésta otra? 	Anticipar y descubrir regularidades los cuales resultan necesarios para encontrar resultados por inducción, los que cobran sentido en la resolución de problemas

Item N° 3	
Contenidos: M.5.- Determinación de diferentes fracciones de la unidad desde el contexto parte-todo, es decir, como subárea de una región unitaria M.5.1.-Asignación del número fraccionario independientemente de la forma.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
Cada figura tiene una parte pintada de negro. Indícala mediante una fracción 	Distinguir fracciones desde un marco geométrico a uno numérico. Identificar $\frac{3}{4}$ de la superficie independientemente de la forma.

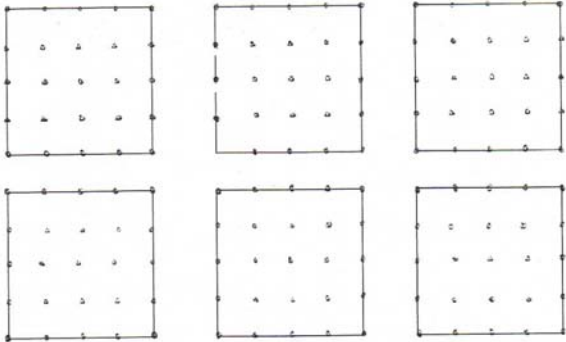
La cuarta actividad corresponde a la quinta del cuestionario piloto, pues pensamos que quedó mal ubicado y algunos niños no lo vieron, por lo tanto cambiamos su disposición.

Item N° 4	
<i>Contenidos:</i> M.1.1.-Asociación de la cuadrícula con el modelo multiplicativo. M.1.2.- Diversas posibilidades de expresar un número como producto de otros dos. M.1.3.-Establecimiento de relaciones entre la multiplicación y división	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
¿Cuántos rectángulos puedes construir con 12 cuadrados? En caso de existir más de uno, señala la longitud de sus lados. Fundamenta para ello, tu respuesta.	Detectar en el problema de organización rectangular, el cálculo que permite resolver. Expresar las distintas posibilidades que forman el conjunto solución, utilizando de manera implícita las propiedades de la operación involucrada.

La quinta actividad corresponde a la cuarta del cuestionario de pilotaje y además se amplía y se repite el dibujo varias veces (6 veces), de modo que se llegue, si es el caso, a alguna descomposición no usual. Es decir la siguiente actividad:

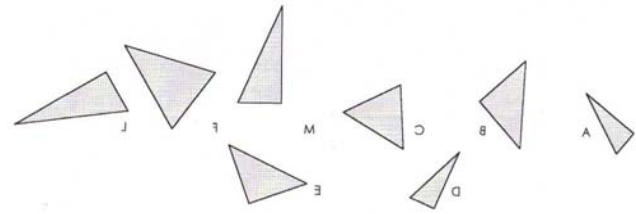
Item N° 4 (en el cuestionario de pilotaje)	
<i>Contenidos:</i> M.4.1.-Repartición equitativa aprovechando regularidades según lo expresado por Freudenthal .	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
Pinta de rojo y verde, como más te guste, el siguiente cuadrado. Debe resultar, la misma cantidad de cada uno de los colores.	Detectar a través de esta <i>situación abierta</i> . Por un lado, los procedimientos de resolución que utilizan los niños en la RP. Por otro, la construcción de un concepto, supone la repartición de forma equitativa- según Freudenthal. Para ello se consideró solamente los puntos de manera que el niño pueda proponer libremente las formas de las mitades para realizar dicha repartición.

Se reemplaza por

Item N° 5	
Contenidos: M.4.1.-Repartir equitativamente aprovechando regularidades según lo expresado por Freudenthal	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
Pintá de rojo y verde, como más te guste, los siguientes cuadrados. Debe resultar, en cada uno de ellos, la misma cantidad de cada uno de los colores. 	Detectar a través de esta <i>situación abierta</i>, los procedimientos de resolución que utilizan los niños en la resolución de problemas. Con respecto a la construcción de un concepto, según Freudenthal, su-pone la repartición de forma equitativa. Para ello se repite el dibujo de manera que el niño pueda proponer libre-mente las formas de las mitades para realizar dicha repartición

Según los resultados de la sexta actividad se desprende falta de claridad del enunciado. En lo que respecta a los resultados propuestos, se pensó que sólo se podían usar los triángulos dados, por lo que consideramos conveniente redefinir la situación así:

Item N° 6	
Contenidos: M.2.-Formación del triángulo, el rectángulo o el cuadrado utilizando otras de su familia.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
Imaginá que cuentas con varios triángulos de cada uno de los modelos presentados.	Detectar si establece relaciones entre figuras geométricas. Componer figuras a partir de otras como medio para poder establecer afirma-

 Indica a través de la letra correspondiente, los modelos que te permiten formar: 6.1.-Rectángulos. 6.2.-Cuadrados. Justifica tu elección.	ciones sobre ellos, sin necesidad de apelar a la comprobación empírica.

Las restantes actividades se incluyen como estaban:

Ítem N° 7	
<i>Contenidos:</i> M.4.3.1.-Relación entre variables. M.4.3.2.-Análisis de proporcionalidad entre variables.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
Luís pasea los domingos y suele visitar librerías buscando precios baratos. Así visitó la librería “Rayuela” y encontró la siguiente propuesta ¿Es una oferta la que ofrece? ¿Por qué? Justifica tus argumentaciones 	Indagar sobre la pertinencia o no, de recurrir al modelo proporcional para resolver situaciones. Reconocer situaciones en la que no pueden utilizar propiedades de la proporcionalidad.

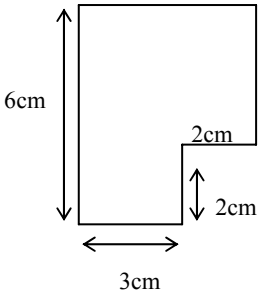
Ítem N° 8	
<i>Contenidos:</i> M.6.-Estimación: aproximación por truncamiento. M.4.2.- Sumar y restar con naturales en situaciones que amplíen su significado considerando, en particular, complemento y diferencia	

<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
Aproxima cada peso a la centena y calcula.  ¿Cuánto pesan aproximadamente, las naranjas? ¿Y las bananas? ¿Cuántos más pesan las manzanas que los duraznos?	Considera la estimación como estrategia conveniente que permite a los niños reflexionar acerca de la formación mental de la unidad de medida solicitada. De modo que esta actividad es considerada como complemento a la interiorización de las unidades de medida. Debido a la inexactitud que brindan los instrumentos de medida en aquellas situaciones en las que hay que emplear números y trabajar con ellos.

Ítem N° 9*Contenidos:*

M.8.-Medición de longitud. Unidad de medida.

M.4.2.- Sumar y restar con naturales en situaciones que amplíen su significado considerando, en particular, complemento y diferencia

<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
Calculá, sin medir con la regla, la longitud de los restantes lados de la figura. Fundamenta tu respuesta. 	Indagar acerca de las magnitudes involucradas, las estrategias de cálculo en problemas sobre suma y resta, así como también detectar las posibles anticipaciones de las longitudes de los lados por complemento.

En la tabla 8, detallamos en cada una de las actividades que componen el cuestionario, la fuente de procedencia y tipología de los mismos.

Actividad	Fuente	Tipología ⁶³
1	Formulación propia	Bien estructurado
2	III: Segundo Ciclo. Matemáticas. Grupo Cero. Recursos y materiales de 12 a 16 años. Edelvives. Pág. 12	Cualitativos
3	Adaptado de Barallobres, G.(1997) Matemática 7 EGB . Edit AIQUE.	De traducción simple
4	Formulación propia	De procesos
5	Pujadas, M. (2000) Fracciones: Un quebradero de cabeza. Novedades Educativas. P. 65.	De proceso - Visual
6	Formulación propia	Cualitativo- Visual
7	Reformulado	Bien estructurado
8	Formulación propia	Bien estructurado
9	Adaptado de Libro de 6 ^{to} -Recursos de Primaria. Proyecto Albanta. P. 393	Cuantitativos

Tabla 8: Procedencia de las actividades del cuestionario de conocimientos matemáticos y tipología

⁶³ Decimos que un problema es *Bien estructurado* –según Simón (1973) y Frederiksen(1984) citados por Santos Trigo (1997) y Madruga(2002)- cuando el planteamiento, la solución y el tipo de operación a realizar están previstos de forma clara y el niño debe diseñar un procedimiento para arribar a la solución, Pérez Echeverría (1994), se refiere problemas: *cualitativos*: los que a través de métodos inductivos permiten analizar conceptos y procedimientos geométricos y *Cuantitativos*: cuando se utilizan algoritmos y técnicas matemáticas en contextos distintos a los que fueron enseñados. Blanco- Nieto (1986) fundamenta su tipología sobre la base de los aportes de Butts (1980); Charles Lester (1982); Borasi (1986).se refieren a problemas de *Traducción simple* y a los de *Procesos*.-Por ejemplo nos referimos a problemas de *De traducción simple* a los formulados en un contexto particular y su resolución presume la traducción del enunciado, en otro marco (grafico, simbólico, etc.),y *De proceso* los que admiten varios modos de encontrar la solución. *Visuales* –Arcavi &Friedlander, 2007- la observación es una estrategia importante de resolución.,

La toma de este cuestionario (Anexo II) nos permitió detectar:

- ✓ Identificación de la cantidad de cuadraditos dispuestos de manera rectangular con un cálculo de multiplicación- Actividad 1-, corroborando lo manifestado anteriormente por la maestra.
- ✓ Comprensión del hecho de que partes de distinta forma pueden representar la misma parte del todo. En algunos casos, se observa también dificultad en expresar la parte respecto del todo mediante una fracción. Actividad 3
- ✓ Relación de la organización rectangular, con el cálculo que permite determinar la cantidad de tal organización. Este aspecto, sin embargo, se convirtió en un obstáculo a la hora de pretender formular los distintos rectángulos que se pueden formar con los 12 cuadraditos; y en consecuencia no señalan la longitud de sus lados. - Actividad 4-
- ✓ Anticipar resultados al componer figuras para formar otra, sin necesidad de realizar acciones empíricas y sin apoyarse exclusivamente en la percepción⁶⁴. En este caso se observaron dificultades en la Actividad 6-.
- ✓ Conocimientos sobre estimación- truncamiento- Se detectaron dificultades según puede observarse en la Actividad 8.

Estas consideraciones son insumos significativos a tener en cuenta cuando se planifica la unidad de aprendizaje y constituyen el *conocimiento matemático primitivo* - noción que abordamos en el capítulo anterior, apartado 2.3.1.- de cada caso a la hora de comenzar el proceso de análisis propuesto.

3.5.1.2.-CUESTIONARIO DE IDEAS PREVIAS ACERCA DEL CONCEPTO DE ÁREA (IA)

Nosotros deseábamos averiguar las ideas previas, acertados o no, que poseían los alumnos acerca del concepto de área, desde un tratamiento geométrico

⁶⁴ Según Rencores-Bustos (1994) la percepción es un proceso cognitivo y se vincula con la forma personal en que el niño organiza e interpreta la información que le llega a través de los sentidos, en este caso particular, la vista.

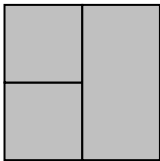
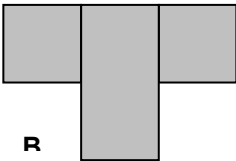
y numérico⁶⁵. Desde el tratamiento geométrico, pretendimos que los niños percibieran la conservación de la cantidad de área a través de diversas transformaciones, puesto que Euclides y Piaget, citados por Spieser (2006), manifiestan que la conservación de la magnitud es fundamental para el reconocimiento de figuras equivalentes. En cambio, desde un tratamiento numérico, deseábamos que efectuaran el cubrimiento de distintas superficies con la ayuda de diversos embaldosados. Estos aspectos nos impulsaron a construir en una primera instancia un instrumento “piloto” en vistas a detectar si los niños podrían:

- ✓ Distinguir sin necesidad de medir, el área de formas y su conservación, a través de diversas transformaciones.
- ✓ Asociar cantidad de superficie y la forma de una figura.
- ✓ Establecer relaciones entre área y perímetro, utilizando medidas no convencionales.
- ✓ Comprender la medición de una superficie como la reiteración de una unidad de medida, a partir del uso de cuadrícula, superposición, pavimentado o cubrimientos.
- ✓ Relacionar el cubrimiento de figuras rectangulares con cuadrados y la multiplicación entre el número de filas, el número de cuadrados por fila, imprescindibles en la construcción comprensiva de las fórmulas.

El cuestionario se componía de ocho actividades. A continuación, vamos a enunciar las consideraciones que se tuvieron en cuenta para esa disposición, en base a los resultados arribados en la toma piloto (Anexo III). Al mismo tiempo se explicitan el contenido abordado y la intención que nos guió para su aplicación. Por ejemplo:

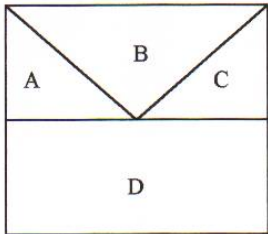
La primera y segunda actividades se presentan sin cambios

⁶⁵ Por *tratamiento geométrico* nos referimos a la aproximación que se pueda realizar al concepto de área independientemente de su medida y por *tratamiento numérico* cuando abordamos la medida a través de la pavimentación y, en función de ello, consideramos la noción de unidad de área.

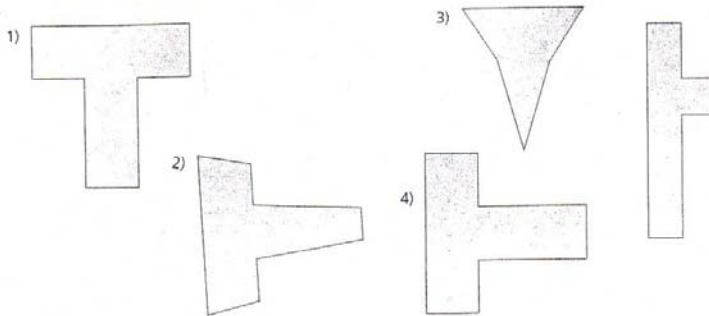
Item N° 1	
Contenidos: A.2.- Distinción de la noción de conservación de área cuando una figura se descompone y se recompone con otra forma.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
Con las piezas de la figura A se ha formado la figura B. Si tuvieras que pintar ambas figuras. ¿Utilizas diferente cantidad de pintura para cada una de ellas? Fundamenta tu respuesta  A  B	-Detectar si los alumnos manifiestan la conservación de la magnitud cuando es sometida a transformaciones, por ejemplo, se descompone y recompone.

Item N° 2	
Contenidos: A.6.1.-División y pavimentación de la superficie a medir y conteo del número de unidades empleado. A.6.2.- Cálculo del número de unidades empleado como producto de medidas lineales.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
¿Cuántos cuadrados como el de la izquierda caben en el rectángulo de la derecha? ¿Cómo lo calculaste?  	-Detectar si los alumnos comprenden la medición de una superficie como la iteración de otra superficie, considerada unidad de medida, a partir de pavimentados o recubrimientos, apelando a comprobación empírica. -Vincular el campo multiplicativo con la formaciones rectangulares

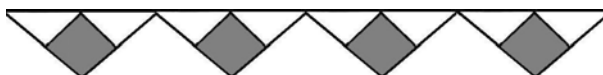
La tercera actividad se reformula la pregunta para una mejor comprensión del mismo Así, “¿qué fracción del rompecabezas representa cada pieza?” se reemplaza por:

Item N° 3	
<i>Contenidos:</i> A.2.- Distinción de la noción de conservación de área cuando una figura se descompone y se recompone con otra forma A.4- Relación de figuras respecto de sus áreas a través del concepto de fracción como parte todo.	
Enunciado	Intención en el marco de la propuesta
A Lucía le han regalado un rompecabezas cuyas piezas tienen la forma que indica el dibujo. ¿Qué parte del rompecabezas representa cada pieza? 	Establecer relaciones entre la parte y el todo, utilizando fracciones. Utilizar fracciones para relacionar áreas.

La cuarta actividad del cuestionario piloto no aporta conocimiento respecto al tema que nos ocupa, pues al dar la unidad se convirtió en un ejercicio numérico. Se elimina y, en consecuencia, se sustituye por el siguiente que permite comparar áreas, desde una etapa geométrica.

Item N° 4	
<i>Contenidos:</i> A.3.- Ordenamiento de figuras respecto del área, por inclusión o por romper y rehacer	
Enunciado	Intención en el marco de la propuesta
Sobre una hoja se dibujaron los siguientes diseños de escudos para un club, que serán hechos con tela de color. ¿Para cual de todos, se necesita la menor cantidad de tela en su confección? Justifica tu respuesta. 	Comparar y ordenar figuras según su área, mediante inclusión y/o transformación rompiendo y rehaciendo en otro.

En la quinta actividad, la intención de este problema ha sido detectar la capacidad de reconocer si una figura se descompone o recompone con otras formas. En el enunciado, cuando expresa “¿Cuántos cuadrados hay en total? ¿Cuántos triángulos hay en total?”,



Indicamos la forma a considerar pero pensamos que al haber preguntado la cantidad que “hay”, el niño responde en función de lo que percibe, es decir, lo que está formado, pero no considera la posibilidad de los que resultan de componer o descomponer en otras figuras con esas formas.

Aunque este ítem figuraba en el cuestionario piloto, esta dificultad no la detectamos en ese momento. Al analizar nuevamente el enunciado pensamos que deberíamos haberlo expresado así:

Observa la guirnalda. Entre cuadrados y triángulos:

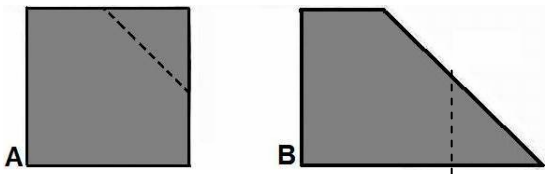
a.-¿Cuántos cuadrados se pueden formar en total?

b.-¿Cuántos triángulos se pueden formar en total?

Estas observaciones nos llevaron a desestimar esta actividad.

La sexta actividad muestra cómo se transforma la figura A, en la figura B (de la derecha) y para ello, es conveniente trazar en esta figura, una línea punteada.

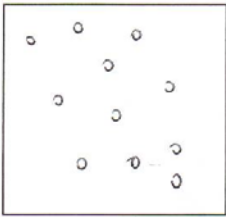
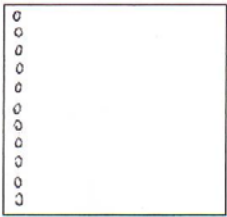
Ítem N° 6	
<i>Contenidos:</i> A.2.- Distinción de la noción de conservación de área cuando una figura se descompone y se recompone con otra forma A.5.-,Distinción y relación entre los conceptos de área y perímetro, utilizando mediatas no convencionales	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
En la figura A se ha recortado por la línea de puntos una de las esquinas; y se ha ubicado como indica la figura B.	Indagar sobre la conservación del área y la obtención del perímetro utilizando unidades no convencionales

 A B ¿Qué podes decir acerca de la cantidad de superficie que ocupa cada una de las figuras? Si quisieras bordear cada una de las figuras con un hilo. ¿Qué podes decir acerca de la cantidad de hilo necesario para cada una de ellas? Justifica tu respuesta.	

Item N° 7	
<i>Contenidos:</i> A.6.1.-División y pavimentación de la superficie a medir y conteo del número de unidades empleado. A.6.2.- Cálculo del número de unidades empleado como producto de medidas lineales.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
Deseo empapelar el pizarrón con hojas de papel glasé. ¿Cuántos de esos papeles necesitaré aproximadamente?	Transferencia de conocimientos del campo multiplicativo para estimar el resultado en el recuento de la unidad requerida cuando no se puede apelar a comprobaciones empíricas.

Consideramos la actividad 8 pues - en general- los niños asignan mayor superficie a las superficies menos compactas. En particular, lo utilizaremos como anclaje, pues el mismo, forma parte de la evaluación de calidad efectuada a alumnos de séptimo año de escuelas de la provincia de Buenos Aires.

Item N° 8	
<i>Contenidos:</i> A.2.- Distinción de la noción de conservación de área cuando una figura se descompone y se recompone con otra forma	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>

Una máquina perforadora hace agujeros circulares, todos del mismo tamaño, sobre planchas de aluminio cuadradas. ¿Qué podés decir acerca de la cantidad de aluminio que tiene cada plancha? Justifica tu respuesta  A  B	Detectar si los alumnos manifiestan la conservación de la magnitud cuando es sometida a transformaciones.

En la tabla 9, detallamos en cada una de las actividades que componen el cuestionario, la fuente de procedencia - en el caso que haya sido extraído de un libro-, según explicitaremos la caracterización de la secuencia de aprendizaje en el apartado 3.5.2.1.1.3.-.

Actividad	Fuente	Tipo ⁶⁶
1	Libro de 6 ^{to} -Recursos de Primaria. Proyecto Albanta. Pág. 390	Cualitativo-Visual
2	Adaptado del Libro de 6 ^{to} -Recursos de Primaria. Proyecto Albanta. Pág. 392	Bien estructurado
3	Adaptado de Pujadas, M (2000) Fracciones: Un quebradero de cabeza, Novedades Educativas. Pág. 37,	Bien estructurado
4	Barallobres, G.(1997) Matemática 7 EGB . Edit AIQUE. Pág 119	Por descubrimiento - Cualitativo -

⁶⁶ Decimos que un problema es *Bien estructurado* –según Simón (1973) y Frederiksen (1984) citado por Santos Trigo (1997) y Madruga (2002)- cuando el planteamiento, la solución y el tipo de operación a realizar están previstos de forma clara y el niño debe diseñar un procedimiento para arribar a la solución, *sobre situaciones reales*: cuando se relaciona con hechos cotidianos que requieren desarrollo de habilidades, conceptos y procesos matemáticos. Pérez Echeverría (1994), se refiere problemas: *cualitativos*: los que a través de métodos inductivos permiten analizar conceptos y procedimientos geométricos. Arcavi-Friedlander (2007) se refieren problemas: *Visuales*: en la cual la observación es una estrategia importante de resolución. *de descubrimiento*: en el cual el niño tiene que aprender algo nuevo y para ello propone ideas y trata de implementarlas y los de *investigación* son problemas complejos asignados luego de aprender un tema

5	III: Segundo Ciclo. Matemáticas. Grupo Cero. Recursos y materiales de 12 a 16 años. Edelvives. Pág 244.	Cualitativo- Visual
6	Libro 6 ^{to} - Recursos de Primaria. Proyecto Albanta .Pág 393.	Bien Estructurado
7	Formulación propia	Sobre situaciones reales
8	Evaluación de calidad -Dirección de Cultura y Educación de la Pcia de Buenos Aires -2001 – Ítem 20 ⁶⁷	De investigación matemática- Sobre situaciones real.

Tabla 9: Procedencia de las actividades del cuestionario y tipología

Los resultados de este cuestionario (Anexo IV) nos ofrecieron información pertinente para tomar decisiones didácticas a la hora de construir la unidad de aprendizaje que favoreciera el desarrollo de la construcción del concepto. A continuación enunciamos cómo proseguimos con este trabajo:

- ✓ Mayormente, llegaron al resultado por cubrimiento y algunos además, lo relacionaron con el cálculo correspondiente - Actividad N° 2-.
- ✓ Generalmente, se refirieron a la forma de las figuras, solamente dos alumnas relacionaron cada una de las partes con el todo.- Actividad N°3-
- ✓ Inferimos que los alumnos no descomponen ni recomponen las figuras.
- ✓ En general, mostraron dificultades para efectuar estimaciones, de la misma manera que con la actividad N° 9 del cuestionario de conocimientos matemáticos previos.
- ✓ Mayor habilidad se observó en aquellos ítems que involucraron el cálculo de áreas por inclusión.

⁶⁷Esta actividad se extrajo de la referencia mencionada, pero somos conscientes de que supone una adaptación respecto de la formulada por Hart y otros (1981, citado por Del Olmo, Moreno y Gil, 1993; p.25), propuesta como ítem 7 del C.S.M.S, cuya finalidad era investigar la conservación de área en niños de edades comprendidas entre doce y catorce años. Aunque la formulación de la pregunta es la misma, existen diferencias en la representación gráfica mostrada. Optamos por incluir la otra, por haberse tomado en la evaluación de calidad que se realizó en ese momento a los alumnos de esta provincia.

En definitiva, los problemas propuestos en este cuestionario –de ideas previas acerca del concepto de área- facilitó el abordaje de ideas en función de algunas categorías que anticipáramos para este trabajo y que explicitáramos en el capítulo anterior, en el apartado 2.4.4.1. De esta forma, reiteramos que los aspectos detectados se tuvieron en cuenta para confeccionar la unidad de aprendizaje.

3.5.2.- LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

El diseño de la unidad de aprendizaje es entendido como *un proceso de toma de decisiones que configura una hipótesis de trabajo, se verifica con la puesta en práctica y la reflexión simultáneas y posteriores sobre los fenómenos que han ocurrido en el aula durante la aplicación* (Martínez, 1995, p.22). Así concebida la unidad de aprendizaje desempeña en este trabajo, un doble papel, por un lado, como instrumento de planificación de enseñanza para la maestra, quien pretende promover el proceso de aprendizaje en los niños basado en la resolución de problema y por otro lado, como instrumento de obtención de información para la investigación.

3.5.2.1.- COMO INSTRUMENTO DE ENSEÑANZA

La unidad de aprendizaje como instrumento de enseñanza nos lleva a identificar los conceptos relacionados con el concepto a construir, indagar lo que el alumno ya sabe en relación a ellos y al contenido a enseñar (ideas previas). Con respecto a las dificultades que afrontan los niños -cuando abordan el tema- algunas se deben a los modos de organizar la enseñanza, otras, a generalizaciones que realizan acerca de las propiedades alrededor de un concepto y a casos en los que dejan de cumplirse estas propiedades. Estos aspectos nos llevaron ya en el capítulo anterior, a abordar el conocimiento matemático disciplinar y curricular del concepto. Así como también a fundamentar la unidad de aprendizaje desde ciertos organizadores curriculares, la evolución histórica del concepto, la fenomenología de los conocimientos implicados; las dificultades y sus errores, la diversidad de representaciones de la noción. Con el propósito de formular conje-

turas acerca de los posibles caminos por los que se puede desarrollar su aprendizaje, que revelan el proceso de construcción del conocimiento y facilitan el diseño de la unidad didáctica.

Estos organizadores se relacionan con la evolución histórica que ha tenido el desarrollo del concepto por parte de la humanidad, con el fenomenológico, en referencia a los aspectos del concepto en un nivel de educación en particular, con las distintas representaciones en el cual enunciamos el concepto - geométrico, gráfico y numérico- sus posibles errores y dificultades de aprendizaje y su relación con las categorías que anticipamos.

Planificamos la unidad desde dos niveles: uno más amplio, referido a la *contextualización*, la *resolución de problemas como estrategia metodológica*, según expresamos en los apartados 3.4.1 y 2.5.3.respectivamente, y la concreción de los *objetivos y contenidos generales*, y otro propio de *la secuencia de aprendizaje*, en la que se presentan actividades en función de distintos sistemas de representación y sus conexiones de manera que el concepto cobra sentido.

La idea de planificación es un proceso de anticipación, una hipótesis de trabajo, un bosquejo flexible que reduce la incertidumbre y permite orientar y analizar las clases. Es concebida como un proceso espiralado de conocimiento que avanza en extensión y profundidad Se trata de prever nuevos abordajes, de modo que, en cada vuelta del espiral los conocimientos abordados superen los anteriores.

Desde este enfoque didáctico, globalizado e integrado, se retoma en distintas instancias un mismo concepto. La planificación es pues, una herramienta, una hoja de ruta del docente. Una instancia para reflexionar y tomar decisiones, acerca de qué se desea enseñar y cómo hacerlo y según se vaya desarrollando, admite las revisiones necesarias en vista a promover nuevos aprendizajes (Martínez, 1995; Marín, 1997; Tarasow, 2007; Davini, 2008).

3.5.2.1.1- SU PLANIFICACIÓN

La unidad de aprendizaje formulada fue propuesta y elaborada por la

maestra pero discutida y consensuada con la investigadora⁶⁸, esta última ofreció a ella diferentes problemas y la maestra utilizó alguno de ellos, en función de las características del grupo.

Para el diseño desde un nivel más amplio explicitamos y completamos los aspectos mencionados.

3.5.2.1.1.1.-Concreción de objetivos

Los resultados de la aplicación de los cuestionarios iniciales- según se explicitaron en apartados 3.5.1.1 y 3.5.1.2-, denotan las representaciones que los alumnos saben y tienen sentido para ellos, lo que impulsó a proponer los siguientes objetivos.

- a) Disociar el concepto de área de una superficie con su forma y con el número que la mide.
- b) Diferenciar la noción de área y de perímetro de una superficie y analizar la relación entre los mismos cuando la superficie es sometida a determinadas transformaciones.
- c) Deducir la fórmula del área del rectángulo, del cuadrado y del triángulo como camino más económico.
- d) Resolver los problemas que se les planteen utilizando estrategias y recursos pertinentes.
- e) Analizar tanto sus estrategias como las de sus compañeros, cuando sea conveniente para resolver problemas.

⁶⁸ Para la maestra el intercambio producido en la confección del diseño le resultaba enriquecedor y la investigadora procuró detectar aquellas representaciones intermedias que se producen de forma continua en la resolución de problemas convenientemente elegidos. Sin embargo, a pesar de la importancia que posee la unidad de aprendizaje en esta investigación, no se trata de un *teaching experiment* (Steffe & Thompson, 2000, Molina, 2007). Nos posicionamos en este estudio como investigadores, no como docentes, por lo que no nos interesa evaluar la validez de la actividad de enseñanza y modificarla a través de los sucesivos ciclos de investigación. Por el contrario, se convierte en un medio para acceder al proceso a través del cual los alumnos comprenden el concepto de área.

3.5.2.1.1.2.- Concreción de Contenidos

Los contenidos sugeridos vigentes en esa oportunidad, en el Diseño Curricular (2001), se encuentran enunciados por ciclo, para esta unidad de aprendizaje resulto necesario efectuar una secuenciación de los mismos de manera tal que permitiera mostrar el progreso en el tratamiento de los mismos. Teniendo en cuenta las sugerencias enunciadas al final del capítulo anterior los contenidos seleccionados fueron:

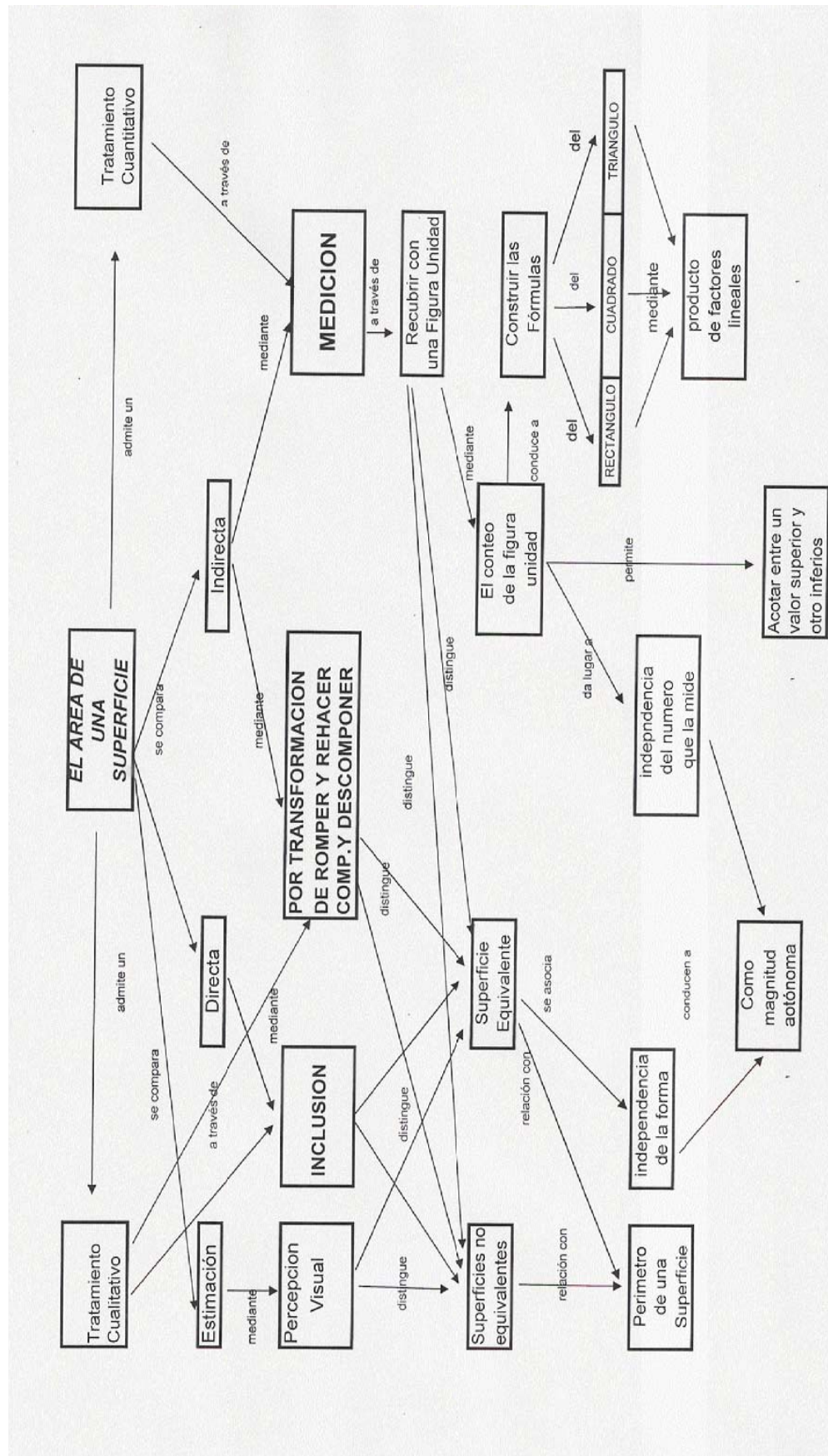
- ✓ Noción de área sin recurrir a medidas convencionales mediante distintas técnicas.
- ✓ Descomponer, componer y reconocer las figuras que dan forma a otra. Noción de Figuras equivalente:
- ✓ Comparación de figuras.
- ✓ Situaciones que involucren una exploración de la independencia de las variaciones del perímetro y/o del área de superficie.
- ✓ Área por cubrimiento. Equivalencia entre distintas unidades de medida no convencionales.
- ✓ Relacionar áreas de superficies mediante fracciones.
- ✓ Formulación de conjeturas, anticipaciones y generalización a partir de la observación de experiencias y la intuición para resolver problemas.
- ✓ El uso de distintas formas de lenguaje matemático para expresar relaciones entre variables en contextos geométricos (palabras, tablas, diagramas, gráficos)
- ✓ Estimación de áreas de superficies.
- ✓ La construcción de fórmulas del triángulo, de cuadrilátero (rectángulo y cuadrado).
- ✓ Interpretación de las relaciones entre los datos y la incógnita en situaciones problemáticas sobre superficies presentadas en forma escrita.

De este modo nos aproximamos al concepto que nos ocupa mediante un tratamiento *cualitativo*⁶⁹, *cuantitativo* y a la utilización de los procedimientos que nos permiten calcular el área de superficies a través de: repartir equitativamente, comparar, reproducir y medir, según lo expresa Freudenthal (1983) según nos ocupamos en el capítulo anterior, en los apartados 2.4.4.2.

Estos aspectos nos permitieron armar el siguiente mapa conceptual (ver gráfico 3) que orienta la confección de la secuencia en vistas a permitir el progreso en el tratamiento del conocimiento escolar deseable en este trabajo.

⁶⁹, a través de actividades que favorezcan la comparación de superficies, antes de emplear unidades y fórmulas convencionales.

Gráfico 3: Mapa conceptual que orienta el desarrollo de la secuencia



3.5.2.1.1.3.-La secuencia de aprendizaje (S): Sus características

Es necesario señalar que consideramos que se progresa y se evoluciona en la construcción de un concepto cuando para su aprendizaje se efectúan aproximaciones sucesivas alrededor del mismo en diferentes contextos. En el marco de este trabajo, denominamos secuencia de aprendizaje a la progresión de problemas y actividades convenientemente seleccionados, relativos a la noción que se aspira construir y que dan al niño la oportunidad de construir, mejorar y reutilizar dicha noción. Implica un proceso complejo que permite establecer relaciones con otros conceptos matemáticos del mismo campo conceptual, según se detalla con más precisión en el apartado 2.4.

Aspectos que llevan a la maestra a:

- ✓ Identificar los conceptos claves para la comprensión del contenido.
- ✓ Considerar las sugerencias formuladas- resultado de los cuestionarios enunciados en el apartado anterior- sobre aquellos aspectos que los niños saben y lo que presentan dificultades en relación al contenido a enseñar.
- ✓ Planificar en relación al avance conceptual que se propone, es decir a través de qué situaciones el concepto cobra sentido.

De este modo, para elaborar la secuencia comenzamos por identificar los conceptos claves para la comprensión del contenido, en función de aquellas investigaciones que brindan pautas para el abordaje de la noción de área. Por ejemplo Bonotto (2003); Lehrer (2003); Kamii & Kysh (2006, citado por Speiser 2006); Curry, Mitchelmore & Outhred (2006), Zacharos (2006)- según el apartado 2.4.2- consideran que para abordar el diseño de actividades en vista a la construcción del concepto de área se deberán considerar en una primer instancia la medición directa para poder abordar con sentido la medición indirecta.

Asimismo, los conocimientos detectados o no, en los niños, según los respectivos cuestionarios iniciales, nos llevo a explicitar algunas *consideraciones acerca del estado de situación del tema a abordar. Los niños, por ejemplo:*

a.- Comprenden situaciones que involucran

a.1.-Organizaciones rectangulares, es decir el pasaje de

procedimientos de conteo a procedimientos de cálculo realizando sumas por filas o por columnas, lo que les permitió llegar al resultado por cubrimiento y además, lo relacionaron con el cálculo correspondiente

a.2.-El cálculo de área por método directo-inclusión-.

b.- Presentan dificultades en

b.1.-Expresar partes de un todo como fracciones.

b.2.-Anticipar resultados, en el caso las figuras por composición, sin necesidad de realizar acciones empíricas.

b.3.-Componer y recomponer figuras

En función de las consideraciones expresadas, se seleccionaron problemas que permitieron comenzar a incursionar el concepto desde:

- a) Comparación directa e indirecta de figuras.
- b) Comparación y ordenamiento de figuras (concreta y mentalmente) y utilización de un lenguaje que describa esas situaciones
- c) Determinación de figuras equivalentes
- d) Estudio de la variación o la conservación de área independientemente de la forma cuando se efectúan algunas transformaciones geométricas.
- e) Diferenciación de las nociones de área y de longitud, en particular, el perímetro, sin recurrir a las medidas convencionales.
- f) Uso de unidades no convencionales, es decir embaldosar superficies utilizando para ello distintas baldosas y determinando en función de ellas, el área de la superficie.
- g) Arribar a las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulo, como cálculo económico

Al comparar con los contenidos propuestos en el Diseño Curricular (2008) – actualmente vigente- podemos observar que el tratamiento de los contenidos enunciados en los incisos d y g, se proponen en 6° año.

Con respecto al material didáctico⁶⁹, pretendemos que los niños anticipen resultados, para efectuar luego comprobaciones de tipo argumentativo que le permitan finalmente corroborar empíricamente sus resultados, de manera que los mismos se obtienen son consecuencias de haber puesto en funcionamiento ciertas herramienta del aparato matemático. De no considerar estos aspectos la actividad queda reducida solamente a la manipulación del material y los resultados obtenidos son producto de la casualidad no pudiendo integrarlos al conocimiento específico.

En esta línea existen autores, por citar algunos, por ejemplo, Kordaki (2002), Owens & Othred (2006); Santos Trigo (2008) quienes sugieren el uso de software en la resolución de problemas pues potencian el desarrollo de heurísticas en vistas a conceptualizar el concepto, en cambio Cass; Cates; Jackson & Smith; (2002) sugieren material concreto manipulativo pues promueven el desarrollo de habilidades a largo plazo, Nosotros optamos por ésta última opción en función de la accesibilidad del material y el desenvolvimiento de los niños en el aula. Concretamente, se utilizó el Tangram⁷⁰ y se procuró que algunos problemas tuvieran un carácter manipulativo, que brinde la posibilidad trasladar, girar las superficies, lo que es imposible con superficies dibujadas. En otros se pretendió que, en principio, anticipen los resultados o bien se les brindó otros recursos, convenientemente elegidos, para poder utilizarlos como paso intermedio (cordones, acetato con cuadrícula, papel de trama cuadrangular, etc.).

Con respecto a las formas de las superficies se trató de evitar las estandarizadas o las formadas por polígonos regulares pues se convierten en un obstáculo a la hora de reconocer la cualidad superficie independiente de la forma. En cambio se trabajó con algunas superficies cóncavas y otras convexas, de manera que el niño no se viera forzado a reducir el campo de las mismas solamente al caso de las convexas. Se presentaron sobre papel liso, en algunos casos cuadrículados y en otros en papel de trama de puntos cuadrangular, todos ellos con una determinada intención didáctica.

⁶⁹ Coriat (2001) se refiere a ellos como los diseñados exclusivamente con fines educativos, diferenciándolos de los recursos, si bien reconoce que ambos son usados para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

⁷⁰ Es un juego de origen chino formado por 7 piezas, las cuales se combinan para reproducir diversas formas geométricas.

Las actividades fueron entregadas, en su gran mayoría, en material fotocopiado. Algunas de las planteadas requerían para su realización material didáctico adecuado y para ello, se les proporciono a cada uno de los niños, piolas o cintas, acetatos con cuadrículas, trama de puntos cuadrangular, reglas, todos ellos en el momento conveniente.

Todos los problemas propuestos guardan relación con los denominados por Charnay (1993) como una *situación- problema*, pues tienen como objetivo construir nuevos conocimientos. Comienza la secuencia con *problemas visuales* – Actividades 1 y 2-(Arcavi & Friedlander, 2007) en donde los niños tienen que observar y detectar las piezas que componen la figura, otorgando significado al Tangram como recurso matemático. En general los problemas están expresados desde un contexto matemático -excepto la actividad 13 -, se componen por *problemas puros*; otros problemas son considerados *bien estructurados* (Simón, 1973; Frederiksen, 1984 citados por Santos-Trigo, 2008) – Actividad 9 y 11 -, cuando la meta esta claramente definida y se sugiere el procedimiento para arribar a la solución. En los problemas *estructurados* –Actividad 7 y 10- (Frederiksen, 1984; Blum & Niss, 1991) la meta esta bien definida y el niño debe diseñar el procedimiento para arribar a una solución. También se distinguen *problemas estructurados y cualitativos* -Actividades 4, 5 y 6 -(Pérez Echeverría, 1994) pues el niño diseña aquellos procedimientos geométricos que le permiten formular la solución., la actividad 12 admite también el tratamiento de procedimientos numéricos, en la formulación no se sugiere un procedimiento en especial y permite corroborar el resultado. *Problemas por descubrimiento - cualitativo*- actividad 3- (Arcavi & Friedlander (2007) puesto que los niños acceden a conocimientos nuevos proponiendo ideas e implementando procedimientos geométricos. Algunos problemas son *abiertos* (Pehkonen, 1991),-por ejemplo uno de las actividades no implementadas, se denomina *Abierto al finalizar*, en el cual, existe más de una posibilidad para la solución. La actividad 8 denominado *campo de problemas*, lo conforman un grupo de problemas generados todos ellos por uno central. La Actividad 13 - relacionada con hechos de la vida cotidiana -cuya resolución no se reduce a la aplicación directa de instrumentos pero se sitúan en un contexto familiar de los niños, de manera que éstos pueden formular juicios y conjeturas.

Es decir, cada uno de los problemas que constituyen la secuencia, según Charnay (1994) son denominados *de reinversión*, pues para la resolución de cada uno de ellos se utilizan conocimientos anteriores de la secuencia. Entre ellos también están los problemas denominados de *familiarización* (Itzcovich, 2007) que permiten afianzar las características ya abordadas.

Algunos problemas se extrajeron de textos escolares del nivel, otros se adaptaron y los restantes fueron diseñados para este trabajo. En la tabla 10, detallamos en cada una de las actividades que componen la secuencia, la fuente de procedencia y la tipología de los mismos.

Actividad	Fuente	Tipología
2	Formulación propia	Problemas visuales
3	Barallobres, G. (1997) Matemática 7 EGB. AIQUE. Pág.; 119	Por descubrimiento cualitativo
4	Libro de recursos para 6º año Proyecto Albanta,.-1994	Estructurado y Cualitativo
5	Barallobres, G. (1997) Matemática 7 EGB. AIQUE. Pág.; 122	Estructurado y Cualitativo
6	Formulación propia	Estructurado y Cualitativo
7	Evaluación de Calidad. Del aula a las pruebas y de las pruebas al aula. 7mo. Dirección de Cultura y Educación de la Pcia de Buenos Aires -2001 –Pág. 40	Estructurado
No se implemento	Olimpiada Matemática Ñandú.	Abierto al finalizar
8	Libro de recursos para 6º Proyecto Albanta, Pág. 95	Abierto: Campo de problemas
9	Elaboración propia	Bien estructurados
10	Elaboración propia	Estructurados
11	Elaboración propia	Bien estructurados
12	Elaboración Propia	Estructurado y Cualitativo

	Elaboración Propia	Estructurado y Cualitativo
13	Elaboración propia	Abierto sobre situaciones reales

Tabla 10: *Procedencia y tipología de las actividades que componen la secuencia de aprendizaje.*

Esta secuencia se configura sobre la base de un posicionamiento de la unidad de aprendizaje abierta y flexible⁷¹, en la que prima la capacidad de análisis de cada una de las situaciones existentes en el grupo y planificando en función de ello. Por ello se transcriben cada uno de los problemas que compusieron la secuencia, aunque algunos luego no se implementaron⁷². Consideramos significativo presentarlo para que se pueda tener una idea global de la secuencia propuesta.

Para cada una de las actividades se enuncian además del objetivo⁷³, la intencionalidad de cada una de las tareas propuestas en el contexto de la secuencia (en función de las categorías ya expresadas en el apartado, 2.4.4.1.) pues nos permite una mirada más amplia hacia la concreción de los mismos. En algunos de las actividades se anticipan alguno de los posibles procedimientos de resolución de los niños que les permitan o no, arribar a la solución, explicitando la dificultad de aprendizaje que ellos conllevan en ese proceso de aprendizaje.

Asimismo explicitamos el material proporcionado a los alumnos y aquellas observaciones que resulten esclarecedoras para analizar la pertinencia de cada una de los problemas. Finalmente en el apartado “*observaciones*”, damos cuenta de la flexibilidad a la que nos referimos anteriormente, se manifiestan algunas apreciaciones que surgen en la implementación de cada una de las actividades y que muestran cómo se fue desarrollando la secuencia.

⁷¹ Nos referimos a la Unidad Didáctica psicocéntrica (Martínez, 1995) en la que las decisiones son tomadas a partir de las características del grupo, de la situación ambiental o el momento que atraviesan los niños respecto de la relación con sus pares, la clase de conocimientos que se desean abordar y los recursos de los que se disponen.

⁷² Cuando a continuación se presenten cada uno de ellos se expondrán los motivos de la omisión.

⁷³ Los *objetivos* expresan la capacidad que los niños deben alcanzar al resolver la actividad propuesta.

3.5.2.1.1.4.-Las actividades***A medir Superficies.....*****Actividad N° 1**

Dispones de un equipo de Tangram. Arma un rompecabezas con las piezas, sin superponerlas de manera de obtener distintas figuras, para cada una de ella. No olvides apoyarla sobre la hoja de tu carpeta y marcar el contorno.

Objetivo:

- ✓ Manejar el material mediante manipulación libre.
- ✓ Componer figuras e identificar su superficie, a través de la percepción como cubrimiento del plano.

Finalidad de la actividad

Promover situaciones a fin de que los niños se familiaricen con las piezas del juego y compongan sin superponer las mismas para formar distintas figuras.

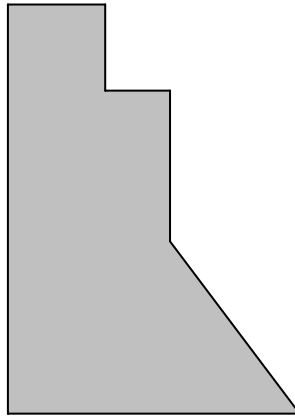
Evitar así que puedan armar formas con bordes curvos, pues consideramos que, en este momento, era un obstáculo que no abonaba a las competencias explicitadas. Sin embargo pueden formar piezas apareando lados y/o vértices.

Material proporcionado a los alumnos

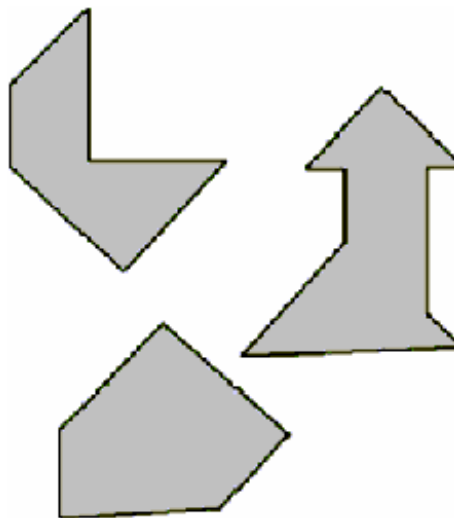
Un juego de Tangran en goma Eva con todas las piezas de igual color.

Actividad N° 2

2.1.- Investiga con cuales de las piezas del Tangram se construyó la siguiente figura



2.2.- Ahora deben decir con qué piezas del Tangram se armaron las siguientes.



Objetivo:

- ✓ Descomponer, componer y reconocer las figuras que dan forma a otra figura.
 - ✓ Identificar las figuras de distinta forma y formadas con las mismas piezas
- Piezas equivalentes

Finalidad de la actividad

Implementar situaciones que favorezca la descomposición de la figura - el paso inverso de la situación anterior- y la identificación de formas distintas pero compuestas por las mismas piezas, es decir formas equivalentes.

Material proporcionado a los alumnos

Un juego de Tangran en goma Eva con todas las piezas de igual color.

Un material fotocopiado a cada alumno con el dibujo de tres figuras.

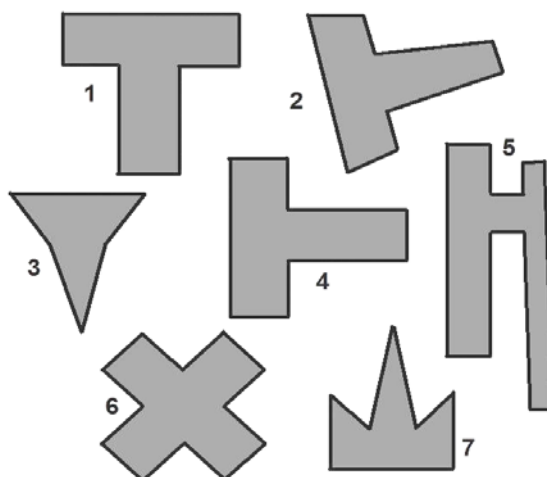
Observación

La actividad se desarrollo en dos etapas. En un primer momento, la maestra presentó la figura del ítem 2.1.en un afiche sobre el pizarrón y los niños de modo individual debieron anticipar las piezas del Tangran con las cuales se forma la figura y verificar su afirmación.

Posteriormente para el ítem 2.2. los niños debieron efectuar las anticipaciones necesarias para establecer las piezas que forman cada una de las figuras presentadas y distinguir cuáles de esas figuras estaban formadas por las mismas piezas.

Actividad N° 3

- Sobre una hoja blanca se dibujaron los diseños de los escudos para el club, que serán hechos con telas de color ¿para cuál de todos se necesita la menor cantidad de tela?



Objetivo:

- ✓ Medir la porción del plano que ocupan las figuras de los diseños, independientemente de la forma.
- ✓ Comparar y ordenar figuras según su área, mediante procedimientos directos e indirectos.

Finalidad de la actividad

Promover la comparación utilizando como método directo la superposición o la inclusión y como procedimiento indirecto las transformaciones, por ejemplo, basada en el recorte y posterior reconfiguración por complementariedad de formas. Se propuso esta tarea para corroborar lo afirmado anteriormente en el apartado acerca de la caracterización de esta secuencia, más precisamente en a.2.- (Comprenden situaciones que involucren el cálculo de área por método directo-inclusión) y en b.3. (Presentan dificultades en componer y recomponer figuras)

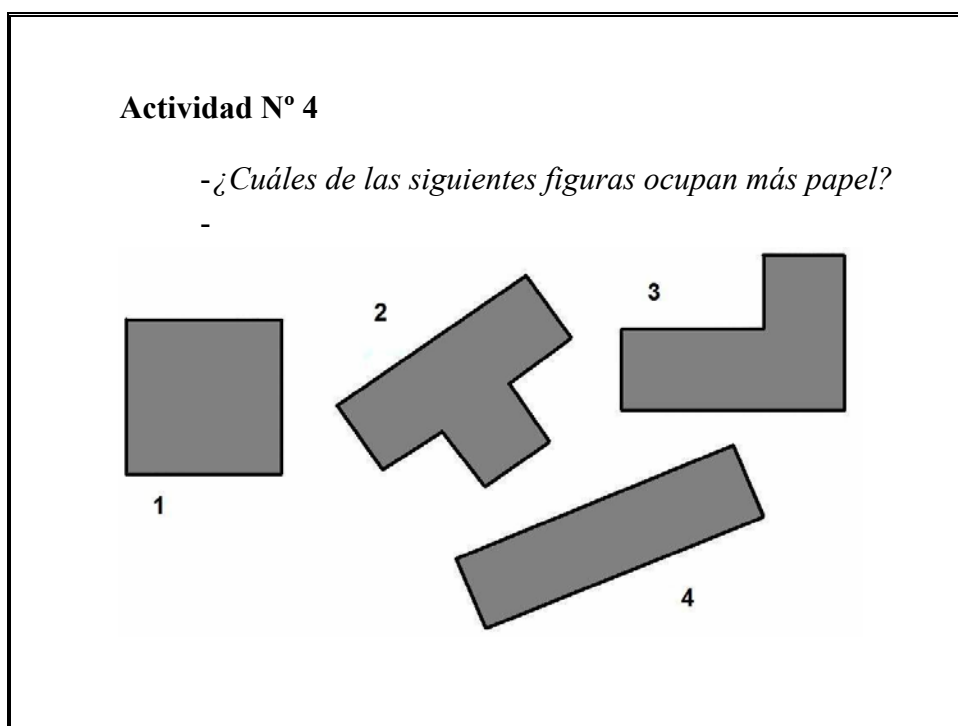
Comparar distintas superficies no significa sólo comparar los números que obtenemos cuando calculamos el área. Es por eso que es necesario distinguir superficie de medir la misma.- el área -

La comparación de objetos llevan a los niños a analizar el tamaño de los objetos, en este caso particular, a través del área de los mismos. Para ello si la diferencia de tamaño es notable, el procedimiento más simple que utilizarán son los sentidos, la percepción visual, o bien utilizaran el desplazamiento de los objetos, mediante la superposición de las piezas o pavimentando una de ellas con la otra.

Otra posibilidad es que consideren una figura intermedia que funcione como unidad y que la relación de cada uno de los escudos con ella. O bien para comparar, algunos puedan considerar entre la totalidad de los escudos, refiriéndose para ello a la propiedad transitiva, la cual facilitará la comparación y otros en cambio, sólo puedan comparar entre dos de ellos.

Material proporcionado a los alumnos

Un material fotocopiado a cada alumno con las figuras de los escudos del club.



Objetivo:

- ✓ Detectar los límites de la comparación visual.
- ✓ Analizar la conservación del área independientemente de la forma de las superficies.

Finalidad de la actividad

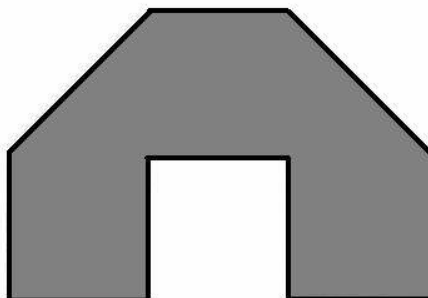
En función de dificultades expresadas en b.2- anticipar resultados, en el caso de figuras por composición, sin necesidad de realizar acciones empíricas- y b.3.- componer y recomponer figuras-, se pretende que por composición y descomposición arriben al mismo resultado de área de las figuras, independientemente de sus formas. O bien se observe si cuadriculan las figuras como un primer acercamiento a esa estrategia. Institucionalizándose, también el concepto de figuras equivalentes.

Material proporcionado a los alumnos

Un material fotocopiado para cada alumno con cuatro figuras todas ellas equivalentes.

Actividad N° 5

a) Encuentra tres figuras que sean equivalentes a la siguiente:



b) ¿Es posible encontrar un rectángulo equivalente a la figura dada? Justifica tu respuesta-

Objetivo:

- ✓ Reconstruir figuras equivalentes a una dada.

Finalidad de la actividad

Indagar si los alumnos poseen un conocimiento funcional sobre la equivalencia de superficies.

Para ello, en primera instancia se pretende que los niños realicen las transformaciones necesarias derivadas de descomponer la superficie para luego volver a componerla (b.2- anticipar resultados, en el caso de figuras por composición, sin necesidad de realizar acciones empíricas- y b.3.- componer y recomponer figuras). Formar distinta superficies todas ellas equivalentes.

Si no es posible, en segunda instancia se les proveerá de papel de calcar para realizar las transformaciones mencionadas. (b.3 -Componer y recomponer figuras-,)

Material proporcionado a los alumnos

Un material fotocopiado para cada alumno y papel de calcar, si resulta necesario.

Actividad N° 6

*- Intenta bordear las figuras del ítem 4 con un hilo
¿utilizas la misma cantidad de hilo para cada una de ellas?*

Objetivo:

- ✓ Analizar la variabilidad del perímetro en figuras equivalentes cuando ésta es sometida a transformaciones por recorte en trozos

Finalidad de la actividad:

Diferencien el área de la forma de la superficie y comprueben qué figuras equivalentes pueden o no, tener igual perímetro.

Se pretende que los niños intenten bordear el contorno con el hilo para comparar de forma directa y que no acudan a una unidad de medida.

Material proporcionado a los alumnos:

Un material fotocopiado de la actividad 4.

Bobina de hilo para que no sufra variaciones por estiramiento.

Goma de pegar.

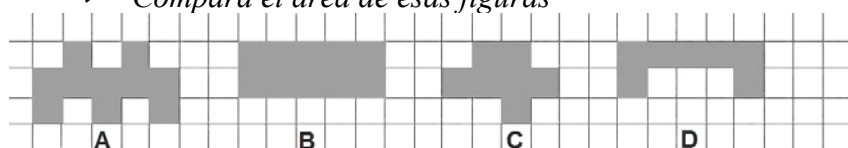
Observación

Cuando algunos de los niños consideraron la longitud del hilo y pasaron la regla alrededor del contorno pretendiendo sumar las longitudes sobre la regla, no se les permitió.

Actividad N° 7

Considera las siguientes figuras A,B,C y D

- ✓ ¿Cuáles de ellas tienen igual perímetro?
- ✓ Compara el área de esas figuras



Objetivos:

- ✓ Detectar figuras isoperimétricas.
- ✓ Introducir la idea de unidad de medida

Finalidad de la actividad:

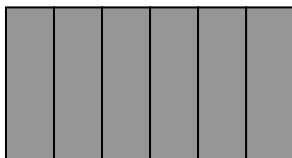
Promover la detección de figuras de distinta área e igual perímetro. Incursionando en el cálculo del área de la superficie a través del método indirecto y de tratamiento cuantitativo, considerando el cuadradito de papel, como unidad de medida.

Observación:

En la puesta en común, los niños pudieron establecer las vinculaciones y la independencia de relaciones entre el área y el perímetro de una superficie, observando qué superficies de igual perímetro no poseen igual área y viceversa. Distinguieron satisfactoriamente las unidades de longitud (lado del cuadradito) y de área de la superficie (Cuadradito del papel)

Actividad

- Juan juega con fichas rectangulares, todas iguales entre sí. Con 3 fichas arma un cuadrado. Con 6 fichas arma un rectángulo de 27 cm. de perímetro. Lo desarma y arma otro, usando a la vez las 6 fichas y así sigue; siempre usa las 6 fichas para armar un rectángulo. Dibuja todos los rectángulos que Juan puede armar. Calcula el y el área cada uno de los rectángulos obtenidos. ¿Cuál es la conclusión a la que puedes llegar?

*Objetivos:*

- ✓ Manipular figuras congruentes (todos rectángulos) para construir nuevas figuras.
- ✓ Relacionar el perímetro de cada una de las figuras obtenidas.

Finalidad de la actividad

Desde una visión dinámica de la geometría, se presenta una situación abierta en donde los niños proponen figuras, todas ellas equivalentes, pretendiendo que analicen la variabilidad del perímetro de las mismas.

Material proporcionado a los alumnos:

Un sobre a cada niño con seis rectángulos de goma Eva, todos de idéntico color.

Observación:

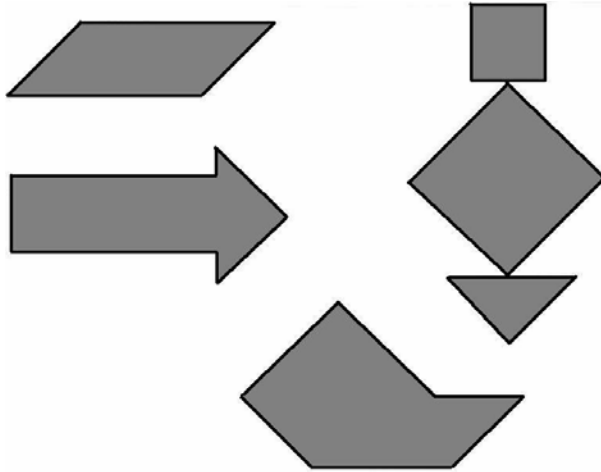
Las conclusiones que arribaron en la actividad 6 y 7 llevaron a la maestra a reflexionar sobre la pertinencia de esta actividad, consideró no implementarla y continuar con las actividades planificadas.

Actividad N° 8

- Remarca las piezas de tu Tangram en la carpeta, y responde, explicando cómo lo resuelves: superponiendo, contando triángulos, contando cuadrados.

- 8.1). *Tomando como unidad el área de la pieza (triángulo chico) ¿cuál es el área de las demás piezas?*
- 8.2). *¿Qué piezas son equivalentes?*
- 8.3). *¿Cuáles son iguales?*
- 8.4). *¿Qué relación existe entre las áreas del cuadrado y el triángulo grande?*
- 8.5). *¿Y entre el paralelogramo y el triángulo grande?*
- 8.6). *¿Y entre el triángulo mediano y el grande?*
- 8.7). *Tomando como unidad de área el triángulo chico. ¿Cuál es el área del cuadrado que se puede formar con las siete piezas? ¿Y tomando como unidad el triángulo grande? ¿Y tomando como unidad el triángulo mediano?*
- 8.8). *Tomando como unidad el área del triángulo chico, construye con tu Tangram una figura que tenga 4 unidades, otra que tenga 8 unidades y otra que tenga 10 unidades, remarcándolas en tu carpeta de trabajo*
- 8.9). *Ahora construye las siguientes figuras de manera tal que el paralelogramo tenga 6 unidades; la flecha, 8 unidades; el barco, 10*

unidades y el muñeco 12 unidades. Dibuja cada una de las figuras obtenidas en tu carpeta.



8.10) *¿Puedes transformar, moviendo una sola pieza, el paralelogramo en un rectángulo? Las dos piezas, ¿tienen la misma área?*

Objetivo

- ✓ Implementar el método indirecto de medición.
- ✓ Detectar la relación entre cada pieza y todo el Tangram
- ✓ Estudiar el procedimiento de medición basado en la interacción de la unidad de área bidimensional.

Intencionalidad de la Actividad

A través de esta actividad se pretende retomar la relación entre “*el área de cada pieza y el todo*” en función de (b.1). En esa oportunidad la pregunta era “*expresa la parte o porción del rompecabezas*” y los alumnos respondieron el nombre de la figura (triángulo, cuadrado)

Asimismo al poder establecer la relación entre unas piezas y otras se pretende que se familiaricen con la unidad de superficie de distinta forma.

Medir una superficie, contando las piezas – unidad de área-, o bien dibujar una figura de una medida establecida

Puede ocurrir que los niños manifiesten que como dos triángulos chicos forman un cuadrado, entonces en lugar de expresar 6 cuadrados pueden decir 12

triángulos. Estableciendo así la vinculación podemos explicitar que “Si 1 cuadrado equivale a 2 triángulos entonces 6 cuadrados equivalen a 12 triángulos”. Es decir, que existe una relación inversa entre el número de unidades y el tamaño de ésta.

En el caso de que surja la conveniencia de una unidad de superficie convencional, se dirá solamente que dicha unidad es el cm^2 .

Observaciones:

Cuando se implementó la actividad, la maestra omitió el inciso 8.3.- *¿Cuáles son iguales?* Y el inciso 8.7 lo cambia por la consigna siguiente:

Arma con las siete piezas un cuadrado. ¿Cuántos triángulos chicos necesitan para formar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo grande, ¿cuántos necesito para armar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo mediano, ¿cuántos necesito para formar el cuadrado del Tangram? Y se corresponde con el inciso 8

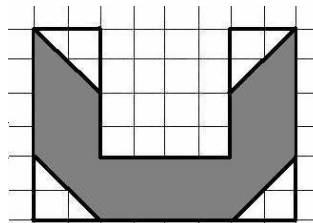
Es decir

8.7.-Arma con las siete piezas un cuadrado. ¿Cuántos triángulos chicos necesitan para formar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo grande, ¿cuántos necesito para armar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo mediano, ¿cuántos necesito para formar el cuadrado del Tangram?

Actividad N° 9

- *Determina el área de la figura sombreada:*

- a. Utiliza  como unidad.
- b. Utiliza  como unidad
- c. Utiliza  como unidad



¿Qué puedes decir acerca de los resultados obtenidos?

Objetivo:

- ✓ Representar mentalmente la composición de figuras identificando las mismas como unidad de medida
- ✓ Determinar el área de una superficie en función de distintas unidades de medida.
- ✓ Dependencia entre el valor del área y la unidad seleccionada.

Intencionalidad de la actividad

Promover el establecimiento de la dependencia entre el valor del área y la unidad seleccionada y la relación inversa entre el número de unidades y el tamaño de ésta. Aspectos que sin embargo, pueden haber surgido en la actividad anterior.

Actividad N° 10

✓ ¿A cuál de las siguientes superficies le corresponde mayor área?

The diagram shows two figures, A and B, on a grid. Figure A is a 4x4 grid with 10 shaded squares. Figure B is a 4x4 grid with 10 shaded squares, including triangles.

Objetivo:

- ✓ Representar mentalmente la composición de figuras.
- ✓ Escoger la pieza como unidad de medida, sin efectuar ensayos manipulativos.
- ✓ Seleccionar la unidad adecuada para comparar cantidad de superficie.
- ✓ Considerar las características de la unidad establecida para argumentar sus conclusiones

Intencionalidad de la actividad

Comparar áreas es más complicado que comparar, por ejemplo, longitudes. Según resultados de actividades anteriores, las figuras pueden ser equivalentes y sin embargo tener distinta forma.

Somos concientes que pueden realizar la comparación por transformación (romper y rehacer) pero al realizar los dibujos sobre papel cuadriculado, hemos pretendido, mediante un tratamiento cuantitativo⁷⁴, obtener la medida del área de cada una de las figuras a través de un número para poder compararlas.

Es decir que los niños muestren la necesidad de establecer las figuras que pueden recubrir el dibujo para poder, utilizarlo como unidad intermediaria, y podes así, llegar a una conclusión.

Esto conlleva que en las posibles argumentaciones formuladas por los niños consideren la disociación del área con el número que la mide.

Actividad N° 11

Resuelve nuevamente la situación 3 utilizando las cuadrículas de acetato y comprueba si la elección a la que arribaste es la apropiada.

Objetivo:

- ✓ Estudiar el carácter de recubrimiento del espacio.
- ✓ Corroborar el área comparando los escudos, a través del método indirecto, utilizado cuadrículas.
- ✓ Resignificar el procedimiento de resolución desde un tratamiento numérico

⁷⁴ La obtención del área de una superficie y en particular la comparación del área entre dos o más superficies se pueden distinguir dos representaciones: **una numérica** través de la medida, donde una vez que se ha fijado una unidad de medida. Cada cantidad de magnitud está vinculada con un número real positivo. Otra es la **geométrica**, es decir el numero está ausente de cualquier razonamiento utilizando para ello procedimientos estrictamente geométricos (Gil y otros, 57). En este trabajo consideramos que estas representaciones implican un tratamiento **cuantitativo y cualitativo**, respectivamente, del área.

Intencionalidad de la actividad

En la actividad 3, los niños pueden comparar de manera visual o directa, en cambio ahora pretendemos el cálculo numérico, es decir, que verifiquen el resultado llenando y cubrimiento las superficies con cuadraditos y contándolos. De manera que comparen distintas superficies a través de la medida de las mismas. Destacar que la medición visual puede ser verificada con la medición real de la superficie, en función de una figura como unidad de área.

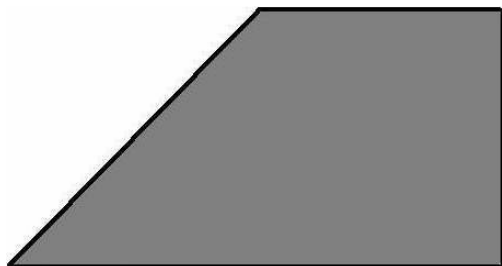
El uso de la cuadrícula como material didáctico, permite efectuar el análisis del significado de la unidad de área y su incidencia en la medida.

Así como también el interés de compaginar procedimientos geométricos y numéricos. Es necesario entonces, realizar las particiones de la superficie en trozos convenientes para posteriormente reconfigurar éstos de manera de formar una figura de área fácilmente cuantificable a través de la cuadrícula mencionada.

Actividad N° 12

Este es el patio de la escuela de Tomás, el cual se desea embaldosar. Realiza un dibujo en escala de tal forma que un cuadradito de la plantilla, representa una baldosa.

- a) Indica dos métodos diferentes para calcular la cantidad de baldosas que necesitas.*
- b) Y si completamos el patio de modo que formes un rectángulo ¿Cuántas baldosas son necesarias?*



Objetivo:

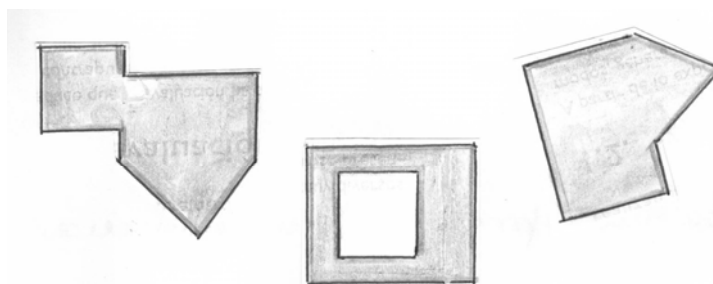
- ✓ Determinar la medida del área de las figuras mediante descomposición en cuadrado, rectángulo o triángulo.
- ✓ Arribar con sentido a las formulas del rectángulo, cuadrado y triángulo como expresión más económica.

Intencionalidad de la actividad:

En este momento del desarrollo de la secuencia se pretende que los niños subdividan de manera conveniente. Por un lado, seleccionen una unidad de medida bidimensional adecuada con el objeto de medir las superficies por recubrimiento, reiterando la unidad de medida elegida. Por otro, la multiplicación de las dimensiones lineales, enfatizando el significado y la representación real de la unidades de medida para dar sentido a la fórmula. Aunque este último método encierra mayor dificultad, nos basamos en los resultados expresados en b.1. (Expresar partes de un todo como fracciones).

Actividad

Calcula el área de estos polígonos descomponiéndolos en otras figuras conocidas.

*Objetivo*

- ✓ Determinar el área de figuras poligonales, mediante descomposición en cuadrado, rectángulo o triángulo.

Intencionalidad de la actividad

En esta actividad se compaginan procedimientos geométricos- numéricos con el objeto de facilitar el cálculo de área. A través de transformaciones se pueden realizar las particiones necesarias para reconstruir en otra figura equivalente y fácilmente cuantificable.

Observación: Esta actividad, por razones de tiempo, no se pudo implementar en 1 clase y los niños la resolvieron en su hogar como tarea y la entregaron con el cuestionario final

Actividad N° 13

Dibuja la palma de tu mano sobre la hoja de carpeta...

Calcula el área aproximada de la superficie que ocupa

Objetivo

- ✓ Elegir una unidad adecuada para medir superficies irregulares.
- ✓ Acotar el área de una superficie entre dos valores próximos.

Intencionalidad de la actividad

Como última actividad de esta secuencia proponemos el cálculo de área de una superficie irregular. Para ello anticipamos algunos procedimientos que utilizan los niños, por ejemplo, descomponer la figura en partes más sencillas, - generalmente rectángulos - o bien efectuar cubrimientos con distintas unidades. (Grupo Cero, 1989) No obstante es importante destacar que en algunos casos, no es posible realizar cubrimientos a través de un número exacto de unidades. La precisión del resultado depende de la unidad elegida, lo que da una idea de aproximación.

Al tener en cuenta los aspectos mencionados, se pretende que los niños realicen sucesivas aproximaciones interiores y exteriores a la superficie propuesta a través de las cuadrículas, y que logren verbalizar la aproximación del resultado con expresiones como “más de”; “alrededor de”, “aproximadamente”.

3.5.2.1.1.5.-Al cerrar el desarrollo de la secuencia

Al finalizar la duodécima sesión, la maestra efectúa una puesta en común y trata de resumir en un todo el campo que han estudiado. Esto se realizó con el objeto de que los niños exploren los conocimientos que han comenzado a construir a través del desarrollo de la secuencia. Para esta tarea se le proporcionó, a cada uno de los niños, el siguiente texto:

ÁREA DE FIGURAS

HASTA AHORA.....

- Medir una superficie es compararla con otra, elegida como unidad.
- Las figuras que has construido con todas las piezas del Tangram tienen distinta forma pero tienen igual ÁREA.
- Las figuras que tienen igual área, aunque tienen distinta forma se denominan figuras equivalentes.
- Para comparar el área de la superficie de dos figuras se puede:
 - Superponer una con otra.
 - Ir cortando en partes una de ellas e ir recubriendo la otra.
 - Elegir la misma unidad de medida en cada una de ellas.
- Dos figuras que tienen igual área no tienen siempre el mismo perímetro
- Dos figuras que tienen igual perímetro pueden o no, tener igual área.

TAMBIÉN.....

- El área de una superficie puede ser asociada con diferentes números, depende de las distintas unidades de medida utilizadas..
- La precisión del resultado depende del tamaño de la unidad elegida.
- El resultado de una medida es siempre aproximado.

ACORDAMOS QUE.....

Al lado largo de un rectángulo lo denominamos “**base**” y al lado corto le decimos “**altura**”. Entonces, la fórmula para calcular es:

ÁREA DEL RECTÁNGULO = longitud de la base x longitud de la altura.

ÁREA DE UN CUADRADO = longitud del lado x longitud del lado

O También:

ÁREA DEL CUADRADO = L^2

ÁREA DEL TRIÁNGULO = Longitud de la base x longitud de la altura

No podemos finalizar este apartado sin señalar la importancia del rol de la maestra en la implementación de las actividades que componen esta secuencia, la cual nos hemos referido en detalle en el 2.5.3.-. La maestra además de diseñar la unidad, es quien instaura el clima adecuado para gestionar y organizar el aprendizaje con el objeto de intensificar aquellos aspectos que permiten a los niños progresar en su razonamiento y poder así construir el concepto que nos ocupan en este trabajo.

Estos aspectos constituyen un bosquejo flexible de las clases, que permite orientarlas y facilita el análisis de lo sucedido tras su desarrollo, en vistas a constituirse en un instrumento de obtención de información para la investigación.

3.5.2.2.- UNIDAD DE APRENDIZAJE COMO INSTRUMENTO DE INVESTIGACIÓN

La Unidad de Aprendizaje como instrumento metodológico nos permite obtener información sobre cómo aprenden los niños un determinado concepto.

Habiéndonos posicionado en el constructivismo social como teoría de aprendizaje y, desde la concepción explicitada sobre la construcción de conceptos, este instrumento visualizó la construcción significativa de conocimientos en los niños. Pues aprenden en un marco de significado que le otorgan sentido y lo que aprenden puede ser reutilizado en otras situaciones.

Además, hemos observado que cuando el niño resuelve problemas como medio del aprendizaje, interactúa entre los conocimientos cotidianos y los escolares, a través de reglas, técnicas, destrezas y conceptos previos, para poder arribar a resultados, con el objeto problematizar y construir de manera comprensiva los conceptos seleccionados para este estudio.

Pero resolver un problema no es suficiente para que el niño construya su conocimiento. Es preciso que se puedan establecer las suficientes oportunidades que le permitan acercarse más a él. Para eso, es necesario abordar el concepto desde distintas y diferentes perspectivas, es necesario que distinga situaciones en que ese conocimiento es útil de la que no lo es; situaciones en la que genera errores de aquellas que los evita; situaciones en las que permite economizar;

3.5.2.2.1-LA OBSERVACIÓN NO PARTICIPANTE Y NOTAS DE CAMPO (O)

La caracterización del proceso de resolución de los problemas de cada una de las niñas involucradas en esta investigación se realiza sobre la base de la observación no participante. Según Gold (1958, citado en Goetz y LeCompte, 1988), se trata de una técnica sobresaliente en la investigación cualitativa, que permite obtener datos de modo sistemático, en un determinado contexto y en situaciones determinadas. Consiste, exclusivamente, en contemplar lo que está aconteciendo y registrar los hechos sobre el terreno. De esta forma, la investigadora durante el desarrollo de distintos problemas, observó y registró los datos de manera objetiva e indirectamente a través de la filmación, grabó los hechos, especialmente del pequeño grupo.

Previamente a la implementación de las actividades, se realizó un trabajo de ambientación en la que la investigadora fue presentada a los niños y ésta, ubicada en un extremo de la sala, observó las clases con el objeto que ellos se acostumbraran a su presencia. De esta forma, los niños asumieron con naturalidad su presencia, así como también la de una alumna del instituto superior (de formación de maestros) quien se desempeñó como apoyo técnico.

Posteriormente, durante el desarrollo de las actividades, la investigadora efectuó la filmación, utilizó una cámara de video, y en la medida de lo posible, enfocó al grupo elegido dirigiéndose a cada uno de los integrantes del grupo, con el objeto de poder filmar la participación de los niños durante la resolución de cada uno de los problemas.

En general, trató de abocarse al grupo seleccionado, pero considerando la edad de los niños y las expectativas que generaba el hecho de filmar las sesiones, en varias oportunidades filmó a la totalidad del grupo clase. Ante esta situación, y temiendo perder información del grupo, es que solicitó a una estudiante de magisterio que registrara en forma escrita, a fin de completar con sus notas lo acontecido.

Mientras tanto, la alumna del instituto formador compartió la mesa de trabajo de los niños – informantes en este trabajo- y tomó nota, en forma de diálogo, de lo acontecido durante el desarrollo de todas las actividades que

componen la secuencia, con la intención de completar y clarificar aquello que la filmación, desde su audio, no fuera posible percibir dado la natural superposición de voces que en estos casos suele ocurrir.

Estas notas de campo no fueron consideradas como fuentes de información, aunque su revisión sirvió para completar el registro de lo acontecido en el grupo.

Se filmó durante cada una de las doce sesiones en la que la maestra desarrolló dicha unidad y durante la grabación, la investigadora también registró algunas anotaciones, que a su juicio, aportaban y complementaban información para la investigación.

La filmación en detalle, del desarrollo de los problemas, responde a los intereses de la investigación pues, como señala Erickson (1989), es importante tener en cuenta el posible “sesgo en el muestreo y en la observación”, en el sentido de las decisiones del observador acerca de dónde centrará esos focos de atención.

Diferentes autores, por ejemplo, Erickson (1989), Colás y Buendía (1998), destacan las ventajas del uso de grabaciones audiovisuales. Una ventaja es la posibilidad de la elaboración de una descripción más exhaustiva de dicha realidad. Es así como la observación es considerada una técnica importante en la investigación cualitativa, pues nos permite recoger datos, de modo sistemático, en un determinado contexto y con situaciones determinadas. A través de su implementación se pudo visualizar de manera pormenorizada al grupo en general y a cada integrante, en particular, y obtener descripciones detalladas y representativas del comportamiento de sus integrantes y de sus representaciones alrededor de un concepto, durante el desarrollo de los distintos problemas.

3.5.2.2.2-REGISTRO DE LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE (S)

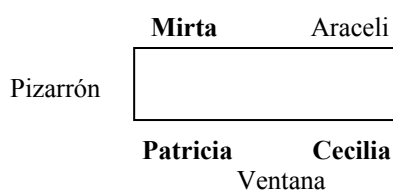
Con las grabaciones de video, las notas que la investigadora tomó ocasionalmente y las notas de campo, organizamos las intervenciones de los niños y la maestra, según se fueron dando y la registramos en una tabla que muestra esa lógica. Denominamos a la misma, *registro de la secuencia de aprendizaje* y se

adjunta en el Anexo V. Para ello, en cada una de las sesiones explicitamos el plano con la ubicación espacial de los integrantes del grupo y remarcamos la ubicación de los tres niños que seleccionamos para este estudio, como así también de la estudiante que registra y cualquier otro dato significativo para el análisis.

Los datos se organizan en columnas. En la primera columna, se enumeran cada una de las filas de manera consecutiva, para cada una de las actividades. La segunda columna contiene los enunciados de las actividades y las intervenciones de la maestra. La tercera columna incluye las intervenciones de los niños según se iban produciendo. Por último, en la cuarta columna, se indican las subjetividades de la investigadora con el objeto de enriquecer la información. Es decir, se consignan aquellos sucesos extraídos de la filmación que muestran el clima del grupo, mientras se explicita el diálogo de alguno de ellos en particular.

Todos estos aspectos dan cuenta de cómo transcurre la sesión y facilitan la elección de las unidades de significado a considerar en la construcción de la tabla de diálogo en vistas a efectuar el análisis de cada caso-.

A continuación, presentamos una unidad de significado, del registro de la secuencia de aprendizaje - seleccionada de la quinta y sexta sesión y la ubicación de los integrantes del grupo en la mesa:



	Docente	Alumno	Apreciaciones de la investigadora
99	¿Qué paso?	Patricia: Lo que paso es que había medido mal.	Patricia subdivide la figura (cuadrado con cuadrados más chicos
100			
101			
102			
103			
104			
105			
106			
107			
108			
109			
110			
111			
112			

113			dentro) y explica.
114		Patricia: Hay lados en esta figura	
115		que no se cuentan y en las	
116		otras sí	

Tabla 11: Unidad de significado, en el registro de la secuencia de aprendizaje

3.5.2.2.3 LA PRODUCCIÓN ESCRITA DE LOS ALUMNOS. (PE)

El trabajo en torno a la construcción de conceptos demanda varias sesiones, y requiere atravesar diferentes momentos, diferentes puestas en funcionamiento del concepto. Para este trabajo, consideramos que los niños pueden manifestar su estado de conocimiento, sus opiniones, sus emociones, a través de sus producciones escritas.

Estas producciones escritas se entienden como documentos personales (Colas y Buendía (1998), en las que se describen acciones, experiencias y subjetividades con el objeto de obtener evidencias pormenorizadas de cómo resuelven la situaciones planteadas y el significado que tienen para los sujetos involucrados.

Durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje, a cada niño se le entregó fotocopia de cada una de las actividades propuestas. Se les solicitó además, que justificaran los procedimientos empleados en forma escrita con el objeto de poder registrar de la forma más pormenorizada posible las construcciones y reconstrucciones que iban produciendo respecto del concepto que nos ocupa.

De esta manera los datos así obtenidos fueron insumos para poder triangular con los otros datos obtenidos durante este trabajo en vías a interpretar la construcción del concepto de área.

3.5.3.-CUESTIONARIOS FINALES

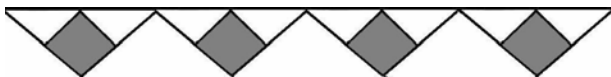
Al comenzar este apartado - 3.5.- referido a los instrumentos y técnicas de obtención de información, manifestamos que con el objeto de detectar la construcción y observar aunque sea parcialmente, la significatividad del concepto, se aplicaron dos cuestionarios; uno de ellos, al finalizar la secuencia de

aprendizaje y, el otro, luego de un determinado plazo. Estos cuestionarios son abiertos y se registran a través de la producción escrita. A continuación vamos a describir cada uno.

3.5.3.1.- CUESTIONARIO AL FINALIZAR LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE. (E)

Se tomó al finalizar de implementar la secuencia de aprendizaje, el día miércoles de la tercera semana, en la décima tercera sesión. El cuestionario estaba compuesto por cinco problemas, según se adjunta en Anexo VI.

A continuación explicitamos el contenido abordado y la intención de cada uno en este trabajo.

Ítem N° 1	
<i>Contenidos:</i> ✓ Descomponer, componer y reconocer las figuras que dan forma a otra.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
1.-Entre cuadraditos y triángulos ¿cuántos cuadrados hay en total ¿cuántos triángulos hay en total? ⁷⁵ 	Es un ítem de anclaje, con el cuestionario inicial, En esa oportunidad los niños no lo resolvieron. La intención de este problema ha sido detectar la capacidad de reconocer si una figura se descompone o recompone con otras formas.

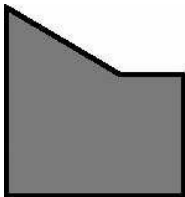
⁷⁵ Aunque este ítem figuraba en el cuestionario inicial, esta dificultad no la detectamos en ese momento. Analizando nuevamente el enunciado pensamos que deberíamos haberlo expresado así:

<i>Observa la guirnalda. Entre cuadrados y triángulos:</i> <i>a.- ¿Cuántos cuadrados se pueden formar en total?</i> <i>b.- ¿Cuántos triángulos se pueden formar en total?</i>

En el enunciado, cuando expresa “Entre cuadrados y triángulos”, indicamos la forma a considerar pero pensamos que al haber preguntado la cantidad que “hay”, el niño responde en función de lo que percibe, es decir, lo que está formado, pero no considera la posibilidad que resultan de componer o descomponer en otras figuras con esas formas.

La información que brindan las niñas alrededor de este ítem no se corresponde con el objetivo propuesto, consideramos entonces conveniente prescindir de su análisis.

Item N° 2	
<i>Contenidos:</i> ✓ Noción de Figuras equivalente: ✓ Noción de área y de longitud, sin recurrir a medidas convencionales	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
2.- Dibuja una figura equivalente la dada pero de distinto perímetro. Justifica tu dibujo. 	Indagar sobre la conservación del área y la variación del perímetro utilizando, una trama cuadrada

Item N° 3	
<i>Contenidos:</i> ✓ Área por cubrimiento. ✓ Área a través de las dimensiones lineales. Aplicación de formulas.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
3.- Calcula el área de este polígono, indicando dos métodos diferentes para calcularlo. 	- Identificar distintos métodos de medición con el tipo de unidad de medida (bidimensionales y/o unidimensional)

Item N° 4	
<i>Contenidos:</i> ✓ Equivalencia de figuras. ✓ Comparación de figuras	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
Responde y Justifica tu respuesta: ✓ Dos figuras que tienen la misma forma ¿son sí o sí equivalentes? ✓ ¿Pueden ser equivalentes dos figuras con distinta forma? ✓ ¿Puede ser un cuadrado equivalente a un rectángulo? ✓ Para comparar dos superficies debes.....	-Detectar características de las superficies asociadas a la magnitud Área -Comprobar si analizan la invariancia entre la equivalencia y las formas de las figuras.

Item N°5	
<i>Contenidos:</i> ✓ Relacionar áreas de superficies mediante fracciones.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
5.- El siguiente rompecabeza está armado con las fichas: A, B, C, y D. Expresa con una fracción cada ficha del rompecabeza.	Es un ítem de anclaje, con el cuestionario inicial,. En esa oportunidad los niños respondían respecto a la forma de la figura A, B y no establecían la relación entre dicha ficha y el rompecabezas .

El la tabla 12, detallamos en cada una de las actividades que componen la el cuestionario, la fuente de procedencia, en caso que no sean de nuestra autoría y tipología.

Actividad	Fuente	Tipología ⁷⁶
1	III: Segundo Ciclo. Matemáticas. Grupo Cero. Recursos y materiales de 12 a 16 años. Edelvives. Pág. 244.	Cualitativo- Visual
2	Formulación Propia	De integración
3	Formulación Propia	De procesos
4	Formulación Propia	Para demostrar
5	Adaptado de Pujadas, M (2000) Fracciones: Un quebradero de cabeza, Novedades Educativas. Pág. 37,	Bien estructurado

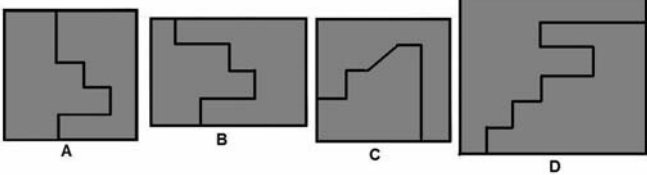
Tabla 12: Procedencia de las actividades que componen el cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje y tipología.

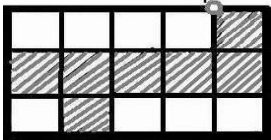
3.5.3.2.-CUESTIONARIO A MEDIO PLAZO (MP)

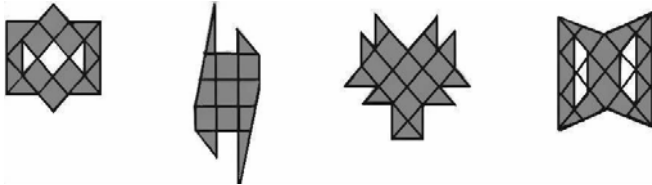
Pasados seis meses se concertó una cita con la maestra a cargo de 6° año de la escuela. Se le comentó la experiencia y acordamos tomar el cuestionario. Del grupo que investigamos, dos niñas se habían pasado a otra escuela. No obstante nos comunicamos con sus padres y las niñas pudieron asistir a la escuela para completar el cuestionario.

El cuestionario estaba compuesto por cuatro problemas, según se adjunta en el Aneo VII. A continuación explicitamos el contenido abordado, la intención de cada uno en este trabajo., y su procedencia, en caso que no sean de nuestra autoría.

⁷⁶ Decimos que un problema es *Bien estructurado* –según Simón (1973) y Frederiksen (1984) citado por Santos Trigo (1997) y Madruga (2002)- cuando el planteamiento, la solución y el tipo de operación a realizar, están previstos de forma clara y el niño debe diseñar un procedimiento para arribar a la solución. Pérez Echeverría (1994), se refiere problemas: *cualitativos* como: los que a través de métodos inductivos permiten analizar conceptos y procedimientos geométricos. Arcavi & Friedlander (2007) se refieren a problemas *Visuales* a los que la observación es una estrategia importante de resolución. Blanco- Nieto (1986) sobre la base de los aportes de Butts (1980) ; Lester (1982); Borasi (1986).se refieren a problemas de *Procesos* a los que admiten varios modos de encontrar la solución. Al igual que Polya (1986) en lo que respecta a los *problemas para demostrar* cuando se pretende mostrar la verdad sobre una determinada afirmación. y Charnay (1993) especifica que son de *integración* cuando se debe utilizar conjuntamente varias categorías de conocimientos para su resolución.

Item N°1	
Contenidos: ✓ Comparación de superficies por métodos indirectos.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
1.- Si cortamos las figuras por la línea marcada ¿las dos partes tienen la misma área? 	-Detectar la capacidad para com-parar superficies a través de métodos directos o indirectos. -Observar si eligen el cuadrículado co-mo la opción más conve-niente.

Item N° 2	
Contenidos: ✓ Vinculación entre área y perímetro de una superficie.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
2.- Una hormiga A sale del punto P. Recorre el perímetro del rectángulo de trazo grueso y vuelve a P. Otra hormiga B, también sale de P y recorre el perímetro de la zona rayada y regresa a P. ¿Cuál de las dos hormigas camino más? ¿Qué puedes decir de la región determinada por cada camino? 	-Detectar si: vinculan la relación entre áreas y perímetros de figuras no equivalentes. -Proponer una situación que le permita reconocer que dos figuras isoperimétricas no necesariamente son equivalentes.

Ítem N° 3	
Contenidos: ✓ Distinción entre equivalencia e igualdad de superficies. ✓ Comparación de superficies a través de métodos indirectos.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
3.- ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? ¿Cuál tiene menor área? ¿Hay superficies iguales? 	Revelar a través de qué procedimientos pueden determinar el área para poder ordenar las figuras.

Item N° 4	
<i>Contenidos:</i> ✓ Interpretación de las relaciones entre los datos y la incógnita en situaciones problemáticas sobre superficies presentadas en forma escrita. ✓ Formulación de conjeturas y anticipaciones para resolver problemas.	
<i>Enunciado</i>	<i>Intención en el marco de la propuesta</i>
4.-En la escuela tienen que embaldosar un patio de 18 metros de largo y 12 metros de ancho. Reciben una donación de 5000 baldosas de 20 cm. de lado. ¿Son suficientes para cubrir el patio?	-Proponer situaciones contextualizadas en hechos de la realidad

El la tabla 13, detallamos en cada una de las actividades que componen la el cuestionario, la fuente de procedencia, en caso que no sean de nuestra autoría y tipología.

Actividad	Fuente	Tipología⁷⁷
1	García; A.; Zorzoli,G. (1996) Construyendo con Lápiz y papel- N°5- 2Ciclo. Edit Tiempos. Buenos Aires. Pág. 9	Cualitativo - Visual
2	Item seleccionado de evaluación del 1° Operativo Provincial del programa de Evaluación de Calidad Educativa en 7mo Año. 2000. Dirección de Cultura y Educación de la Pcia de Buenos Aires-Pág. 8	Bien Estructurado

⁷⁷ Decimos que un problema es *Bien estructurado* –según Simón (1973) y Frederiksen (1984) citado por Santos Trigo (1997) y Madruga (2002)- cuando el planteamiento, la solución y el tipo de operación a realizar, están previstos de forma clara y el niño debe diseñar un procedimiento para arribar a la solución. Pérez Echeverría (1994), se refiere a problemas: *cualitativos*: los que a través de métodos inductivos permiten analizar conceptos y procedimientos geométricos. Arcavi-Friedlander (2007) se refieren a problemas: *Visuales* a aquellos en que la observación es una estrategia importante de resolución. Charnay (1993) en cambio, se refiere a los *Problemas de reinversión* cuando a los que se utilizan los conocimientos ya estudiados para la resolución. Blanco Nieto (1986) sobre la base de los aportes de Butts (1980); Charles Lester,(1982); Borasi (1986).se refiere a problemas *sobre situaciones reales* a los relacionados con hechos cotidianos que requieren desarrollo de habilidades, conceptos

3	Adecuado de Garcia; A.Zorzoli, G. (1996) Construyendo con Lápiz y papel- N°5- 2Ciclo. Edit Tiempos. Buenos Aires. Pág. 10	De reinversión
4	Formulación propia	Sobre situaciones reales

Tabla 13: Procedencia de las actividades que componen el cuestionario a medio plazo y tipología.

3.6.- PROCESO E INSTRUMENTOS DE ANÁLISIS

Vamos a centrarnos en el proceso de análisis y en la caracterización de cada uno de los instrumentos que utilizamos para esta instancia. Describimos cómo hemos procedido y cómo los instrumentos nos han viabilizado la tarea.

El caso de análisis lo constituyen tres niñas que a los fines de este trabajo se llaman Cecilia, Patricia y Mirta. En una primera instancia analizamos a cada niña en particular realizando un análisis retrospectivo de los datos obtenidos en las distintas sub-fases en las que hemos organizado el proceso de recogida de información, según explicitamos en el apartado 3.4.2.

Hemos adoptado la perspectiva de análisis interpretativo (Kvale, 1996) con el propósito de interpretar la noción a construir en términos de evolución. De esta manera se busca producir un informe que ponga de relieve el proceso de construcción del concepto de área para cada uno de los casos.

Para comprender el proceso de construcción, analizamos los datos en el orden en el que fueron tomados. La tabla 14, muestra cómo hemos procedido con el análisis de cada caso. Para ello, exponemos qué instrumento de análisis utilizamos para los datos recogidos con los distintos instrumentos de recogida de información e indicamos brevemente cómo se analizan.

Orden	Instrumento de recogida de información	Instrumento de análisis utilizado	Cómo se analiza
1º	Cuestionario de conocimientos matemáticos primitivos	Listado de contenidos matemáticos (apartado 3.5.1).	1º. Análisis pormenorizado de cada actividad sobre la comprensión que la investigadora considera que el caso muestra sobre los contenidos relacionados con el concepto de área. 2º. Obtención del conocimiento primitivo de cada caso sobre los contenidos relacionados con el concepto de área
2º	Cuestionario de ideas previas acerca del concepto de área	Tabla 16: Relación entre los problemas de dicho cuestionario, las categorías e indicadores asociados a cada problema y su representación gráfica en el gráfico de comprensión (apartado 3.6.3.). Tabla 16.a: Gráfico de comprensión global deseable correspondiente al cuestionario y el conjunto de indicadores asociados (apartado 3.6.3.).	1º.a.- Análisis pormenorizado de cada una de las actividades, tomando como referencia la tabla 16. 1º.b.-Representación gráfica de lo observado, en el gráfico de comprensión. 2º Comparación entre el gráfico global de comprensión deseable y el gráfico de comprensión del caso, tomando como referencia la tabla 16.a. 3º. Detección de debilidades y fortalezas. Obtención de las ideas previas de cada caso sobre el concepto de área
Información obtenida del proceso de construcción del concepto:			
3º	Secuencia de aprendizaje	Tabla 17: Relación entre los problemas de la secuencia, las categorías e indicadores asociados a cada problema y su representación gráfica en los gráficos de comprensión (apartado 3.6.3.). Tabla 17.a: Gráfico de comprensión global deseable correspondiente a la secuencia y	1º.a.- Análisis pormenorizado de cada actividad, poniendo de relieve el proceso de construcción del concepto durante la resolución del problema (<i>¿Qué aspecto construye del concepto?</i>). También analizamos el papel del folding back y de las interacciones de cada caso con compañeras y maestra (<i>¿Cómo construye el concepto?</i>) Tomamos como referencia la tabla 17 y la tabla de diálogo.

Orden	Instrumento de recogida de información	Instrumento de análisis utilizado	Cómo se analiza
		el conjunto de indicadores asociados (apartado 3.6.3.). Tabla 2: Folding back: Fuente de intervención (apartado 2.3.2) Tabla 3: Folding back: Resultado (apartado 2.3.2) Tabla de diálogo (apartado 3.6.5.). Naturaleza de las interacciones (apartado 3.6.4.).	Focalizamos el análisis en: -Qué aspecto del indicador se pone de relieve. -Dónde se da Folding back, su utilidad en el proceso, fuente de intervención y resultado (tablas 2 y 3) -Papel de las interacciones en el proceso, en relación con quién interactúa y a la capa de comprensión al que remite (su naturaleza y tabla de diálogo). 1º b.-Representación gráfica de lo observado en el gráfico de comprensión, destacando la trayectoria de resolución-comprensión. 2º Comparación entre el gráfico global de comprensión deseable y el gráfico de comprensión del caso, tomando como referencia la tabla 17.a. 3º. Detección de debilidades y fortalezas de cada caso respecto al concepto de área, durante la implementación de la secuencia de aprendizaje. Papel del folding back e interacciones.
Información obtenida del proceso de construcción del concepto: <i>Los posibles procedimientos por los que cada caso desarrolla el aprendizaje del concepto. Detección de logros, dificultades y errores que afrontan en relación al mismo y que revelan el proceso de su construcción. Comprensión del papel del folding back e interacciones en este proceso.</i>			
4º	Cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje	Tabla 18: Relación los problemas de dicho cuestionario, las categorías e indicadores asociados a cada problema y su representación gráfica en los gráficos de	1º a.- Análisis pormenorizado de cada una de las actividades, tomando como referencia la tabla 18. 1º b.-Representación gráfica de lo observado, en el gráfico de

Orden	Instrumento de recogida de información	Instrumento de análisis utilizado	Cómo se analiza
		comprensión (apartado 3.6.3.). Tabla 18.a: Gráfico de comprensión global deseable correspondiente al cuestionario y el conjunto de indicadores asociados (apartado 3.6.3.).	comprensión. 2º Comparación entre el gráfico global de comprensión deseable y el gráfico de comprensión del caso, tomando como referencia la tabla 18.a. 3º. Detección de debilidades y fortalezas de cada caso al finalizar de desarrollar la secuencia de aprendizaje.
<i>Detectar las fortalezas, dificultades y errores que afronta cada caso en relación con la construcción del concepto de área y que revelan el proceso de su construcción.</i>			
5º	Cuestionario a medio plazo	Tabla 19: Relación entre los problemas de dicho cuestionario, las categorías e indicadores asociados a cada problema y su representación gráfica en los gráficos de comprensión. (apartado 3.6.3.). Tabla 19.a: Gráfico de comprensión global deseable correspondiente al cuestionario y el conjunto de indicadores asociados (apartado 3.6.3.).	1º.a.- Análisis pormenorizado de cada una de las actividades, tomando como referencia la tabla 19. 1º.b.-Representación gráfica de lo observado, en el gráfico de comprensión. 2º Comparación entre el gráfico global de comprensión deseable y el gráfico de comprensión del caso, tomando como referencia la tabla 19.a. 3º. Detección de debilidades, fortalezas y significatividad respecto del concepto, en cada caso, a medio plazo.
<i>Detectar las fortalezas, dificultades y errores que afronta cada caso, en relación con la construcción del concepto de área después de un periodo de tiempo y que revelan la significatividad lograda respecto del concepto y la permanencia de su comprensión.</i>			

Tabla 14: Instrumentos y proceso de análisis respecto de cada uno de los instrumentos de recogida de información del caso.

Como la tabla 14 presenta de manera esquemática el proceso de análisis realizado, a continuación desarrollamos aquellos aspectos que consideramos necesarios para su comprensión.

En primer lugar, el análisis de las actividades de los distintos cuestionarios y de la secuencia de aprendizaje, va precedida de una *Descripción de la producción escrita del caso*, en particular, en esta última, consideramos el contexto de la discusión con su grupo. Posteriormente, presentamos el análisis de la producción escrita del caso. Con el objeto de obtener las unidades de significado (Bardin, 1986; Carrillo, 1996; Goetz & Le Compte, 1998), desde el tratamiento cognitivo, identificamos aquellos subconjuntos manejables que brindan información sobre los contenidos relacionados con el concepto de área.

El análisis de las unidades extraídas de las actividades correspondientes al cuestionario de conocimientos matemáticos primitivos, que a criterio de la investigadora considera que el caso muestra sobre los contenidos relacionados con el concepto de área, nos permitieron detectar los conocimientos matemáticos previos – disponibles- relacionados con el concepto de área del caso. El conjunto de ellos constituyen *los conocimientos matemáticos primitivos*.

A los fines de analizar el proceso de crecimiento de la comprensión del concepto, elaboramos para cada una de las actividades- que componen los cuestionarios y la secuencia de aprendizaje respecto del concepto de área-, un gráfico de comprensión (Pirie y Kieren, 1994; 1999) donde mostramos gráficamente el nivel de logro de cada indicador y su ubicación en la capa a la que pertenece (en función de la explicación proporcionada en el capítulo anterior, apartado 2.3.1.)

El análisis de las unidades extraídas de cada una de las actividades correspondientes a los otros cuestionarios- sobre las ideas previas del concepto de área, al finalizar la secuencia y a medio plazo- nos permitieron comprender el logro o no de los indicadores de las categorías enunciadas. En función de ello, en primer lugar, construimos un *gráfico de comprensión de cada actividad* analizada, asociando cada uno de los indicadores a una capa o anillo según las tablas 16, 18 y 19, que presentamos en el apartado 3.6.3. (según el cuestionario a analizar),

mostrando su logro o no en función de los códigos utilizados y que mostramos en el apartado 3.6.6.

En segundo lugar, y considerando la totalidad de las actividades que componen cada uno de los diferentes cuestionarios, construimos el *gráfico de comprensión global del caso, respecto de sus ideas previas del concepto de área, del cuestionario al finalizar la secuencia o del cuestionario a medio plazo*, utilizando para ello las tablas 16.a.; 18.a y 19.a respectivamente, que presentamos en el apartado 3.6.3

Posteriormente, analizamos dicho gráfico de comprensión global del caso tomando como referente el gráfico de comprensión deseable, lo que nos permite poner de relieve las fortalezas y debilidades que presenta cada caso en relación con la comprensión del concepto de área. En el caso del instrumento de ideas previas, este análisis nos permite obtener la situación inicial del caso analizado respecto de dicho concepto, mientras que el análisis de los cuestionarios finales revelan el proceso y significatividad de la construcción del concepto de área.

El enfoque de análisis de las actividades de la secuencia de aprendizaje es particular, pues interesa poner de relieve tanto el qué como el cómo de ese proceso de construcción del concepto de área. Así, consideramos la información que nos brindan las unidades de significado y las interacciones - el diálogo- que ocurren entre los niños y con la maestra. Desde el enfoque dialógico (Linell, 1998, 2005a), relacionamos estos aspectos a través de un instrumento que denominamos *tabla de diálogo*. Este instrumento, la tabla 17, y los resultados de investigaciones acerca del concepto, nos permiten inferir algunas ideas que dan cuenta acerca del estado de construcción de los indicadores asociados a cada una de las categorías enunciadas y construir *el gráfico de comprensión de cada una de las actividades de la secuencia*.

Además, y en relación con el crecimiento de la comprensión del concepto, nos interesa delinear cómo lo construye. Así, además de representar en dicho gráfico de comprensión el logro o no logro de los indicadores, puntualizamos el proceso de crecimiento según se fueron sucediendo los indicadores durante la resolución del problema. En función de esto, dibujamos una curva que denominamos *Trayectoria de comprensión*.

En la trayectoria de algunas actividades observamos que retrocede a una capa interior, representado en el gráfico con un trazo más grueso y zigzagueante, lo que pone de relieve que estamos en presencia de un *folding back*. Es decir, que del análisis de la tabla de diálogo detectamos que cuando el caso se queda atascado, la interacción con la maestra o con un compañero le permite revisar y/o resignificar sus conocimientos e ideas previas acerca del concepto a construir, o bien reconocer dónde está el error y avanzar con una comprensión más profunda, con el fin de lograr indicadores ubicados en una capa exterior y continuar con la resolución del problema.

En particular, durante el análisis especificamos en el *folding back*, quién lo favorece- la maestra, un compañero, ella misma- el tipo de intervención - intencional o no- que lo impulsa a realizar, y el resultado – eficaz e no-, es decir, lo que ocurre después que el niño se involucra en dicho proceso (Martín, 2008), según hemos especificado en el capítulo 2, apartado 2.3.2.

De esta manera la trayectoria describe y pone de relieve el dinamismo del proceso. Enfatizamos estas nociones en el apartado 3.6.8.- en que analizamos el proceso de análisis de la comprensión del concepto de cada actividad.

Asimismo el diálogo brinda información para el comprender el proceso de construcción del concepto. Por eso, relacionamos las comprensiones matemáticas del caso con el tipo de interacciones que se establecieron en el pequeño grupo, y con la maestra, a fin que ellas promuevan la construcción individual del concepto de ese caso en particular. En función de ello, distinguimos la naturaleza de las interacciones entre los niños según el nivel de compromiso entre ellos; la relación de poder y autoridad establecida en el grupo; y la colaboración brindada (Cobb, 1995). En cambio, respecto a las interacciones de la maestra con los niños, se expresan según la capa de comprensión a la que remite, en invocativas, provocativa o validativa (Martín, 2008).

El análisis realizado, da cuenta de los posibles procedimientos por los que cada caso puede desarrollar el aprendizaje del concepto, las dificultades y errores que afrontan en relación al mismo y los mecanismos que lo promueven. . Remitimos al lector al apartado 3.6.8 para una comprensión más detallada de este proceso.

Finalizamos elaborando un informe para cada caso, efectuando una mirada global del análisis realizado. Tratamos que muestre el proceso de construcción del concepto de área en términos de evolución, analizamos la comprensión matemática del caso acerca del concepto a construir, el papel del folding back detectado en ese proceso y el tipo de interacciones que se establecieron en el pequeño grupo y con la maestra. Presentamos el proceso de análisis particular de este informe en el apartado 3.6.9.

En los siguientes apartados caracterizamos los instrumentos de análisis utilizados en este estudio, especificando qué información nos brindan.

3.6.1.-CATEGORÍAS E INDICADORES DEL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO

En una primera instancia, a los efectos de comenzar a organizar la información, retomamos los conceptos vertidos en los apartados: 2.2 (Conocimiento escolar), 2.3 (La construcción de conceptos), 2.4.2. (La comprensión del desarrollo del concepto en el niño desde las investigaciones) y muy especialmente 2.4.4. (El conocimiento escolar deseable en este trabajo), del marco teórico, pues nos dan información que permiten facilitar el proceso de construcción de dicho concepto y nos permiten también visualizar los obstáculos epistemológicos que enfrentan los niños, a la hora de resolver problemas, vinculados por ejemplo, con el concepto de perímetro o el uso habitual de las fórmulas.

Estas consideraciones nos facilitaron la formulación las siguientes categorías:

1. Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja
2. Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.
3. Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro.
4. Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento

5. Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo, triángulo como camino más económico.
6. Significatividad y funcionalidad del concepto.

Es decir, sostiene el concepto de área a través del tiempo y lo vincula en otros contextos. Para ello, es importante destacar que no nos ceñimos al resultado de una actividad, sino más bien, efectuamos una mirada global según las ideas construidas previamente, los procedimientos implementados y la producción asociadas a cada una de las actividades que componen los distintos instrumentos.

La construcción de las categorías propuestas lleva a construir el concepto, cada una de las actividades que las niñas resuelven en las distintas sub-fases, le permiten ir incursionando en el proceso de construcción de una o varias de ellas.

Además, y para facilitar el análisis, se enuncian indicadores para cada una de ellas, aunque no necesariamente se ha tratado que cada uno suponga un nivel de razonamiento inferior respecto del siguiente.

A continuación enunciamos las categorías y sus respectivos indicadores.

- 1.-Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja
 - 1.1.-Maneja el material mediante manipulación
 - 1.2.-Aparea lados
 - 1.3.-Aparea vértices
 - 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
 - 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos
- 2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.
 2. 1.-Compara superficies por percepción visual
 2. 2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
 2. 3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
 - 2.4.- Compara superficies por composición y descomposición (transformación indirecta).
 - 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad

conveniente.

2.6.-Construye superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.

2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.

2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.

2.9.-Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área.

2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.

2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones.

3.- Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro.

3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura.

3.2.-Reconoce que a mayor/ igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/ menor perímetro de la misma.

3.3.- Identifica figuras isoperimétricas.

3.4.- Ordena figuras isoperimétricas respecto del área.

3.5.-Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.

3.6.- Ordena figuras equivalentes, según el perímetro

4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento

4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.

4.2.-Elige una unidad adecuada.

4.3.- Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.

4.4.-Advierte la necesidad de unidades convencionales.

4.5.-Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud.

5.-Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo, triángulo como camino más económico.

5.1.- Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.

5.2.- Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras.

Enfatizamos la flexibilidad de las categorías y de los indicadores pues, a fin de obligarnos a cuestionarnos constantemente, hecho ocurrido durante el análisis efectuado con cada una de los casos. Por ejemplo, en la resolución de alguna de las actividades de la secuencia de aprendizaje, puede surgir que el caso en estudio aborde un indicador que no habíamos anticipado.

3.6.2.- LAS CAPAS DE COMPRENSIÓN Y LAS CATEGORIAS VINCULADAS AL CONCEPTO DE ÁREA

En la tabla 15, denominada *Relación entre las capas de comprensión y categorías, vinculadas al concepto de área*, relacionamos las capas del modelo de Pirie y Kieren (1994,1999) con las categorías y los indicadores enunciados, que van a facilitar el análisis.

Para ello consideramos las distintas capas de comprensión superpuestas y dispuestas a partir de un punto en común; a cada una de ellas, de la interior hacia las exteriores, las denominamos: A, B, C, D y E respectivamente, y las elipses - anillos- donde se ubican los indicadores que están entre dos capas. Las capas y anillos están descritos en el capítulo 2, apartado 2.3.1.

Para la asignación de cada uno de los indicadores a una capa o anillo determinado ha primado la reflexión realizada sobre la base de las investigaciones referidas a la construcción del concepto en los niños- capítulo 2, apartado 2.4.2.-y mi experiencia en el aula.

En función de ello y del nivel de complejidad de los mismos, hemos asignado cada uno de los indicadores a una capa o anillo de comprensión determinado. Por ejemplo sea *la categoría 3: Distinción y relaciones entre el concepto de área y perímetro* para asignar los indicadores enunciados en esta categoría, a las capas o anillos de comprensión, efectuamos las siguientes consideraciones.

La noción de perímetro se ha abordado en años anteriores, por ello podemos avizorar que los niños en este curso pueden, al menos, contar con una imagen de la misma, al menos enseñada. Los niños disponen también de una imagen de la noción de área al momento de establecer la distinción entre ambos. Para distinguir ambas nociones es necesario que los niños puedan distinguir el carácter unidimensional del bidimensional, que delimita cada una de ellas. Por lo tanto, para poder establecer dicha distinción, es importante que los niños cuenten con una imagen mental de cada una de ellas. En consecuencia comenzamos por asignar esta categoría a partir de la capa C: *Poseción de una imagen*. Así, el indicador 3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura, se asigna a la capa C.- *Poseción de una imagen* y los siguientes indicadores, relacionados con la variabilidad entre ambas nociones, se asigna a la capa D: *Percepción de propiedades* y el anillo D-E: *Percepción de propiedades - Formalización*

Los indicadores que son asignados por primera vez, los marcamos “en negrita”. Cada una de las capas contiene a las interiores, en el caso de la disposición de los indicadores en las distintas capas, sólo incluyen los asignados a las capas interiores. Esto ocurre fundamentalmente, con los indicadores asociados a una misma categoría.

Los indicadores que figuran en la tabla sin negrita, son los que se les asigna un anillo en el gráfico de comprensión, pues el alumno si bien interactúa en una capa, ya puede comenzar a interactuar con la imagen de la capa próxima. Por ejemplo, los indicadores 2.5.- *Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente* y 2.6.- *Construye superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente*, asociados ambos, a la categoría 2: *Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras*, si bien los niños pueden acudir a materiales o a un dibujo para efectuar mediciones, según una unidad conveniente con el objeto de comparar figuras o construir otras (Capa B), en algunos casos, ya comienzan a disponer de la construcción mental de la figura según su área para efectuar dicha comparación o / y construcción(capa C).

RELACION ENTRE LAS CAPAS DE COMPRENSIÓN, LAS CATEGORÍAS E INDICADORES VINCULADOS AL CONCEPTO		
A.- <i>Conocimiento Matemático Primitivo</i> Supone todo lo que el niño sabe y lo que no, lo que puede hacer y lo que no, respecto de los conocimientos matemáticos, excepto el concepto a construir en este trabajo		
Capas de comprensión	Indicador	Categoría
B.- <i>Producción de una imagen</i> : Acude a materiales didácticos o a un dibujo para construir comparar, ordenar una o más figuras entre otras de su colección. Efectúa estas distinciones para luego usarlas en nuevas circunstancias o en nuevos fines,	1.1.-Maneja el material mediante manipulación	1.-Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja.
	1.2.- Aparea lados.	
	1.3.- Aparea vértices	
	1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.	
	1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.	
	2. 1.-Compara superficies por percepción visual	2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.
	2. 2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.	
	2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).Equivalencia de figuras	
	2.4.- Compara superficies por composición y descomposición (transformación indirecta).	
	2.5.- Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente	
	2.6.- Construye superficies con la medición y utilización de, una unidad conveniente	4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento.
	4.1.- Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado	
	5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo	
		5.-Comprensión de las formulas del cuadrado, rectángulo, triángulo como camino más económico.

Tabla 15 (a) Relación entre las capas de comprensión y categorías vinculadas al concepto de área

RELACION ENTRE LAS CAPAS DE COMPRENSIÓN, LAS CATEGORÍAS E INDICADORES VINCULADOS AL CONCEPTO		
C.- <u>Poseción de una imagen</u> : Dispone de la construcción mental de la figura en función de su área, para comparar y/u ordenar con otras de su colección, sin tener para ello, que disponer de materiales didácticos ni dibujos. El objeto mental puede ser pensado por el niño y usado como conocimiento matemático.	1.3.- Aparea vértice	1.- Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. 3.- Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro. 4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento
	1.4.- Representa mentalmente la composición de figuras.	
	1.5.- Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos	
	2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone). Equivalencia de figuras	
	2.4.- Compara superficies por composición y descomposición (transformación indirecta).	
D.- <u>Percepción de propiedades</u> : Manipula y/o combina figuras para detectar propiedades vinculadas con el área de la misma, por ejemplo,- equivalencia de figuras, relación con el perímetro, dimensiones lineales para expresar su fórmula. Implica ser capaz de predecir en base a una situación en particular.	2.5.- Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente	2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.
	2.6.- Construye superficies con la medición y utilización de , una unidad conveniente	
	3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura	
	4.2.- Elige una unidad adecuada	
	2.7.- Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.	
	2.8.- Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área	
	2.9.- Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área.	
	2.10.- Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.	
	2.11.- Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones.	

Tabla 15 (b) Relación entre las capas de comprensión y las categorías vinculadas al concepto de área

RELACION ENTRE LAS CAPAS DE COMPRENSIÓN, LAS CATEGORÍAS E INDICADORES VINCULADOS AL CONCEPTO		
D.- <u>Percepción de propiedades</u> : Manipula y/o combina figuras para detectar propiedades vinculadas con el área de la misma, por ejemplo,- equivalencia de figuras, relación con el perímetro, dimensiones lineales para expresar su fórmula. Implica ser capaz de predecir en base a una situación en particular.	3.2.-Reconoce que a mayor/ igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/ menor perímetro de la misma	3.- Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro.
	3.3.- Identifica figuras isoperimétricas.	
	3.4.- Ordena figuras isoperimétricas respecto del área.	
	3.5.- Construye figuras equivalentes de distinto perímetro	
	3.6.- Ordena figuras equivalentes, según el perímetro	
E.- <u>Formalización</u> Abstractar un método o cualidad común de una noción específica, en este caso, el concepto de área otorgando funcionalidad al mismo.	4.3.- Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.	4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento
	4.4.- Advierte la necesidad de unidades convencionales.	
	5.2.- Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras.	
	3.5.- Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.	3.- Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro.
	4.5.- Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud	

Tabla 15 (c) Relación entre las capas de comprensión y categorías vinculadas al concepto de área

3.6.3.- INSTRUMENTO PARA VINCULAR LOS PROBLEMAS, LAS CATEGORÍAS Y LAS CAPAS DE COMPRENSIÓN ASOCIADAS AL CONCEPTO DE ÁREA

A fin de efectuar el análisis de cada una de las actividades que componen los cuestionarios- excepto el de conocimientos matemáticos primitivos - y la secuencia, elaboramos un instrumento denominado: *Relación entre los problemas, las categorías y las capas de comprensión vinculadas al concepto de área*. Como su nombre lo indica, para cada actividad, se asocian las categorías e indicadores a un gráfico de comprensión. Esta asociación se efectúa del indicador a una de las capas-A, B, C, D o E. capa o a un anillo del gráfico, según lo indica tabla 15.

Si el indicador se asocia a una capa determinada, en el gráfico de comprensión, éste se asigna en el espacio perteneciente a dicha capa. En cambio si el indicador se asocia a un anillo, éste se representa sobre la elipse, es decir, si bien posee elementos de haber superado la capa interior, en algunos casos comienza a incursionar en la capa siguiente, como manifestamos en el apartado anterior.

El conjunto de indicadores que aparece en dicho gráfico lo denominamos nube de puntos.

A continuación para cada cuestionario y la secuencia presentamos dos tablas, en una de ellas, mostramos la relación entre las actividades, las categorías y las capas de comprensión vinculadas al concepto de área de cada una de las actividades. Otra, en la que presentamos el conjunto de indicadores asociados al conjunto de actividades que componen ese cuestionario en particular o la secuencia y el gráfico de comprensión correspondiente, denominado: *Gráfico de comprensión global deseable asociado a ese instrumento en particular*. Por ejemplo:

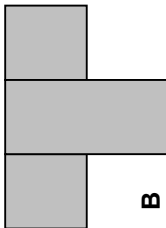
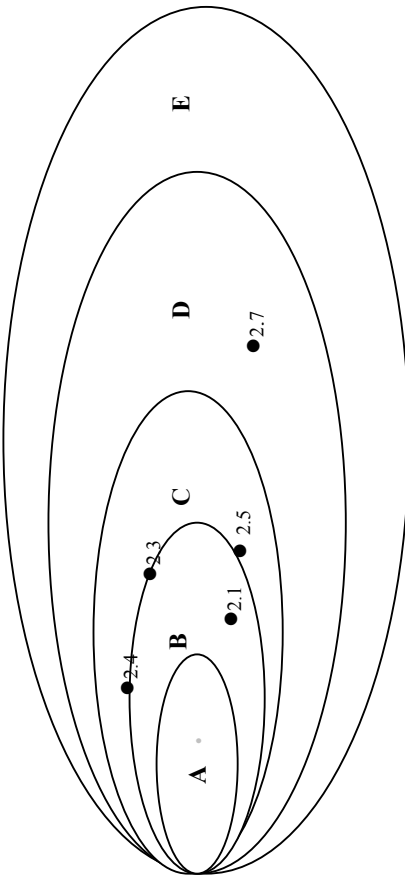
Respecto del cuestionario acerca de las ideas previas, las tablas se denominan *Tabla 16* y *Tabla 16.a.* respectivamente.

Respecto de la secuencia de aprendizaje, las tablas se denominan *Tabla 17* y *Tabla 17.a.* respectivamente.

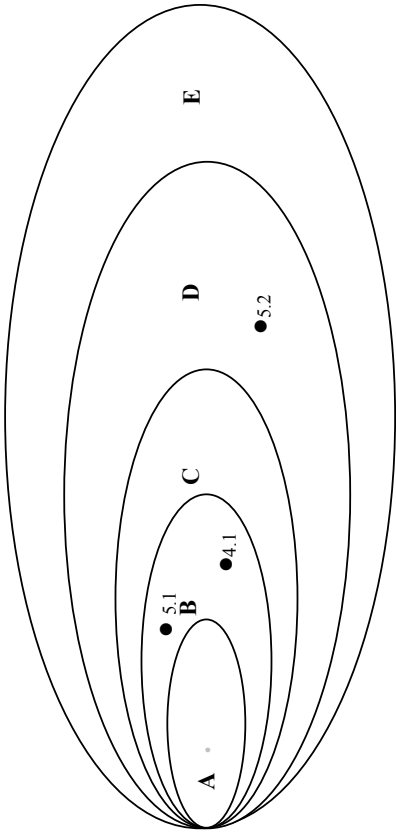
Respecto del cuestionario al finalizar la secuencia, las tablas se denominan *Tabla 18* y *Tabla 18.a.* respectivamente.

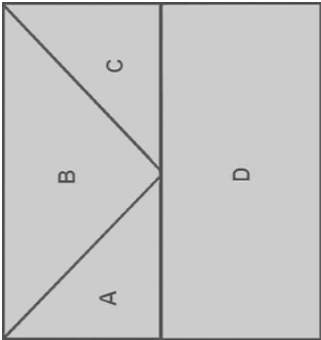
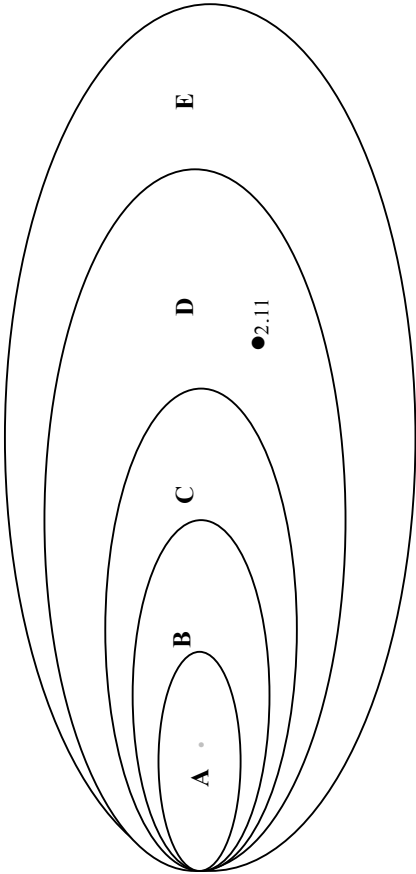
Respecto del cuestionario a medio plazo, las tablas se denominan *Tabla 19* y *Tabla 19.a.* respectivamente.

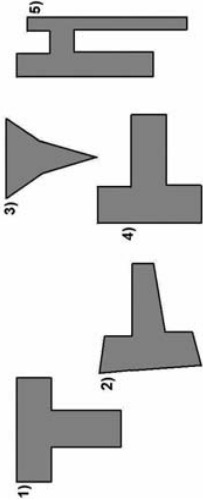
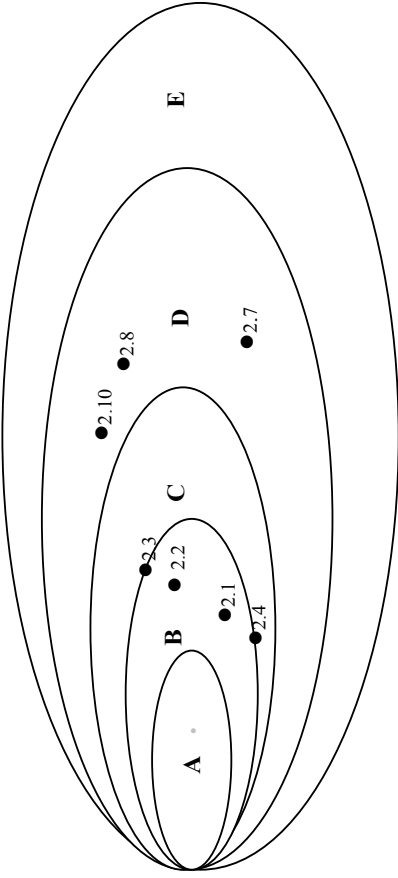
Tabla 16: Relación entre los problemas del cuestionario de ideas previas acerca del concepto de área, las categorías indicadores asociados al gráfico de comprensión.

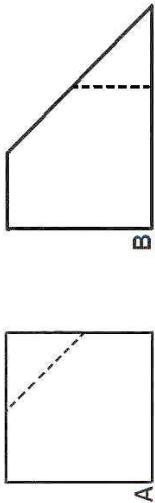
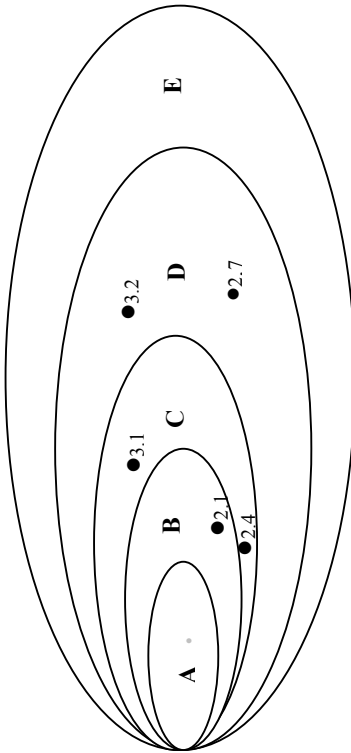
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión, vinculada al concepto de área.		
N ^a	Problema	Categorías e Indicadores
I	 A  B	2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. (percibe sin todavía cuantificar, apunta a una cualidad) 2.1.-Compara superficies por percepción visual 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone). 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición. 2.5.-Compara superficie con la medición y utilización de una unidad conveniente. 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
		

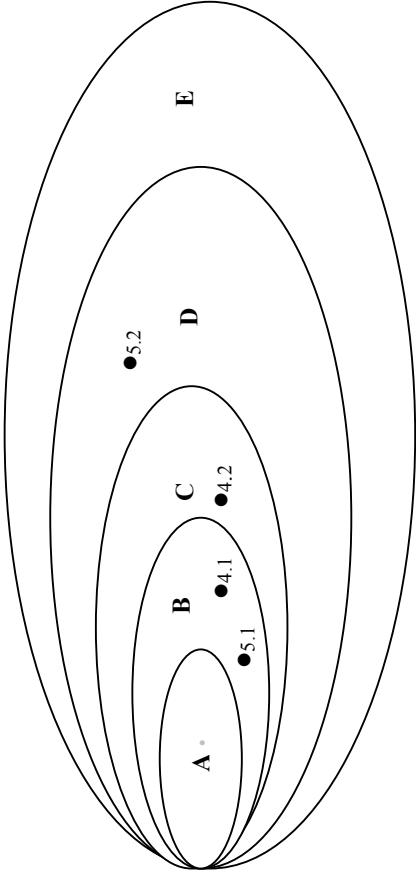
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión, vinculada al concepto de área.	
N ^a	Problema
2	.- ¿Cuántos cuadrados como el de la izquierda caben en el rectángulo de la derecha? ¿Cómo lo calculaste?
	4.-Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento. 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado 5.-Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo, triángulo como camino más económico. 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo. 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras



Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión, vinculada al concepto de área.		
N ^a	Problema	Categorías e Indicadores
3	A Lucía le han regalado un rompecabezas cuyas piezas tienen la forma que indica el dibujo. ¿Qué parte del rompecabezas representa cada pieza? 	2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. 2.11.- Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones
		

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión, vinculada al concepto de área.	
N ^a	Problema
4	Sobre una hoja se dibujaron los siguientes diseños de escudos para un club, que serán hechos en telas de color  ¿Para cuál de todos se necesita la menor cantidad de tela en su confección? Justifica tu respuesta
	Categorías e Indicadores 2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. (percibe sin todavía cuantificar, apunta a una cualidad) 2.1.-Compara superficies por percepción visual. 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión. 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone). 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición. 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía. 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área. 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
	

N ^a	Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión, vinculada al concepto de área.	Categorías e Indicadores
6	En la figura A se ha recortado por la línea de puntos una de las esquinas, y su ha ubicado como lo indica la figura B  ¿Qué puedes decir de la cantidad de superficie que ocupa cada una de las figuras? Si Quisieras bordear una de las figuras con un hilo. ¿Qué podrías decir acerca de la cantidad de hilo necesario para cada una de ellas? Justifica tu respuesta.	2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. (percibe sin todavía cuantificar, apunta a una cualidad) 2.1.-Compara superficies por percepción visual 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición. 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía. 3.-Distinción y relaciones entre los conceptos de área y perímetro. 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura. 3.2.- Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual / menor perímetro de la misma
		

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión, vinculada al concepto de área.		
N ^a	Problema	Categorías e Indicadores
7	Deseo empapelar el pizarrón con hojas de papel glasé. ¿Cuántos de esos papeles necesitaré aproximadamente?	4.-Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento. 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado 4.2.- Elige una unidad adecuada. 5.-Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo, triángulo como camino más económico. 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo. 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras
		

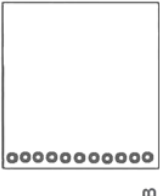
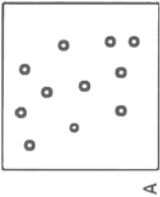
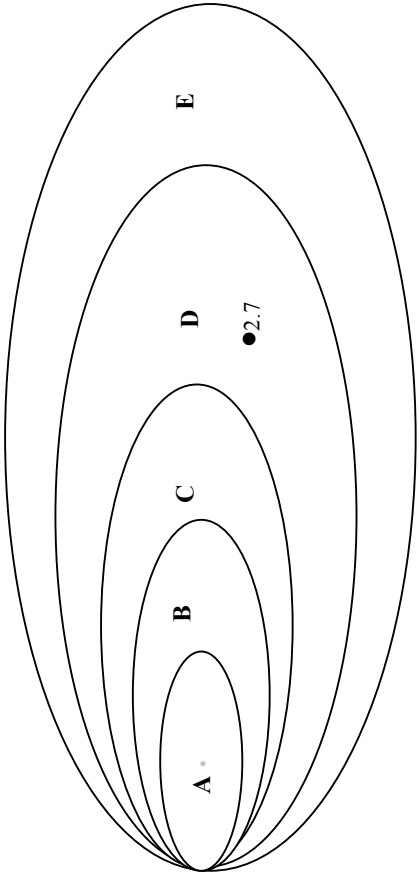
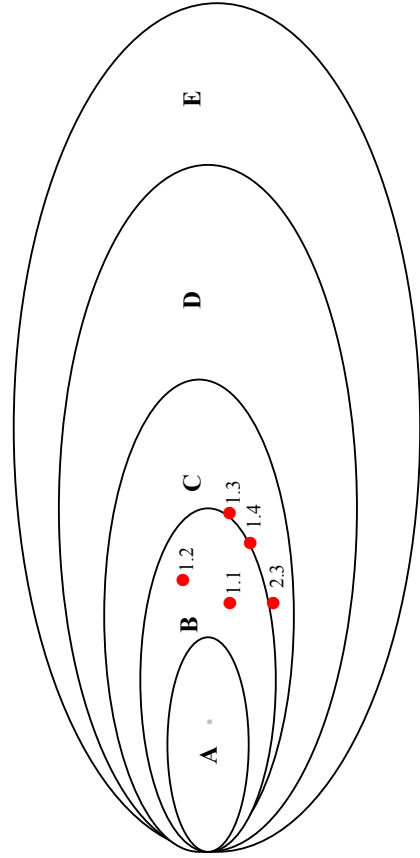
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión, vinculada al concepto de área.		
N ^a	Problema	Categorías e Indicadores
8	Una máquina perforadora hace agujeros circulares, todos del mismo tamaño sobre planchas de aluminio cuadradas. ¿Qué podés decir acerca de la cantidad de aluminio que tiene cada plancha? Justifica tu respuesta. 	2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. (percibe sin todavía cuantificar, apunta a una cualidad) 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
		

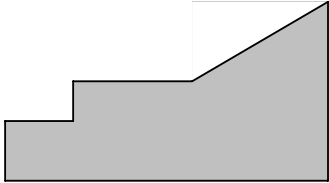
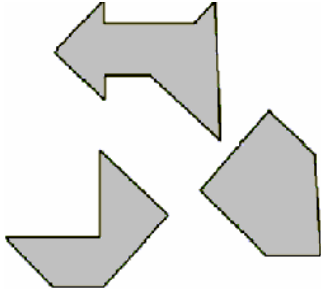
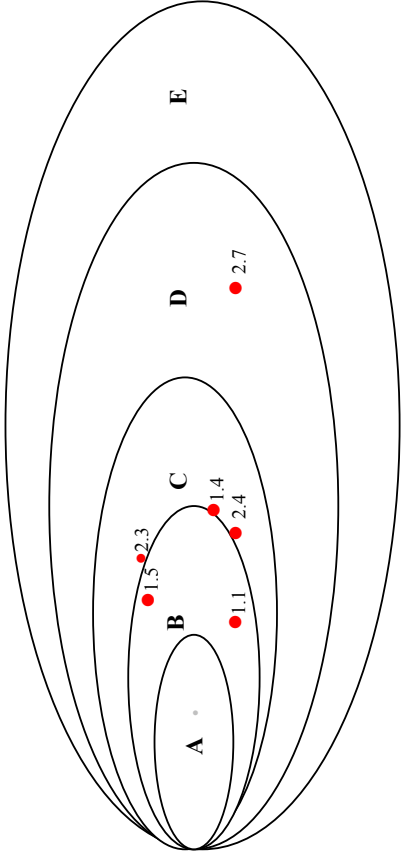
Tabla 16.a: Gráfico de comprensión global deseable correspondiente al cuestionario acerca de las ideas previas de concepto de área y el conjunto de indicadores asociados

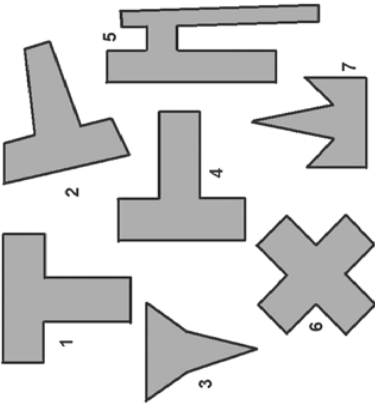
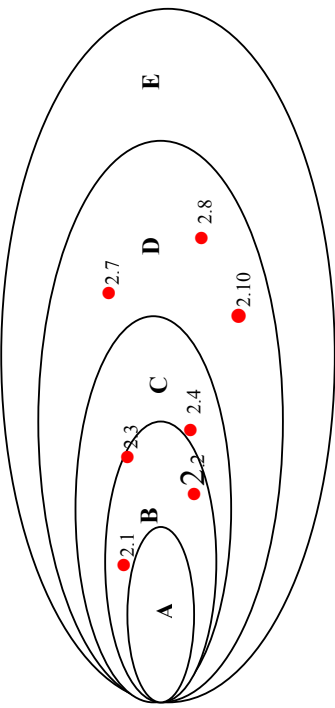
Indicadores	
2.1.-Compara superficies por percepción visual 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión. 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone). 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición. 2.5.-Compara superficie midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente. 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía. 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área. 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.	2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura. 3.2.- Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual / menor perímetro de la misma 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado 4.2.- Elige una unidad adecuada. 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo. 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras 6.2.- Vincula el concepto de área a otros contextos.

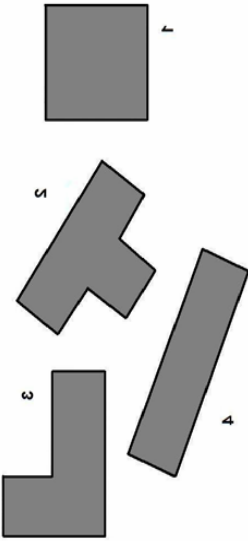
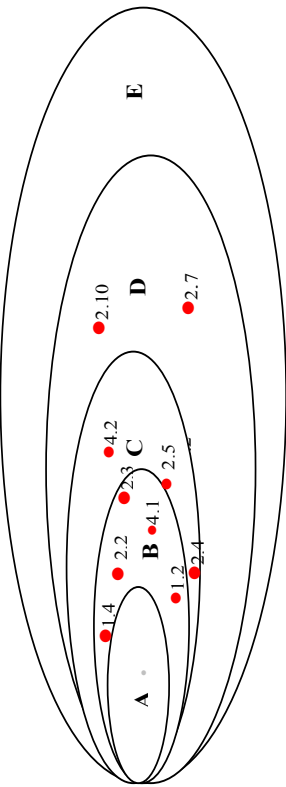
Tabla 17: Relación entre los problemas de la secuencia de aprendizaje, las categorías e indicadores y el gráfico de comprensión asociado al concepto de área.

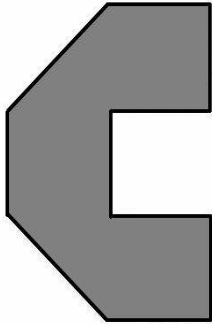
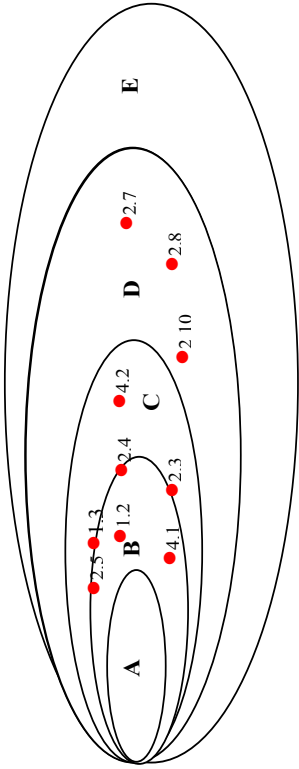
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión vinculada al concepto de área		
N ^a	Problema	Categorías e Indicadores
1	Dispones de un equipo de TANGRAM. Arma un rompecabezas con las piezas, sin superponerlas de manera de obtener distintas figuras, para cada una de ellas. No olvides apoyar sobre la hoja de tu carpeta y marcar el contorno.	1.- Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.1.-Maneja el material mediante manipulación 1.2.-Aparea lados. 1.3.-Aparea vértices 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
		2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas. (recompone)

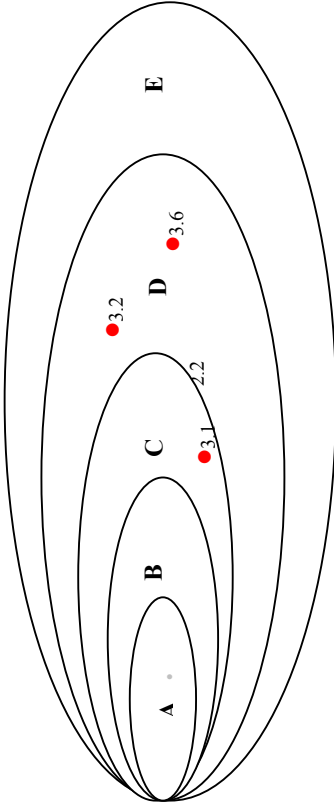


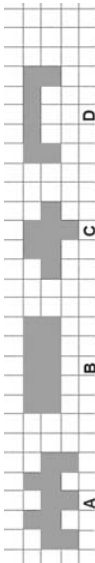
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculada al concepto de área		
N ^a	Problema	Categorías e Indicadores
2	Investiga con cuáles de las piezas del TANGRAM se construyó la siguiente figura a.- 	1.- Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.1.-Maneja el material mediante manipulación 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras. 1.5.- Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos. 2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. (percibe sin todavía cuantificar, apunta a una cualidad) 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas.(recompone). 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición. 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
	Ahora deben decir con qué piezas del TANGRAM se armaron las siguientes figuras. b.- 	

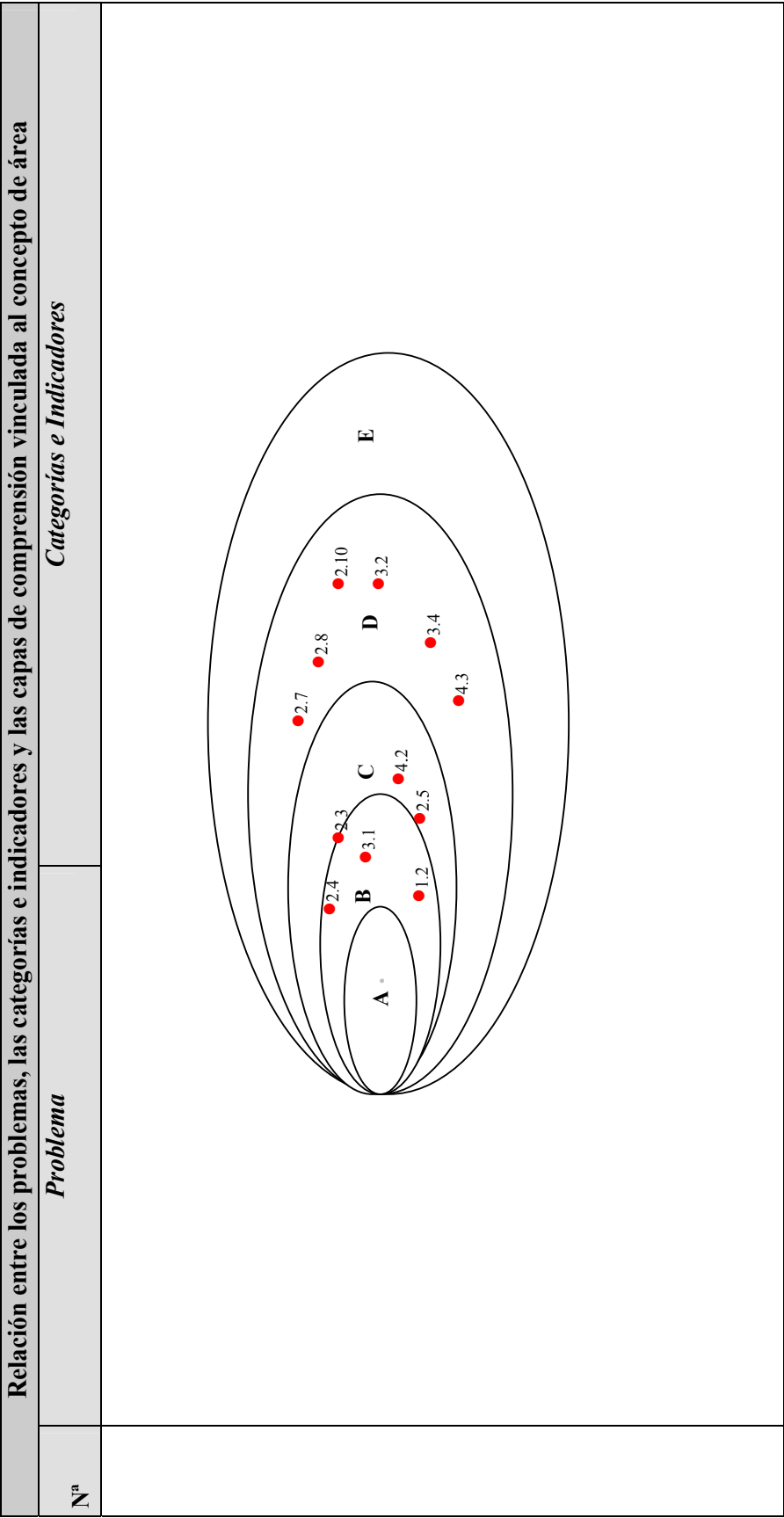
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión vinculada al concepto de área	
N ^a	Problema
3	Sobre una hoja blanca se dibujaron los diseños de los escudos para un club, que serán hechos con tela de color. ¿Para cuál de todos se necesita la menor cantidad de tela? 
	2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. 2.1.-Compara superficies por percepción visual. 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión. 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone). 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición. 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía. 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área. 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
	

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculada al concepto de área		
Nº	Problema	Categorías e Indicadores
4	¿Cuáles de las siguientes figuras ocupa más papel?	1.- Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.2.-Aparea lados. 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras 2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. (percibe sin todavía cuantificar, apunta a una cualidad). 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión. 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas(recompone). 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición. 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía. 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área. 4.-Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento. 4.1 Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado 4.2.-Elige una unidad adecuada.
		

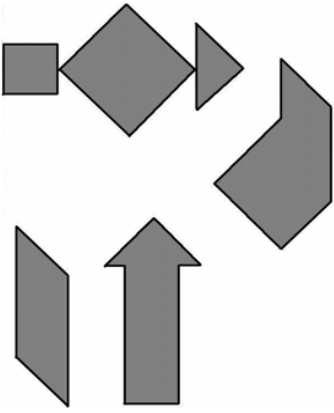
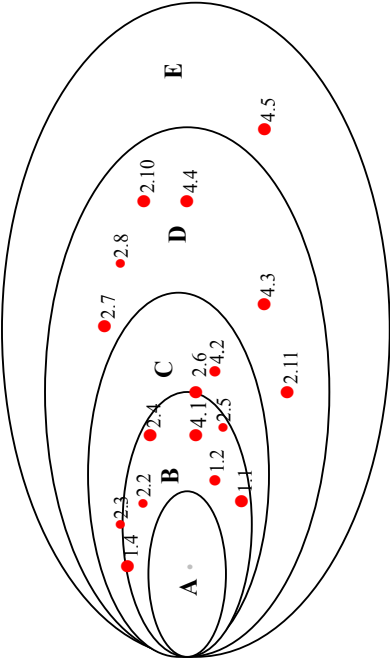
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión vinculada al concepto de área		
N ^o	Problema	Categorías e Indicadores
5	a.-Encuentra tres figuras que sean equivalentes a la siguiente. 	1.- Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.2.-Aparea lados. 1.3.-Aparea vértices 2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. (Percibe sin todavía cuantificar, apunta a una cualidad). 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone). 2-4.-Compara superficies por composición y descomposición. 2.5-Compara superficies en la utilización y medición de una unidad conveniente 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía. 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área. 2-10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área. 4.-Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento. 4.1.- Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado 4.2.-Elige una unidad adecuada.
	b.-Es posible encontrar un rectángulo equivalente a la figuras dada? Justifica tu respuesta.	

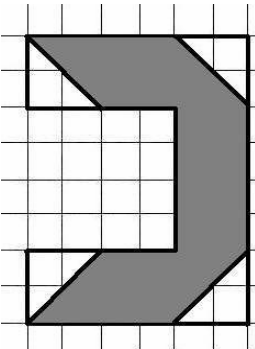
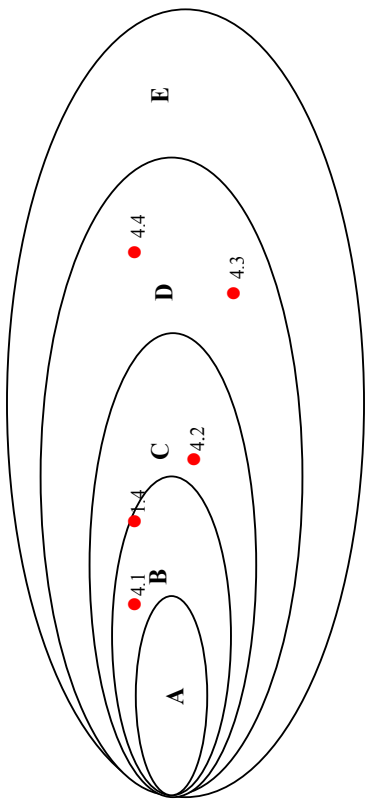
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculada al concepto de área		
Nº	Problema	Categorías e Indicadores
6	Intenta bordear las figuras del ítem 4 con un hilo. ¿utilizas la misma cantidad de hilo para cada una de ellas?	3.- Distinción y relaciones entre los conceptos de área y perímetro. 3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura 3.2.- Reconoce que a mayor /igual /menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/menor perímetro de la misma. 3.6.- Ordena según el perímetro, figuras equivalentes.
		

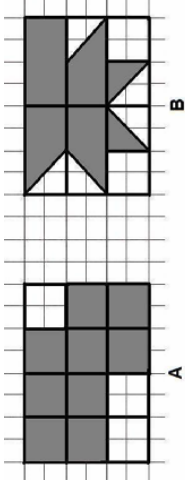
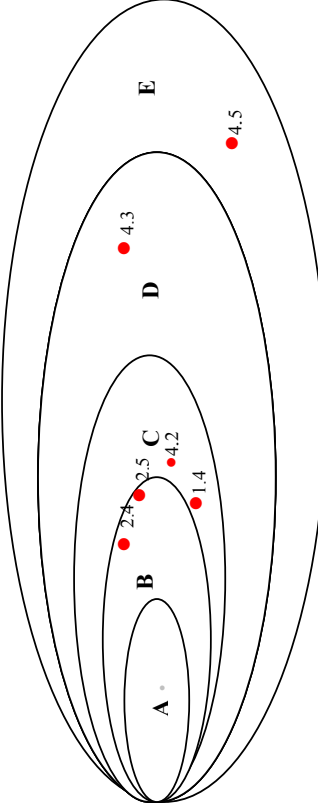
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión vinculada al concepto de área		
N ^a	Problema	Categorías e Indicadores
7	Considera las siguientes figuras: A, B, C y D. ¿Cuáles de ellas tienen igual perímetro? Compara el área de esas figuras. 	1.- Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.2.-Aparea lados. 2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone). 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición. 2.5.-Compara superficies con la utilización y medición de una unidad conveniente 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía., 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área. 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área. 3.- Distinción y relaciones entre los conceptos de área y perímetro 3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura 3.2.- Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual / menor perímetro de la misma 3.4.- Ordena figuras isoperimétricas respecto del área. 4.-Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento. 4.2. Elige una unidad adecuada. 4.3.- Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada

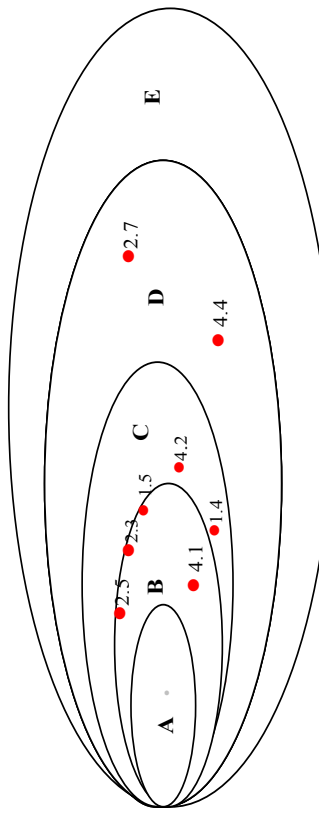


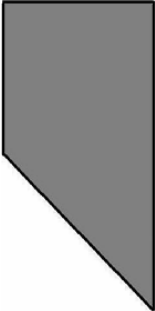
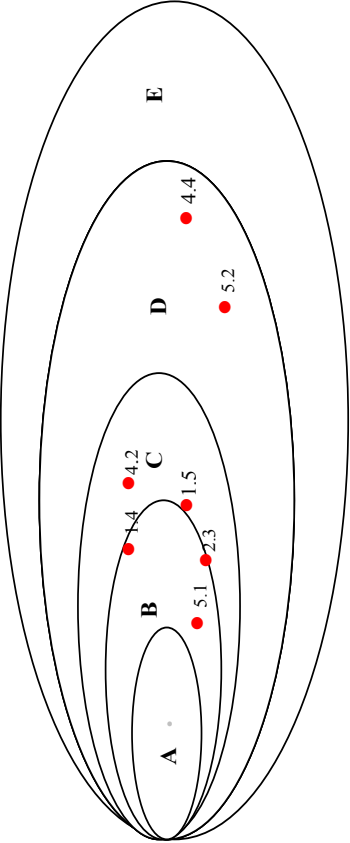
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión vinculada al concepto de área		
N ^a	Problema	Categorías e Indicadores
8	Remarca las piezas de tu TANGRAM en la carpeta, y responde, explicando cómo lo resuelves: superponiendo, contando triángulos, contando cuadrados. 8.1.- Tomando como unidad el área de la pieza (triángulo chico) ¿Cuál es el área de las demás piezas?. 8.2.- ¿Qué piezas son equivalentes? 8.3.- ¿Cuáles son iguales? 8.4.- ¿Qué relación existe entre las áreas del cuadrado y el triángulo grande? 8.5.- ¿Y entre el paralelogramo y el triángulo grande? 8.6.- ¿Y entre el triángulo mediano y el grande? 8.7.- Arma con las siete piezas un cuadrado. ¿Cuántos triángulos chicos necesitan para formar dicho cuadrado? ¿Tomando como unidad el triángulo grande? Tomando como necesario para formar dicho cuadrado? ¿Cuántos como unidad el triángulo mediano. ¿Cuántos necesario para formar el cuadrado del Tangram? 8.8.- Tomando como unidad el área del triángulo chico, construye con tu TANGRAM una figura que tenga un área de 4 unidades, otra de 8 unidades y otra de 10 unidades, remárcalas en tu carpeta de trabajo. 8.9.- Ahora construye las siguientes figuras que tengan el paralelogramo un área de 6 unidades, la fecha de 8 unidades, el barco de 10 unidades y el muñeco de 12 unidades. Dibuja Cada una de las figuras obtenidas en tu carpeta.	1.- Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.1.- Maneja el material mediante manipulación. 1.2.- Aparea lados 1.4.- Representa mentalmente la composición de figuras. 2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. 2.2.- Compara superficies por superposición y/o inclusión. 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone). 2.4.- Compara superficies por composición y descomposición. 2.5.- Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente 2.6.- Construye superficies con la utilización y medición de una unidad conveniente 2.7.- Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía. 2.8.- Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área. 2.10.- Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área. 2.11.- Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones 4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento. 4.1.- División y pavimentación de la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado 4.2.- Elige una unidad adecuada. 4.3.- Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada. 4.4.- Advierte la necesidad de unidades convencionales. 4.5.- Distingue la proporción inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida.

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculada al concepto de área		
N ^a	Problema	Categorías e Indicadores
	 8-10.- ¿Puedes transformar, moviendo solo una pieza, el paralelogramo en un rectángulo? Las dos piezas, ¿tienen igual área?	

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculada al concepto de área	
N ^o	Problema
9	Determina el área de la figura sombreada: a) utiliza triángulo como unidad. b) utiliza cuadrado como unidad. c) utiliza rectángulo como unidad. ¿Qué puedes decir acerca de los resultados obtenidos? 
	1.- Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras. 4.-Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento. 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado. 4.2.- Elige una unidad adecuada. 4.3.- Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada. 4.4.- Comprende la necesidad de unidades convencionales 

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculada al concepto de área		
N ^a	Problema	Categorías e Indicadores
10	¿A cuál de las siguientes superficies le corresponde mayor área? 	1.- Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras 2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición. 2.5.-Compara superficies en la utilización y medición de una unidad conveniente 4.-Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento. 4.2.-Elige una unidad adecuada. 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada. 4.5.-Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida de la cantidad de magnitud.
		

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculada al concepto de área		
N ^o	Problema	Categorías e Indicadores
11	Resuelve nuevamente la situación 3 utilizando cuadrículas y comprueba si la elección a la que arribaste es la apropiada	1.- Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras. 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos. 2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. (Percibe sin todavía cuantificar, apunta a una cualidad). 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone). 2.5.-Compara superficies con la utilización y medición de una unidad conveniente. 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía 4.-Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento. 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el numero de unidades empleado. 4.2.- Elige una unidad adecuada. 4.4.- Advierte la necesidad de unidades convencionales.
		

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculada al concepto de área		
N ^{ra}	Problema	Categorías e Indicadores
12	Este es el patio de la escuela de Tomás, que desea embaldosar. Realice un dibujo en escala de tal forma que cada cuadrado de la plantilla representa una baldosa. a.- Indica dos métodos diferentes para calcular la cantidad de baldosas que necesitas. b.- ¿Y si completamos el patio de modo que formes un rectángulo? ¿Cuántas baldosas son necesarias?	1.- Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras. 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos. 2.-Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. (Percibe sin todavía cuantificar, apunta a una cualidad). 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas(recompone) 4.-Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento 4.2.- Elige una unidad adecuada. 4.4.- Advierte la necesidad de unidades convencionales. 5.- Comprensión de las fórmulas del rectángulo, cuadrado y triángulo como camino más económico 5.1.- Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo. 5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.
		

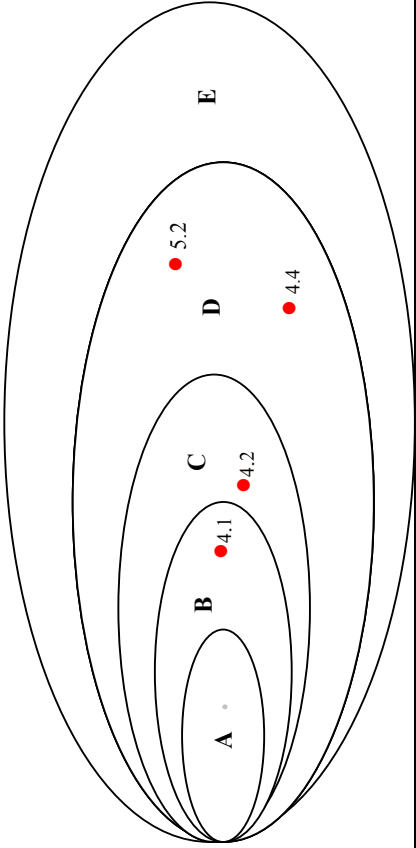
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculada al concepto de área		
N ^o	Problema	Categorías e Indicadores
13	Tarea para el hogar: Dibuja la palma de tu mano sobre la hoja de carpeta. Calcula el área aproximada de la superficie que ocupa.	4.-Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado. 4.2.- Elige una unidad adecuada. 4.4.-Advierte la necesidad de una unidad convencional. 5.- Comprensión de las fórmulas del rectángulo, cuadrado y triángulo como camino más económico 5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.
		

Tabla 17a: Gráfico de comprensión global deseable asociado a la *secuencia de aprendizaje* y el conjunto de indicadores asociados

Indicadores	
1.1.-Maneja el material mediante manipulación 1.2.-Aparea lados. 1.3.-Aparea vértices. 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras. 1.5.- Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos. 2.1.-Compara superficies por percepción visual. 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión. 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone). 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición. 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente. 2.6.- Construye superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente. 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía. 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área. 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área. 2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones	3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura 3.2.- Reconoce que a mayor /igual /menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/menor perímetro de la misma. 3.4.- Ordena figuras isoperimétricas respecto del área. 3.5.- Construye figuras equivalentes de distinto perímetro 3.6.- Ordena según el perímetro, figuras equivalentes. 4.1 Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado 4.2.-Elige una unidad adecuada. 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada 4.4.-Comprende la necesidad de unidades convencionales. 4.5.-Distingue la proporción inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida. 5.1.- Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo. 5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.

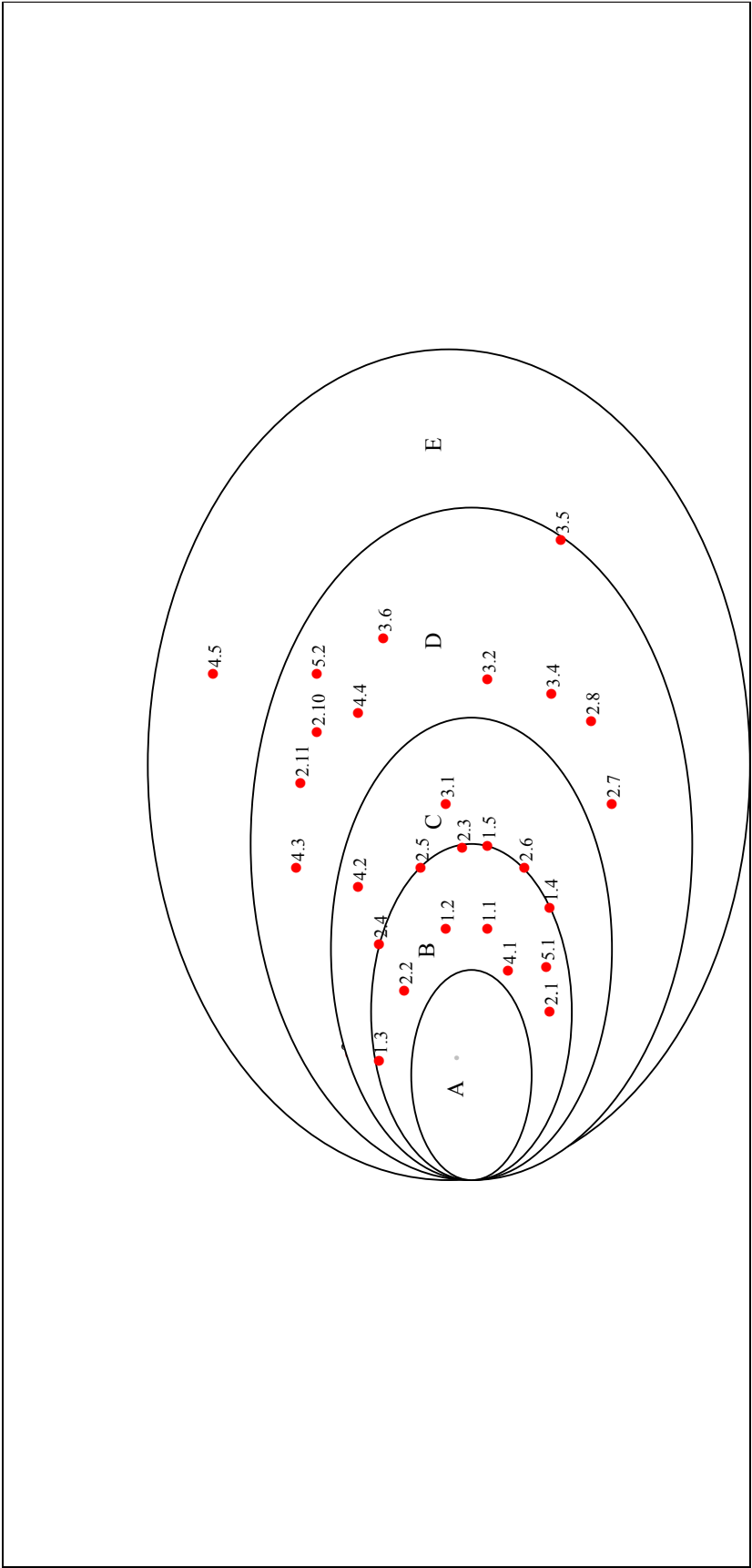
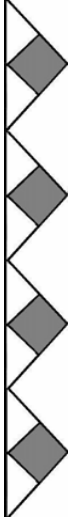
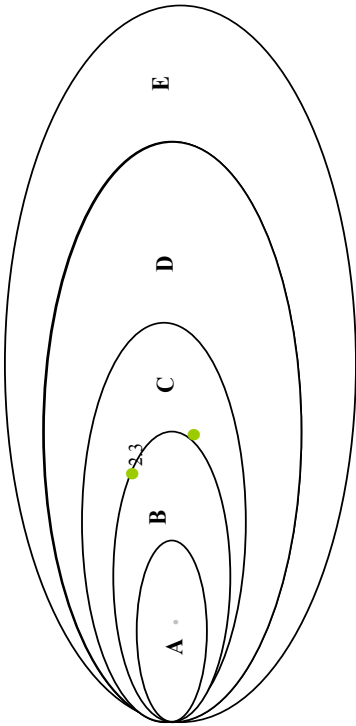
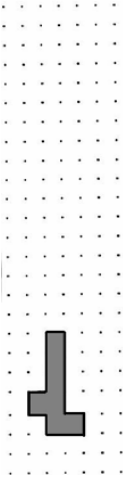
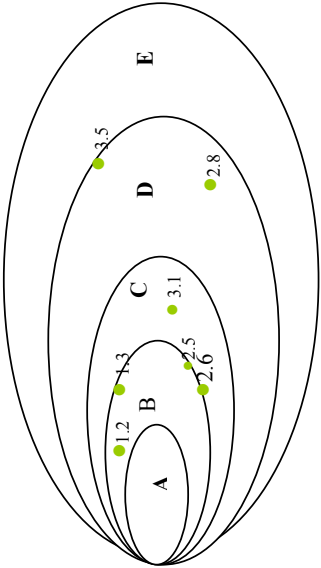
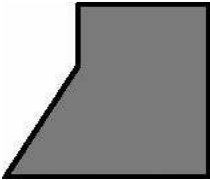
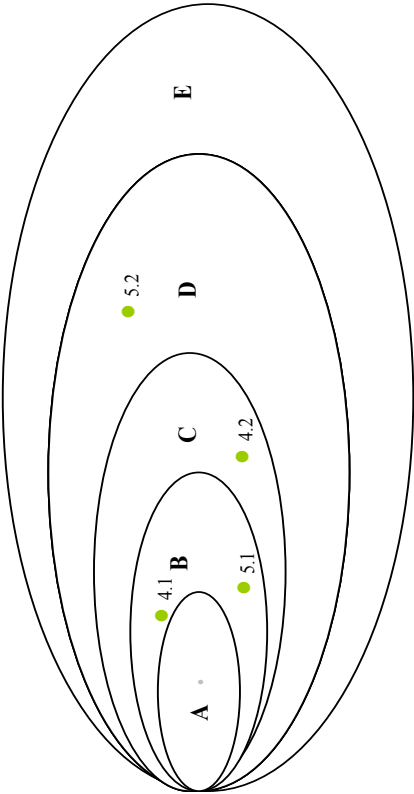


Tabla 18 Relación entre los problemas del cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje, las categorías e indicadores y el gráfico de comprensión

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión vinculadas al concepto de área		
Nº	Enunciados	Categorías e Indicadores
1	Observa la guirnalda. ¿Cuántos cuadrados hay en total? ¿Cuántos triángulos hay en total? 	1.- Desarrollar la percepción mediante la copia de figuras y reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.5.- Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos 2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras. 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone)
		

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculadas al concepto de área		
Nº	Enunciados	Categorías e Indicadores
2	Dibuja una figura equivalente a la dada pero de de distinto perímetro. Justifica tu dibujo 	1.- Desarrollar la percepción mediante la copia de figuras y reconocimiento de figuras simples en una figura compleja 1.2.- Aparea lados. 1.3.- Aparea vértices 2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de áreas 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente 2.6.-Construye superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente 2.8- Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área 3.-Distinción y relaciones entre los conceptos de área y perímetro. 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura 3.5.- Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.
		

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculadas al concepto de área		
Nº	Enunciados	Categorías e Indicadores
3	Calcula el área de este polígono indicando dos métodos diferentes para calcularlo 	4.- Conceptualización del área como medida de cubrimiento (iteración de la unidad de medida) 4.1.- Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado. 4.2.- Elige una unidad adecuada. 5.- Comprensión de las fórmulas del cuadrado, triángulo y rectángulo. 5.1.- Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo 5.2.-Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras
		

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculadas al concepto de área		
Nº	Enunciados	Categorías e Indicadores
4	-Responde y justifica tu respuesta: ✓ Dos figuras que tienen la misma forma, ¿son sí o sí EQUIVALENTES? ✓ ¿Pueden ser equivalentes dos figuras con distinta forma? ✓ ¿Puede ser un cuadrado equivalente a un rectángulo? ✓ Para comparar dos superficies debes.....	2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de áreas 2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión) 2.4.- Compara superficies por composición o descomposición. 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente 2.7.- Reconoce que si un figura se descompone o recombina con otra, su área no varía 2.8.- identifica dos superficies de distinta forma y de igual área 2.9.-Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área. 4.- Conceptualización del área como medida de cubrimiento (iteración de la unidad de medida) 4.1.- Divide y pavimenta la superficie a medir y recuenta el número de unidades empleado.

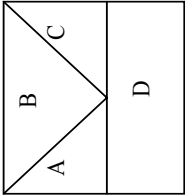
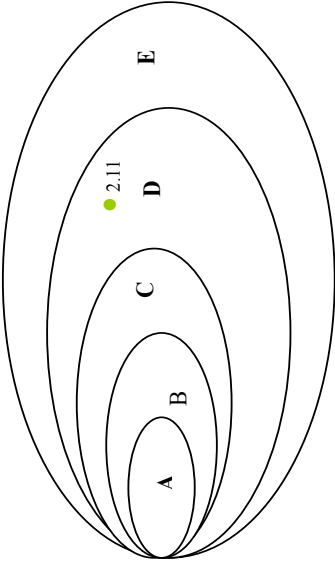
Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y las capas de comprensión vinculadas al concepto de área		
Nº	Enunciados	Categorías e Indicadores
5	El siguiente rompecabezas está armado con las fichas: A, B, C y D. Expresa con una fracción cada ficha del rompecabezas. 	2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de áreas. 2.11.- Relaciona el todo y las partes y entre las partes. Es decir, relaciona las fracciones con respecto al área de una superficie
		

Tabla 18 a: Gráfico de comprensión global deseable asociado al cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje y el conjunto de indicadores asociados

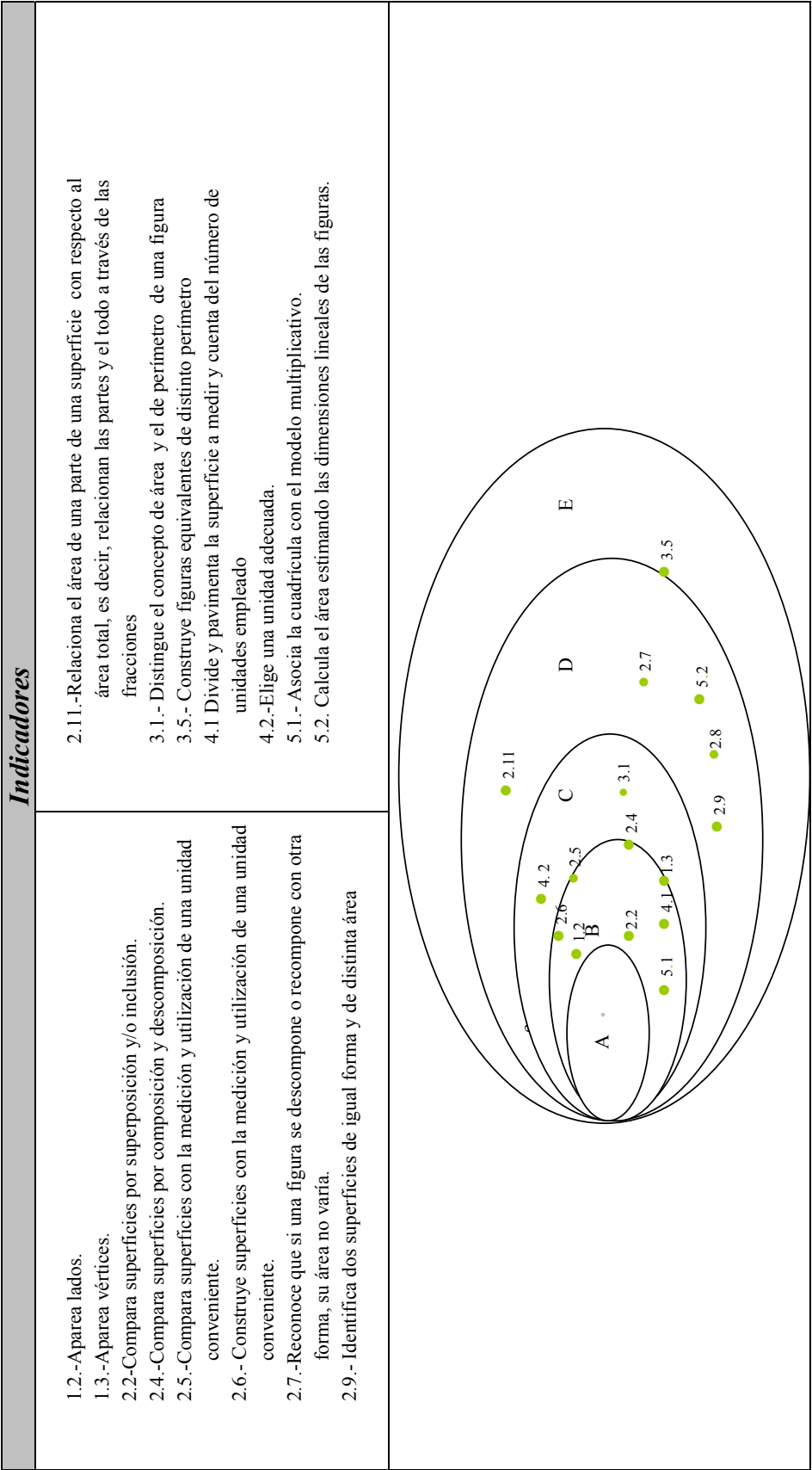
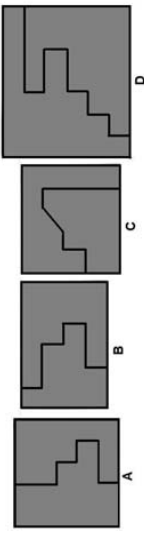
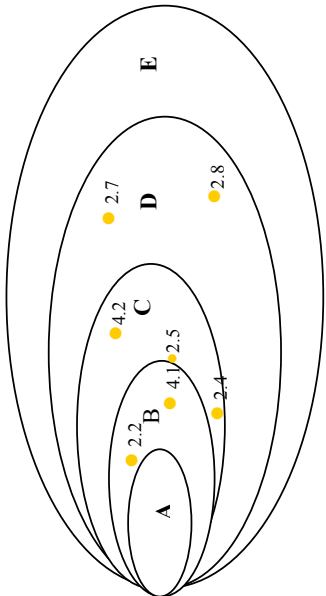
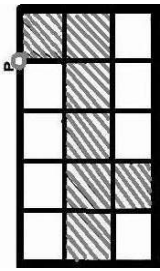
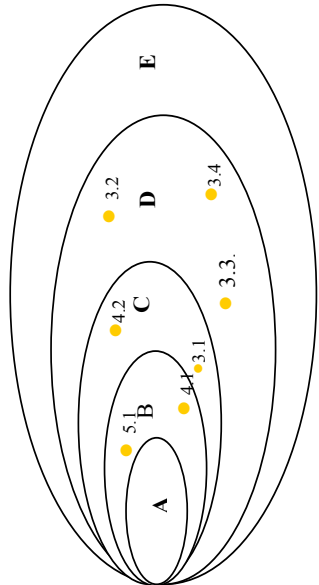
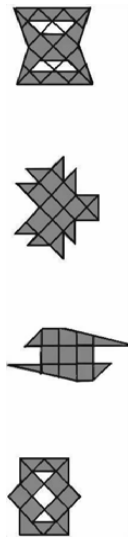
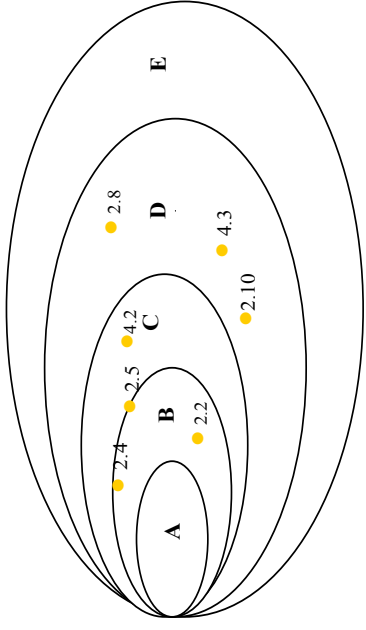
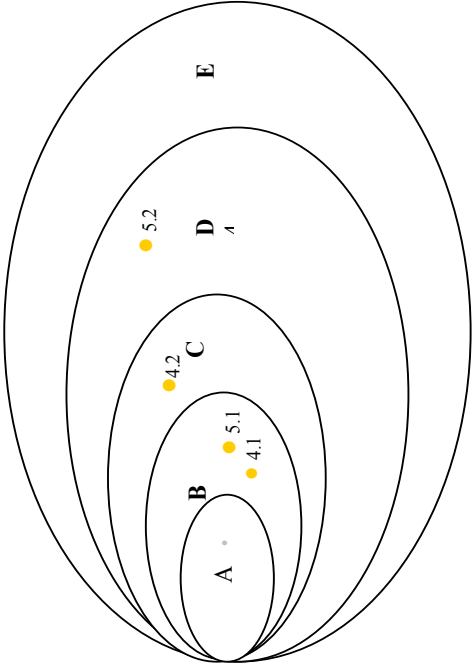


Tabla 19.- Relación entre los problemas del cuestionario a medio plazo, las categorías e indicadores y el gráfico de comprensión

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores y capas de comprensión vinculadas al concepto de área	
Nº	Enunciados
1	Si cortamos la figura por la línea marcada, ¿las partes tienen la misma área?  2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de áreas 2-2.- Compara superficies por superposición (inclusión) 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición. 2.5.-Compara superficies en la medición y utilización de una unidad conveniente 2.7.-Reconoce que si un figura se descompone o recompone con otra, su área no varía 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área 4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento (iteración de la unidad de medida) 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado 4.2.-Elige una unidad adecuada. 

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculadas al concepto de área		
Nº	Enunciados	Categorías e Indicadores
2	Una hormiga sale del punto P, recorre el perímetro del rectángulo de trazo grueso y vuelve a P. Otra hormiga B, también sale de P y recorre el perímetro de la zona rayada y regresa a P. ¿Cuál de las hormigas camina más? ¿Qué puedes decir de la región determinada por cada camino? 	3.- Distinción y relaciones entre los conceptos de área y perímetro. 3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura 3.2.- Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor /igual/ menor perímetro de la misma. 3.3.- Identifica figuras isoperimétricas 3.4.- Ordena figuras isoperimétricas respecto del área. 4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento (iteración de la unidad de medida) 4.1.- Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado 4.2.- Elige una unidad adecuada. 5.- Comprensión de las fórmulas del cuadrado, triángulo y rectángulo. 5.1.- Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo
		

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculadas al concepto de área	
Nº	Enunciados
3	 ¿Cuál de las siguientes figuras tienen mayor área? ¿Cuál tienen menor área? ¿ hay superficies iguales? 2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de áreas 2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión) 2.4.- Compara superficies por composición o descomposición. 2.5-Compara superficies en la medición y utilización de una unidad conveniente 2.8.- Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área. 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área. 4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento (iteración de la unidad de medida. 4.2.- Elige una unidad adecuada. 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada. 

Relación entre los problemas, las categorías e indicadores vinculadas al concepto de área		
Nº	Enunciados	Categorías e Indicadores
4	En la escuela tienen que embaldosar un patio de 18 metros de largo y 12 metros de ancho. Reciben una donación de 5000 baldosas de 20 cm de lado, ¿son suficientes para cubrir el patio?	4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento (iteración de la unidad de medida. 4.1.- Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado. 4.2.- Elige una unidad adecuada. 5.-Comprensión de las fórmulas del cuadrado, triángulo y rectángulo. 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo. 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras.
		

3.6.4.- CATEGORÍAS REFERIDAS A LAS INTERACCIONES PRODUCIDAS DURANTE EL DESARROLLO DE LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE

En punto de partida fue considerar *diálogo* como el **intercambio comunicativo entre dos o más personas (llamadas interlocutores), que se desarrolla a través de un sistema de signos y está orientado a facilitar una mejor comprensión del proceso de construcción del concepto en cada una de las niñas involucradas.**

En el aula se forman pequeños grupos naturales que trabajan resolviendo problemas, dando énfasis a las distintas opiniones en un clima afectivamente no conflictivo.

Por ejemplo, respecto a la comprensión de la consigna de un problema, la reformulación de un compañero facilita al niño comprenderla mejor; confrontar respuestas elaboradas individualmente; comunicar su procedimiento y defenderlo si lo juzga necesario; entender mejor el proceso de otro compañero descentrándose del propio; evaluar los procedimientos y resultados de los otros niños y comparándolo con el propio.

El diálogo tiene, así, lugar y ofrece oportunidades para que los integrantes de un grupo puedan verbalizar sus pensamientos, justificar sus procedimientos y manifestar sus dudas. Esta visión le permite a cada uno de sus integrantes, reconceptualizar el problema y aumentar sus conocimientos.

A pesar de ello, presenta algunas limitaciones. Por ejemplo, que algunos niños asuman la coordinación del proceso de resolución para arribar a la solución y los demás lo acepten, quizás por “su fama de bueno en matemática” o por ser “su amigo” en alguna actividad que desarrollan fuera del ámbito escolar, sin que tenga sentido para él lo expresado⁷⁹

El diálogo – sin dudas- nos brinda información y nos permite comprender mejor el proceso de construcción de un concepto. Es por eso que nos interesan aquellas interacciones producidas en el grupo en vista a la construcción del

⁷⁹ En el ambiente del aula algunos niños reconocen y confían en el que “más sabe” y desestiman su estrategia aún cuando sea acertada.

concepto de área en cada una de las niñas, cuando se implementa la resolución de problemas como estrategia metodológica.

En función de ello, caracterizamos la naturaleza de las interacciones, en relación con los interlocutores y según la capa de comprensión al que remite, basándonos en los trabajos de Cobb (1995) y Pirie y Kieren (1991, citado por Martin, 2008)), respectivamente.

a.-Según la relación entre los interlocutores

a.1- Del nivel de compromiso

a.1.1.-*Univocal* cuando uno de los niños resuelve la actividad y su compañero interviene aceptando e intentando interpretar lo realizado.

a.1.2.-*Multivocal*. Cuando ambos niños intervienen, justifican sus procedimientos y cada uno de ellos pone en duda lo realizado por el otro.

a.2.- Nivel de colaboración

a.2.1.-*Directa*, cuando surgen interpretaciones compartidas en las actividades resueltas por cada uno de las integrantes.

a.2.2.-*Indirecta*, cuando cada niño resuelve el problema en voz alta y cada uno saca provecho de los comentarios del otro.

a.3.-Nivel de autoridad

a.3.1.- *Matemático* cuando un niño juzga que un compañero cometió un error y éste lo acepta sin cuestionarlo. Este tipo de relación no resulta productiva para ninguno de los niños involucrados.

a.3.2.- *Social* cuando un niño regula negativamente las formas en que sus compañeros interactúan originando inequidad en las oportunidades de aprendizaje

b.-Según el capa o anillo de comprensión al que la maestra remite, la interacción puede ser:

b.1.-*Provocativa* cuando lleva al niño a una capa de comprensión externa, más sofisticada.

b.2.-*Invocativa* cuando lleva al niño a regresar a una capa de comprensión interna, más localizada.

b.3.-*Validativa*: cuando establece la capa de comprensión en la que se sitúa y se dirige a una capa de comprensión externa, con un mayor sustento.

3.6.5.-INSTRUMENTO PARA EL ANÁLISIS DE LAS INTERACCIONES: “LA TABLA DE DIÁLOGO”

3.6.5.1.-En la búsqueda de un instrumento adecuado

Al considerar la unidad de significado de la secuencia de aprendizaje y, a efectos de analizar el desempeño de los niños cuando resolvieron las actividades, hemos expresado que se los observó directamente y se recogieron datos orales de manera simultánea cuando resolvían los problemas.

La maestra enfatizó la necesidad de expresar y escribir lo que pensaban y las conclusiones a las que iban llegando, lo que nos permitió registrar los aportes verbalizados, que se han sucedido durante el proceso de resolución de un problema, aunque no hayan arribado a la solución esperada. En una primera instancia se confeccionó el registro de dicha secuencia según se detalla en el apartado 3.5.2.2.2.-.

Los intercambios de ideas, la posibilidad de dar a conocer un modo particular u original de resolver un problema frente a otros compañeros, las instancias de discusión, de defensa de una posición, la oportunidad de disentir con otro compañero, rechazar ideas que no resultan útiles y estimular activamente las que así trasciendan, son condiciones relevantes, que justifican abordar el diálogo que circula en el grupo de niñas, grupo cuando construyen un concepto.

Necesitamos, entonces, construir un instrumento que detecte las construcciones parciales que se producen alrededor del concepto en función este contexto. Para ello, contamos, como antecedente, con el instrumento que elaboró Muñoz-Catalán (Muñoz-Catalán, 2009, Muñoz-Catalán et al, 2010a, 2010b).

Con la intención de facilitar el análisis de las interacciones de una maestra novel en un contexto formativo particular – grupo colaborativo centrado en la enseñanza de la matemática (PIC)-. Denominado “*Instrumento de análisis de Interacciones de una maestra en un contexto de Desarrollo Profesional*”, cuyo acrónimo es IMDEP, y recoge las propiedades dialógicas del diálogo o la conversación (Linell, 1998,2005a).

El análisis de interacciones de la maestra – Julia- se efectúa en función de las transcripciones de las sesiones enunciadas en ese espacio, durante el proceso de una investigación y guarda una íntima relación con los datos.

A esta investigadora le interesaba saber a quién se dirigía la maestra, en qué momento de la sesión lo hacía, en forma de qué acción, cuál era la naturaleza de la misma, y cuál era el contenido que trasmitía. Esta información se ubica en una tabla de siete columnas a las que asigna *intervención, episodio, Julia, acción, interlocutor, naturaleza de la acción y contenido* respectivamente.

Esta disposición pretendió capturar la naturaleza dialógica del discurso, en la cual se recogen tres elementos claves intrínsecos a toda interacción, que utilizó como organizadores: la unidad de información (Columna de *Intervención*), los co-participantes de la interacción (*Julia e Interlocutor*) y los contextos que dan sentido a cada contribución (*Episodios, Acción, Naturaleza de la acción*).

Además, se añadió la columna de *Contenido* porque le interesaba ligar el aspecto sociológico de cada intervención a la aportación epistémica de ésta al diálogo.

A continuación vamos a considerar estos aspectos, reformular la estructura del instrumento y explicitar estos organizadores, de manera que facilite el análisis de nuestro trabajo.

3.6.5.2.- Estructura y características del instrumento:

“Tabla de diálogo”

Este instrumento tiene como objeto analizar el diálogo producido en los intervalos seleccionados del registro de la secuencia – apartado 3.5.2.2.2.- implementados en cada una de las actividades que componen dicha secuencia.

Para el análisis de las contribuciones al diálogo de una de las niñas en particular, nos interesaba registrar en qué momento del desarrollo de la actividad, quién la expresa, en forma de qué acción se expresa, cuál es la naturaleza de la misma, a quién la dirige, y qué idea transmite.

Consideramos, entonces, una tabla compuesta por seis columnas. A cada una de ellas le asignamos: *la unidad de significado seleccionada, el/los interlocutor/es*, para distinguir quién emite su contribución y quién la recibe. O sea, *la acción, la naturaleza de la acción, y la idea unidad*, dispuestos según se indica en la tabla 20:

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad

Tabla 20: Instrumento de análisis para las interacciones: *Tabla de diálogo*

Con esta disposición, pretendemos capturar la naturaleza dialógica del discurso, la que recoge tres elementos claves intrínsecos a toda interacción, que utilizamos como organizadores: **la unidad de significado** (Primer Columna así denominada), **los co-participantes de la interacción** (Asignada a la segunda y quinta columna. Es decir, a la niña particular que analizamos, sus compañeros o la maestra, denominados interlocutores en el intercambio comunicativo que se está analizando) y **los contextos que dan sentido a cada contribución** (*Acción y Naturaleza de la acción*).

Consideramos, también, una última columna, denominada *Idea Unidad*, que recoge la inferencia que manifiesta la investigadora sobre la fase del proceso de construcción en que se encuentra esa niña respecto de los indicadores del

estudio. Esta tabla la denominamos: “Tabla de diálogo”.

El orden dispuesto por las columnas pretende facilitar la lectura de las intervenciones. Por ejemplo:

La contribución número.... De la *unidad de significado* (Columnas homónima) el interlocutor emite (columna *interlocutor (E) o (R)*, con las unidades de información que abarca) el niño: pregunta / responde/ contesta/ reacciona; la maestra: pregunta/ responde/ propone/cuestiona (Tercer columna: *Acción*) para (Cuarta columna: *Naturaleza de la acción*) y la investigadora infiere aspectos acerca del proceso de construcción que se opera en la niña(sexta columna: *Idea Unidad*)

Procedemos a caracterizar a continuación cada columna

3.6.5.2.1- Unidad de significado (columna Homónima)

Varios autores se refieren a la *Unidad de Significado* como *Unidad de Análisis*, esto es, *como divisiones perceptibles que ayudan a convertir los datos brutos en subconjuntos manejables* Erickson, (1986, citado en García,1992); Goetz y Lecompte (1984).

Sin embargo, Carrillo (1996) las define *como aquellos enunciados a una misma pregunta base con una ligazón sintáctica o/y semántica. Por tanto, podemos encontrarla dentro de una respuesta concreta o a través de varias respuestas coordinadas. Además, en una unidad de información, el sujeto puede ofrecer datos sobre uno o más parámetros (indicadores de las categorías)* (p.13).y Bardin (1986) opta por asignarla como Unidad de Registro, y la define como: *“la unidad de significación que se ha de codificar. Corresponde al segmento de contenido que será necesario considerar como unidad de base con miras a la categorización...La unidad de registro puede ser de naturaleza y tamaño muy variables”* (p. 79).

A los fines de este estudio, y de acuerdo con el enfoque de aprendizaje adoptado -el constructivismo social- con el que vamos a estudiar el proceso de construcción de significados por cada una de las niñas, redefinimos las mismas y denominamos **Unidad de Significado al recorte del dialogo, de tamaño variable, que facilita el análisis en vistas a poder detectar ideas significativas**

que den cuenta de la construcción o no del concepto.

De manera que dichas unidades de significado se corresponden con una selección de diálogo del registro de la secuencia. A los efectos de localizar y detectar con mayor facilidad dichas unidades, buscamos puntos de ruptura, por ejemplo, pausas largas, estancamiento, intervenciones de la maestra, finalización o comienzo de otra actividad.

Con los “anteojos” puestos en una niña en particular, y a los efectos de observar el diálogo con sus compañeros y/o la maestra, consideramos la segunda y tercera columna del registro, volcamos *la intervención*⁸⁰ de cada uno de ellos, una debajo de la otra, acompañadas con el número que le hemos asignado.

Dicho número corresponde a la fila en la que comienza la intervención en la transcripción, de ahí es que los números que se observan no sean consecutivos en la unidad. En distinto tipo de letra, intercalamos los sucesos que se extraen de la cuarta columna en el cual se explicitan las subjetividades del investigador y destacamos en negrita aquellas contribuciones significativas de los niños que nos faciliten el análisis en vistas a capturar el logro de un indicador del concepto que nos ocupa.

3.6.5.2.2-Co-participantes de la interacción (Columna de los interlocutores (E) y (R):

En esta columna nos referimos a los interlocutores - la niña y sus compañeros o la maestra- en el intercambio comunicativo que opera entre ellos en un momento dado, en el contexto del aula cuando resuelven problemas. Pues por un lado, las manifestaciones de los niños dan cuenta acerca de cómo ellos van construyendo el concepto y por otro lado, cómo la maestra facilita dicho proceso.

Nos referimos a interlocutores pues se adecua al enfoque dialógico que adoptamos. Razonamos que cada contribución⁸¹ hay que comprenderla en el *entorno secuencial* donde se desenvuelve (Linell y Marková, 1993) y al mismo

⁸⁰ alternancia del turno de cada uno de los interlocutores.

⁸¹ Lo consideramos como una parte elemental y contribuyente al diálogo-también lo denominados turno-, donde el hablante tiene uso de la palabra, provee contenido al discurso y regula o es regulado por el relaciones sociales con otro /s , interlocutor/es .

tiempo, a no perder de vista su dependencia con las contribuciones previas y posteriores, por lo que asumimos que el participante de una contribución es a la vez emisor de su aportación y receptor de las aportaciones previas de los demás (incluso de aquellas que no van específicamente dirigidas a él) (Muñoz-Catalán, 2012; Muñoz-Catalán et al, 2010a, 2010b).

Identificamos, por tanto, dos tipos de interlocutores para cada turno o intervención, el que emite su contribución, que lo identificaremos con (E) y el destinatario de tal contribución, al que identificaremos con (R).

Interlocutor (E): El que expresa o manifiesta la acción- nos referimos en el apartado siguiente en detalle- pueden ser los niños o la maestra. Si bien nos posicionamos en cada una de las tres niñas, consideramos las intervenciones de cada una de ellas, las de los compañeros y de la maestra, en la medida en que nos ayudan a comprender mejor el proceso de construcción que se observa en ellas y cómo lo promueven. Mostramos esta información en la segunda columna.

Interlocutor (R). A quien va dirigida la acción. Puede ser a un compañero determinado, a un grupo de ellos, a toda la clase o a la maestra. Le asignamos la quinta columna.

3.6.5.2.3-Contextos que dan sentido a cada contribución (Columna de Acción y Naturaleza de la acción)

Fundamentalmente nos interesan aquellos fragmentos comunicativos en los que se va enmarcando la conversación a lo largo de la interacción y las intervenciones colindantes más próximas a cada contribución.

Con ese propósito, tuvimos presente la *unidad de significado*, a la que nos hemos referido anteriormente y que da cuenta del contexto. El ámbito secuencial del diálogo en donde se desenvuelve, es decir, la dependencia simultánea de cada intervención con las contribuciones previas y posteriores, las volcamos en las columnas: *Acción y su Naturaleza*.

Los aspectos mencionados conforman la *doble contextualización* de cada contribución al diálogo (Linell y Marková, 1993; Linell, 1998) y permiten analizar las categorías referidas a las interacciones que hemos enunciados en el

apartado 3.6.4.-. A continuación explicitamos cada uno de ellos.

Acción:

Coincidimos con Muñoz-Catalán (2012, Muñoz-Catalán et al, 2010b) en concebir la *acción* como tipo de intervención que los niños y la maestra emiten en relación con la intervención anterior y poniendo de relieve la naturaleza retroactiva de cada contribución. Mostramos esta información en la tercera columna.

A continuación, y en función del registro de la secuencia de aprendizaje implementado, a las cuales nos hemos referido en el inciso 3.5.2.2.2-, distinguimos las acciones de los niños y de la maestra. Para ello presentamos en una tabla - Tabla 21 - el origen de los verbos y en otra -Tabla 22 - lo expresamos referidos a las acciones que han emergido durante el análisis.

Origen de los verbos utilizados por:	
Los niños	Maestra
Preguntar: Demandar e interrogar a uno para que diga y responda lo que sabe sobre un asunto.	Preguntar: Interrogar a uno para que diga y responda lo que sabe sobre un asunto.
Responder: Satisfacer al argumento, duda o demanda.	Responder: Satisfacer al argumento, duda o demanda.
Contestar Responder a lo que se le pregunta, habla o escribe	Proponer: Manifestar con razones una cosa para conocimiento de uno, o para inducirle a adoptarla.
Reaccionar Actuar por reacción de la actuación de otro.	Cuestionar: Poner en duda lo manifestado por alguien. Controvertir un punto dudoso, proponiendo las razones, y fundamentos

Tabla 21: Origen de los verbos utilizados en la Acción

Acciones que han emergido durante el análisis	
Los niños	Maestra
Pregunta: Cuando interroga a la maestra, al pequeño grupo o a un niño en particular para que le diga lo que sabe sobre una cuestión.	Pregunta: Cuando interroga o hace preguntas a todos o a un grupo de niños del aula, para que diga lo que sabe respecto de la actividad que se esta

Responde: a un pregunta, aunque a veces el formato de la pregunta no es un interrogante Contesta: Cuando responde a afirmaciones dirigidas a ella en particular. Reacciona: Cuando interviene en respuesta a alguna afirmación que no va dirigida a ella pero que suscita una opinión o idea diferente a la que se ha expresado	desarrollando o sobre conocimientos anteriores. Responde: a una pregunta de un niño en particular, de un grupo o de todos los niños. Propone: Manifiesta una idea e invita a que los niños expresen su opinión al respecto. Cuestiona: Poner en duda lo realizado o expresado por uno o más niños.

Tabla 22: Acciones que han emergido durante el análisis

Naturaleza de la acción

La *naturaleza de la acción* refleja la función comunicativa que la investigadora asigna a cada intervención en el discurso y pone de relieve su vinculación con las intervenciones posteriores, durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje. Le asignamos la cuarta columna.

Durante el proceso de análisis, han emergido un conjunto de verbos y de expresiones, que nos han permitido expresar las funciones comunicativas de las distintas intervenciones.

Debido al papel diferenciado de la maestra y alumnos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, la naturaleza de sus acciones es también diferente. Por este motivo, y en vista a pensar en enunciarlos, hemos diferenciado los verbos y las expresiones para cada interlocutor y los hemos organizado en fases.

En el caso de los alumnos (a), cada fase se corresponde con las partes en que se puede estructurar el proceso de resolución de problemas. En cuanto a la maestra (b), hemos considerado las fases en que organiza la gestión de su clase.

Así pues, nos referimos a *verbos* y *expresiones* como una locución precedida por un verbo que lo destaca y refleja mejor la función que desempeñan los interlocutores. En cambio Muñoz-Catalán (2012), realiza en esta columna una reescritura interpretativa de cada contribución, precediéndola de un *verb*.

a) Los aportes de Polya (1984); Schoenfeld (1985); Blanco (1993); Puig (1996) y Carrillo (1998) (Rodríguez, 2012); (Nápoles-Váldez, 2005) nos indican que los niños, al resolver cada una de las actividades de la secuencia, tenderán, en una primera instancia, a la comprensión de la misma, para luego anticipar alguna

estrategia que facilite su resolución, justificando el proceso realizado a sus compañeros y a la maestra.

En base a lo expresado, y a los efectos de enunciar las funciones comunicativas que se dan en cada una de las actividades propuestas, presentamos las siguientes fases: *Comprensión del problema*, *Trabajo en grupos* y *Puesta en Común* en la Tabla 23. En este contexto, consideramos el origen de los verbos implicados como:

Comprensión: Entender, tener una idea clara de las cosas.

Trabajar: Procurar e intentar alguna cosa con eficacia.

Puesta en común: Ponerse de acuerdo en algo.

Fases de resolución de problema.	Verbos-expresiones utilizados por los niños
Comprensión del problema	- Solicita aclaración a un compañero o a la maestra para comprender el enunciado de una actividad, la estrategia de resolución o la respuesta -Clarifica aspectos relevantes a un compañero. - Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea. -Expresa desconocimiento acerca de los que se le pregunta. -Expresa en voz alta un modo alternativo de resolver el problema o un procedimiento más correcto a raíz de la respuesta aportada por otro compañero (de otro grupo).
Trabajo en grupos	- Clarifica aspectos relevantes a un compañero. - Muestra apertura a los resultados obtenidos por un compañero. - Alienta a un compañero que se bloquea o brinda una respuesta incompleta, para continuar con la estrategia que pretende implementar. - Ignora la intervención de otro compañero y lleva adelante su procedimiento. - Valida⁸² los procedimientos expuestos. - Resuelve en voz alta. - Reformula de manera colaborativa lo realizado con otros: Expresar claramente el resultado a los que han arribado dos o más niños.

⁸² Entendemos la validación como parte integrante de las fases de resolución en grupos y puesta en común entre los niños, por el carácter de la maestra y metodología utilizada

	- Acepta lo expresado por otro compañero (idea, sugerencia, propuesta). - Acepta parcialmente la idea, sugerencia o propuesta y la completa. - Niega lo que expresa otro compañero. - Cuestiona lo realizado por otro compañero. - Resuelve de manera conjunta. - Explica con palabras, gráficos o gestos lo que desea dar a entender. - Expresa desconocimiento acerca de los que se le pregunta. - Propone una idea o procedimiento para la resolución del problema e invita a los demás a que viertan su opinión al respecto. - Corrige los errores de un compañero. - Aporta ideas o sugerencias al análisis y resolución del problema. - Reconoce su equivocación y admite lo realizado por sus compañeros o la maestra. - Expresa satisfacción con lo realizado. - Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea.
Puesta en Común	- Valida⁸³ sus procedimientos a un compañero, a un pequeño grupo o a la totalidad de la clase. - Reformula de manera colaborativa lo realizado con otros: Expresar claramente el resultado a los que han arribado dos o más niños. - Acepta lo expresado por otro compañero (idea, sugerencia, propuesta). - Acepta parcialmente la idea, sugerencia o propuesta y la completa. -Niega lo que expresa otro compañero. - Cuestiona lo realizado por otro compañero. - Explica con palabras, gráficos o gestos lo que desea dar a entender. - Reconoce su equivocación y admite lo realizado por sus compañeros. - Expresa satisfacción con lo realizado.

Tabla 23: Listado de verbos-expresiones utilizados para designar la función comunicativa de las contribuciones de los niños al discurso, organizadas en las fases de resolución de problema.

Somos conscientes de que, a nivel teórico, podríamos haber considerado

⁸³ Ídem justificación anterior.

otros indicadores - por ejemplo, interrumpe a un compañero o al grupo con comentarios no pertinentes a la actividad, etc., pero hemos incorporado aquellos indicadores que han emergido durante el análisis realizado.

b) Como ya manifestamos, la maestra implementa la resolución de problemas como estrategia metodológica. Para ello, según anticipáramos en el apartado 2.5.3.- del capítulo 2, gestiona la clase con contrargumentos las respuestas de los niños. Promueve, de este modo, la validación e integración de los conocimientos en cada una de las actividades que conforman la secuencia, en un proceso que los hace explícitos en una estructura coherente. En respuesta a ello, las siguientes funciones comunicativas dan cuenta de ello, en las fases de: *Información, Orientación y Explicitación, e Integración o institucionalización* que se expresan en la Tabla 24. Previamente expresamos la procedencia de los verbos involucrados en estas fases de la gestión de la clase:

Informar: Dar noticia de una cosa.

Orientar: Informar a uno de lo que ignora y desea saber

Explicitar Expresar clara y determinadamente una cosa.

Integrar: Se utiliza para cerrar un momento de aprendizaje, a través del cual los alumnos son concientes de lo que saben y lograron construir.

Fases para organizar la clase		Verbos-expresiones utilizados por la maestra
Información		Solicita al niño/a que lea el enunciado. Invita a que viertan su opinión Explica con palabras, gráficos o gestos lo que desea dar a entender.
Orientación y Explicitación		Solicita que justifiquen sus afirmaciones. Solicita aclaración sobre lo que un alumno ha expresado que parece no ser entendible. Solicita lea el enunciado. Solicita aclaración sobre lo realizado. Solicita justificación de los procedimientos. Discute la justificación brindada: (está asumiendo el error en la respuesta del alumno) Discute lo realizado (el proceso, resultado)

	Realización del problema por grupos -	Animar al alumno a que compruebe si su resultado cumple con las condiciones iniciales del problema. Confirma dando la razón. Reformula la pregunta. Corrige al alumno, animándole a que compruebe el resultado. Proporciona una sugerencia, idea, propuesta o noción. Solicita otra idea o procedimiento alternativo.
	Puesta en común de lo realizado y su validación	Solicita que justifiquen sus afirmaciones. Discute si el resultado tiene sentido en función de las condiciones del problema)//propone resultados falsos o incoherentes para promover la reflexión sobre el sentido del resultado. Solicita aclaración sobre lo realizado. Solicita justificación de los procedimientos. Discute la justificación brindada (está asumiendo el error en la respuesta del alumno). Discute lo realizado (el proceso, resultado) Confirma dando la razón. Reformula la pregunta. Reformula lo enunciado por una niña con una expresión más formal Plantea una nueva cuestión o desafío o extensión de problema. Solicita otra idea o procedimiento alternativo Alienta para que los alumnos expresen lo realizado.
Integración o institucionalización ⁸⁴		Explica con palabras, gráficos o gestos lo que desea dar a entender. Recoge, sintetiza y explicita –institucionaliza- los resultados arribados por los niños.

Tabla 24: Listado de verbos-expresiones utilizados para designar la función comunicativa de las contribuciones de la maestra al discurso, organizadas en las fases en que organiza su clase

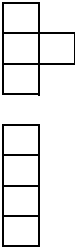
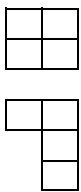
⁸⁴ Contemplamos la integración como última fase del proceso de enseñanza/aprendizaje para cada uno de los problemas, pero somos conscientes de que es la maestra la que asume la responsabilidad de esta fase.

3.6.5.2.4- Idea unidad:

Por último, nos referimos a la *idea unidad* como aquella inferencia que pronuncia la investigadora sobre la fase del proceso de construcción en que se encuentra cada niña respecto de los indicadores del estudio, en cada unidad de significado considerada. Le asignamos la sexta columna.

3.6.5.3-Ejemplo de aplicación del instrumento a un intervalo del desarrollo de una actividad de la secuencia de aprendizaje

Transcribimos la unidad de significado correspondiente a la actividad 4 de la secuencia de aprendizaje, cuando analizamos un caso en particular, por ejemplo, SP4 (1,22) y aplicamos a continuación el instrumento: *Tabla de Diálogo* y obtenemos la tabla 25

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad
1. ¿Cuál de las siguientes formas ocupa más papel? 3: Cecilia: la 2 y la 3 son iguales. 4: Flor: Las cuatro figuras son iguales. 5: Araceli: Las cuatro figuras son iguales 8 Maestra: Sin embargo, yo iguales no las veo. 10 Patricia: es que tienen igual área pero son de distinta forma. 12. Maestra: Si tienen igual área son figuras equivalentes pero tienen distinta forma. Bien Patricia, que diste esa idea, dime con qué procedimiento determinas que el área es igual. O La docente está junta a la mesa en donde está ubicada Patricia. 19 Patricia: En la T cambié los cuadraditos, la subdividí en cuadrados, y si pongo este acá me da lo mismo. O: Patricia pasa al pizarrón y realiza los siguientes dibujos   4 cuadraditos	Maestra Cecilia Flor y Araceli Maestra Patricia Maestra Patricia	Pregunta Responde. Responden Cuestiona Responde Pregunta Responde	Invita a que viertan su opinión Expresa en voz alta. Expresan otro resultado a raíz de la respuesta de la compañera Corrige, animándoles a que comprueben el resultado. Explica con palabras lo que desea dar a entender. Confirma dando la razón y solicita un procedimiento Valida los procedimientos expuestos.	Al grupo. A la maestra A la maestra y Cecilia Cecilia, Araceli, Flor y Patricia. La maestra, y a todos los niños	Reconoce figuras de distinta forma e igual área
Tabla 25: Tabla de diálogo, correspondiente al problema 4, unidad del intervalo [1,22]					SP4,(1.22)

3.6.6.- CODIFICACION UTILIZADA

El código es un símbolo que se le asigna a cada información que brinda, a la unidad de significado y a la tabla de diálogo en sí misma. Según Guba y Lincoln (1981, citado en García, 1992), *“los códigos deben estar relacionados con la naturaleza de los datos, y la teoría y las cuestiones planteadas en la investigación son las que deben guiar el proceso de codificación y por tanto determinar el contenido de las categorías”* (p. 79)

Por ello es que en este trabajo, con el objeto de identificar cada una de los instrumentos, volcamos en la tabla 26 algunos ejemplos con la utilización del siguiente sistema de código

Código	Corresponde a los contenidos e instrumento
M	Contenidos matemáticos Primitivos
A	Contenidos sobre ideas previas de área.
C	Conexiones entre ambos contenidos.
CM	Conocimientos matemáticos Primitivos
IA	Ideas previas del concepto de área
S	Secuencia de aprendizaje
PE	Producción escrita
E	Evaluación al finalizar la secuencia de aprendizaje
MP	Evaluación a medio plazo acerca del concepto de área

Tabla 26: Códigos asignado a cada uno de los contenidos e instrumentos de obtención de información.

Con respecto a los informantes, asignamos para el análisis de cada niña, (P) Patricia, (C) Cecilia o (M) Mirta, nombres asignados para los fines de este trabajo.

En particular para referirnos a una determinada tabla de diálogo, según presentamos anteriormente, o una unidad de significado, explicitamos en la última fila, en la parte inferior derecha, la secuencia con la letra S, la inicial del nombre de la niña, el número del problema y, mediante un intervalo numérico, se indica el conjunto de expresiones consideradas. Por ejemplo cuando escribimos (SP4(1,22)) estamos analizando el proceso de construcción que se opera en Patricia cuando resuelve el cuarto problema de la secuencia, correspondiente a

una unidad de significado en particular, identificada por el intervalo del registro comprendido entre la primera y duodécima segunda línea.

A continuación, explicitamos en la tabla 27, otros ejemplos que completan el código utilizado.

Código	Se lee
CMP1	Problema 1 resuelto por Patricia en el cuestionario sobre conocimientos primitivos
IAP3	Problema 3 resuelto por Patricia en el cuestionario sobre ideas previas.
SP4	Problema 4 resuelto por Patricia de la secuencia de aprendizaje
SM4a	Inciso a del problema 4 resuelto por Mirta de la secuencia de aprendizaje.
PEC2	Producción escrita del problema 2 perteneciente a la secuencia de aprendizaje resuelta por Cecilia.
PEP4b	Producción escrita del inciso b del problema 4 perteneciente a la secuencia de aprendizaje resuelta por Patricia.
EP4	Problema 4 resuelto por Patricia en el cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje.
MPM1	Problema 1 resuelto por Mirta en el cuestionario a medio plazo.
(SP2; (4;8))	“Tomamos de la unidad de significado comprendida entre la línea 4 y la 8 del problema 2 correspondiente a la secuencia de aprendizaje, resuelto por Patricia”

Tabla 27: Códigos de los instrumentos, y secuencia de aprendizaje aplicados a una niña en particular.

Finalmente y en vista a construir el *gráfico del crecimiento de comprensión* asociado a cada una de las actividades resultas por cada una de las niñas, codificamos los indicadores vinculados a cada uno de los distintos instrumentos de obtención de datos, según un color diferente, y la presentamos en la tabla 28, y un símbolo que representa el estado de su construcción, como presentamos en la tabla 29, respectivamente

Denominación del instrumento de detección de datos	Color
Ideas previas del concepto de área	Negro
Secuencia de aprendizaje	Rojo
Evaluación al finalizar la secuencia de aprendizaje	Verde
Evaluación a medio plazo acerca del concepto de área	Naranja

Tabla 28: Color asignado a cada instrumento de obtención de datos

Símbolo	Logro
●	Lo logra
□	A veces lo logra
♣	No lo logra
♦	Carecemos de información

Tabla 29: Símbolo asignado al indicador según el logro detectado

Por ejemplo, si señalamos en el gráfico el siguiente indicador “● 2.1.-” se lee: “**en la actividad XX del cuestionario: Evaluación a medio plazo acerca del concepto de área, la niña ha logrado el indicador: *Compara superficies por percepción visual*”.**

3.6.7.-TENDENCIAS DE LAS CATEGORÍAS DETECTADAS EN RELACIÓN A LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA

Las categorías se presentan como aproximaciones cíclicas que llevan a construir el concepto, para ello hemos considerado para cada una de ellas, determinados indicadores que nos permiten, “mirar” la construcción de la misma, de una forma más detallada.

Presentamos cada categoría, sus respectivos indicadores y para cada uno de ellos, una tabla en la que volcamos la información del logro del mismo, según

el análisis de cada uno de los instrumentos, con el propósito de percibir su tendencia. Consecuentemente, en función del logro del conjunto de los indicadores asociados a una categoría, pretendemos avizorar el logro de la misma, para cada caso en particular.

La tabla, denominada *Tendencia de las categorías del caso*, está compuesta para cada uno de los indicadores, por dos filas. En la primera fila, explicitamos cada una de las actividades que conllevan los instrumentos implementados. Por ejemplo IAP1- se lee Problema 1 correspondiente al cuestionario acerca de las ideas previas del concepto de área de Patricia-. En la segunda fila, expresamos los logros obtenidos, por ejemplo, si lo logra, escribimos “Si”, si no lo logra, escribimos “No”, si sólo lo logra algunas veces, escribimos “AV”.y si carecemos de información, escribimos “CI”.

En la última columna, inferimos un resultado global del logro del indicador en función de los productos parciales, al considerar fundamentalmente el logro que la niña alcanza en los últimos instrumentos. Es decir, no inferimos un valor según la cantidad de logros alcanzados, sino que identificamos si al final del proceso lo logra.

Para ello, y a título de ejemplo, consideramos para una de las categorías enunciadas un indicador en particular, al mismo tiempo que explicitamos la capa o anillo de comprensión que lo hemos asociado, dispuesto en la tabla 30. Por ejemplo:

2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.

2. 1.-Compara superficies por percepción visual Se corresponde con el capa B (*Producción de una imagen*)

	IAP1	IAP3	IAP4	IAP6	SP3	Global
Lo logra	CI	SI	NO	SI	SI	SI

Tabla 30: *Tendencia del indicador 2.1 Compara superficies por percepción visual*

Así esta tabla de tendencias, nos permiten, avizorar, para cada niña, la evolución de los distintos indicadores, e interpretar el alcance de las categorías en

vista a formular el estado de comprensión del concepto de área.

3.6.8.- PROCESO DE ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO EN CADA ACTIVIDAD

En el capítulo anterior, apartado 2.3.1., hemos caracterizado el “*modelo de las capas*” según Pirie y Kieren (1994, 1999), el cual trata el crecimiento de la comprensión de los conocimientos matemáticos de un sujeto en particular.

En este apartado, explicitamos su tratamiento, de manera que, al momento de realizar el análisis del crecimiento de la comprensión del concepto de área en cada uno de los casos, no nos posicionemos exclusivamente en el logro de los analizadores, sino en el proceso de comprensión.

Este proceso se caracteriza por ser dinámico, recursivo y no lineal alrededor de las distintas capas. Dinámico pues, según explicitamos en dicho capítulo, surge a través del diálogo entre los integrantes de un grupo⁸⁵ cuando resuelven problemas alrededor de la construcción de un concepto, en este caso el área.

A su vez, no es lineal, pues aunque en el gráfico las capas están dibujadas hacia afuera, el crecimiento de la comprensión se produce a través de un movimiento continuo hacia adelante y hacia atrás a través de las distintas capas.

Así la comprensión involucra un interjuego entre la acción de resolución de problemas y la construcción de significados asociados a los distintos indicadores enunciados.

Las capas que seleccionamos para este análisis se disponen hacia afuera; la primera palabra de sus respectivos nombres es un sustantivo - *Conocimiento primitivo, Producción de una imagen, Posesión de una imagen, Percepción de*

⁸⁵ Consideramos el grupo como contexto en el que se produce y favorece el crecimiento conceptual de cada una de las niñas. No lo consideramos grupo colaborativo según Martín (2009), quien entiende por tal el que arriba, a través de tareas diseñadas específicamente para dicho grupo, al crecimiento de comprensión individual de sus miembros, ni como grupo colectivo, que tiende a la construcción conceptual de un concepto a través de ideas y acciones compartidas por todos sus integrantes, siendo la comprensión colectiva un logro interaccional (Yackel, 2002). En nuestro caso, las tareas son individuales, aunque, por la distribución del aula, se resuelven en cercanía de otros compañeros. Esta cercanía, y no la orientación de la actividad, es lo que propicia la interacción.

propiedades y Formalización – para enfatizar la naturaleza dinámica del proceso y así poder describir las acciones del niño mientras crece su comprensión de la noción particular.

Estas capas así dispuestas conforman un gráfico denominado *Gráfico de comprensión*, de manera que la resolución de cada una de las actividades que resuelve una niña en particular origina un gráfico.

Para cada una de las actividades -acerca del concepto de área- que componen los cuestionarios, consideramos la producción escrita de los niños o parte de ellas y para las actividades de la secuencia de aprendizaje, disponemos también, de una tabla de diálogo, que construimos a fin de detectar las interacciones dialógicas interconectadas reflexivamente en la dinámica del diálogo producido entre cada una de las tres niñas, con sus compañeros y con la maestra.

Ambas-la producción escrita y la tabla de diálogo- y los resultados de investigaciones acerca del concepto de área, nos proporcionan información acerca del logro del o de los indicador/es involucrados en cada problema en particular y del proceso de comprensión que se opera en cada niña en particular.

Cada uno de los indicadores lo asociamos a una capa o anillo según la tabla 15 que confeccionamos y denominamos: *Relación entre las capas de comprensión y las categorías vinculadas al concepto de área*.

El objetivo fue avizorar si el caso que se analiza en esta instancia domina la comprensión de las características asignadas a esa capa en particular y corresponde a la demanda del problema.

Con esta tabla y los indicadores involucrados en cada una de las actividades, construimos un instrumento análisis denominado Tabla 17: *Relación entre los problemas, las capas de comprensión y las categorías vinculadas al concepto de área*.

Según este instrumento podemos diferenciar entre el indicador que se explicita en el problema y lo que concretamente consigue el caso, aunque puede ocurrir también, que construya otro indicador no previsto y en ese caso se indica

con otro tipo de letra. Ambos instrumentos, los presentamos en detalle en los apartados 3.6.2. y 3.6.3. respectivamente.

En este sentido, identificamos en el gráfico de comprensión, los distintos indicadores involucrados, de un color determinado según el instrumento a cual pertenece, y con el símbolo que indica su logro.

Como anticipáramos, aunque las capas se disponen hacia fuera, el crecimiento de la comprensión no se produce de manera lineal. En función de los hechos observables y a los efectos de registrar el crecimiento de la comprensión de las ideas que cada una de las niñas va construyendo al resolver cada actividad, dibujamos una curva, que denominamos “*Trayectoria de comprensión*”.

Esta se obtiene desplazándonos por las distintas capas y en función de la secuencia de aparición de indicadores durante la resolución del problema. La trayectoria se denomina *completa* – de trazo continuo- cuando la mayoría de los indicadores de las sucesivas capas se han logrado e indica el proceso de construcción que se opera en la niña.

En cambio se denomina *incompleta* – de trazo punteado- cuando no poseemos información sobre algunos indicadores o bien éstos no se han logrado. En este caso marca solamente una tendencia de dicha construcción.

En vistas a favorecer una comprensión más profunda del concepto, nos detenemos en detectar el *Folding Back*, pues cuando el caso en un momento dado se atasca en el proceso de resolución de la actividad, tiene la posibilidad de retornar al conocimiento primitivo, a una capa interior, a un indicador de esa u otra categoría, y visualizar así el apoyo para fortalecer la comprensión en la reconstrucción del concepto y al regresar, avanzar hacia una capa exterior con una comprensión más eficaz del mismo.

En este proceso indicamos su naturaleza, es decir, quién lo favorece -la maestra, un compañero, ella misma-, y con qué intención (Martín, 2008), a fin de mostrar cómo las intervenciones matemáticas, con sus compañeros y con la maestra, co-determinan las acciones de comprensión matemática en cada una de las niñas.

Asimismo especificamos aquellos indicadores involucrados en el folding

back, es decir, aquellos indicadores hacia el que retrocede y el que intenta lograr ubicado en una capa exterior del gráfico de comprensión. Para cada una de las niñas, disponemos estos datos según la tabla 31:

Su naturaleza	Actividad	Ubicado en	Retrocedemos a	Para avanzar a

Tabla 31: Folding Back del caso: naturaleza e indicadores involucrados

Dichos indicadores los volcamos en la tabla 30 para cada una de los casos.

Como anticipáramos la “Trayectoria de comprensión” brinda información sobre los avatares del proceso de comprensión que realiza cada niña acerca del concepto, por ende pone de relieve el folding back, en caso de que exista, y en ese caso la curva se dibuja de manera zigzagueante.

De esta forma para cada niña, construimos un *Gráfico de comprensión* para cada una de las actividades, y además otro grafico denominado El *gráfico de comprensión global*, que muestra el logro en la construcción del indicador involucrado respecto de un instrumento en particular, por ejemplo, de las ideas previas y lo denominamos *Gráfico de comprensión global de una niña en particular, de las ideas previas acerca del concepto de área*.

A continuación mostramos un ejemplo de *Gráfico de comprensión- S- de Mirta asociado a la actividad 9* de la secuencia de aprendizaje En dicha actividad, solicitamos que los niños determinen el área de una superficie en función de distintas unidades de medida y establezcan la dependencia entre el valor del área y la unidad seleccionada.

El análisis de las tablas de diálogo y de la producción escrita nos permite construir el siguiente gráfico que denota el proceso de construcción que Mirta va logrando, desde la producción de la imagen, hasta la percepción de propiedades, y la trayectoria completa que muestra, el recorrido según el logro de los indicadores involucrados.

Para facilitar la lectura, explicitamos la demanda de esta actividad respecto

del nivel de comprensión: con un indicador en: *Producción de una imagen* - capa B – en el anillo *Producción - Percepción de Propiedades*- capa B y capa C- y *Posesión de una imagen* - capa C- respectivamente y dos indicadores en este último *-Percepción de propiedades*; capa D- y acompañamos el gráfico con la denominación de las distintas capas, los indicadores y la posibilidad de logro de los mismos.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

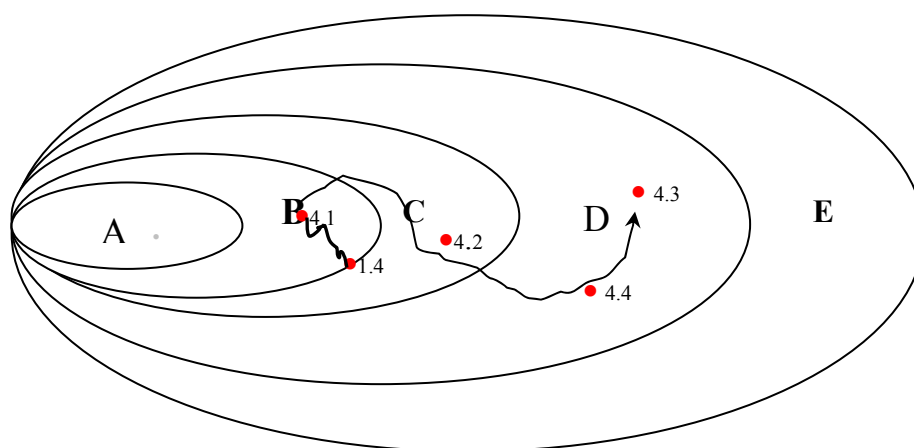


Gráfico de comprensión de S de Mirta asociada ala act. 9

- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 4.3.- Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
- 4.4.- Comprende la necesidad de unidades convencionales

En este caso, la flecha que observamos al final de la trayectoria, muestra la secuencialidad del logro de los distintos indicadores. Distinguimos un intervalo de la trayectoria de mayor grosor y de forma zigzagueante que retrocede a una capa interior y vuelve a avanzar.

Esta distinción la hicimos porque Patricia reconoce las distintas unidades y esta intervención invocativa, produce folding back intencional en Mirta, (FB~I-P) quien representa mentalmente la composición de figuras (ind 1.4 en el anillo *Producción-Poseción de una imagen*) pero al pretender medir la figura como unidad de medida conveniente (ind 4.2 en *Poseción de una imagen*), se siente obligada a retroceder en su proceso de comprensión, resignificar la noción de dividir y pavimentar la superficie a medir contando el número de unidades empleado (ind 4.1 en *Producción de una imagen*), para avanzar en dicho proceso y lograr identificar una unidad de medida adecuada (ind 4.2 en *Poseción de una imagen*)

3.6.9.- PROCESO DE ANÁLISIS DEL CRECIMIENTO DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE AREA.

En principio, aplicamos el método de las capas para analizar la resolución que cada niña, proporciona a cada una de las actividades que componen los distintos instrumentos y focalizamos la atención en dos elementos: el folding back y las interacciones producidas con sus compañeros y/o con la maestra, con el objeto de interpretar el proceso de comprensión que desarrolla respecto al logro de los indicadores involucrado en cada una de las actividades mencionadas y cómo lo promueven.

A continuación con la intención de redactar un informe, efectuamos una mirada longitudinal en sentido de evolución, según los distintos instrumentos resueltos por la niña, y generamos el análisis global sobre la totalidad del proceso, con el objeto de averiguar la forma en qué ha construido y cómo lo hace, según hemos manifestado, y tratado en detalle, en el apartado anterior.

En esta instancia, la tabla de tendencias nos facilitó información acerca de la evolución de las características del concepto de área. Al mismo tiempo, intentamos explicitar cómo las distintas contribuciones del grupo y/o la maestra, delinearon distintos tipos de interacciones y/o folding back, que contribuyeron a interpretar el proceso de comprensión individual. De esta manera, ambos aspectos

nos permitieron avizorar el estado de construcción del concepto en cada uno de los casos.

Sin subordinar un aspecto a otro, aspiramos trascender los casos estudiados, detectar qué tienen en común y diferente los casos analizados, para identificar los procesos que subyacen en la construcción del concepto de área a partir de la resolución de problemas en el ambiente áulico que esta estrategia genera y responder a los objetivos que nos hemos propuesto en este trabajo.

CAPÍTULO 4:

LOS CASOS

Consideramos cada uno de los casos -Patricia, Cecilia y Mirta- y como anticipamos en el capítulo anterior, apartado 3.6.8.-, efectuamos el análisis de la resolución de cada una de las actividades que componen los distintos instrumentos, efectuados por cada una de ellas.

Nos dedicamos así, a detectar las construcciones conceptuales alrededor de las categorías enunciadas y a comprender cómo han arribado a ellas. Es decir, analizar las interacciones que se manifiestan entre ellas, con sus compañeras y/o la maestra, y cómo estas contribuciones, aportan a la interpretación del proceso de construcción individual.

A continuación analizamos el proceso de comprensión del concepto de área realizado por Patricia, Cecilia y Mirta.

4.1.- EL CASO DE PATRICIA

INDICE

	Pág. N°
4.1.1.- Análisis de las actividades del cuestionario acerca de sus conocimientos matemáticos primitivos.....	265
4.1.2.- Análisis de las actividades del cuestionario sobre sus ideas previas acerca del concepto de área.....	278
<i>Actividad IAP1</i>	279
<i>Actividad IAP2</i>	281
<i>Actividad IAP3</i>	283
<i>Actividad IAP4</i>	285
<i>Actividad IAP5</i>	287
<i>Actividad IAP6</i>	287
<i>Actividad IAP7</i>	290
<i>Actividad IAP8</i>	291
4.1.2.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Patricia	293
4.1.3.-Análisis de las actividades resueltas en la secuencia de aprendizaje	296
<i>Actividad SP1</i>	297
<i>Actividad SP2</i>	299
<i>Actividad SP3</i>	306
<i>Actividad SP4</i>	317
<i>Actividad SP5</i>	322
<i>Actividad SP6</i>	322
<i>Actividad SP7</i>	338
<i>Actividad SP8</i>	339
<i>Actividad SP9</i>	365
<i>Actividad SP10</i>	371
<i>Actividad SP11</i>	379
<i>Actividad SP12</i>	386
<i>Actividad SP13</i>	396

4.1.3.1.- Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Patricia.....	401
4.1.4.-Análisis de las actividades del cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje.....	409
<i>Actividad EP1</i>	409
<i>Actividad EP2</i>	409
<i>Actividad EP3</i>	412
<i>Actividad EP4</i>	415
<i>Actividad EP5</i>	417
4.1.4.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Patricia.....	419
4.1.5.-Análisis de las actividades del cuestionario a medio plazo.....	422
<i>Actividad MPP1</i>	422
<i>Actividad MPP2</i>	425
<i>Actividad MPP3</i>	427
<i>Actividad MPP4</i>	430
4.1.5.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Patricia.....	432
4.1.6 .-Tendencias de las categorías detectadas en relación con la construcción del concepto de área....	435
4.1.7.-Análisis global del proceso de construcción del concepto de área en Patricia.....	442
..... 4.1.7.1.-El crecimiento de comprensión de las categorías involucradas en el concepto	442
4.1.7.2.-El papel del folding back en el proceso de crecimiento de comprensión de Patricia.....	458
4.1.7.3.-El papel de las interacciones en el proceso de crecimiento de comprensión de Patricia.....	460

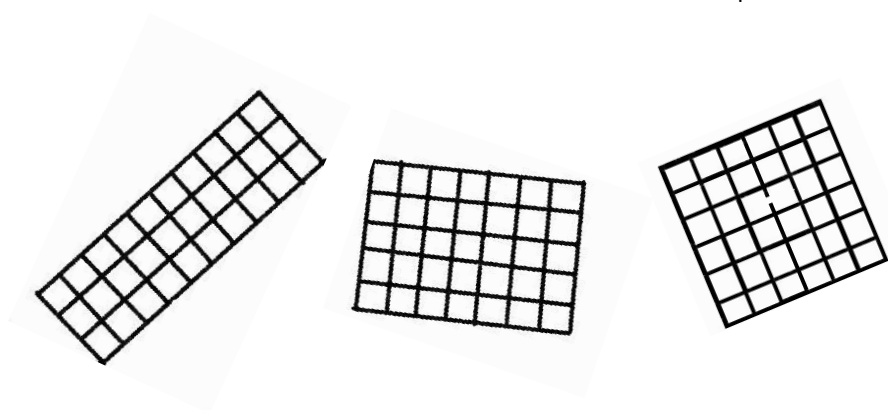
4.1.-EL CASO DE PATRICIA

4.1.1.- ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS PRIMITIVOS (CMP)

Para el análisis de las actividades retomamos los enunciados de los cuestionarios explicitados en el apartado 3.5.1.1. Transcribimos a continuación, el enunciado de cada actividad, describimos el desarrollo propuesto por Patricia y mostramos su producción escrita., según el cuestionario resuelto por la niña que adjuntamos en el anexo Anexo IX .

Asimismo analizamos lo realizado por la niña, en base a los contenidos matemático que estimamos y que se relacionan con el concepto que nos ocupa en este trabajo. Por ejemplo, en:

Actividad 1:(CMP1) *Cada uno de ustedes recibirá distintas cuadrículas. ¿Pueden enviarme, a través de un cálculo, que indique cuáles son las cuadrículas recibidas?*

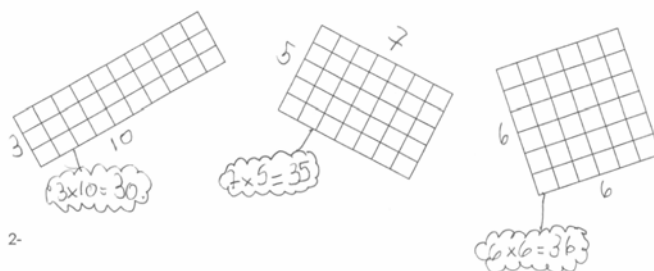


A.-Descripción de la producción escrita

Patricia coloca, en cada una, la cantidad de filas y la cantidad de cuadrados por filas (que coincide con la cantidad de columnas). Por ejemplo, una cuadrícula tiene forma rectangular y -en ella- dispone en los lados de la cuadrícula dos números: 3 y 10. El 3, representa la cantidad de filas que posee la cuadrícula y el 10, representa la cantidad de cuadraditos que tiene cada fila.

En cambio, para la otra cuadrícula dispone 7 y 5 (7 columnas y 5 cuadraditos en cada una de ellas); 6 y 6, respectivamente (6 filas y 6 cuadraditos por fila). El mensaje que transmite es: $3 \times 10 = 30$; $7 \times 5 = 35$ y $6 \times 6 = 36$, respectivamente para cada uno de ellos.

1.- Cada uno de ustedes recibirá distintas cuadrículas. ¿Pueden enviarme un mensaje, a través de un cálculo, que indique cuáles son las cuadrículas recibidas?



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 1

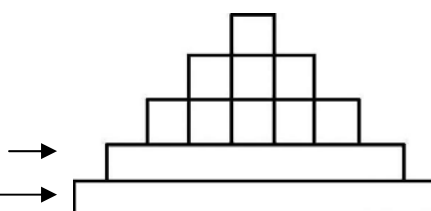
A través de este problema se detecta que Patricia cuenta con una estrategia que le permite calcular la cantidad de cuadraditos, ya que no apela al conteo de los cuadraditos, sino que reconoce la multiplicación como operación adecuada. Puede

anticipar la cantidad de cuadraditos que existen en distintas cuadrículas a través del producto de dos números.

Los números coinciden con el número de filas o columnas y la cantidad de cuadraditos que hay en cada una de ellas, aunque lo expresa indistintamente, pues la cuadrícula dispuesta en el margen izquierdo se refiere al número de filas y la dispuesta en el centro, se refiere al número de columnas. Es decir, puede asociar la misma con la estructura multiplicativa como herramienta que resuelve el conteo de un recubrimiento rectangular homogéneo

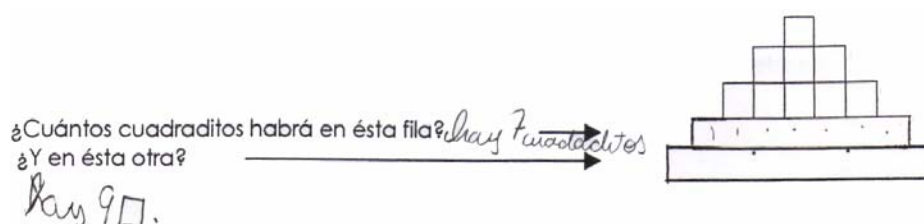
Actividad 2: (CMP2)

¿Cuántos cuadraditos habrá en esta fila?
¿Y en esta otra?



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia responde que en una fila hay 7 cuadraditos y en la próxima hay 9, pero no expresa la palabra cuadraditos sino que lo dibuja “hay 9 □”.



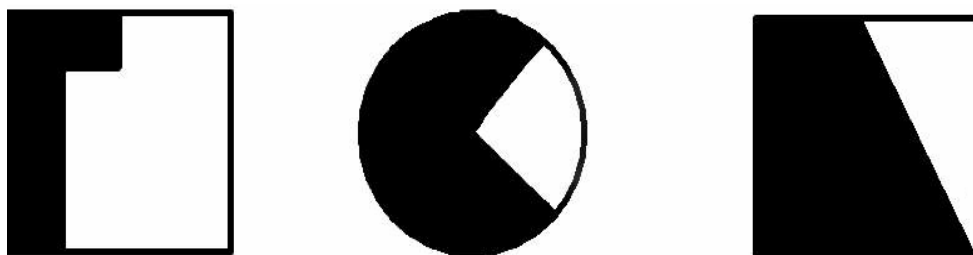
B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 2

De la respuesta de Patricia se percibe que en la estructura distingue la regularidad, la diferencia y la relación entre las filas de cuadrados y la puede expresar de manera reducida, pudiendo inferir en este caso, resultados numéricos

Asimismo se constata que ha podido expresar por escrito al utilizar un símbolo adecuado. Usa, por ejemplo, íconos para simbolizar “cuadraditos”, con los que indica el significado que le otorga a los mismos. Además, ésta es una estrategia importante para la resolución de problemas, pues lentamente comienza a incursionar en el desarrollo de la capacidad de inferir un resultado.

Actividad 3:(CMP3)

Cada figura tiene una parte pintada de negro. Indícala mediante una fracción.



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia signa a la primera $\frac{5}{16}$ y a las restantes le asigna, a cada una de ellas, $\frac{4}{4}$.

3.-Cada figura tiene una parte pintada de negro, Indicála mediante una fracción.



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 3

En la producción, podemos observar que solamente responde correctamente a la primera, es decir, que puede identificar la fracción que corresponde a una parte de un todo, cuando las figuras son rectangulares y divididas en forma rectangular. En cambio, cuando las figuras o sus divisiones no

son rectangulares presenta dificultad para identificar la fracción que corresponde a una parte del todo.

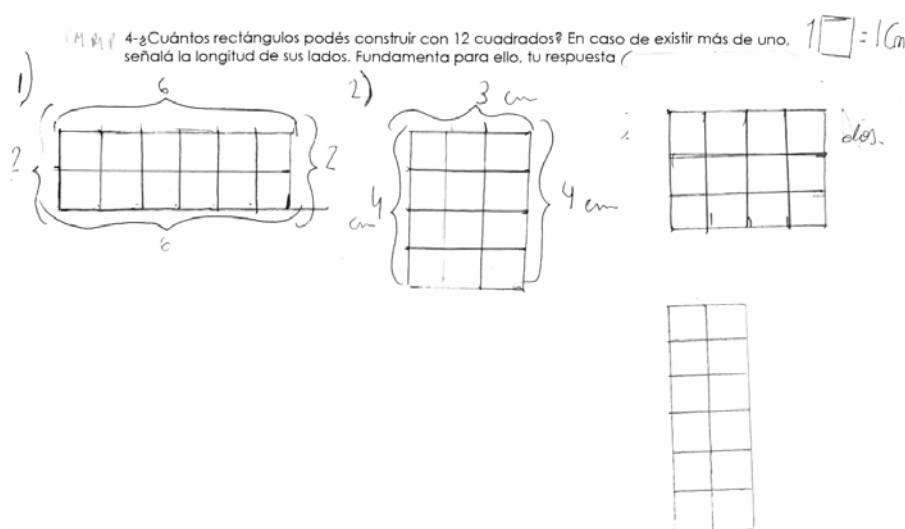
En general, se perciben carencias en realizar divisiones congruentes, a fin de reconocer las partes del todo y de identificar fracciones desde distintos marcos (geométrico y numérico). También, no comprende la relación entre el numerador y denominador, ni detecta que el $\frac{4}{4}$ representa la unidad; pero -en cambio- podemos intuir que la asignación la realiza independientemente de la forma. Es decir, reconoce la fracción como parte de una superficie independientemente de su forma.

Actividad 4:(CMP4)

¿Cuántos rectángulos podés construir con 12 cuadrados? En caso de existir más de uno, señala la longitud de sus lados. Fundamenta para ello, tu respuesta.

A.-Descripción de la producción escrita

Patricia dibuja dos rectángulos de las siguientes dimensiones: el primero de 6×2 y el segundo de 3×4 cuadrados e indica la longitud de los lados: 6 y 2. En el otro, indica 3 cm y 4 cm. Dibuja –además-otros dos rectángulos iguales a los anteriores pero ubicados de forma diferente, aunque no indica la longitud de los lados. Diseña un cuadrado de 1 cm de lado y a continuación escribe “1 cm.”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 4

Desde la lectura de la producción de Patricia, podemos anticipar algunas cuestiones acerca de la solución propuesta por ella. Por ejemplo, expresa el número solicitado como producto de dos factores, pues distribuye los 12 cuadraditos en, por ejemplo, 2 filas que contienen cada uno 6 cuadraditos.

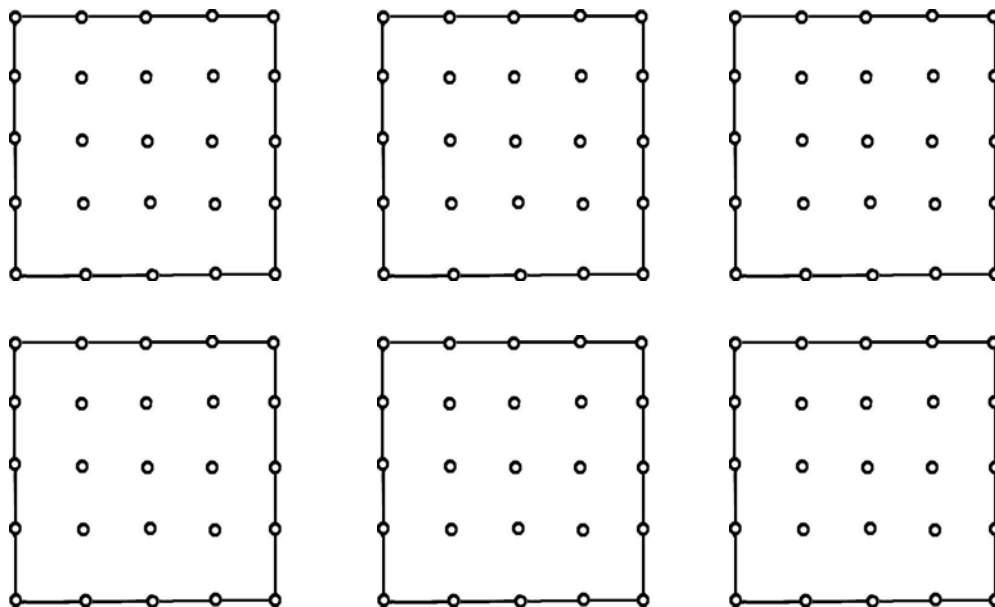
En cambio, en el segundo relaciona conjuntamente, la longitud de cada cuadradito y anticipa la longitud de las dimensiones del rectángulo propuesto. Dibuja más de un rectángulo, es decir, es consciente de que existe más de una posibilidad que cumple con las condiciones solicitadas, pero lo realiza de manera incompleta, pues no expresa la posibilidad de un rectángulo formado por una fila de 12 cuadraditos.

Cuando escribe “1  = 1cm” pareciera que desea indicar que 1 cm. corresponde a la longitud del lado del cuadrado, y así las dimensiones son 3 cm. y 4 cm. en el segundo caso, pero resulta llamativo que no lo considera para el primer ejemplo; puede ser que, lo haya dado por supuesto. Es probable que el enunciado donde dice “*Señala la longitud de sus lados*” en lugar de decir “*Señala las dimensiones de sus lados*” haya inducido a que Patricia considerara las dimensiones en centímetros.

Aunque arriba a una solución, de sus diseños no podemos inferir si reconoce la igualdad de figuras a través de transformaciones, pues si bien no les designa un número como a las otras – 1) y 2), no explicita que las dispone de otra forma.

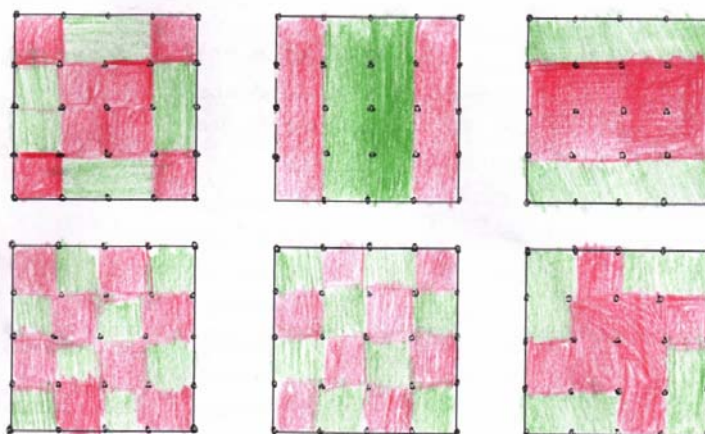
Actividad 5: (CMP5)

Pinta de rojo y verde, como más te guste, el siguiente cuadrado. Debe resultar la misma cantidad de cada uno de los colores.



A.-Descripción de la producción escrita

A continuación presentamos directamente, su producción



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 5

Patricia lo resuelve satisfactoriamente. Es decir, a través de este problema abierto Patricia pudo proponer respuestas que implicaron exploración, cambio de idea, y reflexión sobre las distintas posibilidades.

Por otro lado, pudo repartir equitativamente aprovechando regularidades -

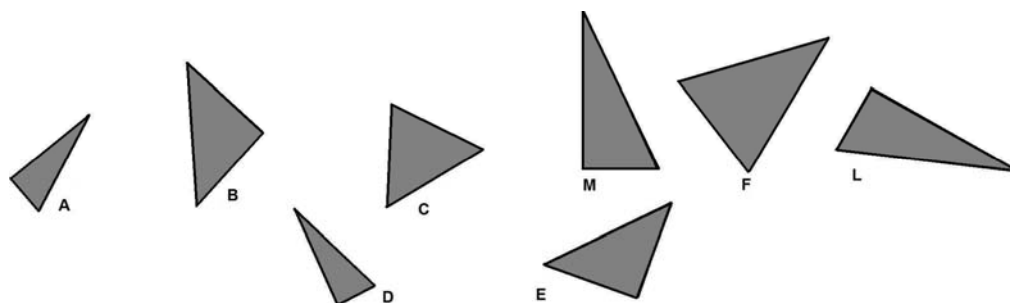
lo que Freudenthal⁸⁶ se refiere como reparto justo.

Aunque al efectuar una mirada crítica al enunciado de esta actividad, podemos pensar que repartir equitativamente no es totalmente equivalente a dividir en partes iguales salvo transformaciones.

El componente estático y estético desarrollado cuando le solicitan pintar puede ser la causa por la que Patricia considera el cuarto y el quinto como ejemplos distintos. Y debido a ello Patricia no pudo reconocer, en ellos, la igualdad de figuras a través de transformaciones (la transformación de uno en otro, resulta de la composición de un giro de 90° y una traslación).

Actividad 6: (CMP6)

Imagina que cuentas con varios triángulos de cada uno de los modelos presentados



Indica a través de la letra correspondiente,

- ✓ *Los triángulos con los cuales puedes formar rectángulos.*
- ✓ *Los triángulos con los cuales puedes formar cuadrados.*

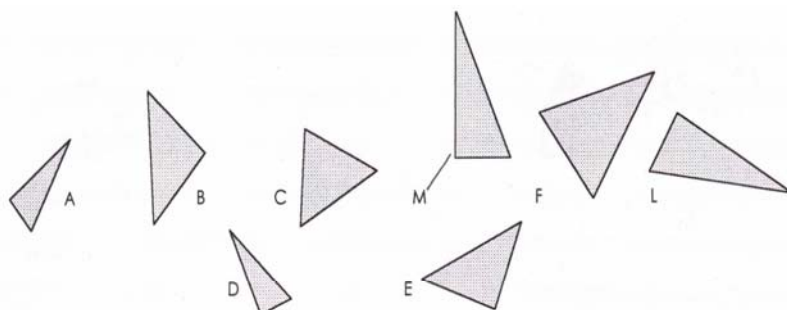
Fundamenta tu elección.

A.-Descripción de la producción escrita

Patricia escribe signos de interrogación delante de la petición de

⁸⁶Como ya nos referimos en el capítulo anterior, Freudenthal manifiesta que para desarrollar una fenomenología del objeto mental área, es necesario considerar los distintos enfoques que posee, por ejemplo, reparto justo, comparando y reproduciendo y midiendo. Asimismo expresa que unos son más aceptables que otros pero que no podemos limitarnos a uno solo de ellos; es así que en esta actividad nos referimos al primero enunciado, reparto justo aprovechando regularidades.

rectángulos; para expresar el cuadrado considera los triángulos B y E y, con respecto a la justificación, expresa “se pueden formar triángulos (M y L)”.



Indicá a través de la letra correspondiente, los modelos que te permiten formar:

5.6.1.-Rectángulos. (B y E).
6.2.-Cuadrados. (M y L).

Justifica tu elección

se pueden formar triángulos (M y L).

2

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 6

Los triángulos que forman un cuadrado los indica correctamente, y se puede pensar que cuando se refiere a los triángulos ha querido expresar rectángulos, pues M y L forman un rectángulo.

No obstante, no es la única posibilidad, pues también tendría que haber considerado A y D, pero no lo expresa. Igualmente lo expresado es a título de suposición. Se percibe que en algunos casos puede representar mentalmente una figura a través de la composición de otras, las figuras las reconocen por su forma, pero no identifica sus elementos y propiedades.

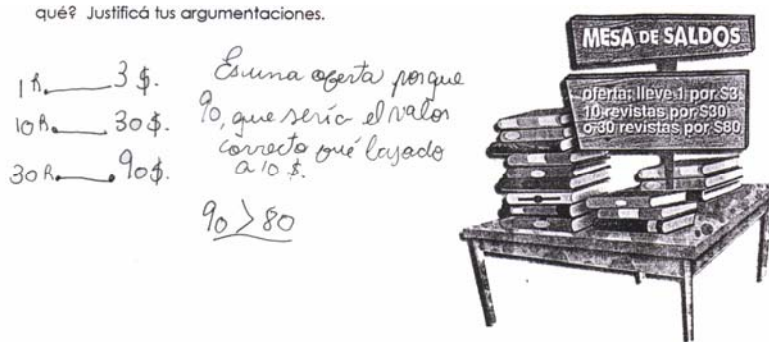
Actividad 7: (CMP7)

Luís pasea los domingos y suele visitar librerías buscando precios baratos. Así visitó la librería “Rayuela” y encontró la siguiente propuesta. ¿Es una oferta la que ofrece? ¿Por qué? Justifica tus argumentaciones.



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia expresa $1 r \rightarrow \$3$; $10 r \rightarrow \$30$; $30 r \rightarrow \$90$. Entonces expresa “Es una oferta porque 90, que sería el valor correcto, fue bajado a \$10 $90 > 80$ ”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 7

Patricia cuando expresa la solución, no analiza la posibilidad de pensar en otras posibles. Pues si 10 revistas cuestan 30\$, no estamos en presencia de una oferta. Solamente considera la totalidad de la información y, por lo tanto, expresa...*fue bajado a \$10* y a continuación dice $90 > 80$. Vincula las variables correctamente e identifica situaciones en las que no existe proporcionalidad, pero para responder considera la totalidad de la información y en consecuencia pierde datos para interpretar otras posibilidades en el colectivo de la solución, como por ejemplo, “*comprando 10 revistas debo pagar 30\$*” no es una oferta. Entonces, si bien no puede explicitarlo, desarrolla un procedimiento que emplea propiedades de la proporcionalidad aunque parcialmente.

Es una posible muestra de la tendencia a enunciar una sola posibilidad a la solución.

Actividad 8:(CMP8)

Aproxima cada peso a la centena y calcula. ¿Cuánto pesan aproximadamente, las naranjas? ¿Y las bananas? ¿Cuánto más pesan las manzanas que los duraznos?



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia responde a las preguntas de la siguiente forma:

Con las naranjas realiza la división de 5673 y 1000, obtiene como resultado 5,673 pero no continúa con el procedimiento y redondea al 6, indicando con ello la posición de la centena respondiendo: “56 centenas”; las naranjas pesan 56 centenas, las bananas 48 centenas y los duraznos pesan 25 y como las manzanas pesan 32 y $(32 - 25 = 7)$ resulta que las manzanas pesan por 7 más que los duraznos.

9.- Aproxima cada peso a la centena y calcula

56 centenas.
5673g
1000
5.673
6
7300
3000
¿Cuánto pesan aproximadamente, las naranjas? ¿Y las bananas?
¿Cuánto más pesan las manzanas que los duraznos?

25 centenas.
2525g
DURAZNOS

MANZANAS
3.230g

1) Las naranjas pesan 56 c.
Las bananas pesan 48 c.
Los duraznos pesan 25 y como las manzanas pesan 32 $(32 - 25 = 7.)$
Las manzanas pesan 7 más que los duraznos.

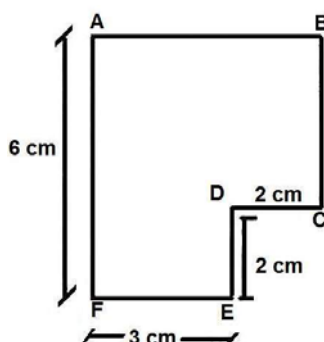
B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 8

Patricia interpreta correctamente la noción de valor aproximado como “valor relacionado respecto de”, en este caso particular, la centena. Con respecto al sistema de numeración y al campo aditivo, resuelve correctamente situaciones

operando por complemento, realiza estimaciones y reconoce el valor posicional del sistema de numeración.

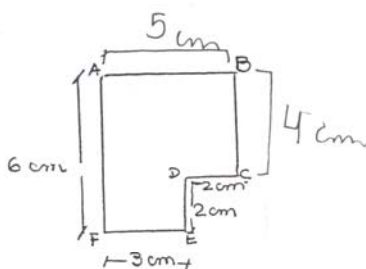
Actividad 9: (CMP9)

Calculá, sin medir con la regla, la longitud de los restantes lados de la figura. Fundamenta tu respuesta.



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia en la gráfica traslada dos segmentos congruentes a los lados FE y a DC y la longitud del lado AB es el resultado de sumar la longitud de ambos segmentos y para ello escribe “ $3\text{cm} + 2\text{cm} = 5\text{cm}$ ”. En cambio, para averiguar la longitud de BC, escribe “ $6\text{cm} - 2\text{cm} = 4\text{cm}$ ”



$$3\text{cm} + 2\text{cm} = 5\text{cm}$$

$$6\text{cm} - 2\text{cm} = 4\text{cm}$$

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 9

Patricia resuelve correctamente al descomponer y operar por complemento respecto del campo aditivo.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PRIMITIVO DE PATRICIA

El análisis realizado nos permite suponer las nociones que la niña tiene acerca de los conocimientos matemáticos disponibles para abordar la comprensión del concepto de área, los cuales constituyen el *conocimiento matemático primitivo de Patricia*.

✓ Se observan conocimientos respecto a la posición de las cifras dentro del número como indicador de su valor y estrategias de estimación (CMP8)⁸⁷

✓ Identifica el campo multiplicativo, en particular, el modelo rectangular como herramienta que resuelve situaciones de conteo por cubrimiento y condiciones de proporcionalidad (CMP1; CMP4; CMP7).

✓ Expresa el número como producto de dos factores, los cuales se corresponden con la cantidad de filas iguales y la cantidad de cuadraditos por fila, o bien con la longitud de los lados del rectángulo (CMP4).

✓ Percibe el significado del uso de los símbolos pues ha podido expresar por escrito utilizando para ello el símbolo adecuado (CMP2).

✓ Para la obtención de rectángulos a partir de triángulos, desde lo gráfico y geométrico, percibe más de una posibilidad en el conjunto solución, pero de manera incompleta (CMP6)

✓ En el campo aditivo puede averiguar datos por complemento (CMP8 y CMP9)

✓ Percibe que la relación entre la porción de superficie y el total es independiente de su forma. (CMP3)

⁸⁷ Los códigos se refieren a la actividad del cuestionario de la cual procede.

✓ Comprende enunciados, anticipa y descubre regularidades, diferencia y relaciona para encontrar resultados por inducción y lentamente comienza a incursionar en el desarrollo de la capacidad de generalizar, aspectos, que cobran sentido en la resolución de problemas.(CMP2; CMP4; CMP5).

✓ Realiza sólo repartos equitativos, pero no establece la congruencia a través de transformaciones (CMP5)

✓ Puede proponer respuestas que implican explorar, cambiar de idea, y reflexionar sobre distintas posibilidades (CMP5)

✓ Identifica las figuras en forma global (por su forma), pero a veces , no representa mentalmente la composición de una figura en función de otras simples (CMP6)

✓ No reconoce las partes del todo en figuras con subdivisiones no rectangulares y congruentes de una superficie. (CMP3)

✓ Expresa mediante fracciones la relación entre las parte y el todo en una superficie sólo con subdivisiones rectangulares.(CMP3)

✓ No reconoce elementos y propiedades de las figuras, para poder establecer afirmaciones sobre los objetos sin necesidad de apelar a constataciones empíricas (CMP6)

✓ Emplea propiedades de la proporcionalidad de forma parcial aunque pareciera que no puede explicarlo, lo que le lleva a analizar de manera incompleta las posibilidades en el colectivo del conjunto solución del problema, así como también, la información de los subproblemas que resultan del enunciado. (CMP7)

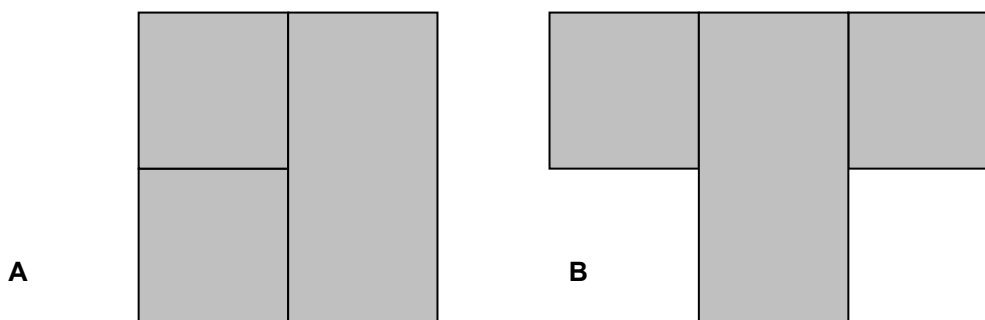
4.1.2.-ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO DE SUS IDEAS PREVIAS ACERCA DEL CONCEPTO DE ÁREA. (IAP)

En el análisis, continuamos con los enunciados de los cuestionarios explicitados en el apartado 3.5.1.2, transcribimos, a continuación, el enunciado de cada actividad, describimos el desarrollo propuesto por Patricia y mostramos su

producción escrita, según el cuestionario resuelto por la niña, y que adjuntamos en el anexo Anexo X. Analizamos lo que realiza, desde un tratamiento geométrico y numérico del concepto de área, con la intención de averiguar las ideas previas que posee del mismo. Por ejemplo, en:

ACTIVIDAD 1: (IAP1)

Con las piezas de la figura A se ha formado la figura B. Si tuvieras que pintar ambas figuras. ¿Utilizas diferente cantidad de pintura para cada una de ellas? Fundamenta tu respuesta.



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia numera las piezas de ambas figuras, le asigna a cada cuadrado los números 1 y 2, respectivamente, y al rectángulo le asigna el número 3 y responde *“para la figura A se utiliza la misma pintura que la B, pero para el cuadrado “1” se utiliza más pintura que para el cuadrado “3”*

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 1

La respuesta es correcta, pero la descripción evidencia falta de argumentación en su desarrollo. Además, la relación que enuncia es la inversa de la que ve y utiliza la palabra “cuadrado” en lugar de “rectángulo” para referirse a la región 3.

Podemos pensar que, desde una representación geométrica, Patricia realiza la conservación de la magnitud (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*) desde la

percepción visual (ind 2.1 en Producción de una imagen). De esta forma no podemos afirmar que Patricia, compare las mismas por descomposición (ind 2.4 en *Producción - Posesión de una imagen*) o por medición a través de una unidad conveniente (ind 2.5. *Producción - Posesión de una imagen*). Pues de hacerlo, hubiera explicitado alguno de esos procedimientos. En cambio, no disponemos de información acerca de que utilice las mismas piezas de distinta forma (ind 2.3 en *Producción - Posesión de una imagen*).

En relación con el nivel de comprensión que logra Patricia respecto a los anillos o capas, conviene recordar que la demanda de este problema se sitúa con un indicador en *Producción de imagen*, con tres indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* – Capa B y Capa C – y con un indicador a *Percepción de propiedades* – Capa D – Patricia accedió a *Producción de una imagen* – Capa B -, y al indicador correspondiente a *Percepción de propiedades* – Capa D -, es decir, que desde su percepción visual, reconoce la invariancia de la magnitud área, independientemente de la forma. Aspectos que nos permiten construir el siguiente gráfico de comprensión:

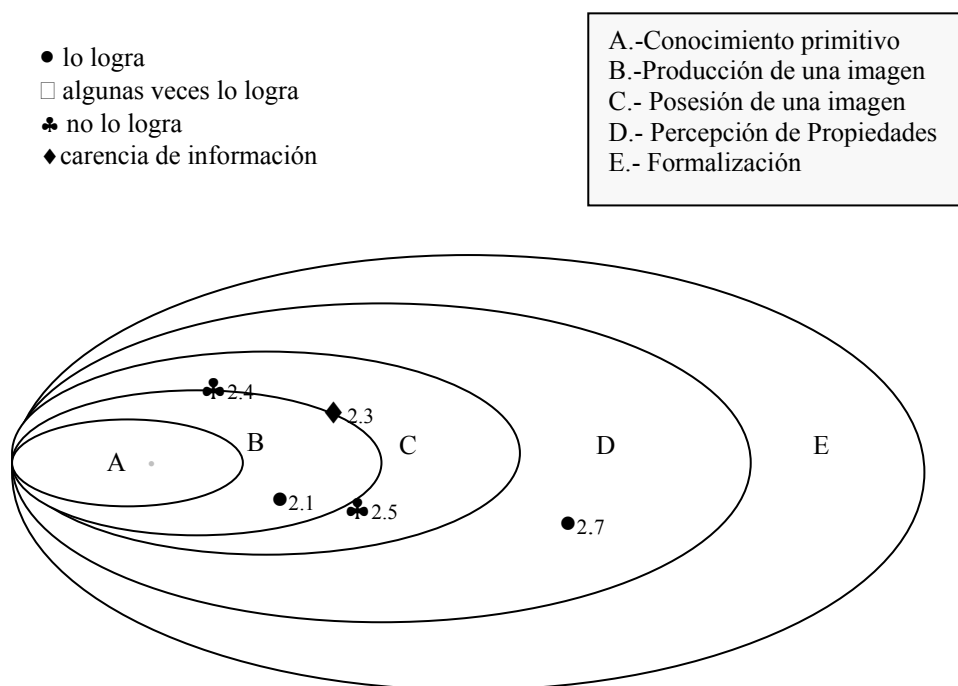
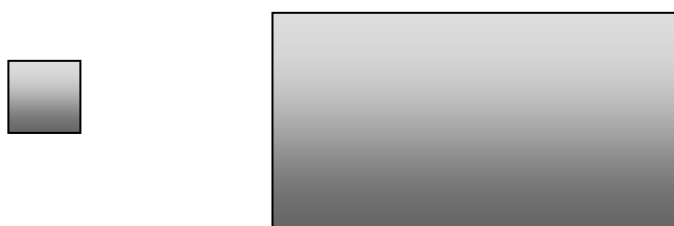


Gráfico de Comprensión -IA -de Patricia asociado a la act.1

- 2.1.-Compara superficies por percepción visual
- 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.

Actividad 2: (IAP2)

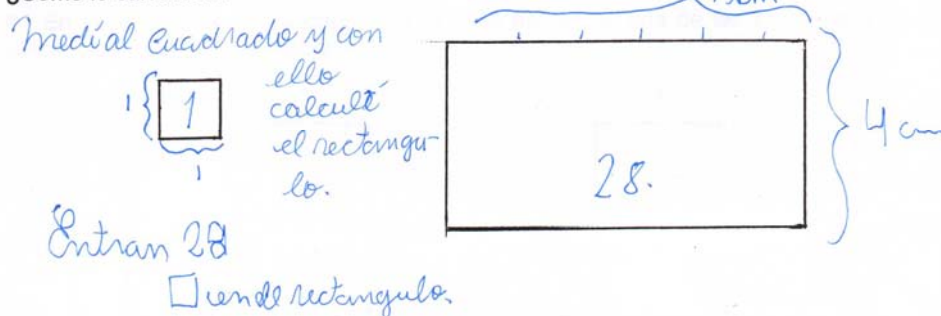
¿Cuántos cuadrados como el de la izquierda caben en el rectángulo de la derecha? ¿Como lo calculaste?



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia efectúa cinco marcas sobre el lado de dimensión mayor del rectángulo. Mide la dimensión del cuadradito y le asigna 1. Asimismo, le asigna a cada una de las dimensiones del rectángulo 7cm y 4cm, respectivamente, y dentro del mismo escribe “28” Para luego responder que “*medí al cuadrado y con ello calculé el rectángulo. Entran 28 cuadraditos en el rectángulo*”

2.- ¿Cuántos cuadrados como el de la izquierda caben en el rectángulo de la derecha?
¿Cómo lo calculaste?



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 2

En un primer momento, parece que pretende desplazar el cuadradito sobre el rectángulo y para ello efectúa una marca (no todas de igual longitud), pero al

efectuar el cubrimiento, (ind 4.1 en *Producción de una imagen*) observa que puede efectuarlo a través de un número exacto de cuadraditos y decide entonces emplear un procedimiento numérico.

Para ello, considera que el lado del cuadrado de la izquierda tiene dimensión 1 (la unidad); aunque no lo expresa, se desprende que se refiere a 1cm. Desplaza esa longitud sobre uno de los lados, le asigna 7 cm. Y, en el otro lado, asigna 4 cm., pero esas dimensiones son erróneas, pues la longitud es 6cm y 3cm respectivamente.

Como ya hemos mencionado en CMP1, Patricia, desde constataciones empíricas, puede asociar el conteo del cubrimiento rectangular y homogéneo con el campo multiplicativo (ind 5.1 en *Producción de una imagen*)

Esto es posible, puesto que, desde un enfoque numérico, aborda la medida como el número que surge al averiguar cuántas veces una unidad de medida – convencional o no- está contenida en otra de la misma magnitud, a partir de pavimentados o recubrimiento. (ind 4.1 en *Producción de una imagen*). O bien el 28 surge de multiplicar las dimensiones lineales que ha marcado en la figura. (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*)

En relación con el nivel de comprensión que logra Patricia, la demanda de este problema se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- y con un indicador en *Percepción de propiedades*-Capa D- Patricia accedió a los dos indicadores correspondientes a la *Producción de una imagen*- Capa B-, pues divide y pavimenta el cuadrado y los asocia con el campo multiplicativo, para responder a cuántos cuadrados necesita para cubrirlo y con indicador en *Percepción de propiedades*-Capa D-, cuando arriba al resultado a través de las dimensiones lineales que indica.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ♦ carencia de información

- | |
|--|
| A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización |
|--|

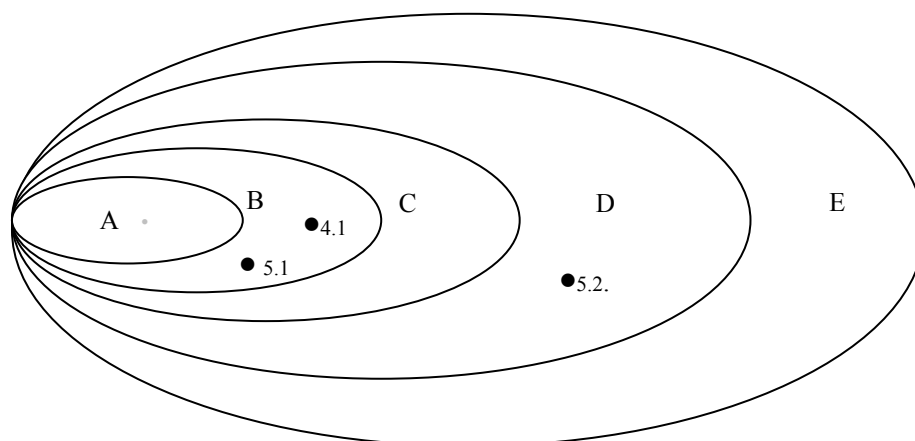


Gráfico de Comprensión -IA -de Patricia asociado a la act.2

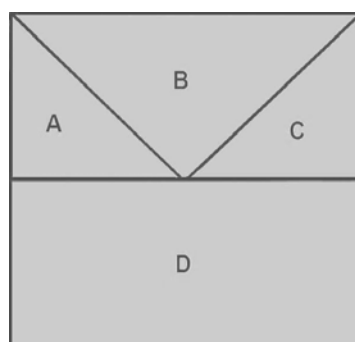
4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado

5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.

5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras

Actividad 3: (IAP3)

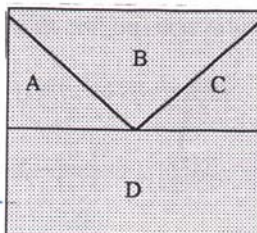
A Lucia le han regalado un rompecabezas cuyas piezas tienen la forma que indica el dibujo. ¿Qué parte del rompecabezas representa cada pieza?



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia responde “La figura A representa un triángulo escaleno, al igual que la C. La B es un triángulo isósceles y la D es un rectángulo”.

La figura "A" representa
un triángulo escaleno
al igual que la "C".
La "B" representa un triángulo
isósceles. y
la "D" es un rectángulo



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 3

Patricia distingue las características de las figuras en cuanto a la definición de las mismas y las reconoce, independientemente de su posición, cuando afirma “la figura A representa un triángulo escaleno, al igual que C.

En cuanto a la relación de cada figura con respecto a la figura total, podemos pensar que Patricia no ha entendido lo que se le solicitaba debido a que no entiende el significado del término “representa” en el enunciado tal como se había previsto. En función de lo expresado, carecemos de información para formular el logro del indicador (2.11 en *Percepción de propiedades*).

En relación con el nivel de comprensión que logra Patricia, conviene recordar que la demanda de este problema se sitúa en el anillo denominado *Percepción de propiedades* – Capa D – relacionando el área de una parte con respecto al total, pero Patricia no interpreto lo solicitado.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ♦ carencia de información

- A.-Conocimiento primitivo
- B.-Producción de una imagen
- C.- Posesión de una imagen
- D.- Percepción de Propiedades
- E.- Formalización

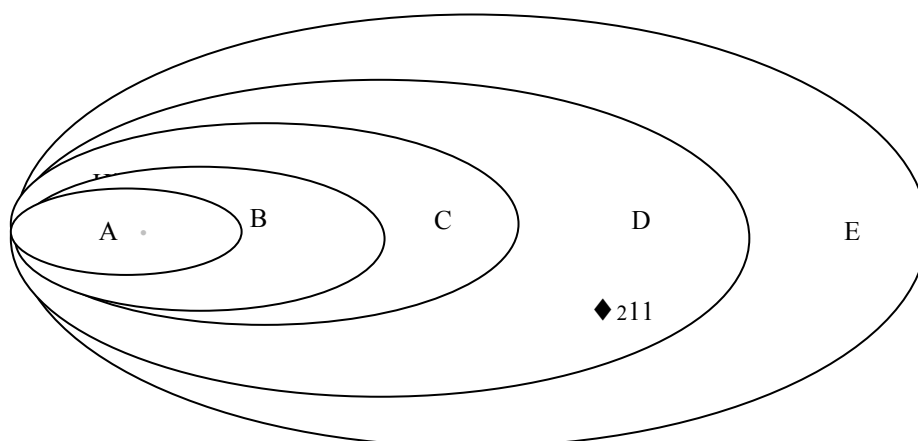
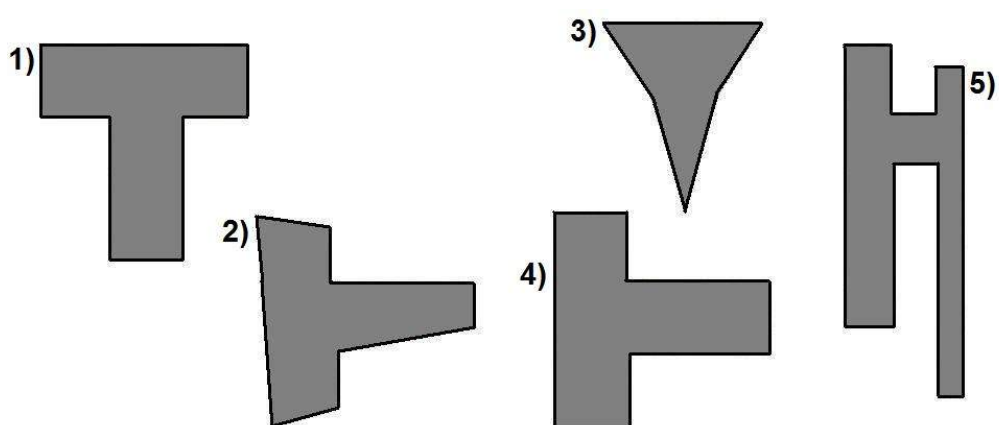


Gráfico de Comprensión -IA -de Patricia asociado a la act.3

2.11.- Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones

Actividad 4: (IAP4)

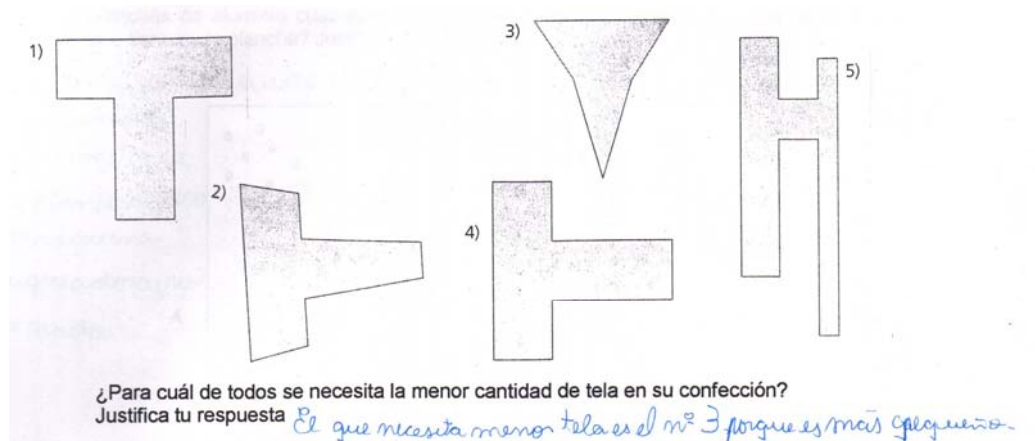
Sobre una hoja se dibujaron los siguientes diseños de escudos para un club, que serán hechos en telas de color



¿Para cuál de todos se necesita la menor cantidad de tela en su confección? Justifica tu respuesta

A.-Descripción de la producción escrita

Patricia responde que “El que necesita menos tela es el número 3 porque es más pequeño”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 4

Patricia responde correctamente, pero llega al resultado mediante la percepción visual (ind 2.1.- en *Producción de una imagen*), como en la actividad IAP1. Manifiesta que “necesita menos tela pues es el más pequeño”, lo que es redundante. De lo escrito, observamos ausencia de argumentación. Reconocemos que comparar áreas es más complicado que comparar longitudes, debido a las variadas formas que pueden adoptar las figuras equivalentes; pero no se desprende que haya efectuado otro tipo de comparación, ni tampoco podemos afirmar que haya aplicado la transitividad en la relación establecida.

Respecto al nivel de comprensión que logra Patricia, la demanda de este problema se sitúa con dos indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B y en el anillo *Producción- Posesión de una imagen* -Capas B y C- y tres indicadores en *Percepción de propiedades*- Capa D - Patricia solo compara visualmente, es decir que accede solamente a la *Producción de una imagen*- Capa B.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
 B.-Producción de una imagen
 C.- Posesión de una imagen
 D.- Percepción de Propiedades
 E.- Formalización

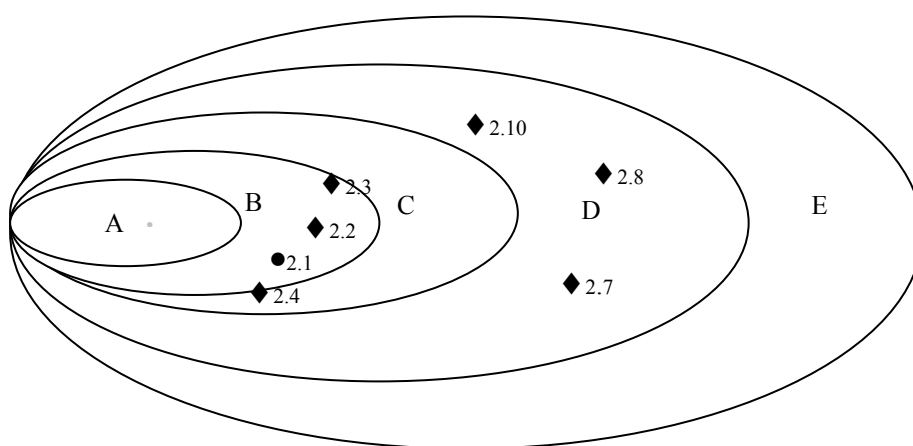


Gráfico de Comprensión -IA -de Patricia asociado a la act.4

- 2.1.-Compara superficies por percepción visual.
 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.

Actividad 5:(AIP5) no se incluye en el análisis según lo expresado en el apartado 3.5.1.2.-.

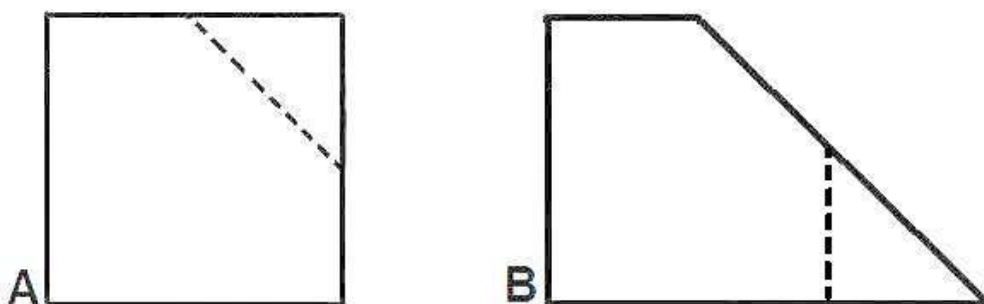
Actividad 6: (IAP6)

En la figura A se ha recortado por la línea de puntos una de las esquinas, y se ha ubicado como lo indica la figura B.

¿Qué puedes decir de la cantidad de superficie que ocupa cada una de las figuras?

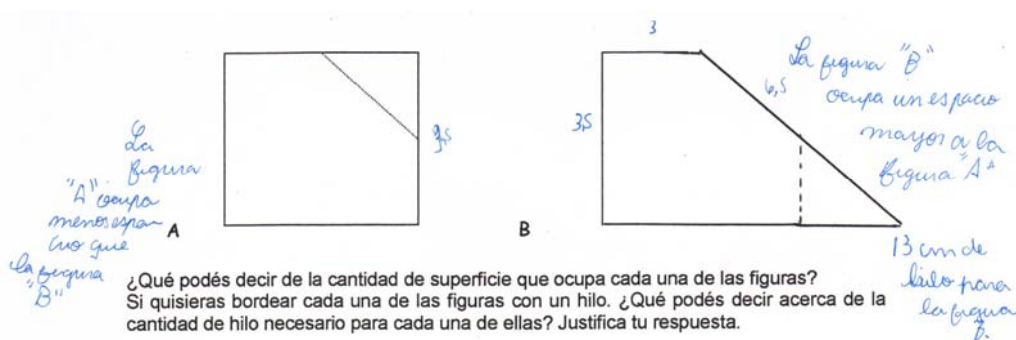
Si quisieras bordear una de las figuras con un hilo. ¿Qué puedes decir acerca de la cantidad de hilo necesario para cada una de ellas? Justifica tu

respuesta.



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia responde “La figura A ocupa menos espacio que la figura B; la figura B ocupa un espacio mayor que la figura A; 13 cm. de hilo para la figura B”. En la figura A, considera la dimensión de un lado 3,5 y en la figura B asigna a tres de los cuatro lados, 3, 5; 3 y 6,5 respectivamente.



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 6

De la respuesta que brinda podemos pensar que compara las figuras visualmente (ind 2.1.-en *Producción de una imagen*). Patricia no reconoce la composición ni la recomposición entre ambas figuras (ind 2.4 en *Producción – Posesión de una imagen*) y por ello no identifica la conservación del área a través de transformaciones (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*).

Con respecto a la cantidad de hilo necesaria para bordear cada una de las figuras, en la figura A es incomprensible lo que realiza, pues considera solamente la dimensión de un lado pero no expresa el resultado que surge al bordear la

misma. En esto se puede observar desconocimiento de la noción de perímetro (ind 3.1.- en *Posesión de una imagen*). Con respecto a la figura B, expresa solamente “13cm”, aunque no argumenta; su ausencia no incide en la calidad del resultado sino en el resultado en sí, pues éste podría haber variado al pretender efectuar una justificación.

De lo observado en ambas figuras, inferimos que no comprende lo que significa “bordear”, pues el resultado que propone resulta ser la suma de 3,5; 3 y 6,5, o sea, solamente las dimensiones de tres lados de la figura. En consecuencia, no podemos anticipar si reconoce la invariancia con el área de las mismas. (ind 3.2.- en *Percepción de propiedades*)

Respecto al nivel de comprensión que logra Patricia, la demanda de este problema se sitúa con dos indicadores en la capa denominada: *Producción de una imagen*, -Capa B - un indicador en el anillo *Producción Posesión de una imagen*- Capa B –Capa C con dos indicadores a *Percepción de Propiedades* –Capa D -, Patricia solo compara visualmente, es decir, que accede a *Producción de una imagen*.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- A.-Conocimiento primitivo
- B.-Producción de una imagen
- C.- Posesión de una imagen
- D.- Percepción de Propiedades
- E.- Formalización

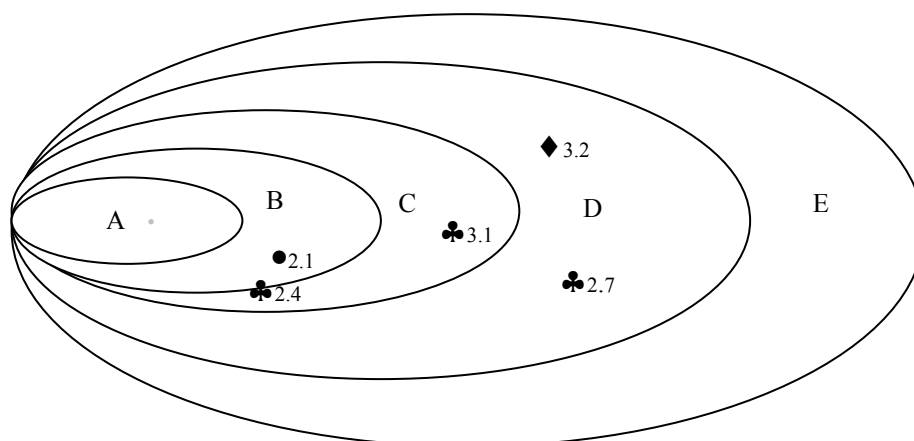


Gráfico de Comprensión -IA -de Patricia asociado a la act.6

- 2.1.-Compara superficies por percepción visual.
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.

- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura.
 3.2.-Reconoce que a mayor /igual/menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/ menor perímetro de la misma.

Actividad 7: (IAP7)

Deseo empapelar el pizarrón con hojas de papel glasé. ¿Cuántos de esos papeles necesitaré aproximadamente?

A.-Descripción de la producción escrita

Patricia responde que “Se necesitan aproximadamente 286 papelitos. Se requieren 18 papeles aproximadamente para empapelar el alto del pizarrón y 22 papelitos aproximadamente de ancho”, luego realiza el producto “ $18 \times 22 = 286$ papelitos que entran aproximadamente en el pizarrón de la escuela”

7.- Deseo empapelar el pizarrón con hojas de papel glasé. ¿Cuántos de esos papeles necesitaré aproximadamente?

Se necesitan
Aproximadamente 286 papelitos.

18 papeles aprox. de alto. 18×22 *22 papeles aprox. de ancho.*

286 papelitos entran aprox. en el pizarrón de la escuela.

2

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 7

El proceso es correcto, transfiere los conocimientos del campo multiplicativo respecto al modelo rectangular o de la cuadrícula (ind 5.1.- en *Producción de una imagen*), asocia el cubrimiento por iteración de una unidad establecida (ind 4.1.- en *Producción de una imagen* e ind 4.2 en *Posesión de una imagen*). Estima la cantidad de papelitos que entran en las dimensiones del pizarrón, considera estos datos para calcular el área (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*), y explicita que el resultado al que arriba es “aproximando”. Si bien es correcto, no pensamos que los niños podían tener en cuenta esta noción para expresar el resultado.

Respecto al nivel de comprensión que logra Patricia, la demanda de este problema se sitúa con dos indicadores a *Producción de una imagen* – Capa B – y con un indicador en *Percepción de propiedades*- Capa D-. Patricia cuenta con una imagen apropiada y percibe sus propiedades

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

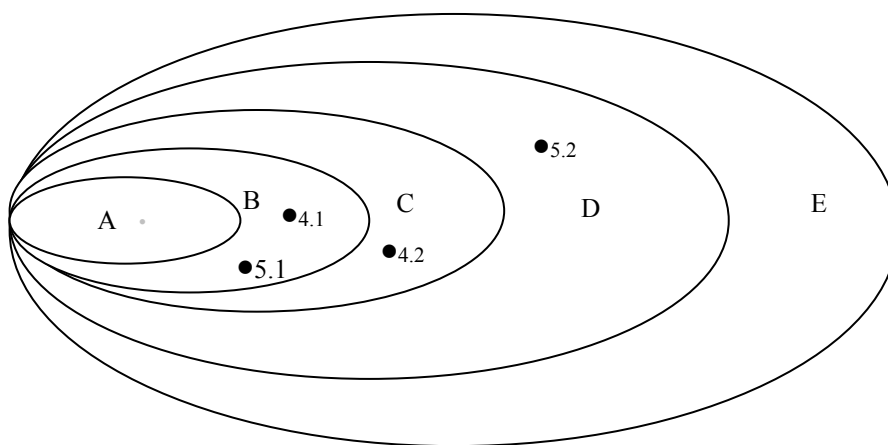
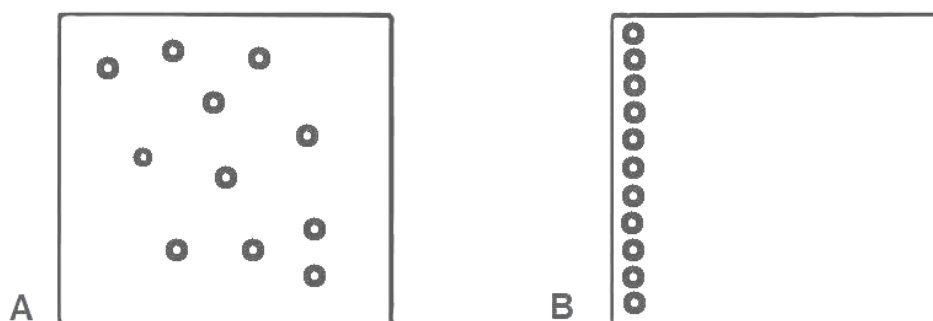


Gráfico de Comprensión -IA -de Patricia asociado a la act.7

- 4.1.-Divide y pavimenta. La superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 5.1.- Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2.- Calcula áreas estimando dimensiones lineales de las figuras.

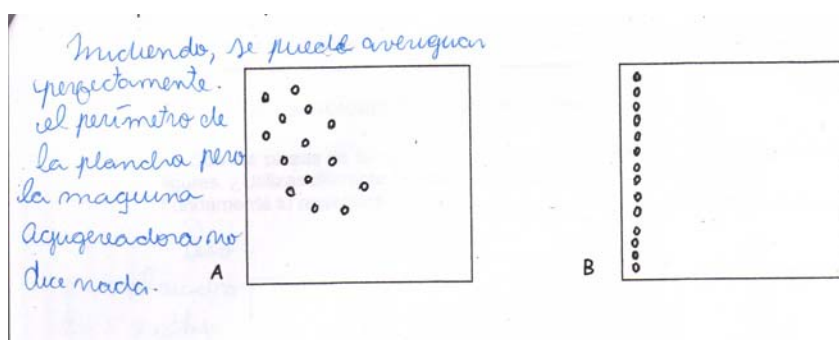
Actividad 8: (IAP8)

- Una máquina perforadora hace agujeros circulares, todos del mismo tamaño sobre planchas de aluminio cuadradas. ¿Qué podés decir acerca de la cantidad de aluminio que tiene cada plancha? Justifica tu respuesta.



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia responde “*Midiendo, se puede averiguar perfectamente el perímetro de la plancha, pero la máquina agujereadora no dice nada*”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 8

A través de la respuesta de Patricia se observa confusión entre los conceptos de área y perímetro, pues intenta comparar superficies a través del perímetro (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*). Cuando expresa que “*la máquina agujereadora no dice nada*” consideramos que se refiere a la ausencia de dimensiones de la figura. Es muy posible que Patricia no haya comprendido el enunciado, por lo tanto, no disponemos de información que dé cuenta acerca de la conservación del área cuando se recomponen planchas (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*).

Respecto al nivel de comprensión que logra Patricia, la demanda de este problema se sitúa con un indicador la capa denominada: *Percepción de*

propiedades – Capa D - Patricia no solo no distingue la invariancia del área a través de transformaciones, sino que se observa confusión entre la noción de área y perímetro, de manera que no dispone de la *posesión de la imagen* y en consecuencia no puede *percibir sus propiedades*.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

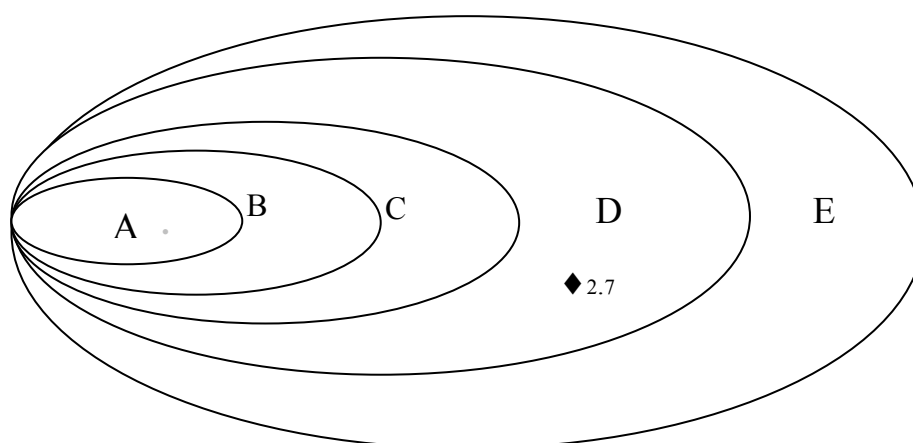


Gráfico de Comprensión -IA -de Patricia asociado a la act.8

2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.

4.1.2.1.- RELACIÓN ENTRE LOS GRÁFICOS DECOMPRENSION: DESEABLE Y EL DE PATRICIA.

Con la resolución de las actividades correspondientes al cuestionario acerca de las ideas previas de los niños respecto del concepto de área, pretendimos detectar qué les sugería o podían anticipar respecto del mismo. El cuestionario está formado por ocho actividades, según nos referimos en el capítulo anterior, apartado 3.5 1.2.-. A cada una de ellas les corresponde indicadores de las categorías. Estos indicadores los hemos dispuesto en un gráfico de anillos a efectos de dar cuenta de la comprensión deseable de los mismos. Así su

distribución en el gráfico es la siguiente: cuatro indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- tres indicadores en la frontera entre *Producción* y *Posesión de una imagen* Capa B y Capa C –dos indicadores en *Posesión de propiedades* – Capa C- seis indicadores en *Percepción de propiedades* – Capa D-

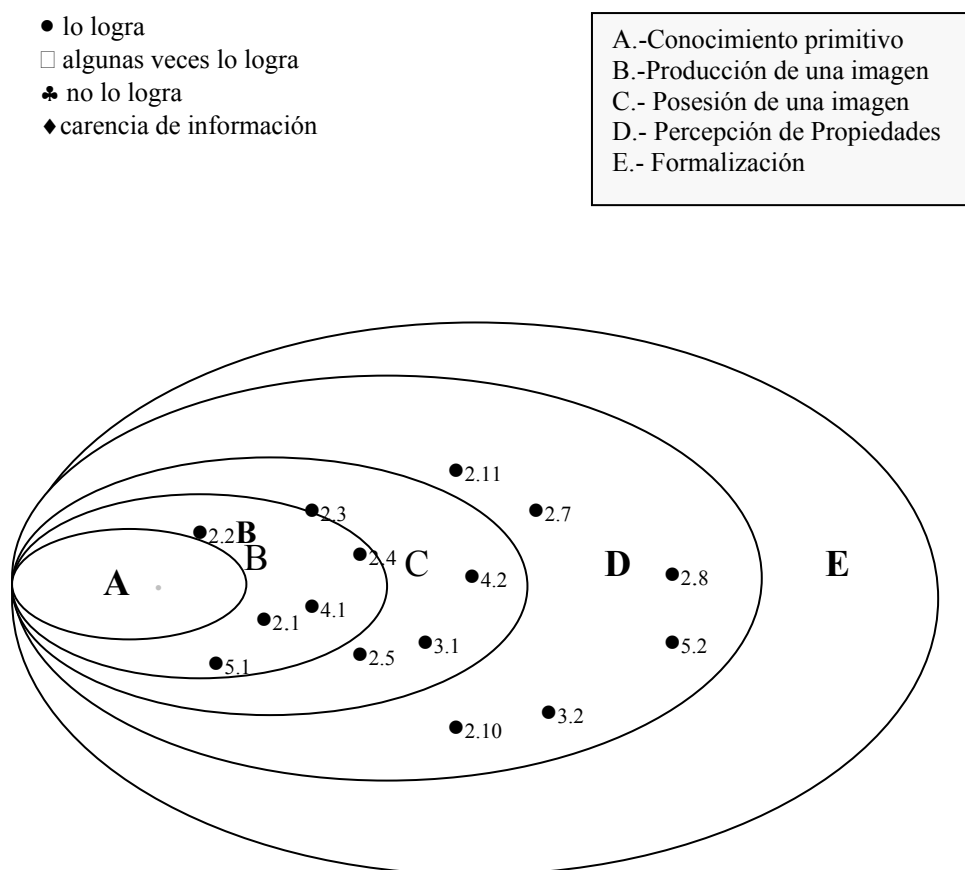


Gráfico Global de Comprensión Deseable de las Ideas Previas
acerca del concepto de área- IA -

- 2.1.-Compara superficies por percepción visual
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficie midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura.
- 3.2.-Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual / menor perímetro de la misma
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades

empleado.

4.2.-Elige una unidad adecuada.

5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.

5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras

Es decir, esperábamos que las niñas para hallar el área de una superficie, cubrieran o desplazaran otra superficie como unidad de medida, contando la cantidad que esta unidad estaba contenida en dicha superficie. Para comparar dos o más superficies, lo hicieran por percepción visual, componiendo – descomponiendo, por inclusión o midiendo a través de una unidad de medida. Así como también, distinguieran la diferencia entre la noción del concepto de perímetro y de área de una superficie y que ambas no necesariamente variaban de igual forma.

Las respuesta brindadas por Patricia nos permiten anticipar el gráfico en el que volcamos los logros de los indicadores involucrados.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

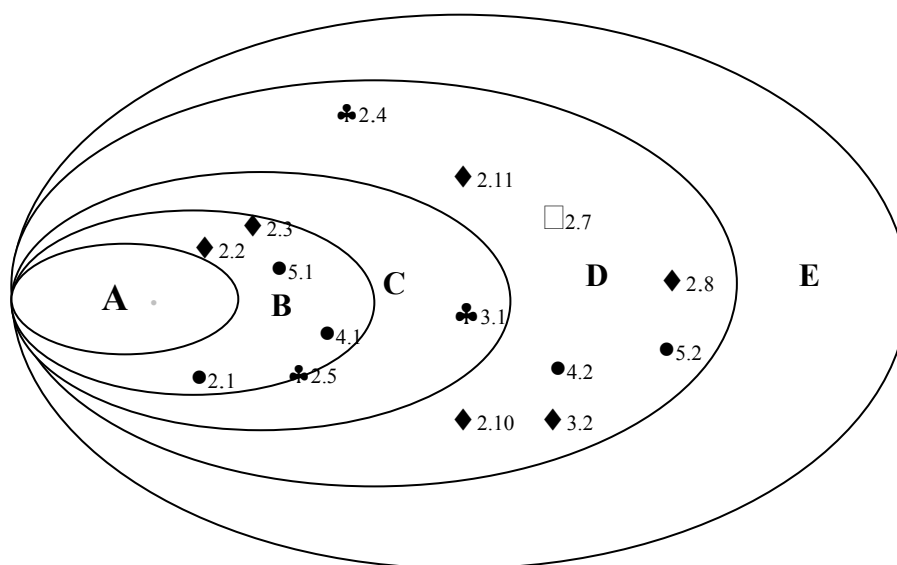


Gráfico Global de Comprensión de Ideas Previas acerca del
Concepto de Área de Patricia- IA -

Relacionamos ambos gráficos –de Patricia y el deseable- detectamos que la comparación y la conservación de la magnitud, la realiza - desde una representación geométrica - únicamente desde la percepción visual. (ind 2.1). En ningún caso utiliza algún procedimiento alternativo a través de transformaciones indirectas, por descomposición (ind 2,4) o mide utilizando una unidad conveniente (ind 2.5). Incluso la producción de la niña no nos brinda información si utiliza las mismas piezas en distintas formas. (ind 2.3).

En algunas ocasiones, reconoce que si una figura se recompone en otra, ambas resultan equivalentes (ind 2.7). Pero no contamos con información acerca que identifique dos o más superficies de igual o distinta forma y de igual área (ind 2.8 e ind 2.10), o exprese la relación entre una parte de la superficie y toda ella a través de una fracción (ind 2.11).

Con respecto a la distinción entre las nociones de área y perímetro, advertimos confusión entre ambas nociones (ind 3.1) y no contamos con información que muestre si la niña advierte la independencia de variabilidad entre ellas (ind 3.2).

Para medir una superficie, considera otra como unidad de medida conveniente (ind 4.2) pues desde una representación numérica, cubre o desplaza la misma sobre toda la superficie a medir (ind 4.1.-) y si es de forma rectangular, asocia la cantidad de la unidad a cubrir con el modelo multiplicativo (ind 5.1), en función de sus dimensiones lineales (ind 5.2),

Los aspectos mencionados constituyen *las ideas previas de Patricia acerca del concepto área*.

4.1.3-ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES RESUELTAS EN LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE (SP)

Patricia en esta sub-fase denominada Secuencia de aprendizaje, resuelve 11 actividades de las 15, explicitadas en el capítulo anterior, apartado 3.5.2.1.1.-, según se adjunta en el Anexo XI. Dos de ellas, la maestra decidió no implementarlas y dos actividades no las resolvió por encontrarse ausente. A continuación comenzamos con el análisis de cada una de las actividades desarro-

lladas por Patricia.

Actividad 1(SP1):

- ✓ *Dispones de un equipo de Tangram. Arma un rompecabezas con las piezas, sin superponerlas de manera de obtener distintas figuras, para cada una de ella. No olvides apoyarla sobre la hoja de tu carpeta y marcar el contorno.*

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

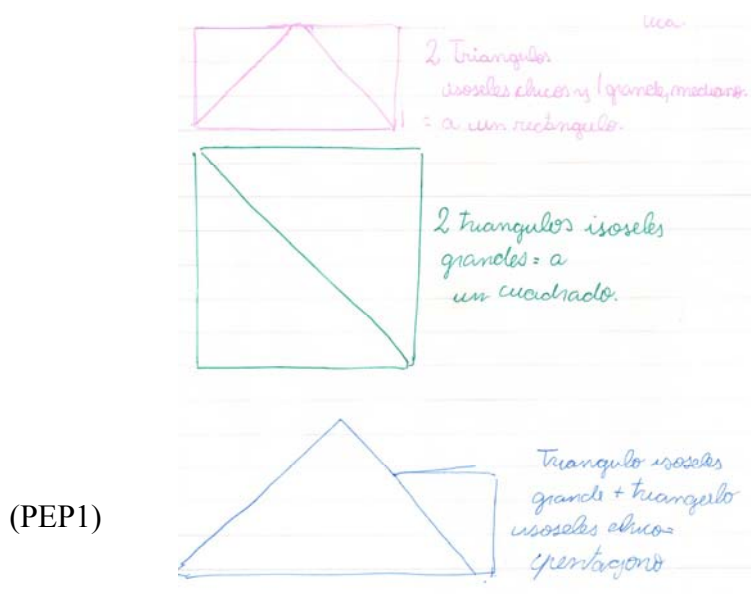
Cada uno de los niños manipula libremente las piezas del Tangram de manera distendida, formando con las piezas distintas figuras.

Mirta comparte sus producciones con Cecilia, pero Patricia no interviene y trabajando sola, arma tres figuras componiendo alguna de ellas. Por ejemplo, toma:

1.-Tres piezas, los dos triángulos chicos y 1 triángulo mediano. Aparea sobre los catetos del triángulo mediano, la hipotenusa de cada uno de los triángulos chicos, y forma un rectángulo. Al costado Patricia escribe “*dos triángulos isósceles chicos y 1 grande /mediano = a un rectángulo.*”

2.-Dos piezas, los dos triángulos medianos y forma una figura, el cuadrado. Al costado del contorneado Patricia escribe “*2 triángulos isósceles grandes =a un cuadrado*”

3.- Dos piezas, un triángulo grande y un triángulo chico y forman otra figura de manera que la hipotenusa del triángulo chico lo apoya, en parte, sobre uno de los catetos del triángulo grande. Al realizar el contorneado, no dibuja la porción de triángulo chico que sobresale, de manera que prolonga la hipotenusa del triángulo grande. Patricia escribe “*triángulo isósceles grande + triángulo isósceles chico = pentágono*”.



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

1

Patricia manipula las distintas piezas (ind 1.1 en *Producción de una imagen*) para armar una figura compleja, en principio, representa mentalmente las figuras “clásicas” –el rectángulo y el cuadrado- y apareándolas solamente por sus lados. (ind. 1.2.- en *Producción de una imagen*), arma sólo considerando las piezas de igual forma, las triangulares, (ind 1.4.- en *Producción – Posesión de una imagen*) Recién cuando lo logra, dispone de las piezas triangulares de distinto tamaño y las compone en otra, de forma no convencional, apareando también las piezas solamente por sus lados. (2.3 en *Producción – Posesión de una imagen*). Es decir, carecemos de información acerca que Patricia aparee las piezas por los vértices (ind 1.3 en *Producción – Posesión de una imagen*) para armar otra compleja.

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con dos indicadores en la *Producción de una imagen* – Capa B - y con tres indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* - Capas B y C.

Del análisis de la producción escrita construimos el siguiente gráfico que denota el proceso de construcción que Patricia va logrando, al mismo tiempo que

esbozamos la trayectoria de comprensión, que denota dicho proceso.

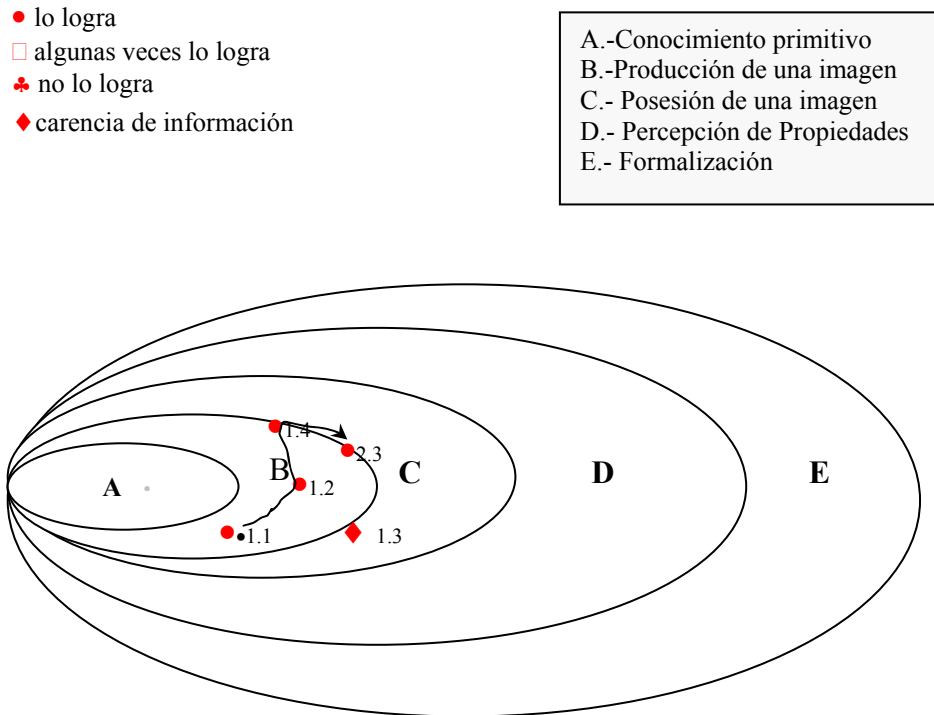
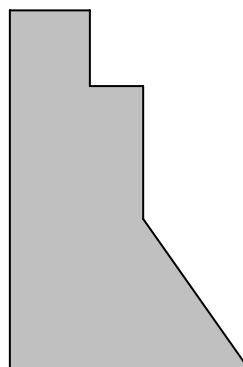


Gráfico de Comprensión -S- de Patricia asociado a la act. 1

- 1.1.-Maneja el material mediante manipulación libre
- 1.2.-Aparea lados.
- 1.3.-Aparea vértices
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas. (Recompone)

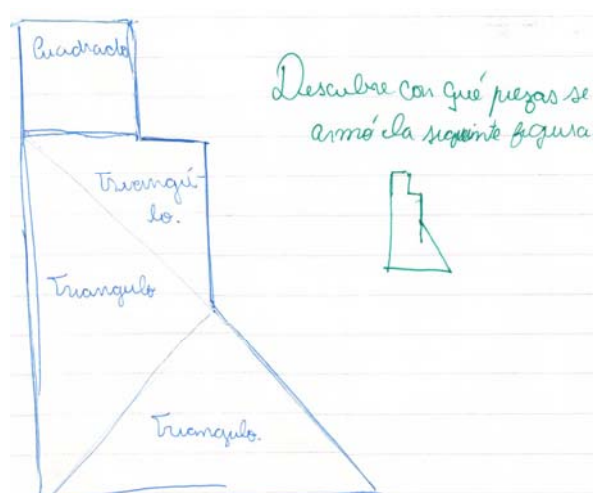
Actividad 2^a (SP2a):

a.- Investiga con cuales de las piezas del Tangram se construyó la siguiente figura



A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

La maestra pega un dibujo con una figura en el pizarrón y solicita a los niños que realicen una figura de igual forma, con sus fichas. Patricia responde de forma inmediata. *Necesito cuatro piezas* (línea 14).



(PEP2a)

Los niños resuelven la actividad de manera individual y cada uno expresa cómo arma la figura

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

2

El dibujo presentado por la maestra es de tamaño mayor que el que se puede formar con las piezas del Tangram, es decir, que no puede anticipar de forma directa por inclusión la respuesta. Patricia según su producción escrita (PEP2a), distingue el cuadrado y tres triángulos. Dos triángulo grandes y uno mediano, dispuestos de la siguiente manera: se aparean los triángulos grandes según un cateto, el otro cateto de uno de los triángulos se aparea por la hipotenusa del triángulo mediano y considerando la prolongación de la hipotenusa del

triángulo grande, se ubica el cuadrado, apareándose el otro lado del cuadrado con el cateto del triángulo mediano.

Es decir, Patricia compone mentalmente las figuras (ind 1,4 en *Producción – Posesión de una imagen*) aspecto que evidencia su desarrollo espacial. Toma las piezas, concisamente (ind 1.5.- en *Producción-posesión de una imagen*) y construye la figura de forma indirecta, para ello, compone y recompone rápidamente las distintas piezas, (ind 2.4 en *Producción-posesión de una imagen*), según observamos en la unidad de significado (SP2, (1; 14)).

1 Maestra: Ayer a la tarde me puse a jugar, hice una figura y la amplié. Ahora traje la figura y desearía que ustedes la realicen con las piezas que tienen

.O. Cuando la maestra presenta la figura, de forma inmediata Patricia responde.

12 Patricia: Ya está.

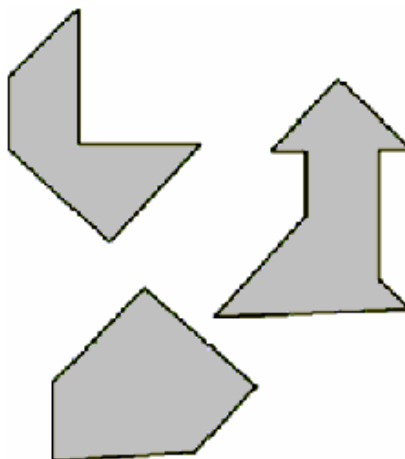
13 Maestra: Patricia ¿Cuántas figuras usaste?

14 Patricia: cuatro. SP2.a: (1; 14)

Patricia puede formar con distintas piezas de formas simples otra cuya forma es compleja.

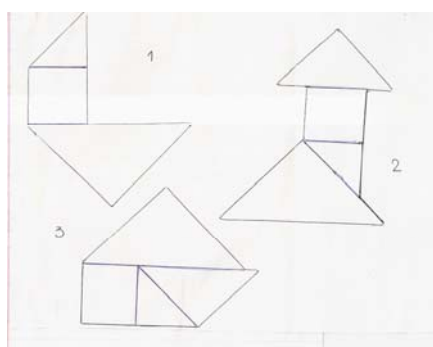
Actividad 2b: (SP2b)

b.- Ahora deben decir con qué piezas del Tangram se armaron las siguientes figuras.



A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

La maestra les entrega una hoja con las tres figuras, cuyo tamaño es diferente al que resulta si los niños lo arman con las piezas del Tangram. Les solicita que nombren las piezas con las cuales formar esas figuras. En la producción, observamos que la niña marca en cada dibujo las piezas que la forman.



(PEP2b)

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 2b

En un primer momento, Patricia puede anticipar y percibir cómo seccionar convenientemente la figura 1 y 2 para mostrar las piezas utilizadas (ind 1.4 e ind 1.5 en *Producción – Posesión de una imagen*) (PEP2b). En cambio, para la figura 3, avaló la observación de Néstor (SP2; (30,31)), identifica y toma las distintas piezas que corresponden, (ind 1.1 en *Producción de una imagen*),

30 Néstor: Es muy complicado.

31 Patricia: ¡no me sale! Bueno ahí está. Seño....mira ya está

O: para la figura 3, sobre la mesa armo las figuras con el tangram componiendo y descomponiendo

(SP2,(30,31)).

De la tabla de diálogo (SP2b, (34,56)) detectamos que la maestra, a través de una intervención de tipo provocativo, pretende como principio de

conservación, que los niños identifiquen las figuras formadas por las mismas piezas, según manifiesta: “*¿En alguna de las tres figuras se usaron las mismas piezas para una de las otras?*” (en línea 49). Patricia, en principio, no reconoce que con idénticas piezas puede formar distintas figuras al componerlas, (ind 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen*) hasta que Mirta, pasa al pizarrón y, a través de interacciones de tipo univocal, domina la situación, afirma y muestra que las figuras 2 y 3 están formadas por las mismas piezas.

Esta intervención de Mirta, aunque de manera no intencional, lleva a Patricia a un folding back efectivo (FB~IE-M) puesto que retrocede en su proceso de comprensión, y por descomposición- composición, revisa las piezas de cada una de las figuras, (ind 2.4 en *Producción –posesión de una imagen*) para luego identificar las piezas formadas por las mismas piezas (ind 2.3 en *Producción – posesión de una imagen*). Si bien ambos indicadores se encuentran dispuestos en el mismo anillo, afirmamos que existe un folding back pues el indicador- 2.4- sirve de sustento para lograr el indicador 2.3.

Mientras tanto, los demás niños intervienen aceptan e intentan interpretar su procedimiento, gestan un ambiente de producción de aprendizaje en cada uno de los niños y, en particular, en Patricia.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
34 Maestra: Muy bien. ¿Se dieron cuenta cómo se fueron formando las figuras?. Vamos a observar las figuras numeradas, por ejemplo, 1, 2, y la 3. En todos los casos ¿usaron las mismas fichas para formarlas? 44 Alumnos.: NO.	Maestra	Propone	Invita a que viertan su opinión	A todo los niños	
45 Maestra: ¿se repitieron las piezas en algunas figuras?	Alumnos	Responden	Explican con palabras lo que desean dar a entender	Maestra	
47 Alumnos: ¿en la 1, la 2, y la 3?	Maestra	Cuestiona	Solicita aclaración sobre lo respondido	A los alumnos	
49 Maestra: En alguna de las tres figuras se usaron las mismas piezas para una de las otras?	Alumnos	Peguntan	Expresan desconocimiento acerca de lo que se preguntan	Maestra	
53 Patricia: Puede ser pero no sé.	Maestra	Responde	Reformula lo enunciado	Los alumnos	
54 Ana: No, porque algunas tienen más y otras menos piezas	Patricia	Responde	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea.	A la maestra	Patricia hasta la intervención de Mirta, no distingue que con idénticas piezas puede construir distintas formas
56 Mirta: en la 2 y la 3 se usaron las mismas piezas. O: a continuación Mirta pasa al pizarrón y muestra cómo para las figuras 2 y 3 se utilizan las mismas cuatro fichas, cuadrado, triángulo chico, mediano y grande	Ana	Responde	Alienta a la compañera que se bloquea	A Patricia	
	Mirta	Reacciona	Acepta parcialmente la idea y la completa.	A la maestra y a todos sus compañeros	
					(SP2 ;(34,56))

Finalmente, Patricia distingue que con idénticas piezas puede construir distintas formas, (ind 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen*) pues cuando la maestra en vista a institucionalizar que ambas figuras tienen igual área, muestra distintas figuras formadas, con la totalidad de las piezas del Tangram, y la niña distingue que todas las figuras tienen igual área. (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*). A pesar de que relaciona el área con la cantidad de piezas según observamos en (SP2: (92, 98)).

O: La maestra muestra distintas figuras realizadas con todas las piezas del Tangram.

92 Maestra: Con las siete piezas podemos realizar todas estas figuras, el barco, el muñeco, todas con las siete piezas. ¿Cómo será el área de cada una de ellas?

98 Patricia: El área de cada una de ella es igual pues se utilizaron la misma cantidad de piezas.

SP2; (92; 98)

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con un indicador en la *Producción de una imagen* – capa B- y con cuatro indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen*- capas B y C- y con una indicador en *Percepción de propiedades* - capa D-.

Del análisis de la tabla de diálogo y las unidades de significado explicitadas construimos el siguiente gráfico de comprensión y dibujamos la trayectoria completa. En particular, de los indicadores 2.3 al 2.4 en *Producción-Posesión de una imagen* la curva se muestra de mayor grosor y zigzagueante a efectos de señalar el folding back analizado anteriormente entre ellos.

De esta forma la curva se desplaza desde *la producción y posesión de una imagen*, hasta *percibir propiedades* –Capa D- de la noción al interactuar con la actividad, logra los indicadores propuestos, excepto el indicador 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen* el cual indicamos sólo algunas veces.

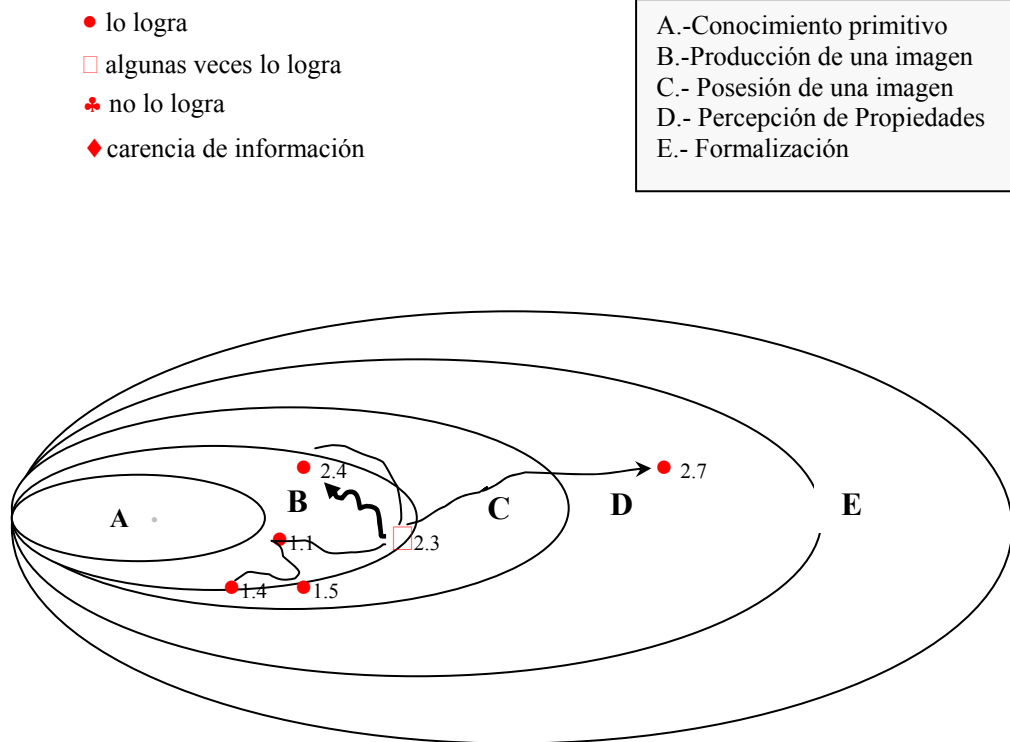
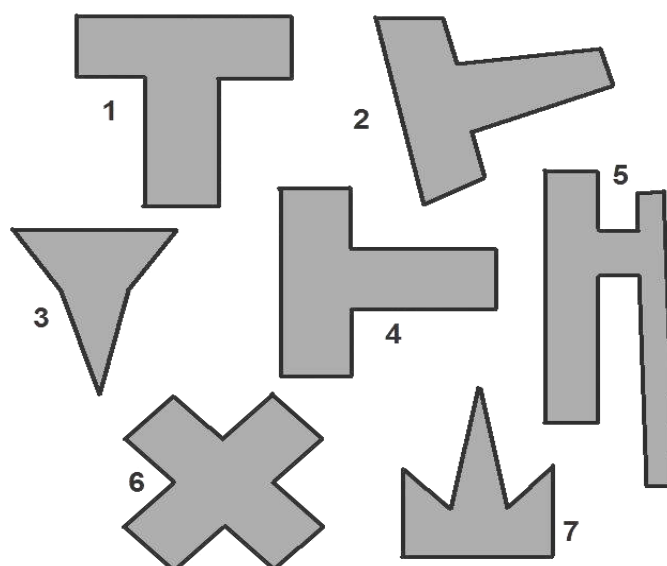


Gráfico de Comprensión -S -de Patricia asociado a la act.2

- 1.1.-Maneja el material mediante manipulación libre
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas.(recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.

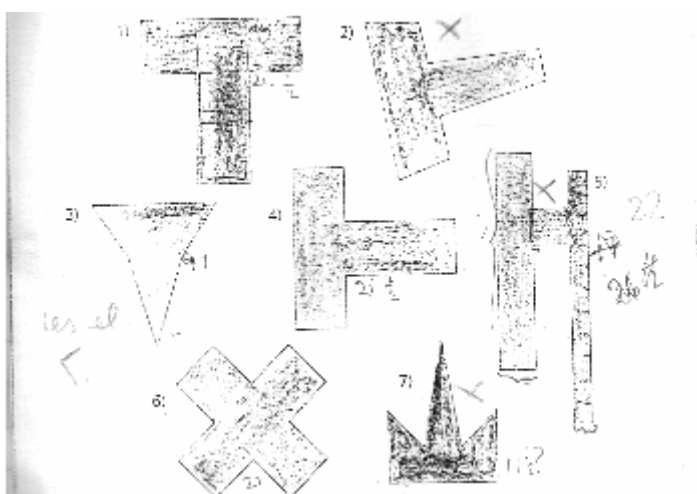
Actividad 3 (SP3):

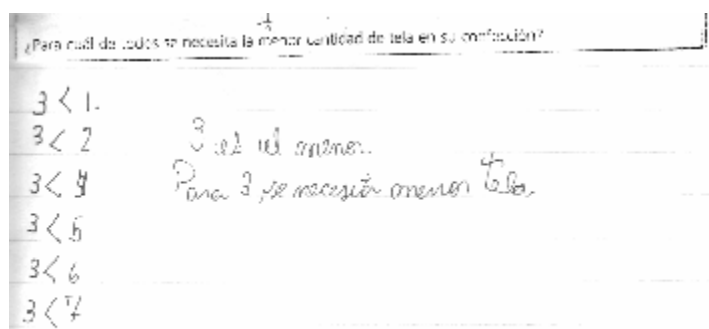
- ✓ *Sobre una hoja blanca se dibujaron los diseños de los escudos para el club, que serán hechos con telas de color ¿para cuál de todos se necesita la menor cantidad de tela?*



A.- Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Patricia, según su producción escrita PEP3, traza en la figura 1 cuatro segmentos, de manera tal que la figura queda dividida en cuatro cuadrados, todos ellos congruentes entre sí. Las figuras 2, 5 y 7 las ha marcado con una cruz y en la figura 3 ha indicado “es el <”. Luego escribe “ $3 < 1$; $3 < 2$; $3 < 4$; $3 < 5$; $3 < 6$, $3 < 7$; 3 es el menor. Para 3 se necesita menos tela”.





B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

3

Patricia comienza a compartir sus ideas con sus compañeras y en Mirta se percibe el deseo de trabajar juntas

Cuando los niños tienen que efectuar comparación de áreas de figuras, la simple estimación visual y la superposición directa resultan insuficientes, pues sólo brindan una estimación que debe ser verificada con la medición real. Si bien, en este problema es necesario comparar entre más de dos superficies, Patricia compara solamente mediante la percepción visual como atributo medible, (ind 2.1 en *Producción de una imagen*) según se observa en la unidad de significado (SP3,(14,35)).

La respuesta coincide con la expresada en el cuestionario sobre ideas previas de la cual este problema formó parte, y en ese caso respondió que pudo identificar, dentro de sus posibilidades de desarrollo, el menor diseño de forma “visual”.

13 Todos la 3

14 Maestra D: ¿Cómo tan rápidamente me dicen que es la 3? ¿Cómo lo hicieron?

O: Patricia identifica ese problema como uno de los que se resolvieron en el cuestionario de ideas previas y comenta a sus compañeros que respondió que era el diseño 3.

17 Patricia: Visualmente

(SP3, (13,17))

Ahora, al abordar nuevamente el problema, Patricia no considera la justificación efectuada por Araceli en la cual relaciona los diseños 3 y 7 de manera directa, por inclusión según la tabla de diálogo (SP3, (18,31)), y se queda pensativa. Mientras tanto la maestra expresa *¿Cómo tan rápidamente me dicen que es la 3? ¿Cómo lo hicieron?* (línea 14) impulsa a las niñas a los conocimientos geométricos que tienen disponibles y que exploren distintas posibilidades, pero los niños acuden a conocimientos que no le permiten arribar a una respuesta.

En este sentido, Patricia considera que puede relacionar los diseños – desde una representación numérica- a través de la longitud de sus lados y la cantidad de éstos. Todos los niños consideran su sugerencia y comienzan a medir. Araceli y Patricia interactúan de manera multivocal; pues intervienen y justifican sus razonamientos.

Sin embargo, cuando la maestra les pregunta acerca de lo que están calculando, Cecilia le responde “el diámetro”, según se expresa en la tabla de diálogo (SP3, (55,69)), mientras que Patricia pone en duda lo realizado por Cecilia, - quien expresa una conjetura errónea- y expresa “El perímetro”. Si bien Patricia ha comprendido cómo hallar el perímetro, ella y todos los niños del grupo consideran que pueden comparar los diseños a través del perímetro.

Es decir, reconoce la noción de perímetro; pero no lo distingue de la noción de área. (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*). De hecho, en el problema 8 del cuestionario acerca de sus ideas previas (IAP8), en el que le solicitaban “*¿Qué puedes decir acerca de la cantidad de aluminio que tiene cada plancha?*”, y en ese momento, respondió que lo podía comparar a través del perímetro.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
18 Araceli: para mí no es la 3, es más grande la 7 pues la 3 y la 7 son distintas y la 3 entra en la 7, por eso me parece más grande la 7. Entre todos iguales no son.	Araceli	Contesta	Aporta ideas o sugerencias a la resolución del problema	A la maestra y sus compañeros	
24 Maestra: Ahora ya va cambiando la idea. ¿Qué podemos hacer ahora desde la geometría para poder justificar la respuesta que damos? ¿Qué métodos podemos usar?	Maestra	Propone	Proporciona una idea	A los niños	
31 Patricia: Tendríamos que medirlo. La longitud de los lados, el diseño 5 tiene más lados que el diseño 3	Patricia	Responde	Propone un procedimiento e invita a que los demás viertan su opinión	A la maestra y sus compañeros	Propone comparar las figuras a través de la medición de los lados
					SP3,(18,31)

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
55 Maestra: ¿Quién justifica su respuesta con un procedimiento que avale lo que ustedes afirman.	Maestra	Pregunta	Solicita que justifiquen su afirmaciones	Cecilia	
59 Cecilia: Podemos hallar los lados y mira este es igual a este. Y al sumar todos los lados estamos hallando lo que pide de la figura.	Cecilia	Responde	Valida el procedimiento empleado	Maestra, a Mirta y a Patricia	
64: Maestra ¿Qué es lo que estamos hallando de la figura?	Maestra	Cuestiona	Cuestionan el resultado	Cecilia	
66 Cecilia: El diámetro.	Cecilia	Responde	Propone un resultado	Maestra	Patricia reconoce la noción de perímetro pero no lo distingue de la noción de área.
67 Mirta: la medida.	Mirta	Reacciona	Niega lo expresado	Cecilia y Mirta	
68 Patricia: El perímetro	Patricia	Reacciona	Niega lo expresado	Mirta	
69 Maestra: Correcto, el perímetro.	Maestra	Responde	Confirma y da la razón	Patricia, Cecilia y Mirta	
Pero en el Tangram acabamos de comparar el área de cada una de las figuras. Cada una de las piezas ocupa un pedacito de papel, y deseamos saber para cual diseño necesitamos la menor porción de tela.					(SP, (55,69))

Recién cuando la maestra, interviene, de manera intencional y explicita, sugiere no dar una respuesta numérica, induce invocativamente a que las niñas acudan a sus conocimientos existentes y decidan cómo relacionar. Esto lleva a Mirta, y Patricia a considerar una representación geométrica para comparar. Mirta compara los diseños 3 y 5, de forma indirecta a través de romper y recomponer, según se expresa en la unidad de significado (SP3, (88,120)).

88. Maestra: No se preocupen por la medida ¿Cuál de los diseños necesita la menor cantidad de tela? No es necesario dar una respuesta numérica.

95 Araceli : El diseño 6 es el menor

96. Mirta: el 3 es menor que el 6

97. Araceli: la 6 es menor, no es mayor.

99. Patricia: lo mismo ocurre con la 1 y la 2.

101. Araceli: la 3 es menor que la 1 y que la 4.

103. Patricia: La 3 es menor o mayor que la 1. La 3 es menor que la 4.

106 Maestra: Ya revise todos los grupos de trabajo y veo que están comparando el diseño 3 y el diseño 5.

O Mirta pasa al pizarrón en donde la maestra dispuso una lamina con el dibujo de cada uno de los diseños. Mirta señala el dibujo 3 y lo relaciona con el dibujo 5.

110. Mirta: Corto esto y lo pongo aquí, es decir relleno lo que falta y luego observo que esta parte sobra, entonces considero que el diseño 5(la H) necesita más tela que el diseño 3.

117 Maestra: Por el dibujo que hiciste, descartas el diseño 5.

120 Mirta: Si

(SP3,(88,120))

Las consideraciones llevan a Patricia, según la (PEP3) y las unidades de significado (SP3, ((88,120); (SP3, (131,143))), a un folding back inducido por la maestra de manera intencional y explicita y promovido por su compañera Mirta de manera no intencional, pero ambos efectivos para Patricia que la llevan a retroceder en su proceso, a comparar de manera directa, por inclusión: “*sólo lo apoyamos*” (ind 2.2 en *Producción de una imagen*) para luego avanzar en ese proceso, y distinguir distintas figuras formadas por idénticas piezas (ind 2.3 en *Producción –Posesión de una imagen*).

131 Maestra: ¿Alguien encontró otro procedimiento? ¿Alguien encontró otra forma de justificar la respuesta?

135 Patricia: Al diseño 3 lo calcamos y el diseño 3 es menor que el diseño 5, pero no lo cortamos, solo lo apoyamos.

139 Maestra: Visualmente ¿no usan tijera?

141 Patricia: Visualmente.

142: Maestra: ¿Qué significa esto?.

143 Patricia: que el diseño 3 es menor. (SP3, (131,143))

Fundamentalmente, la colaboración indirecta con su compañera Mirta, pues al efectuar la comparación entre ambos diseños en voz alta, Patricia pudo monitorear y sacar provecho de los comentarios de su compañera instándola a considerar otra estrategia de comparación.

Asimismo, reconoce diseños equivalentes por descomposición y recomposición (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*) según observamos en su producción escrita (PEP3), pues descompone el escudo 1 de manera conveniente en cuatro baldosas congruentes de forma cuadrangular. Dispone de distinta manera las baldosas (ind 2.3 en *Producción –Posesión de una imagen*).y obtiene los diseños 1, 4 y 6.

A través de las intervenciones provocativas de la maestra, la niña compara dos de los diseños obtenidos (el 1 y el 4) por descomposición y composición (2.4 en *Producción-Posesión de una imagen*) y distingue la invariancia del área en diseños de distinta forma (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*).

Esta observación lleva a la niña a manifestar que ambos diseños resultan por ello, equivalentes, (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*), también reconoce que ambos diseños con el diseño 6, resultan equivalentes (ind 2.10 en *Percepción de propiedades*), según observamos en la unidad de significado (SP3,(145,158)) y la tabla de diálogo (SP3;(169,173)).

Durante esta presentación, interactúa con sus compañeras Mirta y Cecilia de forma univocal, pues resuelve la actividad y sus compañeras asienten y dan sentido a la misma.

145 Maestra: ¿Cuál fue el diseño que más les costo?

147 Ana: El diseño 5.

148 Maestra: ¿Entre el diseño 1 y el diseño 4?

150 Patricia: El diseño 4.

151 Maestra: ¿Necesito la misma tela?

152 Patricia: La misma.

153 Maestra: ¿Pero tienen distinta forma?

154 Patricia: No importa, un cuadrado lo pones del otro lado.

156 Maestra: ¿Cuántos diseños tienen la misma cantidad de tela?

158 Patricia: Los diseños 1, 4 y 6.

.

(SP3,(145,158))

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
169 Maestra: Pero el diseño 6 tiene distinta forma. O Cecilia muestra cómo debe descomponerse la figura para determinar que son equivalentes y Patricia descompone y recompone las piezas necesarias para justificar su procedimiento a Mirta, Araceli y Cecilia.	Maestra Cecilia	Cuestiona Responde	Cuestiona lo realizado Valida el procedimiento.	Al pequeño grupo Maestra a Mirta , Araceli y Patricia	Patricia establece la equivalencia a través de la descomposición de figuras.
173 Patricia si agregas este pedazo así, lo tenés.	Patricia	Responde	Explica con gestos lo que desea dar a entender	Mirta ,Araceli y Cecilia	
					(SP3 (169,173))

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con dos indicadores en la *Producción de una imagen* – Capa B-; con dos indicadores en el anillo *Producción y Posesión de una imagen*—capas B y C- y con tres indicadores en *Percepción de propiedades* - capa D-.

Del análisis de la tabla de diálogo y las unidades de significado explicitadas construimos el siguiente gráfico que denota el proceso de construcción que Patricia logra desplazándose desde *la Producción y posesión de una imagen* hasta *Percibir propiedades* de la noción.

En principio, la comparación de superficies la efectúa desde la percepción visual hasta identificar varias superficies equivalentes por otros métodos de comparación. Asimismo tuvimos en cuenta otro indicador que no consideramos (*3.1.-distinción entre área y perímetro*) pues Patricia en un principio, no establece la diferencia pero el folding back que produce de manera intencional la maestra e indirectamente, la exposición de Mirta, lleva a Patricia a relacionarlos, distinguiendo así, sus diferencias.

El clima y los momentos de discusión que instala la maestra promueven estrategias cognitivas -explicitar, analizar, justificar- y metacognitivas -favorecedoras de la construcción del conocimiento, que llevan a Patricia a construir cada uno de los indicadores propuestos.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- | |
|--|
| A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización |
|--|

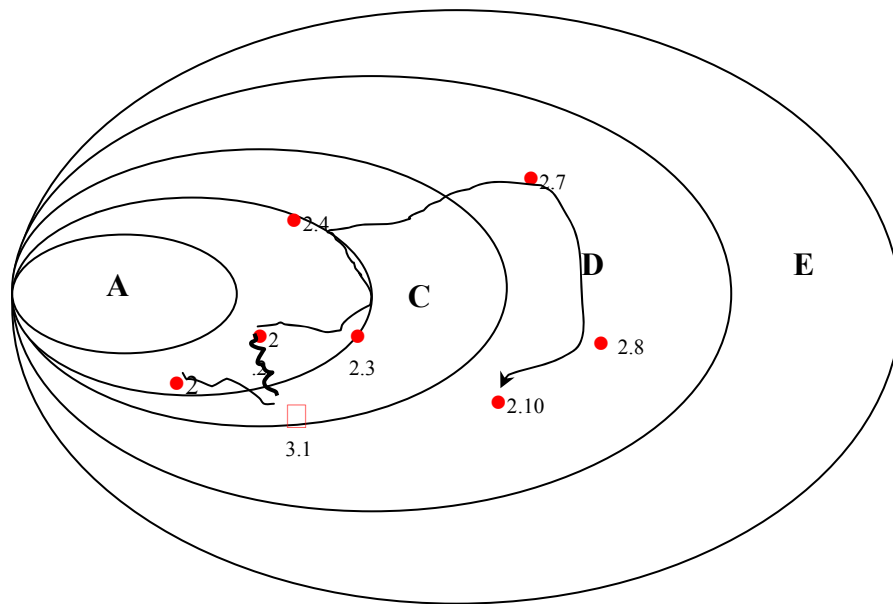
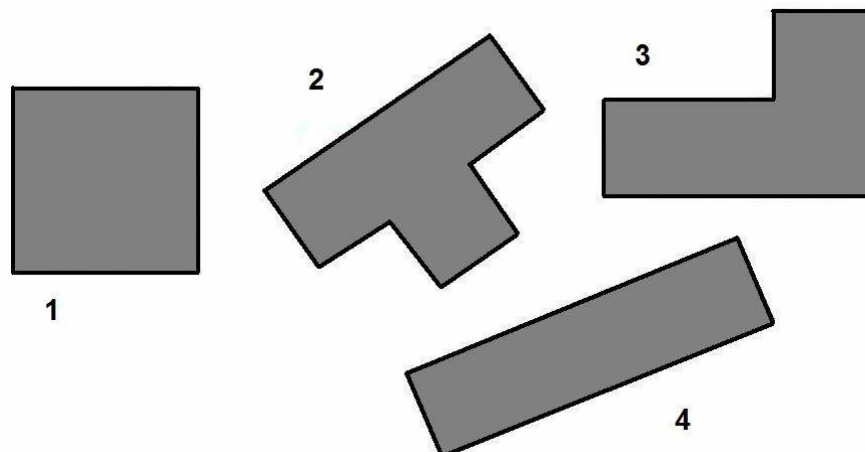


Gráfico de Comprensión -S- de Patricia asociado a la act.3

- 2.1.-Compara superficies por percepción visual.
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 3.1 Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura

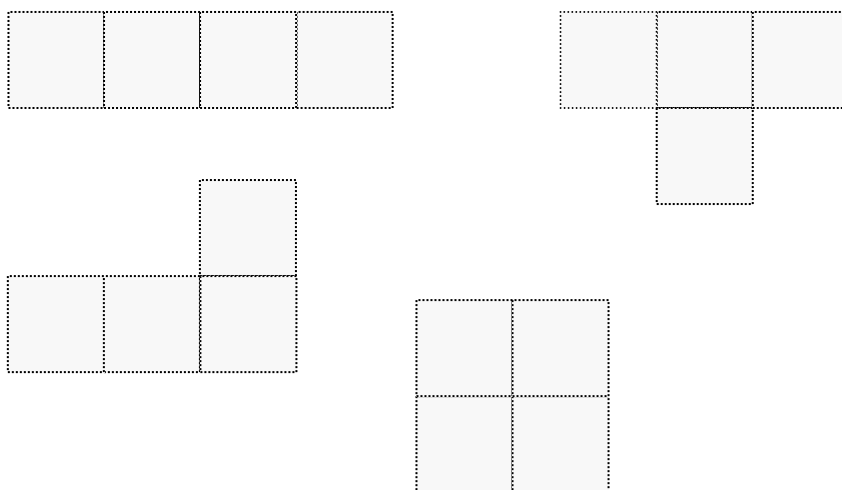
Actividad 4: (SP4)

-¿Cuáles de las siguientes figuras ocupan más papel?



A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Patricia divide cada uno de las figuras en cuatro cuadrados todos congruentes entre sí, según la siguiente distribución:



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

4

Las niñas – Flor y Araceli- consideran que las figuras son todas iguales, según observamos en la tabla de diálogo (SP4, (1,22)) y la maestra les expresa: “Sin embargo, yo iguales no las veo”, induciendo a que acudan a su conocimiento primitivo, de manera intencional y no enfocada, a fin de que distingan distintas posibilidades. En tanto Patricia, clarifica las expresiones de sus compañeras y manifiesta “es que tienen igual área pero son de distinta forma.”. Esta afirmación la niña la realiza pues representa mentalmente cuadrados (ind 1.4 en *Producción –Posesión de una imagen*) unidos ellos, por sus lados (ind 1.2 en *Producción de una imagen*). De esta manera, efectúa el cubrimiento de las superficies con cuadrados congruentes (ind 4.1 en *Producción de una imagen*), lo que le permite realizar, por un lado y desde una representación geométrica, la descomposición en cuadraditos y la recomposición para formar otras figuras(ind 2.3 e ind 2.4 en *Producción –Posesión de una imagen*), todas ellas de igual área según manifiesta: “ En la T cambie los cuadraditos, la subdividí en cuadrados, y si pongo este acá me da lo mismo” (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*); y por otro, desde una representación numérica, que todas las superficies están cubiertas

por “cuatro cuadraditos”(ind 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen* e ind 4.2.-*Posesión de una imagen*). Aspectos que denotan que la niña posee la imagen de la invarianza del área independientemente de la forma de las figuras. (ind 2.10 en *Percepción de propiedades*) En respuesta, la maestra identifica las mismas como equivalentes y le solicita que explique el procedimiento que utilizó.

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con tres indicadores en la *Producción de una imagen* – capa B - con cuatro indicadores en la frontera entre *Producción* y *Posesión de una imagen*- Capas B y C- , con un indicador en *Posesión de una imagen* – Capa C- y con dos indicadores en *Percepción de propiedades* – capa D - .

Del análisis de la tabla de diálogo y la producción escrita construimos el siguiente gráfico que denota el proceso de construcción que Patricia logra, al identificar varias figuras equivalentes -*Producción y posesión de una imagen* - hasta reconocerlas a través de la descomposición – *Percibir las propiedades de las figuras*.

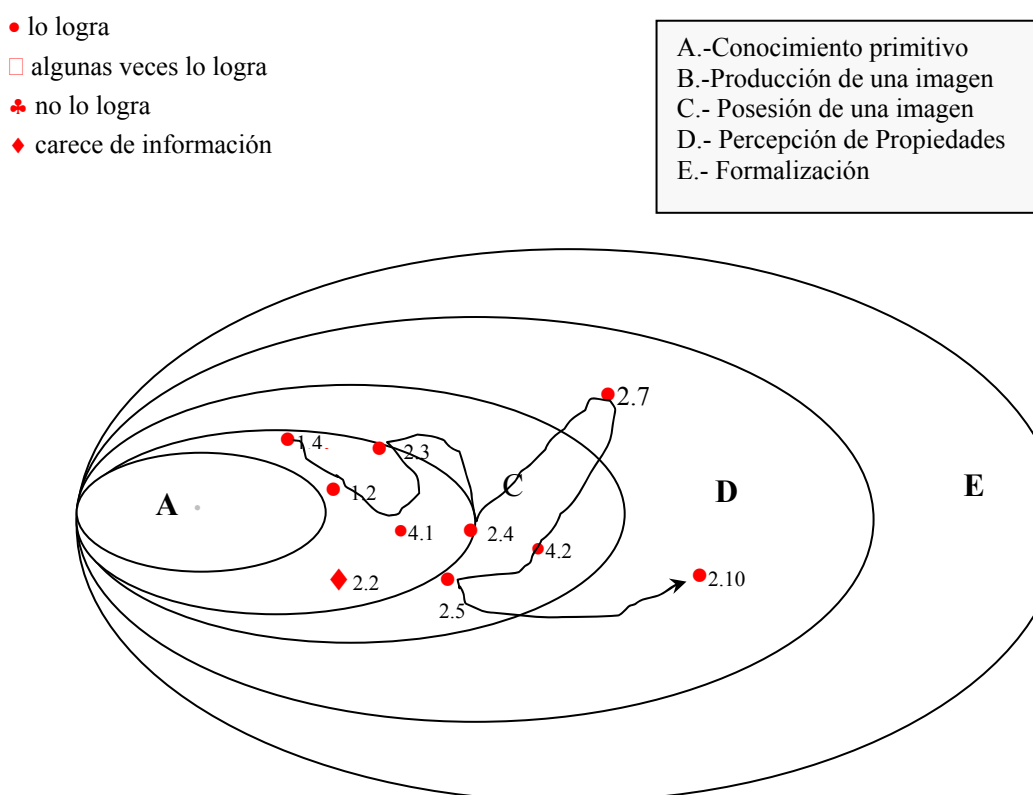
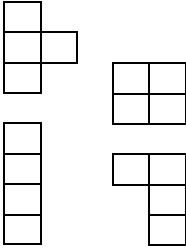


Gráfico de Comprensión de Patricia asociado ala act.4

- 1.2.-Aparea lados.
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 4.1 Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades Empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.

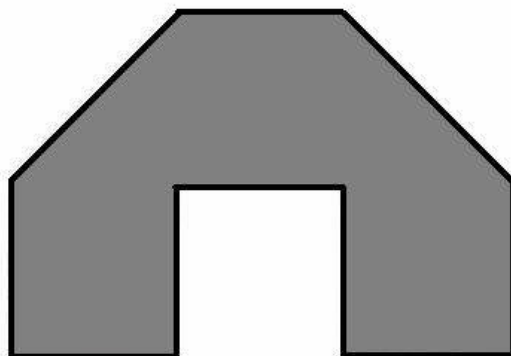
De las consideraciones efectuadas por Patricia en el problema anterior, la claridad manifestada en su producción y en la tabla de diálogo, podemos afirmar que para Patricia la resolución de esta actividad significó reinvertir los conocimientos aprendidos y, por lo tanto, se encuentra dentro de sus posibilidades de desarrollo, aunque podemos observar que los procedimientos que empleó muestran un mayor nivel de conceptualización del concepto.

Asimismo, se puede observar que la interacción manifestada en la resolución del problema es univocal puesto que dominó la situación, a partir de una colaboración indirecta con sus compañeros, pasando al pizarrón y exponiendo su procedimiento.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad
1. ¿Cuál de las siguientes formas ocupa más papel? 3: Cecilia: la 2 y la 3 son iguales. 4: Flor: Las cuatro figuras son iguales. 5: Araceli: Las cuatro figuras son iguales 8 Maestra: Sin embargo, yo iguales no las veo. 10 Patricia: es que tienen igual área pero son de distinta forma. 12. Maestra: Si tienen igual área son figuras equivalentes pero tienen distinta forma. Bien Patricia, que diste esa idea, decíme con que procedimiento determinas que el área es igual. O La docente está junta a la mesa en donde esta ubicada Patricia. 19 Patricia: En la T cambié los cuadraditos, la subdividí en cuadrados, y si pongo este acá me da lo mismo. O: Patricia pasa al pizarrón y realiza los siguientes dibujos  4 cuadraditos	Maestra Cecilia Flor y Araceli Maestra Patricia Maestra Patricia	Pregunta Responde. Responden Cuestiona Responde Pregunta Responde	Invita a que viertan su opinión Expresa en voz alta. Expresan otro resultado a raíz de la respuesta de la compañera Corrige, animándolos a que comprueben el resultado. Explica con palabras lo que desea dar a entender. Confirma dando la razón y solicita un procedimiento Valida los procedimientos expuestos.	Al grupo. A la maestra A la maestra y Cecilia A todos Cecilia, Araceli, Flor y Patricia. La maestra, y a todos los niños	Reconoce figuras de distinta forma e igual área SP4,(1,22)

Actividad 5: (SP5)

a *Encuentra tres figuras que sean equivalentes a la siguiente:*



b *¿Es posible encontrar un rectángulo equivalente a la figura dada?*

Justifica tu respuesta-

A través de la resolución de este problema se pretende que los niños desarrollen la percepción de una figura compleja a través del reconocimiento de figuras simples, aborden el análisis de figuras equivalentes y conceptualicen el área como medida de cubrimiento.

Aspectos que no hemos podido detectar en Patricia pues no concurrió a clase.

Actividad 6 (SP6)

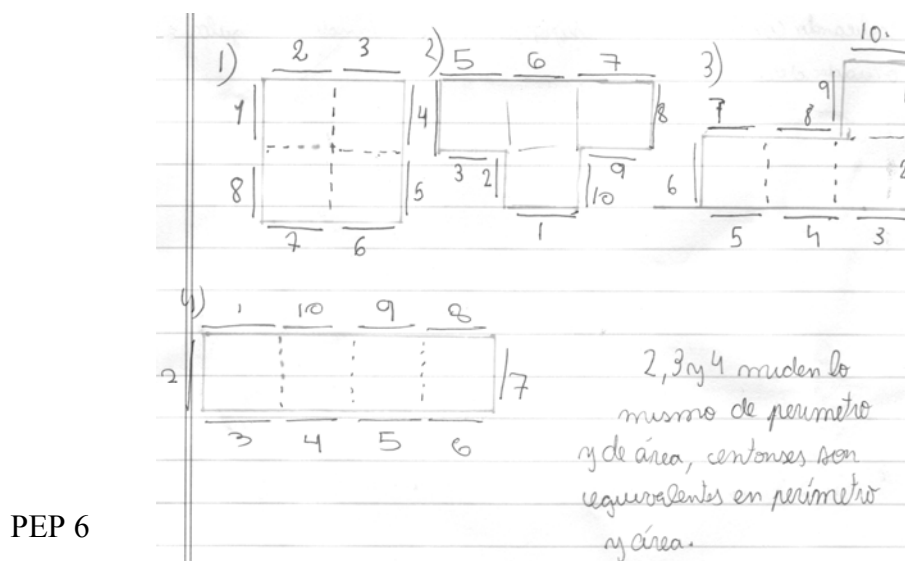
✓ *Intenta bordear las figuras del ítem 4 con un hilo ¿utilizas la misma cantidad de hilo para cada una de ellas?*

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión del grupo'

Patricia señala sobre el contorno de cada figura un segmento, cuya longitud coincide con la longitud del lado de cada uno de los cuadrados en que dividió la figura. A cada uno le asigna un número de forma consecutiva y en sentido horario. En el extremo inferior derecho escribe:

“2,3 y 4 miden lo mismo de perímetro y de área, entonces son equivalentes

en *perímetro y área*".



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

6

Las niñas comienzan a bordear los contornos de las figuras con el hilo. Patricia calcula la longitud del lado utilizando la regla de manera que cuando dice 3 se refiere a 3cm, y expresa el perímetro como 12 cuando en realidad es 12 cm (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*) pues el centímetro funciona como unidad de medida de longitud. (SP6;(8,74))

En la tabla de dialogo (SP6;(8,74)) observamos el ascendiente como autoridad matemática, que tiene Patricia entre las niñas con las que compartía la mesa. Murray (1992, citado por Cobb, 1995), y Kordaki (1998), afirman que esta actitud produce un desequilibrio en el grupo, pues sus compañeros se sienten obligados a adaptarse a la actividad del otro para ser efectivo en el mismo. Sin embargo, en este caso, no se ha observado este aspecto, pues cada una de las niñas se involucró en el problema al monitorear lo que iban realizando.

La maestra pregunta si usan la misma cantidad de hilo y las niñas manifiestan su opinión. Por ejemplo, Cecilia propone bordear una figura con el hilo y verificar con las restantes y Mirta, considera que todas tienen igual perímetro porque son equivalentes. En cambio Patricia reconoce que figuras equivalentes pueden tener distinto perímetro (ind 3.2 en *Percepción de propiedades*), anticipa por lo tanto, la conveniencia de usar un hilo para cada una

de las figuras. Para ello, toma un hilo para cada una de las figuras y afirma que hay figuras de distinto perímetro pues el hilo con el cual bordeo la figura 1 es de distinta longitud que los otros hilos (ind 3.2 en *Percepción de propiedades*).

Unidad de significado	Interlocutor (E.)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R.)	Idea unidad
O: La docente les solicita que busquen en su carpeta el problema 4. Algunos niños comienzan a responderla pregunta del problema. Y la docente les solicita a Patricia que lea el problema.	Maestra	Propone	Solicita lea el enunciado	Patricia	
8. Mirta: Si, son equivalentes	Mirta	Responde.	Aporta ideas a la resolución del problema	A la maestra y los niños.	
O Patricia: intenta bordear las figuras del problema 4 con un hilo	Patricia	Resuelve	Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento.		
13. Maestra: ¿utilizas la misma cantidad de hilo, para cada una de ellas?	Maestra	Pregunta.	Solicita que justifique sus afirmaciones.	A los niños	
O: todos los niños de la mesa comienzan a mirar a Patricia y ella comienza a bordear el cuadrado, Mirta por su parte, también.	Patricia	Reacciona	Explica con palabras lo que desea dar a entender.	Cecilia, Araceli Flor y Mirta	Halla el perímetro por cubrimiento de la longitud del lado, que funciona como unidad
16 Patricia: supongamos que el hilo sean las líneas. Sumas esto más esto y te da cuanto mide esto. (Patricia va marcando los lados de la figura). Midamos con regla $3 \times 4 = 12$. Miden 12	Araceli	Contesta	Aporta ideas para la resolución del problema.	Cecilia, Flor y Mirta	
O: Araceli toma las medidas de un solo lado del cuadrado y lo superpone tres veces sobre el hilo para obtener la medida del contorno del cuadrado. Mirta y Patricia, sobre su papel, miden y marcan con lapicera sobre el hilo, luego toman la otra punta del hilo y comienzan a bordear la figura (2)	Mirta y Patricia	Contestan	Resuelven de manera conjunta	Al grupo	
39 Maestra: ¿Usan la misma cantidad de hilo?	Maestra	Cuestiona	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A la totalidad de los niños	

41 Mirta: Si, por que son equivalentes. <i>O: Patricia muestra cómo midió el cuadrado.</i> 45 Mirta: A mi me da igual, seño. 47 Patricia: Yo no creo realmente que esto con el hilo te dé. En realidad no vale la pena....no da lo mismo porque tienen la misma área pero tienen distinto perímetro. 54 Cecilia: tenemos que averiguar si para todos usamos la misma cantidad. Cortamos el hilo y probemos con los otros. <i>O: Patricia se niega a cortar el hilo e insiste en usar la regla</i> 59 Flor: Yo hago una para cada figura <i>O: Patricia compara los hilos entre sí.</i> 62 Cecilia: pero para que si.... 64 Mirta: El cuadrado es más simple....no tienen tantas entraditas. Pues bordear con el hilo te lleva más hilo. Cuando hago este cuadrado, no sabía..... ¿hay que hacer un hilo para cada uno? 74 Patricia: No me da ninguno igual. <i>(compara las longitudes de los hilos)</i> Esta es “más larga”, o sea mediana y esta es más corta. Lo tenemos que medir con la regla.	Mirta Patricia Mirta Patricia Cecilia Patricia Flor Mirta Patricia	Responde Responde Replica Responde Contesta Replica Replica Responde Responde	Fundamenta su respuesta Explica a través de gráficos lo que desea dar a entender Acepta la idea Cuestiona lo afirmado por su compañera y regula la situación Propone otro procedimiento y los invita a los otros Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento Acepta la sugerencia parcialmente Muestra apertura a los procedimientos formulados por un compañero y solicita aclaración Acepta lo que afirma sus compañeras pero resignifica el recurso utilizado	A la maestra A la maestra A la maestra Maestra, Cecilia, Patricia Mirta Mirta y Patricia Cecilia Cecilia y Patricia Mirta y Cecilia	Reconoce que figuras equivalentes no tienen necesariamente el mismo perímetro. Compara a través de unidades convencionales
					SP6(8,74)

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad
<i>O: La docente les solicita que busquen en su carpeta el problema 4. Algunos niños comienzan a responderla pregunta del problema. Y la docente les solicita a Patricia que lea el problema.</i> 8. Mirta: Si, son equivalentes	Maestra	Propone	Solicita lea el enunciado	Patricia	
O Patricia: intenta bordear las figuras del problema 4 con un hilo	Mirta	Responde.	Aporta ideas a la resolución del problema	A la maestra y los niños.	
13. Maestra: ¿utilizas la misma cantidad de hilo, para cada una de ellas? <i>O: todos los niños de la mesa comienzan a mirar a Patricia y ella comienza a bordear el cuadrado. Mirta por su parte, también.</i>	Patricia	Resuelve	Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento.		
16 Patricia: supongamos que el hilo sean las líneas. Sumas esto más esto y te da cuanto mide esto. (Patricia va marcando los lados de la figura). Midamos con regla 3x4=12. Miden 12 <i>O: Araceli toma las medidas de un solo lado del cuadrado y lo superpone tres veces sobre el hilo para obtener la medida del contorno del cuadrado. Mirta y Patricia, sobre su papel, miden y marcan con lapicera sobre el hilo, luego toman la otra punta del hilo y comienzan a bordear la figura (2)</i>	Maestra	Pregunta.	Solicita que justifiquen sus afirmaciones.	A los niños	
39 Maestra: ¿Usan la misma cantidad de hilo?.	Patricia	Reacciona	Explica con palabras lo que desea dar a entender.	Cecilia, Araceli Flor y Mirta	Halla el perímetro por cubrimiento de la longitud del lado, que funciona como unidad
	Araceli	Contesta	Aporta ideas para la resolución del problema.	Cecilia, Flor y Mirta	
	Mirta y Patricia	Contestan	Resuelven de manera conjunta	Al grupo	
	Maestra	Cuestiona	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A la totalidad de los niños	

41 Mirta: Si, por que son equivalentes. <i>O: Patricia muestra cómo midió el cuadrado.</i> 45 Mirta: A mi me da igual, seño. 47 Patricia: Yo no creo realmente que esto con el hilo te dé. En realidad no vale la pena...no da lo mismo porque tienen la misma área pero tienen distinto perímetro. 54 Cecilia: tenemos que averiguar si para todos usamos la misma cantidad. Cortamos el hilo y probemos con los otros. <i>O: Patricia se niega a cortar el hilo e insiste en usar la regla</i> 59 Flor: Yo hago una para cada figura <i>O: Patricia compara los hilos entre sí.</i> 62 Cecilia: pero para que si... 64 Mirta: El cuadrado es más simple....no tienen tantas entraditas. Pues bordear con el hilo te lleva más hilo. Cuando hago este cuadrado, no sabía.... ¿hay que hacer un hilo para cada uno? 74 Patricia: No me da ninguno igual. <i>(compara las longitudes de los hilos)</i> Esta es “más larga”, o sea mediana y esta es más corta. Lo tenemos que medir con la regla.	Mirta Patricia Mirta Patricia Cecilia Patricia Flor Mirta Patricia	Responde Responde Replica Responde Contesta Replica Replica Responde Responde	Fundamenta su respuesta Explica a través de gráficos lo que desea dar a entender Acepta la idea Cuestiona lo afirmado por su compañera y regula la situación Propone otro procedimiento y los invita a los otros Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento Acepta la sugerencia parcialmente Muestra apertura a los procedimientos formulados por un compañero y solicita aclaración Acepta lo que afirma sus compañeras pero resignifica el recurso utilizado	A la maestra A la maestra A la maestra Maestra , Cecilia, Patricia Mirta Mirta y Patricia Cecilia Cecilia y Patricia Mirta y Cecilia	Reconoce que figuras equivalentes no tienen necesariamente el mismo perímetro. Compara a través de unidades convencionales
					SP6(8,74)

La maestra interviene y de manera invocativa pretende que analicen el perímetro del cuadrado, pero Cecilia manifiesta que el perímetro de tres figuras es igual y una diferente. Esta apreciación de la compañera y lo solicitado por la maestra llevan a Patricia a reconocer que *“Lo que pasa es que había medido mal”* pudiendo rectificar su resultado y arribar al correcto, según se expresa en (SP6 (82,114)).

En particular, con respecto al perímetro del cuadrado, en la tabla de diálogo (SP6 (82,114)), se observa que Cecilia se queda pensativa y expresa: *“hay cuadrados adentro”*. Patricia la escucha, la manifestación de su compañera, provoca un folding back no intencional (FB~I - C), que lleva a Patricia a retroceder en el proceso de comprensión, subdividir el cuadrado en cuatro cuadrados congruentes y expresar *“con cuatro cuadrados adentro, ...hay lados en esta figura que no se cuentan y en las otras sí”*.(línea 114) (ind 1.2 en *Producción de una imagen*), en vista a ello, avanza para identificar el cuadrado como la figura de menor perímetro(ind 3.2 en *Percepción de propiedades*). Así, reflexiona, reconstruye y completa lo expresado por Cecilia.

Unidad de significado	Interlocutor (E.)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R.)	Idea unidad
82. Maestra: ¿Cuál es el hilo de la figura 4?	Maestra	Pregunta	Anima a los alumnos a que comprueben si el resultado cumple con las condiciones del problema	A los niños	
84. Patricia: el más largo.			Según sus resultados	Maestra	
88: Cecilia: a mi me dieron, tres iguales y uno distinto.	Patricia Cecilia	Responde Reacciona	Niega lo que expresa la compañera	A maestra y Patricia	
91 Flor: a mi también	Flor	Responde	Confirma dando la razón.	Cecilia	
92: Maestra: ¿a que figura corresponde distinto?	Maestra	Pregunta	Solicita aclaración sobre el resultado	Cecilia y Flor	
94: Cecilia y Flor: al cuadrado	Cecilia y Flor	Responden	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Cecilia y Flor	
96 Patricia: Ahora si seño, ya lo tengo , tres iguales y uno distinto	Patricia	Responde	Muestra apertura a los resultados de sus compañeras y puede continuar con si procedimiento	Maestra	
99: Maestra: ¿Qué pasó?.	Maestra	Pregunta	Solicita información sobre lo realizado	Patricia	
101 Patricia: Lo que paso es que había medido mal.	Patricia	Responde	Reconoce su equivocación y admite lo realizado por sus compañeras	Maestra	
103 Maestra: ¿Por qué corresponde al cuadrado?	Maestra	Pregunta	Solicita aclaración	Araceli, Flor, Mirta	
106 Cecilia: Por que a la vista en este dibujo hay cuadrados adentro.	Cecilia	Responde	Aporta ideas para validar su producción.	Cecilia, Patricia, Flor.	
109 Araceli: Por que aquí en esta figura tiene mas cuadrados dentro y estos (por la	Araceli	Reacciona	Cuestiona lo realizado por otro compañero	Maestra	

otra figura) están más estirados. 0: Patricia subdivide el cuadrado en cuatro cuadrados congruentes y explica “ con cuatro cuadrados adentro” 114 Patricia: Hay lados en esta figura que no se cuentan y en las otras sí	Patricia	Responde	Explica con palabras y gráficos lo que desea dar a entender	Mirta, Cecilia, Flor y Araceli.	Conjetura acerca del criterio que prevalece para obtener la figura de menor perímetro
					(SP6(88,114))

Observamos, interacciones de tipo multivocal y colaboración indirecta entre Cecilia, Mirta y Patricia, pues intervienen de manera conjunta y cada una monitoreando lo realizado por la otra. Los argumentos que vierten, las lleva a ordenar las figuras equivalentes según su perímetro (ind 3.6 en *Percepción de propiedades*), pero para ello, utilizan como unidad, el lado del cuadrado, según expresa Patricia:

124: Patricia: cuando mido el perímetro guiándome por los lados del cuadrado son equivalentes pues miden 10.

..... (SP6 en 124)

Durante la puesta en común, Patricia valida el procedimiento realizado con sus compañeras de forma coloquial y gráfica. Registra la cantidades en función de la unidad de medida ordena las piezas según el perímetro (P6 (146; 179)) y (PEP6), (ind 3.6 en *Percepción de propiedades*) y concluye que varias figuras equivalentes pueden ser algunas isoperimétricas y otras, no (SP6;(186; 205)). Finaliza su exposición al manifestar con el término “nosotras”, la participación conjunta con sus compañeras en la resolución del problema

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad
O: Cecilia, Patricia y Mirta solicitan pasar.	Cecilia, Patricia y Mirta	Responden	Solicitan pasar al pizarrón	Maestra	
146 Maestra: ¿Qué paso cuando mediste?					
148 Ana: La 1, la 3 y la 4 son equivalentes en área y perímetro, en cambio la 2 es equivalente en área pero no en perímetro.	Maestra Ana	Pregunta Responde	Aclaración sobre lo realizado Explica con palabras lo que desea dar a entender	Ana Maestra y los niños	
154 Patricia: A mi no me dio así. Yo con cada hilo medí cada uno y me dio que la 2,3 y 4 me dieron lo mismo y la 1 distinto. Nosotras descubrimos que el área era igual midiendo con cuadrados	Patricia	Reacciona	Cuestiona los resultados del compañero.	Ana	
O: Patricia pasa al frente y dibuja Un cuadrado subdividido en cuatro cuadrados congruentes, por fuera traza en paralelo segmentos congruentes a los lados del cuadrado y enumera cada uno de ellos: Escribe "Área=4" Perímetro 8 — "					
166: Patricia en área son 4 cuadrados y en perímetro es 8 lados de cuadrado. Con el resto de las figuras, tenemos, por ejemplo: El perímetro es 10 lados del cuadrado y en área 4 cuadrados.	Patricia	Responde	Interpreta de manera colaborativamente lo realizado con sus compañeras	Maestra y los niños	

<i>O: La figura que resulta de considerar tres cuadrados ubicados de manera consecutiva, en fila y el cuarto cuadrado consecutivamente con el cuadrado del medio. También en esta figura, de manera externa dibuja en paralelo segmentos congruentes a los lados del cuadrado y enumera cada uno de ellos.</i>					Seleccionan unidades convenientes para calcular el área y el perímetro por cubrimiento. Registran en función de la cantidad y la unidad de medida.
179 Patricia: La figura 3 tiene perímetro 10 lados de cuadrados y área 4 cuadrados. Y la figura 4 tiene de perímetro 12 lados de cuadrado y de área 4 cuadraditos.					(SP6 (146,179))

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad
186 Maestra: ¿Todos lo realizaron así?	Maestra	Pregunta	Solicita aclaración sobre lo realizado	A los niños	
187 Todos: la 3 y la 4 tienen la misma cantidad de lados.	Todos los niños	Responden	Explican con palabras lo que desean dar a entender	A la maestra	
189 Maestra: ¿Y cómo es posible, si tienen distinta forma?	Maestra	Cuestiona	Cuestiona si el resultado tiene sentido en función de las condiciones del problema.	A todos los niños	
191 Patricia: Ah!! Pero no importa, estas tienen además de equivalente el área, el perímetro y la otra no.	Patricia	Responde	Explica lo que desea dar a entender con palabras	A la maestra	
195 Maestra: Se dan cuenta porque la figura 1 nos llevo menos hilo, pues por la forma que están ubicados solamente contamos dos lados, los otros están dentro, en cambio en las otras figuras contamos más de dos lados. Ana: ¿qué decís?	Maestra	Propone	Reformula lo expresado por la niña con una expresión más formal	A los niños	Reconoce que las figuras equivalentes pueden o no, ser isoperimétricas.
205:Ana: El perímetro sería el contorno y lo que pasa es lo que yo dije ayer. Que depende de cómo acomodes los cuadrados te va a dar más o menos perímetro. No por que tengan la misma área, tienen que tener igual perímetro. Depende de cómo acomodes los cuadrados.	Ana	Responde	Acepta y resignifica lo expresado por su compañera y la maestra.	A la maestra y los niños	
					SP6:(186,205))

En general, las intervenciones de la maestra hicieron reflexionar a los niños y los instó a argumentar sus afirmaciones. De esta forma, observamos que las intervenciones vertidas por los niños en las tablas de diálogo analizadas indican complementariedad en sus conclusiones.

Por ejemplo, las formuladas por Ana corroborando lo que ha manifestado Patricia cuando expresa “El perímetro sería el contorno y lo que pasa es lo que dije ayer, que depende de cómo acomodes los cuadrados te va a dar más o menos perímetro. No porque tengan la misma área, tienen que tener igual perímetro. Depende de cómo acomodes los cuadrados” (SP6;(186,205)).

La evolución de las ideas manifiestas de manera interactiva por los niños durante el desarrollo del problema lleva a la maestra a proponer el siguiente problema

Problema 6bis: (SP6bis) “¿Se puede formar una figura de igual área pero de 16 lados de cuadrado de perímetro?”

La docente, a través de la pregunta formulada, expresa un tratamiento numérico y Patricia no percibió que al aparear, por ejemplo, por el vértice como sugirió Flor, se puede obtener una figura equivalente de perímetro mayor (SP6bis, (217,227)).

217: Maestra ¿podemos armar una figura con 16 lados de cuadrados de perímetro?

218 Patricia: No.

220 Flor: Serían cuadrados sueltos porque para que sean figuras tendrían que estar unidos.

224 Ana: Si vos unís por la arista a un cuadrado y otro cuadrado dejan de tener dos lados y ya es uno.

Patricia se retira a solicitud de su madre que la vino a buscar.

(SP6bis, (217,227))

Patricia se retira, en consecuencia, no pudo efectuar el folding back al que la llevaba su compañera de manera intencional - cuando la maestra la invita a compartir su solución- y que le hubiera permitido analizar la composición

adecuada. Es decir, apareando lados y/o vértices obtenía una figura equivalente pero de perímetro mayor, dando respuesta a lo solicitado.

En principio, la demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se situaba: con un indicador en la capa: *Posesión de una imagen*-Capa C - y con dos indicadores en *Percepción de Propiedades* – Capa D. Las apreciaciones las niñas durante el desarrollo de la actividad y la inserción de este último problema, la tabla de diálogo y la producción escrita, observamos otros indicadores significativos además del propuesto- el ind.1.2 en *Producción de una imagen* e ind.3.5- ubicado en el anillo *Percepción de propiedades* - *Formalización* –Capa D y Capa E-, que modifican el esbozo de la trayectoria en el gráfico de comprensión a realizar. Asimismo dibujamos la trayectoria completa en la cual observamos en trazo de mayor grosor y zigzagüeante, el folding back que se produce en la niña del indicador 3.2.- *Percepción de propiedades* al indicador 1.2 en *Producción de una imagen*. Aspectos que denotan el proceso de construcción que Patricia va logrando desplazándose desde la producción de la imagen- noción de perímetro y de área- hasta percibir algunas de las propiedades de las mismas.

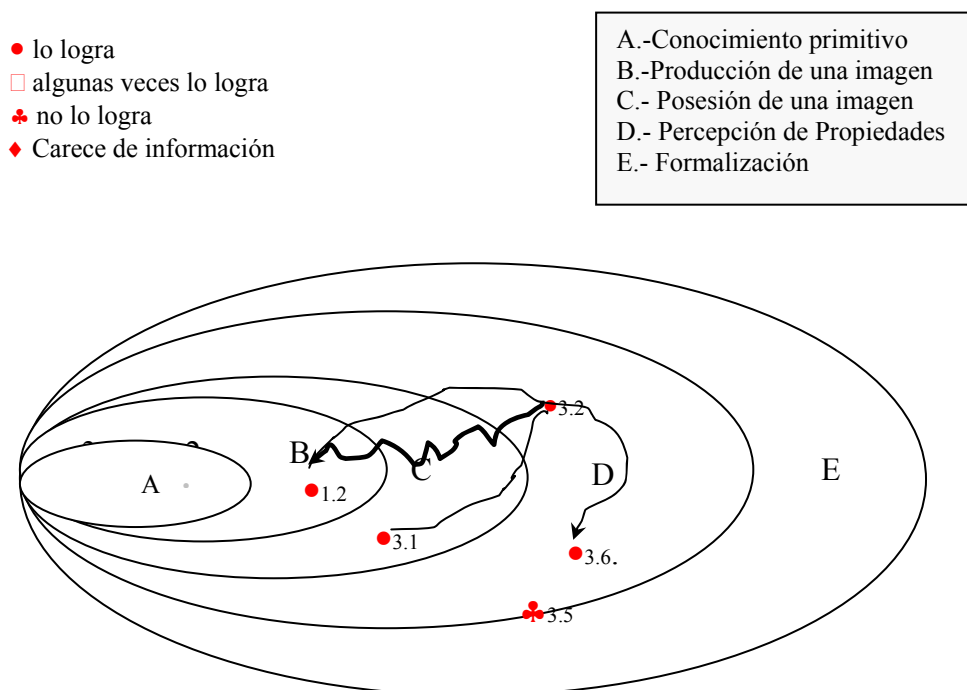


Gráfico de comprensión de Patricia asociado a la act. 6.

1.2.- Aparea lados

3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura

- 3.2.- Reconoce que a mayor /igual /menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/menor perímetro de la misma.
 3.5.- Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.
 3.6.- Ordena según el perímetro, figuras equivalentes.

Al considerar las figuras de la actividad 7 se propone dar respuesta a la pregunta que formuló Ana:

Introducción a la Actividad 7 (SP7)

“¿puede dos figuras tener igual perímetro y distinta área?”

Patricia, en un primer momento, no percibió que figuras isoperimétricas no necesariamente son equivalentes, en cambio Ana no acuerda con Patricia e invita a proponer alguna figura que cumpla con la condición solicitada. Lamentablemente Patricia, al retirarse del aula a solicitud de su madre, no puede intervenir en la propuesta.

234 Patricia: No.

235 Ana: Y si lo intentamos con alguna figura. Me parece que si.

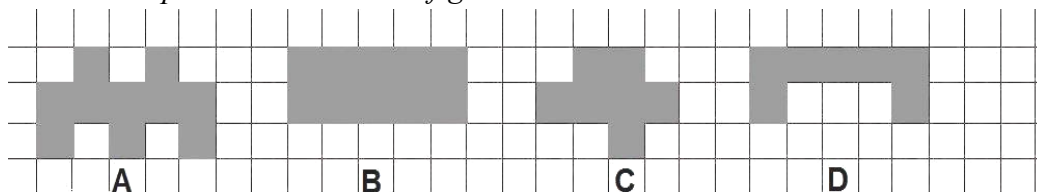
238 Ana: Creo que si, puede haber.

Problema 7: (SP7)

Considera las siguientes figuras A,B,C y D

✓ ¿Cuáles de ellas tienen igual perímetro?

✓ Compara el área de esas figuras



A través de la resolución de esta actividad se pretende que los niños reconozcan la conveniencia de considerar una unidad de medida y de detectar figuras isoperimétricas, pero Patricia no lo resuelve pues, se retiró del aula a solicitud de su madre.

Actividad 8: (SP8)

Consigna:

✓ Remarca las piezas de tu Tangram en la carpeta, y responde, explicando como lo resuelves, superponiendo, contando triángulos, contando cuadrados.

8.1.-Tomando como unidad el área de la pieza (triángulo chico) ¿cuál es el área de las demás piezas?

8.2.- ¿Qué piezas son equivalentes?

8.3.- ¿Cuáles son iguales? (este ítem la maestra lo omite?)

8.4.- ¿Qué relación existe entre las áreas del cuadrado y el triángulo grande?

8.5.- ¿Y entre el paralelogramo y el triángulo grande?

8.6.- ¿Y entre el triángulo mediano y el grande?

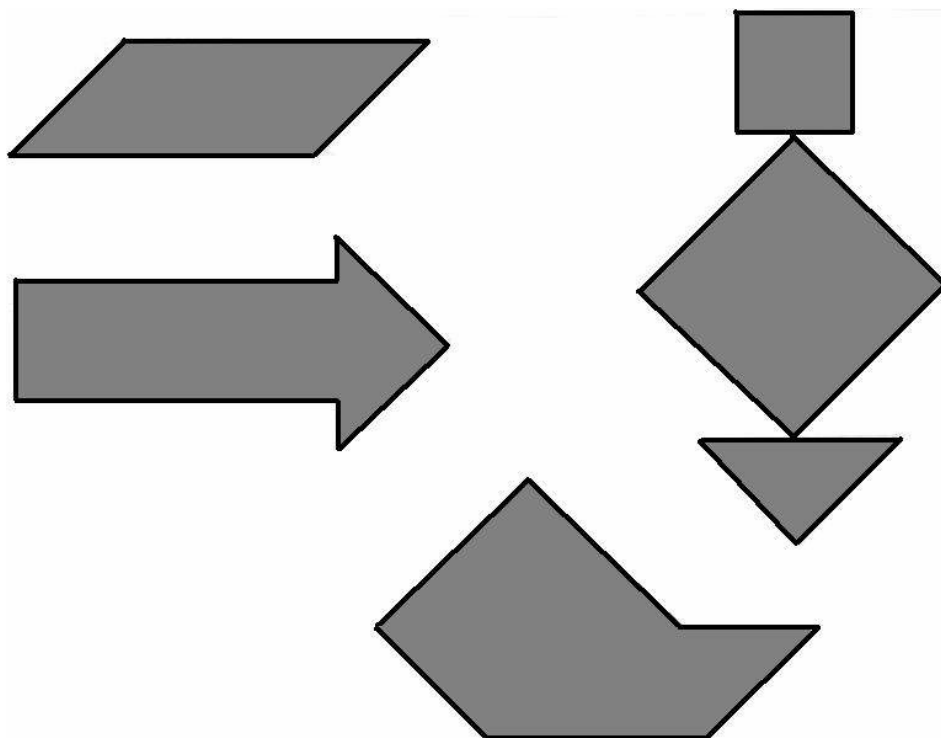
8.7.-Tomando como unidad de área del triángulo chico. ¿Cuál es el área del cuadrado que se puede formar con las siete piezas? ¿Y tomando como unidad el triángulo grande? ¿Y tomando como unidad el triángulo mediano?

El inciso 8.7, la maestra cambia la consigna por:

Arma con las siete piezas un cuadrado. ¿Cuántos triángulos chicos necesitan para formar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo grande, ¿cuántos necesito para armar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo mediano, ¿cuántos necesito para formar el cuadrado del Tangram?

8.8.-Tomando como unidad el área del triángulo chico, construye con tu Tangram una figura que tenga 4 unidades, otra que tenga 8 unidades y otra que tenga 10 unidades, remarcándolas en tu carpeta de trabajo

8.9.-Ahora construye las siguientes figuras de manera tal que el paralelogramo tenga 6 unidades; la flecha, 8 unidades; el barco, 10 unidades y el muñeco 12 unidades. Dibuja cada una de las figuras obtenidas en tu carpeta.



8.10.- *¿Puedes transformar, moviendo una sola pieza, el paralelogramo en un rectángulo? Las dos piezas, ¿tienen la misma área?*

Patricia comienza y lee: “*Remarca las piezas de tu Tangram en la carpeta y responde, explicando cómo lo resuelves, superponiendo, contando triángulos, contando cuadrados.*”

8.1.- *Tomando como unidad el área de la pieza (triángulo chico), ¿cuál es el área de las demás piezas?”.*

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo’

Para ello, Patricia separa en cuatro incisos la respuesta y dibuja:

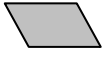
a) El triángulo mediano y traza, en línea punteada, la mediana/altura del triángulo. Al lado escribe “2 triángulos chicos” “2  =  ”

b) El triángulo grande, considera los puntos medios de cada lado y une los puntos, quedando determinados cuatro triángulos (dos apareados por un vértice, otro encajado entre ellos y el cuarto se aparea un lado con el triángulo encajado); al lado escribe “4 triángulos chicos” y “4  = ”

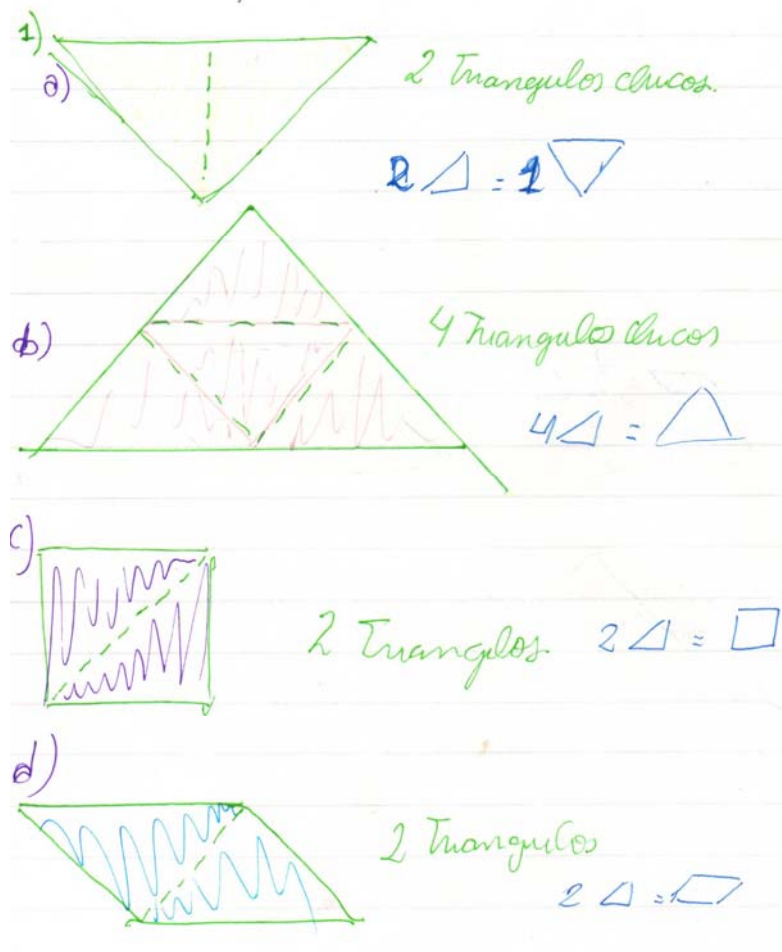
c) El cuadrado, la diagonal en línea punteada. Al lado escribe “2 triángulos”

“2  = .

d) El paralelogramo, traza en línea punteada, la diagonal menor. Al lado escribe

“2 triángulos” y “2  = .

. PEP8.1)



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente al ítem 1 de la actividad 8

Patricia comprende rápidamente la consigna, manipula las piezas (ind 1.1 en *Producción de una imagen*) y pavimenta la superficie a medir y recuenta la unidad empleada (ind 4.1.- en *Producción de una imagen*). Explica y brinda ejemplos, especialmente a Mirta, quien explica su procedimiento y en función de sus aportes, Patricia anticipa la división a realizar, (1.4.- en *Producción – Posesión de una imagen*) permitiéndole resignificar lo expresado por su compañera.

En función de ello, y a los efectos de poder comparar las piezas, expresa el área en función del triángulo chico como unidad de medida de cubrimiento (2,5 en *Producción – Posesión de una imagen*). Mientras tanto, Cecilia solicita información para poder continuar, pero Patricia la desestima, y ante la solicitud de la maestra de identificar piezas equivalente, ella reconoce piezas formadas por las mismas fichas (ind 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen*) y manifiesta que éstas son equivalentes (ind 2.7 en percepción de propiedades). Propiedad que le permite a la niña anticipar el área de dos o más piezas de distinta forma (ind 2.8 e ind 2.10 en *Percepción de propiedades*) e invita a las demás integrantes del grupo a que viertan su opinión al respecto, según se observa en la tabla de diálogo (SP8.1; 8.2;(28,79).

De esta manera, se observa cómo las interpretaciones compartidas de Mirta y Cecilia con Patricia constituyen una colaboración directa entre ellas, y especialmente las vertidas por Patricia, involucran las intenciones de sus compañeras.

De la producción escrita de Patricia (PEP8.1) se observa que efectúa y dibuja correctamente, el cubrimiento con el triángulo chico sobre las restantes piezas. Distinguiendo las piezas equivalentes entre dos o más superficies de distinta forma (Ind 2.8 e ind 2.10 de *Percepción de propiedades*), según la cantidad de triángulos implicados en el cubrimiento.

Así manifestamos que Patricia pudo expresar el área en función del triángulo chico como unidad de medida de cubrimiento (2,5 en *Producción – Posesión de una imagen*) y distinguir las piezas equivalentes, demostrando que estos conceptos estaban dentro de su zona de posibilidad de desarrollo.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad
O: Cuando la docente comienza a explicar, Cecilia y Mirta toman la fotocopia. Mirta no presta atención, sigue jugando con el Tangram y mira a Patricia que le explica la consigna.	Mirta	Pregunta	Solicita información para comprender la estrategia de solución	Patricia	Pavimentación de la superficie a medir y recuento de la unidad empleada
28 Patricia: ¿Que tenés que hacer? Superponer y decir acá hay dos triángulos distintos, acá hay tres.....y así. O: Patricia comienza a dibujar en su carpeta (los triángulos chicos dispuestos de manera que queda el triángulo mediano	Patricia	Responde	Clarifica aspectos relevantes a su compañera.	Mirta	
39 Patricia: Yo lo hago con regla pues sino me sale torcido. O: Mirta dibuja el triángulo grande y cuatro triángulos chicos incluidos en él..	Patricia	Contesta	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Mirta y el grupo	
48 Mirta: si lo pones así, te va dando cuantos entran.... cuatro triángulos. O: Patricia lo dibuja.	Mirta	Responde	Propone un procedimiento para la resolución del problema	Patricia y al grupo	Patricia divide la superficie a medir en función de la unidad acordada
52 Mirta: En el triángulo grande entran 4 triángulos chicos y en el más chico va a entrar 1 pues es la unidad. O: Patricia dibuja un cuadrado y sin probar con el triángulo del Tangram lo divide en dos triángulos con una regla. C continúa dibujando el paralelogramo y lo divide en dos triángulos.	Patricia	Contesta	Acepta la idea propuesta	Mirta	
60: Patricia: hay dos triángulos. Cecilia dibuja primero todas las figuras.	Mirta	Responde	Resuelve en voz alta	A grupo	
65 Cecilia: Ahora no entiendo como pones	Patricia	Responde	Reformula de manera colaborativa lo realizado con la compañera y la completa	Mirta	Identifica que las figuras equivalentes
	Cecilia	Responde	Cuestiona lo realizado por la	Mirta	

esto.					
68 Patricia: Si, yo ya lo hice con este (triángulo grande) ahora ¿es necesario que lo haga con este por que yo ya sé que son equivalentes?	Patricia	Responde	compañera Propone una procedimiento para la resolución y e invita a que los demás viertan su opinión Ignora la intervención de su compañera	Mirta	tienen igual área
74 Cecilia: ¡Ay! No anotes que me pones nerviosa.	Cecilia	Reacciona		Patricia	Patricia identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
O: La docente le formula, entonces, la pregunta correspondiente al segundo inciso					
76 Maestra: Ya mediste cada uno ¿Tenés piezas que sean equivalentes? (8.2)	Maestra	Propone	Lee el enunciado	A todos los niños	
79 Patricia ¿En área? SI. El triángulo mediano (a), el cuadrado (c) y el paralelogramo (d)	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	La maestra y su grupo	
					(SP8.1;8.2 (28,79))

8.2. ¿Qué piezas son equivalentes?.

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente al ítem 2 de la actividad 8

Como Patricia ya finaliza el segundo inciso y sus compañeros, muy entusiasmados, continúan trabajando (SP8;(90,128)), la docente le propone *analizar el perímetro de esas piezas equivalentes*. Para ello Patricia intenta resolver sola la consigna y compara el perímetro de las figuras a través de un tratamiento no estándar (de cantidad) y utiliza nuevamente el hilo, según lo que se aprecia en la tabla de diálogo, arribando al resultado correcto.

No obstante cuando se refiere a equivalencia lo relaciona con el perímetro y al intentar defender el resultado ante sus compañeros, no distingue la diferencia entre área y perímetro (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*)

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
O: La maestra le formula, ahora a Patricia una pregunta, que no es solicitada en el problema, mientras tanto sus compañeros continúan con la tarea, muy entusiasmados.	Maestra	Propone	Invita a que vierta su opinión	Patricia	
90 Maestra: ¿Y en perímetro?.	Patricia	Responde	Expresa desconocimiento a lo que se le pregunta	Maestra	
91 Patricia: ¡Ay! No sé...voy a usar el hilo..					
O: Cecilia superpone el triángulo chiquito sobre el triángulo grande y cuenta.	Cecilia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Al grupo	
96 Cecilia: Este triángulo grande es igual a 4 triángulos chiquitos.					
O: Mirta recién comienza a dibujar cada pieza y Cecilia compara cuantos triángulos chiquitos incluyen					
110. Cecilia: El cuadrado es equivalente al paralelogramo y también al triángulo. Por que hay 2 triángulos chiquitos en cada uno.	Cecilia	Responde	Reformula de manera colaborativa lo realizado con otros: Expresa claramente el resultado a los que han arribado con su compañera	Al grupo	
115 Mirta: Superponiéndolos.	Mirta	Reacciona	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Cecilia	
116 Cecilia: uno arriba del otro.	Cecilia	Pregunta	Acepta parcialmente la idea y la completa	Mirta	
117 Cecilia: ¿Vos sabes por donde voy?					
O: Patricia está midiendo el perímetro.					
119 Patricia: No son equivalentes.	Patricia	Responde	Resuelve sola	Maestra	Patricia aunque se refiere a esta equivalencia comparando el perímetro
122 Flor: ¿Equivalentes en área o en perímetro?	Flor y Cecilia	Preguntan	Solicita aclaración para comprender la respuesta de la compañera	Patricia	
124 Cecilia: Patricia ¿Vos también estas con las equivalentes?					

126 Patricia: Acá ¿cuáles son? ¿Igual en área o en perímetro?	Patricia Maestra	Reacciona Responde	Solicita aclaración comprender la respuesta Proporciona una moción	A la maestra, a Flor y Cecilia Patricia	Patricia distingue la diferencia entre área y perímetro
128 Maestra. En perímetro.					(SP8,(90,128))

8.3.- “¿Cuáles son iguales?”

La maestra omite la resolución de este inciso.

8.4.- “¿Qué relación existe entre las áreas del cuadrado y el triángulo grande?”

A.-Descripción de las producciones de los incisos 8.4, 8.5 y 8.6.-

Patricia dibuja el triángulo grande ubicando la hipotenusa (base) en horizontal y traza dos segmentos cuyos extremos son el punto medio de cada uno de los lados; el otro extremo es el punto medio de la hipotenusa o base. Queda así el cuadrado incluido en el triángulo grande.

Fuera escribe “ = $\frac{1}{2}$  ”

8.5.- “¿Y entre el paralelogramo del triángulo grande”.

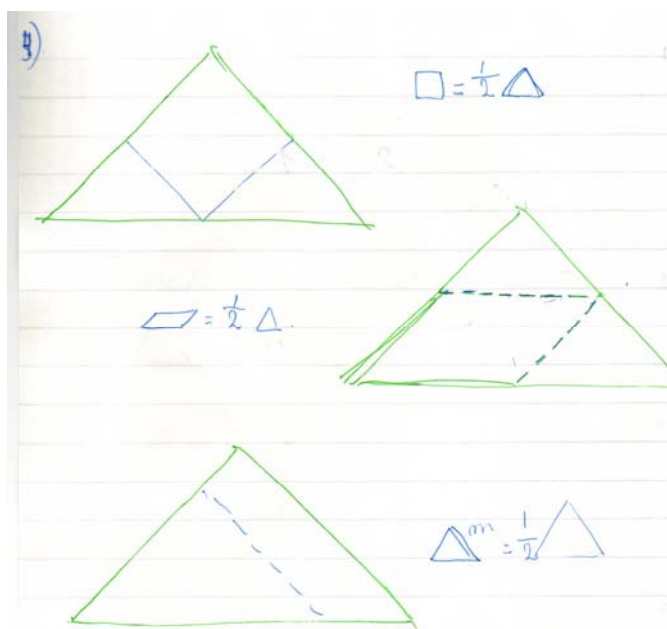
Patricia dibuja un triángulo grande y traza dos segmentos, en línea punteada, uno de los extremos es el punto medio de uno de los catetos y la hipotenusa y el otro extremo es el punto medio del otro cateto.

Fuera escribe  = $\frac{1}{2}$ 

PEP 8.4

PEP 8.5

PEP 8.6



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a los ítems 4, 5 y 6 de la actividad 8

En función de lo expresado por Cecilia, Patricia, para comparar las piezas, apela a una parte de entero, en este caso el triángulo chico- como unidad- para calcular otra. (ind 4.2. en *Posesión de una imagen*) (SP8.5;(191,242)), la (PEP8.4) y (PEP 8.5) El folding back que provoca la maestra, a través de una interacción invocativa, intencional y no focalizada (FBI~F-Ma), cuando solicita que “*lo midan en fracción*” (línea 199) lleva a las niñas a rever y recuperar sus conocimientos previos sobre fracciones, más precisamente, entre las partes de un entero.

Así, Patricia retrocede en su proceso de comprensión, relaciona las superficies, a través de la comparación de las mismas, por composición - descomposición (ind 2.4 –en *Producción –Posesión de una imagen*), y avanza a efecto de establecer la relación entre el triángulo grande y el paralelogramo en función de una fracción (2.11 en *Percepción de propiedades*), según expresa: “*El paralelogramo es la mitad o ($\frac{1}{2}$) del triangulo grande o el triangulo grande es el doble del paralelogramo*” (línea 238).

Unidad de significado	Interlocutor (E.)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R.)	Idea Unidad
<i>O. la maestra se dirige a toda la clase con el objeto de responder el siguiente inciso</i>	Maestra	Propone	Invita a que viertan su opinión	Al grupo	
191 Maestra: <i>¿Qué relación existe entre el área del cuadrado y el triángulo grande? (8.4)</i>	Cecilia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A la maestra y al grupo	
194: Cecilia: el cuadrado es $\frac{1}{2}$ del triángulo grande por que el triángulo grande tiene 4 triángulitos y el cuadrado tiene dos.	Maestra	Pregunta	Solicita aclaración sobre los realizados	Al grupo	
199 Maestra: <i>¿Cómo lo podemos medir en fracción?</i>	Patricia	Responde	Acepta la idea de Cecilia y la completa	Maestra y al grupo	Patricia en función de lo expresado por Cecilia pudo establecer la relación a través de una fracción.
201 Patricia: como $\frac{1}{2}$.	Maestra	Pregunta	Invita a que viertan su opinión	Al grupo	
202 Maestra: ¿Qué pasó con el triángulo grande con respecto al cuadrado?	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Maestra y al grupo	
205 Patricia: es el doble.	Maestra	Propone	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Al grupo	
206. Maestra: Bien, es el doble del cuadrado. ¿Cómo demostraron que el cuadrado es la mitad del triángulo grande?.	Cecilia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A la maestra	
211 Cecilia: La mitad.	Patricia	Responde	Acepta lo expresado por Cecilia	A la maestra	
212 Patricia: $\frac{1}{2}$.					
O: Mirta ha dibujado todas las figuras pero no presta atención. Patricia pasa al frente y dibuja el triángulo con el cuadrado incluido en él.	Patricia	Responde	Valida los procedimientos expuestos.	A la maestra y la totalidad del grupo	Patricia relaciona las superficies a través de la comparación de las mismas, por inclusión, composición y descomposición.
215 Patricia: Haces así y si a estos dos triángulos los unis, formas otros cuadrado entonces es la mitad: Sino lo pones así: y ves que son la mitad.	Maestra	Cuestiona	Solicita aclaración sobre lo realizado.	Patricia	
223 Maestra: <i>¿Cuántas piezas estas usando?</i>	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Maestra y al grupo	
225: Patricia: tres...un cuadrado y dos triángulos.					

227 Maestra: <i>¿Qué relación hay entre el paralelogramo y el triángulo grande?</i> (8.5) O Patricia quiere explicar sin considerar que el alumno que paso al frente ha hecho lo mismo.	Maestra	Propone	Invita a que viertan su opinión	Al grupo	
238 Patricia: El paralelogramo es la mitad o ($\frac{1}{2}$) del triángulo grande o el triángulo grande es el doble del paralelogramo.	Patricia	Responde	Ignora la intervención de un compañero y lleva a delante su procedimiento	Al grupo	
					(SP8.4;8.5,(191,242))

8.6.- ¿Y entre el triángulo mediano y el grande?

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente al ítem 6 de la actividad 8

En los ítem anteriores Patricia relaciona el área de una parte de una superficie y el total a través de una fracción, pero ahora al solicitar establecer la relación entre dos figuras de igual forma y semejantes, la niña no lo percibe.

Desde una representación geométrica (inclusión. romper y rehacer) (SP8.6, (243, 275)), pretende establecer la relación entre los triángulos por inclusión (PEP8.6)

Este procedimiento (la ubicación del triángulo sobre el otro) se presenta como un obstáculo que no le permite establecer la relación entre los mismos. Sin embargo, la manifestación de Cecilia: *“Si lo superpongo así, se puede volver a superponer el triángulo en lo que queda”* (línea 251), provoca un folding back no intencional (FB~I-C) que lleva a Patricia, a retroceder en su proceso de comprensión, descomponer el triángulo mediano en dos y armar el cuadrado. (ind 2.3 en *Producción –Posesión de una imagen*) y avanzar en este proceso para relacionar las piezas solicitadas, como en el inciso anterior.

Es decir, reconoce que figuras equivalentes guardan igual relación con otra superficie (ind 2.11 en *Percepción de propiedades*).

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
243 Maestra: <i>¿Qué pasa entre el triángulo mediano y el grande? (8.6)</i>	Maestra	Pregunta	Invita a que viertan su opinión	Al grupo	
247 Patricia: A mí acá no me dio.	Patricia	Responde	Solicita aclaración para comprender el enunciado	A la maestra	
252 Cecilia: Lo superpongo así y se puede volver a superponer el triángulo en lo que me quedo.	Cecilia	Responde	Alienta para continuar con la estrategia que intenta implementar	Patricia	
256 Patricia: Si, si lo cortas y lo pones así. Porque si lo pones así y te dio la mitad de la otra forma también debe ser así. Si lo cortas te va a dar la mitad.	Patricia	Contesta	Acepta lo expresado por su compañera y lo completa	Cecilia	
263 Maestra: La forma que me permite volver a superponer tan fácilmente.	Maestra	Responde	Anima a que comprueben si su resultado cumple con las condiciones iniciales del problema.	Cecilia y Patricia	
266 Patricia: pero entra.	Patricia	Reacciona	Reformula de manera colaborativa lo realizado con otros	Maestra	
267 Maestra: Tienen igual área. ¿Qué parte ocupa del triángulo grande?	Maestra	Pregunta	Invita a que viertan su opinión	A Patricia y Cecilia	Patricia reconoce que figuras equivalentes guardan igual relación con otra superficie
270 Cecilia: La mitad.	Cecilia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender.	Al pequeño grupo la maestra	
271 Maestra Al final nos está dando lo mismo entre el cuadrado y el paralelogramo.	Maestra	Cuestiona	Anima a la niña a que compruebe si el resultado cumple con las condiciones del problema.	Cecilia	
274 Patricia: porque son equivalentes en área.	Patricia	Responde	Acepta la idea de su compañera y la completa	A la maestra y al grupo	
					(SP8 .6,(243,275))

Recién esboza una solución relacional numérica, cuando la docente indica y explicita un tratamiento numérico según se puede observar en la unidad (SP8.6, (294,303))

294 Maestra: Es que cada una de las figuras equivalentes es la mitad del triángulo mayor. Si la mayor ocupa 4 y la otra ocupa 2, numéricamente, ¿Nos podemos dar cuenta que relación hay entre 4 y 2?

303 Patricia. Que dos es la mitad de cuatro.

(SP 8 6(294,303))

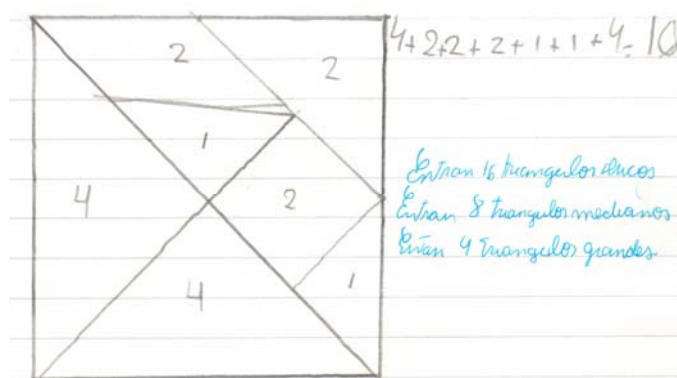
Al comenzar la siguiente clase se retoma el problema y la maestra solicita se enuncien los resultados de cada uno de los ítems desarrollados. Para ello, Patricia enuncia todas y cada una de las respuestas de forma completa demostrando claridad en los resultados abordados, pues reafirma la vinculación entre la parte y el todo a través de la fracción(ind 2.11 en *Percepción de propiedades*) y establece para comparar, la conveniencia de una unidad común de medida, a todas ellas, reafirmando los procedimientos implementados. (ind 4.4 en *Percepción de propiedades*).

8.7.-Arma con las siete piezas un cuadrado. ¿Cuántos triángulos chicos necesitan para formar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo grande, ¿cuántos necesito para armar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo mediano, ¿cuántos necesito para formar el cuadrado del Tangram?

A.-Descripción de la producción escrita

Previamente, cubre cada una de las siete piezas en función de cada una de las piezas que considera como unidad de medida. Recién después de este tratamiento, se propone responder las preguntas. Patricia dibuja el cuadrado y lo cubre con las piezas del Tangram: Sobre cada una de las piezas escribe, por ejemplo, sobre cada uno de los triángulos grandes, un 4, sobre el paralelogramo, un 2, sobre el cuadrado, también un 2, sobre cada uno de los triángulos chicos, un 1, y sobre el triángulo mediano, un 2.

Al costado escribe “ $4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 4 = 16$ ” y “*Entran 16 triángulos chicos. Entran 8 triángulos medianos. Entran 4 triángulos grandes*”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente al ítem 7 de la actividad 8

Patricia puede expresar el área del cuadrado del Tangram en función del triángulo chico, como unidad. (ind 4.1 en *Producción de una imagen*) Si bien, no necesita recubrir en esta instancia cada pieza del Tangram con dicha unidad, acude a constataciones empíricas cuando valida ante sus compañeros, el resultado obtenido, (ind 1.1 en *Producción de una imagen*) según PEP8.7 y la tabla de diálogo (SP8.7, (378,423)).

Unidad de Significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
378 Maestra: ¿Cuántos triángulos chicos necesitan para formar el cuadrado grande (8.7) O: La maestra la ayuda y pega sobre el pizarrón figuras de goma Eva más grandes. Con esta sugerencia, Patricia resuelve sin dificultad y Mirta es la segunda en finalizar. En tantos los otros chicos hacen una cajita.	Maestra	Propone	Invita a que viertan su opinión	Al grupo total	Divide la superficie a medir y recuenta el número de la unidad empleada.
388 Patricia: Tienen área 16 triángulos chicos. Para sacar el área hago lado vertical por lado horizontal.	Patricia	Responde	Valida los procedimientos expuestos	A la maestra y al grupo	
392 Maestra: Es decir Patricia toma el triángulo chico como unidad. ¿Hace falta armar el cuadrado grande para sacar el área?	Maestra	Cuestiona	Solicita otro procedimiento alternativo	Al grupo	
397 Patricia: No. Nos hiciste trabajar de gusto.	Patricia	Responde	Acepta parcialmente la idea	Maestra	
399 Maestra: Si les doy 16 triángulos chicos ¿Pueden armar el cuadrado grande del Tangram?	Maestra	Pregunta	Reformula la pregunta.	Al grupo	
403 Patricia: Si, porque reemplaza las otras figuras por los triángulos chicos. O: A continuación lo resuelven en la carpeta. Arman un cuadrado grande, apoyando las figuras en la carpeta.	Patricia	Responde	A la sugerencia y la completa.	Maestra y el grupo	
409 Maestra: Tomamos como unidad el triángulo chico. Vamos a comprobar si el resultado es cierto.	Maestra	Propone	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Al grupo total	

<i>O Patricia pasa al frente, va apoyando el triángulo chico y todos cuentan</i> 420. Maestra: ¿Es necesario armar el cuadrado grande? 422 Patricia: No. Por que contamos cada figura. O: Y todos cuentan: Triángulos grande=4 chicos. Triángulo mediano=2chicos; etc. 426 Maestra ¿Por qué armamos el cuadrado?	Patricia Maestra Patricia	Responde Cuestiona Contesta	Explica con gestos lo que desea dar a entender Invita a que viertan su opinión Expresa claramente el resultado a los que han arribado dos o más niños	A la maestra y al grupo A Patricia y al grupo Maestra	Patricia aunque establece la relación entre las diferentes piezas, acude a la constatación empírica
418 Patricia: para darnos cuenta cuantos triángulos chicos entran en el cuadrado del Tangram. 431: Maestra: Veamos entran: $4 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2$ en total 16 triángulos chicos	Maestra Patricia Maestra	Cuestiona Reacciona Propone	Discute si el resultado tiene sentido en función de las condiciones del problema Reformula colaborativamente lo realizado con otros. Sintetiza y explicita los resultados arribados por los niños.	Patricia y el grupo Maestra Al grupo	(SP8.7(378,423))

De igual forma puede establecer la relación en función del triángulo grande y el mediano, respectivamente, según su producción escrita (PEP8.7) y la unidad (SP8.7, (434, 444)). Por consiguiente, ella reconoce la unidad y expresa el área en función de las distintas unidades (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*).

434. Maestra: Tomando como unidad el triángulo grande ¿cuántos necesito para armar el cuadrado? (8.7)

438: Patricia 4 grandes.

530 Maestra.: Tomado el triángulo mediano. ¿Cuántos entran en el cuadrado del Tangram? ¿Entraron 10?

439 Flor: Entran 8.

444 Patricia: 1 triángulo grande son 2 medianos y el Tangram esta dividido en 2 triángulos grandes. Si son 2 grandes, entonces son 4 medianos.

(SP8.7,

(434,444))

También logra establecer la relación de proporcionalidad inversa que existe entre la unidad seleccionada y el área de la figura. (ind 4.5 en *Formalización*)

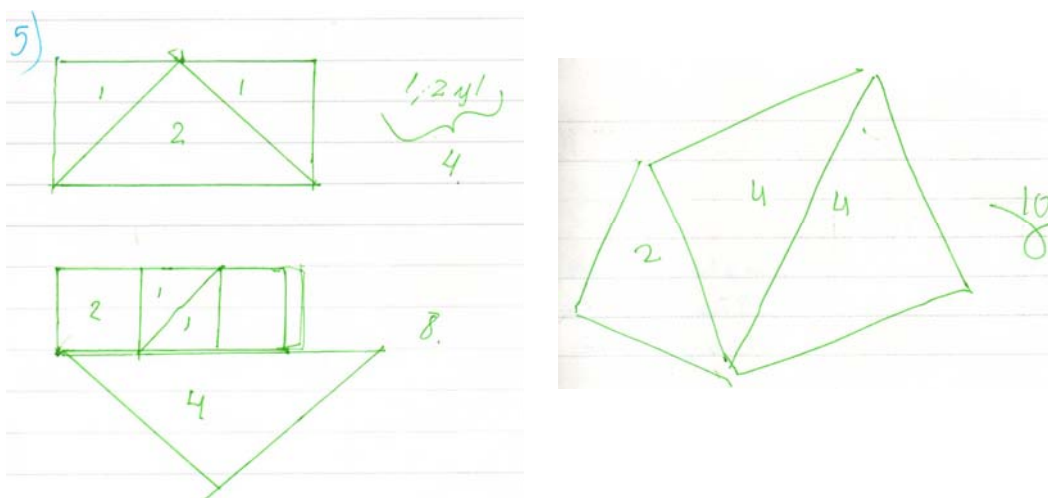
Retomando lo expresado por Patricia en la tabla de diálogo (SP8.7, (378,423)), “*para sacar el área hago lado vertical por lado horizontal*”, y asumiendo que el proceso que se va construyendo no es lineal, es importante explicitar que de acuerdo a la producción escrita, no es posible inferir que dicha explicación tenga sentido para ella. Si relacionamos la longitud del lado en función de la hipotenusa del triángulo chico, la misma es 2. Nos anticipamos a manifestar que lo ha dicho porque “*le han manifestado*” que el área del cuadrado se obtiene multiplicando el lado vertical y el lado horizontal.

8.8.- Tomando como unidad el triángulo chico, construye con tu Tangram una figura que tenga de área 4 unidades, otra 8 unidades y otra 10 unidades, remarcándolas en tu carpeta de trabajo.

A.-Descripción de la producción escrita

La niña dibuja un rectángulo de 4 unidades de área con el triángulo mediano y los dos triángulos chicos y sobre cada una de las piezas coloca 2, 1 y 1 respectivamente. Además dibuja una figura de 8 unidades de área con el triángulo

grande, el cuadrado y dos triángulos chicos y a cada uno de ellos asigna 4, 2, 1 y 1 respectivamente. Asimismo, dibuja un cuadrado, pero no le asigna ningún número. Por último, dibuja una figura formada por tres piezas, dos triángulos grandes y un triángulo mediano, y sobre ellas escribe 4, 4 y 2 respectivamente, según (PEP8.8).



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente al ítem 8 de la actividad 8

En principio, Patricia confunde que “tenga de área cuatro unidades” con que “tenga 4 piezas”, según se observa en (SP8.8;(511,517))

511. Patricia: No puedo hacerlo.

512. Maestra: ¿Por qué?

513. Patricia: no tengo 8 piezas.

514. Cecilia: y 10 tampoco.

515. Patricia: ¡Ah! 4 de área

517. Patricia: de 4 piezas.

(SP8.8, (511,517))

Sin embargo, de lo que manifiesta en la unidad de significado (SP8;(540,544)) y de sus producciones se puede inferir que lo solicitado en este inciso en particular, lleva a la niña a retroceder en el proceso de comprensión, del indicador 4.5 en *Formalización* al indicador 2.6 en *Producción-Posesión de una imagen*, a armar figuras de un área determinada utilizando una unidad

conveniente, sin que ello sea un folding back sino el propio proceso de resolución.

540 Maestra: ¿De qué área es?

541. O. Cecilia no contesto.

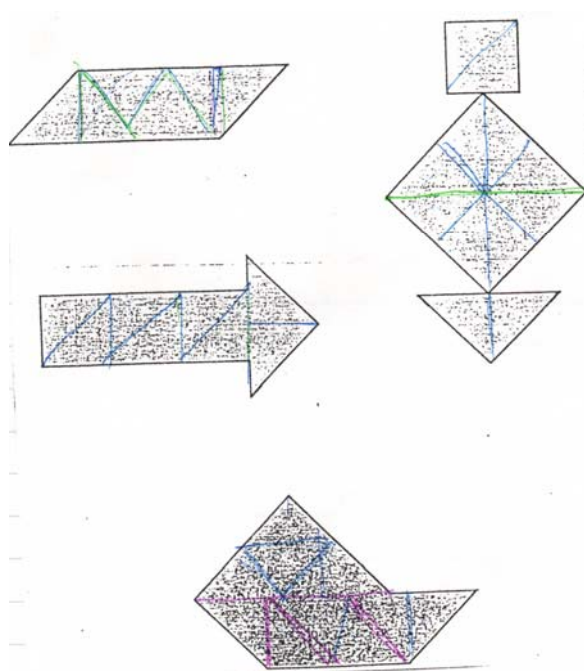
542. Maestra: ¿Sabes lo que hay que hacer?

543. Cecilia: Si

544. Patricia: Tienen que ser 4 triángulos chicos, no 4 piezas.

(SP8.8, (540,544))

8.9.- *Ahora construye las siguientes figuras de manera tal que el paralelogramo tenga de área 6 unidades; la fecha, 8 unidades; un barco, 10 unidades y un muñeco, 12 unidades de área.*



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente al ítem 9 de la actividad 8

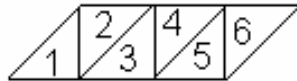
Aquí el problema es inverso; Patricia no logra descubrir la unidad que expresa el área determinada de la figura y lo efectúa luego del folding back que provoca no intencionalmente su compañera Mirta (FB~I, M), en la puesta en común que conduce la maestra en (SP8.9, (605,610)). Pues lleva a Patricia a retroceder a una capa interior para manejar la pieza (ind 1.1 en *Producción de una imagen*) conveniente y avanzar en este proceso a identificar esa pieza como

unidad conveniente (ind 4.2 en *Producción de una imagen*).

A pesar de ello, sólo construye algunas de las formas solicitadas, (ind 2.6 en *Producción –Posesión de una imagen*) pues para el paralelogramo y el hexágono, la subdivisión que realiza, observamos que todos los triángulos no son congruentes entre sí.

605. O. La maestra saca el paralelogramo del pizarrón y le solicita a Mirta que pase y lo realiza como en su fotocopia.

610.O. Mirta dibuja el paralelogramo apoyando el triángulo chico

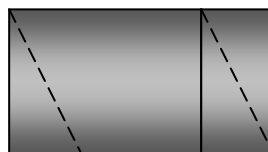


(SP8.9 (605,610))

8.10. ¿Puedes transformar, moviendo una sola pieza, el paralelogramo en un rectángulo? Las dos piezas ¿Tienen la misma área?

A.-Descripción de la producción escrita

Patricia escribe “Sí, se puede, es...”, dibuja un rectángulo y traza un segmento paralelo a los lados de menor longitud, determinando un cuadrado y un rectángulo respectivamente. Traza en línea punteada dos segmentos, uno de ellos coincide con una de las diagonales del rectángulo interior. El otro segmento, es paralelo al anterior, siendo uno de sus extremos común con el vértice del cuadrado y del rectángulo que lo incluye.



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente al ítem 10 de la actividad 8

La niña desplaza uno de los triángulos determinados, apareando los lados congruentes del paralelogramo, y forma el rectángulo (ind 1.2 en *Producción de una imagen*). En la figura, se observa entonces que descompone y compone una superficie en otra de igual área (ind 2.3 en *Producción –Posesión de una imagen*)

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con cuatro indicadores en *Producción de una imagen*- capa B - con tres indicadores en el anillo *Producción y Posesión de propiedades* – Capa B y Capa C con un indicador en *Posesión de la imagen*- Capa C- con seis indicadores en *Percepción de Propiedades* – Capa D- y un indicador en *Formalizar*- Capa E.

Al realizar una mirada global al desarrollo de este problema y con los “anteojos” puestos en Patricia, las unidades de significado y la tabla de diálogo denotan folding back intencionales y no intencionales, que ilustran oportunidades de aprendizaje en el curso de sus interacciones, monitorizadas, la mayoría de ellas, por la maestra.

En particular, una vez que habían resuelto la tarea, los niños y sobre todo Patricia, tratan de validar su solución adecuándose a los desafíos y contraargumentos cambiantes de la totalidad de la clase. Estas interacciones involucran explicaciones colectivas que pueden ser también vistas como ocasiones de aprendizaje del grupo, puesto que los niños frecuentemente elaboran fundamentaciones compartidas adaptándose e influenciándose en los argumentos del otro.

Estimamos conveniente construir dos gráficos que denoten la comprensión de la niña- En el Gráfico de comprensión “A” construimos la trayectoria de los ítem 8.1 al ítem 8.6 inclusive y en el otro, el gráfico de comprensión “B”, construimos la trayectoria de los ítems 8.6 al ítem 8.10 inclusive. La trayectoria de comprensión de la actividad, surge de la unión de las trazadas en cada una de los gráficos. Lo hemos dibujado así, al solo efecto de facilitar su lectura.

Explicitamos el logro de los indicadores involucrados en esta actividad. En general podemos manifestar que la mayoría de ellos los logra, excepto que

algunas veces no distingue el área del perímetro, a pesar de que no habíamos anticipado abordar esta indicador, o no efectúa de manera adecuada la comparación de figuras por transformación indirecta. Respecto de la comparación directa por inclusión, la niña no considera este método para comparar, así que no contamos con información respecto del logro del indicador 2.2 en *Producción de una imagen*.

La trayectoria mencionada denota el proceso de construcción de la niña, de manera que la dibujamos completa y destacamos en la curva, con mayor grosor y de manera zigzagueante, los tres folding back que facilitaron a la niña su comprensión. Por ejemplo, el primero: del indicador 4.2 en *Posesión de una imagen* al indicador 2.2. en *Producción de una imagen*; el segundo: del indicador 2.11 en *Percepción de propiedades* al indicador 2.3 en *Posesión-Producción de una imagen*) y tercero: del indicador 2.6 en *Producción –Posesión de propiedades* al indicador 1.1.-en *Producción de una imagen*. También observamos retrocesos, del indicador 2.6 ubicado en *Producción-Posesión de una imagen* al indicador 1.2 ubicado en *Producción de una imagen*, y del indicador 4.5 en *Formalización* al indicador 2.6 en *Producción –Posesión de una imagen*, sin que ello constituyan un folding back, pues este retroceso se da por el propio proceso de resolución y no para fortalecer la comprensión de indicadores ubicados en capas exteriores.

En este proceso se desplaza por las distintas capas, a partir de comprensión producción de la imagen pues distingue, entre otros, la noción de área, construye figuras de una determinada área, utilizando para ello, una unidad conveniente, hasta distinguir la relación entre el tamaño de la unidad y la cantidad de magnitud.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carece de información

- | |
|--|
| A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización |
|--|

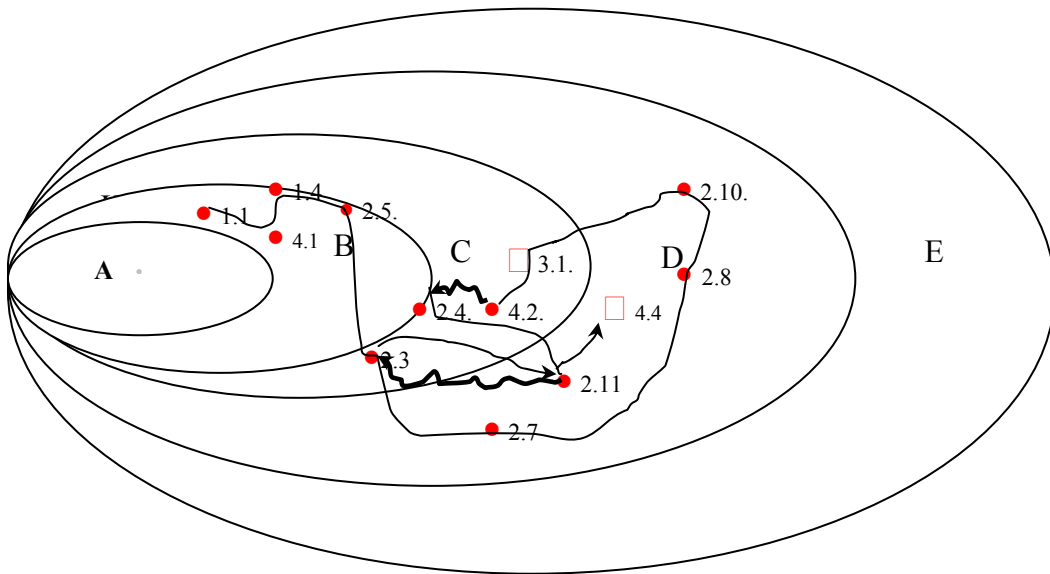


Gráfico de Comprensión “A” de Patricia asociado a los ítems 8.1 a 8.6

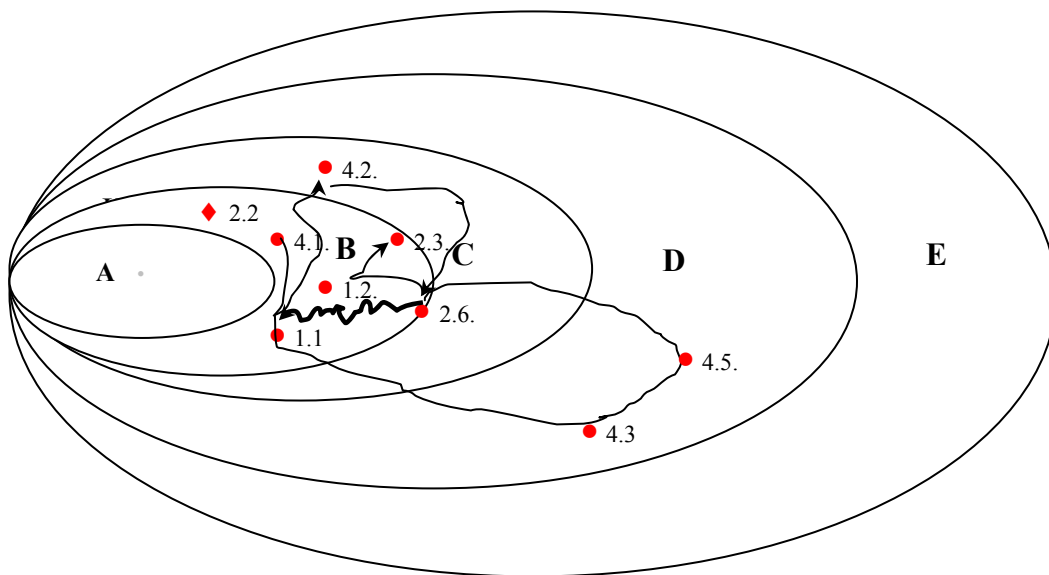


Gráfico de Comprensión “B” de Patricia asociado a los ítems 8.7 a 8.10

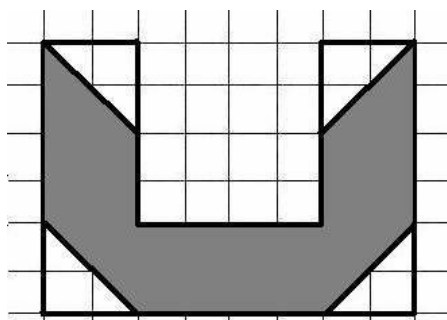
- 1.1.- Maneja el material mediante manipulación
- 1.2.-Aparea lados.
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.

- 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.6.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 2.11.- Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura
- 4.1.- División y pavimentación de la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
- 4.4.-Comprende la necesidad de unidades convencionales.
- 4.5.-Distingue la proporción inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida.

Actividad 9:(SP9)

✓ *Determina el área de la figura sombreada:*

- a. Utiliza  como unidad.
- b. Utiliza  como unidad
- c. Utiliza  como unidad



¿Qué puedes decir acerca de los resultados obtenidos?

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

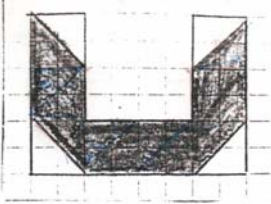
Se presenta una figura sobre papel cuadriculado y se les solicita que averigüen el área de la figura sombreada, utilizando distintas unidades de medida, por ejemplo, primero un triángulo que coincide con la mitad del cuadrado, segundo, el cuadradito del papel, y tercero, un rectángulo formado por dos cuadraditos del papel. Patricia escribe en la hoja, al lado de cada pregunta, 48, 24

y 12.

Escribe: “Los  son la mitad de  y 48  son el doble que 24 .

Los  son la mitad de los  y 24  es el doble que 12 .

Determina el área de la figura sombreada:
 Utiliza  como unidad. 48 
 Utiliza  como unidad. 24
 Utiliza  como unidad. 12.
 ¿Qué puedes decir acerca de los resultados obtenidos?



Que los Δ son la mitad de $\square$
 y 48 (Δ) son el doble que 24 ($\square$),
 Los $\square$ son la mitad de $\square$
 y 24 ($\square$) es el doble que 12 ($\square$).

(PEP9)

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

9

Patricia representa mentalmente las distintas unidades de medida dadas (ind 1.4 en *Producción- Posesión de una imagen*), relaciona y elige rápidamente las diferentes unidades de medida (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*) y cómo éstas inciden en el número resultante de la medida del área de la superficie (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*), (SP9;(5,35)).

Asimismo les explica a sus compañeras la relación que existe entre ambas unidades y retrocede en su proceso de comprensión para indicarles cómo realizar el cubrimiento sin dejar huecos, de tal manera que se pueda medir la superficie contando el número de veces que esa unidad esta colocada una junto a otra (4.1 en *Producción de una imagen*).

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
5 Maestra: <i>Determina el área de las figuras sombreadas utilizando estos tres tipos de unidades. ¿Qué puedes decir de los resultados obtenidos?</i> O: <i>la maestra reparte un papel a cada niño con el texto del problema. Patricia responde rápidamente.</i> 11 Patricia: <i>Primero me fije en el cuadrado y luego lo multiplique por 2 para saber el triángulo.</i> 15 Maestra: <i>¿Vos Cecilia, encontraste un solo rectángulo?</i> 18 Cecilia: Si. <i>O La maestra le muestra que puede haber más.</i>	Maestra Patricia Maestra Cecilia Maestra	Propone Responde Cuestiona Responde Responde	Invita a que viertan su opinión al grupo Explica con palabras lo que desea dar a entender Solicita aclaración sobre lo realizado Expresa con palabras lo que desea dar a entender Anima a la niña a que compruebe si su resultado cumple con las condiciones del problema Acepta la propuesta y la completa Solicita justifique su afirmación.	al grupo A la maestra y su grupo Cecilia Maestra Cecilia Maestra Cecilia	Patricia establece relaciones entre las unidades de medida y es conciente que el resultado depende de las mismas.
20 Cecilia: 5 rectángulos. 21 Maestra: ¿Cómo los encontraste? O: <i>Cecilia lo muestra pero no lo comprende. En tanto Patricia le explica a Mirta y a Flor como tienen que hacerlo, les dice que primero busquen el cuadrado y luego lo multipliquen por dos para sacar la cantidad de triángulos. Patricia le explica a Cecilia y le muestra cómo contarlo pero ella le refuta en función de su resultado..</i>	Cecilia Maestra Cecilia Patricia Cecilia	Responde Pregunta Responde Responde Reacciona	Manifiesta una idea Alienta a las compañeras y brinda la respuesta incompleta para que ellas continúen Niega lo que expresa la compañera	Mirta , Flor y Cecilia Patricia	SP 9,(5,35)

Desde un tratamiento cuantitativo, Patricia comprende que la medida del área de una superficie depende del tamaño de la unidad elegida (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*) debido a ello, la conveniencia de considerar unidades convencionales (ind 4.4 en *Percepción de Propiedades*).

Asimismo la niña establece la relación inversamente proporcional entre las distintas unidades solicitadas, (ind 4.5 en *Formalización*) según se observa en (PEP9), la unidad (SP9, (52,63)) y la unidad de dialogo (SP9, (83, 107))

52 Patricia: El triangulo es la mitad del cuadrado y éste ocupa la mitad de superficie que el rectángulo, me da como área el doble del rectángulo.

58: Maestra ¿Puedo medir con distintas unidades la misma superficie?

61. Patricia: Sí.

O: la maestra pega en el pizarrón y destaca las distintas unidades con la cual va a medir

SP9, (52,63)

Mientras Patricia expresa en forma oral, la relación entre la unidad de medida y la medida del área, (ind 4.5 en *Formalización*) Aylen pasa al pizarrón y representa lo expresado por Patricia de forma gráfica con flechas que muestran tal relación. Este procedimiento le permite a Patricia enunciar la misma de forma coloquial. (PEP9) y demostrar que comprende la propiedad que caracteriza a las unidades de medida. La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con un indicador en cada uno de las siguientes capas: *Producción de una imagen* – Capa B – en la frontera de éste y *Percepción de Propiedades*- Capa B y Capa C- y *Posesión de una imagen* – Capa C- respectivamente y dos indicadores en *-Percepción de propiedades*; Capa D-

El análisis de las tablas de diálogo y la producción escrita nos permite construir el siguiente gráfico que denota el proceso de construcción que Patricia logra, desplazándose desde *producción de la imagen*, pavimentado la superficie a medir y contando dichas unidades, hasta *Formalización*, puesto que la niña logra establecer la relación inversamente proporcional entre las unidades establecidas, aunque no habíamos anticipado que los niños pudieran establecer esta relación.

Si bien no explicita en un primer momento porque enuncia su conclusión directamente, en el momento de explicar a su compañera sus dichos, podemos inferir la trayectoria de su pensamiento que le permitió arribar a lo solicitado.

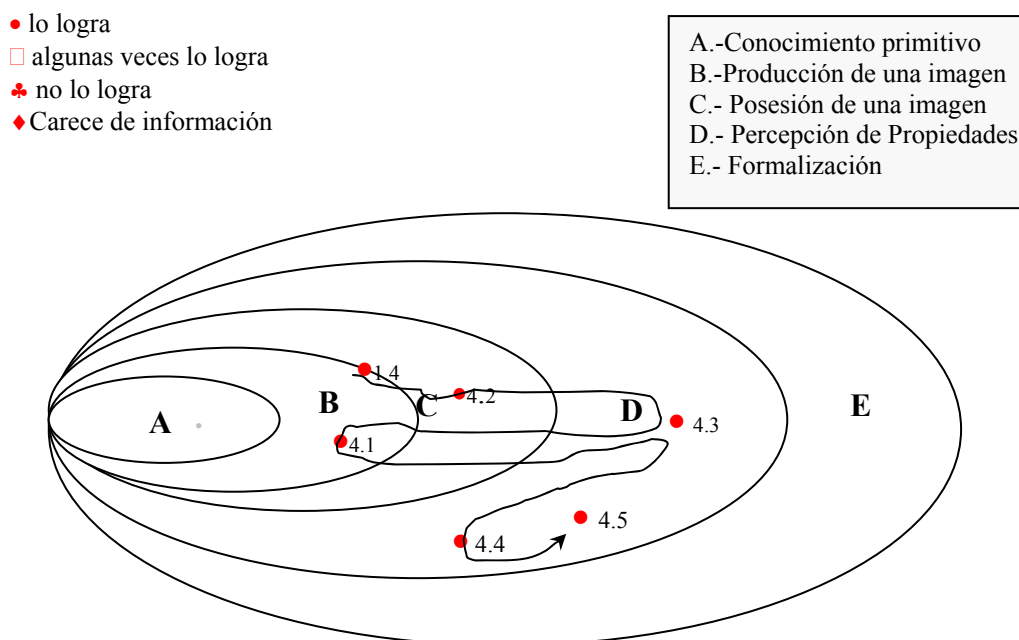


Gráfico de Comprensión –S- de Patricia asociado a la actividad 9

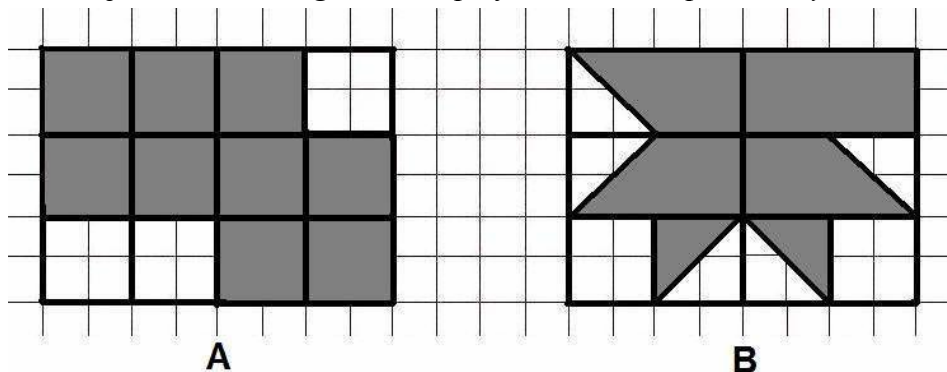
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
 4.2.- Elige una unidad adecuada.
 4.3.- Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
 4.4.- Comprende la necesidad de unidades convencionales
 4.5.- Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud.

Las interacciones producidas (univocales y multivocales) durante el desarrollo del problema favorecieron la construcción de conocimiento, principalmente cuando Mirta y Cecilia trataban de entender y esta formulaba desafíos a las explicaciones de Patricia. Pues, las interacciones con Mirta y Flor son esencialmente univocal (SP9;(5,35)), en cambio con Cecilia la interacción es multivocal dado que la niña cuestiona el procedimiento aunque luego, se adecua a los desafíos y argumentaciones sostenidas por sus compañeras. Es decir, el desempeño de Patricia permite percibir ambos tipos de autoridad: matemática y social.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad
83 Maestra Podemos decir que sin contar, hay 12 rectángulos.	Maestra	Pregunta	Invita a que viertan su opinión	Al grupo total	Patricia distingue la proporcionalidad inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida
85: Mirta: El triángulo entra dos veces en el cuadrado y este entra dos veces en el rectángulo.	Mirta	Responde	Interpretando colaborativamente lo realizado con otros	Maestra y al grupo	
89 Maestra. Cuando una pieza ocupa más superficie, la repetís menos cantidad de veces. Entonces cuando mido con cada pieza obtengo distintos medidas. Pues cuando mido con el triángulo me da una medida, cuando mido con el cuadrado me da otra y con el rectángulo me da otra. Cuando mido superficies, la medida depende de la unidad con la cual mido.	Maestra	Cuestiona	Reformula lo enunciado por la niña con una expresión más formal.	A la totalidad del grupo	
O: Todos concluyen y acuerdan que tienen que saber la unidad con la cual miden.					
107. Patricia. El triángulo chico, entonces voy a necesitar más que el rectángulo porque el triángulo es más chico. Cuando más grande es la superficie de medida menor es la medida del área.	Patricia	Responde	Acepta la propuesta y la completa	Maestra y al grupo	
					SP9,(83,107)

Actividad 10: (SP10)

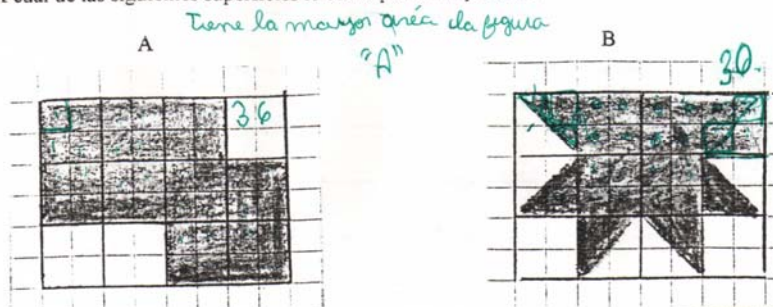
- ¿A cuál de las siguientes superficies le corresponde mayor área?



A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

Se les entrega una hoja con dos figuras sobre papel cuadriculado y se les solicita que averigüen a cuál de ellas le corresponde mayor área. Patricia escribe en cada figura, a la de la derecha le asigna 30 y a la de la izquierda, 36 y “tiene la mayor área la figura A”

¿A cuál de las siguientes superficies le corresponde mayor área?



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

10

Patricia, según se observa en la unidad de diálogo (SP10, (3,60)), le explica a Cecilia y luego a Mirta cómo deben componer las partes de la figura, y dicha explicación da cuenta de la representación mental que la niña posee de la composición de dichas partes de la figura (1.4 en *Producción-Poseción de una imagen*) en cuadraditos según una unidad que ella considera (el cuadradito), (ind 4.2 en *Poseción de una imagen*) y medir para calcular el área de las figuras para compararlas. (2.5 en *Producción-Poseción de una imagen*). En tanto, Cecilia expresa el resultado al que arribó, ayuda a Mirta, y Flor asiente sus dichos.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
3 Patricia: ¿A cual de las siguientes figuras le corresponde mayor área? (fig A y fig B) O: Patricia comienza a contar los cuadrados de la figura A y le pregunta a Mirta. ¿Cómo contas vos? Flor observa lo que hace Patricia y ella toma la figura B y cuenta primero los cuadrados enteros.	Patricia Patricia Flor	Pregunta Responde Reacciona	Le solicita que lea el enunciado Propone un procedimiento e invita a su compañera a que vierta su opinión Acepta parcialmente y la completa	Al grupo Mirta	Patricia utiliza la misma unidad para comparar
16 Patricia: yo ya conté los cuadrados Y A tiene más, pero tendría que usar la hoja de calcar.	Patricia	Responde	Resuelve en voz alta	Al grupo	
21 Mirta: A mí me da 36 cuadrados. 23 Cecilia: a mí también. O: Mirta considera los cuadrados chicos. Cecilia cuenta en la figura B cuadrado por cuadrado. Mientras tanto la docente les lee nuevamente la consigna.	Mirta y Cecilia	Responden	Aceptan parcialmente la idea y la completan	Patricia	
25 Maestra: Hay una superficie sombreada tanto en la figura A como en la figura B, traten de elegir una unidad de medida que ustedes crean conveniente para poder responder a la pregunta.	Maestra	Propone	Plantea un nuevo procedimiento alternativo.	Al pequeño grupo	
32: Cecilia: corresponde mayor superficie a la A.	Cecilia	Responde	Acepta lo expresado por Patricia.	Maestra	
34 Patricia: a mí me dio 26 O: Cuanta los cuadrados chicos de B.	Patricia	Responde	Aporta ideas al análisis y resultado del problema	Al pequeño grupo	
36 Cecilia: Yo conté triángulos como 1 O Cecilia lo considera en la figura B	Cecilia	Responde	Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento.	Patricia, y Mirta	
38 Patricia: mal....el $\frac{1}{2}$...son dos triángulos para 1....hay dos mitades y forman un cuadrado. O: Cecilia cuenta nuevamente la figura B con las indicaciones de Patricia y cuenta 30.	Patricia Cecilia	Reacciona Responde	Clarifica aspectos relevantes a su compañera Explica el procedimiento	Al pequeño grupo Patricia y Mirta	Patricia logra la representación mental de la composición de figuras
45 Patricia pero este triángulo no es un cuadrado.	Mirta y Patricia	Responden	Resuelven de manera conjunta	Cecilia	

O: Mirta cuenta igual que Patricia formando con dos mitades 1. Y Patricia reconoce que Cecilia siguiendo sus instrucciones considera dos triángulos para un cuadrado 49 Patricia: la B tienen 30.	Cecilia	Responde	Reconoce su equivocación y admite lo realizado por sus compañeras Explica con palabras lo que desea dar a entender Cuestiona el resultado Reformula de manera colaborativa lo realizado con Patricia. Acepta lo expresado por sus compañeras	Mirta y Cecilia Patricia Mirta Mirta y al pequeño grupo.	SP 10,(3,60)
55 Mirta ¿Por qué 30?. 56 Cecilia mira....estas dos mitades son 1 Y así...1, 2,3,.... 60 Flor: A mi también me da 30. O: Rápidamente las cuatro coinciden en que la figura A tienen mayor área y comienzan a conversar de otras temas	Patricia Mirta Cecilia Flor	Responde Responde Responde Responde			

Patricia destaca que el valor del área siempre se expresa en función de la unidad establecida (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*) ya que en la puesta en común surgió que los grupos llegaron al resultado correcto (expresar la superficie de mayor área), pero diferían en las medidas que expresaban de cada una de las figuras debido a que habían considerado distintas unidades de medida, según observamos en la tabla de diálogo (SP10, (65,84)).

En respuesta de ello, Patricia mientras trataba de explicar su pensamiento respecto de las distintas posibilidades de elección de unidad de medida, encuentra sentido a otras soluciones otorgándole oportunidad de conceptualizar la noción.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
65: Patricia. ¿Vamos a encontrar entre todos la solución?	Patricia	Pregunta	Alienta a las compañeras para continuar con la estrategia que pretende implementar resolución.	Al pequeño grupo	Patricia identifica que la medida depende del tamaño de la unidad de medida adoptada
67 Aylén; Área de la figura A= 36 y Área de la figura B = 30.	Aylén	Responde	Explicita los resultados	Al pequeño grupo	
O: A Cecilia le da igual que a Aylén, otro grupo expresa $A=36$ y $B=34$... <i>algunos alumnos manifiestan. “ a todos nos da 30...¿cómo la va a dar 34”</i> . Otro grupo expresa “El área de la Fig A= 9 y el área de la Fig B= 71/2	Cecilia	Replica	Cuestiona el resultado de su compañera	Al grupo	
78 Maestra: la A es mayor que la B pero no hemos coincidido todos los grupos. ¿Qué paso con el grupo de Agustina?	Maestra	Reacciona	Discute el resultado	Agustina	
82: Patricia: Pero la cosa es hallar el de mayor área. En la figura están lo cuadrados chiquitos de 2x2 y los de 1x1..... El grupo de Agustina contó cuadrados de 2x2.	Patricia	Reacciona	Acepta y resignifica lo realizado por la compañera	Agustina	
					SP10,(65,84)

Para comparar las figuras ha obtenido el área de cada una de las figuras en función de la misma unidad, o bien expresa el área de ellas y compara en relación con la unidad establecida en cada figura. Es decir, reconoce que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada, según observamos en la unidad de diálogo (SP10 (85,124)).

En función de lo expresado, es razonable pensar que cobró especial sentido para cada una de las niñas y, fundamentalmente para Patricia, el hecho de considerar una misma unidad de medida o establecer las relaciones entre ellas, cuando pretendemos comparar superficies. Por ejemplo cuando manifiesta la maestra *“¿está bien el calculo de Patricia y Agustina. 7 cuadrados enteros de 2x2 son 28 cuadraditos y la mitad corresponde a 2 cuadraditos. Entonces ¿Es correcto el resultado?”* y Patricia le responde *“Sí, el número es distinto pero la respuesta es la misma.”* (Líneas 101 -110) (ind 4.5 en *Formalización*).

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
85: Maestra: Bien ¿Qué unidad de medida tomamos en cada caso?	Maestra	Reacciona	Solicita aclaración sobre lo realizado	Al grupo	Patricia reconoce que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada
87 Patricia: Cuadrados de 1x1 y los de 2x2.	Patricia	Responde	Expresa los resultados a los que ha arribado con otros	el grupo	
90 Aylén: de acuerdo la mitad de medida que tenés te puede dar distinta área. Mirá si haces 9x4 te da 36.	Aylen	Contesta	Cuestiona lo realizado por la compañera		
95 Maestra: ¿El resultado de este grupo está bien?	Maestra Niños	Reacciona Responden	Discute el resultado.	Patricia y al grupo	
97 Todos ¡Sí!		Propone	Acepta lo expresado por la compañera	Al grupo total	
98 Maestra: Contamos la figura B (cuadrados de 2x2) 7 ½... 7x4=28	Maestra		Plantea un procedimiento alternativo.		
100 Patricia Y dos mas son 30	Patricia	Reacciona	Reformula lo expresado por la maestra	Maestra	
101 Maestra: ¿esta bien el calculo de Patricia y Agustina. 7 cuadrados enteros de 2x2 son 28 cuadraditos y la mitad corresponde a 2 cuadraditos. Entonces ¿Es correcto el resultado?	Maestra	Reacciona	Solicita aclaración sobre los resultados arribados por Patricia y Agustina.	Al grupo	
110 Patricia: Si .el número es distinto pero la respuesta es la misma.	Patricia	Responde	Acepta la idea vertida por la maestra y la completa	Maestra y el grupo	
113 Maestra: Fue muy interesante el trabajo pues Agustina manifestaron que tomaron una unidad más grande para realizarlo más rápido. Entonces podemos afirmar: Depende de con que midamos es la cantidad que tenemos.	Maestra	Propone	Sintetiza y explicita el resultado arribado por las niñas.	Al grupo	
122 Aylén: también podemos considerar triángulos.	Aylen	Responde	Acepta la idea vertida por la maestra y la completa	Al grupo	
124: Maestra: Correcto ¡Así es ¡ Muy bien!.					
					SP10,(85,124)

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con tres indicadores en el anillo *Producción - Posesión de propiedades* – Capa B y Capa C- y con un indicador en cada una de las capas: *Posesión de la imagen*- Capa C- *Percepción de Propiedades* – Capa D- *Formalización*- Capa E-

Del análisis de las tablas de diálogo, propuestas y la producción escrita, estimamos conveniente construir el siguiente gráfico, cuya trayectoria denota el proceso de construcción que Patricia logra, desplazándose desde *producción de la imagen*, para comparar superficies en función del área de las mismas, hasta *formalización*, es decir percibir la relación inversa existente entre el tamaño de la unidad de medida y la superficie a medir.

El procedimiento que utilizó la niña para comparar las figuras no nos brinda información acerca del indicador 2.4 en *Producción -Posesión de una imagen*, porque realizó la comparación a través de otro método indirecto.

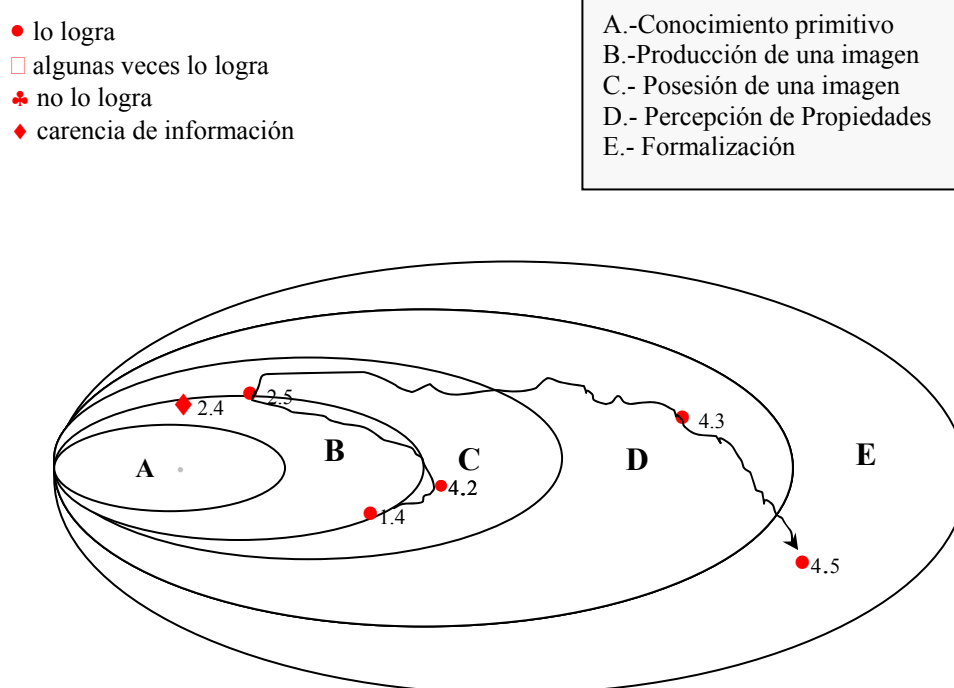


Gráfico de comprensión –S-de Patricia asociado a la. Act. 10

- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad

utilizada.

4.5.-Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida de la cantidad de magnitud.

Del análisis realizado observamos que mejoraron las competencias de las niñas en cuanto a las interacciones producidas durante el desarrollo. En particular, Patricia quien comenzó con su rutina habitual de dar una explicación directa, ya que comienza a resolver con el uso de la plantilla, es decir que considera una unidad conveniente- el cuadradito- y sus compañeras en función de la explicación vertida por ella, resuelven, constatando así el resultado. De manera que se generaron oportunidades de aprendizaje para sus compañeras, pues el aporte sugerido resultó significativo en el contexto personal de la actividad desarrollada por ellas.

Actividad 11 (SP11)

Resuelve nuevamente la situación 3 utilizando las cuadrículas de acetato y comprueba si la elección a la que arribaste es la apropiada

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

Patricia, al lado de cada diseño, escribe un número; por ejemplo, al lado del diseño 1 escribe $21 \frac{1}{2}$, al diseño 2 no le asigna un número, al lado del diseño 3 escribe 11; $11 \frac{1}{2}$; al lado del diseño 4 escribe $21 \frac{1}{2}$, al lado del diseño 5 escribe 22 y $26\frac{1}{2}$ (este valor no coincide luego con lo que expresa debajo, que dice 21), al lado del diseño 6 escribe $21 \frac{1}{2}$ y por último, al lado del diseño 7, escribe $11 / 11 \frac{1}{2}$.

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 11

La niña utiliza para medir, la plantilla, y en los diseños 1, 4 y 6, cuenta los cuadradito (ind 4.1 en *Producción de una imagen*), utiliza como unidad conveniente, dicho cuadradito (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*). A solicitud de su compañera Cecilia, le explica cómo componer las “mitades” para formar cuadrados (unidad) (ind 1.4 en *Producción-Posesión de una imagen*) y compara

dichos escudos utilizando esa unidad (ind 2.5 en *Producción-Poseción de una imagen*) a la que considera convencional (ind 4.4 en *Percepción de propiedades*) según observamos en la unidad de diálogo [(SP11, (20,51))].

Al pretender medir los otros diseños, en un primer momento, no sabe qué hacer con “los cachitos” incompletos que muestra la plantilla. Entonces en vista a utilizarlos de distinta forma (ind 2.3 en *Producción-Poseción de una imagen*) descompone las piezas, elige “los pedacitos” (ind 1.5 en *Producción –Poseción de una imagen*) y los recompone en otra superficie de forma rectangular, la que puede medir valiéndose de la plantilla. Es decir, construye una figura con todos los “pedacitos” de la figura inicial de forma rectangular, equivalente al diseño a medir (ind 2.7 en *Producción-Poseción de una imagen*) y lo mide utilizando la cuadrícula nuevamente (ind 2.5 en *Producción-Poseción de una imagen*)

Esta estrategia que aplica la niña cuando expresa “*Yo uní todas las piezas y me dio este rectángulo*” es apropiada **para medir y estimar** áreas, según se observa en el unidad de diálogo (SP11, (72,147)). Patricia está muy conforme con este arreglo pues puede acotar la superficie entre valores próximos y explicar lo realizado a Cecilia y Flor, quienes se lo requieren en un primer momento, y luego comparten el resultado con Mirta.

Los aspectos relatados dan cuenta que Patricia regula la situación de la actividad por sus saberes, es decir, observamos en ella un reconocimiento por parte de sus compañeras como autoridad matemática del grupo. Se involucra en explicaciones colectivas, justifica sus propios procedimientos y efectúa argumentos y contraargumentos que favorecen en cada una de las niñas, la construcción individual del concepto.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
O: Patricia solicita papel cuadriculado para poder contar cuando ve las cuadrículas dice ¡ah! Esto me sirve y ubica la cuadrícula sobre cada figura y trata de contar. 20 Cecilia: No entran.	Patricia Cecilia	Reacciona Responde	Propone un procedimiento para la resolución e invita y los demás a que viertan su opinión al respecto. Cuestiona lo realizado por su compañera	Al grupo Patricia	
O: Flor se distrae y no hace nada, Mirta también superpone la cuadrícula y trata de contar y Patricia cuenta y anota al lado de cada diseño la cantidad de cuadrados. 27: Mirta. Decime Patricia ¿Cómo lo haces?	Mirta	Pregunta	Expresa desconocimiento acerca de lo que hay que hacer.	Patricia	
28 Cecilia: No me resulta fácil para nada.	Cecilia	Replica	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea	Patricia y Mirta	
30 Patricia: medí primero éste (el diseño 1).	Patricia	Responde	Alienta a la compañera y la orienta para continuar con la estrategia que intenta implementar	Cecilia y a Mirta	Patricia recompone las piezas para obtener unidades convencionales
31 Cecilia: 20 y me sobran 2.	Cecilia	Responde	Resuelve de manera conjunta	Patricia y Mirta Cecilia	
32: Patricia: No ...21 porque esto de acá abajo no te va a dar otro cuadrado aunque lo unas. 35 Cecilia: 20 me da.	Patricia Cecilia	Contesta Contesta	Corrige el error de su compañera Niega lo expresado por la compañera		

36 Patricia: Mira Cecilia a mí me sobró esta parte. Señalo Cuento estos cachitos que me sobran. Si lo junto me da $\frac{1}{2}$ (en el diseño 1). 42 Cecilia ¿Unís los dos de abajo? 21 me da. O Flor trabaja sola y no pregunta nada, la maestra recuerda el problema 3. 44 Maestra: Cuando resolvimos anteriormente este problema habíamos concluido que la figura 1, 4 y 6 ¿Cómo eran? O: Patricia ya ha determinado que los diseños 1, 4 y 6 tienen $21 \frac{1}{2}$. 51 Todos : equivalentes	Patricia	Reaplica	Clarifica aspectos relevantes a su compañera	Cecilia	Identifican figuras de distinta forma y de igual área a través de unidades convencionales
	Cecilia	Contesta	Valida los procedimientos expuestos.	Patricia	
	Maestra	Pregunta	Invita a que los niños a que expresen su opinión	Al pequeño grupo	
	Patricia y el grupo	Responden	Explican con palabras lo que desean dar a entender	maestra	
					SP 11(20,51)

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
74 Maestra: Los diseños 5 y 7 tienen más o menos cuadraditos <i>O: Patricia y Cecilia trabajan con dicho diseño. Mirta no ha escuchado a la maestra y continúa diseño por diseño.</i> 80 Cecilia: En la 5 ¿Cómo haces?	Maestra	Pregunta	Solicita aclaración	A los niños	
81 Patricia: Tomá esta parte. <i>O Patricia mide con la regla y Cecilia sigue probando con la cuadrícula.</i> 84 Cecilia: ¿Cómo mediste la figura 5?	Cecilia Patricia	Pregunta Contesta	Expresa desconocimiento acerca de lo que se le pregunta. Alienta a la compañera y continúa con su estrategia	Patricia Cecilia	
85 Patricia: Yo uní todas las piezas y me dio este rectángulo) <i>O Patricia le explica valiéndose de un dibujo.</i>	Cecilia Patricia	Pregunta Responde	Solicita nuevamente aclaración a la compañera Explica con gráficos lo que desea dar a entender	Patricia Cecilia	Patricia descompone las piezas y las recompone con otra forma a fin de considerar una unidad adecuada. para medir
Entonces ahora apoyo la cuadrícula y es mucho más fácil medir. 94 Cecilia: No puedo.	Cecilia	Responde	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea.	Patricia	
95 Mirta: A mí me dio 17. 96 Patricia a mí me dio 28 ½.	Mirta Patricia	Responde Contesta	Resuelve sola Cuestiona lo expresado por su compañera	Patricia y Cecilia Mirta	
97 Flor: a mí me dio 23. <i>O: Cecilia continúa intentando pero dice a cada rato que no puede.</i> 101 Mirta: hay Patricia ¿Cómo lo hiciste?	Flor	Contesta	Cuestiona lo expresado por su compañera	Patricia y Mirta	
104 Cecilia: dame la regla Patricia que lo hago como vos: es más fácil. Tomo el largo de la	Mirta Cecilia	Pregunta Reacciona	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea Muestra apertura a los resultados obtenidos por la compañera	Patricia Patricia	

figura ¿Y ahora? ¿Lo sumo?. 109 Patricia No... Yo lo que hice es $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ <i>O: el $4\frac{1}{2}$ lo mide con la regla, es decir que es $4\frac{1}{2}$ cm.</i> 125 Cecilia: ahora cuanto mide de largo, $4\frac{1}{2}$ más. 126 Patricia ¡hay para! 128 Mirta: dice la señorita que no sirve medir. 130 Cecilia:¡Sí! Para el diseño 5 ... <i>O: Todas han dejado la cuadrícula a un lado y tomaron la regla.....dicen que “les da mejor” .</i> 135: Patricia: Miren como se mide. <i>O: va tomando la medida de cada uno de los lados y va sumando y uniendo para formar un rectángulo.</i> 140 Patricia: Ahora sí!!! Apoyas esto (la cuadrícula) y puedes contar 142 Mirta: Patricia esta regla no tiene cero ¿por donde empezas a medir ¿ No me da nada con esta regla: <i>O: Patricia y Cecilia afirman que el diseño 5 mide $26\frac{1}{2}$</i>	Patricia Cecilia Patricia Mirta Cecilia Patricia Patricia Mirta Patricia y Cecilia	Contesta Responde Contesta Reacciona Responde Responde Contesta Reacciona Contestan	Explica con palabras y gestos lo que desea dar a entender Acepta parcialmente la idea de su compañera Niega lo que expresa la compañera Aporta una sugerencia al análisis. Cuestiona lo que expresa la compañera Solicita aclaración a su compañera Expresa satisfacción con lo realizado Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea Resuelven de manera conjunta	Cecilia Patricia Cecilia Cecilia y Patricia Mirta Mirta y Cecilia Mirta y Cecilia Patricia Mirta	Patricia y Cecilia pavimentan las superficie a medir y recuentan la unidad empleada y estiman el resultado SP11,(72,147

Los procedimientos empleados, indican que cada una de ellas ha manifestado progresos significativos en torno a la construcción del concepto.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad la situamos con un indicador en *Producción de una imagen*- Capa B- con cuatro indicadores en el anillo *Producción - Posesión de propiedades* – Capas B y Capa C- con un indicador en *Posesión de una imagen* –Capa C- y con dos indicadores en *Percepción de Propiedades* – Capa D

En base a ello consideramos representativo construir el siguiente gráfico que denota el proceso de construcción que Patricia logra, desplazándose desde la frontera entre *producción de una imagen*, para medir superficies en base al cubrimiento, hasta la *Percepción de propiedades* del área en base a una unidad que funciona como convencional. Asimismo es significativo aclarar que el retroceso que se produce del indicador 2.7 en *Percepción de propiedades* al indicador 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen no es folding back* pues este retroceso se da por el propio proceso de resolución y no para fortalecer la comprensión de indicadores ubicados en capas exteriores

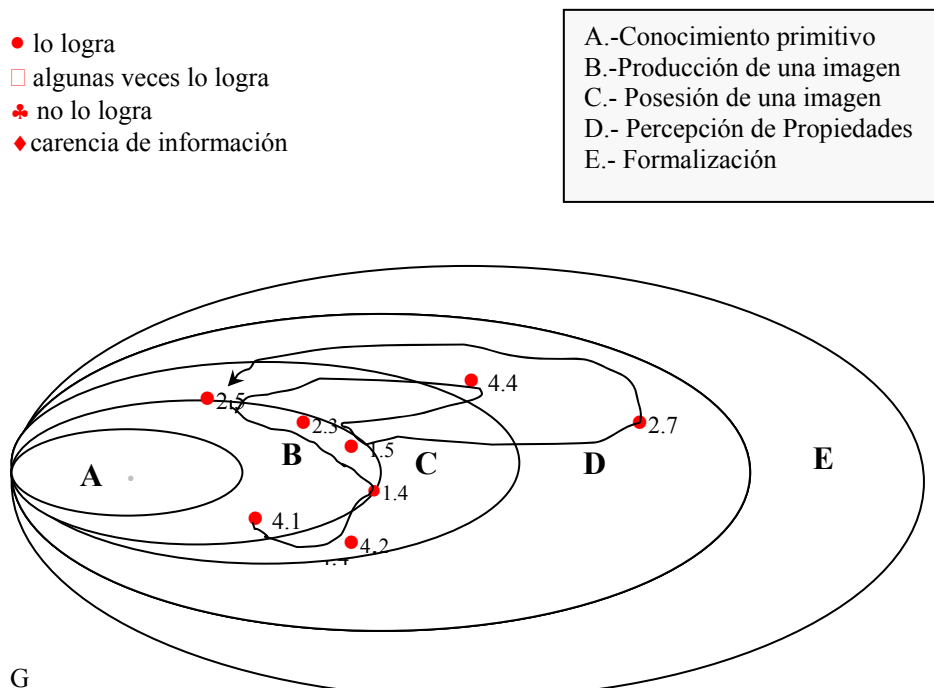


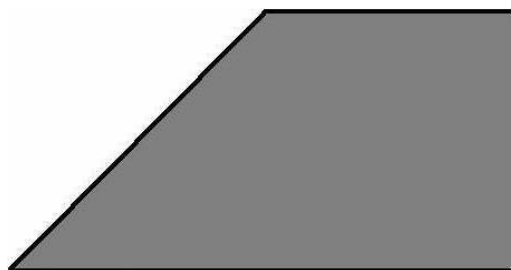
gráfico de comprensión –S-de Patricia asociado a la .act. 11

- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su Área no varía.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el numero de unidades empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.4.-Advierte la necesidad de unidades convencionales.

Problema 12: (SP12)

✓ *Este es el patio de la escuela de Tomás, el cual se desea embaldosar. Realiza un dibujo en escala de tal forma que un cuadradito de la plantilla, representa una baldosa..*

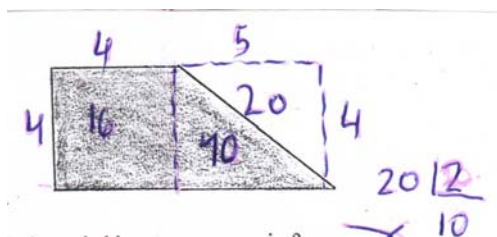
- a) *Indica dos métodos diferentes para calcular la cantidad de baldosas que necesitas.*
- b) *Y si completamos el patio de modo que formes un rectángulo ¿Cuántas baldosas son necesarias?*

**A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo**

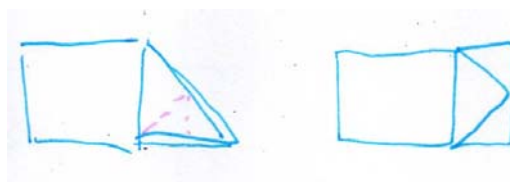
Se les solicita que realicen un dibujo a escala de tal forma que cada cuadradito de la plantilla representa una baldosa del patio de la escuela de Tomás (la forma del patio se corresponde con un trapecio rectángulo). Se les solicita en una primera instancia que calculen la cantidad de baldosas que se necesitan de dos

modos diferentes. En segunda instancia, que completen con las baldosas suficientes, para que el patio sea de forma rectangular, y averiguan la cantidad de baldosas necesarias para embaldosarlo.

Patricia subdivide el dibujo del campo en dos regiones, uno de ellas triangular. Traza paralelas a los catetos del triángulo rectángulo, en línea punteada, y queda determinado un rectángulo. Le asigna a los lados del rectángulo un número; por ejemplo, al lado punteado paralelo al segmento que subdivide a las dos regiones, le asigna el número 4 y, en sentido contrario a las agujas del reloj, le asigna al otro lado el número 5, continúa con los lados del cuadrado y le asigna, de forma consecutiva, el número 4 a ambos lados. En la región cuadrangular coloca el número 16 y en la región triangular 10. En el exterior del dibujo escribe 20.



Debajo hay dos dibujos, uno de ellos es el dibujo dado en el problema, en el cual se marca, en línea punteada, la altura correspondiente a la hipotenusa del triángulo y la mediatriz del cateto, consecutivo y alineado con el lado del cuadrado. Resultan así tres triángulos rectángulos: uno grande y dos pequeños. El otro dibujo es el resultado de descomponer el triángulo pequeño, de la derecha, y componer apareándolo con el triángulo grande, de forma tal que quede formado un rectángulo



A igual altura, pero a la derecha, escribe B.1) y B.2). En B.1) traza dos segmentos perpendiculares y escribe al lado de cada uno de ellos “Lado”, en el punto común a ambos segmentos coloca “x” y debajo escribe “son necesarios

Debajo dibuja dos segmentos -uno de ellos, horizontal- consecutivos y perpendiculares, y denomina al segmento horizontal “*BASE (B)*” y al otro, “*ALTURA (H)*”.

Escribe $L \times L = \text{Área}$. $\square$; $4 \times 4 = 16$ $\square$; $H \times B = \text{Área}$; $4 \times 5 = 20$ y debajo escribe, uno debajo del otro,

Area del $\square = 1 \times 1 = l^2$;

Area del $\square = B \times h$

Area del $\triangle = \frac{B \times h}{2}$

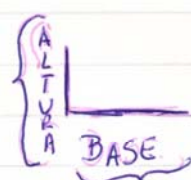
(PEP12)

B.1). lado $\times$ lado.

B.2).  *Donde necesito 26* $\square$.

$l \times l = \text{Area } \square$
 $4 \times 4 = 16$ $\square$

$H \times B = \text{Area}$
 $4 \times 5 = 20$

$\begin{matrix} H \\ \{ \\ \text{ALTURA} \\ \} \end{matrix}$  $\underbrace{\hspace{2cm}}_B$

Area del $\square : l \times l = l^2$
 Area del $\square : B \times h$
 Area del $\triangle : \frac{B \times h}{2}$

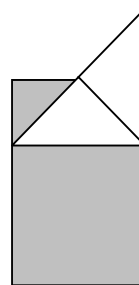
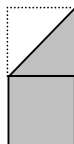
B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

12

Patricia en principio, monitorea lo que realiza las compañeras y regula la situación por sus saberes pues coloca la plantilla, calca, observa la figura y representa mentalmente la subdivisión que la lleva a cortar el dibujo (ind 1.4.- e

ind 1.5 en *Producción –Posesión de una imagen*) para realizar las descomposiciones necesarias que transformen el dibujo original en un dibujo de forma rectangular (ind 2.3 en *Producción – Posesión de una imagen*) equivalente al dado, con la intención de pavimentar la superficie y contar el número de unidades empleado(ind 4.1 en *Producción de una imagen*) (cuadradito de la plantilla) (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*). En cambio, Cecilia le sugiere completar el dibujo para formar el dibujo de un rectángulo. Patricia no la comprende pero de la unidad de diálogo (SP12, (16,64) y (PEP12) podemos inferir que Cecilia y Patricia miran el dibujo desde perspectivas distintas, pues mientras Patricia desea averiguar el área de la superficie del patio, Cecilia sólo descompone la figura para armar el rectángulo según lo solicitado en la siguiente pregunta del problema.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
16 Cecilia: Esos cuadraditos son muy bonitos no me sirven. <i>O: Patricia superpone la plantilla sobre la figura..</i>	Cecilia	Responde	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea	Patricia y Mirta y Flor	
19 Patricia: Señal no dice que tenés que cortar los cuadraditos. <i>O: Flor y Mirta no saben que hacer.</i> 23: Mirta: tengo una idea mía.	Patricia	Contesta	Aporta una idea a la resolución del problema	Cecilia	
24 Patricia: Primero averiguemos el área	Mirta	Responde	Alienta a la compañera y brinda una respuesta incompleta para continuar con la estrategia que pretende implementar.	Patricia	
26 Cecilia Mas vale	Patricia	Contesta	Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento.	Mirta y el grupo	
<i>O: Patricia calca la figura y recorta para formar un el rectángulo..</i>	Cecilia	Responde		Patricia	
30 Patricia: esto sería el patio.					
38 Cecilia: le ponemos otra cosa aquí y un rectángulo.	Patricia	Contesta	Acepta lo expresado por la compañera	Cecilia	
	Cecilia	Responde	Explica con dibujos lo que desea dar a entender Clarifica aspectos relevantes a su compañera	Patricia	
40 Patricia: Si ¿y de dónde los sacas? Sobre la cantidad tremenda de baldosas. Por que no se pueden comprar mas baldosas. Ya Con papel de calcar, calco un triángulo corto para formar el rectángulo y luego cortar los cuadraditos.	Patricia	Contesta	Ignora las sugerencias de su compañera y lleva adelante su procedimiento	Cecilia	



49 Maestra: Bueno pero tenés que encontrar los métodos. 51: Patricia: uno es con la plantilla.	Maestra Patricia	Pregunta Responde	Solicita otra idea o procedimiento alternativo Explica oralmente lo que desea dar a entender	Maestra Maestra	Patricia recompone la figura en otra equivalente pero rectangular a fin de pavimentar la superficie y contar el número de unidades empleado.
52: Maestra: Bueno cuantas baldosas ocupó el patio. Contalas. 54 Cecilia: yo armé el rectángulo.	Maestra Cecilia	Pregunta Contesta	Anima a la niña a que compruebe si su resultado cumple con las condiciones iniciales del problema. Alienta para continuar con la estrategia que pretende implementar	Patricia Mirta	
55 Mirta: Mira Patricia acá tengo una para cortar el rectángulo.	Mirta	Responde	Proponen una idea e invitan a las compañeras a que viertan su opinión al respecto	Patricia	
57 Patricia: ¿Y que te crees que hicimos?	Patricia	Responde	Cuestiona lo realizado por las compañeras	Mirta y Flor	
59; Flor: yo ya no tengo más nada!	Flor	Reacciona	Muestra apertura a los resultados obtenidos por sus compañeras	Al grupo y la maestra	
60 Patricia: conté 24.	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Al grupo	
61 Maestra: tenemos 24, pero ¿Qué pasó con las otras 24? ¿Por qué estás estas que están cortaditos por la mitad?	Maestra	Pregunta	Solicita que justifiquen su afirmación	Patricia	
64 Patricia: Las unimos	Patricia	Contesta	Valida los procedimientos expuestos.	Maestra	
					SP 12,(16,64)

Podemos observar que Patricia ha calculado el área del patio de la misma forma que averiguó anteriormente la cantidad de tela del diseño. Al necesitar una unidad de medida, aprovechó las regularidades de la figura y la plantilla, como soporte. El número como la medida del área de la figura surge de la idea de contar los “cuadrados” o bien de la relación entre el área de la superficie y el área de una subdivisión de ella (el cuadrado) (ind 4.4. en *Percepción de propiedades*). Aunque no ha podido anticipar los recortes directamente sobre el dibujo, el procedimiento utilizado tiene sentido para Patricia. Observamos que con este método ha utilizado un procedimiento cuali-cuantitativo (geométrico-numérico) y bidimensional.

Cuando pretende resolver por otro método, advertimos que subdividió el dibujo del patio en dos, de forma cuadrada y triangular respectivamente (SP12, (65,100)) y (PEP12).

Además de usar una unidad de medida, para hallar el área del cuadrado es capaz de reconocer que las unidades están dispuestas en filas y columnas en vistas a obtener la fórmula.

Por ejemplo, en el cuadrado asocia la cantidad de cuadrados con el campo multiplicativo (ind 5.1 en *Producción de una imagen*) expresando la medida del área como producto de factores lineales iguales y coincidentes con la cantidad de cuadrados que cubren, por ejemplo, la base y cada hilera, identificando que el cuadrado tiene lados congruentes (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*) (SP12, (65,100)).

Asociar esta medida con estrategias multiplicativas permitió que Patricia calculara la medida de áreas recurriendo a medir longitudes lineales, pues aunque expresa cuadrados, se entiende que se refiere a “*el lado del cuadrado*”, según observamos en la producción escrita (PEP12) y las siguientes tablas de diálogo (SP12, (65,100)) ; (SP12,(128,170)).

65 Maestra: Explica un poquito como contaste esto. El patio

67 Patricia: corte el patio en un cuadrado y en un triángulo.

71 Maestra: ¡Ahí! En dos, te quedo el cuadrado. ¿Cuántas baldosas necesitas para el cuadrado?

75: Patricia: Si te da 4x4.

76 Maestra ¿4x4?

O: Patricia descompone la figura para obtener una de ellas de forma

cuadrangular y relaciona el número de baldosas que hay en largo y en el ancho y lo relacionan con el modelo multiplicativo

77 Patricia: Si porque tenés todos los lados iguales.

79 Maestra ¿por que no, $4 \times 4 \times 4 \times 4$?

86 Patricia: por que contás el largo y el ancho.

82 Maestra ¿Y te da las baldosas?

3 Patricia: Sí, por que es el área del cuadrado.

85 Maestra ¿Y te sirve para cualquier patio, hoja de carpeta, para cualquier cosa cuadrada?

88 Patricia: Si.

89 Maestra: Fíjate esta plantilla, suponte que este sea el patio y desees saber la cantidad de baldosas. Cuantas baldosas tiene en cada lado.

94 Patricia 22 y en total 22×22 .

95 Maestra ¿Vos te pusiste a contar cada baldosa?

97 Patricia: No.

O: la maestra le repregunta.

98 Maestra: Bien es más económico pues se usará siempre así..

100 Patricia: Si

(SP 12 (65,100))

128 Maestra ¿Alguien tienen un método propio?.

130 Patricia: para sacar el área tenés que hacer con la medida que uno quiera, por ejemplo, cuadraditos: haces el lado horizontal por el lado vertical y te da el área del cuadrado o del rectángulo. Tenés que fijarte cuanto tenés de cada lado: Pero eso solamente sirve para el cuadrado y para el rectángulo.

140 Maestra: ¡Ah!! Y que podemos hacer en esta figura.

142 Maestra: ¿puede haber un cuadrado de 4×5 ?

144 Patricia: No por que seria un rectángulo.

146 Maestra ¿cómo seria para el cuadrado?

148 Patricia 4×4 .

149: Maestra: ¿por qué?.

150 Patricia: 4 es el lado vertical y 4 es el lado horizontal.

((SP 12 (128,150))

Estos aspectos fundamentan que, en una próxima etapa, se utilicen unidades de longitud (m, cm., etc.) para generar el área de superficies rectangulares.

Con respecto a la otra región triangular, llega a un resultado relacionándola con la región rectangular, según se observa en la unidad (SP12, (219,247)). En este caso Patricia ha utilizado un procedimiento numérico y bidimensional.

219 Maestra: Al lado horizontal de un rectángulo lo denominamos BASE y al lado vertical lo denominamos ALTURA, miren...para ponernos de acuerdo en todo el mundo a la altura la simbolizamos h

Ahora en lugar de hacer $l \times l$ para el área del rectángulo es $B \times h$, entonces ¿Cómo podemos averiguar el del triángulo?

235 Patricia: la mitad del rectángulo es la del triángulo que queremos

averiguar: Tenés que hacer el área del rectángulo dividido por dos. El rectángulo era 20 y la mitad es 10 y va a ser el área del triángulo.

241 Maestra: ¿Cómo puedo aplicar este método en cualquier otra figura? ¿Cómo lo indico?

244 Patricia: $B \times h$ base por altura dividido dos

246 Maestra ¿por qué dos?

247 Patricia: por que es la mitad del rectángulo y dos triángulos forman un rectángulo.

(SP 12(219,247))

La relación establecida para el cuadrado y el significado que le otorga a los símbolos, según se pudo constatar en (CMP2), permitieron que Patricia pudiera construir las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulo como camino más económico para calcular al área de las figuras mencionadas.

Al tener que resolver la actividad por dos métodos distintos, aclaramos que el retroceso que se produce del indicador 4.4 en *Percepción de propiedades* al indicador 5.1 en *Producción de una imagen* no es folding back, sino que dicho retroceso se da por el propio proceso de resolución según lo solicitado y no para fortalecer la comprensión de indicadores ubicados en capas exteriores

El nivel de comprensión que demanda esta actividad la situamos con un indicador en *Producción de la imagen* – Capa B-, con dos indicadores en el anillo *Producción- Posesión de una imagen* – Capa B y Capa C- con un indicador *Posesión de propiedades* – Capa C- con dos indicadores en *Percepción de propiedades* –Capa D- y con un indicador en *Formalización* – Capa E.

Patricia para resolver este problema se involucra en una situación real que la lleva a implementar distintas estrategias heurísticas en su resolución, pues divide el problema en partes (según se desprende de la unidad (SP12,(16,64)), realiza dibujos y diagramas (PEP12), busca regularidades para poder manifestar conjeturas y pretende en una primera instancia, contar el número de cuadraditos, recién en una segunda instancia, lo relaciona con el modelo multiplicativo, y expresa las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulo.

Estos aspectos detectados, a través de su producción escrita y el análisis de las unidades de significado y la tabla de diálogo, muestran de manera detallada el proceso que realiza la niña, y cómo es capaz de vincular el concepto de área para resolver una situación de contexto real Aspectos que podemos volcar en el siguiente gráfico de comprensión que denota el proceso de construcción que logra,

al seleccionar una unidad de medida adecuada, a través del uso de la plantilla, y aplicar el concepto a otros contextos.

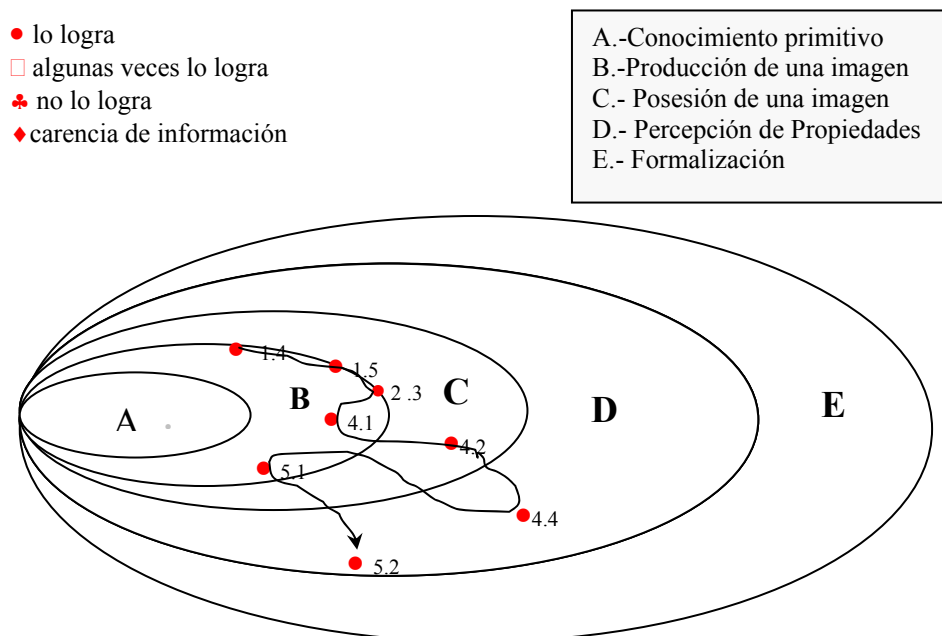


Gráfico de comprensión -S- de Patricia asociado a la .act. 12

- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.
- 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone)
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleados
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.4.-Advierte la necesidad de unidades convencionales.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.

En cuanto a las interacciones, en principio, Patricia, Mirta y Cecilia se dispusieron a trabajar cada una de ellas desde su zona de posibilidad de desarrollo. Patricia comenzó y propuso distintas estrategias de resolución (tipo univocal), Mirta también, pero Patricia las desestimó considerando que no aportaba nada nuevo. En cambio, Flor trabaja sola y corrobora sus resultados con Cecilia ((SP12 (1,64)) ilustra las intervenciones de cada una de ellas y sus argumentos.

En general observamos que las niñas realizaron avances conceptuales

aunque en algunos momentos Patricia no las escuchaba y trataba de justificar su resultado. Especialmente ocurrieron oportunidades de aprendizaje cuando se involucró con la maestra en explicaciones acerca de los resultados arribados con sus compañeras y las concepciones personales que tenía respecto del tema (SP12, (128,170)), especialmente cuando manifiesta “*un método propio*”, y cuando puede expresar en forma simbólica las fórmulas para el cálculo de áreas.

En todo momento los cuestionamientos que propuso la maestra a la totalidad del grupo les sirvió para reflexionar sobre sus posibles soluciones originales.

Actividad 13: (SP13)

✓ *Dibuja la palma de tu mano sobre la hoja de carpeta...Calcula el área aproximada de la superficie que ocupa*

A.-Descripción de la producción

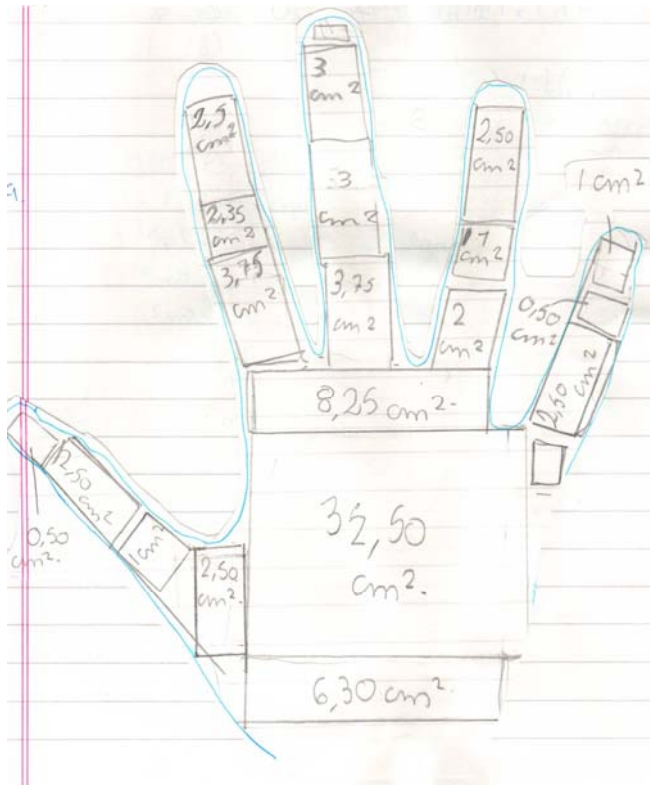
Patricia, en principio, cubre la palma con rectángulos y cuadrados, cada uno de ellos de dimensiones máximas.

A cada uno de los rectángulos - incluidos en la palma - le asigna la medida, de la muñeca hacia los dedos, $6,30 \text{ cm}^2$; $32,50 \text{ cm}^2$, y $8,25 \text{ cm}^2$. Al dedo meñique, con la misma orientación, $2,50 \text{ cm}^2$, $0,50 \text{ cm}^2$ y 1 cm^2 ; al dedo anular, 2 cm^2 ; 1 cm^2 ; $2,50 \text{ cm}^2$; al dedo corazón $3,37 \text{ cm}^2$; 3 cm^2 ; 3 cm^2 y existe otro rectángulito pero no le designa medida; al dedo índice le asigna $3,75 \text{ cm}^2$, $2,35 \text{ cm}^2$ y $2,5 \text{ cm}^2$ y por último, al dedo pulgar $2,50 \text{ cm}^2$, 1 cm^2 , $2,50 \text{ cm}^2$ y $0,50 \text{ cm}^2$.

A continuación subdivide el problema en partes, calcula el área de la superficie de cada dedo como la resultante de las áreas de las superficies de los distintos cuadrados y rectángulos que están incluidos en cada dedo. Calcula el área de cada uno de cuadriláteros mencionados a través de la fórmula, considerando previamente la longitud de las dimensiones lineales de cada uno de ellos.

Expresa el valor de cada uno, por ejemplo: “*Índice: aproximadamente $7,60 \text{ cm}^2$* ”.

Después de calcular el valor del área de la superficie de cada uno de los dedos y la palma, suma los resultados obtenidos y expresa “80,90 (agrega) cm^2 mide aproximadamente mi mano”.



$$\begin{aligned}
 &\underbrace{2,50}_{H} \times \underbrace{1}_{B} = 2,50 \text{ cm}^2. \\
 &1(B) \times 0,50(h) = 0,50 \text{ cm}^2. \\
 &1(h) \times 1(B) = 1 \text{ cm}^2. \\
 &\left. \begin{aligned} &1(h) \times 0,50(B) = 0,50 \text{ cm}^2. \\ &2,50(h) \times 1(B) = 2,50 \text{ cm}^2 \\ &1(h) \times 1(B) = 1 \text{ cm}^2. \end{aligned} \right\} \text{meñique mide aprox.} \\
 &\quad \quad \quad \begin{aligned} &1 \\ &2,50 \text{ cm}^2 \\ &+ 0,50 \text{ cm}^2 \\ &\hline &1,00 \text{ cm}^2 \\ &4,00 \text{ cm}^2 \end{aligned} \\
 &\left. \begin{aligned} &5,50(B) \times 1,50(H) = 8,25 \text{ cm}^2. \\ &5(H) \times 6,50(B) = 32,50 \text{ cm}^2. \\ &2,50(H) \times 1(B) = 2,50 \text{ cm}^2. \\ &6(B) \times 1,50(H) = 6,30 \text{ cm}^2. \\ &1(H) \times 0,50(B) = 0,50 \text{ cm}^2. \end{aligned} \right\} \text{pulgara mide aprox.} \\
 &\quad \quad \quad \begin{aligned} &0,50 \text{ cm}^2 \\ &+ 2,50 \text{ cm}^2 \\ &\hline &1,00 \text{ cm}^2 \\ &4,00 \end{aligned} \\
 &\left. \begin{aligned} &5,50(B) \times 1,50(H) = 8,25 \text{ cm}^2. \\ &5(H) \times 6,50(B) = 32,50 \text{ cm}^2. \\ &2,50(H) \times 1(B) = 2,50 \text{ cm}^2. \\ &6(B) \times 1,50(H) = 6,30 \text{ cm}^2. \\ &1(H) \times 0,50(B) = 0,50 \text{ cm}^2. \end{aligned} \right\} \text{mide la palma de la mano...}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 2,5(h) \times 1(b) = 2,5 \text{ cm}^2 \\
 1,5(h) \times 1,5 = 2,35 \\
 2,5(h) \times 1,5(b) = 3,75
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{área de la parte superior}$$

$$\begin{array}{r}
 2,50 \\
 + 2,35 \\
 \hline
 3,75 \\
 \hline
 7,60 \\
 \text{cm}^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2(h) \times 1(b) = 3 \text{ cm}^2 \\
 2(h) \times 1(b) = 3 \text{ cm}^2 \\
 2,50(h) \times 1,50 = 3,75
 \end{array}$$

mayor área

$$\begin{array}{r}
 3,00 \text{ cm}^2 \\
 + 3,00 \text{ cm}^2 \\
 \hline
 3,75 \text{ cm}^2 \\
 \hline
 9,75 \\
 \text{cm}^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2,50 \times 1 = 2,50 \text{ cm}^2 \\
 h(b) \\
 1(h) \times 1(b) = 1 \text{ cm}^2 \\
 2(h) \times 1(b) = 2 \text{ cm}^2
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{área de la parte inferior}$$

$$\begin{array}{r}
 2,50 \text{ cm}^2 \\
 + 1,00 \\
 \hline
 2,00 \\
 \hline
 5,50
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8,25 \text{ cm}^2 \\
 32,50 \text{ cm}^2 \\
 + 2,50 \text{ cm}^2 \\
 6,30 \text{ cm}^2 \\
 0,50 \text{ cm}^2 \\
 \hline
 50,05 \text{ cm}^2 \text{ mide la palma.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 37,60 \text{ cm}^2 \text{ (unidad)} \\
 + 9,75 \text{ cm}^2 \text{ (mayor)} \\
 + 5,50 \text{ cm}^2 \text{ (área)} \\
 4,00 \text{ cm}^2 \text{ (menor)} \\
 4,00 \text{ cm}^2 \text{ (pulgar)} \\
 50,05 \text{ cm}^2 \text{ (palma)} \\
 \hline
 80,90 \text{ cm}^2 \text{ mide} \\
 \text{aproximada-} \\
 \text{mente} \\
 \text{mi mano.}
 \end{array}$$

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 13

Estimar el área de la mano con cierta exactitud involucra determinados conceptos y habilidades. Por ello de la producción escrita - PEP13- de Patricia advertimos que resuelve el problema basándose en los siguientes momentos:

Primero: Un acercamiento por cubrimiento a través de la inclusión de cuadrados y rectángulos para estimar el área de la palma de su mano, aunque no la expresa en función de dichas figuras, como unidad de medida (ind 4.1 en producción de una imagen e ind 4.2 en *Posesión de una imagen*) sino en función de una unidad convencional cm^2 .

Segundo: Midiendo, usa estrategias unidimensionales para estimar las dimensiones de cada uno de los cuadrados y rectángulos considerados y expresando correctamente el área de cada rectángulo, por ejemplo $2,5 \text{ h} \times 1 \text{ b} = 2,5 \text{ cm}^2$ (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*).

Tercero: Calcula el área de cada rectángulo a través de las fórmulas, lo que explica el cubrimiento a partir de estas figuras y no otras (por ejemplo poligonales) que permitieran realizar un cubrimiento más denso. Lehrer (2003) manifiesta que si bien este procedimiento es el deseable, rara vez ocurre, pues los niños tienden a usar unidades de forma semejante al contorno de la mano.

Cuarto: Adiciona los resultados obtenidos para llegar de forma aproximada - como manifiesta - al área de la superficie de su mano.

Quinto: Expresa las dimensiones lineales en cm. Explicita esta unidad, e indica en cada una de las subdivisiones si se trata de la base o la altura. En cambio, expresa los resultados de cada una de ellas y el resultado total que surge del cubrimiento con los rectángulos, observamos espacios sin cubrir, por lo tanto el área de la mano lo estima, en cm^2 (ind 4.4 en *Percepción de propiedades*).

Patricia manifiesta que su padre le dijo que el resultado lo debía expresar así. La maestra le pregunto qué significaba ese símbolo y ella respondió: “corresponde a un cuadrado de 1cm de lado. Así  ”

El nivel de comprensión que demanda esta actividad la situamos con un indicador en cada uno de las capas *Producción y Posesión de una imagen* – Capa

B y Capa C- respectivamente y con dos indicadores en *Percepción de propiedades- capa D-*

El análisis de la producción escrita, muestra de manera detallada, cómo la niña aplica el concepto de área en otras situaciones y contextos y además, nos permite construir el siguiente gráfico de comprensión que muestra la secuencialidad en el logro de los distintos indicador involucrados, desplazándose desde *Producción de la imagen*, al cubrir la mano con cuadrados y rectángulos a fin de estimar el área como resultado de la sumatoria de todos ellos, hasta *Formalización* del concepto interpretando el concepto de área como herramienta que responde al requerimiento del problema.

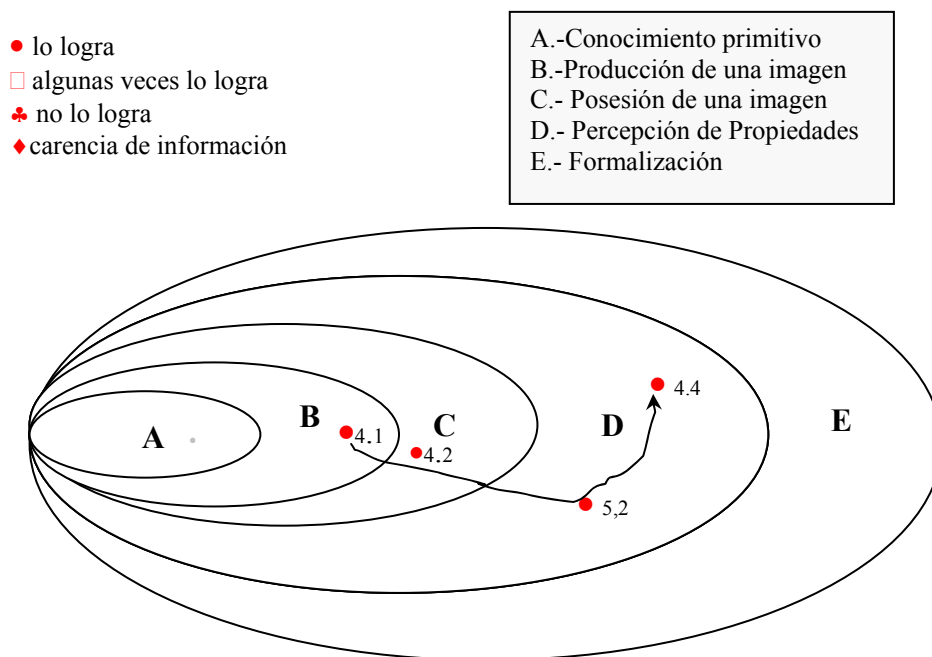


Gráfico de comprensión –S-de Patricia asociado a la act. 13

- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 4.4.-Comprende la necesidad de una unidad convencional.
- 5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.

En la resolución del problema, Patricia explicita distintas estrategias heurísticas, pues divide el problema en partes y utiliza para ello aquellos recursos conceptuales que estima convenientes y adecuados. Busca regularidades que le

permiten efectuar dibujos y diagramas (PEP12). Destacamos, la influencia de la intervención familiar en la formulación del resultado que le permite avizorar la unidad convencional (cm^2) de manera significativa.

4.1.3.1. RELACIÓN ENTRE LOS GRÁFICOS DE COMPRENSIÓN: EL DESEABLE Y EL DE PATRICIA.

A partir del análisis efectuado sobre cada una de las actividades desarrolladas por Patricia, el diálogo con sus compañeras cuando trabajan juntas, las interacciones que facilitan el proceso y las trayectorias con las que explican lo que los alumnos “ven y manifiestan” acerca de una primera aproximación a la construcción del concepto, intentamos ahora en este apartado, abordar el análisis de todas las actividades en su conjunto.

Para ello, en este apartado volcamos en un gráfico de comprensión al que denominamos *deseable*, todos los indicadores que intervienen en la secuencia de aprendizaje a efectos de explicitar -en detalle- las características del concepto que aspiramos que la niña construya. Para ello indicamos su distribución en las distintas capas de comprensión: seis indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- siete indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* - Capa B y C –dos indicadores en *Posesión de una imagen* - Capa C- diez indicadores en *Percepción de propiedades* - Capa D- un indicador en el anillo *Percepción de propiedades - Formalización*- Capas D y E- y dos indicadores en *Formalización*- Capa E-.

- lo logra.
- algunas veces lo logra.
- ♣ no lo logra.
- ◆ carencia de información.

A.-Conocimiento primitivo B.-Producción de una imagen C.- Posesión de una imagen D.- Percepción de Propiedades E.- Formalización

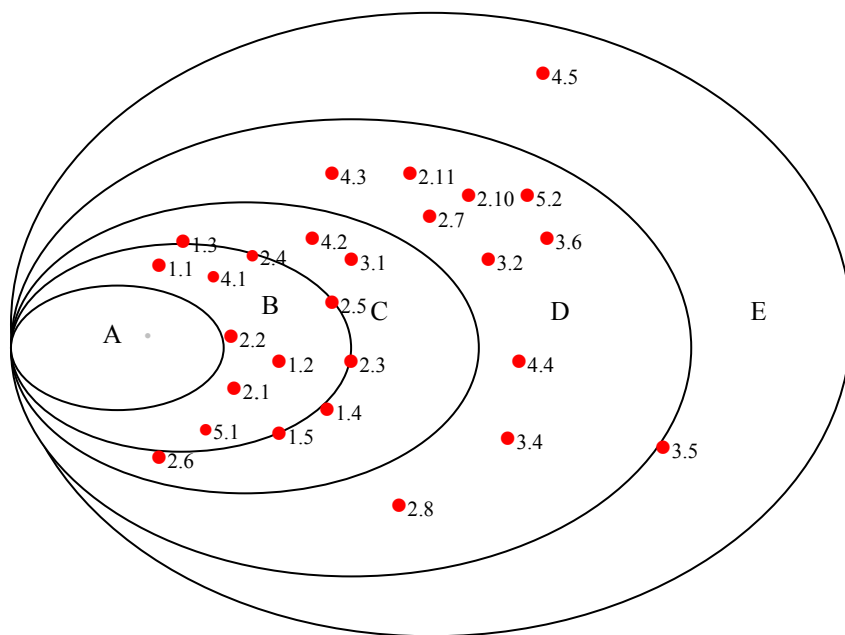


Gráfico Global de Comprensión Deseable asociado a la Secuencia (S)

- 1.1.-Maneja el material mediante manipulación
- 1.2.-Aparea lados.
- 1.3.-Aparea vértices.
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.
- 2.1.-Compara superficies por percepción visual.
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad
Conveniente.
- 2.6.- Construye superficies con la medición y utilización de una unidad
conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su
Área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total,
es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura
- 3.2.-Reconoce que a mayor /igual /menor área de una superficie no corresponde
necesariamente mayor/ igual/menor perímetro de la misma.
- 3.4.-Ordena figuras isoperimétricas respecto del área.
- 3.5.- Construye figuras equivalentes de distinto perímetro⁸⁷.
- 3.6.-Ordena según el perímetro, figuras equivalentes.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades
empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.

⁸⁷ Se indica con distinto tipo de letra pues no estaba previsto abordar este indicador

- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad Utilizada.
- 4.4.-Comprende la necesidad de unidades convencionales.
- 4.5.-Distingue la proporción inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2.-Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.

Esperamos que la niña, con el logro de los indicadores propuestos, perciba una figura compleja, mediante el reconocimiento de figuras simples y el área como cualidad de los objetos que permite compararlos; distinga y establezca relaciones entre área y perímetro; conceptualice el área como medida de cubrimiento; reconozca las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulo como camino más económico y logre significatividad y funcionalidad del concepto.

A continuación, construimos el gráfico de comprensión de Patricia.

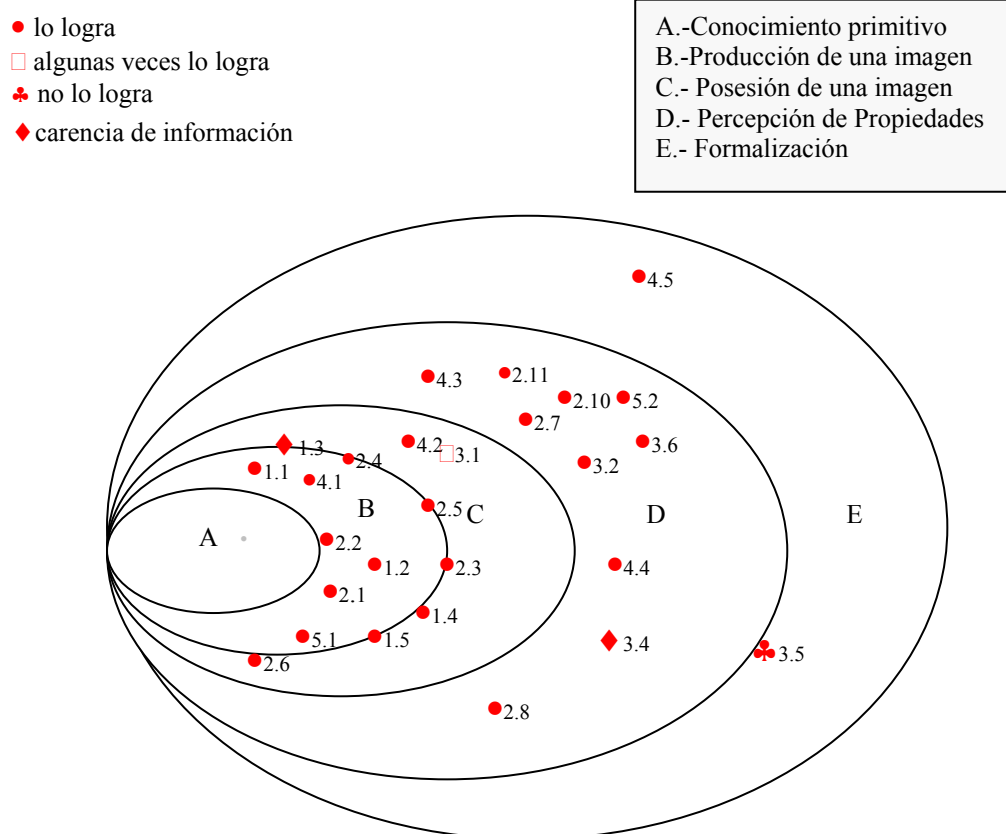


Gráfico Global de Comprensión de Patricia asociado a la Secuencia (S)

De la relación entre ambos gráficos globales de comprensión- el de Patricia con el *Deseable*- podemos manifestar que la niña, ha logrado la mayoría

de los indicadores, alguno de ellos, a través del *folding back* que pudimos detectar en el análisis de las actividades, en función de la trayectoria que muestra la secuencia entre los indicadores involucrados en la misma. Por ejemplo:

Patricia puede formar con distintas piezas otra, cuya forma es compleja. En las actividades 1, 2 y 8 la niña expresa las piezas que puede anticipar para formar una compleja, y acude a procedimientos empíricos al manipular las distintas piezas (ind 1.1 en *Producción de una imagen*) y al aparear las mismas por sus lados (ind 1.2 en *Producción de una imagen*). En otra instancia la niña retrocede a estas nociones, para avanzar con una mayor comprensión a la elección de una unidad conveniente u ordenar distintas figuras equivalentes según su perímetro.

Cuando utiliza el Tangram como recurso para resolver, valida sus resultados ante sus compañeros, y para ello anticipa y percibe cómo seccionar convenientemente las piezas (ind 1.5 en *Producción –Posesión de una imagen*) a fin de armar otra figura compleja, o bien representar mentalmente una figura como unidad de medida conveniente. Dichos aspectos evidencian su desarrollo espacial (ind 1.4 en *Producción –Posesión de una imagen*).

Las explicaciones que Patricia brinda a sus compañeras, Cecilia y Mirta, dan cuenta de la estrategia que implementa y entrevé la representación mental que posee acerca de la composición de las partes de una figura. Por ejemplo cuando en la actividad 11 y 12, al utilizar como recurso la plantilla, explica cómo componer las “mitades” para formar cuadrados o la subdivisión que la lleva a seccionar el dibujo y efectuar las descomposiciones necesarias para transformar en otra figura de forma rectangular (ind 1.4 e ind 1.5 en *Producción –Posesión de una imagen*). Las actividades resueltas por la niña no dan cuenta si compone una figura a partir de aparear las mismas, por sus vértices (ind 1.3 en *Producción-Posesión de una imagen*).

Con respecto al principio de conservación del área, la niña en principio, no reconoce que con idénticas piezas puede componerlas y formar distintas figuras, hasta que las intervenciones no intencionales de su compañera Mirta producen en la niña un *folding back* no intencional y efectivo (FB~IE-M) que la lleva a retroceder en su proceso de comprensión, y por descomposición- composición,

revisa las piezas de cada una de las figuras,(ind 2.4 en *Producción –posesión de una imagen*) para luego identificar las piezas formadas por las mismas piezas (ind 2.3 en *Producción –posesión de una imagen*). Si bien ambos indicadores se encuentran dispuestos en el mismo anillo, afirmamos que existe un folding back pues el indicador- 2.4- sirve de sustento para lograr el indicador 2.3.

En otra instancia del desarrollo de la secuencia, el folding back, inducido por la maestra de manera intencional y explícita, y promovido por su compañera Mirta de manera no intencional, (FBI y E-Ma; ~I-M), pero ambos efectivos para Patricia; la llevan a retroceder en su proceso, a comparar de manera directa, por inclusión: “sólo lo apoyamos”(SP3, en línea 135) (ind 2.2 en *Producción de una imagen*) para luego avanzar en ese proceso, y distinguir distintas figuras formadas por idénticas piezas (ind 2.3 en *Producción –Posesión de una imagen*).

De esta manera la niña distingue que distintas figuras- realizadas con todas las piezas del Tangram - tienen todas ellas, igual área (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*).

Respecto a la comparación entre más de dos superficies, en la actividad 3 Patricia lo hace – de igual forma que cuando respondió el cuestionario- mediante la percepción visual como atributo medible (ind 2.1 en *Producción de una imagen*).A pesar que la maestra la impulsa a que acuda a los conocimientos geométricos que tiene disponibles y que explore distintas posibilidades, Patricia considera que puede relacionar los diseños – desde un aspecto operacional-numérico- a través de la longitud de sus lados y la cantidad de éstos (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*). Cuando la maestra les pregunta acerca de lo que está calculando, le responde “El perímetro”, es decir que ella y todos los niños del grupo consideran que pueden comparar los diseños a través del perímetro. Igual respuesta brindó en el cuestionario (IAP8), al responder que podía comparar las superficies a través del perímetro. Ante la intervención intencional y explícita de maestra de no dar una respuesta numérica, se producen en Patricia los folding back antes mencionados, que la lleva a utilizar distintos métodos- por inclusión (ind 2.2 en *Producción de una imagen*) y por composición-descomposición (ind 2.4 en *Producción-Posesión de una imagen*)-, para comparar.

En otro momento, para comparar, utiliza una figura común como unidad

de medida eficaz (ind 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*), por ejemplo, descompone distintas figura en cuadrados, los cuales redistribuye convenientemente “*Cambie los cuadraditos, la subdividí en cuadrados y si pongo éste acá me da lo mismo*” (SP4, línea 19) (ind 2.3 e ind 2.4 en *Producción –Posesión de una imagen*), reconoce así que todas las superficies tienen igual área. En otra instancia de la secuencia, utiliza para comparar el triángulo chico como unidad de medida de cubrimiento (2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*). Es interesante también destacar la estrategia que implementa la niña en la actividad 11, cuando recompone- con los “sobrantes” que surgen al superponer una plantilla en la superficie – y forma una superficie de forma rectangular a efectos de completar la medición con dicho recurso.

Estos procedimientos le permiten reconocer varios diseños equivalentes (ind 2.7 – ind.2.8- ind. 2.10 en *Percepción de propiedades*) y al mismo tiempo, construir figuras de un área determinada (ind 2.6 en *Producción –Posesión de una imagen*).

Los métodos que implementa la niña para comparar superficies, le permite establecer la relación entre distintas piezas a través de una fracción. (2.11 en *Percepción de propiedades*), por ejemplo cuando manifiesta “*El paralelogramo es la mitad o ($\frac{1}{2}$) del triangulo grande o el triangulo grande es el doble del paralelogramo*”.(SP8; en línea 238) a través de distintos folding back. Por ejemplo, nos referimos al folding back intencional y no focalizada de la maestra (FB I yE-Ma), que la lleva a retroceder en su proceso, relacionar las superficies a través de la comparación de las mismas, por composición - descomposición (ind 2.4 –en *Producción –Posesión de una imagen*), y avanzar a efecto de establecer la relación explicitada, entre el triángulo grande y el paralelogramo en función de una fracción (2.11 en *Percepción de propiedades*). También, el folding back no intencional de su compañera Cecilia (FB ~I-C), lleva a Patricia a retroceder en el proceso y recomponer las piezas en distinta forma (indicadores 2.3 e 2.4 en *Producción-Posesión de una imagen*) para poder establecer relaciones entre las distintas piezas a través de una fracción (2.11 en *Percepción de propiedades*)

Con respecto a la relación entre área y perímetro de diversas figuras, la niña algunas veces se refiere indistintamente a las nociones de área o perímetro y

al intentar defender lo expresado no distingue la diferencia entre dichas nociones (ind 3.1 en *Producción de una imagen*). En cambio, en la actividad 6 son significativos los argumentos que vierten con sus compañeras Cecilia y Mirta, pues Patricia reconoce que figuras equivalentes pueden tener distinto perímetro (ind 3.2 en *Percepción de propiedades*), pero la observación de Cecilia con respecto al perímetro del cuadrado, al manifestar “...hay cuadrados adentro”(en línea 107) produce en Patricia un folding back no intencional de Cecilia (FB~Id - C), que la lleva a retroceder en el proceso de comprensión, en vista a ello, avanza para identificar el cuadrado como la figura de menor perímetro(ind 3.2 en *Percepción de propiedades*). y observar en el cuadrado, la disposición de los lados en el cubrimiento (ind 1.2 en *Producción de una imagen*) y expresar “con cuatro cuadrados adentro, ...hay lados en esta figura que no se cuentan y en las otras sí”(SP6, línea 114) en vista a ello, avanza para identificar el cuadrado como la figura de menor perímetro(ind 3.2 en *Percepción de propiedades*). Aspecto que le permite ordenar las figuras equivalentes según su perímetro (ind 3.6 en *Percepción de propiedades*) y en otro momento, distinguir que varias figuras equivalentes pueden ser algunas isoperimétricas y otras no.

No construye una figura equivalente pero de perímetro mayor (ind 3.5 *Percepción de propiedades-Formalización*).En cambio, no disponemos de información acerca de que Patricia ordene figuras isoperimétricas respecto del área (ind 3.4 en *Percepción de propiedades*).

Desde un aspecto numérico Patricia en algunas actividades, por ejemplo la octava y a novena, pavimenta las superficies a medir sin dejar huecos según la unidad solicitada (ind 4.1, en *Producción de una imagen*), en otras, por ejemplo en las actividades cuarta, décimo segunda y décimo tercera, reconoce la figura conveniente como unidad de medida convencional (ind 4.2 en *Producción de una imagen* e ind 4.4 en *Percepción de propiedades*), para pavimentar las superficies y medir contando el numero de veces que esa unidad esta colocada una junto a otra. (ind 4.1 en *Producción de una imagen*).

En cambio cuando debe descubrir la unidad que expresa el área determinada de la figura sólo construye algunas de las formas solicitadas, (ind 2.6 en *Producción –Posesión de una imagen*), puesto que en alguna de las figuras- el

paralelogramo y el hexágono- la subdivisión que realiza, todos los triángulos no son congruentes entre sí. Recién en la puesta en común que instala la maestra durante la resolución de la actividad octava, la explicación que brinda su compañera Mirta cuando pasa el frente, provoca en folding back no intencional (FB~I, M), que lleva a Patricia a retroceder a una capa interior; manejar la pieza (ind 1.1 en *Producción de una imagen*) conveniente y avanzar en este proceso, a identificar esa pieza como unidad conveniente (ind 4.2 en *Producción de una imagen*).

Asimismo para comparar distintas figuras, considera una unidad común a todas ellas, que considera como convencional y en la actividad décimo tercera cuando expresa el área de su mano se refiere a “ cm^2 ” (ind 4.4 en *Percepción de propiedades*), reconoce la unidad y cómo incide la misma para expresar la medida del área de las distintas figuras. Por ejemplo en la actividad 10, Patricia aporta ejemplos respecto a las distintas posibilidades de expresar la medida del área en función de las distintas unidades de medida (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*). Al mismo tiempo establece la relación inversa entre las distintas unidades y la medida del área. (ind 4.5 en *Formalización*) cuando manifiesta con el Tangram “*un triángulo grande son dos triángulos medianos y el Tangram esta dividido en dos triángulos medianos, entonces son 4 medianos*” (SP8.7 línea 444).

Con respecto a la comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulo como camino más económico, Patricia en la actividad décimo segunda, se le solicita que averigüe el área de una región por dos métodos distintos. En uno de ellos la niña subdividió el dibujo del patio en dos, de formas: cuadrada y triangular, respectivamente y reconoce en esas formas, que el cuadradito esta dispuesto según filas y columnas, de manera que por un lado, asocia la cantidad de cuadraditos con el campo multiplicativo (ind 5.1 en *Producción de una imagen*) y además expresa la medida del área como producto de factores lineales iguales y coincidentes con la cantidad de cuadraditos que cubren las dimensiones de las formas citadas, pues aunque expresa cuadraditos, se entiende que se refiere a un “método propio”: “*el lado del cuadradito*” (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*) según expresa: “*para sacar el área tenés que hacer con la medida que uno quiera, por ejemplo, cuadraditos: haces el lado horizontal por el lado*

vertical y te da el área del cuadrado o del rectángulo. Tenés que fijarte cuanto tenés de cada lado: Pero eso solamente sirve para el cuadrado y para el rectángulo.”(SP12, línea 130).

En general, la resolución de la actividad décimo tercera, muestra la comprensión que tienen acerca de estas nociones pues para calcular el área de la palma de su mano Patricia particiona la misma en porciones rectangulares en vista a relacionar cada una de ellas, con el modelo multiplicativo, estimando sus dimensiones lineales. (ind 5.1 en *Producción de una imagen* e ind 5.2 en *Percepción de propiedades*)

La producción escrita de la niña y las tablas de diálogo, denotan la claridad manifiesta en los procedimientos empleados y expuestos por Patricia durante la resolución de las distintas actividades y fundamentalmente, las últimas. Por ejemplo, cuando Patricia se refiere a “*un método propio*” para considerar las dimensiones lineales de una forma rectangular al momento de calcular su área o bien, la resolución de esta última actividad dan cuenta de la significatividad y funcionalidad que la niña le otorga al concepto.

4.1.4.- ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO AL FINALIZAR LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE (EP)

Como en el apartado 4.1.1.- cada uno de los enunciados del cuestionario se explicita en 3.5.3.1 y la resolución del cuestionario realizado por la niña se adjunta en el Anexo XII. A continuación se describe el desarrollo propuesto por Patricia. Cuando la producción escrita muestra el proceso de construcción que se produce en la niña, lo incluimos para dar cuenta de ello.

Actividad 1: (EP1)

No lo consideramos para el análisis

Actividad 2 (EP2)

Dibuja una figura equivalente la dada pero de distinto perímetro. Justifica tu dibujo.

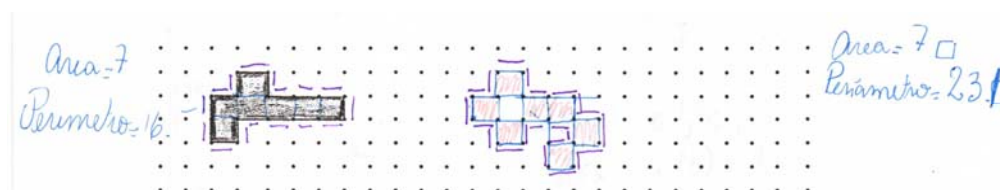


A.-Descripción de la producción escrita

Patricia construye una figura a la derecha de la trama, la forma al desplazar de izquierda a derecha, el quinto rectángulo hacia abajo, de manera que tengan en común solamente un vértice. Consideró el cuadrado ubicado debajo del primer cuadrado de la hilera de cinco, lo desplazó debajo del cuarto cuadrado de la hilera, pero solamente un vértice en común, con el cuadrado dispuesto anteriormente. Y por último, el segundo cuadrado de la hilera lo desplazó hacia abajo, de manera que tuviera con los cuadrados vecinos, solamente un vértice con cada uno de ellos.

Pinta la figura formada y marca por el exterior las unidades que coinciden con los lados de cada cuadradito y respecto de la figura dada expresa:

“Área = 7  ” y “Perímetro 23 /”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

2

Patricia comprende la noción de equivalencia de figuras a través de la conservación del área de las mismas, aunque no tengan necesariamente el mismo perímetro (ind 3.5 en anillo *Percepción de propiedades- Formalización*). Ella construye la figura solicitada – equivalente y de perímetro mayor- al aparear solamente dos cuadrados por un lado (ind 1.2 en *Producción de una imagen*) y los demás, por un vértice. (ind 1.3 en el anillo *Producción- Posesión de una imagen*)

Construye figuras equivalentes de perímetro mayor a través de la oportunidad de aprendizaje que instauró la maestra en la puesta en común con la totalidad del grupo al culminar la actividad séptima, durante la implementación de la secuencia de aprendizaje. En esa oportunidad, la niña no asistió a la sesión en la que los niños resolvieron esa actividad. Sin embargo, en función de lo realizado por Patricia, podemos inferir que ha comprendido la noción.

Construye y compara con la figura dada de manera indirecta, y escoge de antemano, el cuadradito como unidad de medida (ind 2.5 e ind 2.6 en *Producción –Posesión de una imagen*) de manera que la figura obtenida resulta equivalente y de distinta forma. (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*). Así cuando expresa “Área = 7 ”, aunque no indica la unidad, se desprende que consideró el cuadradito como unidad, pues en la otra figura lo expresa correctamente. Asimismo expresa el perímetro, pues señala la unidad coincidente con el lado de la figura cuando indica “perímetro = 23/”, aunque en el otro caso no indica explícitamente la unidad.

Como consecuencia, podemos manifestar que Patricia diferencia la noción de área de la de perímetro, (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*) al momento de construir una figura equivalente y de perímetro mayor a una dada.

Podemos decir entonces, que reconoce la independencia de las variaciones entre el área y el perímetro de una figura aunque solamente argumenta a través de un gráfico, de forma incompleta.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con un indicador en: *Producción de una imagen*- Capa B-, con tres indicadores en la frontera entre *Producción* y *Posesión de una imagen* – Capa B y Capa C- con un indicador en *Posesión de una imagen* – Capa C- y con un indicador en *Percepción de Propiedades* – Capa D- y un indicador en el anillo *Percepción de propiedades* - *Formalizar*- Capa D y Capa E.

Del análisis de la producción escrita, percibimos que puede construir figuras equivalentes de distinto perímetro. Es decir, construye figuras al percibir propiedades del área y su relación con el perímetro.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ✱ no lo logra
- ◆ carece de información

A.-Conocimiento primitivo
 B.-Producción de una imagen
 C.- Posesión de una imagen
 D.- Percepción de Propiedades
 E.- Formalización

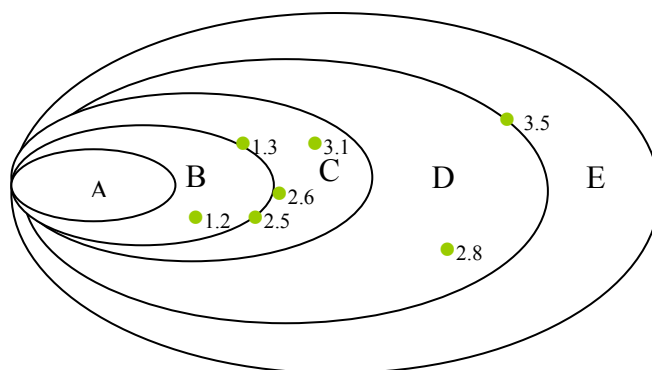
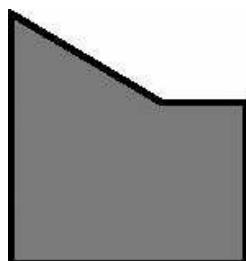


Gráfico de Comprensión -E -de P asociado a la act.2

- 1.2- Aparea lados.
- 1.3- Aparea vértices
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.6.-Construye superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.8- Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.5.- Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.

Actividad 3 (EP3)

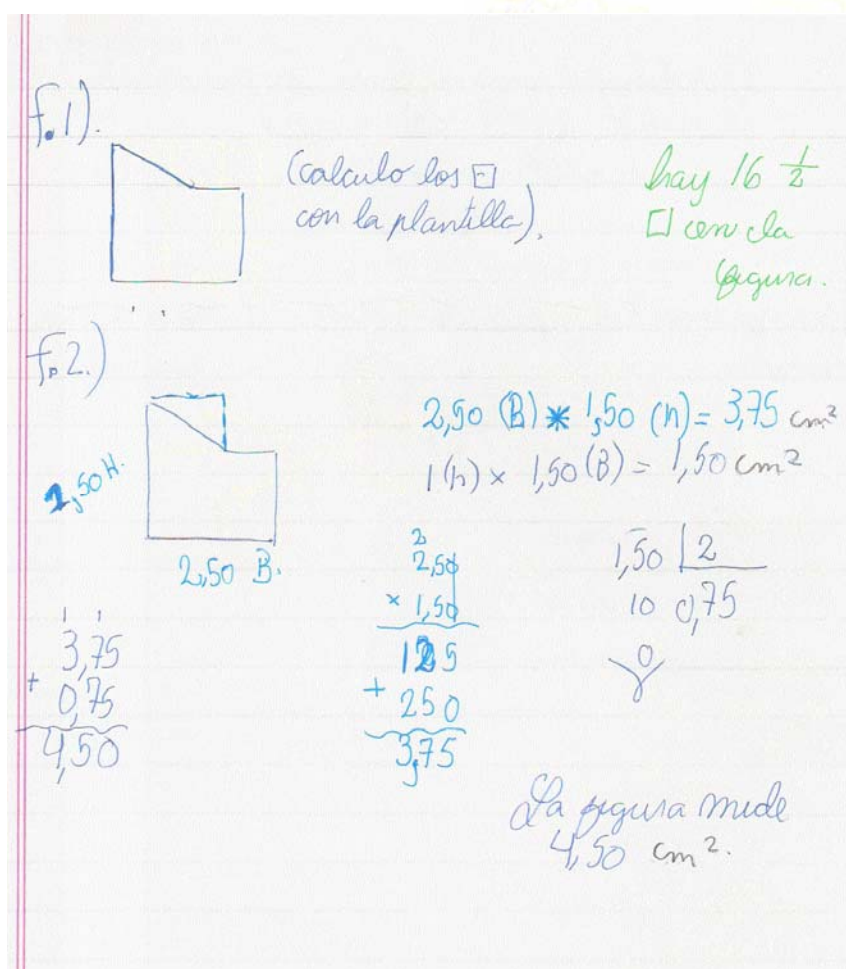
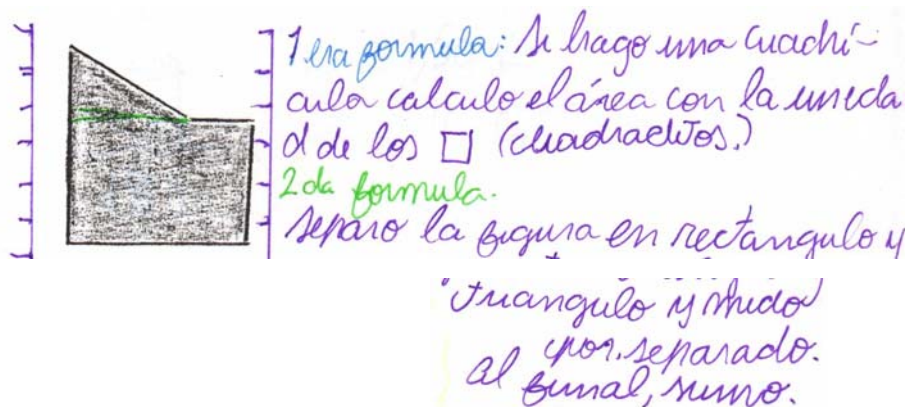
3.- *Calcula el área de este polígono, indicando dos métodos diferentes para calcularlo.*



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia marca dos segmentos en los costados del dibujo indicando divisiones y expresa: “1ª fórmula: Si hago una cuadrícula, calculo el área con la unidad de los $\square$ (cuadraditos).

2ª fórmula: Separo la figura en rectángulo y triángulo y mido por separado y al final sumo”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

3

Patricia resuelve y argumenta los resultados a los que arriba. Con respecto al primer método, utiliza como recurso la plantilla, realiza el cubrimiento de la figura y expresa el área de la misma en función de la unidad correspondiente(ind

4.2 en Posesión de una imagen), pero expresa “16 $\frac{1}{2}$ cuadraditos” y en realidad es 15 y $\frac{3}{4}$ cuadraditos. No obstante, esto indica que Patricia ha comprendido el concepto de área por cubrimiento y el significado de medir. (ind 4.1 en *Producción de una imagen*)

Con respecto al segundo procedimiento que ha aplicado, completa la figura (en línea punteada de manera tal que quedan formados dos regiones rectangulares) y corroboramos lo que afirmamos anteriormente durante la implementación de los instrumentos anteriores, para Patricia tienen sentido particionar la superficie en regiones rectangulares. Muy posiblemente debido a que asocia la distribución rectangular con el campo multiplicativo (ind 5.1 en *Producción de una imagen*).

En cada una de esas regiones señala sus dimensiones lineales e indica si corresponde a la base o a la altura del rectángulo y calcula el área de cada una de ellas. (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*). El área de la región triangular la calcula a través de la fórmula del rectángulo, mas precisamente como la mitad de éste. Evidentemente para Patricia la figura que tiene sentido es el rectángulo, y las demás figuras las relaciona con él.

Con respecto a los resultados de las subregiones y la región total, Patricia lo expresa en cm^2 , es decir, utiliza una unidad de medida convencional, expresión que ya usó en la resolución de problemas anteriores- actividad 13- , en este momento Patricia le manifiesta a la maestra que su padre se lo ha indicado y con ello podemos corroborar lo que ya anticipamos oportunamente, en relación a la influencia de las intervenciones familiares que le permitió avizorar la unidad convencional (cm^2) de manera significativa.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en la *Producción de la imagen* – Capa B- , con un indicador *Posesión de la imagen*- Capa C- y otro indicador en *Percepción de Propiedades* – Capa D- .

Del análisis de la producción escrita, esbozamos una posible trayectoria de comprensión, en base a los indicadores que logra Patricia y que explicitamos en el siguiente gráfico

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carece de información

A.-Conocimiento primitivo
 B.-Producción de una imagen
 C.- Posesión de una imagen
 D.- Percepción de Propiedades
 E.- Formalización

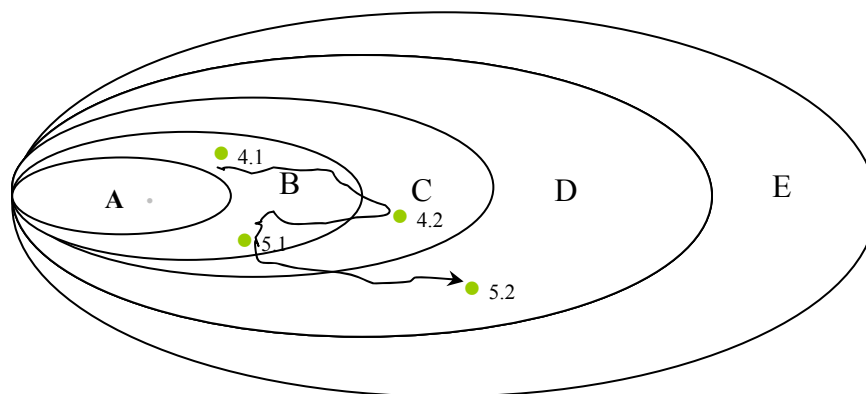


Gráfico de Comprensión -E -de P asociado a la act.3

- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
 4.2.- Elige una unidad adecuada.
 5.1.- Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo
 5.2.-Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras

Actividad 4(EP4)

Responde y justifica las siguientes preguntas:

- “1.-Dos figuras que tienen la misma forma ¿son sí o sí EQUIVALENTES?
 2.-¿Pueden ser equivalentes dos figuras con distinta forma?
 3.-¿Puede ser un cuadrado equivalente a un rectángulo?”

Completa la siguiente expresión:

“Para comparar dos superficies debes.....”

A.-Descripción de la producción escrita

Patricia respondió a la **primer pregunta** “Sí, si tienen la misma forma son equivalentes”, a la **segunda pregunta** respondió “Si pueden, por ejemplo” , y dibujó dos posibilidades con traminós distintos; en uno consideró los tres cuadrados en hilera y la otra posibilidad fue considerar dos cuadrados

consecutivos y el tercero lo ubicó apareando un lado con la mitad del lado de los otros”; a la **tercera pregunta** respondió “*Sí , puede serlo si constan de las mismas unidades interiormente*”, y por último completó la frase “*Para comprar dos superficies debes medir el área que deseas comprar*”

B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

4

Patricia respondió y justificó correctamente dos de las tres preguntas, la segunda y la tercera. De ellas se desprende que (en la segunda a través de sus dibujos) reconoce que si una figura se compone y recompone en otra, su área no varía (ind 2.7.- en *Percepción de propiedades*). En cuanto a la tercera, reconoce que el cuadrado y el rectángulo pueden ser equivalentes (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*) a través de efectuar cubrimiento en ambas figuras, con igual unidad de medida y comprobar que coincide la cantidad de veces que esta contenida dicha unidad en cada una de las figuras mencionadas (ind 4.1 en *Producción de una imagen*).

Con respecto a la respuesta de la primera pregunta, Patricia no analiza la posibilidad de que dos figuras puedan tener igual forma y distinto tamaño, es decir figuras semejantes, y en consecuencia, la igualdad de formas no implica la igualdad de área.(ind 2.9 en *Percepción de propiedades*)

Por último, cuando completa la expresión escribe las dos veces “comprar”, aunque de lo expresado se puede inferir que ha querido escribir “Comparar”.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B- y en *Producción y Posesión de una imagen* – Capa B y Capa C- y con tres indicadores *Percepción de Propiedades* – Capa D-.

Del análisis de la producción escrita, estimamos conveniente construir el siguiente gráfico que denota lo logrado por Patricia.

Concretamente la niña logra la demanda, excepto que no explicita el modo de calcular el área al momento de comparar superficies, ni analiza la posibilidad de que dos figuras puedan tener igual forma y distinto tamaño.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carece de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

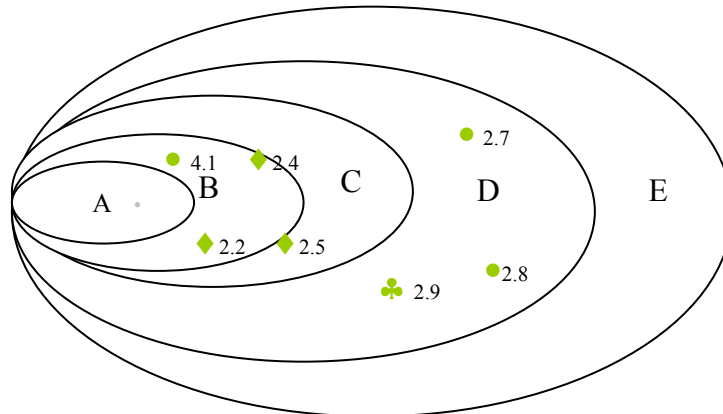
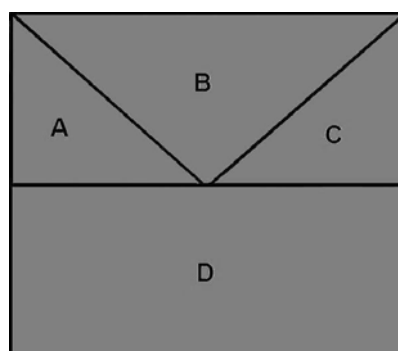


Gráfico de Comprensión -E -de P asociado a la act.4

- 2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión)
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra, su área no varía
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 2.9.-Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área.
- 4.1.- Divide y pavimenta la superficie a medir y recuenta el número de unidades empleado.

Actividad 5 (P5):

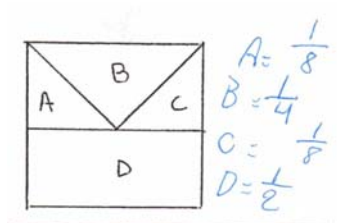
El siguiente rompecabezas está armado con las fichas: A, B, C, y D. Expresa con una fracción cada ficha del rompecabezas.



A.-Descripción de la producción escrita

Se presenta un rompecabezas de forma cuadrada formado por cuatro piezas (una rectangular y tres triangulares), las piezas se determinan al trazar la base media del cuadrado (pieza rectangular) y las dos semidiagonales (tres triángulos isósceles). El rectángulo se designa con la letra D, el triángulo isósceles cuya hipotenusa es el lado del cuadrado se designa con la letra A y los dos triángulos congruentes restantes se designan con las letras B y C, respectivamente. Se les solicita que respondan y justifiquen la siguiente pregunta: “¿Puedes escribir una fracción, para cada una de las piezas del rompecabezas?”

Patricia responde “ $A = 1/8$; $B = 1/4$; $C = 1/8$ y $D = 1/2$ ”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

5

Este problema también lo consideramos de anclaje pues se tomó en el cuestionario sobre ideas previas. En esa instancia, se preguntó *¿Qué parte del rompecabezas representa cada pieza?* La mayoría de los niños, y en particular Patricia, se refirieron al tipo de figura; en función de ello, reformulamos el enunciado.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se relaciona exclusivamente con *Percepción de Propiedades* – Capa D- y del análisis de la producción escrita avizoramos que Patricia puede relacionar las partes con el todo en función del área de la superficie, a través de una fracción, aunque observamos ausencia de justificación.(ind 2.11 en Percepción de propiedades)

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carece de información

- A.-Conocimiento primitivo
- B.-Producción de una imagen
- C.- Posesión de una imagen
- D.- Percepción de Propiedades
- E.- Formalización

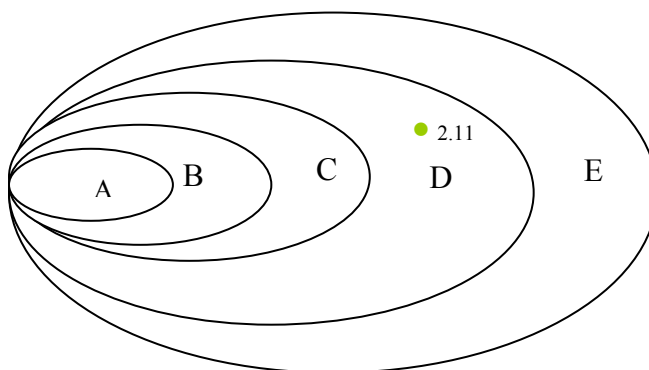


Gráfico de Comprensión -E -de P asociado a la act.5

2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie, con respecto al área total, es decir relacionan las partes y el todo a través de las fracciones

4.1.4.1. RELACION ENTRE LOS GRAFICOS DE COMPRESION: DESEABLE Y EL DE PATRICIA

Con la resolución de las actividades correspondientes al cuestionario acerca de la evaluación de los contenidos referidos al concepto de área implementado en la secuencia, pretendimos detectar los logros que obtuvo Patricia en la construcción del concepto.

El cuestionario se compone de cinco actividades, y a cada uno se le asignan indicadores de las categorías, los dispusimos en un gráfico de anillos a efectos de dar cuenta acerca de la comprensión deseable de los mismos. Así su distribución en el gráfico de comprensión es la siguiente: cuatro indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- cinco indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen-* Capa B y Capa C –dos indicadores en *Posesión de propiedades* – Capa C- cinco indicadores en *Percepción de propiedades* – Capa D- y un indicador en el anillo *Percepción de Propiedades - Formalizar-* Capa D y Capa E

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carece de información

A.-Conocimiento primitivo B.-Producción de una imagen C.- Posesión de una imagen D.- Percepción de Propiedades E.- Formalización

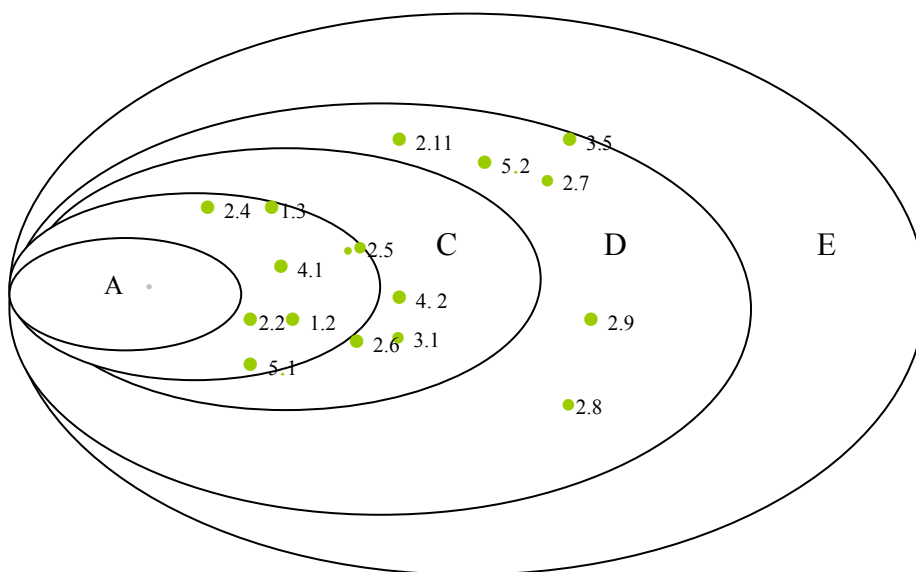


Gráfico Global de Comprensión de Evaluación Deseable

- 1.2.-Aparea lados.
- 1.3.-Aparea vértices
- 2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión)
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente
- 2.6.-Construye superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra, su área no varía
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 2.9.-Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área
- 2.11.-Relaciona el todo y las partes y entre las partes. Es decir, relaciona las fracciones con respecto al área de una superficie
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.5.-Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo
- 5.2.-Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras

Las respuestas brindadas por Patricia nos permiten anticipar el gráfico en el que volcamos los logros de los indicadores involucrados.

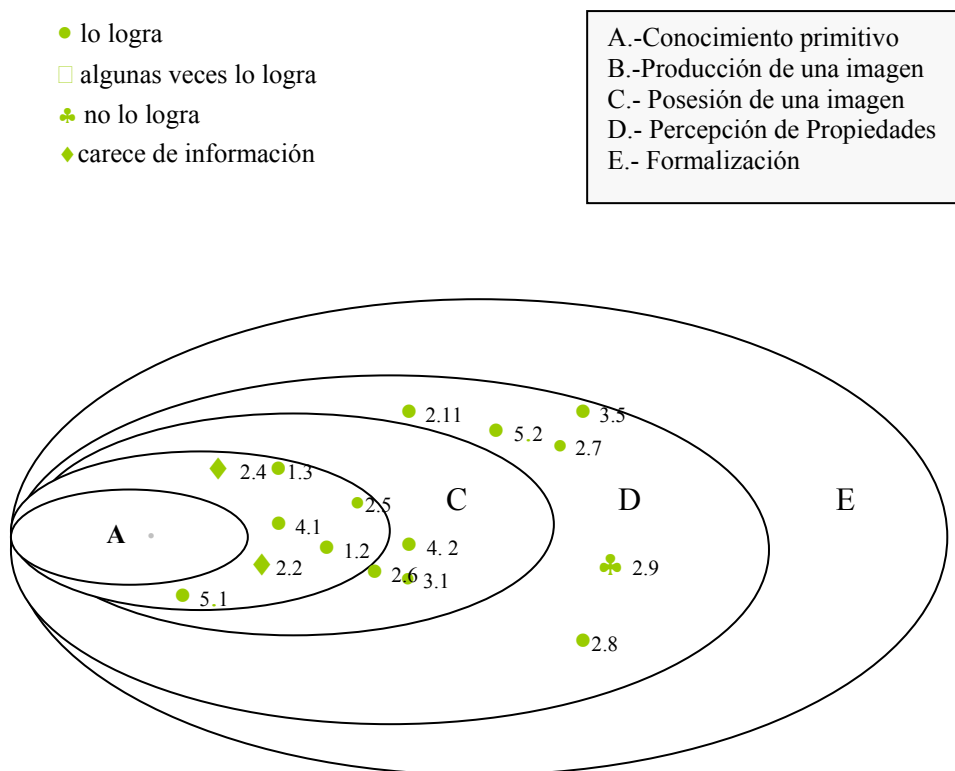


Gráfico Global de Comprensión – Evaluación - de Patricia

En relación de ambos gráficos de comprensión –el deseable y el de Patricia - detectamos que la niña, excepto los indicadores 1.5 y 2.3 asignados a la actividad 1, excluida de este análisis, ha logrado, en general, lo deseable. Pues aparea las figuras por sus lados (ind 1.2 en *Producción de una imagen*) y por sus vértices. (ind 1.3 en el anillo *Producción- Posesión de una imagen*) para construir figuras. Reconoce que si una figura se compone y recompone en otra, su área no varía (ind 2.7.- en *Percepción de propiedades*). Especialmente para construir figuras equivalentes de perímetro mayor (ind 3.5 en anillo *Percepción de propiedades- Formalización*). Es decir, obtiene figura equivalente y de distinta forma. (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*).

Diferencia la noción de área de la de perímetro, (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*) y expresa las mismas con la unidad de medida conveniente (ind 4.2.- *Posesión de una imagen*). Prueba de ello es la unidad convencional (cm^2) que utilizó- actividad 4- de manera significativa, debido a las intervenciones familiares.

Dispone de la construcción mental de la noción área que les permite

comparar y/o construir superficies, de manera indirecta, a través de la medición en función de una unidad, (ind 2.5, ind 2.6 e en *Producción –Posesión de una imagen*). Por ejemplo, reconoce que el cuadrado y el rectángulo pueden ser equivalentes (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*)

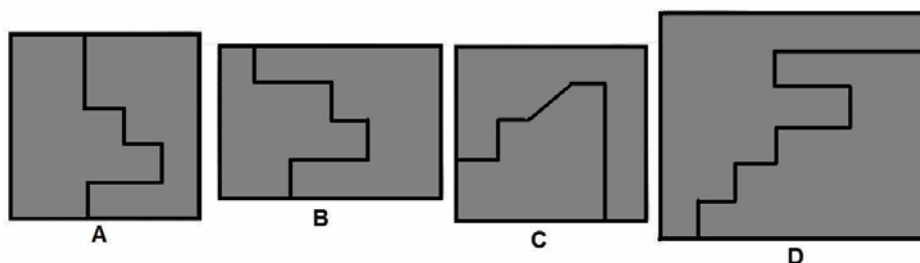
Después del tratamiento geométrico que primó en la secuencia de aprendizaje, pretendimos indagar si los niños podían anticipar alguna respuesta respecto a qué figuras de igual forma necesariamente son equivalentes. En particular, Patricia no descubrió qué figuras de igual forma pueden tener distintas áreas – figuras semejantes. Es decir, la igualdad de formas no implica la igualdad de área (ind 2.9 en *Percepción de propiedades*).

4.1.5.- ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO A MEDIO PLAZO (MPP)

La resolución del cuestionario realizado por Patricia se adjunta en el Anexo XIII. A continuación se describe el desarrollo propuesto por la niña. Cuando la producción escrita muestra el proceso de construcción que se produce en ella, lo incluimos para dar cuenta de ello.

Actividad 1 (MPP1)

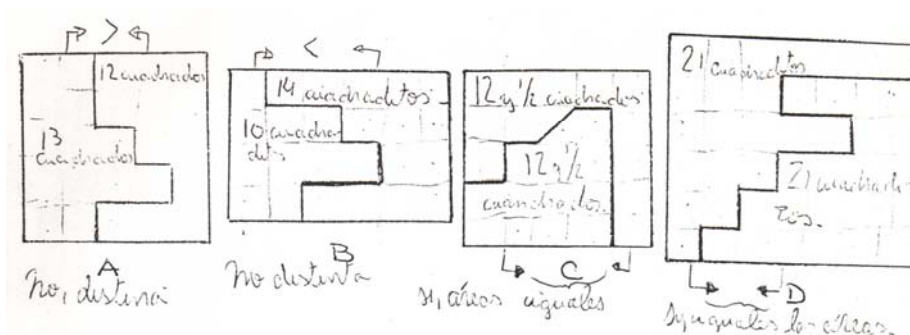
1.- Si cortamos las figuras por la línea marcada ¿las dos partes tienen la misma área?



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia subdivide las figuras en “cuadraditos” y en la figura:

- ✓ A: en la región a su izquierda escribe “13 *cuadrados*” y en la ubicada a su derecha escribe “12 *cuadrados*”. Arriba de la figura, de cada región saca una flecha y coloca entre ellas el signo “>”. Debajo de la figura escribe “No, distinta”
- ✓ B: en la región a su izquierda escribe “10 *cuadrados*” y en la ubicada a su derecha escribe “14 *cuadrados*”. Arriba de la figura, de cada región saca una flecha y coloca entre ellas el signo “<”. Debajo de la figura escribe “No, distinta”
- ✓ C: en la región a su izquierda escribe “12 y $\frac{1}{2}$ *cuadrados*” y en la ubicada a su derecha escribe “12 y $\frac{1}{2}$ *cuadrados*”. Debajo de la figura escribe “Sí, son iguales”
- ✓ D: en la región a su izquierda escribe “21 *cuadrados*” y en la ubicada a su derecha escribe “21 *cuadrados*”. Debajo de la figura escribe “Sí, son iguales”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

1

Este problema se relaciona con conocimientos matemáticos involucrados en la primera y cuarta actividad del cuestionario sobre sus conocimientos matemáticos disponibles (CMP1) y (CMP4) y en la segunda y séptima actividad del cuestionario acerca de las ideas previas de área (IPP2);(IPP7). En esa oportunidad, Patricia demostró conocimiento del campo multiplicativo y pudo pavimentar la región a través de una unidad dada, (ind 4.1 e ind 5.1.- *Producción de una imagen*).

Patricia efectúa un cubrimiento en cada una de las figuras a efectos de comparar las subregiones, en base al recuento de las unidades, seleccionadas

adecuadamente, (ind 4.1.- en *Producción de una imagen*) 2.5.- en *Producción-Posesión de una imagen*- 4.2. En *Posesión de una imagen*) arribando así al resultado correcto.

A través de este procedimiento, advierte que dos superficies pueden tener igual área y, sin embargo, distinta forma. (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*).

Del análisis, factible de realizar a través de la producción escrita, podemos pensar en esbozar una posible trayectoria acerca del proceso que realiza Patricia para arribar a las respuestas. Concretamente la niña logra la demanda esperada, y para ello selecciona el método con el cual va a comparar, es decir, compara las regiones midiendo. No compara directamente por inclusión (ind.2.2) ni componiendo y descomponiendo (ind 2.4), ni podemos afirmar que reconoce figuras equivalentes por descomposición (ind 2.7) por lo cual carecemos de información cerca de los mismos.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B- y dos en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* - Capa B y Capa C- un indicador en *Posesión de una imagen* – Capa C- y dos indicadores en *Percepción de Propiedades* – Capa D-.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- A.-Conocimiento primitivo
- B.-Producción de una imagen
- C.- Posesión de una imagen
- D.- Percepción de Propiedades
- E.- Formalización

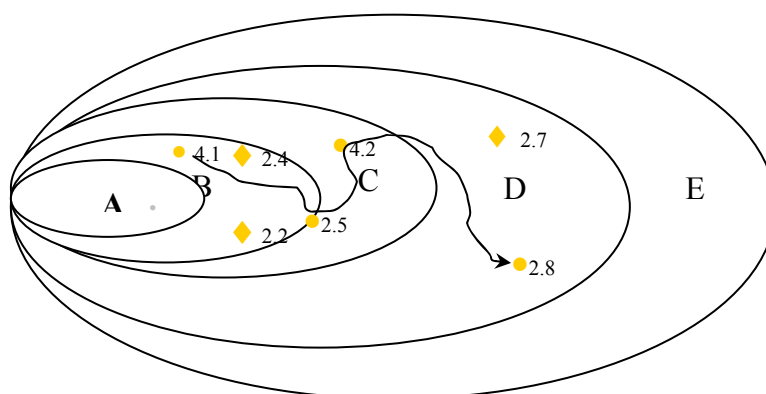
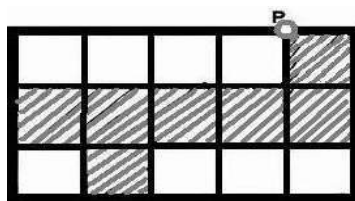


Gráfico de Comprensión - MP - de P asociado a la act. 1

- 2-2- Compara superficies por superposición (inclusión)
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra, su área no varía
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.

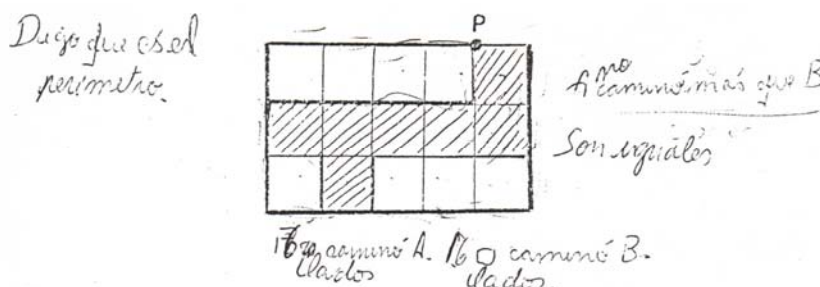
Actividad 2 (MPP2):

Una hormiga A sale del punto P. Recorre el perímetro del rectángulo de trazo grueso y vuelve a P. Otra hormiga B, también sale de P y recorre el perímetro de la zona rayada y regresa a P. ¿Cuál de las dos hormigas camino más? ¿Qué puedes decir de la región determinada por cada camino?



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia responde (tacha el 7) y escribe 16 lados caminó A y 16 cuadradito abajo (escribe “lados”) caminó B. Con respecto a la pregunta “¿Cuál de las hormigas camino más?”, respondió “A no caminó más que B. Son iguales” y a la pregunta “¿Qué puedes decir de la región determinada por cada camino?” Respondió “Digo que es el perímetro”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

2

Con respecto a quién caminó más, Patricia en principio de manera visual,

considera que A caminó más que B, debido a que “encierra más “cuadraditos”. Luego agrega un “no” y calcula el perímetro de cada una de ellas, (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*), para ello elige una unidad conveniente (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*) (el lado del cuadradito) y cuenta 16, en ambos, y expresa “Son iguales”, arriba así, a la respuesta correcta (ind 3.3 en *Percepción de propiedades*).

La segunda pregunta asocia incorrectamente la región con la frontera, por lo cual responde “el perímetro”. Efectuamos una mirada global a la respuesta que formuló, y es muy posible que Patricia no haya comprendido el término “región” puesto que, durante el desarrollo de la secuencia no se usó esta denominación. Aspectos que no nos permiten anticipar si puede comparar superficies según su área.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en cada uno de las siguientes Capas: *Producción de una imagen*-Capa B – y *Posesión de una imagen* – Capa C- y con tres indicadores en *Percepción de Propiedades* – Capa D-

Del análisis de la producción escrita, estimamos conveniente construir el siguiente gráfico de comprensión que denota lo logrado por Patricia, desestimando los indicadores 3.4.-, 4.1 y 5.1, pues al no interpretar la palabra “región” no podemos detectar el logro de los mismos.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- | |
|--|
| A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización |
|--|

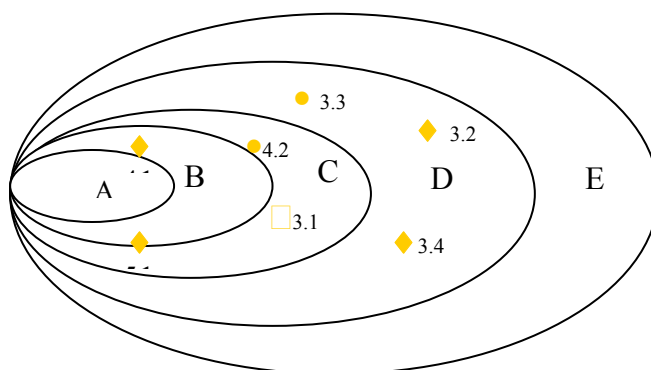
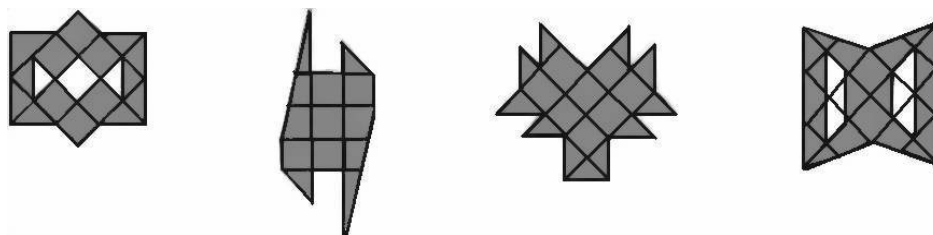


Gráfico de Comprensión - MP - de P asociado a la act. 2

- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.2.-Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor /igual/ menor perímetro de la misma.
- 3.3.-Identifica figuras isoperimétricas
- 3.4.-Ordena figuras isoperimétricas respecto del área.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo

Actividad 3: (MPP3)

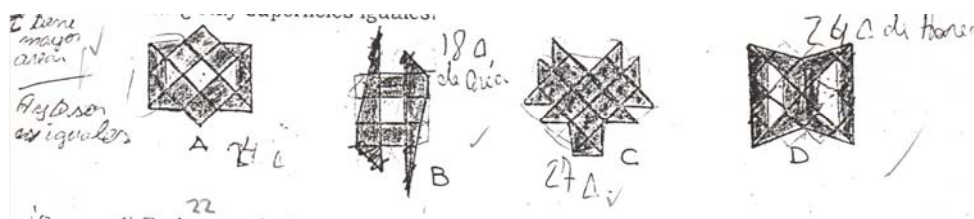
¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? ¿Cuál tiene menor área? ¿Hay superficies iguales?



A.-Descripción de la producción escrita

Se presentan cuatro dibujos sobre papel cuadriculado y se les solicita que identifiquen la figura que tiene mayor área, la que tiene menor área y que distingan si hay superficies iguales.

Patricia expresa al lado de cada figura, en la primera, “24 $\triangle$ ” (más abajo pone 22); en la segunda, “18 $\triangle$ de área” en la tercera “27 $\triangle$ ” y en la cuarta “24 $\triangle$ de área” y responde “C tienen mayor área” y “A y D son iguales”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad 3

Patricia reconoce el triángulo como unidad conveniente que le permite comparar. (ind 4.2 .- en *Poseción de una imagen*)

En principio, la niña compone para formar cuadrados, según se observa en la segunda, tercera y cuarta figura, y expresa en función del triángulo, (ind 2.5 en *Producción –Poseción de una imagen*) a efectos de poder comparar todas ellas, (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*). En función de ello, identifica la superficie de mayor área y las dos superficies de distinta forma pero de igual área.(ind 2.8 en *Percepción de propiedades*)

Compara así el área de las figuras obtenidas y responde correctamente la primera pregunta cuando expresa “*C tiene mayor área*”; con respecto a la de menor área, no responde.

En cambio, identifica igualdad de superficie con igualdad de área, es decir, con figuras equivalentes, según se observa en la respuesta cuando afirma que “*A y D son iguales*”. Esta afirmación la realiza en función de los resultados que obtiene (siendo el resultado arribado de A incorrecto pues el resultado es 22 triángulos, número que puso mas abajo). No obstante, demuestra que las figuras pueden ser equivalentes y tener distinta forma. (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*)

Relaciona “superficie de una figura” con “área de una figura” y, esto puede deberse a que durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje nos hemos referido a piezas del Tangram o a figuras en general.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B- con dos indicadores en la frontera entre *Producción y Poseción de una imagen*- Capa B y Capa C-, con un indicador en *Poseción de una imagen*-Capa C- y tres indicadores en - *Percepción de Propiedades* – Capa D-

Del análisis de la producción escrita, desestimamos los indicadores 2.2.-, 2.4.- y 2.10.- pues por un lado, Patricia compara superficies y mide a través de una unidad conveniente - que era lo que se esperaba- en lugar de hacerlo por otros

métodos- Por otro lado, según los resultados obtenidos, arriba sólo a dos superficies de igual área, por lo tanto carecemos de información si fueran más de dos superficies. Los restantes indicadores los logra según su producción escrita, los cuales denotan el proceso de construcción a través del tiempo.

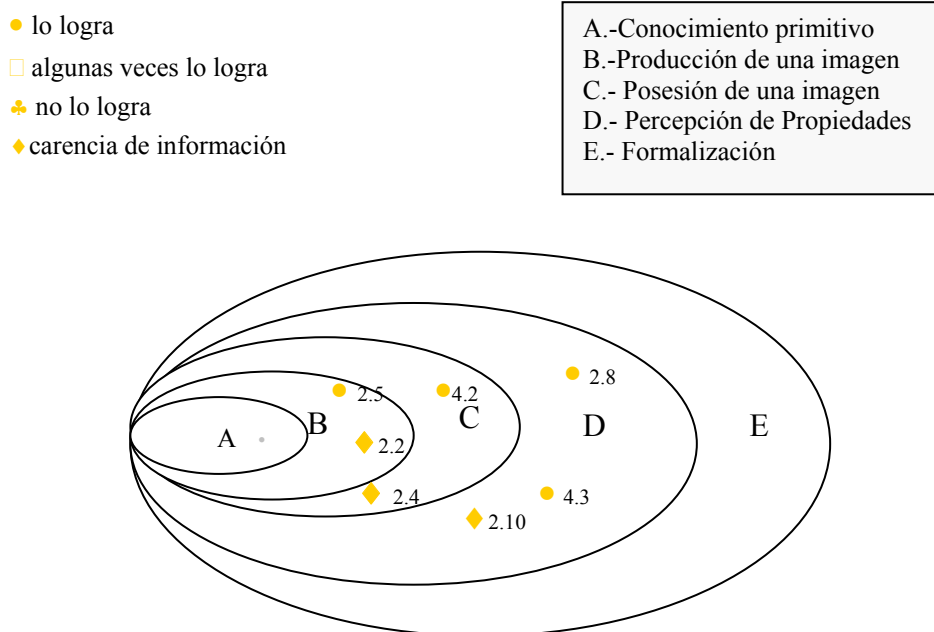


Gráfico de Comprensión - MP - de P asociado a la act. 3

- 2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión)
 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
 4.2.-Elige una unidad adecuada.
 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.

Actividad 4(MPP4):

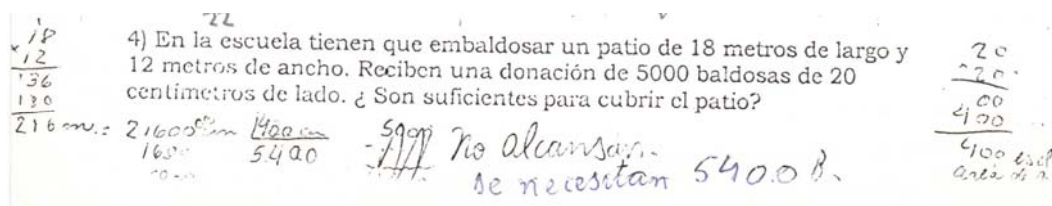
En la escuela tienen que embaldosar un patio de 18 metros de largo y 12 metros de ancho. Reciben una donación de 5000 baldosas de 20 cm. de lado. ¿Son suficientes para cubrir el patio?

A.-Descripción de la producción escrita

Patricia resuelve el problema y expresa el resultado correcto. Para ello

multiplica 20 por 20 y calcula el área de la baldosa cuando expresa “440 es el área de la baldosa”, también multiplica 18 por 12, cuyo resultado es 216, pero lo expresa en m, reduce y pone 21600 cm, pero agrega dos ceros y divide esa expresión (2160000) por 400m, obteniendo como cociente 5400. Entonces dice

“No alcanzan, se necesitan 5400 b”



B.-Análisis de la producción de Patricia correspondiente a la actividad

4

Patricia calcula el área de la baldosa y del patio considerando las dimensiones lineales de ambos, utiliza para ello la fórmula del cuadrado y del rectángulo, respectivamente (ind 5.2.- en Percepción de propiedades). Para encontrar el número de baldosas relaciona el área del patio y el área de las baldosas. Aunque expresa la unidad como “m” y “cm.”, reduce correctamente de m^2 a cm^2 , según se puede apreciar. Aunque no ha expresado simbólicamente bien las unidades, relaciona convenientemente las variables y la unidad de medida para poder comparar. (ind 4.2 en Posesión de una imagen). Establece para ello, la relación de proporcionalidad que existe entre esas unidades.

Lo realizado cobra sentido cuando averigua el número de baldosas necesarias, a través de la división de la superficie a medir y la superficie de la baldosa.

Ahora bien, de la cuenta realizada se puede inferir dos posibilidades. Una de ellas, es que al realizar la cuenta entre 21600cm y 400cm, el resultado es 54 y ese número no tiene sentido para ella en el contexto del problema, por lo cual decide multiplicar por 100, ¡solamente el área del patio! , con lo cual le da como resultado 5400 y ese valor, sí tiene sentido para ella. La otra posibilidad, es que cuando pone 216 m y 400 cm., ella pensó poner 216 m^2 y 400 cm^2 respectivamente. Luego, para poder realizar la operación, expresa el área del patio en cm^2 para poder establecer la relación y obtener así el número de baldosas

necesarias. Para ello, Patricia reduce esa expresión multiplicando por cien y nuevamente por cien

La reducción realizada no era un aspecto a considerar en función de los contenidos abordados en este trabajo, es decir que es un efecto no esperado por parte de Patricia, pues demuestra que puede expresar el área de una superficie en función de distintas unidades de medida y efectuar las respectivas reducciones. Efecto muy posible si consideramos el lapso transcurrido y los conocimientos que ha desarrollado durante este tiempo en el ciclo escolar.

El procedimiento que desarrollo la niña para arribar a una respuesta no necesito acudir al pavimento y recuento de las baldosas utilizadas, por lo tanto carecemos de información acerca de los respectivos indicadores (ind.4.1 e ind. 5.1.- *Producción de una imagen*).

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B- con un indicador en cada uno de los siguientes anillos: *Posesión de una imagen* – Capa C- y *Percepción de Propiedades* – Capa D-

Del análisis de la producción escrita, construimos el siguiente gráfico de comprensión logrado por Patricia en la resolución de un problema del contexto real.

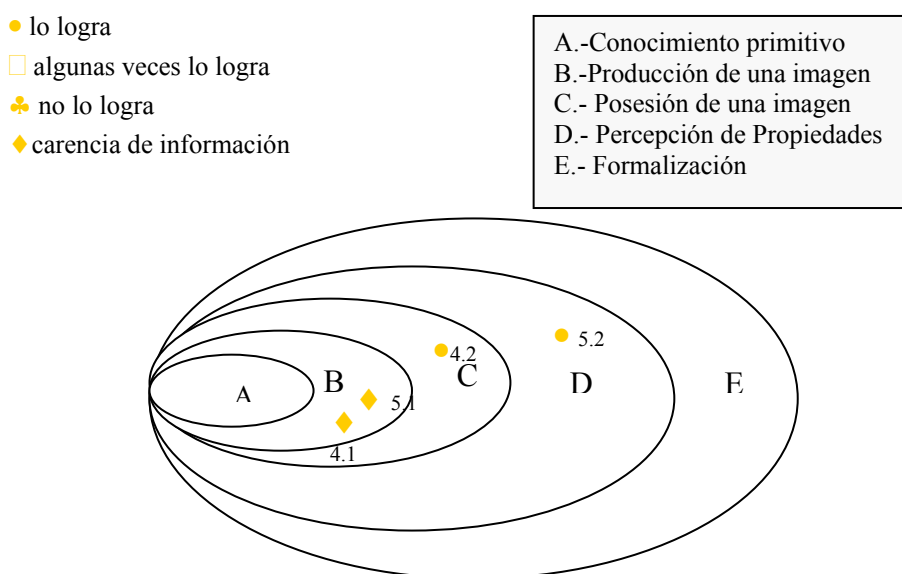


Gráfico de Comprensión - MP - de P asociado a la act. 4

- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras.

4.1.5.1. RELACION ENTRE LOS GRAFICOS DE COMPRENSION: DESEABLE Y EL DE LA NIÑA

Con la resolución de las actividades correspondientes al cuestionario de la evaluación a mediano plazo de los contenidos referidos al concepto de área, pretendimos detectar la perdurabilidad y funcionalidad que había logrado Patricia en la construcción del concepto de área. El cuestionario se compone por cuatro actividades y a cada una de ellas les corresponden indicadores de las categorías. Estos indicadores los hemos dispuesto en un gráfico global -de capas- a efectos de dar cuenta de la comprensión deseable de los mismos. Así su distribución en el *grafico global de comprensión* es la siguiente: dos indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- un indicador en el anillo *Producción - Posesión de una imagen-Capa B y Capa C* –dos indicadores en *Posesión de propiedades* – Capa C- seis indicadores en *Percepción de propiedades* – Capa D-

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ✿ no lo logra
- ◆ carencia de información

- A.-Conocimiento primitivo
- B.-Producción de una imagen
- C.- Posesión de una imagen
- D.- Percepción de Propiedades
- E.- Formalización

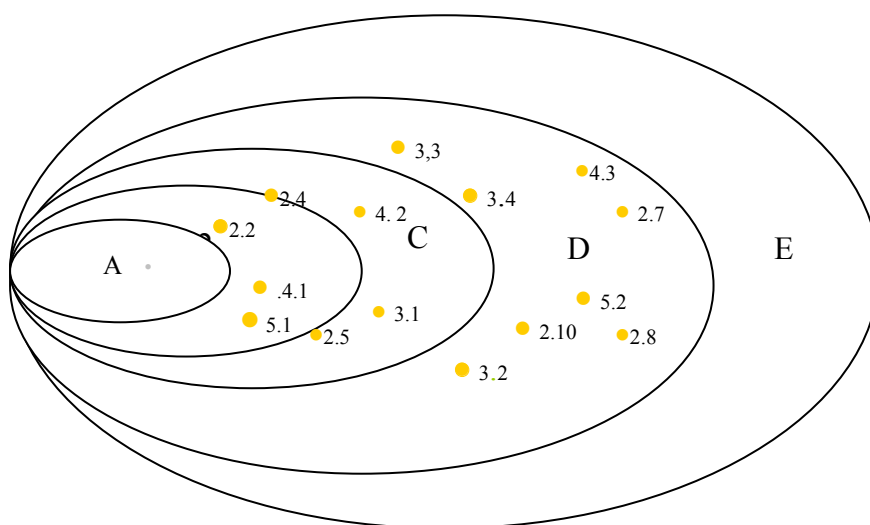


Gráfico Global de Comprensión Deseable a Medio Plazo

- 2-2.-Compara superficies por superposición (inclusión)
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra, su área no varía
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.2.-Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor /igual/ menor perímetro de la misma.
- 3.3.-Identifica figuras isoperimétricas
- 3.4.-Ordena figuras isoperimétricas respecto del área.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo
- 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras.

Las respuestas brindadas por Patricia nos permiten anticipar el gráfico global de comprensión en el que volcamos los logros de los indicadores involucrados.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- A.-Conocimiento primitivo
- B.-Producción de una imagen
- C.- Posesión de una imagen
- D.- Percepción de Propiedades
- E.- Formalización

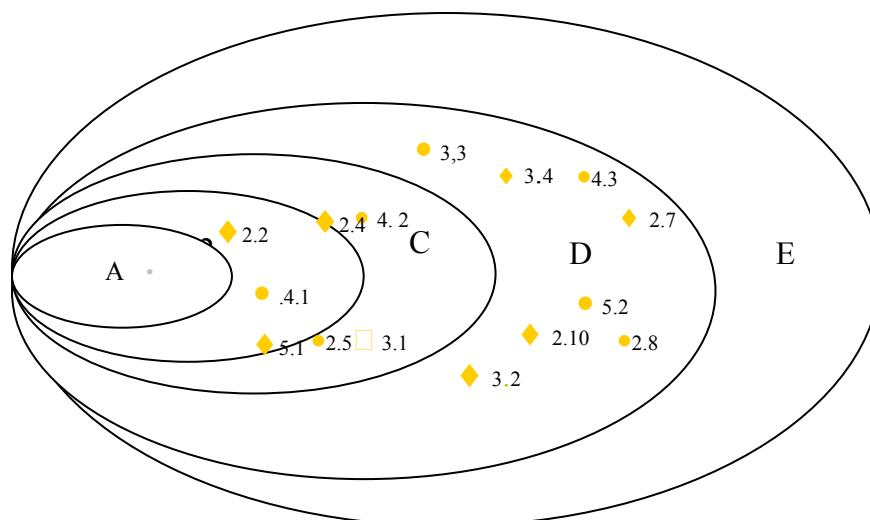


Gráfico Global de Comprensión -MP- de Patricia

Relacionamos ambos gráficos global de comprensión – el deseable y el de Patricia - y observamos que la niña al resolver las actividades, ha justificado la mayoría de ellas. Aspecto que, en algunas de ellas, permitió esbozar la trayectoria de su proceso de comprensión.

Con respecto a la construcción de los indicadores esperables, ha logrado construir su gran mayoría, por ejemplo, para calcular el área pavimenta la superficie, a través de una unidad conveniente (ind 4.1 en *Producción de una imagen*; ind 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen* e ind 4.2 en *Posesión de una imagen*) e identifica dos superficies de distinta forma e igual área (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*).

Advierte que la medida del área de una superficie depende la unidad utilizada (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*) y a la hora de establecer relaciones entre superficie puede efectuar las respectivas reducciones. Efecto no esperado pero muy posible, si consideramos el lapso transcurrido y los conocimientos que ha construido durante ese tiempo, en el ciclo escolar.

Pensamos que la niña confunde el significado de la palabra “región” con el de “frontera” y por ello, en la actividad 2, contesta “el perímetro”. Estos aspectos nos llevan a dudar si aún persiste la confusión manifestada en las instancias anteriores entre la noción de área y perímetro. Motivo que nos ha llevado a responder que algunas veces logra lo expresado. (ind 3.1 en *Producción de una imagen - Percepción de sus propiedades*). Motivo por el cual no disponemos de información de la niña acerca de la invariabilidad del perímetro y el área

Asimismo, observamos que relaciona “superficie de una figura” con “área de una figura” y esto puede deberse a que durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje nos hemos referido a piezas del Tangram o a figuras en general.

El procedimiento llevado a cabo por la niña en la resolución de las actividades, la impulsaron a utilizar solamente algunos de los indicadores propuestos, de ahí surge la carencia de información respecto del logro de los mismos. Sin embargo es una circunstancia factible cuando los niños resuelven problemas.

4.1.6.- TENDENCIAS DE LAS CATEGORÍAS DETECTADAS EN RELACIÓN A LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA EN PATRICIA

A continuación, vamos a volcar en tablas, la información de logros detectados en el análisis efectuado de cada uno de los indicadores de las categorías enunciadas. Para ello, consideramos cada una de las actividades que componen los instrumentos, a fin de percibir su tendencia y tratar de avizorar las características de las categorías relacionadas con la construcción del concepto de área, en este caso, de Patricia.

Para ello enunciamos cada categoría, sus respectivos indicadores y una tabla para cada uno de ellos, que da cuenta de la tendencia respecto de su construcción. En particular, la tabla está compuesta por dos filas. En la primera fila explicitamos cada una de las actividades que componen cada uno de los instrumentos implementados y el indicador está asociado y en la segunda fila expresamos los logros obtenidos, por ejemplo, si lo logra, escribimos “Si”, si no lo logra, escribimos “No” y si sólo lo logra algunas veces, escribimos “AV” si carecemos de información suficiente, escribimos “CI”. Finalmente, en la última columna, inferimos el resultado global del logro del indicador, según nos referimos en el capítulo anterior, apartado 3.6.7.

Categorías

1.-Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja.

1.1.-Maneja el material mediante manipulación Se corresponde con el Capa B (*Producción de una imagen*)

LO LOGRA, pues

	SP1	SP2	SP8	Global
Lo logra	Si	Si	Si	Si

1.2.- Aparea lados. Se corresponde con el Capa B (*Producción de una imagen*)

LO LOGRA, pues

	SP1	SP4	SP6	SP8	EP2	Global
Lo logra	Si	Si	Si	Si	Si	Si

1.3.- Aparea vértices. Se corresponde con el anillo entre las capas B y C (Producción de una imagen / Posesión de una imagen)

LO LOGRA, pues

	SP1	EP2	Global
Lo logra	SI	SI	SI

1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras. Se corresponde con el anillo entre las capas B y C (Producción de una imagen / Posesión de una imagen)

LO LOGRA, pues

	SP1	SP2	SP4	SP8	SP9	SP10	SP11
Lo logra	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
	SP12	Global					
Lo logra	SI	SI					

1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos. Se corresponde con el anillo entre las capas B y C (Producción de una imagen / Posesión de una imagen)

LO LOGRA, pues

	SP2	SP11	SP12	Global
Lo logra	SI	SI	SI	SI

2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.

2. 1.-Compara superficies por percepción visual Se corresponde con la Capa B (Producción de una imagen)

LO LOGRA, pues

	IAP1	IAP4	IAP6	SP3	Global
Lo logra	SI	SI	SI	SI	SI

2. 2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión. Se corresponde con la Capa B (Producción de una imagen)

LO LOGRA, pues

	IAP4	SP3	SP4	SP8	EP4	MPP1	MPP3	Global
Lo logra	CI	Si	CI	CI	CI	CI	CI	Si

2.3.- *Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone). Equivalencia de figuras* Se corresponde con l el anillo entre las capas B y C (*Producción de una imagen / Posesión de una imagen*)

LO LOGRA, pues

	IAP1	IAP4	SP1	SP2	SP3	SP4	SP8
Lo logra	CI	CI	SI	AV	Si	Si	Si
	SP11	SP12	Global				
Lo logra	Si	Si	Si				

2.4.- *Compara superficies por composición y descomposición (transformación indirecta).* Se corresponde con el anillo entre las capas B y C (*Producción de una imagen / Posesión de una imagen*)

LO LOGRA, pues

	IAP1	IAP4	IPA6	SP2	SP3	SP4	SP8	SP10
Lo logra	No	CI	No	Si	Si	Si	Si	CI
	EP4	MPP1	MPP3	Global				
Lo logra	CI	CI	CI	Si				

2.5.- *Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente* Se corresponde con el anillo entre las capas B y C (*Producción de una imagen / Posesión de una imagen*)

LO LOGRA, pues

	IAP1	SP4	SP8	SP10	SP11	EP2	EP4
Lo logra	No	Si	Si	Si	SI	SI	CI
	MPP1	MPP3	Global				
Lo logra	Si	Si	Si				

2.6.- *Construye superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente* Se corresponde con el anillo entre las capas B y C (*Producción de una imagen / Posesión de una imagen*)

LO LOGRA, pues

	SP8	EP2	Global
Lo logra	Si	Si	Si

2.7.- Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía. Se corresponde con la Capa D (Percepción de propiedades)

LO LOGRA, pues

	IAP1	IAP4	IAP6	IAP8	SP2	SP3
Lo logra	SI	CI	No	CI	Si	Si
	SP4	SP8	SP11	EP4	MPP1	Global
Lo logra	Si	Si	Si	Si	CI	Si

2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área. Se corresponde con la Capa D (Percepción de propiedades)

LO LOGRA, pues

	IPA4	SP3	SP8	EP2	EP4	MPP1	MPP3	Global
Lo logra	CI	Si	SI	Si	Si	Si	Si	Si

2.9.-Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área. Se corresponde con la capa D (Percepción de propiedades)

NO LO LOGRA, pues

	EP4	Global
Lo logra	No	No

2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área. Se corresponde con la Capa D (Percepción de propiedades)

LO LOGRA, pues

	IAP4	SP3	SP4	SP8	MPP3	Global
Lo logra	CI	Si	Si	Si	CI	Si

2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones. Se corresponde con la Capa D (Percepción de propiedades)

LO LOGRA, pues

	IAP3	SP8	EP5	Global
Lo logra	CI	Si	Si	Si

3.- Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro.

3.1.- *Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura .Se corresponde con la Capa C (Posesión de una imagen).*

A VECES LO LOGRA, pues

	IAP6	SP3	SP6	SP8	EP2	MPP2	Global
Lo logra	No	AV	SI	AV	Si	AV	AV

3.2.-*Reconoce que a mayor/ igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/ menor perímetro de la misma Se corresponde con La Capa D (Percepción de propiedades)*

LO LOGRA, pues

	IAP6	SP6	MPP2	Global
Lo logra	CI	Si	CI	Si

3.3.-*Identifica figuras isoperimétricas. Se corresponde con la Capa D (Percepción de propiedades)*

LO LOGRA, pues

	MPP2	Global
Lo logra	SI	SI

3.4.- *Ordena figuras isoperimétricas respecto del área. Se corresponde con el anillo entre las Capas B y capa C (Producción de una imagen / Posesión de una imagen)*

CARECEMOS DE INFORMACIÓN pues

	MPP2	Global
Lo logra	CI	CI

3.5.- *Construye figuras equivalentes de distinto perímetro Se corresponde con el anillo entre la Capa D y la Capa E (Percepción de propiedades / Formalizar)*

LO LOGRA, pues

	S6	EP2	Global
Lo logra	No	Si	Si

3.6.- *Ordena figuras equivalentes, según el perímetro* Se corresponde con la Capa D (*Percepción de propiedades*)

LO LOGRA, pues

	SP6	Global
Lo logra	Si	Si

4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento

4.1.- *Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado* Se corresponde con la Capa B (*Producción de la imagen*)

LO LOGRA, pues

	IAP2	IAP7	SP4	SP8	SP9	SP11	SP12
Lo Logra	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

	SP13	EP3	EP4	MPP1	MPP2	MPP4	Global
Lo Logra	Si	Si	Si	Si	CI	CI	SI

4.2.- *Elige una unidad adecuada* Se corresponde con la Capa C (*Posesión de una imagen*)

LO LOGRA, pues

	IAP7	SP4	SP8	SP9	SP10	SP11
Lo Logra	Si	SI	Si	Si	Si	Si

	SP12	SP13	EP3	MPP1	MPP2	MPP3
Lo Logra	Si	Si	Si	Si	Si	Si

	MPP4	Global
Lo Logra	Si	SI

4.3.- *Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.* Se corresponde con la Capa D (*Percepción de propiedades*)

LO LOGRA, pues

	SP8	SP9	SP10	MPP3	Global
Lo Logra	Si	Si	Si	Si	Si

4.4.- *Advierte la necesidad de unidades convencionales.* Se corresponde con la Capa D (*Percepción de propiedades*)

LO LOGRA, pues

	SP8	SP9	SP11	SP12	SP13	Global
Lo Logra	AV	Si	Si	Si	Si	Si

4.5.- *Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud* Se corresponde con la Capa E (*Formalización*)

LO LOGRA, pues

	SP8	SP9	SP10	Global
Lo Logra	Si	Si	Si	Si

5.- Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo, triángulo como camino más económico

5.1.- *Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo* Se corresponde con la Capa B (*Producción de una imagen*)

LO LOGRA, pues

	IAP2	IAP7	SP12	EP3	MPP2	MPP4	Global
Lo Logra	Si	Si	Si	Si	CI	CI	Si

5.2.- *Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras.* Se corresponde con la Capa D (*Percepción de propiedades*)

LO LOGRA, pues

	IAP2	IAP7	SP12	SP13	EP3	MPP4	Global
Lo Logra	Si	SI	Si	Si	Si	Si	Si

4.1.7.-ANÁLISIS GLOBAL DEL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE AREA EN PATRICIA

A los efectos de abstraer el proceso de construcción del concepto de área en Patricia, analizamos cada uno de los problemas resueltos en las diferentes *sub-fases*. En particular, durante la implementación de la secuencia de aprendizaje situamos a la niña con sus compañeros y con la maestra en la clase, para analizar si el diálogo y las interacciones entre ellos, nos brindan explicaciones acerca del crecimiento en la comprensión del concepto de área en la niña. La información que brinda cada uno de los instrumentos implicados se complementan unos con otros, en vista a efectuar una mirada global y plasmar la evolución del proceso. Fundamentalmente, en lo que respecta a qué características manifiesta la niña en relación a la construcción del concepto de área y en cómo se produce dicha construcción junto al grupo de compañeros y la maestra. Esencialmente, cómo el folding back y las interacciones contribuyen a la interpretación del proceso de comprensión individual de Patricia.

4.1.7.1.-EL CRECIMIENTO DE COMPRENSIÓN DE LAS CATEGORÍAS INVOLUCRADAS EN EL CONCEPTO

En la construcción de conceptos, los niños ponen en juego conocimientos ya contruidos que funcionan como herramientas de solución para nuevos problemas; en función de ello, identificamos en Patricia aquellos conocimientos matemáticos relacionados con la noción de área, que constituyen su *conocimiento matemático primitivo* y que obtenemos a partir de la información procedente del Cuestionario (Anexo IX). Por eso anticipamos que la niña utiliza, como estrategia de estimación en el campo numérico la aproximación por truncamiento; relaciona las disposiciones rectangulares con el campo multiplicativo y distingue situaciones de proporcionalidad; percibe el significado de los símbolos y los utiliza adecuadamente para expresar por escrito algunos resultados; percibe que la relación entre la porción de una superficie y el total es independiente de la forma; compone parcialmente figuras para obtener otras, comprende enunciados, anticipa, descubre regularidades y reflexiona sobre las distintas posibilidades de una respuesta. Estos conocimientos matemáticos y estrategias, se movilizan

cuando resuelve problemas. Sin embargo, no reconoce elementos y propiedades de las figuras para poder establecer afirmaciones sobre los objetos sin apelar a comprobaciones empíricas. Tampoco reconoce las partes respecto del todo cuando éstas no son rectangulares.

A partir del conocimiento mencionado, explicitamos de manera pormenorizada el estado de construcción de cada uno de los indicadores asociados a las categorías relacionadas con el concepto de área en Patricia. Al mismo tiempo, y desde las capas de comprensión, indicamos cómo los procesos de folding back promueven el crecimiento de la comprensión de dichos indicadores.

1.-Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja

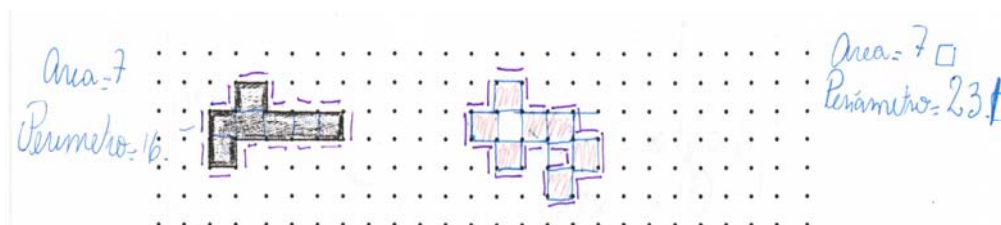
Indicador 1.1.- Maneja el material mediante manipulación (en Producción de una imagen). En todas las actividades que así lo requiere, Patricia manipula distintas piezas para armar otras. En la resolución de una de las actividades de la secuencia (SP8) este indicador actúa como impulsor para obtener otro, por ejemplo, observamos el folding back que lleva a la niña a retroceder a este indicador para avanzar con una mejor comprensión al indicador 4.2. *elige una unidad conveniente*, correspondiente a en *Posesión de una imagen*. En esa actividad la niña debe distinguir la unidad de medida en una figura de área dada; inicialmente Patricia no distingue dicha figura hasta que la demostración que realiza su compañera Mirta sobre una de las figuras produce folding back de manera no intencional, que lleva a Patricia a retroceder a este indicador, manipular las piezas necesarias, para poder identificar la pieza como unidad conveniente de las otras figuras.

Indicador 1.2.- Aparea lados (en Producción de una imagen). Patricia aparea por sus lados distintas figuras para obtener otra compleja. En la resolución de una de las actividades de la secuencia observamos el folding back que lleva a la niña a retroceder a este indicador para avanzar con una mejor comprensión al indicador 3.6.- *ordenar distintas figuras equivalentes según su perímetro* correspondiente a *Percepción de propiedades*. Pues con respecto al perímetro del cuadrado, los comentarios de su compañera Cecilia induce un folding back no

intencional a Patricia(FB~I-C) que la llevan a retroceder a una capa interior, observar en el cubrimiento con cuadrados la disposición de sus lados y expresar “con cuatro cuadrados adentro....hay lados de esta figura que no se cuentan y en otras sí” [SC6(88,114) en línea 114]. Es decir, retrocede a una capa interior (*Producción de una imagen*), reconoce que si aparea por sus lados los cuadrados, quedan lados que no cuenta y, al distinguir la figura de perímetro menor, avanza con una comprensión que le permite ordenar las distintas figuras equivalentes según el perímetro.

Indicador 1.3.- Aparea vértices (en Producción-Posesión de una imagen).

En principio, no contamos con información relacionada acerca de que la niña aparee por sus vértices las figuras para obtener otra compleja, recién podemos manifestar que lo ha logrado cuando resuelve la actividad (EP2) del cuestionarios final, pues la niña al momento de construir una figura equivalente de distinto perímetro, aparea los cuadrados por sus vértices, según podemos apreciar en su producción escrita.



Indicador 1.4.- Representa mentalmente la composición de figuras. (en Producción-Posesión de una imagen). Patricia dispone de la representación mental de la composición de distintas figuras simples dentro de una compleja, en todas las actividades en que se lo ha asignado

Indicador 1.5.- Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos. (en Producción-Posesión de una imagen). En las actividades de la secuencia, asociadas con este indicador, Patricia selecciona piezas sin efectuar ensayos manipulativos. Por ejemplo, en una actividad (SP12) donde debían embaldosar un patio, se le solicita completar el mismo y formar otro de forma rectangular. Para ello, Patricia monitorea lo que realiza con las compañeras, observa la figura y representa mentalmente la subdivisión que le permite transformar el dibujo original en otro rectangular, según apreciamos en su producción escrita:



En síntesis, respecto a *desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja*, En distintas oportunidades Patricia acude a manipular distintas piezas (ind 1.1), las aparea por sus lados (ind 1.2). Asimismo, identifica las figuras de manera global, por su nombre; anticipa e identifica piezas que componen otra compleja (ind 1.4) y selecciona piezas sin efectuar ensayos manipulativos (ind 1.5). Recién al resolver una de las actividades del cuestionario final, la niña aparea las piezas por sus vértices (ind 1.3). Particularidad que logra como resultado de los momentos de discusión que instala la maestra durante la puesta en común de la resolución de las actividades que componen la secuencia. Estos aspectos dan cuenta de que la niña produce y posee una imagen de la relación entre una figura compleja y cada una de las figuras simples asociadas.

2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.

Indicador 2.1.-Compara superficies por percepción visual (en Producción de una imagen). Según la información que brinda los cuestionarios iniciales, la niña compara superficies desde la percepción visual, y en aquellas actividades de los otros instrumentos asociadas a este indicador, la niña en un principio, comparara superficies desde la percepción visual pero durante el transcurso de los mismos, los reemplaza por otros métodos directos e indirectos.

Indicador 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión (en Producción-posesión de una imagen). De todas las actividades en las que se requirió comparar superficies, la niña solamente, compara las mismas por superposición en una de las actividades (SP3). En ella, este indicador actúa como impulsor para obtener otro, según observamos el folding back que lleva a la niña a retroceder a este indicador, superponer figuras para avanzar y distinguir la equivalencia o no de algunas de ellas. Concretamente, para identificar el de menor

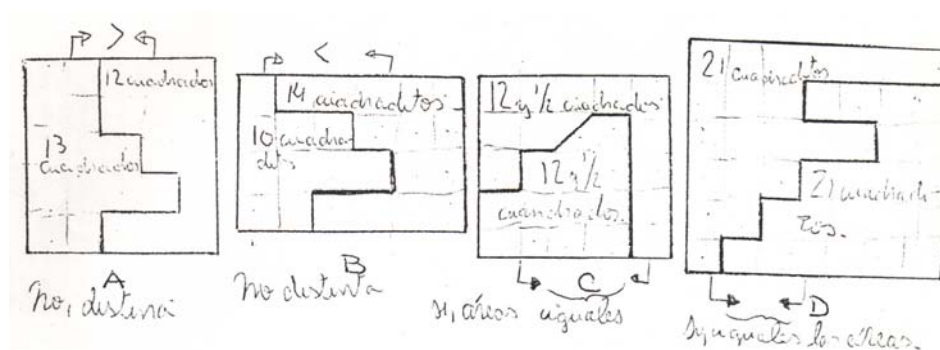
cantidad de tela entre distintos escudos, la niña no diferencia las nociones de área y la de perímetro. La maestra, de manera intencional y explícita evita dar una respuesta numérica y le sugiere comparar dos de los escudos por superposición, según expresa: “Al diseño 3 lo calcamos y el diseño 3 es menor que el diseño 5, pero no lo cortamos, **solo lo apoyamos**” (SP3 en línea 135). Esta intervención produce un folding back (FBlyE-Ma) en Patricia que la lleva a retroceder a este indicador, para avanzar en su proceso de comprensión y manifestar si ambos diseños son o no equivalentes.

En las actividades que componen los cuestionarios finales- evaluación de la secuencia y a medio plazo- que requieren comparar superficies, la niña utiliza otros métodos para comparar por lo que no poseemos información sobre el logro significativo de este indicador.

Indicador 2.3.Utiliza las mismas piezas en distinta forma (recompone) (en Producción-posesión de una imagen). Las actividades que ha resuelto Patricia en los cuestionarios iniciales no dan cuenta que haya recompuesto piezas para formar distintas figuras, pero durante el desarrollo de la secuencia, la resolución de las actividades asociadas a este indicador dan cuenta que lo logra, fundamentalmente a través del folding back inducidos por sus compañeras. Por ejemplo, cuando se le solicita explícitamente en una actividad (SP2b) de la secuencia que distinga las figuras que están formadas por las mismas piezas, la niña en principio no lo reconoce, pero el folding back inducido de manera no intencional por su compañera Mirta, lleva a la niña a desplazarse en el anillo *Producción –Posesión de una imagen*, comparar a través de una descomposición convenientemente la figura, y avanzar en la distinción de las figuras formadas por las mismas piezas. En otra oportunidad (SP8), a través de un folding back inducido de manera no intencional por su compañera Cecilia (FB~I-C), la niña retrocede en su proceso de comprensión a este indicador, es decir, reconoce las figuras formadas por las mismas piezas, para avanzar con una mejor comprensión y expresar la parte de la figura respecto del total mediante una fracción. En una resolución de las últimas actividades, Patricia particiona una figura en partes y las redistribuye en otra de forma rectangular. Estas consideraciones nos impulsan a manifestar que a través del desarrollo de la secuencia Patricia logra este indicador.

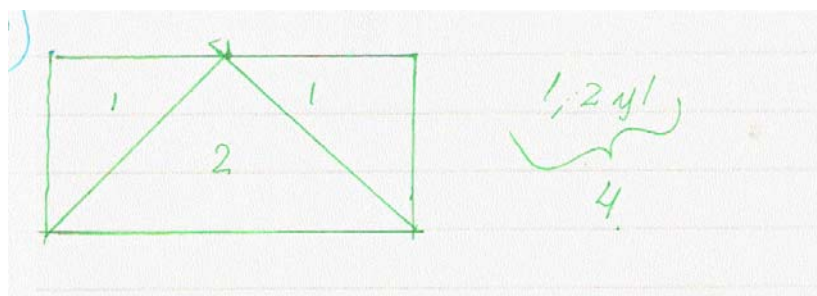
Indicador 2.4. Compara superficies por composición y descomposición (transformación indirecta) (en Producción-posesión de una imagen). En principio, de la resolución de las actividades de los cuestionarios iniciales no podemos afirmar que la niña compare figuras por composición y descomposición. No obstante, podemos decir que sí lo posee porque en distintas actividades de la secuencia observamos que en momentos la niña recurre a este indicador, como impulsor, para lograr comprender otros indicadores ubicados en un anillo y capas exteriores. Más precisamente el 2.3.- *Utiliza las mismas piezas en distinta forma*, correspondiente al anillo *Producción de una imagen-Posesión de una imagen* y al 2.11.- *Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total a través de una fracción*, correspondiente a la capa *Percepción de propiedades*. Por ejemplo, en la actividad (SP2b) en que Patricia debe distinguir figuras formadas por idénticas piezas, las intervenciones de su compañera Mirta producen un folding back no intencional pero efectivo (FB~IyE-M), que lleva a la niña a descomponer y/o componer las figuras para avanzar en su proceso de comprensión y distinguir la recomposición conveniente entre dos de las tres figuras presentadas. En otro momento (SP8), cuando la sugerencia de la maestra para que utilicen la fracción para establecer relaciones, produce un folding back de manera intencional (FBI~F,Ma) que lleva a Patricia a retroceder a este indicador, para componer y descomponer las figuras, avanzar en dicho proceso y expresar la relación entre dichas figuras a través de una fracción. No obstante, en los cuestionarios finales, la niña no utiliza este método de comparación para resolver las actividades.

Indicador 2.5. Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente (en Producción-posesión de una imagen). En la resolución de la actividad (IAP1) del cuestionario inicial, para comparar superficies la niña no utiliza una unidad conveniente, pero los procedimientos empleados en las actividades siguientes muestran que logra este indicador y el mismo perdura a través del tiempo, según muestran las actividades resueltas en los cuestionarios a medio plazo. Por ejemplo, En una actividad (MPP1) deben averiguar si las dos partes en que subdividen una figura son de igual área y la niña para averiguar el área de cada una de las partes mide a través de una unidad conveniente - el cuadradito-, según podemos apreciar en su producción escrita.



Indicador 2.6.-Construye superficies midiendo, y utiliza para ello, una unidad conveniente (en Producción-Posesión de una imagen).

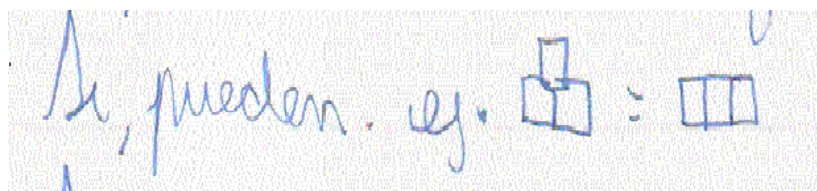
La resolución de las actividades de la secuencia de aprendizaje y del cuestionario de evaluación de la misma, asociadas a este indicador dan cuenta que la niña puede construir figuras de una medida establecida y para ello utiliza otra figura como unidad. Por ejemplo en una actividad (SP8) de la secuencia se le solicita construir una figura de 4 triángulos chicos de área y la niña construye una figura de forma rectangular según lo solicitado y apreciamos en su producción.



También en otra actividad (EP2), del cuestionario de evaluación de la secuencia, se le solicita que construya una figura equivalente a una dada pero de distinto perímetro y la niña escoge el cuadradito de la hoja, como unidad y construye una figura según los requerimientos solicitados.

Indicador 2.7. Reconoce que si una figura se descompone y recompone en otra forma, su área no varía (en Percepción de propiedades). Solo en alguna de las actividades asociadas a los cuestionarios iniciales, la niña reconoce que si recompone una figura en otra, ambas tienen igual área. Esta característica la logra también, en la resolución de las sucesivas actividades que componen la secuencia,

incluso da muestra que dicha noción perdura a través del tiempo cuando en una de las actividades (EP4) se le pregunta si pueden ser equivalentes dos figuras de distinta forma y la niña lo afirma y realiza dos dibujos que así lo muestra.



Indicador 2.8 Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área. (en Percepción de propiedades). Los cuestionarios iniciales no dan información acerca de que Patricia identifique superficies de distinta forma y de igual área pero los procedimientos empleados en las actividades posteriores asociadas a este indicador denotan que lo logra y este aspecto perdura en el tiempo pues en los cuestionarios finales se observa este aspecto. Por ejemplo, en una actividad (MPP3) del cuestionario a medio plazo, identifica dos de las superficies de distinta forma y de igual área entre varias figuras.

Indicador 2.9 Identifica dos superficies de igual forma y distinta área (Percepción de propiedades). En el cuestionario final la niña continua sin lograr identificar que dos superficies de igual forma pueden tener distintas área

Indicador 2.10 Identifica que dos o más superficies de igual o distinta forma y de igual área (en Percepción de propiedades). Los cuestionarios iniciales no brindan información acerca de que Patricia identifique más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área pero los procedimientos empleados en las actividades de la secuencia asociadas a este indicador, denotan que ha superado este indicador. Sin embargo en el cuestionario a medio plazo el resultado al que arriba en una de las actividades (MPP3) no brinda información acerca del mismo, pues la niña no necesita identificar más de dos superficies con estas condiciones.

Indicador 2.11. Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relaciona las partes y el todo a través de fracciones. (en Percepción de propiedades). Las actividades del cuestionario inicial asociadas a este indicador no nos brindan información sobre su logro; en cambio en la resolución de las actividades que componen la secuencia y el cuestionario de evaluación de la misma, dan cuenta que ha superado este

indicador. En particular en la secuencia, lo supera a través del proceso de folding back, pues en una actividad (SP8), la maestra propone intencionalmente que establezcan las relaciones entre figuras a través de una fracción (FBI~F-Ma). Esta sugerencia lleva a Patricia a retroceder a la composición-descomposición de dichas figuras para poder compararlas y así avanzar en su proceso de comprensión para establecer dicha relación a través de una fracción, según expresa “*El paralelogramo es la mitad del triángulo grande*” (SP8.5 línea 238).

En síntesis, respecto de *la Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras*, detectamos que Patricia, en el cuestionario inicial, comparó superficies solamente, por percepción visual (ind 2.1). A través de la resolución de las distintas actividades que componen la secuencia fue incorporando otros métodos, por ejemplo, directos como es la inclusión y/o superposición (ind 2.2), e indirectos, por descomposición y/o composición (ind 2.4), o midiendo a través de una figura unidad (ind 2.5). El logro de estos indicadores le permitieron superar otros, por ejemplo, reconocer e identificar varias superficies de igual o de distinta forma, equivalentes (ind 2.7 e ind 2.8 e ind 2.10). Especialmente la comparación de dos superficies a través de la medición respecto de una unidad conveniente, le permitió construir figuras de un área preestablecida (ind 2.6)

La niña en distintos momentos se involucra en el proceso de folding back promovidos no intencionalmente por sus compañeras-Mirta y Cecilia- o inducidos de manera intencional por la maestra, para superar otros indicadores. En este proceso, algunos indicadores actúan como impulsores pues el retroceso a ellos, le facilita a Patricia la superación de otros correspondientes a una capa exterior. Así, Patricia retrocede en distintas oportunidades, en su proceso de comprensión, a la comparación de distintas superficies por inclusión (ind 2.2) o a la composición-descomposición (ind 2.4) para lograr recomponer idénticas piezas en superficies de distinta forma (ind 2.3). En cambio, para lograr establecer relaciones entre una parte de una superficie y el todo a través de una fracción (ind 2.11) tuvo que retroceder en distintas oportunidades en su proceso de comprensión, a indicadores ubicados en capas interiores, por ejemplo, a comparar superficies por

composición.- descomposición (ind 2.4) o a utilizar las mismas piezas de distinta forma.(ind 2.3).

Observamos así, que la comparación de superficies a través de la composición –descomposición (ind 2.4), en distintos momentos, ha funcionado de impulsor para que la niña avance y supere otros indicadores.

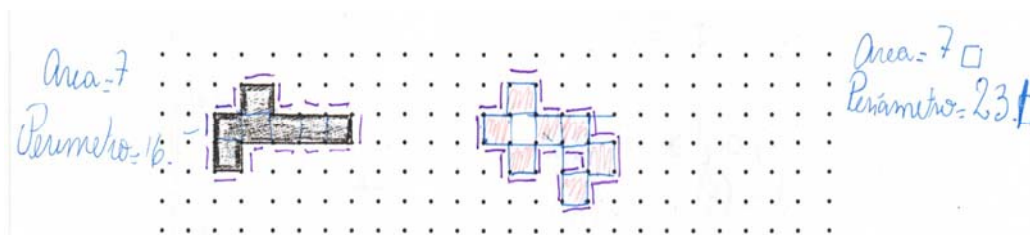
En los cuestionarios finales Patricia para comparar o construir superficies, utiliza para medir una unidad conveniente, es decir observamos fundamentalmente, que estos indicadores (ind 2.5 e ind 2.6) perduran en el tiempo. En cambio, también observamos, que no identifica dos figuras de igual forma y de distinta área (ind 2.9).

Las producciones escritas de Patricia y sus intervenciones, durante la resolución de las distintas actividades y en la puesta en común de las mismas, muestran que los procedimientos implementados, en la comparación de distintas superficies y en la identificación de figuras equivalentes, manifiestan la fluidez que se va operando en ella respecto a la conceptualización del concepto. Asimismo establece con claridad la relaciones entre la parte de distintas superficies y el todo el todo a través de la fracción

Estos aspectos nos llevan a manifestar que Patricia *produce y posee una imagen del área como cualidad que permite comparar las superficies y en general, percibe sus propiedades, respecto, por ejemplo, a la equivalencia entre ellas, la relación entre superficies a través de una fracción. Pero no manifiesta cambio, respecto a la imagen de figuras de igual forma y distinta área.*

3.- Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro.

Indicador 3.1. Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura (en Posesión de una imagen). Patricia muestra discontinuidades en el logro de este indicador. Durante todo el proceso, algunas veces distingue y relaciona las nociones de área y perímetro y otras veces no. Por ejemplo, en los cuestionarios finales podemos observar que en una de las actividades del cuestionario de evaluación de la secuencia (EP2), la niña distingue la diferencia entre ambas nociones y lo explicita según podemos observar en su producción escrita



En cambio, en una actividad (MPP2) del cuestionario a medio plazo, se le solicita que averigüe el recorrido realizado por dos hormigas y la región determinada por ambos recorridos. Patricia responde parcialmente pues solamente calcula el perímetro para responder.

Por ello manifestamos que la niña, sólo algunas veces logra, distinguir las nociones de área y perímetro.

Indicador 3.2. Reconoce que a mayor /igual/menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/igual/ menor perímetro de la misma. (en Percepción de propiedades). La actividad del cuestionario inicial asociada a este indicador no brinda información acerca de su logro, en cambio de las actividades de la secuencia, solo en la actividad (SP6), la niña da muestra que reconoce la independencia de la variación entre las nociones de área y perímetro, pues identifica entre varias figuras equivalentes la de perímetro menor, a pesar de que el cuestionario a medio plazo no brinda información acerca este indicador consideramos que la niña lo ha adquirido porque esa falta se debió a la incomprensión del enunciado de la actividad.

Arribamos entonces, que cuando Patricia lo percibe, reconoce la independencia de variación entre ambas nociones.

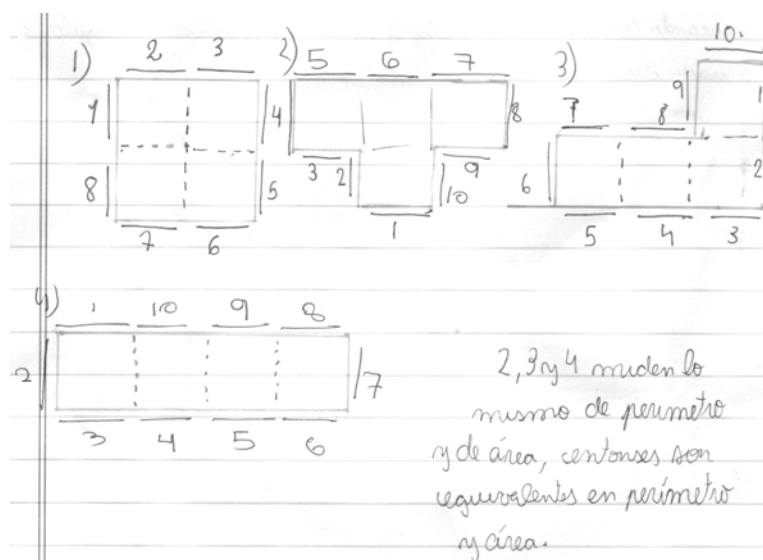
Indicador 3.3. Identifica figuras isoperimétricas (en Percepción de propiedades). De la actividad (EMPP2) del cuestionario a medio plazo podemos manifestar que Patricia identifica figuras isoperimétricas, pues utiliza una unidad de medida conveniente, el lado de cuadradito, y manifiesta respecto del perímetro de las distintas regiones: “son iguales” (PEMPP2).

Indicador 3.4 Ordena figuras isoperimétricas respecto de su área (en Percepción de propiedades). Carecemos de información respecto del logro de este indicador, pues en la actividad (EMPP2) del cuestionario a medio plazo, Patricia no responde, debido muy posiblemente, a que la palabra “región” en el enunciado

funciona como un obstáculo que impide que la niña pueda ordenar las regiones isoperimétricas respecto del área.

Indicador. 3.5 .Construye figuras equivalentes de distinto perímetro (en Percepción de propiedades-Formalización. Durante el desarrollo de la secuencia Patricia reconoce la independencia en la variabilidad de las nociones de área y perímetro, pero no percibe cómo construir una figura equivalentes de perímetro mayor. No obstante esto lo supera, pues en el cuestionario de evaluación, construye una figura equivalente a la dada que cumple con esa condición. Para ello aparea las piezas –cuadraditos- por los vértices. según observamos en la producción a la que nos hemos referido en la interpretación de los indicadores: 1.3.- Aparea una figura por sus vértices y 3.1. Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura

*3.6. Ordena figuras equivalentes, según el perímetro (en Percepción de propiedades). En una actividad de la secuencia (SP6), la niña realiza el ordenamiento según el perímetro de figuras equivalentes. Por ejemplo, el folding back no intencional inducido por su compañera Cecilia (FB~I-C), la lleva a retroceder en su proceso de comprensión a la capa *Producción de una imagen*, aparear las figuras según sus lados y avanzar en su proceso de comprensión, pues observa que la disposición de los lados de los cuadrados que componen la figura, influyen en el perímetro de la misma, y en consecuencia logra ordenar las distintas figuras equivalentes según el perímetro de ellas. La producción escrita (SP6) por la niña, da cuenta de ello:*



En síntesis, respecto a *distinguir y relacionar las nociones de área y perímetro*, Patricia durante todo el proceso muestra discontinuidad respecto a la distinción entre ambas nociones (ind 3.1). Reconoce que a mayor/igual/menor área no necesariamente le corresponde mayor/igual/menor perímetro (3.2), pero al momento de construir figuras equivalentes de distinto perímetro (3.5), Patricia durante el desarrollo de la secuencia, construye una superficie equivalente pero de perímetro menor, pues reconoce que al componer la figuras para armar otra, quedan lados que no cuentan para el perímetro de la superficie compuesta. Recién durante la resolución de los cuestionarios finales, construye una superficie equivalente a otra pero de perímetro mayor con solo unir las piezas por sus vértices y en ambas oportunidades las ordena respecto del mismo.(ind 3.6) Asimismo durante las distintas actividades que lo requiere, identifica figuras isoperimétricas (ind 3.3),

Estos aspectos nos llevan a manifestar que a través del tiempo, *Patricia sólo algunas veces dispone de una imagen conveniente acerca de las nociones de área y perímetro. No obstante percibe sus propiedades, pues reconoce la independencia de variación entre las relación de área y perímetro, al mismo tiempo que identifica figuras isoperimétricas y construye figuras equivalentes de distinto perímetro.*

4.-Nivel de Conceptualización del área como medida de cubrimiento.

Indicador 4.1. Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el numero de unidades empleado (en Producción de una imagen). Patricia durante todo el proceso de resolución de las distintas actividades, pavimentó la superficie a medir y contó el número de unidades utilizado.

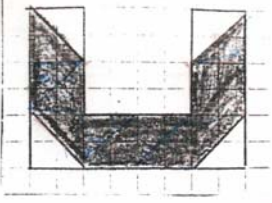
Indicador 4.2 Elige una unidad adecuada (en Posesión de una imagen). Patricia, en las actividades relacionadas con este indicador, selecciona una unidad adecuada. En una oportunidad (SP8) en que se le solicita construir una figura de un área específica utilizando una unidad de media, el folding back no intencional inducido por su compañera Mirta (FB~I-M) lleva a la niña a retroceder en su proceso de comprensión, a manipular las distintas piezas y así avanzar en el proceso y lograr seleccionar la pieza adecuada para medir.

Indicador 4.3. Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada (en Percepción de propiedades). En todas las actividades relacionadas con este indicador, Patricia da cuenta de su logro y lo sostiene en el tiempo. Así, distingue que el resultado de la medida del área depende de la unidad seleccionada. Por ejemplo, en una actividad (SP9) de la secuencia en que se le solicita calcular el área de una superficie según distintas unidades de medida, la niña arriba al resultado y además, explica a la maestra y a su compañera Cecilia la relación que existe entre esas unidades, según expresa: “Primero me fije en el cuadrado, y luego lo multiplique por dos para saber el triángulo” en (SP9 línea 11).

Indicador 4.4 Advierte la necesidad de unidades convencionales (en Percepción de propiedades). Patricia advierte la necesidad de considerar unidades convencionales, aspecto que se observa cuando en una de las actividades (SP13) se le solicita que averigüe el área de su mano y ella subdivide la misma en partes de forma rectangular para expresar el área de cada una de ellas en cm^2 , por ejemplo el dedo meñique lo subdivide en tres partes de: $2,50 \text{ cm}^2$; $0,50 \text{ cm}^2$ y 1 cm^2 respectivamente y manifiesta que designa: cm^2 al cuadrado de 1 cm de lado pues su padre se lo dijo.

Indicador 4.5 Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud (en Formalización). Las actividades relacionadas con este indicador corresponden a la secuencia y Patricia distingue dicha relación en esas actividades (SP8-SP9-SP10). Por ejemplo, en la actividad (SP9) formula la relación inversa entre las distintas unidades de medida y su respectiva cantidad, según podemos observar en su producción escrita:

Determina el área de la figura sombreada:
 Utiliza  como unidad 48 Δ
 Utiliza  como unidad 24
 Utiliza  como unidad 12.
 ¿Qué puedes decir acerca de los resultados obtenidos?



Que los Δ son la mitad de $\square$
 y 48 (Δ) son el doble que 24 ($\square$).
 Los $\square$ son la mitad de $\square$
 y 24 ($\square$) es el doble que 12 ($\square$).

En síntesis, respecto del *nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento*. Patricia en la resolución de actividades en los cuestionarios iniciales realiza cubrimientos para medir superficies y expresa el área en función de la figura con la cual realiza el cubrimiento.(ind 4.1), Durante el desarrollo de la secuencia reafirma estas nociones y distingue que el número al que arriba depende del tamaño de la unidad seleccionada (ind 4.3), así como también, establece la relación entre ambas.(ind.4.5), Cuando se le solicita, selecciona la unidad adecuada y advierte la necesidad de unidades convencionales (ind 4.4), hasta se refiere al cm^2 . Estos aspectos perduran con el tiempo y los argumentos que brinda en a sus compañeras y a la maestra, da cuenta del sentido que otorga la niña a estas nociones.

Entonces podemos manifestar que *Patricia percibe la noción de área como medida descubrimiento, posee una imagen de la unidad adecuada y advierte las relaciones entre distintas unidades y la relación inversa con su medida.*

5.-Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulos como camino más económico.

Indicador 5.1 Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo (en Producción de una imagen). Las actividades de los cuestionarios iniciales y la secuencia relacionadas con este indicador dan cuenta de que Patricia asocia el cubrimiento rectangular con la multiplicación. Por ejemplo, en una actividad (SP12) la maestra le manifiesta que suponga que la plantilla sea un patio y desea saber la cantidad de baldosas para embaldosarlo, y le pregunta. ¿Cuántas baldosas tiene en cada lado? *Patricia responde: 22 y en total 22x22* (SP12 línea 94).En cambio Patricia no utiliza este procedimiento para calcular el área, en las actividades de los cuestionarios finales asociadas a este indicador.

5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras (en Percepción de propiedades). Durante las distintas actividades que componen el cuestionario inicial, la secuencia y los cuestionarios finales relacionadas con este indicador, Patricia considera las dimensiones lineales de las figuras- rectangular, cuadrangular y triangular- para calcular su área, y este aspecto perdura en el

tiempo. Pues en una de las actividades del cuestionario a medio plazo (MPP4), se le solicita averiguar la cantidad de baldosas para embaldosar un patio de la escuela y la niña multiplica las dimensiones lineales del patio para calcular su área.

Es así como *Patricia* desde un principio, *asocia el cubrimiento rectangular con el modelo multiplicativo* (ind 5.1) *y acude a sus dimensiones lineales, con el propósito de utilizar las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulo como camino más económico.* (ind 5.2). En el cuestionario a medio plazo, Patricia sólo utiliza este último indicador.

6.-Significatividad y funcionalidad del concepto

El análisis de cada uno de los indicadores correspondientes a las categorías asociadas al concepto de área nos permite efectuar una mirada global al proceso de construcción operado en la niña y en función de ello manifestamos que Patricia logra y sostiene a través del tiempo la mayoría de ellos. Por ejemplo, composición de figuras según el apareo de lados y/o vértices, comparación de superficies por métodos directos e indirectos, en particular la construcción y comparación a través de la medición con una unidad conveniente, relación entre una parte y el todo de una superficie a través de una fracción, invariabilidad de la relación entre área y perímetro, equivalencia de superficies e identificación de superficies isoperimétricas. Señalamiento de la elección de una unidad conveniente y /o convencional. Relación entre la medida de una superficie y el tamaño de la unidad utilizada y entre distintas unidades de medida. Cálculo de áreas estimando dimensiones lineales como camino más económico.

Asimismo, en resolución de las actividades del cuestionario inicial observamos que Patricia no puede vincular el concepto a contexto de la realidad, pero la resolución de las actividades de los sucesivos instrumentos muestra que, se implica en la resolución de actividades y utiliza el concepto de área en contextos de la realidad presente en las actividades, en los cuales dicha noción cobra sentido. En particular, en una actividad (SP12) donde se le solicita calcular el área por dos métodos distintos, la niña muestra de manera detallada el proceso que realiza, y cómo es capaz de vincular el concepto de área para resolver una situación de contexto real.

Es por ello que respecto a *la significatividad y la funcionalidad del concepto*, la resolución que brinda la niña a las distintas actividades dan cuenta que durante la implementación de los distintos instrumentos, ella va reconociendo la noción de área como cualidad común que tienen las figuras cuando intentamos medir su superficie, y esta noción va enriqueciéndose a través de las propiedades que va logrando establecer y su relación otros conceptos.

A continuación, nos vamos a centrar en el cómo de este proceso, y para ello nos fijamos en dos mecanismos que lo ha promovido: el folding back y las interacciones. Ambos se producen a través del diálogo con sus compañeras y la maestra, y nos permiten describir cómo se desarrolla el proceso de comprensión individual del concepto de área en Patricia.

4.1.7.2.- EL PAPEL DEL FOLDING BACK EN EL PROCESO DE CRECIMIENTO DE COMPRENSIÓN DE PATRICIA.

A efectos de explicar cómo evoluciona la comprensión del concepto de área, observamos la trayectoria - dibujada en el gráfico de comprensión – que describe dicho proceso en cada una de las actividades de la secuencia resueltas por Patricia. Nuestro foco son aquellas trayectorias que describen el movimiento hacia delante y hacia atrás por las distintas capas de comprensión, fundamentalmente en las actividades que presentaron un desafío para la niña. En estos casos, la niña revisa y/o resignifica los conocimientos e ideas existentes acerca del concepto a construir, aspecto que detectamos en el gráfico, por el retroceso a un indicador asociado a una capa más interna o a otro indicador de la misma capa. Lo anterior nos permite detectar cómo dicho proceso sirve a Patricia de sustento para avanzar y comprender indicadores ubicados en capas más externas.

En función de ello, observamos los folding back que se produjeron entre algunos de los indicadores durante el proceso y detectamos que fueron inducidos, intencionales o no intencionales, por la maestra y, por sus compañeras, Cecilia y Mirta de manera intencional y que adjuntamos en el Anexo XIV.

Los indicadores involucrados en el proceso de folding back están asociados al anillo *Producción - Posesión de una imagen* y las capas: *Producción de una imagen*, *Posesión de una imagen* y *Percepción de propiedades*. El

retroceso a la capa *Producción de una imagen* y al anillo *Producción-Poseción de una imagen* se produce a los efectos de manipular el material, utilizar idénticas piezas para armar distintas figuras, componerlas apareando las mismas por sus lados, y compararlas por superposición o bien por composición y descomposición. La resignificación de estas nociones, facilita el avance con una mayor comprensión, es decir, cuando la niña se queda atascada, la participación de la maestra o de una compañera, le permite reconocer dónde está su error o avanzar a procedimiento más formales matemáticamente para seguir adelante en el proceso de construcción del concepto.

Para ampliar esta información, nos focalizamos en los procesos de folding back operados en Patricia y que favorecieron la comprensión del concepto, explicitando en detalle cada uno de ellos:

Patricia logra distinguir figuras formadas por idénticas piezas a través de distintos folding back inducidos por su compañera Mirta y por la maestra, pues, si bien Patricia utiliza las mismas piezas para algunas formas, al retroceder en su proceso de comprensión, y comparar superficies por composición y descomposición (ind 2.4), logra en el mismo anillo –*Producción posesión de una imagen*– identificar otras figuras formadas por idénticas piezas que antes no lograba distinguir (ind 2.3). Del mismo modo en otro momento del reconocimiento de las nociones de área y perímetro, debe retroceder en su proceso de comprensión a comparar superficies por superposición (ind 2.2), para lograr avanzar en dicho proceso y distinguir también, distintas figuras formadas por idénticas piezas(ind 2.3).

Patricia si bien reconoce de forma intuitiva la independencia en la variabilidad entre el perímetro y el área, se ve obligada a retroceder a una capa interior, distinguir el apareamiento de distintas figuras según sus lados (ind 1.2), para avanzar en su proceso de comprensión y comprobar que entre las figuras equivalentes dadas, el cuadrado tienen el menor perímetro (ind 3.2).

Patricia logra relacionar las partes de una figura con el todo a través de fracciones (ind 2.11), a través de distintos folding back inducidos por su compañera Cecilia y por la maestra. Patricia, si bien en algunos casos relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, en un momento se ve

obligada a retroceder, en su proceso de comprensión e identificar figuras formadas con idénticas piezas (ind 2.3) para a posteriori, avanzar en su proceso y relacionar las partes de una figura con la misma a través de fracciones (ind 2.11). En otro momento elige una unidad adecuada para medir pero retrocede descompone –compone las superficies para comparar (ind 2.4), y avanzar en el proceso en vista a relacionar las partes de una figura con la misma a través de fracciones (ind 2.11).

Si bien Patricia construye superficies según un área utilizando para ello otra figura como unidad, al momento de tener que distinguir la unidad del área de una superficie, la niña se ve obligada a retroceder en su proceso de construcción para manipular distintas piezas (ind 1.1) y recién ahí, para avanzar en este proceso y lograr seleccionar una figura como unidad adecuada (ind 4.2).

De esta forma observamos que acudió al indicador 2.4.- *Compara superficies por composición-descomposición*- en dos oportunidades- y a los indicadores: 1.1 *maneja el material mediante manipulación*; 1.2.- *Aparea lados*; 2.2.- *Comparar superficies por superposición y/o inclusión* y 2.3.- *Utiliza las mismas piezas en distintas formas*- cada una de ellos en una oportunidad-, es decir los consideramos indicadores impulsores que le permiten a Patricia avanzar en su proceso de comprensión.

Hemos analizado el proceso de evolución del logro de cada uno de los indicadores relacionados con las categorías asociadas a la noción de área. Observamos que algunos de los indicadores relacionados con *la percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos* y en menor medida, con *la distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro y la conceptualización del área como medida de cubrimiento*, Patricia lo ha logrado a través del folding back como proceso dinámico del crecimiento de su comprensión.

4.1.7.3.- EL PAPEL DE LAS INTERACCIONES EN EL PROCESO DE CRECIMIENTO DE COMPRENSIÓN DE PATRICIA.

Completamos el análisis refiriéndonos a cómo Patricia atribuye significado al concepto durante las interacciones producidas con sus compañeras

y con la maestra que generaron la construcción de nuevos conocimientos. Por ello, desde el enfoque dialógico, consideramos lo expresado en el capítulo anterior (apartado 3.3.2.) e intentamos comprender las acciones de la niña, el diálogo y el tipo de interacciones que se opera con las niñas y/o con la maestra en el contexto particular del aula y la resolución de problemas como instrumento metodológico para construir conceptos.

En general, Patricia, durante el desarrollo de la secuencia de aprendizaje, interactuó con las compañeras de la mesa y con la totalidad del grupo-clase. Las tablas de diálogo dan cuenta de las interacciones con sus compañeras, fundamentalmente con Mirta, Cecilia y Aylen y con la maestra, formulando preguntas y reflexionando sobre la resolución de los problemas.

Patricia interaccionó con Mirta la mayoría de las veces de manera univocal; pues al explicarle a su compañera, organizaba sus ideas y conseguía que Mirta participara activamente en la explicación. Con Cecilia en cambio, las interacciones producidas siempre fueron multivocales, pues Cecilia la desafiaba en sus opiniones y así ambas intercambiaban sus procedimientos y sus ideas, atendiendo y adaptándose a lo realizado por cada una de ellas.

Patricia y sus compañeras de mesa, resuelven las actividades, manifiestan sus ideas en voz alta y aprovechan los comentarios efectuados por el otro, de esta forma la colaboración que impera entre sus integrantes siempre es indirecta. Las manifestaciones producidas en el grupo y las distintas formas de interaccionar influyen en los procedimientos que implementa Patricia y le permitieron reconsiderar sus intenciones.

En general Patricia regula las resoluciones de las actividades por sus saberes, de manera que sus compañeros la reconocen como autoridad matemática del grupo, involucrándose en explicaciones colectivas, justificando sus propios procedimientos, efectuando argumentos y contraargumentos. Esta designación de Patricia como autoridad matemática origina comprensiones para sus compañeras, pues mientras ella trata de explicar su pensamiento, las otras niñas interpretan y desafían dicho procedimiento. Asimismo, goza de reconocimiento social entre ellas, puesto que las interpretaciones que expresa Patricia al grupo total, involucra las intenciones de sus compañeras, al manifestarse a través del término

“nosotras”.

Frecuentemente se dirige a la maestra para reafirmar sus soluciones y ella la incita a verbalizar su pensamiento y a reflexionar sobre la solución enunciada. En la puesta en común, Patricia se involucra en explicaciones colectivas, monitoreadas por la maestra, y con sus compañeros elabora fundamentaciones apoyándose unos en otros, a fin que las comprensiones compartidas faciliten la construcción individual del concepto de área en la niña.

4.1.- EL CASO DE CECILIA

INDICE

	Nº de página
4.2.1.- Análisis de las actividades del cuestionario acerca de sus conocimientos matemáticos primitivos.....	465
4.2.2.- Análisis de las actividades del cuestionario sobre sus ideas previas acerca del concepto de área.....	476
<i>Actividad IAC1</i>	478
<i>Actividad IAC2</i>	479
<i>Actividad IAC3</i>	481
<i>Actividad IAC4</i>	482
<i>Actividad IAC5</i>	484
<i>Actividad IAC6</i>	485
<i>Actividad IAC7</i>	485
<i>Actividad IAC8</i>	485
4.2.2.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Cecilia.....	487
4.2.3.-Análisis de las actividades resueltas en la secuencia de aprendizaje.....	490
<i>Actividad SC1</i>	491
<i>Actividad SC2</i>	491
<i>Actividad SC3</i>	492
<i>Actividad SC4</i>	500
<i>Actividad SC5</i>	506
<i>Actividad SC6</i>	506
<i>Actividad SC7</i>	515
<i>Actividad SC8</i>	515
<i>Actividad SC9</i>	537
<i>Actividad SC10</i>	544
<i>Actividad SC11</i>	549
<i>Actividad SC12</i>	556
<i>Actividad SC13</i>	563

	Nº de página
4.2.3.1.- Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Cecilia.....	565
4.2.4.-Análisis de las actividades del cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje.....	573
<i>Actividad EC1</i>	574
<i>Actividad EC2</i>	574
<i>Actividad EC3</i>	576
<i>Actividad EC4</i>	578
<i>Actividad EC5</i>	580
4.2.4.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Cecilia.....	582
4.2.5.-Análisis de las actividades del cuestionario a medio plazo.....	585
<i>Actividad MPC1</i>	585
<i>Actividad MPC2</i>	588
<i>Actividad MPC3</i>	590
<i>Actividad MPC4</i>	592
4.2.5.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Cecilia.....	595
4.2.6 .-Tendencias de las categorías detectadas en relación con la construcción del concepto de área....	598
4.2.7.-Análisis global del proceso de construcción del concepto de área en Cecilia.....	605
4.2.7.1.-El crecimiento de comprensión de las categorías involucradas en el concepto	606
4.2.7.2.-El papel del folding back en el proceso de crecimiento de comprensión de Cecilia.....	624
4.2.7.3.-El papel de las interacciones en el proceso de crecimiento de comprensión de Cecilia.....	626

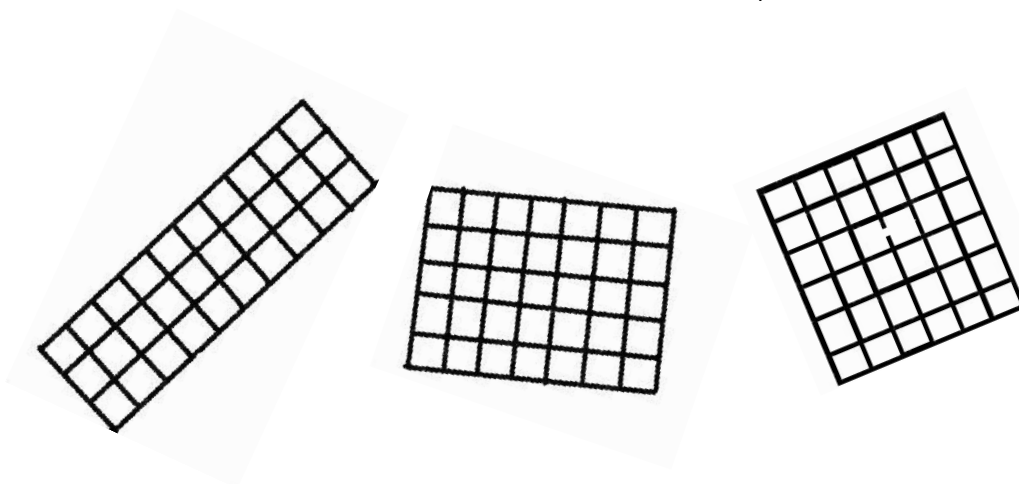
4.2.-EL CASO DE CECILIA

4.2.1-ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO ACERCA DE SUS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS PRIMITIVOS (CMC)

Consideramos ahora cómo ha sido el proceso de construcción del concepto de área (foco de este trabajo) en Cecilia. Para ello, comenzamos analizando los cuestionarios referidos a sus conocimientos matemáticos disponibles, ya explicitados en el apartado 3.5.1.1. y que adjuntamos como Anexo XV. Transcribimos, a continuación, el enunciado de cada actividad, describimos el desarrollo propuesto por Cecilia y mostramos su producción escrita. Especialmente se analiza lo realizado por la niña, en base a los contenidos matemáticos previos y necesarios, para la construcción del concepto de área que nos ocupa en este trabajo.

Actividad 1: (CMC1)

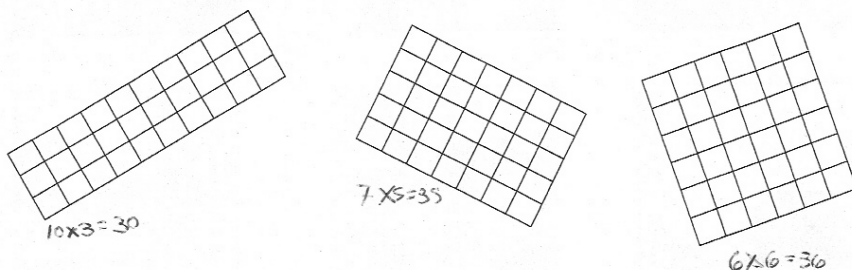
Cada uno de ustedes recibirá distintas cuadrículas. ¿Pueden enviarme, a través de un cálculo, que indique cuáles son las cuadrículas recibidas?



A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia asigna un cálculo a cada una de las cuadrículas $10 \times 3 = 30$; $7 \times 5 = 35$ y $6 \times 6 = 36$, respectivamente, y no explicita qué representan esos números en el contexto de la situación.

1.- Cada uno de ustedes recibirá distintas cuadrículas. ¿Pueden enviarme un mensaje, a través de un cálculo, que indique cuáles son las cuadrículas recibidas?

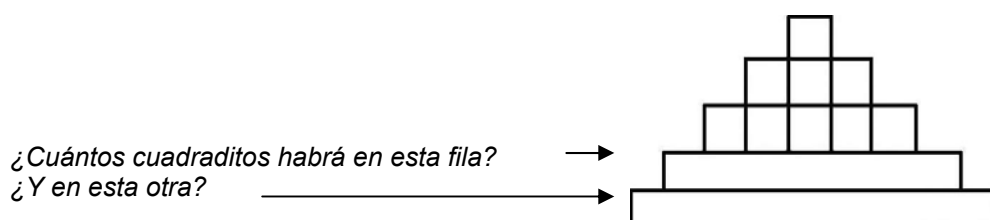


B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 1

Si bien no explica qué representan cada uno de esos números, cuando se refiere al $10 \times 3 = 30$, podemos inferir que el 10 representa la cantidad de cuadraditos que tiene una fila, el 3 la cantidad de filas de 10 cuadraditos que posee la cuadrícula y 30 es la cantidad total de cuadraditos que compone la cuadrícula. Igual criterio observamos cuando se refiere a $7 \times 5 = 35$ (7 cuadraditos por fila, 5 fila de siete cuadraditos cada una y 35 el total de cuadraditos de la cuadrícula); y cuando expresa $6 \times 6 = 36$ (6 cuadraditos por fila, 6 filas de 6 cuadraditos y 36 cuadraditos en total).

Detectamos así que Cecilia puede anticipar la cantidad de cuadraditos que existen en distintas cuadrículas a través del producto de dos números. En todos ellos, los números coinciden respectivamente con la cantidad de cuadraditos que tiene cada fila (el número de columnas) y la cantidad de filas, es decir, puede asociar este proceso de cálculo con la estructura multiplicativa como herramienta que resuelve el conteo de un recubrimiento rectangular homogéneo.

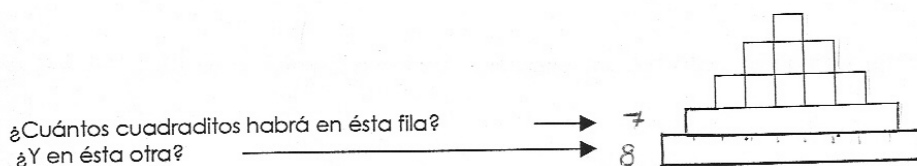
Actividad 2: (CMC2)



A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia responde solamente que en una fila hay 7 y en la siguiente hay 8.

2-

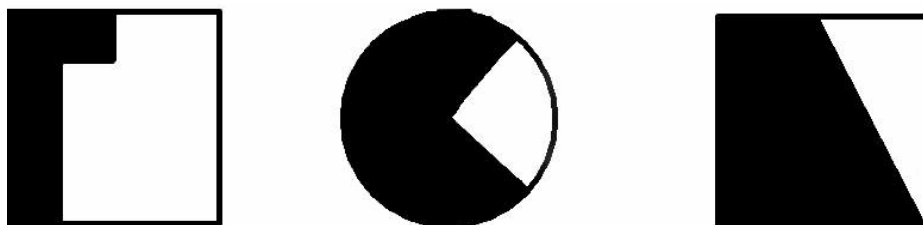


B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 2

Por un lado, solo indica la cantidad a través de un número, sin especificar a qué hace referencia y, por otro, responde correctamente sólo la cantidad de cuadraditos correspondiente a la cuarta fila. Si bien pudo responder este resultado, en la siguiente fila no percibe la relación que existe entre ellas, es decir, lo que se conserva. A causa de ello, no puede inferir correctamente la relación mediante resultados numéricos.

Actividad 3: (CMC3)

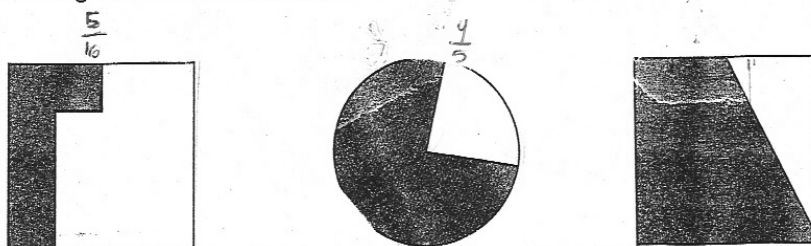
Cada figura tiene una parte pintada de negro. Indícala mediante una fracción.



A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia asigna $\frac{5}{6}$ a la primera figura, $\frac{4}{5}$ a la segunda y no responde en el tercer caso.

3.-Cada figura tiene una parte pintada de negro, Indícala mediante una fracción.



B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 3

Podemos observar que la niña puede identificar la fracción que corresponde a una parte de un todo cuando las figuras son de distinta forma, aunque ha expresado correctamente sólo la relación cuando la figura y la unidad son de forma cuadrangular. En figuras circulares consideró un quinto como unidad en lugar de un cuarto. Es probable que haya percibido visualmente la unidad ($\frac{1}{5}$) y esta consideración le permitió aseverar la afirmación.

En general se observa que cuando las unidades son las de uso frecuente o más tradicionales realiza divisiones congruentes, reconoce las partes del todo e identifica fracciones desde distintas representaciones (geométrica y numérica) como con el primer dibujo y parcialmente con el segundo. Los resultados expresados nos permiten afirmar que, en general, tiene interiorizada la noción de

inclusión en partes, pero en dibujos como el tercero, no identifica la parte, es decir la unidad. Podemos manifestar entonces que reconoce una parte de la superficie respecto de la totalidad de la misma a través de una fracción independientemente de su forma solamente cuando las unidades consideradas son “las convencionales”.

Actividad 4: (CMC4)

¿Cuántos rectángulos podés construir con 12 cuadrados? En caso de existir más de uno, señala la longitud de sus lados. Fundamenta para ello, tu respuesta.

A.-Descripción de la producción escrita

Dibuja solamente un rectángulo disponiendo un cuadrado a continuación del otro de manera consecutiva, cuya dimensión es 1 x 13, es decir una fila de trece cuadrados.

4-¿Cuántos rectángulos podés construir con 12 cuadrados? En caso de existir más de uno, señalá la longitud de sus lados. Fundamenta para ello, tu respuesta

1



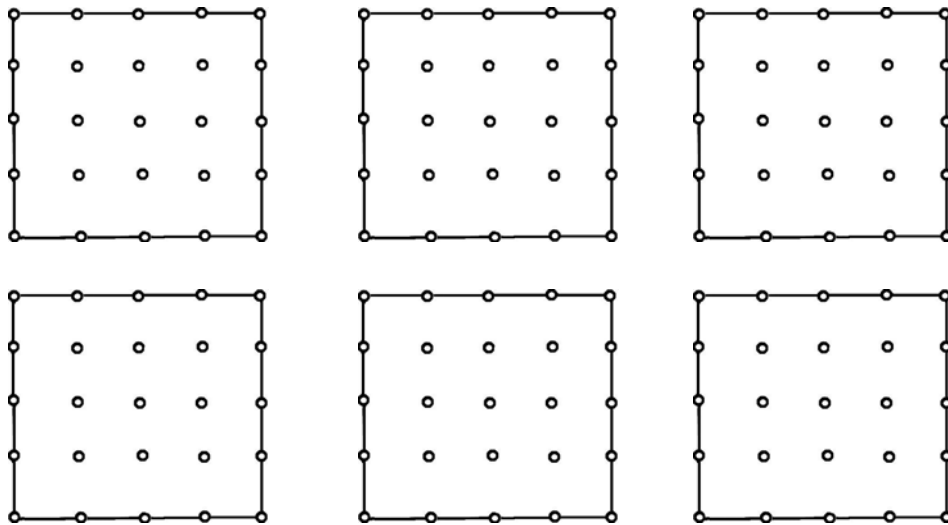
B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 4

Cecilia considera trece en lugar de los doce cuadrados solicitados, no señala la longitud de los lados del rectángulo que dibuja, así como tampoco advierte la posibilidad de existencia de otros rectángulos que cumplan la condición solicitada. En esta situación se observa, por un lado, que Cecilia no visualiza las piezas en distintas formas y, por otro lado, no relaciona un valor- 12- con el resultado de la disposición de los cuadrados que forman el rectángulo, pues, si lo hubiera hecho, podría haber expresado la cantidad de rectángulos que

se podían formar.

Actividad 5: (CMC5)

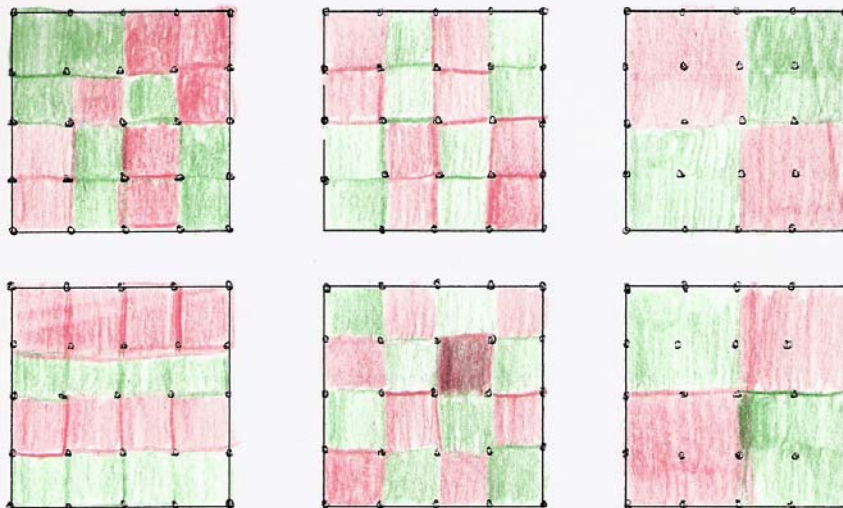
Pintá de rojo y verde, como más te guste, el siguiente cuadrado. Debe resultar la misma cantidad de cada uno de los colores.



A.-Descripción de la producción escrita

La producción de Cecilia es la siguiente:

5.-Pintá de rojo y verde, como más te guste, los siguientes cuadrados. Debe resultar, en cada uno de ellos, la misma cantidad de cada uno de los colores



B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 5

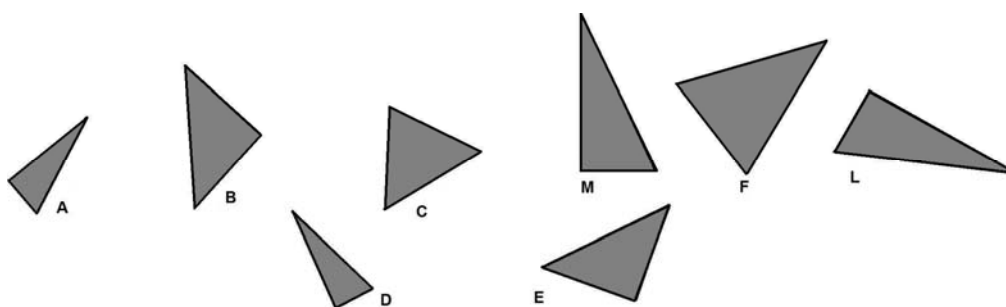
A través de este problema abierto, Cecilia pudo explorar y proponer distintas posibilidades.

Pudo repartir equitativamente aprovechando regularidades - a lo que Freudenthal se refiere como reparto justo- y los distintos modos de realizarlo. Efectuando una mirada crítica del enunciado de esta actividad, podemos pensar que repartir equitativamente no es totalmente equivalente a dividir en partes iguales, salvo transformaciones.

El componente estático y estético desarrollado cuando le solicitan pintar, puede ser la causa por la que Cecilia considera los gráficos dispuestos en el margen derecho como distintas posibilidades, y no reconoce que son congruentes (la transformación de uno en otro resulta de un giro de centro la intersección de las diagonales y amplitud 90°).

Actividad 6: (CMC6)

Imagina que cuentas con varios triángulos de cada uno de los modelos presentados



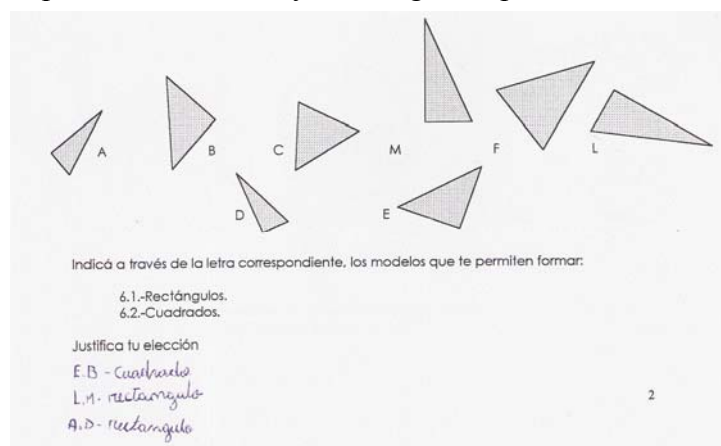
Indica a través de la letra correspondiente,

- ✓ *Los triángulos con los cuales podes formar rectángulos.*
- ✓ *Los triángulos con los cuales podes formar cuadrados.*

Fundamenta tu elección.

A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia asocia y compone E con B, L con M y A con D y responde “cuadrado” para la primera asociación y “rectángulos” para las otras dos.



B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 6

Si bien distingue las figuras para componer y obtener otras, no explicita el criterio que la condujo a esa elección. Su ausencia nos lleva a pensar que el criterio que determina su elección es la percepción visual

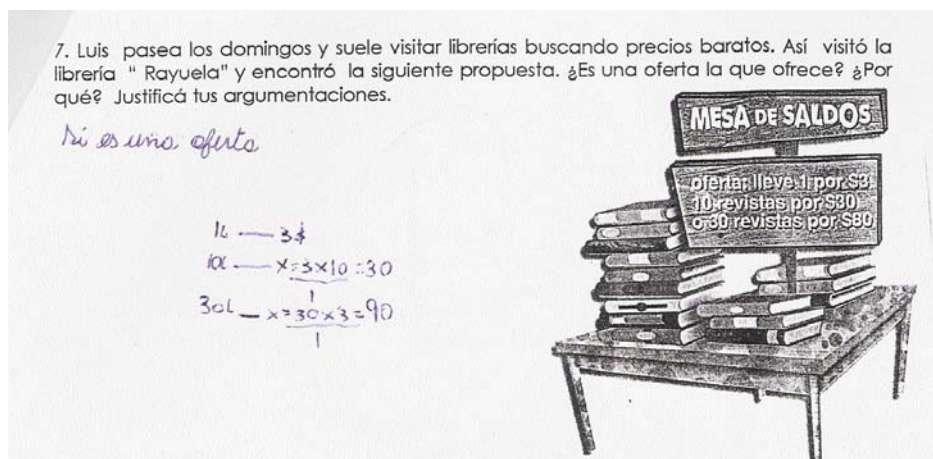
Actividad 7: (CMC7)

Luis pasea los domingos y suele visitar librerías buscando precios baratos. Así visitó la librería “Rayuela” y encontró la siguiente propuesta. ¿Es una oferta la que ofrece? ¿Por qué? Justifica tus argumentaciones.



A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia expresa que se trata de una oferta cuando expresa “*Si, es una oferta*” pues $1\text{ r} \rightarrow \$3$; $10\text{ r} \rightarrow \$30$; $30\text{ r} \rightarrow \$90$, multiplicando en una primera instancia por 10 y luego ese resultado, por 3



B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 7

Cecilia, cuando expresa la solución, solamente responde que “*Si, es una oferta*”. En función del planteo efectuado podemos pensar que se refiere a las 30 revistas, y en ese caso, no alude al precio de las 10 revistas. No relaciona el planteo que realizó con la totalidad de la información. Vincula las variables correctamente identificando información en que no existe proporcionalidad, pero pierde datos para interpretar otras posibilidades en el colectivo de la solución, como por ejemplo, cuando responde “*comprando 10 revistas debo pagar 30\$*” para la cual no es una oferta

El resultado corrobora la tendencia a no analizar la información global y considerar sólo una de las informaciones parciales.

Actividad 8: (CMC8)

Aproxima cada peso a la centena y calcula.

- ✓ ¿Cuánto pesan aproximadamente, las naranjas? ¿Y las bananas?

✓ ¿Cuánto más pesan las manzanas que los duraznos?

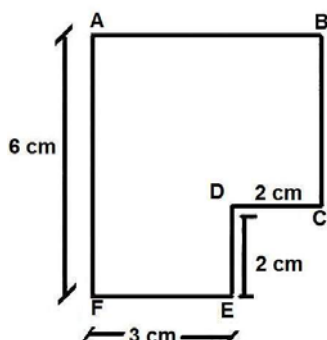


B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 8

Cecilia no responde a las preguntas de esta situación, por lo tanto, se observa inconvenientes para estimar y reconocer el valor posicional del sistema de numeración.

Actividad 9: (CMC9)

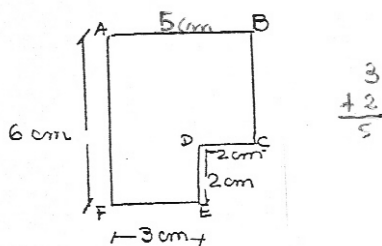
Calcula, sin medir con la regla, la longitud de los restantes lados de la figura. Fundamenta tu respuesta.



A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia solamente expresa en el dibujo la longitud del segmento AB y le asigna 5 cm. La medida coincide con el resultado de la cuenta de $3 + 2$, que agrega al costado.

Calcula, sin medir con la regla, la longitud de los restantes lados de la figura. Fundamenta tu respuesta



B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 9

De esta cuenta podemos inferir que Cecilia descompone el segmento AB en los segmentos FE y DC y de las longitudes de ambos puede expresar la longitud de AB debido a que no agrega más información que justifique. En cambio, no indica la longitud del segmento BC.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PRIMITIVO DE CECILIA

El análisis realizado nos permite acceder a las nociones que la niña tiene acerca de los conocimientos matemáticos necesarios para abordar la comprensión del concepto de área, los cuales constituyen el *conocimiento matemático primitivo de Cecilia*.

- ✓ No se observan conocimientos respecto a la posición de las cifras dentro del número como indicador de su valor, estrategias de estimación y cálculo mental (CMC8)¹
- ✓ Identifica el modelo rectangular como herramienta que resuelve situaciones de conteo por cubrimiento con el campo multiplicativo y condiciones de proporcionalidad. (CMC1; CMC7), pero no relaciona las distintas posibilidades de expresar un número como producto de otros dos, ni relaciona cada uno de ellos con el modelo rectangular. (CMC4)

¹ Los códigos se refirieron a la actividad del cuestionario de la cual procede.

- ✓ En el campo aditivo, Cecilia puede distinguir un segmento como la composición de otros dos, pero no obtiene uno de ellos como complemento entre otro y el total. Es decir la longitud de un segmento surge de componer otros dos segmentos y adicionar sus respectivas longitudes, pero en cambio no descompone un segmento en partes y halla la longitud de uno de ellos sustrayéndola de la longitud entre una de las partes y el todo. (CMC9).
- ✓ Percibe que la relación entre la porción de superficie y el total es independiente de su forma cuando las unidades consideradas son las de uso frecuente o “las convencionales”. En ese caso, y de manera incipiente, puede expresar dicha relación mediante fracciones (CMC3).
- ✓ Realiza repartos equitativos (CMC5).
- ✓ Puede proponer respuestas que implican explorar, cambiar de idea, y reflexionar sobre las distintas posibilidades, las que cobran sentido en la resolución de problemas (CMC5).
- ✓ Identifica las figuras en forma global (por su forma), sin necesidad de apelar a constataciones empíricas (CMC6)
- ✓ No identifica congruencia a través de transformaciones. (CMC5)
- ✓ Relaciona la información del enunciado con los conceptos matemáticos disponibles, pero arriba a respuestas incompletas pues no avizora la información de los subproblemas que resultan del enunciado.(CMC7)
- ✓ No proporciona justificaciones de lo realizado

4.2.2.- ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO DE IDEAS PREVIAS ACERCA DEL CONCEPTO DE ÁREA. (IAC)

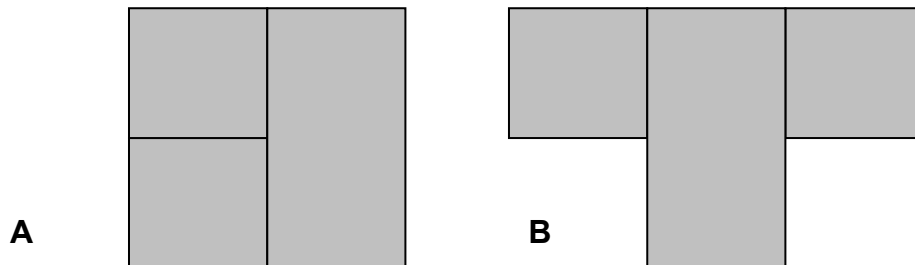
Continuamos con los enunciados de los cuestionarios explicitados en el apartado 3.5.1.2, transcribimos, a continuación, el enunciado de cada actividad, describimos el desarrollo propuesto por Cecilia y mostramos su producción escrita, según el cuestionario resuelto por la niña que adjuntamos en el Anexo XVI. Al momento que analizamos lo realizado por la niña, en vista a averiguar las ideas previas que posee acerca del concepto de área desde un tratamiento Geome -

trico y numérico del mismo. Por ejemplo:

Actividad 1: (IAC1)

Con las piezas de la figura A se ha formado la figura B. Si tuvieras que pintar ambas figuras. ¿Utilizas diferente cantidad de pintura para cada una de ellas?

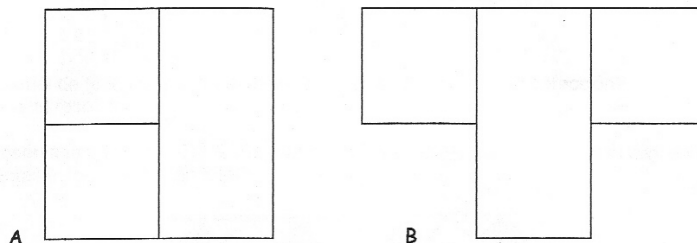
Fundamenta tu respuesta.



A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia responde “No, porque tienen la misma medida”

1.- Con las piezas de la figura A se ha formado la figura B. Si tuvieras que pintar ambas figuras. ¿Utilizas diferente cantidad de pintura para cada una de ellas?
Fundamenta tu respuesta. *no, porque tienen la misma medida*



B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 1

La respuesta es correcta, aunque no explicita cómo se conserva el área, en

figuras de distinta forma (ind 2.7.en *Percepción de propiedades*) Desde una perspectiva geométrica, no podemos afirmar que la niña utilice las mismas piezas de distinta forma (ind 2.3 en *Producción - Posesión de una imagen*) ni que compare las mismas por descomposición (ind. 2. 4 en *Producción - Posesión de una imagen*) o por medición a través de una unidad conveniente (ind 2.5. *Producción - Posesión de una imagen*) a fin de comparar superficies de distinta forma y arribar que ambas son de igual área. Pero de hacerlo, hubiera explicitado alguno de esos procedimientos.

Podemos pensar entonces que, Cecilia compara superficies y realiza la conservación de la magnitud desde la percepción visual (ind 2.1 en *Producción de una imagen*) y este procedimiento tiene limitaciones, aunque a veces se llega a conclusiones. En relación con el nivel de comprensión que logra Cecilia respecto a las capas o anillos, conviene recordar que la demanda de este problema se sitúa con un indicador en *Producción de imagen* – capa B- con tres indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* - capa B y C - y con un indicador a *Percepción de propiedades* – Capa D - Cecilia accedió al indicador correspondiente a *Producción de una imagen* - Capa B – y al indicador correspondiente a *Percepción de propiedades* – Capa D -, es decir que desde su percepción visual, reconoce la invariancia de la magnitud – área-independientemente de la forma. Aspectos que nos permiten construir el siguiente gráfico de comprensión:

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo B.-Producción de una imagen C.- Posesión de una imagen D.- Percepción de Propiedades E.- Formalización

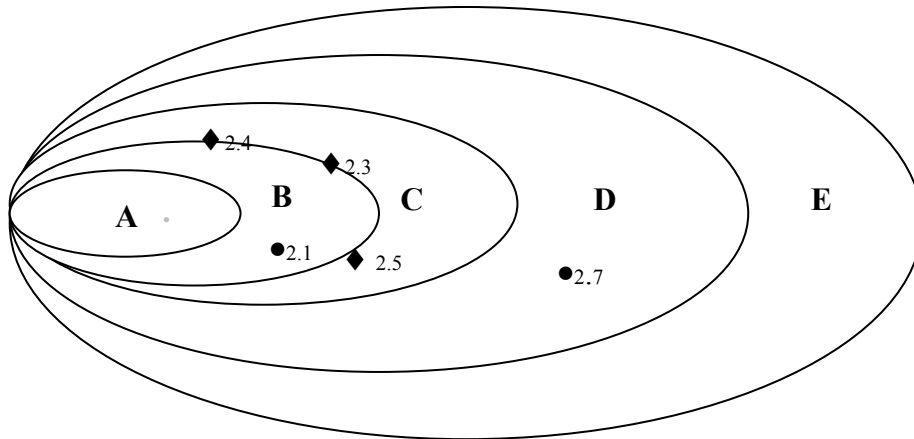
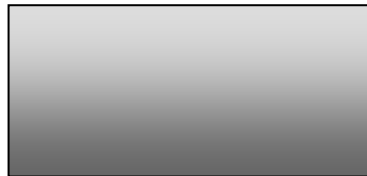


Gráfico de Comprensión -IA -de Cecilia asociado a la act.1

- 2.1.-Compara superficies por percepción visual.
- 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.

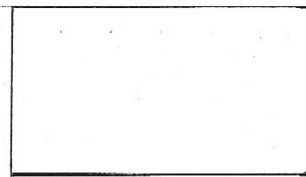
Actividad 2: (IAC2)

¿Cuántos cuadrados como el de la izquierda caben en el rectángulo de la derecha? ¿Cómo lo calculaste?

**A.-Descripción de la producción escrita**

Cecilia responde directamente “*caben 18 cuadrados $3 \times 6 = 18$* ”

2.- ¿Cuántos cuadrados como el de la izquierda caben en el rectángulo de la derecha?
¿Cómo lo calculaste?



Caben 18 cuadrados $3 \times 6 = 18$

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 2

Se observa solamente un procedimiento numérico como la dimensión del cuadradito es 1cm, los factores del cálculo coinciden con las longitudes de los lados del rectángulo respectivamente.

Abordar la medida a través del número que surge de averiguar cuántas veces una cantidad elegida como unidad de medida – el cuadradito- está contenida en otra de la misma magnitud, - el rectángulo- (ind. 4.1 *Producción de una imagen*), permite suponer que Cecilia ha asociado el conteo del cubrimiento rectangular y homogéneo con el campo multiplicativo, afirmando lo observado en la respuesta de CMC1 (ind.5.1.en *Producción de una imagen*). Así como también, el enfoque numérico que propone da cuenta de que no solo reinterpreta la multiplicación como una forma adecuada y eficiente para contar, sino que concibe la medida de área como un producto de longitudes (ind. 5.2 en *Percepción de Propiedades*).

En relación con el nivel de comprensión que logra Cecilia, la demanda de este problema se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen* - capa B- y con un indicador en *Percepción de propiedades*- capa D-, y *Formalización* – capa E- Cecilia logra todos los indicadores propuestos y lo indicamos en el siguiente gráfico.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ♦ carencia de información

- | |
|--|
| A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización |
|--|

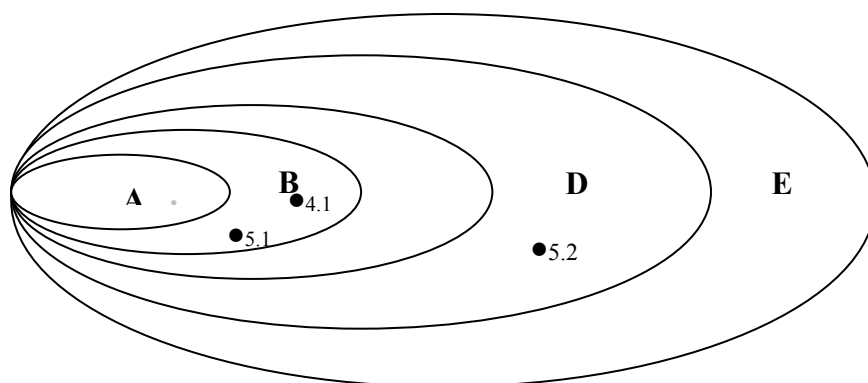
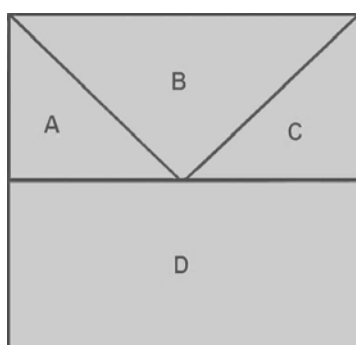


Gráfico de Comprensión -IA -de Cecilia asociado a la act.2

- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras

Actividad 3: (IAC3)

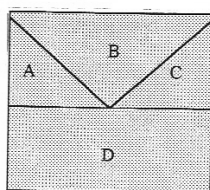
A Lucía le han regalado un rompecabezas cuyas piezas tienen la forma que indica el dibujo. ¿Qué parte del rompecabezas representa cada pieza?



A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia responde “A. un triángulo, B: triángulo; C triángulo y la D un rectángulo”.

3.- A Lucía le han regalado un rompecabezas cuyas piezas tienen la forma que indica el dibujo. ¿Qué parte del rompecabezas representa cada pieza?



A: triángulo
B: triángulo
C: triángulo
D: Rectángulo

1

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 3

Cecilia identifica la forma de cada una de las partes del cuadrado, pero no relaciona cada figura con respecto a la figura total. Es decir, no compara cada parte (cada una de las piezas) con el todo (el rompecabezas) a través de una fracción (ind 2.11 en *Percepción de propiedades*). Es posible que no haya comprendido lo solicitado.

En relación con el nivel de comprensión que logra Cecilia, conviene

recordar que la demanda de este problema se sitúa en *Percepción de propiedades* – capa D – relacionando el área de una parte con respecto al total pero Cecilia no interpretó lo solicitado.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ♦ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

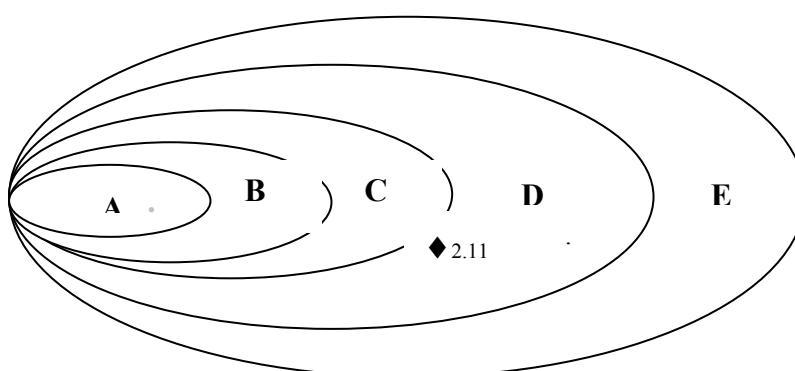
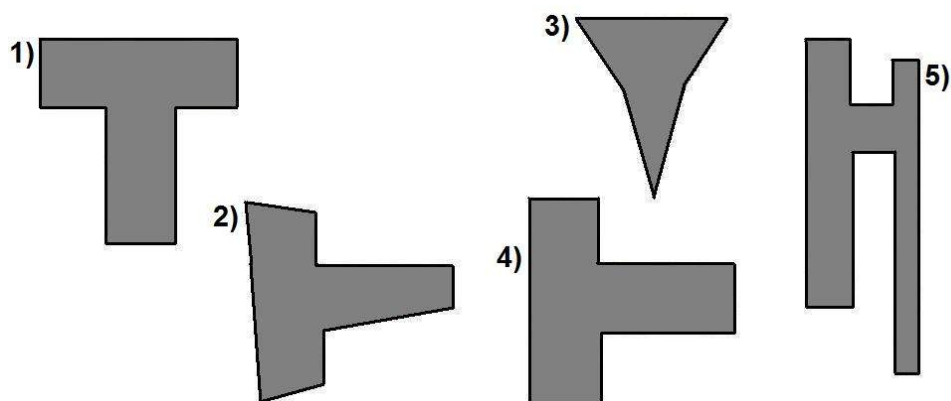


Gráfico de Comprensión -IA- de Cecilia asociado a la act.3

2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relaciona las partes y el todo a través de las fracciones

Actividad 4: (IAC4)

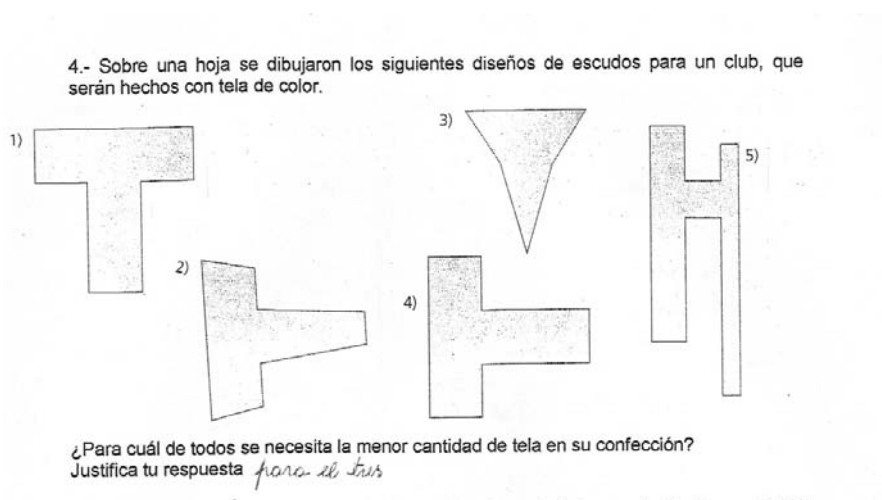
Sobre una hoja se dibujaron los siguientes diseños de escudos para un club, que serán hechos en telas de color



¿Para cuál de todos se necesita la menor cantidad de tela en su confección? Justifica tu respuesta

A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia responde solamente “para el tres”



B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 4

Cecilia responde correctamente pero al no justificar el resultado se puede inferir que utiliza la percepción visual, como en la actividad IPC1 (ind 2.1 en *Producción de una imagen*). Debido a la ausencia de argumentación no podemos distinguir si pudo realizar la comparación por inclusión, (ind 2.2 en *Producción de una imagen*), ni utilizar y comparar las piezas por descomposición (ind 2.3 y 2.4 en *Producción de una imagen -Posesión de una imagen*) o bien por transformaciones de romper y rehacer o a través de algún movimiento para superponerlas (ind 2.7 en *Producción de una imagen*).

Si bien el problema no solicita detectar los diseños que insumen la misma cantidad de tela, no contamos con información que la niña haya analizado esta posibilidad, para detectar el de menor cantidad de tela (ind. 2.8 e ind. 2.10. en *Producción de una imagen*).

Respecto al nivel de comprensión que logra Cecilia, conviene recordar que

la demanda de este problema se sitúa con dos indicadores en la capa B, *Producción de una imagen*- y en el anillo *Producción de una imagen* -*Posesión de una imagen*-capas B y C- y tres indicadores en *Percepción de propiedades*-capa D –, de la respuesta de Cecilia inferimos que sólo compara visualmente, es decir que accede solamente a la *Producción de una imagen*- capa B.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

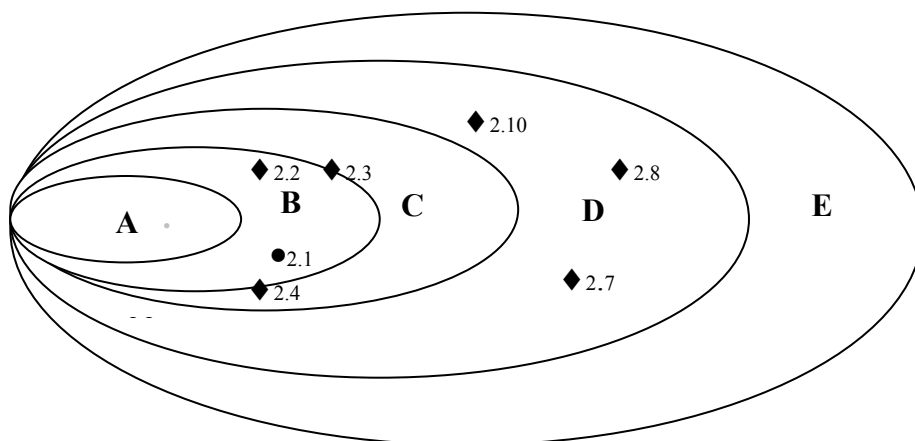


Gráfico de Comprensión -IA- de Cecilia asociado a la act.4

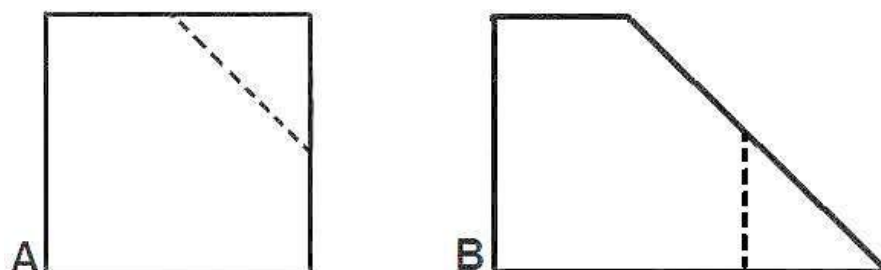
- 2.1.-Compara superficies por percepción visual.
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.

Actividad 5: (IAC5)

No se incluye en el análisis según lo expresado en el apartado 3.5.1.2.-

Actividad :6 (IAC6)

En la figura A se ha recortado por la línea de puntos una de las esquinas, y se ha ubicado como lo indica la figura B.



¿Qué puedes decir de la cantidad de superficie que ocupa cada una de las figuras?

Si quisieras bordear una de las figuras con un hilo. ¿Qué puedes decir acerca de la cantidad de hilo necesario para cada una de ellas? Justifica tu respuesta.

Cecilia no responde a esta situación

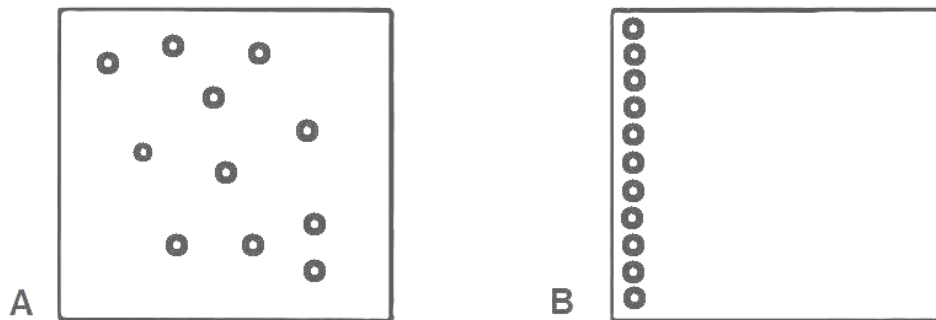
Actividad 7: (IAC7)

Deseo empapelar el pizarrón con hojas de papel glasé. ¿Cuántos de esos papeles necesitareé aproximadamente?

Cecilia no responde a esta situación.

Actividad 8: (IAC8)

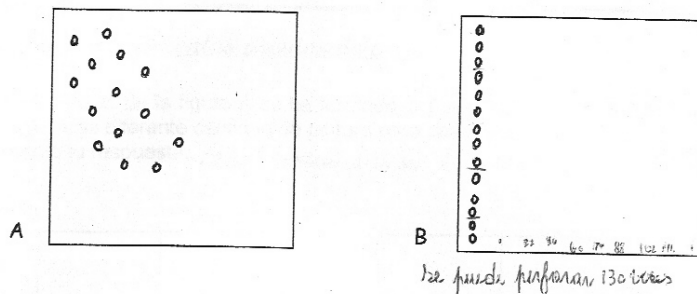
Una máquina perforadora hace agujeros circulares, todos del mismo tamaño sobre planchas de aluminio cuadradas. ¿Qué puedes decir acerca de la cantidad de aluminio que tiene cada plancha? Justifica tu respuesta.



A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia considera el dibujo de la derecha y agrupa los agujeros de tres en tres, quedando el grupo inferior con dos agujeros. Escribe en la última fila una serie de números con un tamaño pequeño y sin un orden aparente

8.- Una maquina perforadora hace agujeros circulares, todos del mismo tamaño, sobre planchas de aluminio cuadradas. ¿Qué podés decir acerca de la cantidad de aluminio que tiene cada plancha? Justifica tu respuesta.



En principio podríamos pensar que dice 1, 23, 46, 60, 70, 88, 102, 111.
Responde “se pueden perforar 130 agujeros”

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 8

A través del procedimiento de Cecilia se puede inferir que no comprende lo que se le solicita pues se puede suponer que consideró la misma cantidad de agujeros por columna y pretende expresar la cantidad total de agujeros hasta esa

columna inclusive. Es decir, pretende averiguar la cantidad total de agujeros si la cantidad de la primera columna se repite sobre toda la plancha.

Respecto al nivel de comprensión que logra Cecilia, la demanda de este problema se sitúa con dos indicadores en *Percepción de propiedades* – capa D – y Formalización- capa E. De la producción de Cecilia no tenemos información. En función de ello construimos el siguiente gráfico.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

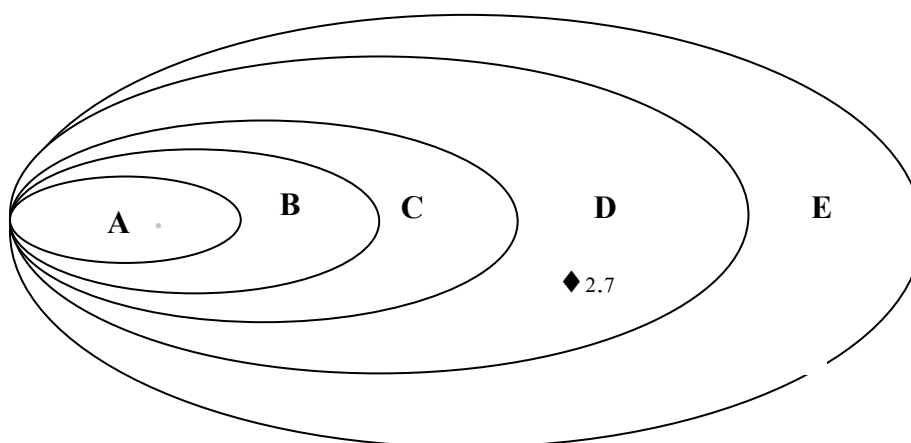


Gráfico de Comprensión -IA -de Cecilia asociado a la act.8

2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.

4.2.2.1.- RELACIÓN ENTRE LOS GRÁFICOS DE COMPRENSION DESEABLE Y EL DE CECILIA.

Con la resolución de las actividades correspondientes al cuestionario acerca de las ideas previas de los niños respecto del concepto de área, pretendimos detectar qué les sugería o podían anticipar respecto del mismo. El cuestionario esta formado por ocho actividades, según nos referimos en el capítulo anterior, apartado 3.5.1.2.-, a cada una de ellas les corresponde indicadores de las

categorías. Estos indicadores los hemos dispuesto en un gráfico de anillos a efectos de dar cuenta de la comprensión deseable de los mismos. Así, su distribución en el gráfico es la siguiente: cuatro indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- tres indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen-Capa B y Capa C* –dos indicadores en *Posesión de una imagen* - Capa C- seis indicadores en *Percepción de propiedades* – Capa D- y dos indicadores en *Formalización*- Capa E-.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

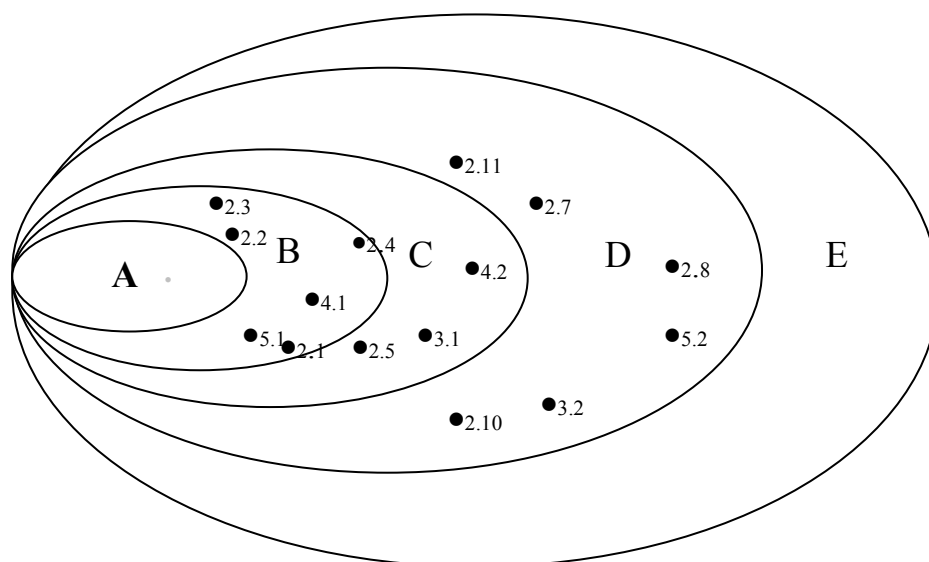


Gráfico Global de Comprensión Deseable sobre
Ideas Previas acerca del Concepto de Área –IA-

- 2.1.-Compara superficies por percepción visual
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficie midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura.
- 3.2.- Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual / menor perímetro de la misma
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades

Empleado.

4.2.-Elige una unidad adecuada.

5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.

5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras

Es decir, esperábamos que las niñas, para hallar el área de una superficie, cubrieran o desplazaran otra superficie como unidad de medida, contando la cantidad que esta unidad estaba contenida en dicha superficie. Para comparar dos o más superficies, lo hicieran por percepción visual, componiendo – descomponiendo, por inclusión o midiendo a través de una unidad de medida. Así como también, distinguieran la diferencia entre la noción del concepto de perímetro y de área de una superficie y que ambas no necesariamente variaban de igual forma.

Las respuesta brindadas por Cecilia nos permiten anticipar el siguiente gráfico de comprensión en el cual volcamos los logros de los indicadores involucrados.

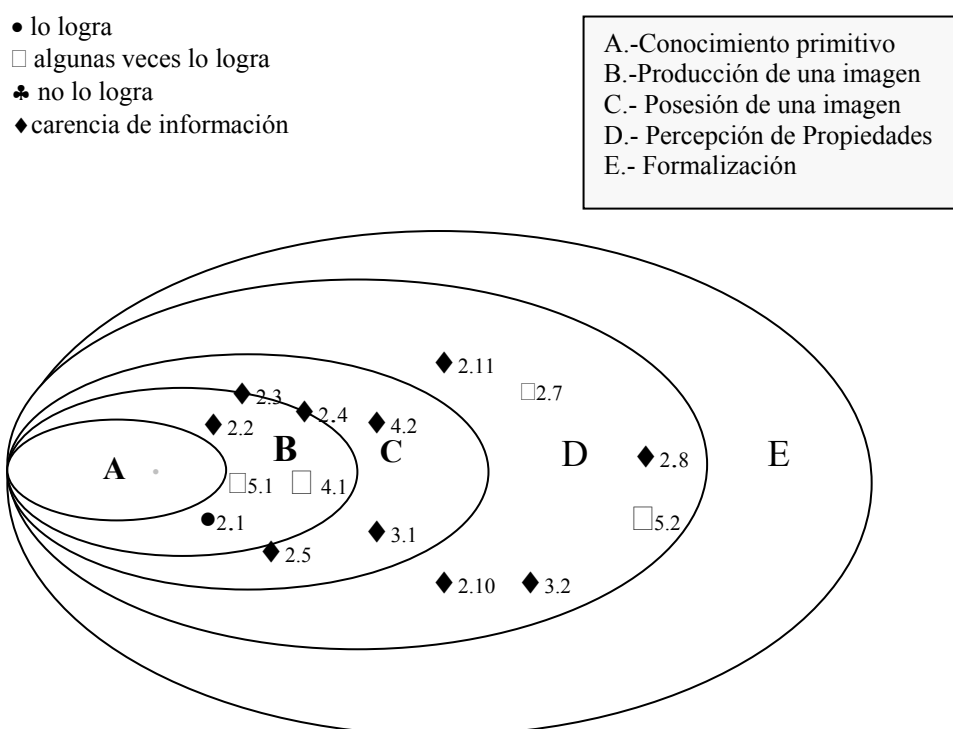


Gráfico de Comprensión Global sobre
Ideas Previas acerca del Concepto de Área de Cecilia

Al relacionar ambos gráficos –de Cecilia y el deseable– disponemos de

poca información respecto de las ideas que posee la niña acerca del concepto de área, pues no resuelve varias actividades y las que responde, no las justifica. No obstante podemos manifestar que la comparación y la conservación de la magnitud, la realiza únicamente desde la percepción visual (ind 2.1 en *Producción de una imagen*) pues no detectamos procedimientos alternativos a través de transformaciones directas o indirectas (ind 2.3; ind 2.4 e ind 2.5 en *Producción - Posesión de propiedades*)

Cuando se brinda como dato el dibujo de la unidad de medida, realiza cubrimientos por reiteración de una figura - unidad de medida – (ind 4.1 en *Producción de una imagen*) estimando el resultado a través de un cálculo multiplicativo (ind 5.1 en *Producción de una imagen*) en función de las dimensiones lineales de las figuras (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*), - IAC2-. Es decir, la niña puede calcular el resultado cuando puede operar de forma empírica. En cambio, cuando las características del objeto obligan a la niña a anticipar el número de cuadrados y no puede apelar para ello, a comprobaciones empíricas, no resuelve la actividad –IAC7-. Uno de los posibles motivos pudieron deberse, a que la unidad de medida en ambos problemas se formularon en distintos marcos, gráfico y escrito, respectivamente. Por eso, manifestamos que a veces logra lo expresado en las capas: *Producción de una imagen*, *Percepción de sus propiedades* y *Formalización*. Los aspectos mencionados constituyen ***las ideas previas de Cecilia acerca del concepto área***.

Destacamos que, en general, la ausencia de argumentación en la resolución de las actividades no nos permite distinguir los procedimientos que la llevan a arribar a algunos resultados.

4.2.3.- ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES RESUELTAS EN LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE (SC)

Cecilia en esta sub-fase denominada Secuencia de aprendizaje, resuelve 12 actividades de las 15, explicitadas en el capítulo anterior, apartado 3.5.2.1.1.-, ya que dos de ellas la maestra decidió no implementarlas y otra actividad no la resolvió por encontrarse ausente. Asimismo, de tres actividades resueltas, el instrumento con que contamos no proporciona información acerca del proceso de

construcción de los indicadores indicados, según se adjunta en el Anexo XVII A continuación comenzamos con el análisis de cada una de las actividades desarrolladas por Cecilia

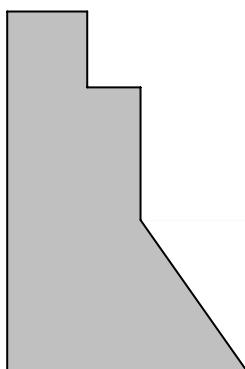
Actividad 1: (SC1)

- ✓ *Dispones de un equipo de Tangram. Arma un rompecabezas con las piezas, sin superponerlas de manera de obtener distintas figuras, para cada una de ella. No olvides apoyarla sobre la hoja de tu carpeta y marcar el contorno.*

No se dispone de la producción de Cecilia y no contamos con información para efectuar el análisis de este problema.

Actividad 2ª (SC2a)

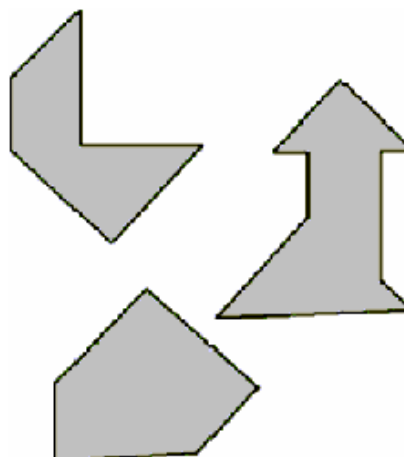
a.- Investiga con cuáles de las piezas del Tangram se construyó la siguiente figura



No disponemos de la producción ni existe unidad de significado, que dé cuenta de si Cecilia lo resolvió.

Actividad 2b: (SC2b)

b.- Ahora deben decir con qué piezas del Tangram se armaron las siguientes figuras.



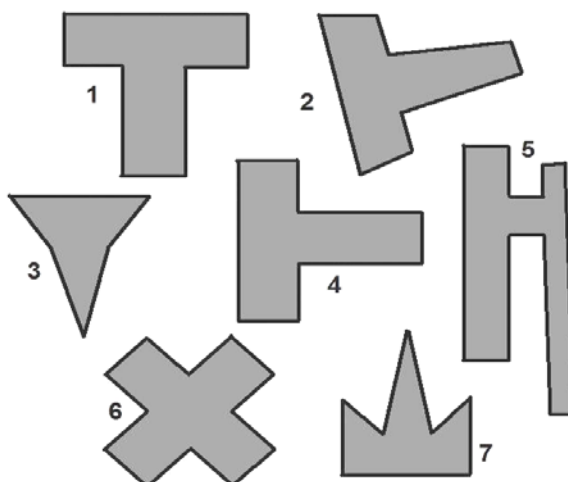
La maestra les entrega una hoja con las tres figuras, cuyo tamaño es diferente al que resulta si los niños lo arman con las piezas del *Tangram*.

Cecilia escribe en la hoja “*un cuadrado, un rectángulo, un trapecio*”,

La respuesta que la niña brinda no nos permite realizar el análisis de la actividad

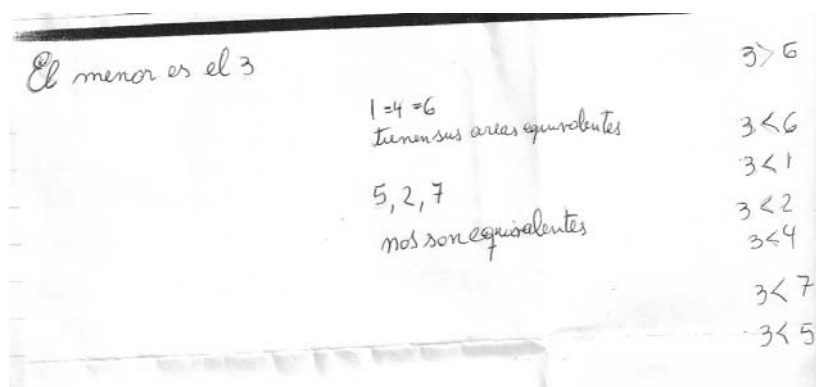
Actividad 3: (SC3)

- ✓ *Sobre una hoja blanca se dibujaron los diseños de los escudos para el club, que serán hechos con telas de color ¿para cuál de todos se necesita la menor cantidad de tela?*



A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Cecilia según su producción (PEC3) indica que “*El menor es el 3*” pues “*1 = 4 = 6 tienen sus áreas equivalentes y 5, 2, 7 no son equivalentes*”, relaciona las figuras a través de la relación de menor y escribe: “ $3 < 6$; $3 < 1$; $3 < 2$; $3 < 4$; $3 < 7$, $3 < 5$. *El menor es el 3*”.



(PEC.3)

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 3

De la producción escrita se observa que justifica lo que expresa sólo parcialmente, pues no justifica, por ejemplo, por qué son equivalentes las formas que identifica, ni proporciona información acerca de la relación que establece entre el diseño 3 y los demás. Este problema formaba parte del cuestionario sobre ideas previas y en ese caso respondió solamente “*para el tres*”.

Ahora, al abordar nuevamente el problema, cuando la maestra pregunta por el diseño de menos cantidad de tela, todos los niños y en particular Cecilia, responden “*la 3*” (ind 2.1 en *Producción de una imagen*) y cuando la maestra le pregunta: *¿cómo lo hicieron?* Cecilia y las otras niñas del grupo, consideran que pueden relacionar los diseños -desde un aspecto operacional-numérico- a través de la longitud de los lados y la cantidad de éstos, (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*) según se aprecia en la siguiente unidad de significado

36. Maestra: Les voy a dar a cada uno de ustedes un papel con los diseños
39. Araceli: Es lo mismo si tenemos un poquito aquí y otro allá. ¿Alguno tiene papel?
43. Maestra ¿para qué lo necesitas?
O. Todos los chicos usan la regla para comparar los diseños
44. Araceli. Para anotar las cantidades. Tomo los datos y los sumo.
46. Cecilia. Voy a tomar la medida de los lados y luego los sumo

(SC 3 (36,46))

Se observa en la tabla de diálogo (SC3, (55,78)) una interacción indirecta entre Araceli y Cecilia, pues ésta reutiliza lo que expresa su compañera Araceli, monitoreando lo que ella propone. Sin embargo, cuando la maestra les pregunta sobre lo que están calculando, Cecilia le responde “el diámetro”, en tanto Patricia pone en duda lo realizado por su compañera Cecilia, que expresa una conjetura errónea, y expresa “*El perímetro*”- Cecilia y todos los niños del grupo consideran que pueden comparar los diseños a través del perímetro (ind 3.1 en *Poseción de una imagen*). Es decir, Cecilia realiza lo que sugieren sus compañeras pero no sabe a qué denomina diámetro, ni perímetro. A pesar de las sugerencias de la maestra, para comparar la cantidad de tela que insume cada uno de los diseños, pretende hacerlo a través de la longitud de los lados de los diseños. Asimismo, no reconoce la noción de área como cualidad que permite comparar los diseños (ind 3.1. en *Poseción de una imagen*) Cecilia denota confusión a la hora de comparar superficies entre las nociones de área con la de perímetro (ind 3.1 en *Poseción de una imagen*). Es por ello que Cecilia no resolvió el problema en el cuestionario sobre ideas previas, cuando, en esa oportunidad, se le solicitaba relacionar el área y el perímetro de dos figuras. (IAC6)

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
55 Maestra: ¿Quién justifica su respuesta con un procedimiento que avale lo que ustedes afirman.	Maestra	Pregunta	Solicita que justifiquen su afirmaciones	Cecilia	
59 Cecilia: Podemos hallar los lados y mira este es igual a este. Y al sumar todos los lados estamos hallando lo que pide de la figura.	Cecilia	Responde	Valida el procedimiento empleados	Maestra, a Mirta y a Patricia	
64: Maestra ¿Qué es lo que estamos hallando de la figura?	Maestra	Cuestiona	Cuestionan el resultado	Cecilia	No reconoce la noción de diámetro ni de perímetro.
66 Cecilia: El diámetro.	Cecilia	Responde	Propone resultado	Maestra	
67 Mirta: la medida.	Mirta	Reacciona	Niega lo expresado a	Cecilia y Mirta	
68 Patricia: El perímetro	Patricia	Reacciona	Niega lo expresado	Mirta	
69 Maestra: Correcto, el perímetro.	Maestra	Responde	Confirma dando la razón	Patricia, Cecilia y Mirta	No reconoce la noción de área como cualidad de los diseños que permite compararlos
Pero en el Tangram acabamos de comparar el área de cada una de las figuras. Cada una de las piezas ocupa un pedacito de papel, y deseamos saber para cual diseño necesitamos la menor porción de tela.					
78. Cecilia: Nosotros medimos.	Cecilia	Responde	Expresa satisfacción por lo realizado	Maestra	
O: Cecilia sigue sumando la longitud de los lados					
					SC3,(55,78)

Recién cuando la maestra sugiere no dar respuesta numérica, comi Recién cuando la maestra sugiere no dar respuesta numérica, comienzan a considerar un aspecto geométrico para comparar y reconocer la noción de área para medir superficies y distinguir esta noción de la de perímetro (ind 3.1 *Posesión de una imagen*). En particular, para los diseños 3 y 5, Mirta compara de forma indirecta a través de romper y recomponer, según se expresa en la unidad (SC3, (106,130) en 110).

106 Maestra: Ya revisé todos los grupos de trabajo y veo que están comparando el diseño 3 y el diseño 5.

O Mirta pasa al pizarrón en donde la maestra dispuso una lámina con los dibujos de cada uno de los diseños. Mirta señala el dibujo 3 y lo relaciona con el dibujo 5.

110. Mirta: Corto esto y lo pongo aquí, es decir relleno lo que falta y luego observo que esta parte sobra, entonces considero que el diseño 5(la H) necesita más tela que el diseño 3.

117 Maestra: Por el dibujo que hiciste, descartas el diseño 5.

120 Mirta: Si

121. Araceli: solamente unimos donde esta la línea recta y rellenamos lo que sobra

O A continuación pasa Araceli a la pizarra. Superpone el diseño 3 sobre el diseño 5

124. Maestra: Es decir, con el papel de calcar apoya el diseño 3 sobre el diseño 5.

127. Araceli: Solo apoye el diseño 3 sobre el diseño 5 y nos sobra.

129-Maestra: ¿No necesitas cortarlo?

130. Araceli: No

(SC3, (106,130)

Ante la solicitud de la maestra sobre la identificación de diseños equivalentes, observamos en la tabla de diálogo SC3, (156.178), que Cecilia utiliza las piezas en distintas formas (ind 2.3 en *Producción – posesión de una imagen*) pues reconoce que las figuras así obtenidas serán de igual área (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*).

La intervención de Mirta y Araceli producen folding back no intencional pero efectivo en Cecilia, (FB~IE;M-A) pues al momento de identificar más de dos superficies equivalentes, se ve obligada a retroceder en su proceso de comprensión a una anillo interior, comparar cada una de los diseño 1, 4 y 6, a

través de la composición y descomposición entre ellas,(ind 2.4 en *Producción-Poseción de una imagen*), y recién allí, avanzar a un indicador exterior a identificar más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área (ind 2.10 en *Percepción de propiedades*), según expresa “los diseños 1, 4 y 6 son iguales en medida” (línea 167) En consecuencia también lo reconoce entre los diseños 1 y 4 o 4 y 6 (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*). Así, cuando Araceli les pregunta sobre lo que solicita el problema, todos responden que el diseño que insume menor cantidad de tela es el diseño 3.

De esta forma observamos que Cecilia ha podido interactuar de manera indirecta con Patricia y Mirta, efectúa en voz alta la comparación entre diseños equivalentes. Pues, a Cecilia le permitió monitorear y reutilizar sus comentarios y a Patricia intervenir apoyando lo que expresara su compañera,

Manifestamos también que no existen intervenciones de Cecilia que permitan suponer que haya comparado diseños a través de la inclusión o superposición. (ind 2.2 en *Producción de una imagen*).

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con dos indicadores en la *Producción de una imagen* – Capa B-; con dos indicadores en el anillo *Producción - Poseción de una imagen*-Capa B y Capa C- y con tres indicadores en *Percepción de propiedades* - Capa D-.

Del análisis de las tablas de diálogo, la unidad de significado y la producción escrita construimos el siguiente gráfico que denota el proceso de construcción que Cecilia va logrando, lo que permite dibujar una trayectoria completa y en particular, de los indicadores 2.7 al 2.4 la curva se muestra de mayor grosor y zigzagueante a efectos de mostrar el folding back analizado anteriormente entre ellos. De esta forma la curva se desplaza desde la *poseción de una imagen* hasta la *percepción de propiedades* de la noción. Asimismo tuvimos en cuenta otro indicador que no consideramos (3.1.-distinción entre área y perímetro y el cual explicitamos con otro tipo de letra), pues Cecilia pretendía comparar los diseños a través del perímetro de los mismos.

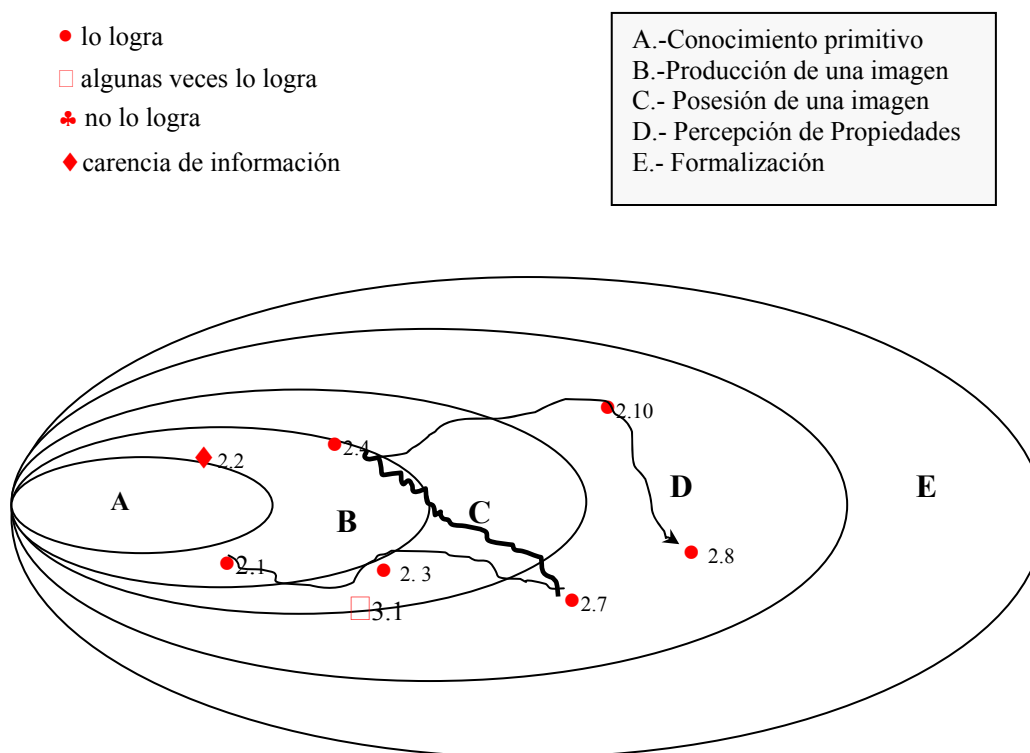


Gráfico de comprensión –S-de Cecilia asociado a la Act. 3

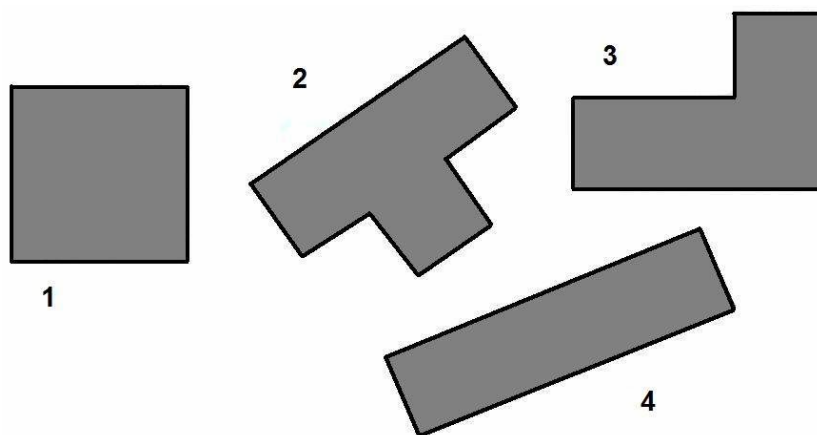
- 2.1.-Compara superficies por percepción visual.
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura

El clima y los momentos de discusión que instala la maestra promoviendo estrategias cognitivas -explicitar, analizar, justificar-, y metacognitivas, favorecedoras de la construcción del conocimiento, llevan a las niñas y, en este caso a Cecilia, a construir la mayoría de los indicadores propuestos.

Unidad de significado	Interlocutor (E.)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R.)	Idea unidad
156 Maestra: ¿Cuántos diseños tienen la misma cantidad de tela?	Maestra	Pregunta	Invita a que viertan su opinión	Al grupo	
158 Patricia: Los diseños 1, 4 y 6.	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar entender.	Maestra	
159. Maestra: ¿Apareció otro procedimiento para justificar que el diseño 3 es el de menor cantidad de tela?	Maestra	Propone	Alienta para que los alumnos expresen lo realizado	Los niños	
164. Araceli: Los diseños 1, 2, 3 y 4 son los que llevan igual cantidad de tela.	Araceli	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A la maestra	
167. Cecilia: los diseños 1, 4 y 6 son iguales en medida.	Cecilia	Responde	Acepta lo expresado por la compañera	A la maestra y los niños	
169. Maestra: pero el diseño 6 tienen distinta forma. O Cecilia muestra cómo debe descomponerse la figura para determinar que son equivalentes y Patricia descompone y recompone las piezas necesarias para justificar su procedimiento a Mirta, Araceli y Cecilia.	Maestra	Cuestiona	Solicita aclaración sobre lo realizado	Cecilia	
173 Patricia si agregas este pedazo así, lo tenés.	Cecilia	Contesta	Propone un procedimiento e invita a sus compañeras a que viertan su opinión	Mirta, Araceli y Patricia	Cecilia considera la descomposición para mostrar que a pesar de que tengan distinta forma las figuras 1, 4 y 6 son equivalentes.
175. Araceli: habría que saber cual tiene menor cantidad de tela. O. Araceli le pregunta a Cecilia	Patricia	Responde	Acepta parcialmente la idea y la completa.	Cecilia	
178. Todos. El diseño 3.	Araceli	Reacciona	Clarifica aspectos relevantes a la compañera	Cecilia	
	Todos	Responden	Expresan claramente el resultado a los que han arribado los niños.	A Araceli	
					SC3,(156,178)

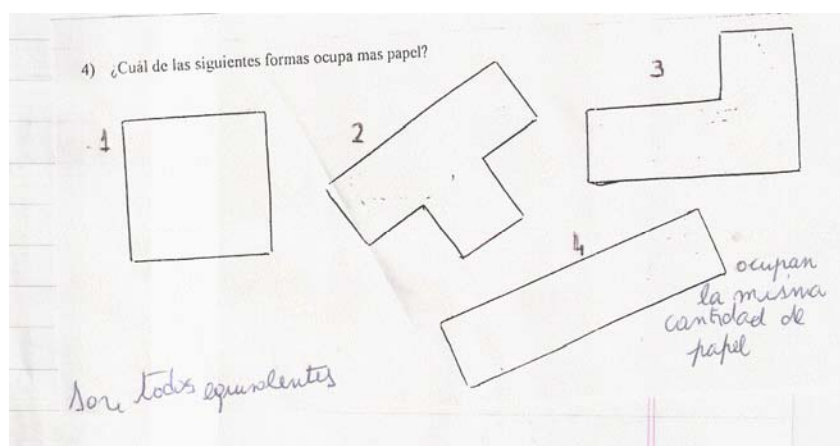
Actividad 4:(SC4)

-¿Cuáles de las siguientes figuras ocupan más papel?



A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Cecilia escribe al costado de ellas “ocupan la misma cantidad de papel”;
“son todas equivalentes”.



(PEC.4)

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad

4

De la producción escrita no se detecta un orden en el proceso de resolución, es decir, que no podemos inferir que ocupar la misma cantidad de papel sea motivo para afirmar que las formas sean equivalentes.

En la tabla de diálogo SC4, (3,34) apreciamos que ante lo que se solicita, Cecilia responde que “*la 2 y la 3 son iguales*”. Esta afirmación la corroboran y completan Flor y Araceli, es decir, las niñas y, en particular Cecilia, relacionan equivalencia con igualdad. De tal modo, Cecilia reconoce que las figuras pueden tener distinta forma y sin embargo su área no varía (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*), Ante esta respuesta, la maestra solicita explicación y Patricia le manifiesta que se refieren a que “*tienen igual área pero distinta forma*” y fundamenta su afirmación, subdividiendo las formas en cuadraditos, todos ellos congruentes entre sí.

Sus compañeros al escucharla capitalizan sus conocimientos matemáticos, produciéndose en todos ellos folding back, intencional y efectivo (FBIyE, P) que lleva fundamentalmente a Cecilia a retroceder a una capa interior, a identificar mentalmente la composición de las formas (1.4 en *Producción- Posesión de una imagen*) para avanzar en su proceso de comprensión, e identificar la figura - el cuadradito- común en todas las formas, como unidad conveniente para medir y comparar dichas formas. (ind 2.5 en *Producción-posesión de una imagen*). Si bien no avanza a capas exteriores, este procedimiento le permite identificar la equivalencia entre todas las formas, es decir, igual cantidad de material (ind 2.10 en *Percepción de propiedades*).

Sin embargo de la producción escrita, observamos que Cecilia, no acepta los aportes de Patricia automáticamente, sino que las conclusiones a las que arriba, las logra a través de las interacciones -multivocales- producidas con la totalidad del grupo. Es por ello que carecemos de información acerca de que haya pavimentado las formas a través de cuadraditos (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*) y constatado que en cada uno de ellos entran 4 de ellos (ind 1.2 e ind 4.1 en *Producción de una imagen*), utilizado otro modo de comparación entre las figuras, por ejemplo: por inclusión (ind 2.2 en *Producción de una imagen*), por composición (ind 2.4 en *Producción –Posesión de una imagen*) o recomponiendo con las mismas piezas (ind 2.3 en *Producción – Posesión de una imagen*).

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con cuatro indicadores en la *Producción de una imagen* – Capa B-; con dos indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen*- Capa B y Capa C-

con un indicador en el anillo *Posesión de una imagen - Percepción de propiedades*- Capa C y Capa D y con tres indicadores en *Percepción de propiedades* - Capa D-.

Los aspectos enunciados nos permiten detectar el logro solamente de algunos indicadores, pues de otros carecemos de información. Aspectos que a los fines de de esbozar el gráfico, denotan solamente una tendencia de la construcción, que nos llevan a trazar una trayectoria incompleta, desplazándose con algunos de los indicadores-los logrados al menos algunas veces- desde *producción de una imagen a percibir sus propiedades*, ya que de la mayoría de los indicadores ubicados en producción -*Percepción de una imagen*, no disponemos de información. No obstante indicamos en un tramo de dicha trayectoria, con un grosor mayor y zigzagueante- el folding back que se produce entre el indicador 2.7 en *Percepción de propiedades* y el indicador 1.4 en *Producción-Posesión de una imagen*.

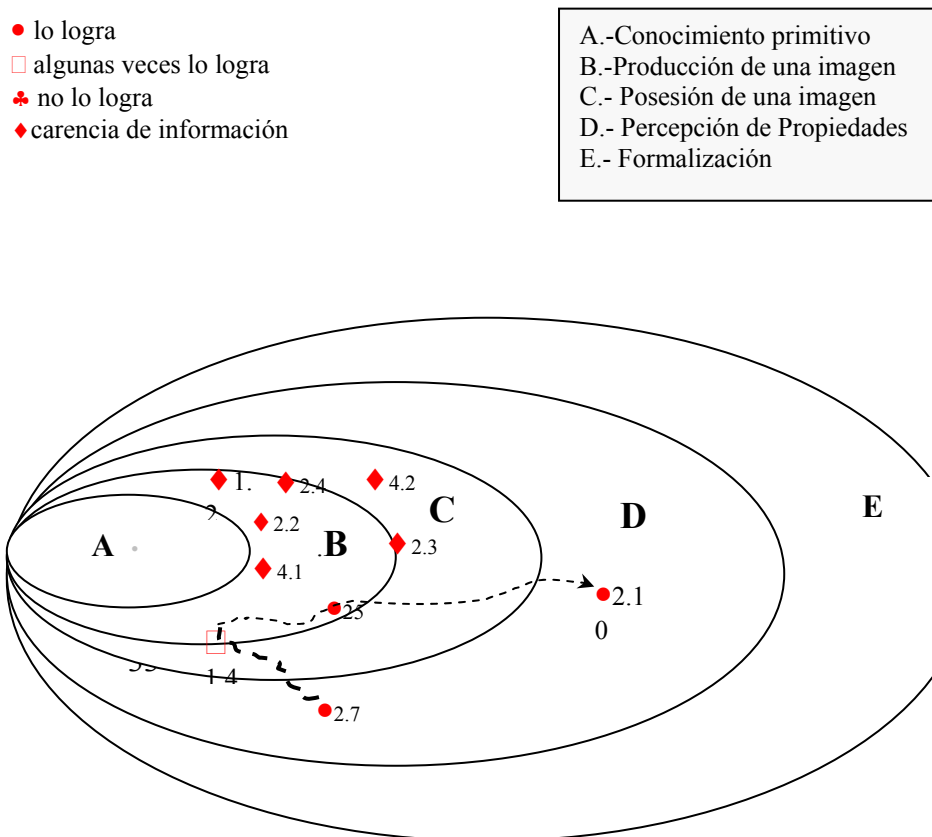
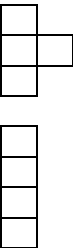
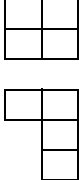


Gráfico de comprensión de -S- Cecilia asociado a la act 4

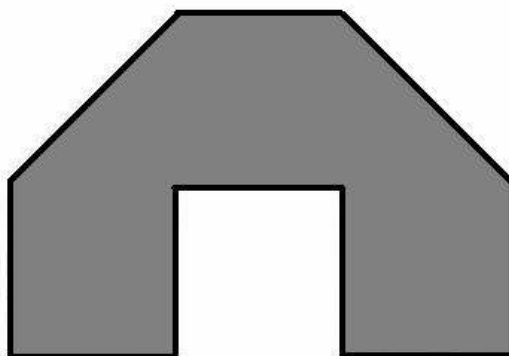
- 1.2.-Aparea lados.
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 4.1 Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades Empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad
1: Maestra: ¿Cuál de las siguientes formas ocupa más papel?	Maestra	Propone	Invita a que viertan su opinión.	A los niños	Cecilia, Flor y Araceli confunden el concepto de congruencia de figuras con el de igualdad de áreas de las figuras
3: Cecilia: la 2 y la 3 son iguales.	Cecilia	Responde.	Resuelve en voz alta.	A la maestra	
4: Flor: Las cuatro figuras son iguales.	Flor	Responde	Acepta lo expresado por su compañera.	A la maestra y Cecílias	
5: Araceli: Las cuatro figuras son iguales	Araceli	Responde.	Acepta parcialmente la idea de su compañera	A la maestra	
8 Maestra: Sin embargo, yo iguales no las veo.	Maestra	Cuestiona	Propone una idea e invita a los demás a que viertan su opinión		
10 Patricia: es que tienen igual área pero son de distinta forma.	Patricia	Responde			
12: Maestra: Si tienen igual área son figuras equivalentes pero tienen distinta forma. Bien Patricia, que diste esa idea, decime con que procedimiento determinas que el área es igual.	Maestra	Pregunta	Alienta para que los niños expresen lo realizado	Cecilia, Araceli, Flor y Patricia.	
O La docente está junta a la mesa en donde esta ubicada Patricia.					
19 Patricia: En la T cambie los cuadraditos, la subdividí en cuadrados, y si pongo este acá me da lo mismo.	Patricia	Reacciona	Aporta ideas al análisis y resolución del problema.	La maestra, Cecilia, Araceli, Flor y Patricia	
O: Patricia pasa al pizarrón y realiza los siguientes dibujos					
 					
4 cuadraditos					

26. Maestra: Figuras equivalentes. ¿Qué significa que cuatro figuras sean equivalentes?	Maestra	Cuestiona	Discute el resultado	Cecilia, Patricia , Araceli	En particular Cecilia, identifica que las figuras equivalentes tienen igual área aunque tengan distinta forma
29. Todos: Que tienen igual área					
30. Maestra: ¿Si hablo de cantidad de material?	Los niños	Responden	Expresan con palabras lo que desean dar a entender	Maestra	
32. Todos: igual cantidad de material.	Maestra	Pregunta	Solicita aclaración sobre lo expresado	A los niños	
34. Maestra. Podemos saber cual ocupa más, cual ocupa menos. Las figuras equivalentes ocupan igual cantidad, es decir tienen igual área aunque tengan distinta forma.	Los niños	Responden	Validan su resultado a la totalidad de la clase.	Maestra	
	Maestra	Responde	Recoge, sintetiza y explicita – institucionaliza- los resultados arribados por los niños.	A los niños	
SC4,(3,34)					

Actividad 5: (SC5)

- a) Encuentra tres figuras que sean equivalentes a la siguiente:



- b) *¿Es posible encontrar un rectángulo equivalente a la figura dada?*
Justifica tu respuesta-

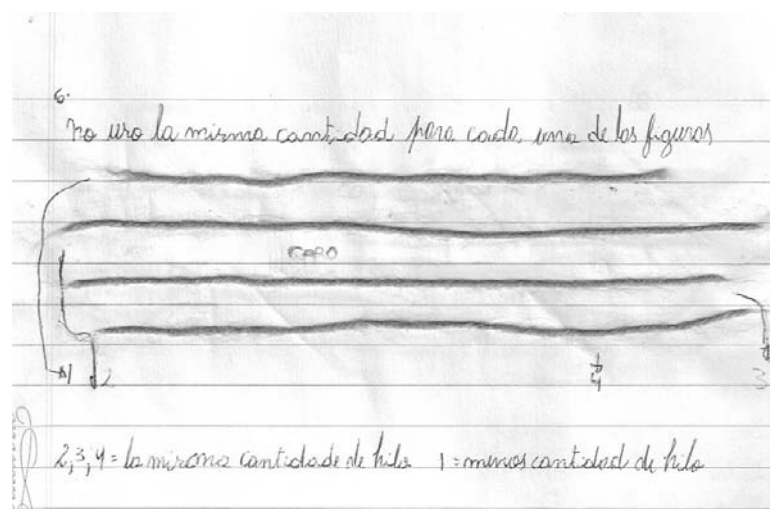
No contamos con información para efectuar el análisis de este problema pues Cecilia, ese día, no concurrió a clase

Actividad 6: (SC6)

Intenta bordear las figuras del ítem 4 con un hilo ¿utilizas la misma cantidad de hilo para cada una de ellas?

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Bordea cada una de las figuras con un hilo y los numera 1, 2, 3, y 4 respectivamente, los dispone una debajo del otro y responde “no usa la misma cantidad para cada una de las figura” “ 2, 3 y 4 la misma cantidad y 1 menos cantidad de hilo”



(PEC.6)

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad

6

Según se puede apreciar en la tabla de diálogo (SC6, (8,74)), Patricia propone un procedimiento en función de la longitud del lado y de la característica particular de la figura, mientras tanto sus compañeras se involucran en el problema monitoreando lo que van realizando. No están muy convencidas de comparar con el hilo, en particular Cecilia propone averiguar si para todas las figuras usan igual cantidad de hilo y para ello sugiere cortar el hilo y probar con los otros. Es decir, que Cecilia propone la comparación indirecta utiliza el hilo como intermediario, y efectúa en él una marca (ind. 3.1 en *Posesión de una imagen*).

Sus compañeras sólo aceptan parcialmente el procedimiento sugerido, pues cada una continúa con su estrategia. Este aspecto nos lleva a afirmar que Cecilia no tiene un ascendiente importante en el grupo, es decir, que no observamos un reconocimiento por ejemplo, por sus saberes matemáticos o al menos por sentimientos afectivos que impulsen a sus compañeras a considerar sus propuestas

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad
13. Maestra: ¿utilizas la misma cantidad de hilo, para cada una de ellas? <i>O: todos los niños de la mesa comienzan a mirar a Patricia y ella comienza a bordear el cuadrado, Mirta por su parte, también.</i>	Maestra	Pregunta.	Solicita que justifique sus afirmaciones.	A los niños	
16 Patricia: supongamos que el hilo sean las líneas. Sumas esto más esto y te da cuanto mide esto. (Patricia va marcando los lados de la figura). Midamos con regla $3 \times 4 = 12$. Miden 12 <i>O: Araceli toma las medidas de un solo lado del cuadrado y lo superpone tres veces sobre el hilo para obtener la medida del contorno del cuadrado. Mirta y Patricia, sobre su papel, miden y marcan con lapicera sobre el hilo, luego toman la otra punta del hilo y comienzan a bordear la figura (2)</i>	Patricia	Reacciona	Explica con palabras lo que desea dar a entender.	Cecilia, Araceli Flor y Mirta	
39 Maestra: ¿Usan la misma cantidad de hilo?	Araceli	Contesta	Aporta ideas para la resolución del problema.	Cecilia, Flor y Mirta	
41 Mirta: Si, por que son equivalentes. <i>O: Patricia muestra cómo midió el cuadrado.</i>	Mirta y Patricia	Contestan	Resuelven de manera conjunta	Al grupo	
45 Mirta: A mí me da igual, señ.	Maestra	Cuestiona	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A la totalidad de los niños	
47 Patricia: Yo no creo realmente que esto con el hilo te dé. En realidad no vale la pena....no da lo mismo porque tienen la misma área pero tienen distinto perímetro.	Mirta	Responde	Fundamenta su respuesta	A la maestra	
54 Cecilia: tenemos que averiguar si para todos	Patricia	Responde	Explica a través de gráficos lo que desea dar a entender	A la maestra	
	Mirta	Replica	Acepta la idea	A la maestra	
	Patricia	Responde	Cuestiona lo afirmado por su compañera y regula la situación	Maestra, Cecilia, Patricia	
	Cecilia	Contesta	Propone otro procedimiento y los invita a los otros	Mirta	Cecilia propone la comparación indirecta utilizando el hilo como intermediario y efectuando en él, una

usamos la misma cantidad. Cortamos el hilo y probemos con los otros. <i>O: Patricia se niega a cortar el hilo e insiste en usar la regla</i>	Patricia	Replica	Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento	Mirta y Patricia	marca
59 Flor: Yo hago una para cada figura <i>O: Patricia compara los hilos entre sí.</i>	Flor	Replica	Acepta la sugerencia parcialmente	Cecilia	
62 Cecilia: pero para que si... 64 Mirta: El cuadrado es más simple....no tienen tantas entraditas. Pues bordear con el hilo te lleva más hilo. Cuando hago este cuadrado, no sabia.... ¿hay que hacer un hilo para cada uno? 74 Patricia: No me da ninguno igual. (compara las longitudes de los hilos)Esta es “mas larga”, o sea mediana y esta es más corta. Lo tenemos que medir con la regla.	Mirta Patricia	Responde Responde	Muestra apertura a los procedimientos formulados por un compañero y solicita aclaración Acepta lo que afirma sus compañeras pero resignifica el recurso utilizado	Cecilia y Patricia Mirta y Cecilia	Sus compañeras no toman en cuenta su propuesta y continúan cada una con la suya
					(SC6(8,74))

Cecilia arriba a un resultado que permite expresar la relación entre las figuras, Flor confirma el resultado y juntas expresan la figura que le corresponde el perímetro menor (ind 3.6 en *Percepción de propiedades*). La maestra al solicitar que fundamente lo expresado, interactúa de manera invocativa y produce un folding back intencional y efectivo (FBIE-Ma), que deja a la niña pensativa, retrocede a una capa interior, para distinguir que “*hay cuadrados adentro*”- *apareando por los lados*- (ind 1.2 en *producción de una imagen*), y avanzar en su proceso de comprensión, en vista a distinguir que la disposición de los cuadrados incide en el perímetro de la figura formada. (ind 3.2 en *Percepción de propiedades*). Patricia comprende lo expresado por Cecilia y completa afirmando “*Hay lados en esta figura que no se cuentan y en las otras sí*”. En función de estos argumentos, ambas conjeturan acerca del criterio que prevalece para obtener la figura de menor perímetro. Cecilia, Mirta y Patricia solicitan pasar para explicar lo realizado, la maestra invita a Patricia a validar la resolución, y ella manifiesta, a través del término “*nosotras*”, la participación grupal en la resolución del problema, según podemos observar en la tabla de diálogo (SC6 (88,114)).

En esta unidad se observan, entonces, interacciones de tipo multivocal y colaboración indirecta entre Cecilia, Flor y Patricia, pues intervinieron de manera conjunta y cada una monitoreó lo realizado por la otra.

La evolución de las ideas manifiestas de manera interactiva por los niños durante el desarrollo del problema lleva a la maestra a proponer los siguientes problemas:

Actividad 6bis: (S6bis) “¿Se puede formar una figura de igual área pero de 16 lados de cuadrado de perímetro?”

La docente, a través de la pregunta formulada, propone un tratamiento numérico. Flor cuando expresa “*Serían cuadrados sueltos porque para que sean figuras tendrían que estar unidos* (Línea 220)”, da cuenta de su acceso a la noción de que para obtener una figura de mayor perímetro las piezas deben unirse por el vértice. Sin embargo, no contamos con intervenciones de Cecilia que den cuenta

de esta construcción. Es decir, que Cecilia haya apareado cuadrados por sus vértices (ind 1.3 en Producción- Posesión de una imagen le permite construir otra figura equivalente pero de perímetro mayor (ind 3.5 en Percepción de propiedades - Formalizar). Si bien no habíamos anticipado el tratamiento de éste indicador en la resolución de la actividad 6 – construcción de de figuras equivalentes a una dada pero de perímetro mayor-, las intervenciones de los niños durante el desarrollo de la misma y concretamente lo manifestado por su compañera Flor justifican su tratamiento, es por ello que lo incluimos en el detalle de los indicadores, con otro tipo de letra.

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con dos indicadores en: *Producción de una imagen* - Capa B - y con un indicador en el anillo *Percepción de Propiedades - Formalización* – Capa D y Capa E.

Del análisis de la tabla de diálogo, la inserción de este último problema y la producción escrita, observamos otros indicadores significativos además de los propuestos (que indicamos con otro tipo de letra), los cuales incluimos en el gráfico pero la ausencia de información acerca del logro de los mismos – ubicados en Producción de una imagen y los anillos *Producción- Posesión de una imagen* y *Percepción de propiedades. Formalización* – nos permiten esbozar solamente una tendencia de la construcción, y en función de ello, dibujar la trayectoria de forma incompleta, desplazándose desde *posesión de la imagen*- noción de perímetro y de área- hasta percibir las *propiedades* de las mismas. No obstante indicamos, en el tramo de mayor grosor y zigzagueante, el folding back que se produce del indicador 3.6 en *Percepción de propiedades* al indicador 1.2 en *Producción de una imagen*).

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo B.-Producción de una imagen C.- Posesión de una imagen D.- Percepción de Propiedades E.- Formalización

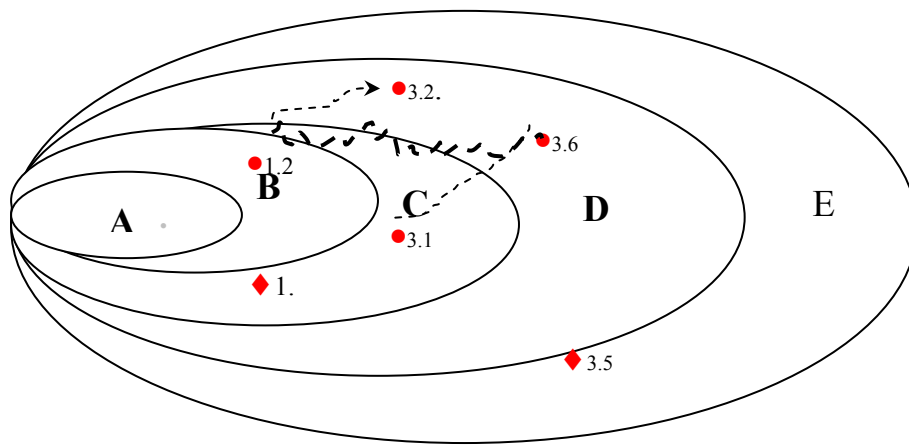


Gráfico de comprensión de -S-Cecilia, asociado a la act 6

- 1.2.- Aparea lados.
- 1.3.- Aparea vértices
- 3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura
- 3.2.- Reconoce que a mayor /igual /menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/menor perímetro de la misma.
- 3.5.- Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.
- 3.6.- Ordena según el perímetro, figuras equivalentes.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad
82. Maestra: ¿Cuál es el hilo de la figura 4?	Maestra	Pregunta	Anima a los alumnos a que comprueben si el resultado cumple con las condiciones del problema	A los niños	Cecilia arriba a los resultados que le permiten afirmar que los perímetros son distintos y Flor confirma el resultado vertido por Cecilia. .
84. Patricia: el más largo.	Patricia	Responde	Según sus resultados	Maestra	
88: Cecilia: a mi me dieron, tres iguales y uno distinto.	Cecilia	Reacciona	Niega lo que expresa la compañera	A maestra y Patricia	
91 Flor: a mi también	Flor	Responde	Confirma dando la razón.	Cecilia	
92: Maestra: ¿a que figura corresponde distinto?	Maestra	Pregunta	Solicita aclaración sobre el resultado	Cecilia y Flor	Cecilia distingue la disposición de los cuadrados incide en el perímetro de la figura formada.
94: Cecilia y Flor: al cuadrado	Cecilia y Flor	Responden	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Maestra	
96 Patricia: Ahora sí seño, ya lo tengo , tres iguales y uno distinto	Patricia	Responde	Muestra apertura a los resultados de sus compañeras y puede continuar con si procedimiento	Maestra	
99 Maestra: ¿Qué pasó?	Maestra	Pregunta	Solicita información sobre lo realizado	Araceli, Flor, Mirta	
101 Patricia: Lo que pasó es que había medido mal.	Patricia	Responde	Reconoce su equivocación y admite lo realizado por sus compañeras Solicita aclaración	Maestra	

103 Maestra: ¿Por qué corresponde al cuadrado?	Maestra	Pregunta	Solicita aclaración	Maestra	Conjetura acerca del criterio que prevalece para obtener la figura de menor perímetro
106 Cecilia: Porque a la vista en este dibujo hay cuadrados adentro.	Cecilia	Responde	Aporta ideas para validar su producción.	Patricia, Flor.	
109 Araceli: Porque aquí en esta figura tiene mas cuadrados dentro y estos (por la otra figura) están más estirados.	Araceli	Reacciona	Cuestiona lo realizado por otro compañero	Cecilia	
0: Patricia subdivide el cuadrado en cuatro cuadrados congruentes y explica “ con cuatro cuadrados adentro”					
114 Patricia: Hay lados en esta figura que no se cuentan y en las otras si	Patricia	Responde	Explica con palabras y gráficos lo que desea dar a entender	Mirta, Cecilia, Flor y Araceli.	
					(SC6 (88,114)).

Considerando las figuras del problema 7, se propone dar respuesta a la pregunta que formuló Ana:

Introducción al problema 7: (S7)

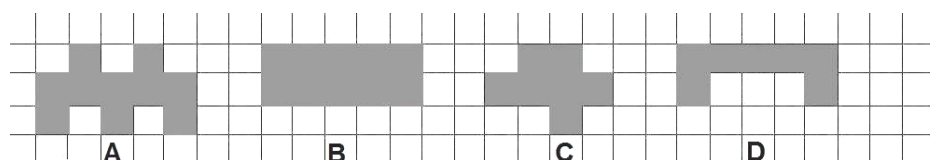
“¿puede dos figuras tener igual perímetro y distinta área?”

No se observan intervenciones de Cecilia que den cuenta de su opinión respecto de las preguntas formuladas, ya que las respuestas son vertidas fundamentalmente por Ana quien las realizó y tienen sentido para ella.

Actividad 7:(SC7)

Considera las siguientes figuras A, B, C y D

- ✓ ¿Cuáles de ellas tienen igual perímetro?
- ✓ Compara el área de esas figuras



A través de la resolución de esta actividad se pretende que los niños reconozcan la conveniencia de considerar una unidad de medida y de detectar figuras isoperimétricas, pero ni la producción escrita de la niña ni el momento de discusión en la clase, brindan información para analizar estas nociones.

Actividad 8: (SC8)

Consigna:

Remarca las piezas de tu Tangram en la carpeta, y responde, explicando cómo lo resuelves: superponiendo, contando triángulos, contando

cuadrados.

8.1.-Tomando como unidad el área de la pieza (triángulo chico) ¿cuál es el área de las demás piezas?

8.2.- ¿Qué piezas son equivalentes?

8.3.- ¿Cuáles son iguales? (este ítem la maestra lo omite)

8.4.- ¿Qué relación existe entre las áreas del cuadrado y el triángulo grande?

8.5.- ¿Y entre el paralelogramo y el triángulo grande?

8.6.- ¿Y entre el triángulo mediano y el grande?

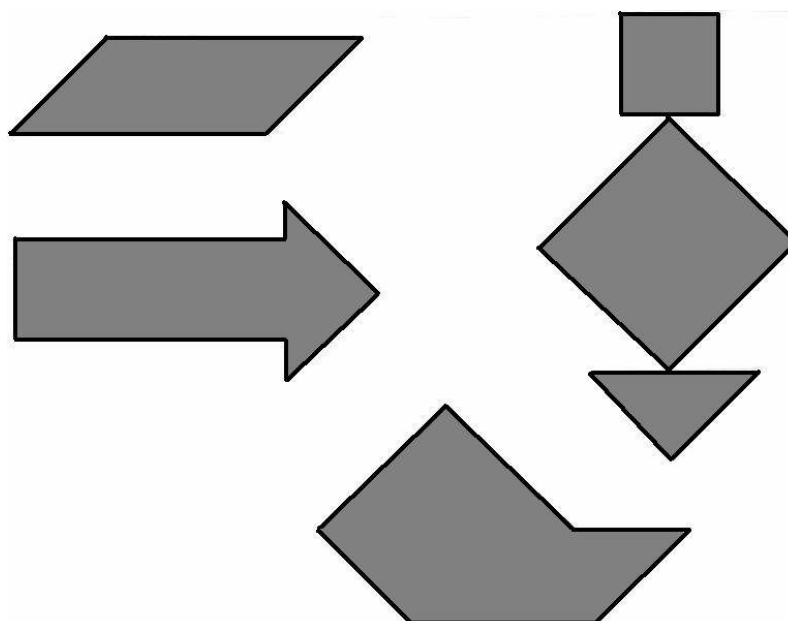
8.7.-Tomando como unidad de área el triángulo chico. ¿Cuál es el área del cuadrado que se puede formar con las siete piezas? ¿Y tomando como unidad el triángulo grande? ¿Y tomando como unidad el triángulo mediano?

En el inciso 8.7, la maestra cambia la consigna por:

Arma con las siete piezas un cuadrado. ¿Cuántos triángulos chicos necesitan para formar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo grande, ¿cuántos necesito para armar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo mediano, ¿cuántos necesito para formar el cuadrado del Tangram?

8.8.-Tomando como unidad el área del triángulo chico, construye con tu Tangram una figura que tenga 4 unidades, otra que tenga 8 unidades y otra que tenga 10 unidades, remarcándolas en tu carpeta de trabajo

8.9.-Ahora construye las siguientes figuras de manera tal que el paralelogramo tenga 6 unidades; la flecha, 8 unidades; el barco, 10 unidades y el muñeco 12 unidades. Dibuja cada una de las figuras obtenidas en tu carpeta.



8.10.- *¿Puedes transformar, moviendo una sola pieza, el paralelogramo en un rectángulo? Las dos piezas, ¿tienen la misma área?*

Como este problema está compuesto por varios ítems, en cada uno de ellos describimos la producción de la niña y, a continuación, explicitamos su análisis en el contexto de la discusión en el grupo. Por ejemplo:

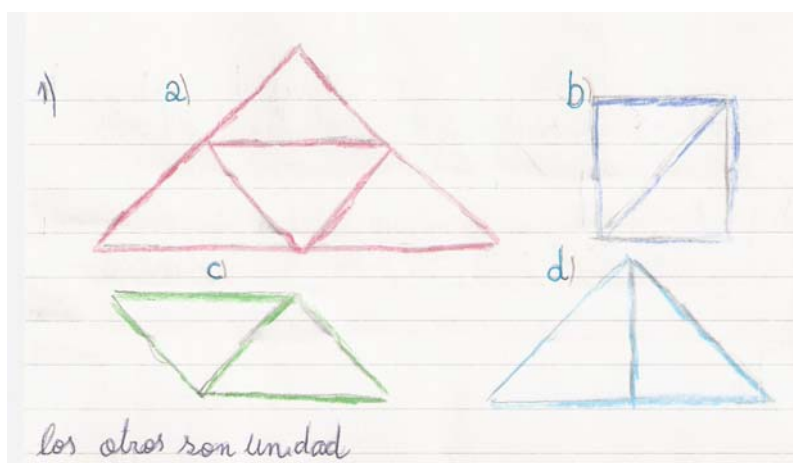
8.1.- *Tomando como unidad el área de la pieza (triángulo chico), ¿cuál es el área de las demás piezas?*”.

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

Cecilia remarca el triángulo grande, el cuadrado, el paralelogramo y el triángulo mediano. A los que denomina a, b, c, y d respectivamente.

Las figuras se muestran subdivididas en partes iguales y la forma de cada una de las partes coincide con la pieza indicada (el triángulo chico).

Así en el triángulo grande ubica cuatro triángulos chicos, en el cuadrado, en el paralelogramo y en el triángulo mediano, en cada uno de ellos, dos triángulos chicos. Y para las restantes piezas manifiesta “*Los otros son unidad*”



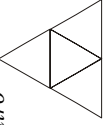
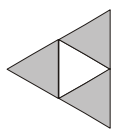
(PEC.8.1)

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a los ítems comprendidos entre 8.1 y 8.6

Cecilia, Patricia y Mirta manejan el material libremente y dibujan las piezas distintas al triángulo chico. (ind 1.1 en *Producción de una imagen*).

Patricia y Mirta efectúan el cubrimiento de las mismas con el triángulo chico, sus interpretaciones compartidas producen un folding back no intencional pero efectivo, (FB~IE, P-M) que lleva a Cecilia, partiendo de la representación mental del paralelogramo como composición de dos triángulos (ind 1.4 en *Producción-Posesión de una imagen*), al pretender compararlas se ve obligada a retroceder a una capa interior para pavimentar con dicho triángulo las distintas figuras- denominadas: a, b, c y d- (ind 4.1 en *Producción de una imagen*), y avanzar con una mayor comprensión a comparar las piezas a través de la utilización del triángulo chico como unidad (ind 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*) reconocer según se aprecia en la tabla de diálogo (SC8 (28,74)) y su producción escrita (PEC:8.1).

En función de ello, las intervenciones manifiestas entre las niñas, fomentan un tipo de colaboración directa entre ellas

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R) (ario)	Idea unidad
28 Patricia: ¿Que tenés que hacer? , Superponer y decir acá hay dos triángulos distintos, acá hay tres.....y así. <i>O: Patricia comienza a dibujar en su carpeta. (los triángulos chicos dispuestos de manera que queda el triángulo mediano)</i> <i>Mirta mira a Patricia que le explica la consigna</i> 39 Patricia: Yo lo hago con regla pues sino me sale torcido. <i>O: Mirta dibuja el triángulo grande y cuatro triángulos chicos incluidos en él</i>  48 Mirta: si lo pones así, te va dando cuantos entran.... cuatro triángulos. <i>O: Patricia lo dibuja.</i> 	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender.	Mirta	
	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Mirta y el grupo	
	Mirta	Responde	Explica con dibujos y palabras lo que desea dar a entender.	Patricia y al grupo	
	Patricia	Reacciona	Acepta la idea de su compañera	Mirta	
52 Mirta: En el triángulo grande entran 4 triángulos chicos y en el más chico va a entrar 1 pues es la unidad. <i>O: Patricia dibuja un cuadrado y sin probar con el triángulo del Tangram lo divide en dos triángulos con una regla. Cecilia continua dibujando el paralelogramo y lo divide en dos triángulos.</i> 60: Patricia: hay dos triángulos. <i>O: Cecilia dibuja primero todas las figuras.</i>	Mirta	Responde	Propone un procedimiento e invita a los demás niños a que vertan su opinión al respecto. Resuelve de manera conjunta	A grupo	
	Patricia	Reacciona			
	Patricia	Reacciona	Cuestiona lo realizado por la compañera	Mirta	Cecilia en base a las

65 Cecilia: Ahora no entiendo como pones esto. O: La maestra formula el segundo inciso 75: Cecilia: ay!!! No anotes que me pones nerviosa	Cecilia Maestra Cecilia	Responde Propone Responde	Cuestiona lo realizado por la compañera Lee el enunciado Expresa frustración por sentirse incapaz de acometer la tarea	Patricia Al grupo Patricia	intervenciones de Mirta y Patricia subdivide la superficie en función de la unidad acordada
					(SC8 (28,75))

8.2.- *¿Qué piezas son equivalentes?*

Para responder, Cecilia acude a pavimentar cada figura con el triángulo chico y contar las mismas (ind 4.1 en *Producción de una imagen*), de manera que puede constatar que el cuadrado, el paralelogramo y el triángulo mediano son cubiertos por la misma cantidad de figuras unidad, según expresa “*el cuadrado es equivalente al paralelogramo y también al triángulo mediano por que hay 2 triángulos en cada uno*” (SC8, línea 110). (ind 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*). Identifica así que (dos – tres) figuras de distinta forma son sin embargo equivalentes pues todas ellas están cubierta por dos triángulos chicos. (ind 2.8.- e ind 2.10: ambos ubicados en *Percepción de propiedades*).

8.3.- *¿Cuáles son iguales?*

La maestra omite este inciso, no obstante Cecilia responde: “*son iguales a, d.*” – triángulo grande y mediano respectivamente - según se observa en la producción escrita. Es decir, relaciona la relación de la igualdad solamente con la forma de las mismas.

8.4.- *“¿Qué relación existe entre las áreas del cuadrado y el triángulo grande?”.*

Cecilia responde “*El cuadrado es $\frac{1}{2}$ del triángulo grande porque el triángulo grande tienen 4 triángulitos y el cuadrado tiene 2*” (SC8 en línea 194).

Cecilia relaciona entonces una figura y parte de ella a través de una fracción. (ind 2.11: *Percepción de propiedades*)

8.5.- *“¿Y entre el paralelogramo y el triángulo grande?”.*

En la producción escrita se observa que Cecilia establece la relación al revés, es decir, entre el triángulo grande y el paralelogramo pues responde “*el triángulo a es el doble de área que la figura b*”.

Para ello la niña, en función de lo solicitado tiene que retroceder a un anillo interior, y considerar el triángulo chico como unidad para establecer la

relación entre ambas figuras pavimentado las mismas con dicha unidad. (ind 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*)

8.6.- ¿Y entre el triángulo mediano y el grande?

En la tabla de diálogo (SC8 (243,293)) se puede apreciar que Cecilia, según lo solicitado, para comparar las superficies solicitadas retrocede a una capa interior, superpone las mismas (ind 2.2 en *Producción de una imagen*) y las descompone,(ind 2.4 en *Producción –Posesión de una imagen*) de manera independiente, y establece correctamente la relación entre ambas piezas a través de una fracción(ind 2.11en *Percepción de propiedades*). En función de las preguntas que realiza la maestra puede además detectar las figuras equivalentes disponiendo el triángulo chico en distintas posiciones (ind 2.3en *Producción –Posesión de una imagen*).

El retroceso que la niña realiza al resolver este ítems y el anterior, forma parte del proceso de resolución de lo solicitado y arribar a la respuesta, por lo que se no considera folding back.

Todo ello en una gestión de la clase en la cual Cecilia arriba a la respuesta alentando a sus compañeras a continuar con la estrategia, aceptando y resignificando lo expresado por su compañera y por la maestra, desarrollando un trabajo colaborativo alrededor de la actividad. Estas características nos llevan a manifestar que la autoridad asumida es de tipo horizontal. El monitoreo que se aprecia entre las niñas, nos permite identificar un tipo de colaboración indirecta entre ellas.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
243 Maestra: <i>¿Qué pasa entre el triángulo mediano y el grande? (8.6)</i> 247 Patricia: A mí acá no me dio.	Maestra Patricia	Pregunta Responde	Invita a que viertan su opinión Solicita aclaración para comprender el enunciado	Al grupo A la maestra	Cecilia compara superficies por descomposición.
252 Cecilia: Lo superpongo así y se puede volver a superponer el triángulo en lo que me quedo.	Cecilia	Responde	Alienta para continuar con la estrategia que intenta implementar	Patricia	
256 Patricia: Si, si lo cortas y lo pones así. Porque si lo pones así y te dio la mitad de la otra forma también debe ser así. Si lo cortas te va a dar la mitad.	Patricia	Contesta	Acepta lo expresado por su compañera y lo completa	Cecilia	
263 Maestra: La forma que me permite volver a superponer tan fácilmente.	Maestra	Responde	Anima a que comprueben si su resultado cumple con las condiciones iniciales del problema.	Cecilia y Patricia	
266 Patricia: pero entra.	Patricia	Reacciona	Reformula de manera colaborativa lo realizado con otros	Maestra	Cecilia relaciona superficies respecto de su área a través de una fracción
267 Maestra: Tienen igual área. ¿Qué parte ocupa del triángulo grande?	Maestra	Pregunta	Invita a que viertan su opinión	A Patricia y Cecilia	
270 Cecilia: La mitad.	Cecilia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender.	Maestra	
271 Maestra Al final nos está dando lo mismo entre el cuadrado y el paralelogramo.	Maestra	Cuestiona	Anima a la niña a que compruebe si el resultado cumple con las condiciones del problema.	Al pequeño grupo	
274 Patricia: porque son equivalentes en área.	Patricia	Responde	Acepta la idea de su compañera y la completa	A la maestra	

276. Maestra: Antes de superponer: ¿Con solo haber calculado el área con el triángulo chiquito, ya estaban en condiciones de afirmar esto?			Reformula lo expresado por la niña con una expresión más formal	Cecilia	Detecta figuras equivalentes relacionando el área de superficies mediante una unidad
282. Patricia: Yo no.	Patricia	Contesta	Niega lo que expresa la compañera.	A la maestra y al grupo	
284. Maestra: ¿les sirvió medir con el triángulo chico?	Maestra	Pregunta	Discute lo realizado	Al grupo	
286: Cecilia: Si, porque dos triángulos es igual a un cuadrado y a un paralelogramo.	Cecilia	Reacciona	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Maestra	
291. Maestra: ¿Y su relación con el triángulo mayor?	Maestra	Cuestiona	Solicita aclaración sobre lo realizado.	Cecilia y Patricia	
293: Cecilia: Que es la mitad.	Cecilia	Contesta	Valida el procedimiento expuesto	Maestra y Patricia	
					(SC 8.6,(243,293))

Sin embargo, en la producción escrita se observa que responde estableciendo la relación de igual manera que en el inciso anterior, pues escribe: “La figura *a* es el doble de área que la figura *d*”. No expresa la relación solicitada, sino establece la relación al revés, es decir, del segundo respecto del primero. No obstante, podemos manifestar que la niña relaciona las figuras respecto de su área a través de un número y más precisamente como múltiplo respecto de la unidad. La niña puede establecer relaciones entre una superficie y parte de ella. Es decir puede establecer relaciones entre superficies a través de un número, concretamente, percibe el área como cualidad que permite comparar figuras.

8.7.-Arma con las siete piezas un cuadrado. ¿Cuántos triángulos chicos necesitan para formar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo grande, ¿cuántos necesito para armar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo mediano, ¿cuántos necesito para formar el cuadrado del Tangram?

Patricia regula la resolución de la actividad por sus saberes, e interactúa con la maestra. No se observan intervenciones concretas por parte de Cecilia, solamente observamos que todos los niños monitorean con Patricia y arriban a la respuesta, cuando consideran como unidad el triángulo chico pero con las otras piezas no se observan intervenciones que den cuenta si Cecilia puede establecer la relación inversa que existe entre el tamaño de la unidad seleccionada y la medida. (ind 4.5 en *Formalización*)

O: Todos Cuentan

O: Triángulo grande: 4 chicos.

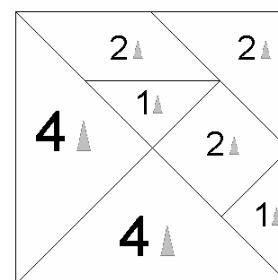
O: Triángulo mediano: 2 chicos.

O: Cuadrado: 2 chicos.

O: Paralelogramo: 2 chicos

128. Maestra: Veamos entran $4 + 4 + 2 + 1 + 2 + 2 + 1$

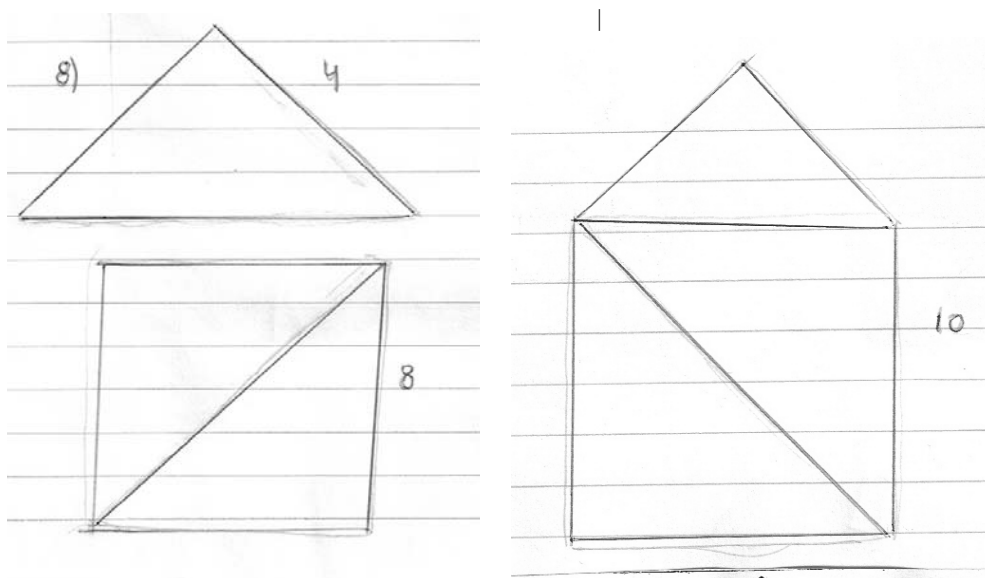
en total 16 triángulos chicos (SC8 (517,523))



8.8.- Tomando como unidad el triángulo chico, construye con tu Tangram una figura que tenga de área 4 unidades, otra 8 unidades y otra 10 unidades, remarcándolas en tu carpeta de trabajo.

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

Cecilia dibuja un triángulo grande y le asigna 4, refiriéndose al área de la pieza y considerando al triángulo chico, como unidad. Dibuja un cuadrado como unión de dos triángulos grandes y le asigna 8  es decir el cuadrado de área 8 unidades (triángulo chico) y una figura formada por dos triángulos grandes y un triángulo mediano, al cual le asigno 10 , es decir corresponde a la figura de 10 unidades (triángulo chico) de área



(PEC,8.8)

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente al ítem 8.8

En la tabla de diálogo (SC8 (539,552)) observamos que en un primer momento, Cecilia arma figuras de 4 piezas, sin considerar que deben ser triángulos chicos y cuando la maestra le pregunta si comprendió lo que se le solicita, Patricia le aclara “*Tienen que ser 4 triángulos chicos, no 4 piezas*”. Las relaciones que establece la maestra entre las piezas del Tangram y los aportes de

Patricia y Flor cuando responde “*un cuadrado*” producen folding back efectivo en Cecilia - intencional por parte de la maestra y no intencional por parte de las compañeras – (FBI-M; ~I –P y F) que la llevan a retroceder a una capa interior, aparear las figuras por sus lados (ind 1.2 en *Producción de una imagen*) y en este retroceso, avanzar a indicadores exteriores con la intención de, por ejemplo, utilizar las mismas piezas, disponiéndolas en distinta dirección, según podemos apreciar en su producción escrita. (ind 2.3 en *Producción – Posesión de una imagen*) y poder dibujar lo solicitado, es decir dibujar figuras de un área determinada componiendo la figura unidad- triángulo chico-, (ind 2.6 en *Producción – Posesión de una imagen*)

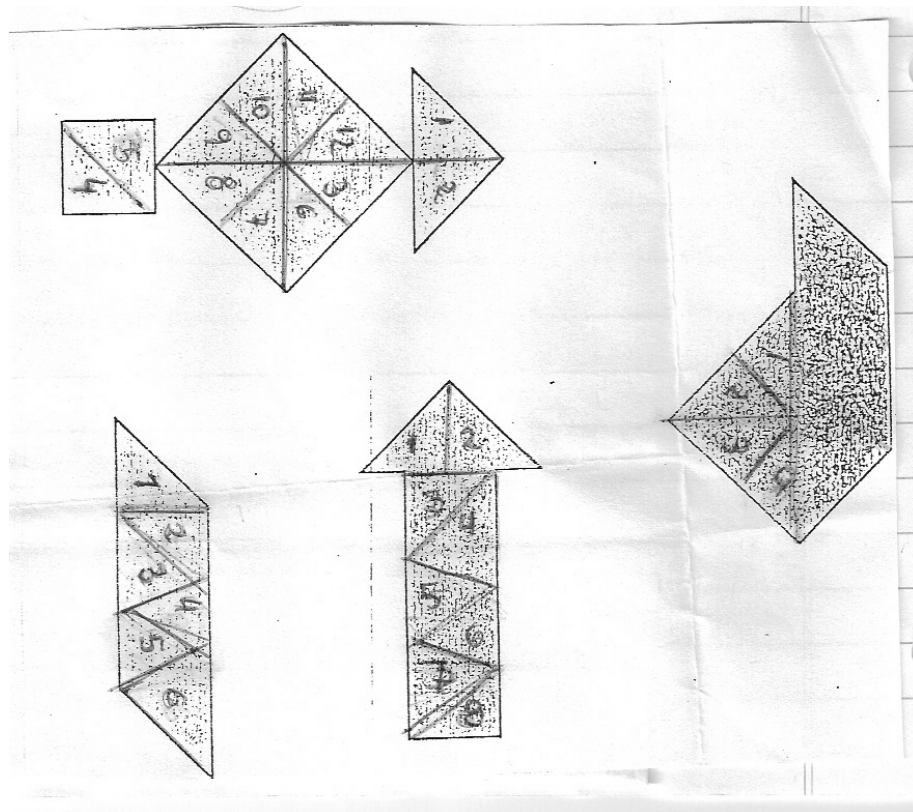
Durante este proceso, se observa en Cecilia una apertura a las sugerencias de sus compañeras Patricia y Flor, interpretando de manera colaborativa lo que se solicita en este inciso en particular. Hemos podido constatar entonces un tipo de autoridad horizontal, y la colaboración brindada entre las niñas Patricia, Cecilia y Flor ha sido fundamentalmente indirecta pues las intervenciones de cada una fueron insumos para el proceso de todas

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
539.O. <i>Cecilia hace una figura</i> 540. Maestra: ¿De qué área es? O. <i>Cecilia no contesta.</i>	Maestra Cecilia	Pregunta Contesta	Invita a que expresen su opinión. Explica con gestos lo que desea dar a entender	Cecilia Maestra	
542.Maestra: ¿Sabes lo que hay que hacer?.	Maestra	Cuestiona	Anima a la niña a resolver	Cecilia	
543. Cecilia: Si.	Cecilia	Contesta	Solamente afirmativamente	Maestra	
544. Patricia. Tienen que ser 4 triángulos chicos no 4 piezas.	Patricia	Reacciona	Clarifica aspectos relevantes a la compañera.	Cecilia	
545. Maestra. Nuestro triángulo mediano ¿Cuántos triángulos chicos tiene?	Maestra	Pregunta	Anima a que compruebe si su resultado cumple las condiciones iniciales del problema	Al grupo	
548. Cecilia:2.	Cecilia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Maestra	
549. Maestra. Entonces con 4 puedo formar.....	Maestra	Propone	Plantea una nueva cuestión.	Al grupo	Cecilia construye figuras de un área determinada
551.Flor: un cuadrado	Flor	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Al grupo	
O. <i>Todos se dan cuenta y comienzan a armar figuras</i>	Todos	Reaccionan	Resuelven de manera conjunta	Maestra	
					(SC8,(539,552))

8.9.-*Construye el paralelogramo que tenga 6 unidades, 1 flecha 8 unidades, el barco 10 unidades y el muñeco de 12 unidades*

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

En la producción se observa que considera el triángulo chico como unidad en todas ellas. El muñeco lo subdivide en triángulos. El triángulo que representa la cabeza del muñeco, lo subdivide en dos triángulos, el cuadrado (el cuerpo) en 8 triángulos y finalmente el cuadradito que lo dividió en dos triángulos. Todos ellos iguales entre sí y numerados en ese orden del 1 al 12. El paralelogramo y la flecha las subdivide en 6 triángulos cada uno, dos de ellos rectángulos y los cuatro restantes diferentes entre sí. El barco dividió “la vela” solamente en 4 triángulos, rectángulos e iguales entre sí.

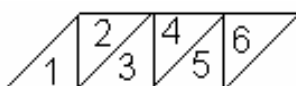


B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente al ítem 8.9

Ahora lo solicitado es un problema inverso a lo que han realizado hasta el momento, pues sabiendo el área de cada figura, se solicita que detecten la unidad de medida y el cubrimiento a fin de corroborar el área establecida.

En general, los niños no comprenden lo que deben hacer. Cecilia trata de subdividir la flecha pero no puede realizarla en las seis unidades solicitadas. En la tabla de diálogo

(SP 8.9,(584,637)) se observa como Mirta pasa al pizarrón a solicitud de la maestra y realiza el dibujo, donde se puede apreciar la unidad considerada y el cubrimiento de la misma según el área solicitada.

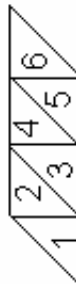


Excepto Mirta, que pudo completar las distintas figuras, los alumnos no respondieron, especialmente Cecilia, Flor y Patricia. Ante esta situación, la maestra solicitó que lo finalizaran en su casa como tarea para la próxima clase.

De lo acontecido y analizando de la producción de Cecilia, podemos esbozar algunos comentarios al respecto. Por ejemplo, la subdivisión que efectúa en el paralelogramo la realiza en función de lo expuesto por Mirta cuando pasa al pizarrón, quien produce folding back intencional en la compañera, aunque parcialmente efectivo,(FBI-M) pues de la producción escrita de Cecilia (PEC;8.9) y en función de las piezas del Tangram, observamos que selecciona la unidad (ind 4.2 en *Poseción de una imagen*),y retrocede con la intención de realizar el cubrimiento de la superficie a medir, (ind 4.1 en *Producción de una imagen*), pero lo logra sólo parcialmente pues selecciona el triángulo rectángulo numerado como 1 y 2, pero no detecta la necesidad de unidades convencionales(ind 4.4 en *Percepción de propiedades*) pues los otros 4 triángulos no son rectángulos ni congruentes, es decir que no pudo realizar el cubrimiento con piezas todas congruentes. Idéntico análisis se puede realizar con el cubrimiento de la flecha, excepto que los triángulos numerados 1, 2 y 3 son rectángulos y congruentes. El muñeco lo subdivide en 12 triángulos rectángulos según lo solicitado y en el barco realiza el cubrimiento solamente en la vela, a través de 4 triángulos rectángulos y

en el cuerpo del mismo no indica ningún cubrimiento. Es decir, Cecilia en algunas formas detectó el mismo triángulo como unidad de medida conveniente, (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*,) no detecta la necesidad de unidades convencionales(ind 4.4 en *Percepción de propiedades*).y no logra realizar el cubrimiento a fin de corroborar el área establecida. (ind 4.1 en *Producción de una imagen*). No podemos detectar que la niña comprenda que el resultado de la medida depende del tamaño de la unidad seleccionada (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*).

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
584. Maestra: Tenemos como unidad el triángulo chico. ¿De qué modo puedo encontrar las 6 unidades en el paralelogramo? ¿Alguien necesita otra explicación? ¿esperamos un ratito?	Maestra	Propone	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A los niños	
592. O: Mirta comienza a apoyar el triángulo en el paralelogramo y entra 6 veces.					
595. Maestra: ¿entró en el de ustedes 6 veces?	Maestra	Pregunta	Invita a que viertan su opinión	A los niños	
597. Mirta: me dio 6 en la fotocopia.	Mirta	Responde	Explica con palabras y gráficos lo que desea dar a entender	Maestra y los niños	
598. O. La docente comprueba si en el paralelogramo del pizarrón si entra 6 veces.	Maestra	Cuestiona	Corrobora lo realizado	Mirta	
602. O. Cecilia arma la fecha pero no le dan las unidades.	Cecilia	Responde	Acepta parcialmente la idea y la completa	Maestra y Mirta	
605. O. La maestra saca el paralelogramo del pizarrón y le solicita a Mirta que pase y lo realiza como en su fotocopia.	Maestra	Propone	Invita a que vierta su opinión	Mirta	
610.O. Mirta dibuja el paralelogramo apoyando el triángulo chico	Mirta	Contesta	Explica con un gráfico lo que desea dar a entender	Maestra y los niños	
615. Maestra: ¿Quién puede contar 10 unidades en el barco? Para mañana deben traer el trabajo terminado O. Miguel y Daniel pasan a realizar el muñeco que tienen 12 unidades.	Maestra Miguel y Damián	Propone Responden	Invita a que vierta su opinión Explica con un grafico lo que desea dar a entender	A los niños La maestra y los niños	Mirta pavimenta la superficie según una unidad de medida determinada



622. Maestra: ¿Cuántas unidades tiene que tener el muñeco? O: Pocos contestaron.	Maestra	Cuestiona	Discute lo realizado	Miguel y Damián	
626. Maestra: Con 12 triángulos pequeños tienen que formar un muñeco. 629.O: <i>Los alumnos no saben como realizarlo.</i> 631 Maestra: Lo dejamos para realizarlo en casa. <i>.O. Mirta: termino con todas las figuras.</i>	Niños Maestra Maestra	Responden Propone Propone	Acepta lo expresado por los compañeros. Explica con palabras lo que desea dar a entender Proporciona una sugerencia	A la maestra A los niños. A los niños	
O: Cecilia, Flor y Patricia no saben como realizar algunas figuras	Cecilia, Flor y Patricia		Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea.	A la maestra y los niños	(SC 8.9,(584,637))

8.10.- *¿Puedes transformar, moviendo sólo una pieza, el paralelogramo en un rectángulo? Las dos piezas, ¿tienen igual área?*

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente al ítem 8.10

Cecilia responde que no es posible transformar un paralelogramo en un rectángulo moviendo una sola pieza, pero sin embargo, manifiesta que las dos figuras resultan “*que tienen la misma área*”.(ind 2.7 en *Percepcion de propiedades*)

Si bien la maestra durante el desarrollo de la actividad ha realizado cambios respecto a la formulación de los ítems, éstos no han incidido en la demanda respecto del nivel de comprensión. Es decir los mismos se sitúan: con tres indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B - con cuatro indicadores en el anillo *Producción - Posesión de propiedades* - Capa B y Capa C- con dos indicadores en *Posesión de la imagen*- Capa C- con cinco indicadores en *Percepción de Propiedades* - Capa D- y un indicador en *Formalización*- Capa E.

Del análisis de las tablas de diálogo propuestas y la producción escrita, estimamos conveniente construir dos gráficos que denoten la comprensión de la niña- En el Gráfica de comprensión A construimos la trayectoria de los ítem 8.1 al ítem 8.7 inclusive y en el otro, el gráfico de comprensión B, construimos la trayectoria de los ítem 8.8 al ítem 8.10 inclusive. La trayectoria de comprensión de la actividad, surge de la unión de las trazadas en cada una de los gráficos, se han dibujado así, al solo efecto de facilitar su lectura. Esta trayectoria denota en su mayoría el proceso de construcción de la niña.

En función de ello traza la trayectoria completa pues podemos estimar el logro de los indicadores. En ella observamos con un trazo de mayor grosor y zigzagueante, los tres folding back producidos. Es decir, retrocede en su proceso de comprensión a dividir y pavimentar la superficie a medir(ind 4.1 en *Producción de una imagen*) y avanzar en ese proceso a compara superficies utilizando una unidad conveniente para medir (ind 2.5 en *Producción-Posesión de una imagen*); en otra instancia del proceso, retrocede a aparear las piezas por sus lados(ind 1.2 en *Producción de una imagen*) para avanzar con una mejor

comprensión a utilizar las mismas piezas en distinta forma (ind 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen* y por último en otra instancia del proceso, retrocede a seleccionar una pieza como unidad adecuada (ind 4.2 en *Producción de una imagen*) para avanzar en ese proceso a identificar piezas como unidades convencionales (ind 4.4 en *Percepción de propiedades*).

Asimismo la mayoría de los indicadores que la niña logra, se desplazan desde producción de la imagen de la noción de área con las distintas piezas del tangram hasta percibir sus propiedades, motivo de este trabajo.

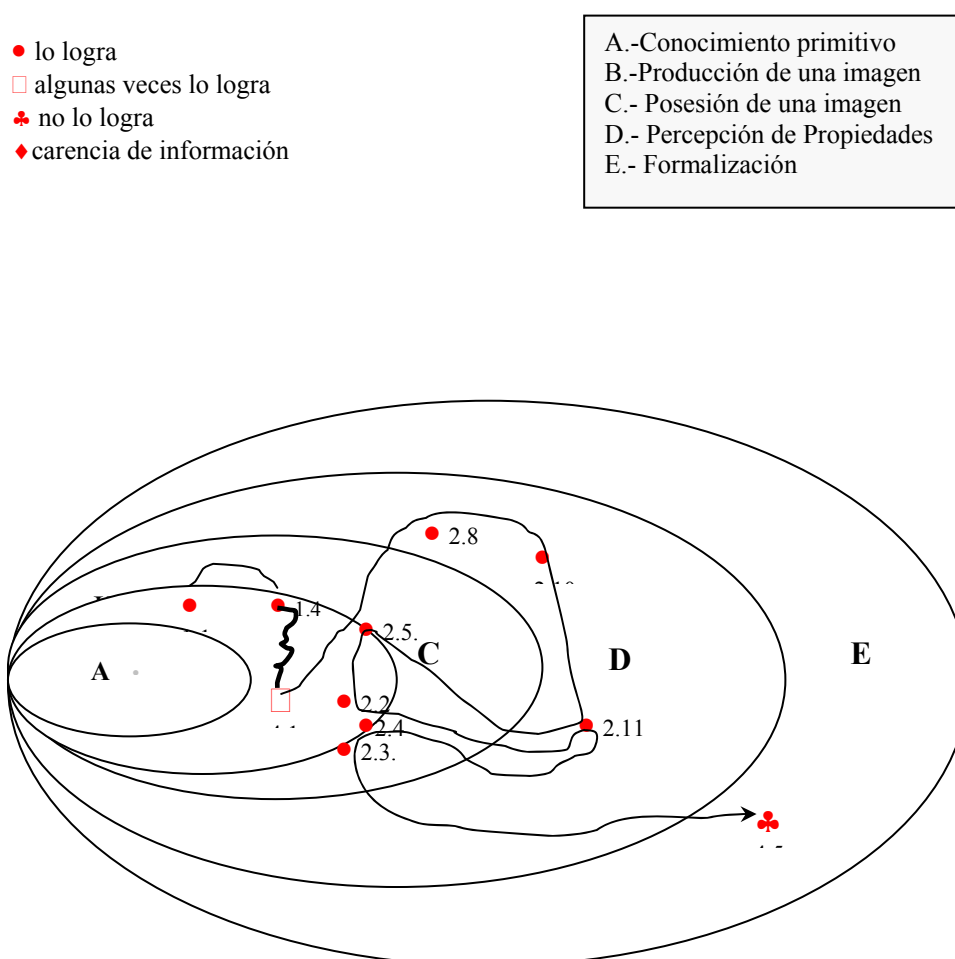


Gráfico de comprensión “A ”de Cecilia asociado a los ítems 8.1 a 8.7

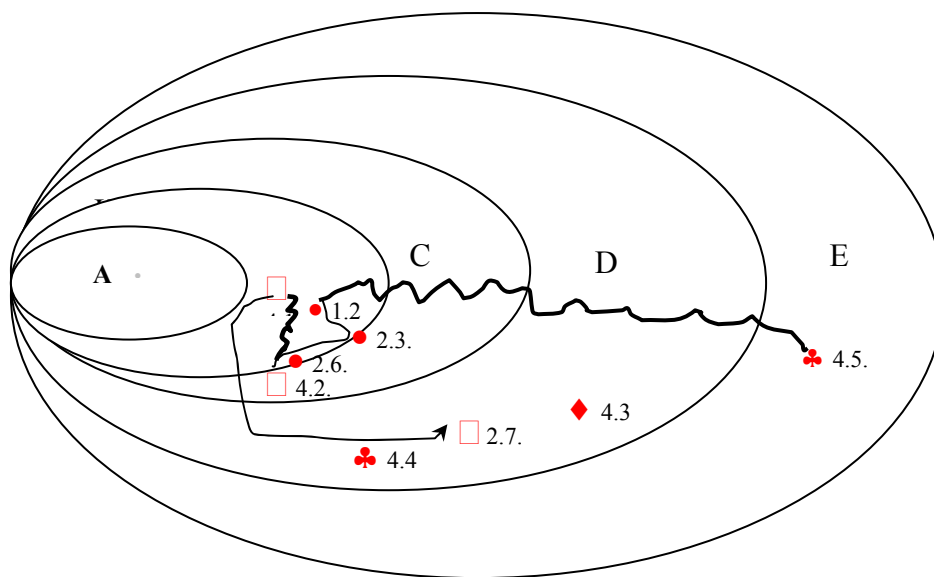


Gráfico de comprensión “B” de Cecilia asociado a los ítems 8.8 a 8.10

- 1.1.- Maneja el material mediante manipulación.
- 1.2.-Aparea lados.
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.6.- Construye superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 2.11.- Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones
- 4.1.-División y pavimentación de la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
- 4.4.-Comprende la necesidad de unidades convencionales.
- 4.5.-Distingue la proporción inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida.

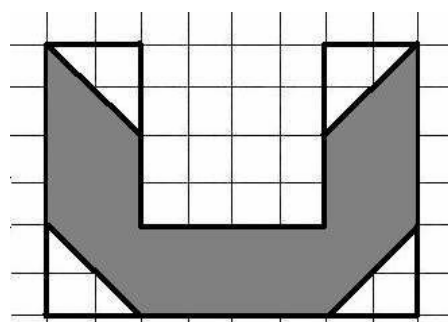
Durante el desarrollo de esta actividad y al considerar las tablas de diálogo a las que nos hemos referido para efectuar el análisis, hemos podido percibir que Cecilia ha interactuado con sus compañeras de manera colaborativa, pues los

comentarios y los procedimientos implementados por cada niña fueron insumos para que todas pudieran avanzar en la construcción del conocimiento. Estos aspectos, monitoreados en su mayoría por la maestra, favorecieron la construcción de conocimiento, fundamentalmente en Cecilia.

Actividad 9:(SC9)

✓ *Determina el área de la figura sombreada:*

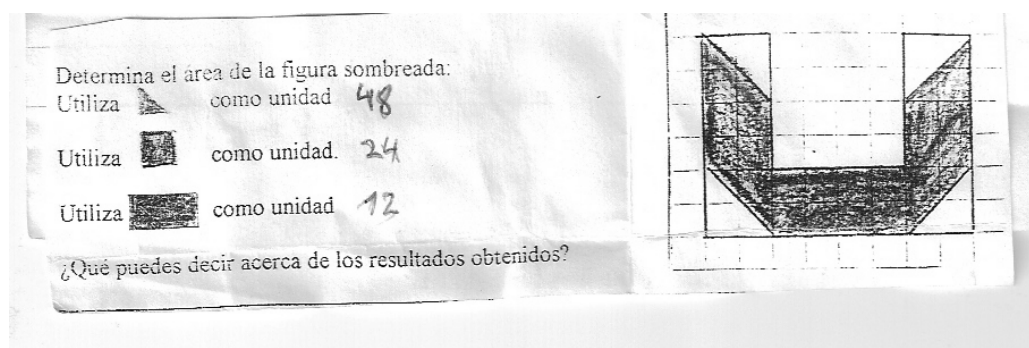
- a) Utiliza  como unidad.
- b) Utiliza  como unidad
- c) Utiliza  como unidad



¿Qué puedes decir acerca de los resultados obtenidos?

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Cecilia escribe al lado del triángulo: 48, al lado del cuadrado: 24, y del rectángulo: 12. Pero no justifica cómo arriba a esos resultados.



(PEC,9)

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 9

Al analizar la tabla de dialogo (SC9;(5,42)), observamos que Patricia, que es quien lidera el desarrollo de la actividad, establece la relación entre las diferentes unidades de medida y cómo éstas inciden en el número resultante de la medida del área de la superficie. Mientras tanto, Cecilia intenta resolver considerando el rectángulo, como unidad de medida, pero ante las preguntas que le formula la maestra, podemos pensar que la niña no entiende el procedimiento de hallar el resultado a partir de la relación entre las unidades propuestas.

Las niñas reconocen que para calcular el área solicitada, deben efectuar el cubrimiento con las unidades propuestas y contar la cantidad de ellas, pues Patricia le explica a sus compañeras -Mirta, Flor y Cecilia- la relación que existe entre las unidades- el cuadrado y el triángulo-y cómo realizar el cubrimiento sin dejar huecos. De manera que se pueda medir la superficie, contando el número de veces que esa unidad está colocada una junto a otra y sin dejar huecos.

Sin embargo, Cecilia lo refuta en función del número de rectángulos que ella avizora que existen (5 rectángulos) (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*), sobre la superficie sombreada.

La maestra interroga a Cecilia sobre lo que realiza Mirta, interpelando para ello el resultado. En respuesta, Mirta explica el procedimiento que le permite arribar a la respuesta. Estas intervenciones producen folding back intencional por parte de la maestra y no intencional por parte de Mirta, pero siempre efectivo para Cecilia, (FBIE-Ma; ~IE-M), pues la niña comprende y admite lo expresado por su compañera, revisa la unidad que ella consideró y retrocede en su proceso de comprensión a fin de representar mentalmente la composición de las distintas figuras propuestas (ind.1.4 en *Producción- Posesión de una imagen*).

A continuación realiza el cubrimiento de la superficie, (ind 4.1 en *Producción de una imagen*) pero este retroceso según observamos en el gráfico, no implica un folding back, puesto que se produce por el propio enunciado de la actividad.

Asimismo y según se solicita, realiza el cubrimiento de la superficie, con cada una de las unidades de medida solicitadas (ind 4.2 en Posesión de una imagen).

Mientras este procedimiento lo explicita en voz alta a la maestra, la niña arriba a la respuesta, según observamos en su producción escrita. PEC9.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
5 Maestra: <i>Determina el área de las figuras sombreadas utilizando estos tres tipos de unidades. ¿Qué puedes decir de los resultados obtenidos?</i> O: la maestra reparte un papel a cada niño con el texto del problema. Patricia responde rápidamente.	Maestra	Propone	Invita a que viertan su opinión	al grupo	
11 Patricia: Primero me fijé en el cuadrado y luego lo multipliqué por 2 para saber el triángulo.	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A la maestra y su grupo	
15 Maestra: ¿Vos Cecilia, encontraste un solo rectángulo?	Maestra	Cuestiona	Solicita aclaración sobre lo realizado	Cecilia	
18 Cecilia: Si.	Cecilia	Responde	Expresa con palabras lo que desea dar a entender	Maestra	Cecilia muestra imposibilidad de pavimentar la superficie con la unidad establecida y efectuar su recuento
O La maestra le muestra que puede haber más.	Maestra	Responde	Anima a la niña a que compruebe si su resultado cumple con las condiciones del problema	Cecilia	
20 Cecilia: 5 rectángulos.	Cecilia	Responde	Acepta la propuesta y la completa	Maestra	
21 Maestra: ¿Cómo los encontraste?	Maestra	Pregunta	Solicita justifique su afirmación.	Cecilia	
O: Cecilia lo muestra pero no lo comprende. En tanto Patricia le explica a Mirta y a Flor cómo tienen que hacerlo, les dice que primero busquen el cuadrado y luego lo multipliquen por dos para sacar la cantidad de triángulos. Patricia le explica a Cecilia y le muestra cómo contarlos pero ella le refuta en función de su resultado	Cecilia	Responde	Expresa desconocimiento cerca de lo que se le pregunta.	Maestra	
	Patricia	Responde	Alienta a las compañeras y brinda la respuesta incompleta para que ellas continúen	Mirta, Flor y Cecilia	
	Cecilia	Reacciona	Niega lo que expresa la compañera	Patricia	
36. Maestra: ¿Cómo lo estás contando?	Maestra	Cuestiona	Solicita aclaración sobre lo realizado.	Cecilia	
O .Cecilia le muestra pero le faltan cuadrados	Cecilia	Contesta	Expresa con gestos los que desea dar a entender	Maestra	Cecilia comienza a resolver

39. Mirta: hay 12 triángulos	Mirta	Reacciona	Ignora la intervención de su compañera y lleva a delante su procedimiento.	Maestra y al grupo.	monitoreando lo que hace y manifestándose a la maestra
40. Maestra: ¿Eso es un triángulo?	Maestra	Cuestiona	Solicita aclaración sobre lo realizado.	Mirta	
41. Mirta: No un cuadrado.	Mirta	Contesta	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Maestra	
42. Maestra: ¿Entonces, Mirta?	Maestra	Cuestiona	Solicita que justifique su afirmación.	Mirta	
O. Mirta cuenta toda la figura y le da 48 triángulos, 24 cuadrados y 12 rectángulos.	Mirta	Contesta	Reconoce su equivocación y admite lo que propone la maestra	Maestra	
<i>Cecilia comienza a entender y empieza a trabajar, explicando a la maestra lo que realiza.</i>	Cecilia	Reacciona	Reformula de manera colaborativa los realizado con sus compañeras.	maestra	
					SC 9,(5,42)

Con respecto a la dependencia entre la cantidad y la unidad de medida, Cecilia no explicita dicha relación, (ind. 4.3 en *Percepción de Propiedades*) según se observa en la producción escrita (PEC, 9). Sin embargo todos los niños y, en particular Cecilia, cuando la maestra institucionaliza esta relación, reconocen que deben considerar la unidad de medida con la que miden (ind. 4.3 en *Percepción de Propiedades*) y advierten la importancia de considerar unidades convencionales a la hora de pretender establecer relaciones entre ellos (ind. 4.4 en *Percepción de propiedades*).

89 .Maestra:- Entonces cuando mido con el triangulo me da una medida, cuando mido con el cuadrado, me da otra y con el rectángulo me da otra. Es decir, cuando mido superficies, la medida del área depende de la unidad con que la mido.

O. Todos: concluyen en lo mismo, tengo que saber la unidad con que mido.

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con un indicador en: *Producción de una imagen* - Capa B – en el anillo *Producción - Percepción de Propiedades*. Capa B y Capa C- y *Posesión de una imagen* - Capa C- respectivamente y dos indicadores en este último -*Percepción de propiedades*; Capa D-

El análisis de las tablas de diálogo y de la producción escrita nos permite construir el siguiente gráfico que denota el proceso de construcción que Cecilia va logrando, desde la *producción de la imagen*, hasta la *percepción de propiedades*, dibujamos para ello la trayectoria completa. En particular observamos lo zigzagueante de la misma, pues muestra el folding back que se produce del indicador 4.2 en *Posesión de una imagen* a 1.4 en *Producción –Posesión de una imagen*, cuando la niña vuelve para reconstruir la representación mental de cada una de las unidades de medida propuestas en vistas a interpretar la relación entre ellas. Con respecto a los siguientes indicadores manifestamos que sólo a veces lo logra pues en principio el indicador. 4.2 en *Posesión de una imagen* la niña no considera la unidad solicitada. Con respecto al indicador 4.3 en *Percepción de Propiedades*), en la producción escrita no responde a lo solicitado, sólo cuando la

maestra le pregunta expresamente, la niña y todos sus compañeros responden: “*tengo que saber la unidad con que mido*”.

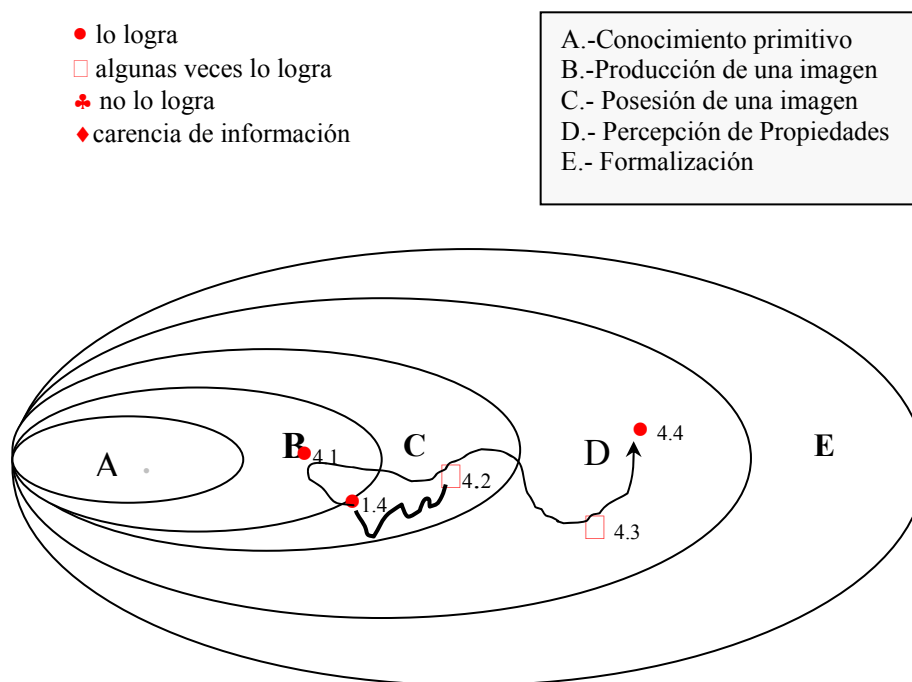


Gráfico de comprensión de Cecilia asociado a la .act 9

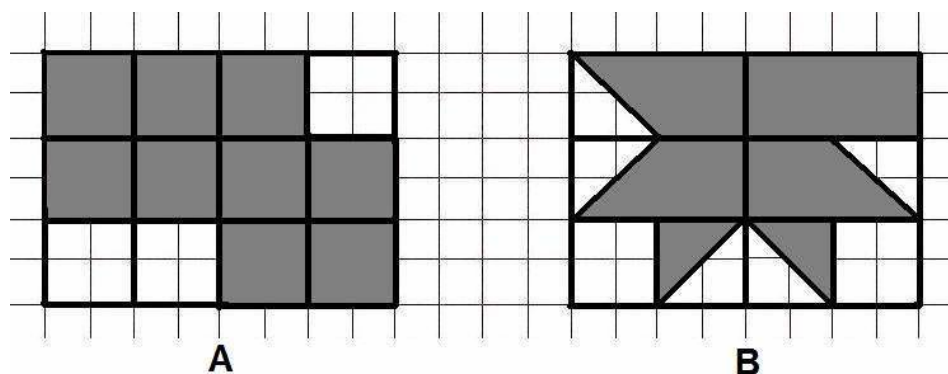
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
- 4.4.-Comprende la necesidad de unidades convencionales

Durante el desarrollo resultaron significativas las interacciones producidas entre Patricia, Mirta y Cecilia. Principalmente la autoridad matemática y social es asumida por Patricia. Cecilia en principio, cuestiona el procedimiento -interacción de tipo multivocal- pero se adecua a lo desafíos y argumentaciones sostenidos por sus compañeras.

Podemos considerar también una colaboración de tipo indirecta con Mirta y Flor; mientras trataban de entender y formulaban desafíos a las explicaciones de Patricia, generaban oportunidades de aprendizaje, fundamentalmente para Cecilia que pudo comprender y resolver la actividad.

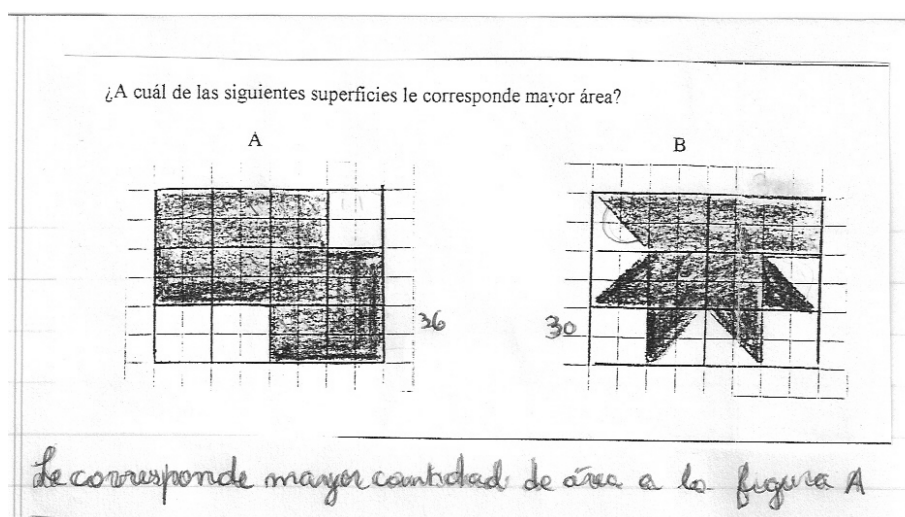
Actividad 10:(SC10)

✓ ¿A cuál de las siguientes superficies le corresponde mayor área?



A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Cecilia al costado de la figura A escribe "36" y al costado de la figura B "30" en la parte inferior responde la pregunta "*Le corresponde mayor cantidad de área a la figura A*"



B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 10

Mirta y Patricia consideran como unidad el cuadradito. Cecilia también utiliza la misma unidad, que viene respaldada además por la respuesta que proporciona a Mirta, aunque ella no es consciente de ello, según se puede

observar en la tabla de diálogo (SC 10 (18,67)). En ella, Cecilia representa mentalmente la composición de figuras (1.4 en *Producción de una imagen*) y elige el cuadradito como unidad (ind 4.2. en *Posesión de una imagen*). Cuenta cuadrado por cuadrado y concluye que la figura que tiene mayor área es la A, (ind 2.5 en *Producción-Posesión de una imagen*), pero cuando pretende aclararle a su compañera Patricia la estrategia, para arribar al resultado, le manifiesta que “*conté triángulos como uno*”. Si hubiera considerado el triángulo como unidad no habría podido asentir lo manifestado por Mirta.

En respuesta, Patricia le explica que el triángulo representa $\frac{1}{2}$ pues con dos triángulos puede formar un cuadrado, Cecilia advierte la comparación entre la unidad que utilizó y la que manifiesta (ind. 2.4 en *Producción – Posesión de una imagen*), y lo resignifica explicándole a Mirta cómo obtener la medida del área de la figura B.

Fueron significativas las interacciones que circularon durante el proceso, producidas principalmente entre Mirta, Patricia, Flor y Cecilia, las cuales permitieron, por un lado, construir la representación mental de la composición de figuras (ind 2.4 en *Producción – Posesión de una imagen*), y por otro, la conveniencia de hallar el área de cada una de las figuras en función de la misma unidad de medida pues la medida depende de la unidad seleccionada (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*). Las intervenciones de Cecilia no dan cuenta acerca de la relación entre el tamaño de la unidad y la medida (ind 4.5 en *Percepción de propiedades*)

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con tres indicadores en el anillo *Producción - Posesión de propiedades* - Capa B y Capa C- y con un indicador en cada uno de las capas *Posesión de la imagen*-Capa C- *Percepción de Propiedades* - Capa D- *Formalización*- Capa E-

Lo expresado anteriormente nos permite construir el siguiente gráfico que denota el proceso de construcción que Cecilia va logrando a través de todos los indicadores sugeridos y para ello se desplaza desde producción de la imagen, hasta percepción de propiedades. Es decir, comparar las superficies en función de una misma unidad de medida y establecer la relación entre las distintas unidades de medida.

Trazamos para ello curva continua de manera de obtener la trayectoria completa de dicho proceso. En ella observamos un retroceso, del indicador 4.2 ubicado en la capa *Posesión de una imagen* al indicador 2.5 ubicado en el anillo *Producción – Posesión de una imagen*, sin que ello constituya un folding back, pues esta regresión se da por el propio proceso de resolución y no para fortalecer la comprensión en los indicadores ubicados en capas exteriores.

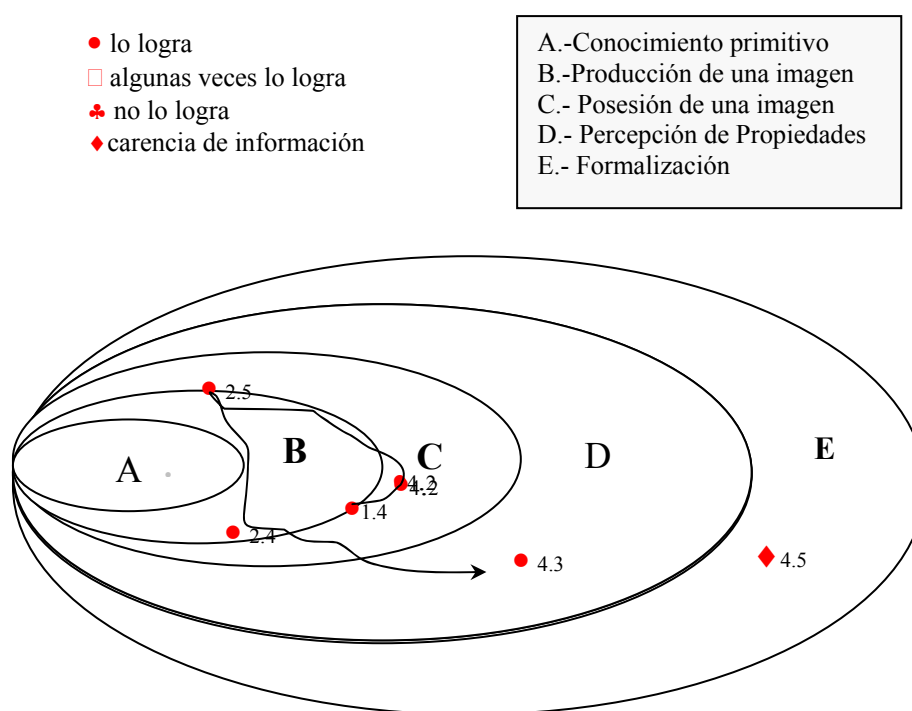


Gráfico de comprensión de Cecilia asociado a la act 10

- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
- 4.5.-Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida de la cantidad de magnitud.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
21 Mirta: A mí me da 36 cuadrados. 23 Cecilia: a mí también. <i>O: Mirta considera los cuadrados chicos, Cecilia cuenta en la figura B cuadrado por cuadrado. Mientras tanto la docente les lee nuevamente la consigna.</i>	Mirta y Cecilia	Responden	Aceptan parcialmente la idea y la completan	Patricia	
25 Maestra: Hay una superficie sombreada tanto en la figura A como en la figura B, traten de elegir una unidad de medida que ustedes crean conveniente para poder responder a la pregunta.	Maestra	Propone	Plantea un nuevo procedimiento alternativo.	Al pequeño grupo	
32: Cecilia: corresponde mayor superficie a la A.	Cecilia	Responde	Acepta lo expresado por Patricia.	Al pequeño grupo	
34 Patricia: a mí me dio 26 <i>O: Cuanta los cuadraditos chicos de B.</i>	Patricia	Responde	Aporta ideas al análisis y resultado del problema	Cecilia	Representación mental de la composición de figuras
36 Cecilia: Yo conté triángulos como 1 <i>O Cecilia lo considera en la figura B</i>	Cecilia	Responde	Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento.	Patricia, y Mirta	
38 Patricia: mal...el $\frac{1}{2}$ son dos triángulos para 1....hay dos mitades y forman un cuadradito. <i>O: Cecilia cuenta nuevamente la figura B con las indicaciones de Patricia y cuenta 30.</i>	Patricia	Reacciona	Clarifica aspectos relevantes a su compañera	Al pequeño grupo	
45 Patricia pero este triángulo no es un cuadrado. <i>O: Mirta cuenta igual que Patricia formando con dos mitades 1. Y Patricia reconoce que Cecilia siguiendo sus instrucciones considera dos</i>	Cecilia	Responde	Explica el procedimiento	Patricia y Mirta	
	Patricia	Responden	Resuelven de manera conjunta	Cecilia	
	Cecilia	Responde	Reconoce su equivocación y admite lo realizado por sus compañeras	Patricia	

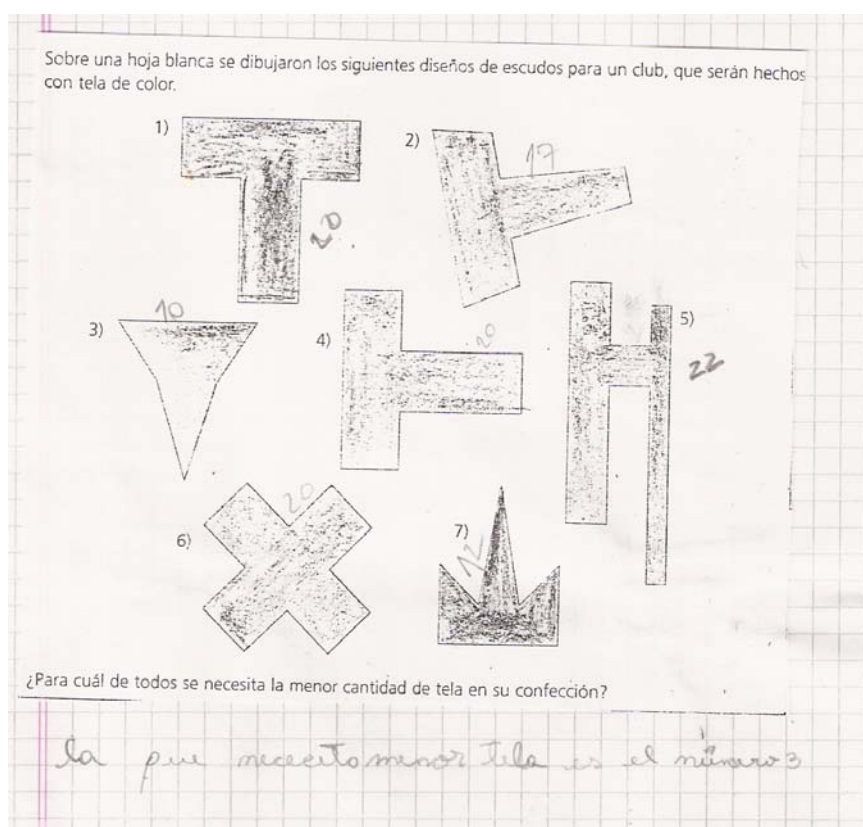
<i>triángulos para un cuadrado</i>	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Mirta y Cecilia	Mirta , Cecilia y Flor
49 Patricia: la B tienen 30.					
55 Mirta ¿Por qué 30?	Mirta	Responde	Cuestiona el resultado	Patricia	
56 Cecilia mira.....estas dos mitades son 1 Y así...1, 2,3.....	Cecilia	Responde	Reformula de manera colaborativa lo realizado con Patricia.	Mirta	
60 Flor: A mi también me da 30.	Flor	Responde	Acepta lo expresado por sus compañeras	Mirta y al pequeño grupo	
<i>O: Rápidamente las cuatro coinciden en que la figura A tienen mayor área y comienzan a conversar de otras temas.</i>					
65: Maestra. ¿Vamos a encontrar entre todos la solución?	Maestra	Propone	Alienta para que los niños expresen lo realizado	Al grupo de niños.	
67 Aylén: Área de la figura A= 36 y Área de la figura B = 30.	Aylén	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender.	Maestra	
O: A Cecilia le da igual que a Aylén,.....	Cecilia	Responde	Acepta lo expresado por la compañera.	Maestra y los niños	
					(SC 10(21,67))

Actividad 11:(SC11)

Resuelve nuevamente la situación 3 utilizando las cuadrículas de acetato y comprueba si la elección a la que arribaste es la apropiada

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Cecilia coloca al costado de cada escudo un número, así: en el escudo 1) coloca 20, en el escudo 2) coloca 17, en el escudo 3) coloca 10; en el escudo 4) coloca 20; en el escudo 5) coloca 22; en el escudo 6) coloca 20 y en el escudo 7) coloca 12. A continuación responde “*La que necesita menor tela es la numero 3*”

**B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad**

11

Respecto al número que coloca al costado de cada diseño y la respuesta, podemos pensar que se refiere al número de cuadraditos que abarca el diseño, pero no lo explicita, ni expresa el procedimiento que le permitió arribar a ellos,

por ejemplo, en el caso del diseño 5.

La niña utiliza la plantilla, según lo solicita el problema, a los efectos de pavimentar completamente la superficie y contar los cuadraditos incluidos en la misma (ind 4.1 en Producción de una imagen). En el problema anterior, manifestamos que Cecilia realiza avances en la composición y descomposición para intentar medir figuras, pero ahora- según observamos en la tabla de diálogo (SC 11(15,42)) - ella reincide y superpone la plantilla en el diseño 1, pretendiendo, al igual que en el problema anterior, que los cuadraditos “entren” completos en el diseño (ind 1.5 en Producción- Posesión de una imagen). Es decir, intenta medir el diseño a través de unidades convenientes (ind 2.5 en Producción – Posesión de una imagen)- el cuadradito de la plantilla- (ind 4.2 en Posesión de propiedades), la que advierte como convencional en el contexto de la actividad (ind 4.4 en Percepción de propiedades).

Las niñas trabajan de manera distendida y se observa entre ellas un compromiso multivocal entre ellas, fundamentalmente entre Patricia y Cecilia, ya que Patricia la alienta a que continúe con la estrategia y le indica que, a través de la composición, puede armar los cuadraditos que no “entran” exactamente. Esta manifestación de Patricia lleva a Cecilia a un folding back intencional y efectivo, (FBIE-P) por parte de Patricia, pues Cecilia retrocede y retoma la representacional de la composición de “las partes incompletas” (ind 1.4 en Producción – Posesión de una imagen) y al recomponerlas, armar cuadraditos (ind 2.3 en Producción – Posesión de una imagen), teniendo presente que el área de la figura considerada no cambia (ind 2.7 en Percepción de propiedades).

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
<i>O: Patricia solicita papel cuadriculado para poder contar cuando ve las cuadriculas dice ¡ah! Esto me sirve y ubica la cuadricula sobre cada figura y trata de contar.</i>	Patricia	Reacciona	Propone un procedimiento para la resolución e invita y los demás a que viertan su opinión al respecto.	Al grupo	
20 Cecilia: No entran. <i>O: Flor se distrae y no hace nada, Mirta también superpone la cuadricula y trata de contar y Patricia cuenta y anota al lado de cada diseño la cantidad de cuadrados.</i>	Cecilia	Responde	Cuestiona lo realizado por su compañera	Patricia	
27. Mirta: Decime Patricia ¿Cómo lo haces?	Mirta	Pregunta	Expresa desconocimiento acerca de lo que hay que hacer.	Patricia	
28. Cecilia: No me resulta fácil para nada.	Cecilia	Responde	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea	Patricia y Mirta	
30. Patricia: medí primero éste (el diseño 1).	Patricia	Contesta	Alienta a la compañera y la orienta para continuar con la estrategia que intenta implementar	Cecilia y a Mirta	
31. Cecilia: 20 y me sobran 2.	Cecilia	Responde	Resuelve de manera conjunta	Patricia y Mirta	Cecilia medir el diseño a través de unidades convencionales, pero en una primera instancia sin realizar composiciones
32. Patricia: No ...21 porque esto de acá abajo no te va a dar otro cuadrado aunque lo unas.	Patricia	Contesta	Corrige el error de su compañera	Cecilia	
35. Cecilia: 20 me da.	Cecilia	Contesta	Niega lo expresado por la compañera	Patricia	
36. Patricia: Mira Cecilia a mí me sobró esta parte. Señó Cuento estos cachitos que me sobran. Si lo junto me da ½ (en el diseño 1).	Patricia	Responde	Clarifica aspectos relevantes a su compañera	Cecilia	
42. Cecilia: ¿Unís los dos de abajo? 21 me da.	Cecilia	Contesta	Valida los procedimientos expuestos.	Patricia	
					(SC 11(15,42))

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (E)	Idea Unidad
74 Maestra: Los diseños 5 y 7 tienen más o menos cuadráticos <i>O: Patricia y Cecilia trabajan con dicho diseño. Mirta no ha escuchado a la maestra y continua diseño por diseño.</i>	Maestra	Pregunta	Solicita aclaración	A los niños	
80 Cecilia: En la 5 ¿Cómo haces?	Cecilia	Pregunta	Expresa desconocimiento acerca de lo que se le pregunta.	Patricia	
81 Patricia: Toma esta parte. <i>O Patricia mide con la regla y Cecilia sigue probando con la cuadrícula.</i>	Patricia	Contesta	Alienta a la compañera y continua con su estrategia	Cecilia	
84 Cecilia: ¿Cómo mediste la figura 5?	Cecilia	Pregunta	Solicita nuevamente aclaración a la compañera	Patricia	
85 Patricia: Yo uní todas las piezas y me dio este rectángulo <i>O Patricia le explica valiéndose de un dibujo.</i>	Patricia	Responde	Explica con gráficos lo que desea dar a entender	Cecilia	Patricia descompone las piezas y las recompone con otra forma a fin de considerar una unidad adecuada. para medir
Entonces ahora apoyo la cuadrícula y es mucho más fácil medir. 94 Cecilia: No puedo.	Cecilia	Responde	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea.	Patricia	
95 Mirta: A mí me dio 17. 96 Patricia a mí me dio 28 ½.	Mirta Patricia	Responde Contesta	Resuelve sola Cuestiona lo expresado por su compañera	Patricia y Cecilia Mirta	
97 Flor: a mí me dio 23. <i>O: Cecilia continúa intentando pero dice a cada rato que no puede.</i>	Flor	Contesta	Cuestiona lo expresado por su compañera	Patricia y Mirta	
101 Mirta: hay Patricia ¿Cómo lo hiciste?	Cecilia Mirta	Contesta Pregunta	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea	Patricia	

104 Cecilia: dame la regla Patricia que lo hago como vos: es más fácil. Tomo el largo de la figura ¿Y ahora? ¿Lo sumo?.	Cecilia	Reacciona	Muestra apertura a los resultados obtenidos por la compañera	Patricia	
109 Patricia No... Yo lo que hice es $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ O: el $4\frac{1}{2}$ lo mide con la regla, es decir que es $4\frac{1}{2}$ cm.	Patricia	Contesta	Explica con palabras y gestos lo que desea dar a entender	Cecilia	
125 Cecilia: ahora cuanto mide de largo, $4\frac{1}{2}$ más.	Cecilia	Responde	Acepta parcialmente la idea de su compañera	Patricia	
126 Patricia ¡hay para!	Patricia	Contesta	Niega lo que expresa la compañera	Cecilia	
128 Mirta: dice la señorita que no sirve medir.	Mirta	Reacciona	Aporta una sugerencia al análisis.	Cecilia y Patricia	
130 Cecilia: ¡Sí! Para el diseño 5 ... O: Todas han dejado la cuadrícula a un lado y tomaron la regla.....dicen que "les da mejor".	Cecilia	Responde	Cuestiona lo que expresa la compañera	Mirta	
135: Patricia: Miren como se mide. O: va tomando la medida de cada uno de los lados y va sumando y uniendo para formar un rectángulo.	Patricia	Responde	Solicita aclaración a su compañera	Mirta y Cecilia	
140 Patricia: Ahora sí!!! Apoyas esto (la cuadrícula) y podes contar	Mirta	Reacciona	Expresa satisfacción con lo realizado	Patricia	Patricia y Cecilia pavimentan las superficie a medir y recuentan la unidad empleada
142 Mirta: Patricia esta regla no tiene cero ¿por donde empezas a medir ¿ No me da nada con esta regla:			Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea		
O: Patricia y Cecilia afirman que el diseño 5 mide $26\frac{1}{2}$	Patricia y Cecilia	Contestan	Resuelven de manera conjunta	Mirta	
					SC11,(72,147)

De la tabla de diálogo SP11,(72,147), se observa el modo en que para Cecilia las interacciones producidas, fundamentalmente con Patricia a partir de la estrategia que propuso para medir el diseño, utilizando una unidad conveniente- el cuadradito de la plantilla-, generaron oportunidades de aprendizaje. Debido a esto, Patricia regula la elección de los restantes diseños, aunque Cecilia esgrime con argumentos algunas decisiones que pretende tomar, (SC11 (148,156)); pero luego las acepta voluntariamente y ambas, pavimentan la superficie a medir, recontando la unidad empleada. (ind 4.1 en *Producción de una imagen*)

148. Patricia: Bueno ahora el diseño 7

149. Cecilia: midamos el diseño 2.

150 Patricia: No, el diseño 2 es mas complicado porque está torcida. Vamos a medir la 7

153: Cecilia: ¡ah! Pero también es difícil.

O. Patricia superpone la cuadrícula sobre el diseño la 7 y cuenta

156. Cecilia: A mi me da justito para medir....no sobra nada.

O. Mirta sigue con el diseño 5. Flor se para a mirar mejor a Patricia y Cecilia y Cecilia mira a Patricia

(SC11 (148,156))

De igual modo, descarta el resultado al que arriba y considera el resultado que expresa su compañera, estimando el mismo (ind 4.6 en *Formalización*)(SC11(193,196)), Apreciaciones que podemos corroborar en las siguientes unidades de significado.

O. Flor y Mirta no hacen nada, Cecilia continua probando

193. Patricia: ahora me da “casi 22”

194. Cecilia: pregunto yo...¿Cuánto decís que te da?

196. Patricia: da 22

O. Cecilia Borra el resultado anterior y pone 22

(SC11 (193,196))

Durante la puesta en común, el pequeño grupo y los niños en general validaron los procedimientos. Los resultados a los que arribaron al interactuar con esta actividad según las manifestaciones en torno a la producción de conocimiento

de los niños, instó a la maestra a explicar el concepto de acotar el área de una superficie entre valores próximos. Concepto que cobra sentido para Cecilia cuando resuelve la última actividad de esta secuencia.

En cuanto al nivel de comprensión que demanda esta actividad la situamos con un indicador en *Producción de una imagen*- Capa B- con cuatro indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* - Capa B y Capa C- con un indicador en *Posesión de una imagen* –Capa C- y con dos indicadores en *Percepción de Propiedades* - Capa D.

En base a ello, consideramos representativo construir el siguiente gráfico que denota el proceso de construcción que Cecilia va logrando con todos los indicadores implicados, lo que permite dibujar una trayectoria completa y en particular, de los indicadores 4.4 al 1.4 la curva se muestra zigzagueante a efectos de mostrar el folding back analizado anteriormente entre ellos. De esta forma la curva se desplaza desde la frontera entre producción de una la imagen, para medir superficies en base al cubrimiento, hasta la Percepción de propiedades del área en base a una unidad que funciona como convencional.

Destacamos que en la trayectoria de resolución en otro tramo – del indicador 2.7 en Percepción de propiedades al 4.1 en producción de una imagen, retrocede sin que eso constituya una folding back pues el retroceso se da por el procedimiento de resolución propiamente dicho y no para fortalecer la comprensión en relación con una capa exterior.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ♦ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo B.-Producción de una imagen C.- Posesión de una imagen D.- Percepción de Propiedades E.- Formalización

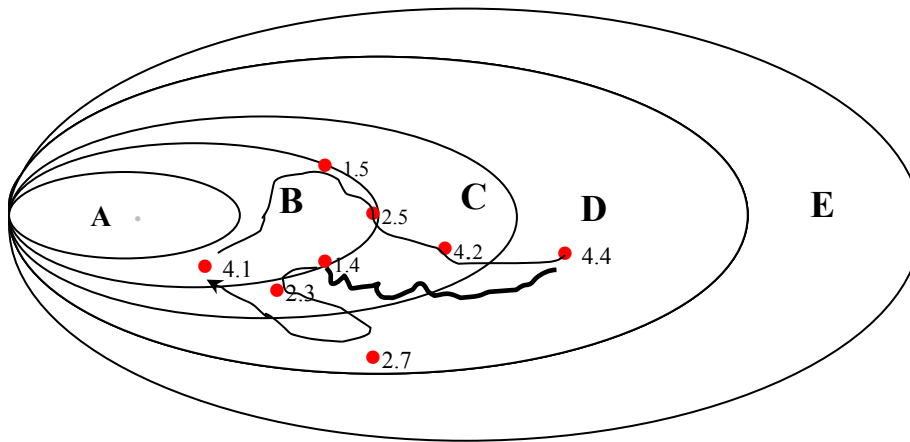


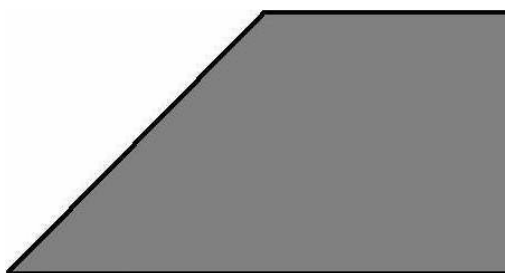
Gráfico de comprensión -S- de Cecilia asociado a la act 11

- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.
- 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el numero de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 4.4.- Advierte la necesidad de unidades convencionales.

Actividad 12: (SC12)

✓ *Este es el patio de la escuela de Tomás, el cual se desea embaldosar. Realiza un dibujo en escala de tal forma que un cuadradito de la plantilla representa una baldosa.*

- a) *Indica dos métodos diferentes para calcular la cantidad de baldosas que necesitas.*
- b) *Y si completamos el patio de modo que formes un rectángulo ¿Cuántas baldosas son necesarias?*



A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Cecilia traza en línea punteada dos segmentos, uno de ellos, prolongando la base menor del trapecio rectángulo y, el otro, paralelo al lado del ángulo recto, por el vértice del otro ángulo adyacente a la base mayor del trapecio, formando así, un rectángulo.

Responde solamente a la pregunta ¿Qué representa el número de baldosas? Y escribe “el área”

Este es el plano de la escuela de Tomás, el cual se desea embaldosar. Realicé un dibujo en escala de tal forma que cada baldosa representa un cuadradito de la plantilla.

* Indica dos métodos diferentes para calcular la cantidad de baldosas que necesitas.

- ¿Qué representa el número de baldosas? *el área*
- ¿Y si completamos el patio de modo que forme un rectángulo? ¿Cuántas baldosas son necesarias?

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 12

Cecilia no relaciona que la plantilla le puede permitir calcular el número de baldosas que necesita con solo relacionar cada uno de los cuadraditos de la plantilla con las baldosas. Si bien, acuerda con Patricia que primero hay que hallar el área, no relaciona que puede calcularla descomponiendo el dibujo en otro equivalente. En lugar de ello, Cecilia le sugiere completar el dibujo formando un rectángulo (ind 1.4 e ind 1.5 en producción – *Posesión de una imagen*). Según la tabla de diálogo (SC12, (16,64)) podemos inferir que Cecilia y Patricia miran el dibujo desde perspectivas distintas, pues Cecilia le indica completar el rectángulo

relacionándolo con la segunda pregunta del problema, pero Patricia desea averiguar el área; descomponiendo previamente la figura original y contando los cuadraditos con la plantilla. Cecilia no asocia el área a la idea de cubrimiento, la cual subyace al proceso de medir y seleccionar una unidad adecuada (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*) ni percibe que dos triángulos forman un cuadrado unidad (ind 2.3 en *Producción – Posesión de una imagen*), por lo que cuestiona el resultado de Patricia.

En principio, Cecilia, Patricia y Mirta trabajaron cada una de ellas desde su zona de posibilidad de desarrollo. Aunque Patricia comenzó y propuso distintas estrategias de resolución (tipo univocal), desestimó las sugerencias de Cecilia y Mirta, considerando que no aportaban nada nuevo. En cambio, Flor trabaja sola y corrobora sus resultados con Cecilia, quien refuta a Patricia cuando le manifiesta, "Si haces un rectángulo, el triángulo va a seguir estando entonces te va a dar 24" y reconoce que si descompone la figura en otra, ambas son equivalentes (ind 2.3 en *Producción – Posesión de una imagen*).

El nivel de comprensión que demanda esta actividad la situamos con un indicador en *Producción de la imagen* – Capa B- con dos indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* – Capa B y Capa C- con un indicador *Posesión de una imagen* - Capa C- con dos indicadores en *Percepción de propiedades* –Capa D- y con un indicador en *Formalización* – Capa E.

Las consideraciones que hemos explicitado nos permiten construir un gráfico de comprensión, en el cual volcamos el logro de cada uno de los indicadores implicados y trazamos también una trayectoria incompleta, pues la mayoría de de los indicadores la niña no los ha logrado o no disponemos de información-.que nos indica la tendencia en la comprensión que logra interactuando con esta actividad

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ♦ carencia de información

- | |
|--|
| A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización |
|--|

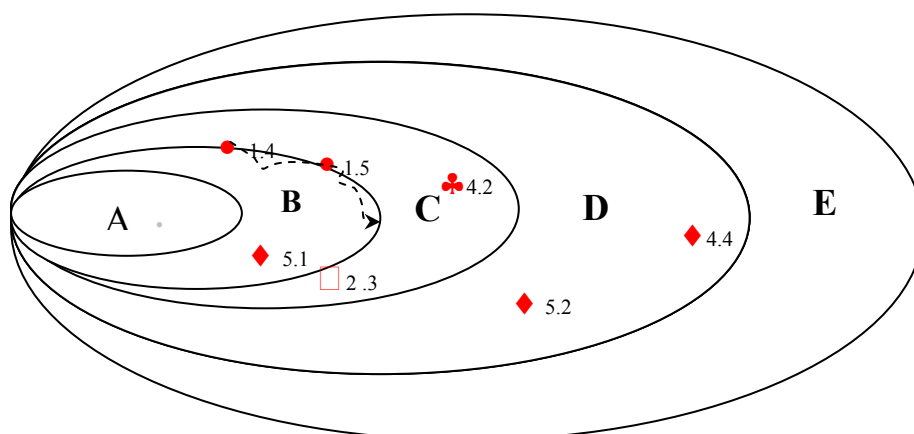
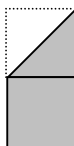


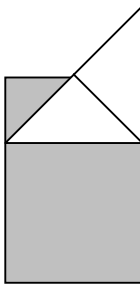
Gráfico de comprensión –S-de Cecilia asociado a la.act 12

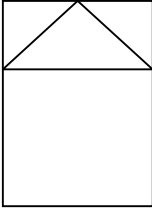
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.
- 2.3.- utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone)
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.4.-Advierte la necesidad de unidades convencionales.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.

Efectuamos una mirada global al desarrollo de esta actividad desde los aportes de Cecilia y el gráfico realizado, y estimamos que no se observan en la niña avances significativos en la construcción del concepto. Sin embargo, rescatamos que los cuestionamientos que propuso la maestra a la totalidad del grupo le sirvieron para reflexionar sobre sus posibles soluciones originales.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
16 Cecilia: Esos cuadraditos son muy bonitos pero no me sirven. <i>O: Patricia superpone la plantilla sobre la figura.</i>	Cecilia	Responde	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea	Patricia y Mirta y Flor	Cecilia no relaciona el área como medida de cubrimiento a través de la pavimentación de la superficie
19 Patricia: Señor dice que tenés que contar los cuadraditos. <i>O: Flor y Mirta no saben que hacer.</i>	Patricia	Contesta	Aporta una idea a la resolución del problema	Cecilia	
23: Mirta: tengo una idea mía.	Mirta	Responde	Alienta a la compañera y brinda una respuesta incompleta para continuar con la estrategia que pretende implementar.	Patricia	
24 Patricia: Primero averiguemos el área	Patricia	Contesta	Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento.	Mirta y el grupo	
26 Cecilia Mas vale <i>O: Patricia calca la figura y recorta para formar un rectángulo.</i>	Cecilia	Responde	Acepta lo expresado por la compañera	Patricia	
30 Patricia: esto seria el patio.	Patricia	Contesta	Explica con dibujos lo que desea dar a entender	Cecilia	
38 Cecilia: le ponemos otra cosa aquí y forma un rectángulo.	Cecilia	Responde	Clarifica aspectos relevantes a su compañera	Patricia	
40 Patricia: Si ¿y de dónde los sacas? Sobra una cantidad tremenda de baldosas. Por que no se pueden comprar mas baldosas. Ya está. Con papel de calcar, calco un triangulo y lo corto para formar el rectángulo y luego cuento los cuadradito	Patricia	Contesta	Ignora las sugerencias de su compañera y lleva adelante su procedimiento	Cecilia	



 49 Maestra: Bueno pero tenés que encontrar dos métodos. 51: Patricia: uno es con la plantilla.	Maestra Patricia	Pregunta Responde	Solicita otra idea o procedimiento alternativo Explica oralmente lo que desea dar a entender	Patricia Maestra	
52: Maestra: Bueno cuantas baldosas ocupa éste patio Contalas.	Maestra	Pregunta	Anima a la niña a que compruebe si su resultado cumple con las condiciones iniciales del problema.	Patricia	Cecilia pretende completar para formar un rectángulo, pero no comprende lo que se le solicita.
54 Cecilia: yo armé el rectángulo.	Cecilia	Contesta	Alienta para continuar con la estrategia que pretende implementar	Patricia y Mirta	
55 Mirta: Mira Patricia acá tengo una forma para cortar el rectángulo.	Mirta	Responde	Proponen una idea e invitan a las compañeras a que viertan su opinión al respecto	Patricia	
57 Patricia ¿Y que te crees que hicimos?	Patricia	Responde	Cuestiona lo realizado por las compañeras	Mirta y Flor	
59; Flor: yo ya no tengo más nada!	Flor	Reacciona	Muestra apertura a los resultados obtenidos por sus compañeras	Al grupo y la maestra	
60 Patricia: conté 24.	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Al grupo	
61 Maestra: tenemos 24, pero ¿Qué paso con estas están cortaditos por la mitad?	Maestra	Pregunta	Solicita que justifiquen su afirmación	Patricia	
64 Patricia: Las unimos	Patricia	Contesta	Valida los procedimientos expuestos.	Maestra	
					SC 12,(16,64)

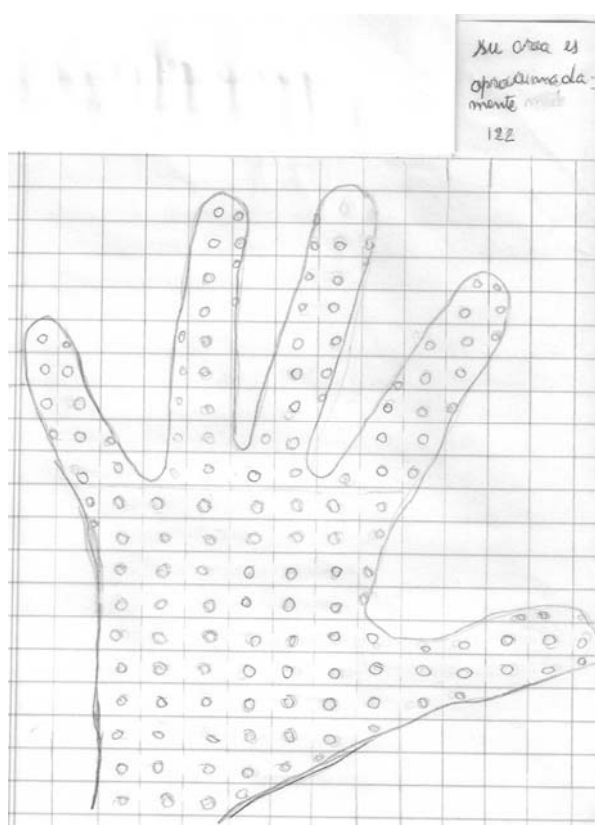
Unidad de significado	Interlocutor (E.)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R.)	Idea Unidad
101. Maestra: ¿Cómo hacemos con el triángulo que quedo ahí? ¿Qué parte de la superficie es, lo que queda con respecto al cuadrado?	Maestra	Pregunta	Proporciona una sugerencia	A los niños	
106. Patricia: me parece que no alcanza a ser la mitad.	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender.	Maestra	
O: Cecilia, Flor y Mirta le dicen a Patricia que dio 22 baldosas y no 24.	Cecilia Flor y Mirta	Reaccionan	Cuestionan el resultado.	Patricia	
110. Mirta: Tal vez cambie cuando formamos el rectángulo.	Mirta	Responde	Muestra apertura a los resultados vertidos por Patricia.	Cecilia y Flor	
<i>Flor y Mirta superponen la cuadrícula y verifican el resultado que anticipa Patricia</i>					
114. Cecilia: no entiendo lo que hace Patricia, a mí me dio 22.	Cecilia	Reacciona	Cuestiona el resultado de Patricia.	Al grupo	
117. Patricia: Lo volví a hacer y es 24. Me queda por la mitad.	Patricia	Contesta	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Cecilia	
<i>O. Patricia dibuja y Mirta observa lo que hace</i>					
					
120. Cecilia: Si haces un rectángulo el triángulo va a seguir estando entonces te va a dar 24.	Cecilia	Responde	Aporta ideas al análisis y resolución del problema.	Patricia.	Cecilia reconoce que si descompone la figura en otra, ambas son equivalentes.
123. Maestra: Un método ya lo saben. Apoyo la plantilla y cuento.	Maestra	Propone	Reformula lo enunciado por las niñas con una expresión más formal.	Las niñas	
Determinaron que la cantidad de baldosas es 24					(SC12,(101,123))

Actividad 13: (SC13)

- ✓ *Dibuja la palma de tu mano sobre la hoja de carpeta...Calcula el área aproximada de la superficie que ocupa*

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Cecilia cuadricula la región en la cual ha dibujado el contorno de su mano y a los cuadraditos o parte de ellos incluidos en ella los distingue con un circulito como marca. En el margen superior derecho escribe “su área es aproximadamente 122”

**B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 13**

En la producción de Cecilia (PEC13), advertimos que el lugar ocupado por la superficie de la mano lo resolvió por la adición repetida de una unidad convencional- cuadradito-(ind 4.2 en *Producción de una imagen e ind 4.4 en*

Percepción de propiedades) cuadriculando previamente la superficie (ind 4.1 en *Producción de una imagen*), y componiendo parte del mismo para obtener la unidad, estimando así el número total de dichos cuadrados (ind 4.6 en *Percepción de propiedades*).

Si bien Heraud (1986) considera que la elección de la unidad está estrechamente relacionada con la forma de la figura, teniendo en cuenta la superficie irregular a calcular y la cuadrícula de acetato como material didáctico utilizado en el problema 11, Cecilia estimó conveniente considerar como unidad el cuadrado. Entonces, visualizó mentalmente la superficie y la unidad a considerar estando esta ausente. Es decir, desarrolló distintas estrategias para estimar el resultado, por ejemplo, comprensión del concepto de área como cualidad a medir, habilidad para seleccionar la unidad conveniente y su iteración (ind 4.1 en *Producción de una imagen*).

El nivel de comprensión que demanda esta actividad la situamos con un indicador en cada uno de las capas *Producción y Posesión de una imagen* - Capa B y Capa C- respectivamente, y con dos indicadores en *Percepción de propiedades* y *Formalización* –Capa D y Capa E- respectivamente.

Si bien de la producción escrita de Cecilia no podemos precisar si para calcular el área de alguna subparte de la mano utiliza sus dimensiones lineales (ind 5.2 en *Percepción de Propiedades*), aunque podemos precisar que la niña cuando se dispone a resolver el problema, ha sido capaz de relacionar el concepto al contexto real según lo solicitado (ind 6.2 en *Formalización*) y arribar al resultado del problema. Sin embargo, construimos un gráfico en el cual volcamos todos los indicadores implicados, que nos permitiera trazar la trayectoria completa entre aquellos que pudimos detectar su logro.

Así el proceso de construcción lo identificamos desde *Producción de la imagen*, al cubrir la mano con cuadrados a fin de estimar el área a través del resultado de la sumatoria de todos ellos, hasta *Formalización* del concepto, pudiendo acotar el valor e interpretando el concepto de área como herramienta que responde al requerimiento del problema

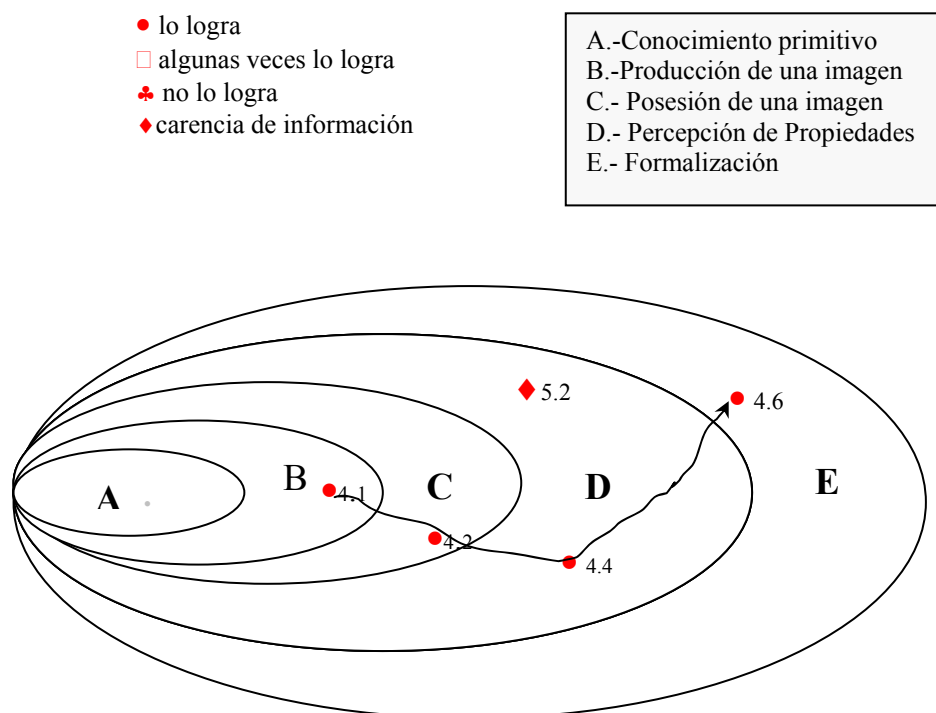


Gráfico de comprensión de Cecilia asociado a la.act 13

- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 4.4.-Comprende la necesidad de una unidad convencional.
- 4.6.- Acota el área de una superficie entre valores próximos.
- 5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.

4.2.3.1.-RELACIÓN ENTRE LOS GRÁFICOS DE COMPRENSIÓN: EL DESEABLE Y EL DE CECILIA.

A partir del análisis efectuado sobre cada una de las actividades desarrolladas por Cecilia, arribamos a una primera aproximación a la construcción del concepto, intentamos ahora en este apartado, considerar el análisis de todas las actividades en su conjunto.

Para ello, volcamos en un gráfico de comprensión, el que denominamos *deseable*, que recoge todos los indicadores que intervienen en la secuencia de aprendizaje a efectos de explicitar -en detalle- las características del concepto que aspiramos a que la niña construya. Para ello, indicamos su distribución en las distintas capas

de comprensión: seis indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- siete indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* -Capa B y C –dos indicadores en *Posesión de una imagen* - Capa C- diez indicadores en *Percepción de propiedades* - Capa D- y dos indicadores en *Formalización*- Capa E-.

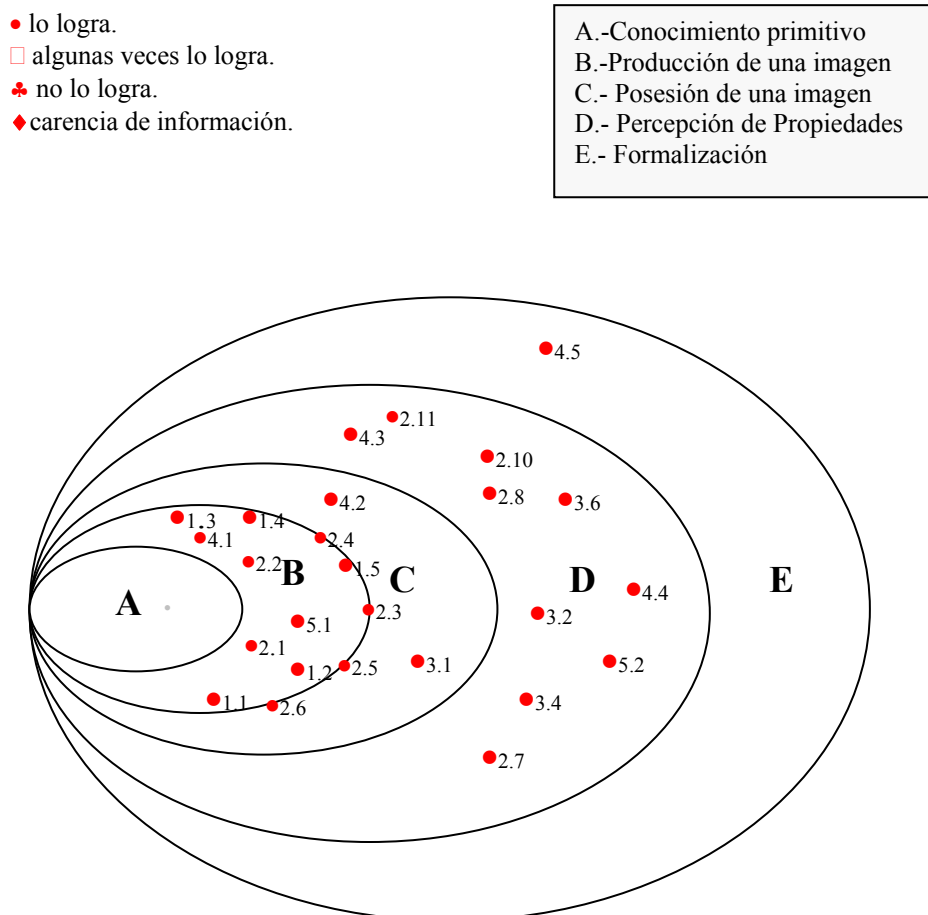


Gráfico Global de comprensión Deseable asociado a la Secuencia (S)

- 1.1.-Maneja el material mediante manipulación
- 1.2.-Aparea lados.
- 1.3.-Aparea vértices.
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 1.5.- Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.
- 2.1.-Compara superficies por percepción visual.
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.6.- Construye superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.

- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 2.11.- Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura
- 3.2.-Reconoce que a mayor /igual /menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/menor perímetro de la misma.
- 3.4.- Ordena figuras isoperimétricas respecto del área.
- 3.5.- Construye figuras equivalentes de distinto perímetro⁸⁸
- 3.6.-Ordena según el perímetro, figuras equivalentes.
- 4.1- Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada
- 4.4.-Comprende la necesidad de unidades convencionales.
- 4.5.-Distingue la proporción inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2.-Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.

De este modo, concebimos que la consecución de los indicadores anteriores es muestra de: la percepción, mediante el reconocimiento de figuras simples, de una figura compleja y del área como cualidad de los objetos que permite compararlos; la distinción y el establecimiento de relaciones entre área y perímetro; la conceptualización del área como medida de cubrimiento y el reconocimiento de las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulo como camino más económico. A continuación, construimos el gráfico de comprensión de Cecilia.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- | |
|--|
| A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización |
|--|

⁸⁸ Se indica con distinto tipo de letra pues no estaba previsto abordar este indicador

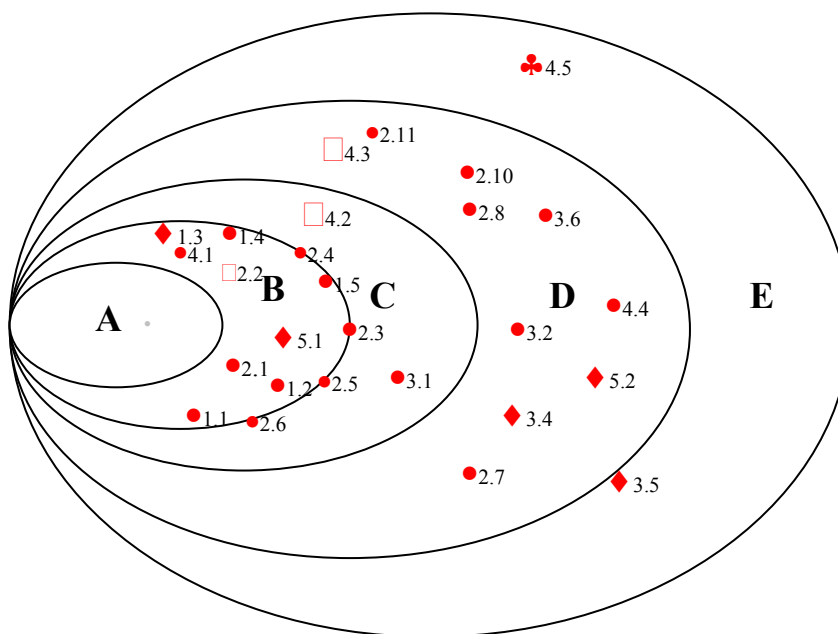


Gráfico Global de Comprensión de Cecilia asociado a la Secuencia (S)

En relación a ambos gráficos globales de comprensión- el de Cecilia con el *Deseable*- podemos manifestar que la niña ha logrado gran parte de los indicadores, alguno de ellos, a través de diversos *folding back* que pudimos detectar en el análisis de las actividades que componen esta secuencia, y la trayectoria - completa o incompleta, que dibujamos, pues lo que la niña “ve y manifiesta”, nos permite establecer el orden en que ella arriba al logro de los indicadores involucrados. Por ejemplo:

Respecto a comparar y ordenar figuras, al retomar la actividad 3, Cecilia y otras niñas- Araceli y Patricia- consideran que pueden relacionar los diseños a través de la longitud de los lados, más precisamente, el perímetro. No reconoce la noción de área como cualidad que permite comparar los diseños. Utiliza las piezas en distintas formas (ind 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen*) para identificar figuras equivalentes (ind 2.3 en *Percepción de propiedades*), pero las explicaciones que brinda Mirta cuando expresa “*Corto esto y lo pongo aquí, es decir relleno lo que falta y luego observo que esta parte sobra, entonces considero que el diseño 5(la H) necesita más tela que el diseño 3*”, producen el *folding back* no intencional pero efectivo, que lleva a Cecilia a retroceder a una capa interior y efectuar la comparación de forma indirecta a través de romper y

recomponer (ind 2.4 en *Producción –Posesión de propiedades*). Estos aportes y el clima que instala la maestra en el aula al promover estrategias cognitivas, produjeron instancias de aprendizaje en Cecilia puesto que permiten a la niña identificar figuras de distinta forma y equivalentes (ind 2.8 e ind 2.10 en *Percepción de Propiedades*). Sin embargo, en la actividad 4 relaciona la equivalencia con la igualdad de las figuras, así lo expresa “*las figuras 2 y la 3 son iguales*”- en realidad son equivalentes-Hasta que el cubrimiento que realizan Patricia y Mirta y sus interpretaciones compartidas, producen *folding back* intencional y efectivo entre las niñas (FBIyE) que le permite a Cecilia retroceder a una capa interior, a identificar mentalmente la composición de las formas (1.4 en *Producción- Posesión de una imagen*) para avanzar en su proceso de comprensión, y comparar dichas formas de utilizando una unidad conveniente para medir (ind 2.5 en *Producción-posesión de una imagen*).

A medida que Cecilia avanza en la resolución de las actividades, realiza avances en la composición y descomposición para intentar medir figuras (ind. 2.4 en *Producción –Posesión de una imagen*), pero cuando en la actividad 11 intenta medir los diseños a través de unidades convenientes (ind 2.5 en *Producción – Posesión de una imagen*), -el cuadradito de la plantilla (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*)-, pretende que los cuadraditos “entren” completos en el diseño, según expresa “*A mi me da justito para medir....no sobra nada*” en línea 156. Patricia la alienta y le manifiesta que puede redistribuir los cuadraditos que no “entran” exactamente, manifestación que lleva a Cecilia a un *folding back* intencional y efectivo por parte de Patricia(FBIyE-P), que la lleva a retroceder, retomar la representación mental de la composición de las “partes incompletas” (ind 1.4 en *Producción-Posesión de una imagen*) para avanzar a una capa exterior con una comprensión más profunda, y componer las partes en distinta posición y armar cuadrados (ind 2.3 en *Producción –Posesión de una imagen*). Las niñas intensifican un compromiso multivocal que las lleva a revisar la transformación indirecta (ind 2.3; ind 2.4, e ind 2.5 en *Producción – Posesión de una imagen*) para comparar superficies.

En la Actividad 8, Cecilia establece relaciones entre las figuras al utilizar una unidad intermedia, según expresa: “*El cuadrado es $\frac{1}{2}$ del triángulo grande*

porque el triángulo grande tienen 4 triangulitos y el cuadrado tiene 2” y “el triángulo a es el doble de área que la figura b” y alienta a sus compañeras a continuar con esta estrategia (ind 2.11 en *Percepción de propiedades*).

En cuanto a dibujar figuras de un área determinada, los aportes de Patricia y Flor, producen *folding back* efectivo no intencional para Cecilia e intencional de la maestra – intervención invocativa- (FBI-Ma; ~ I-P y F) que llevan a la niña a retroceder a una capa interior, aparear las figuras por sus lados (ind 1.2 en *Producción de una imagen*) para avanzar a capas exteriores con una comprensión mejor, con la intención de realizar los dibujos solicitados (ind 2.6 en *Producción –Posesión de una imagen*).

Con respecto a la relación entre el área y el perímetro de diversas figuras, en la actividad 6, cuando se les solicita la comparación de perímetro entre varias figuras, Cecilia propone un método- la comparación indirecta con el uso del hilo como intermediario, efectuando en él una marca (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*) y expresa la figura de perímetro menor. Sin embargo, sus compañeras sólo aceptan parcialmente el procedimiento sugerido y ante la solicitud de la maestra para que fundamente lo expresado, Cecilia queda pensativa, retrocede a una capa interior y manifiesta “hay cuadrados adentro”, -apareando por los lados las figuras-(ind 1.2 en *producción de una imagen*) y avanza para distinguir que la disposición de los cuadrados incide en el perímetro de la figura formada (ind 3.2 en *Percepción de propiedades*). Es decir, detectamos un *folding back* intencional y efectivo de la maestra (FBIyE-Ma). Durante la resolución se observaron interacciones de tipo multivocal y colaboración indirecta entre Cecilia, Flor y Patricia, pues intervinieron de manera conjunta y cada una monitoreó lo realizado por la otra. Ante la propuesta de la maestra de armar una figura de igual área pero de mayor perímetro, Cecilia no distingue que debe unir los cuadraditos por el vértice (ind 1.3 en *Producción –Posesión de una imagen*; ind 3.5.-*Percepción de propiedades - Formalización*). En cambio, no disponemos de información que dé cuenta de que puede armar figuras isoperimétricas y no equivalentes (ind 3.3 en *Percepción de propiedades*) u ordenarlas según su área (ind 3.4 en *Percepción de propiedades*). Aunque reconoce que a igual perímetro de una superficie no corresponde necesariamente igual área de la misma (ind 3.2 en *Percepción de*

propiedades). Estos aspectos prevalecen durante todo el desarrollo de la secuencia.

Con respecto a la medida del área y la unidad de medida, en la actividad 9, Cecilia, en principio, no comprende lo solicitado. Patricia les explica a sus compañeras -Mirta, Flor y Cecilia- dicha relación; sin embargo, Cecilia refuta esa relación, y cuando la maestra la interroga sobre lo que realiza Mirta, estas intervenciones producen *folding back* intencional por parte de la maestra, con una intervención de manera invocativa, pero no intencional por parte de Mirta, aunque siempre efectivo (FBIE-Ma;~IyE-M) pues Cecilia comprende y admite lo expresado por su compañera, revisa la unidad que consideró a fin de representar mentalmente la composición de las distintas unidades propuestas (ind 1.4 en *Producción-poseción de una imagen*) y, comienza a realizar el cubrimiento de la superficie con las distintas unidades de medida solicitadas. Al finalizar la resolución, todos concluyen que “*tengo que saber la unidad con que mido*” (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*).

Si bien en un primer momento, Cecilia cuestiona el procedimiento de sus compañeras, luego se adecua a los desafíos y argumentaciones sostenidos por ellas. Las explicaciones de Patricia, sin embargo, generaron oportunidades de aprendizaje para Cecilia.

Cecilia identifica figuras simples convencionales, más precisamente, el cuadrado y el rectángulo, en particular cuando resuelve la actividad 2; no obstante esta noción no la habilita para detectar las figuras que forman una figura compleja (ind 1.4.- en *Producción – Poseción de una imagen*). Luego al resolver la actividad 10 las interacciones que circularon durante el proceso de resolución, producidas principalmente entre Mirta, Patricia, Flor y Cecilia, les permitieron, por un lado, construir la representación mental de la composición de figuras (ind. 1.4.- en *Producción –Poseción de una imagen*) y, por otro, la conveniencia de hallar el área de cada una de las figuras en función de la misma unidad de medida (ind 4.2 en *Poseción de una imagen*).

En la actividad 11, las intervenciones formuladas instaron a la maestra a explicar el concepto de aproximar el área de una superficie entre valores próximos, noción que Cecilia utilizó para resolver la actividad 13. En esta

actividad la niña utiliza una unidad conveniente – el cuadradito- pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado (ind 4.1.- *Producción de una imagen*) para responder “su área es aproximadamente 122” (PEC13)

En general, durante el desarrollo de las actividades, los cuestionamientos que propuso la maestra a la totalidad del grupo llevaron a la niña a reflexionar sobre posibles soluciones originales.

Cecilia visualizó mentalmente la superficie y la unidad a considerar. Es decir, desarrolló distintas estrategias para arribar a un resultado, a través, por ejemplo, del reconocimiento del concepto de área como cualidad a medir, habilidad para seleccionar la unidad conveniente y su iteración.

El análisis de cada una las actividades nos condujo a dibujar en el gráfico decomprensión, la trayectoria – unas pocas incompletas-del proceso de resolución, y manifestar que:

La niña comienza a manipular material (ind. 1.1.- en *Producción de una imagen*) anticipa la figuras a elegir (ind 1.5.-en *Producción-Poseción de una imagen*) y representa mentalmente la composición de las mismas para formar una figura compleja (ind 1.4.-en *Producción-Poseción de una imagen*). Observamos que sólo las aparee por sus lados (ind 1.2 en *Producción de una imagen*), es decir que no disponemos de información acerca que las aparee por sus vértices (ind 1.3).

Compara las superficies por percepción visual (ind 2.1.- en *Producción de una imagen*) y sólo, algunas veces, lo realiza por superposición (ind 2.2.- en *Producción de una imagen*). Advertimos que utilizar figuras, en distintas posiciones, en vista a componerlas y descomponerlas para realizar la comparación de superficies (ind 2.3; ind 2.4.- en *Producción-posesión de una imagen*), o a través de la medición, utiliza una unidad que le permite además de comparar (2.5.- *Producción-posesión de una imagen*), construir superficies (2.6.- *Producción-posesión de una imagen*).

La niña reconoce que si se descompone una figura en otra su área no varía (ind 2.7.- en *Percepción de propiedades*) e identifica al menos dos superficies de

distinta forma - igual área (ind 2.8.-e ind 2.10.- en *Percepción de propiedades*). Del mismo modo, relaciona una superficie y una parte de ella, mediante fracciones (ind 2.11.- en *Percepción de propiedades*)

Distingue el concepto de área del de perímetro de una superficie (ind 3.1.- en *Posesión de una imagen*), reconoce la independencia de la variabilidad entre ambas nociones (ind 3.2.- en *Percepción de propiedades*), y puede ordenar las superficies equivalentes según su perímetro (ind 3.6.- en *Percepción de propiedades*). Sin embargo no disponemos de información si puede ordenar figuras isoperimétricas respecto del área (ind 3.4 en *Percepción de propiedades*) ni que construya figuras equivalentes de distinto perímetro (ind 3.5.- *Percepción de propiedades-formalización*).

Si la superficie es rectangular, para calcular el área, pavimenta según una unidad y cuenta el número de ellas (ind. 4.1 en *Producción de una imagen*). Sin embargo, no contamos con información que a asocie esta pavimentación con el modelo multiplicativo (ind 5.1.- en *Producción de una imagen*), según las dimensiones lineales de la superficie (ind 5.2.-).

Sólo en algunas oportunidades, elige una unidad adecuada (ind 4.2.- en *Posesión de una imagen*.) o distingue que la medida de la superficie depende de la unidad empleada (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*).

Finalmente, la niña no distingue la relación inversamente proporcional entre la medida de una superficie y la unidad empleada (ind 4.5.- en *Formalización*).

4.2.4.- ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO AL FINALIZAR LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE (EC)

En función del cuestionario explicitado en el capítulo anterior, apartado 3.5.3.1, describimos a continuación el desarrollo realizado por Cecilia, según adjuntamos en el Anexo XVIII. Cuando la producción escrita muestra el proceso de construcción que se produce en la niña, la incluimos para dar cuenta de ello.

Actividad 1:(EC1)

No lo consideramos para el análisis.

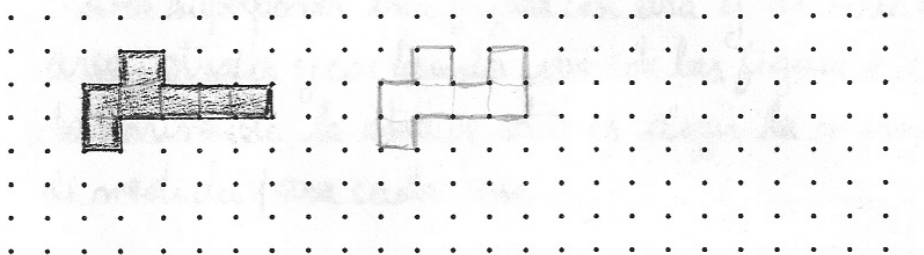
Actividad 2: (EC2)

Dibuja una figura equivalente a la dada pero de distinto perímetro. Justifica tu dibujo.

**A.-Descripción de la producción escrita**

Cecilia a la derecha de la trama construye una figura, y desplaza de izquierda a derecha, el quinto rectángulo arriba del cuarto rectángulo, y comparten un lado en común. No justifica el dibujo.

2) Dibuja una figura equivalente a la dada pero de distinto perímetro. Justifica tu dibujo.

**B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 2**

Del dibujo podemos inferir que para construir la figura, Cecilia aparea los cuadrados por sus lados (ind 1.2 en *Producción de una imagen*), pues compara la figura dada y construye otra utilizando el cuadrado como unidad conveniente (ind 2.5 e ind 2.6 *Producción y Posesión de una imagen*) y observamos que comprende la noción de equivalencia de figuras a través de la conservación del área de las mismas aunque no lo explicita; pues el dibujo que realiza lo forma con

siete cuadrados como la figura presentada (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*). Con respecto al perímetro, si bien no lo explicita, (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*) el dibujo que realiza no es de perímetro distinto como se solicita. (ind. 3.5 en *Percepción de propiedades -Formalización*)

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con un indicador en: *Producción de una imagen*- Capa B-, con tres indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* - Capa B y Capa C- con un indicador en *Posesión de una imagen* – Capa C- y con un indicador en *Percepción de Propiedades* - Capa D- y un indicador en el anillo *Percepción de propiedades - Formalización*- Capa D y Capa E.

En función de lo realizado por Cecilia, podemos inferir que sólo puede proponer figuras equivalentes e isoperimétricas a la dada pues no reconoce que si aparea los cuadraditos por sus vértices (ind. 1.3 en *Producción-Posesión de una imagen*), la figura que obtiene es equivalente y de distinto perímetro como se solicita. Consideraciones que nos permiten inferir el dibujo de una posible trayectoria aunque, incompleta, pues observamos indicadores (1.3 en *Producción –Posesión de una imagen* y el ind 3.5 en *Percepción de propiedades – Formalización*) no logrados, los cuales nos permiten esbozar solamente una tendencia del proceso de resolución que operó la niña.

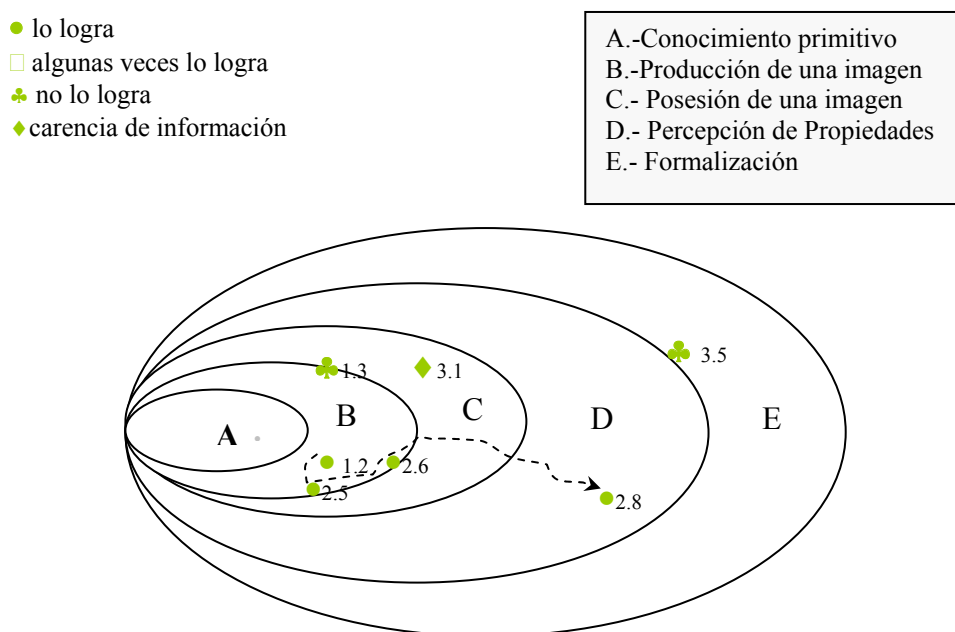
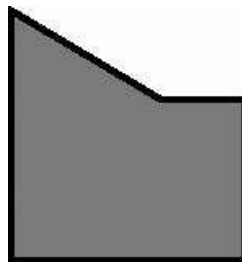


Gráfico de Comprensión –E- de Cecilia asociado a act 2

- 1.2- Aparea lados.
- 1.3- Aparea vértices
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.6.- Construye superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.8- Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.5.-Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.

Actividad 3: (EC3)

Calcula el área de este polígono, indicando dos métodos diferentes para calcularlo.



A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia subdivide el polígono en un triángulo y en un rectángulo y, al costado, le asigna un número “16”. En el margen derecho escribe “El rectángulo 13”, debajo “el triángulo 3” y a continuación el cálculo $13 + 3 = 16$ dispuestos verticalmente

3) Calcula el área de éste polígono, indicando dos métodos diferentes para calcularla.

el rectángulo 13

el triángulo 3

13
+ 3
16

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 3

Para resolver el problema, Cecilia expresa el área total a través del área del rectángulo y del triángulo respectivamente y obtiene como resultado 16 cuadraditos. Si bien en el margen derecho del dibujo, sólo indica el número, es decir la medida, pensamos que aunque no lo explicita, la niña considera el

cuadradito como unidad conveniente. (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*). Observemos que el 13 y 3 que asigna a las figuras mencionadas respectivamente, surgen de haber utilizado como recurso la plantilla y realizar su cubrimiento (ind 4.1 en *Producción de una imagen*). En realidad, el resultado del rectángulo es 13 y $\frac{1}{2}$ cuadraditos y al triángulo corresponde 2 y $\frac{1}{4}$ cuadraditos. Es decir, el número no expresa el área, sino la medida respecto de la unidad

No indica otro método según se ha solicitado, por ende, no detectamos que utilice el campo multiplicativo (ind 5.1 en *Producción de una imagen*) o estime las dimensiones lineales de la figura para utilizar la fórmula a fin de calcular el área (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*).

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en la *Producción de la imagen* - Capa B- , con un indicador *Posesión de la imagen*- Capa C- y otro indicador en *Percepción de Propiedades* - Capa D-

Las consideraciones enunciadas nos permiten construir el siguiente gráfico de comprensión.

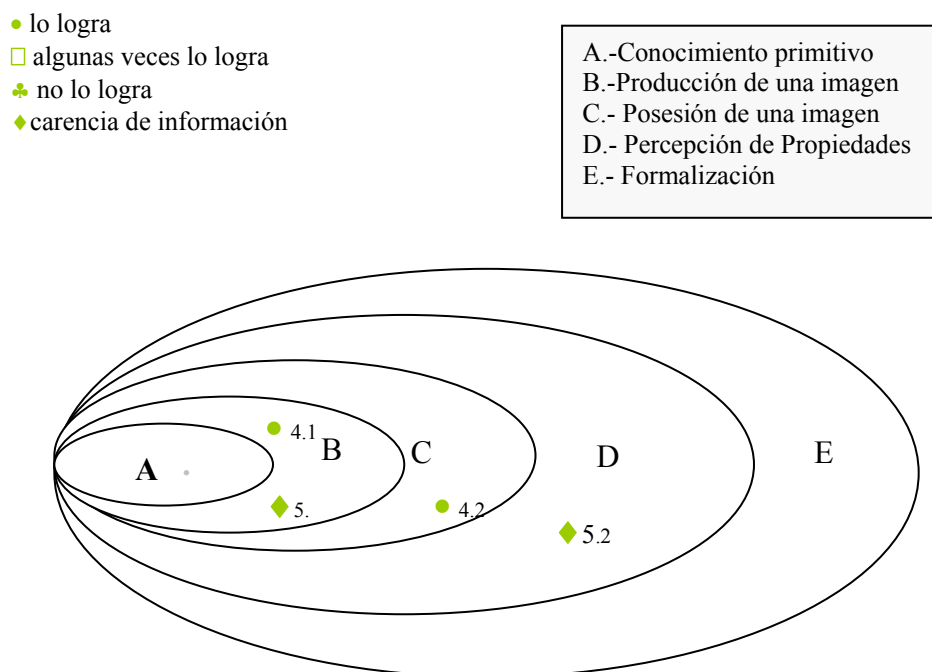


Gráfico de Comprensión –E- de Cecilia asociado a act 3

- 4.1.- Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 5.1.- Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo

5.2.-Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras

Actividad 4: (EC4)

Responde y justifica las siguientes preguntas:

- 1.-*Dos figuras que tienen la misma forma ¿son sí o sí EQUIVALENTES?*
- 2.-*¿Pueden ser equivalentes dos figuras con distinta forma?*
- 3.-*¿Puede ser un cuadrado equivalente a un rectángulo?"*
- 4.-*Completa la siguiente expresión:*
“Para comparar dos superficies debes.....”

A.-Descripción de la producción escrita

Cecilia respondió a la **primer pregunta**: *“No, son iguales pero pueden tener distinta área”*, a la **segunda pregunta** respondió *“Si pueden tener el mismo área pero pueden estar acomodados de distinta manera”*; a la **tercera pregunta** respondió *“Sí , porque pueden tener la misma área”*, y por último completó la frase agregando *“debes superponer una figura con otra y ver si te da igual área, otra es cortando una de las figuras e ir poniendo al lado de la otra y otra es elegir a la misma unidad de medida para cada una”*

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 4

A la primera pregunta, Cecilia respondió y justificó que no, pues pueden tener distinta área, pero cuando se refiere a “iguales” pensamos que quiso decir “la misma forma” (ind 2.9 en *Percepción de Propiedades*). La segunda y la tercera las responde y justifica correctamente. Se desprende de ellas que reconoce que si una figura se compone y recompone en otra, su área no varía (ind 2.7.- en *Percepción de Propiedades*) y, en ese caso, las figuras resultan equivalentes (ind. 2.8 en *Percepción de Propiedades*). Por último, compara superficies directamente, por inclusión o superposición, cuando constata si una superficie es parte de otra (ind. 2.2.- en *Producción de una imagen*) e indirectamente, a través de transformaciones de romper y rehacer o bien a través de la medición (ind.2.4 e ind 2.5 en el anillo *Producción – Posesión de una imagen*)y para ello pavimenta

con una unidad conveniente (ind.4.1.- en *Producción de una imagen*).

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B- y en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* - Capa B y Capa C- y con tres indicadores en *Percepción de Propiedades* - Capa D-

De la respuesta de Cecilia en su producción escrita, estimamos que la niña ha logrado responder a la demanda de esta actividad y, en base a ello, construimos el siguiente gráfico de comprensión.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- A.-Conocimiento primitivo
- B.-Producción de una imagen
- C.- Posesión de una imagen
- D.- Percepción de Propiedades
- E.- Formalización

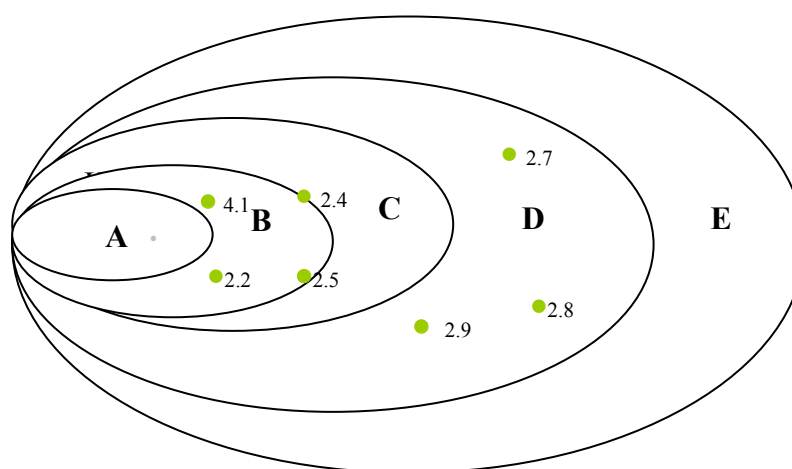
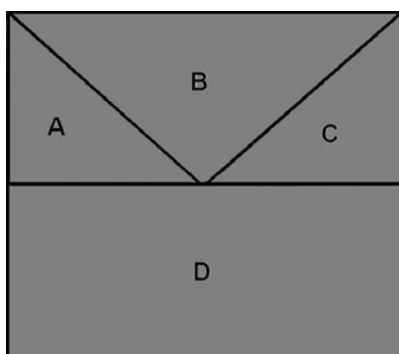


Gráfico de Comprensión -E- de Cecilia asociado a la Act. 4

- 2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión).
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 2.9.-Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y recuenta el número de unidades empleado.

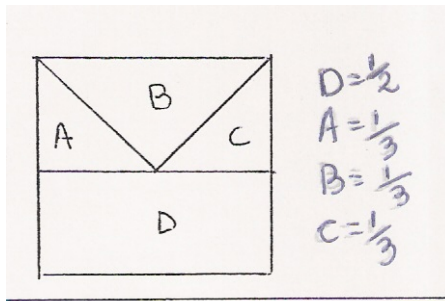
Actividad 5: (EC5)

El siguiente rompecabezas está armado con las fichas: A, B, C, y D. Expresa con una fracción cada ficha del rompecabezas.

**A.-Descripción de la producción escrita**

Cecilia responde

“A = 1/3; B = 1/3; C = 1/3 y D = 1/2”

**B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad 5**

Este problema también lo consideramos de anclaje, pues se tomó en el cuestionario sobre ideas previas. En esa instancia, se preguntó *¿Qué parte del rompecabezas representa cada pieza?* La mayoría de los niños, y en particular Cecilia, se refirieron al tipo de figura; en función de ello, reformulamos el enunciado.

Las fracciones habilitan, entre otros, a establecer relaciones entre cada una de las partes en que puede subdividirse el todo y el mismo. De la respuesta obtenida, Cecilia expresa cada pieza del rompecabezas a través de una fracción pero solamente la pieza “D” es expresada correctamente (ind 2.11 en *Percepción de propiedades*). Con respecto a las otras piezas, es posible que haya considerado

la otra mitad y relaciona el lugar que ocupan éstas con respecto a esa mitad. Por eso es que cada una de ellas la asoció como una parte de tres, pero al mismo tiempo no tuvo en cuenta, por ejemplo, que no son iguales ni equivalentes (ind 2.11 en *Percepción de propiedades*). Responde sin justificar.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se relaciona exclusivamente con *Percepción de Propiedades* - capa D- y del análisis de la producción escrita podemos inferir que Cecilia relaciona sólo en un caso, la superficie de las piezas, es decir, las partes con el todo a través de una fracción. Ante la ausencia de justificación, las apreciaciones que hemos realizado nos permiten manifestar que en Cecilia se observan confusiones que obstaculizan la comprensión del indicador implicado en esta actividad.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

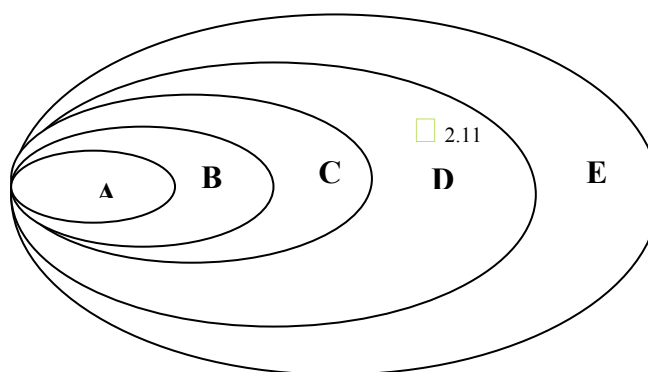


Gráfico de Comprensión –E- de Cecilia asociada a la act.5

2.11.- Relaciona el todo y las partes y entre las partes. Es decir, relaciona las fracciones con respecto al área de una superficie

En general, observamos que Cecilia no justifica sus procedimientos; pero cuando cuenta con conocimientos, puede responsabilizarse matemáticamente de los resultados a los que arriba, según observamos en la respuesta de la actividad anterior, principalmente la referida a la comparación de superficies.

4.2.4.1. RELACION ENTRE LOS GRÁFICOS DE COMPRENSIÓN: DESEABLE Y EL DE CECILIA

Con la resolución de las actividades correspondientes al cuestionario de evaluación de los contenidos referidos al concepto de área implementado en la secuencia, pretendimos detectar los logros que obtuvo Cecilia en la construcción del concepto. El cuestionario se compone de cinco actividades, y a cada uno se le asignan indicadores de las categorías, los cuales dispusimos en un gráfico de comprensión, el que denominamos *deseable*, pues recoge todos los indicadores que intervienen en el cuestionario a efectos de explicitar – en detalle- las características del concepto que aspiramos que la niña construya. Así, su distribución en el gráfico es la siguiente: cuatro indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- cuatro indicadores en el anillo *Producción- Posesión de una imagen*-Capa B y Capa C –dos indicadores en *Posesión de propiedades* - Capa D- cinco indicadores en *Percepción de propiedades* - Capa D- y un indicador en el anillo *Percepción de Propiedades - Formalización*- Capa D y Capa E-.

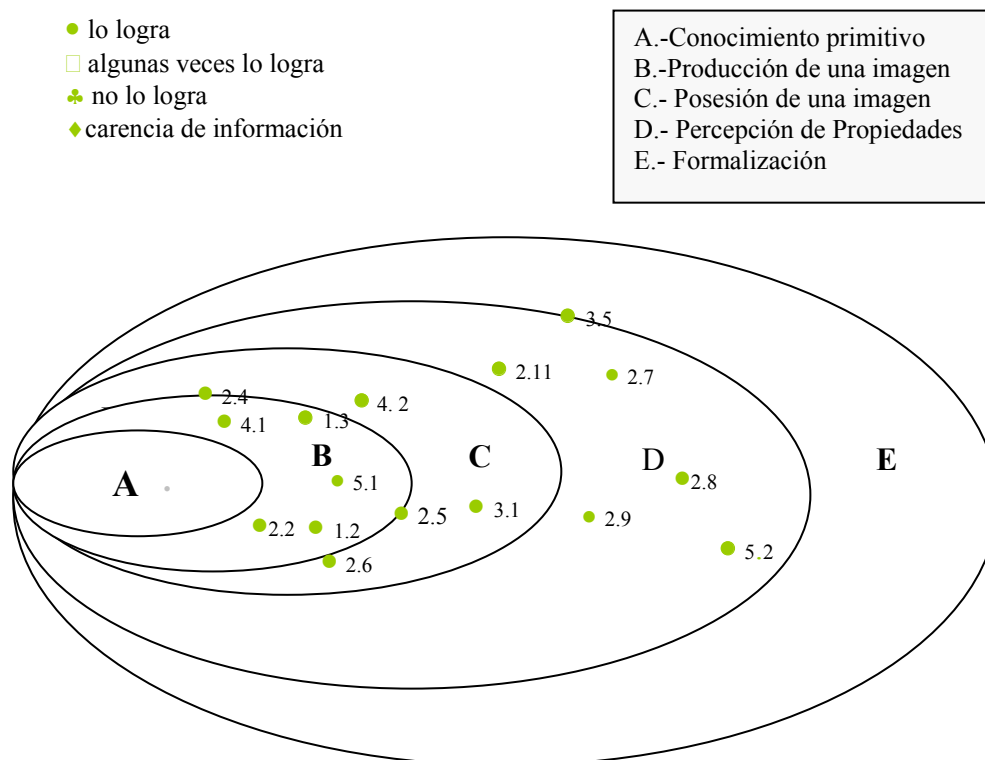


Gráfico Global de Comprensión Deseable de Evaluación al Finalizar la Secuencia

- 1.2.-Aparea lados.
- 1.3.-Aparea vértices
- 2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión)
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.6.-Construye superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra, su área no varía
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 2.9.-Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área.
- 2.11.-Relaciona el todo y las partes y entre las partes. Es decir, relaciona las fracciones con respecto al área de una superficie
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.5.-Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo
- 5.2.-Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras

Las respuestas brindadas por Cecilia nos permiten anticipar el gráfico de comprensión en el que volcamos los logros de los indicadores involucrados.

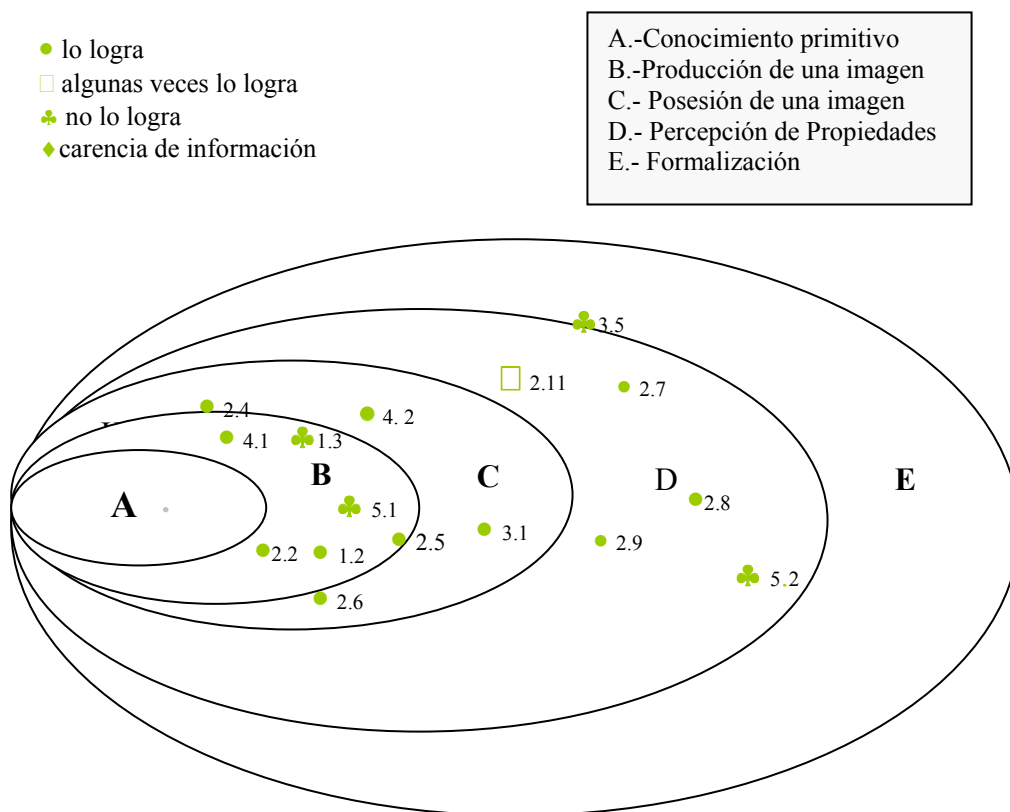


Gráfico Global de Comprensión de Evaluación al Finalizar la Secuencia de Cecilia

En la relación de ambos gráficos –el de Cecilia y el deseable- detectamos que la niña, excepto los indicadores 1.5 y 2.3 asignados a la actividad 1, excluida de este análisis, en general ha logrado lo deseable. Así, con respecto a la comparación de superficies, Cecilia lo realiza directa e indirectamente, pues directamente, constata si una es parte de la otra (ind 2.2 en Producción de una imagen), indirectamente a través de transformaciones de romper y rehacer, o bien cuando (ind 2.4 en Producción –Posesión de una imagen) mide o pavimenta y utiliza una unidad conveniente (ind 2.5 en Producción- Posesión de una imagen e ind 4.1 en Producción de una imagen).

A su vez, en función de la repuesta vertida en la actividad 4: *“Sí, porque pueden tener la misma área”,.... “debes superponer una figura con otra y ver si te da igual área, otra es cortando una de las figuras e ir poniendo al lado de la otra y otra es elegir a la misma unidad de medida para cada una”* (ind.2.2 en Producción de una imagen; 2.4 y 2.5 en Producción – Posesión de una imagen) da cuenta de la comprensión de la noción de equivalencia de superficies.

Por otra parte, de su producción escrita (PEC2 y PEC4) podemos inferir que Cecilia comprende la noción de equivalencia de figuras a través de la conservación del área de las mismas, aunque no lo explicita, pero el dibujo que observamos en PEC2 así lo muestra y lo que manifiesta en la actividad 4 *“Sí pueden tener el mismo área pero pueden estar acomodados de distinta manera”* (ind.2.7 en Percepción de propiedades) siempre dispuestos con un lado en común.

Con respecto al perímetro, de su dibujo, en la actividad 2, observamos que pudo dibujar una figura equivalente a la dada, apareando por los lados (ind. 1.2 en Producción de una imagen) y utilizar una unidad de medida – el cuadradito- (ind.2.6 en Producción – Posesión de una imagen), aunque sin considerar que debían ser de distinto perímetro (Es decir, no logra el ind 3.5 en Percepción de propiedades- Formalización).

Para calcular el área acude solamente a un tratamiento unidimensional de la superficie. Utilizando como recurso la plantilla, cubre la figura y mide utilizando varias veces la misma unidad de medida (ind 4.1 en Producción de una imagen). Expresa dicha cantidad a través de un número, es decir, no expresa el área, sino la medida respecto de la unidad seleccionada.

No construye figuras apareando piezas por sus vértices (ind.1.3 en *Producción –Posesión de una imagen*). Aunque no lo explicita, utiliza una unidad conveniente (ind. 4.2 en *Posesión de una imagen*). Con respecto al establecimiento de relaciones entre cada una de las partes en que puede subdividirse el todo y el mismo, Cecilia expresa cada pieza del rompecabezas a través de una fracción sólo en algunas ocasiones (ind 2.11 en *Percepción de propiedades*). Si bien, la justificación que brinda no aclara los resultados obtenidos hemos observado confusión en la noción de número fraccionario que obstaculiza la comprensión de relacionar una parte de una superficie con respecto al área total a través de fracciones (ind 2.11.- en *Percepción de Propiedades*). No asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo (ind. 5.1 en *Producción de una imagen*), ni estima las dimensiones lineales de la figura para utilizar la fórmula (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*).

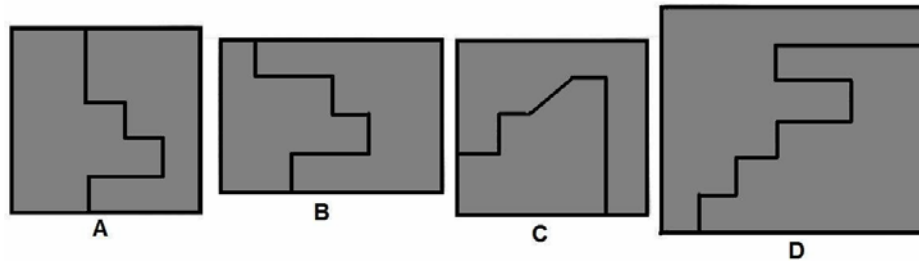
Identifica superficies de igual o distinta forma y de distinta o igual área (ind 2.8 e ind 2.9 en *Percepción de propiedades*). Asimismo, de las figuras equivalentes que construyó no reconoce la independencia de variación entre el área y el perímetro (ind 3.5 en *Percepción de propiedades-Formalización*).

4.2.5.- ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO A MEDIO PLAZO (MPC)

La resolución del cuestionario realizado por la niña se adjunta en el Anexo XIX. A continuación se describe el desarrollo propuesto por Cecilia. Cuando la producción escrita muestra el proceso de construcción que se produce en la niña, lo incluimos para dar cuenta de ello.

Actividad 1: (MPC1)

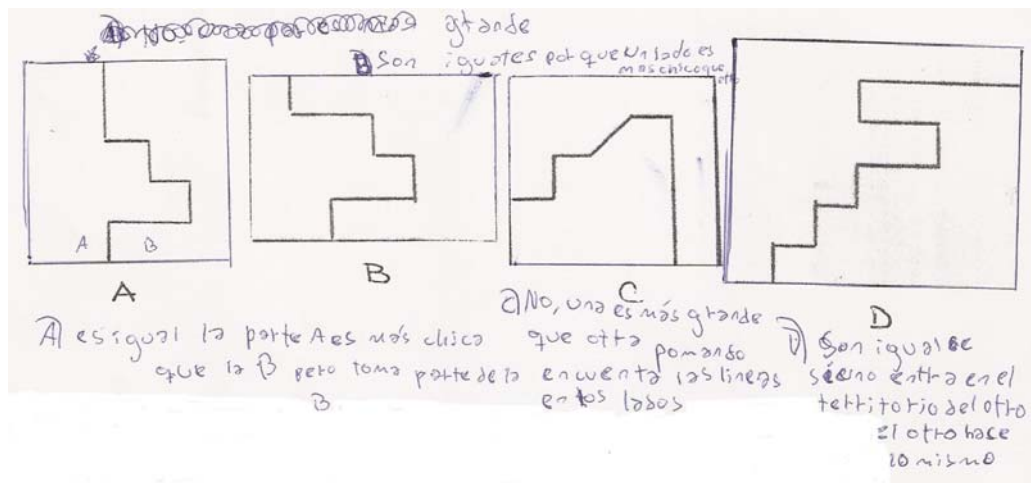
1.- Si cortamos las figuras por la línea marcada ¿las dos partes tienen la misma área?



A:- Descripción de la producción escrita

Cecilia manifiesta para cada una de las figuras:

- ✓ **A:** Asigna con la letra “A” a la región de la izquierda y con la letra “B” a la región de la derecha. Debajo escribe “es igual, la parte A es más chica que la B, pero toma parte de la B”
- ✓ **B:** Arriba responde “Son iguales porque un lado es más chico que otro”
- ✓ **C:** Abajo responde: “No, una es más grande que otra tomando en cuenta las líneas de los lados”
- ✓ **D:** Abajo responde “Son iguales, uno entra en el territorio del otro, el otro hace lo mismo”



B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad

1

Cecilia compara desde un tratamiento cualitativo- la representación geométrica- y no recurre al número para comparar las áreas de las regiones. La niña reconoce que puede recomponer una figura en otra, de otra forma y las dos figuras resultan equivalentes (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*). Así, de su expresión A) “es igual, la parte A es más chica que la B pero toma parte de la B”

o D) “*Son iguales, uno entra en el territorio del otro, el otro hace lo mismo*” inferimos que compara el área de las regiones directamente, por ejemplo para las figuras A y D analiza si una de las regiones es parte de la otra (ind 2.2. en *Producción de una imagen*) y/o indirectamente, por descomposición (ind 2.4 en *Producción –Posesión de una imagen*).

Identifica superficies de distinta forma e igual área (Ind 2.8 en *Percepción de propiedades*), pero, en cambio, para las figuras B y C pretende justificar refiriéndose a la consideración de la longitud de uno de los lados. Aunque fundamenta su respuesta, solamente arriba a la respuesta correcta con la figura D.

Por sus respuestas entendemos que la niña no compara a través de la medición y utilización de una unidad de medida (ind 4.2.- en *Posesión de una imagen* e ind 4.1.- *Producción de una imagen*), pero no podemos manifestar que no sepa hacerlo, sino más bien que ha elegido otro método para efectuar la comparación (ind 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*).

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B- y dos en el anillo *Producción – Posesión de una imagen* - Capa B y Capa C-, un indicador en *Posesión de una imagen* – Capa C- y dos indicadores en *Percepción de Propiedades* - Capa D-

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

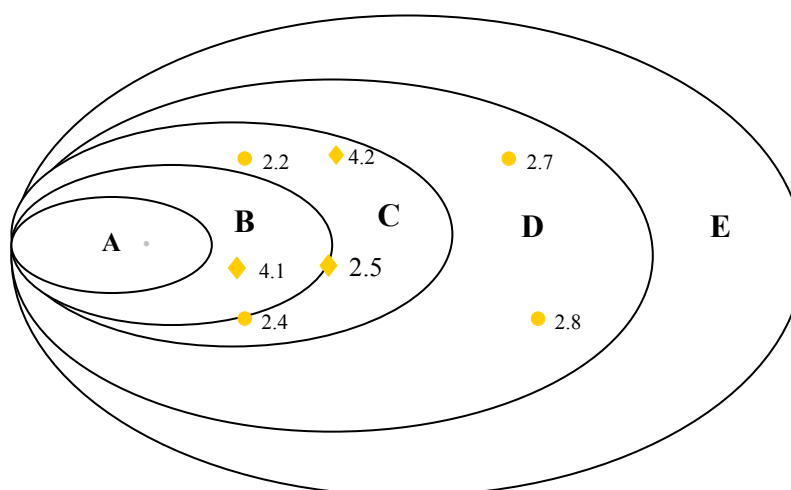
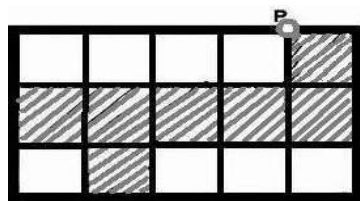


Gráfico de Comprensión a – MP- de Cecilia asociado a la act. 1

- 2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión)
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra, su área no varía
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.

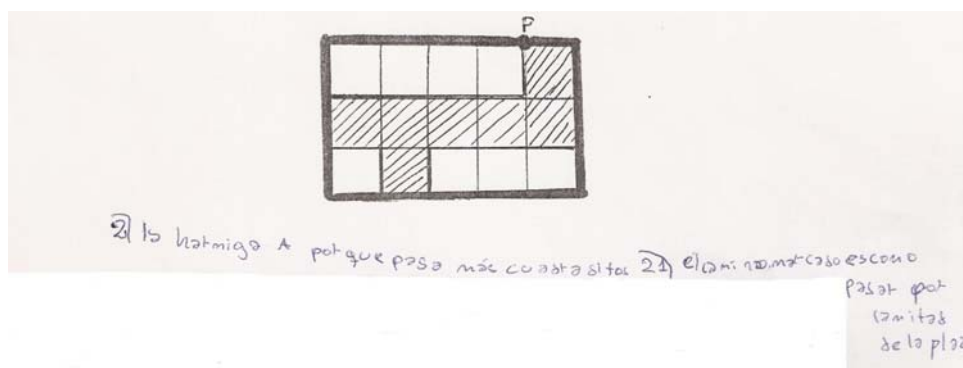
Actividad 2: (MPC2)

Una hormiga A sale del punto P. Recorre el perímetro del rectángulo de trazo grueso y vuelve a P. Otra hormiga B, también sale de P y recorre el perímetro de la zona rayada y regresa a P. ¿Cuál de las dos hormigas camino más? ¿Qué puedes decir de la región determinada por cada camino?



A:- Descripción de la producción escrita

Cecilia responde cuál es la hormiga que camina más: “La hormiga A porque pasa más cuadraditos” y con respecto a qué puedes decir de la región determinada por cada camino, responde: “el camino más corto es como pasar por la mitad de la plaza”.



B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad

2

Con respecto a quién caminó más, suponemos que Cecilia ha contado el número de cuadraditos que encierra la región por la cual se desplaza y, entonces, la hormiga A recorre 15 cuadrados, mientras que la B recorre 7. En cuanto a qué puede decir de la región determinada por cada camino, una posibilidad es que Cecilia no ha comprendido el término “región” y ha interpretado que debía especificar el camino más corto para “atravesar “el rectángulo – al cual se refiere como “la plaza”.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en cada uno de las siguientes capas: *Producción de una imagen*- Capa B- *Posesión de una imagen* - Capa C- *Percepción de Propiedades* - Capa D-

En cuanto al análisis de la producción escrita de Cecilia, observamos que la niña no ha considerado la noción de perímetro para identificar el camino más largo y, de la respuesta que brinda, percibimos que no distingue la noción de área de la de perímetro (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*). Con respecto a la segunda pregunta, estimamos que no conoce la palabra “región” y responde lo que estima puede ser. Por lo tanto, excepto el indicador al que nos hemos referido, para los otros no tenemos información acerca del logro de los mismos.

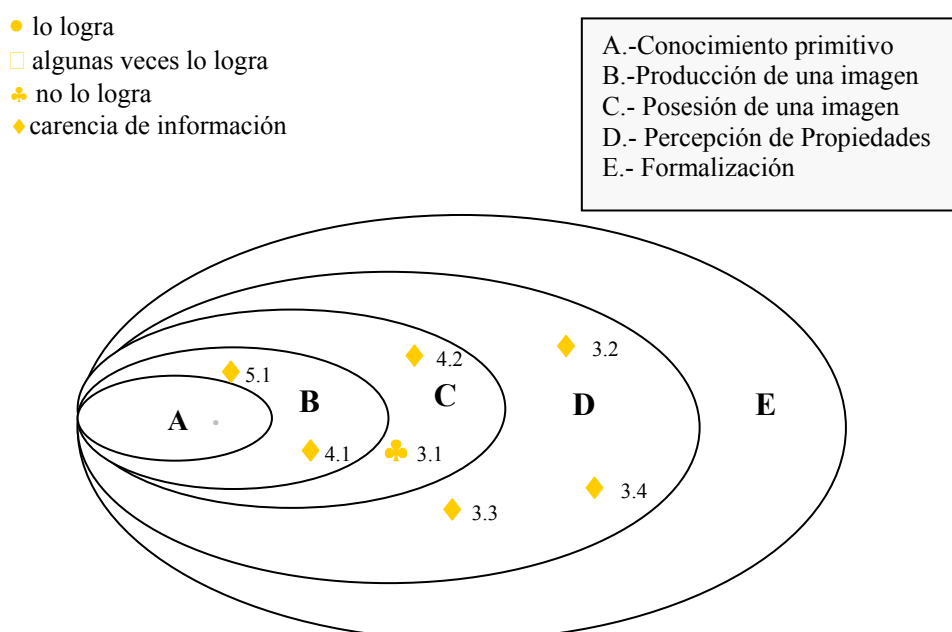
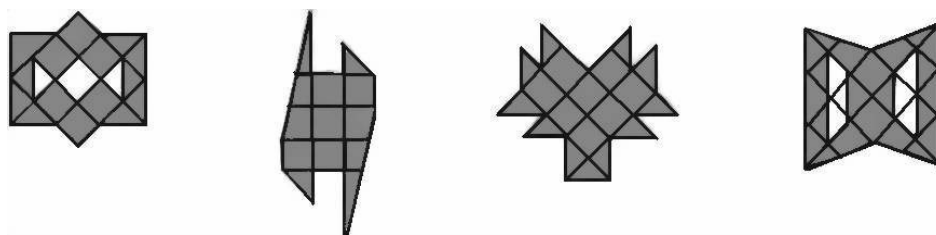


Gráfico de Comprensión a – MP- de Cecilia asociado a la act. 2

- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.2.-Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor /igual/ menor perímetro de la misma.
- 3.3.-Identifica figuras isoperimétricas
- 3.4.-Ordena figuras isoperimétricas respecto del área.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo

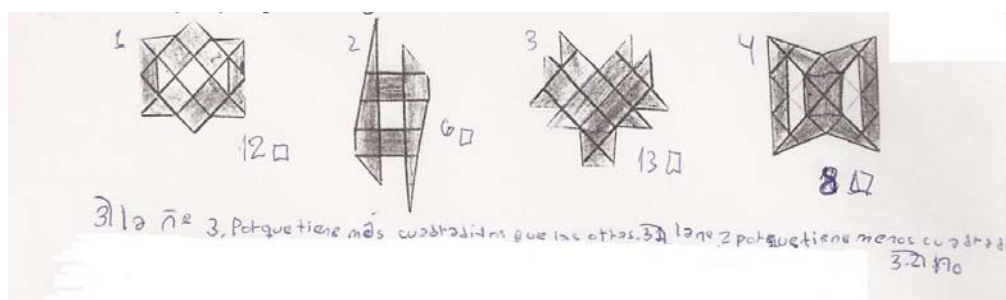
Actividad 3: (MPC3)

¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? ¿Cuál tiene menor área? ¿Hay superficies iguales?



A:- Descripción de la producción escrita

Cecilia designa a cada una de las figuras con 1, 2, 3 y 4 respectivamente. Expresa al lado de cada figura, en la primera, “12  ” en la segunda, “6  de área” en la tercera “13 ...” y en la cuarta “8  y responde “La N° 3, Por que tiene más cuadraditos que las otras”, “La numero N° 2 tienen menos cuadraditos” y con respecto a si hay superficies iguales , responde “no”.



B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad**3**

Cecilia reconoce el cuadrado como unidad conveniente y el mismo para todas las figuras a fin de efectuar la comparación (ind 4.2.- en *Posesión de una imagen*). Compone, de este modo, las distintas piezas para formar y computar cuadrados (ind 2.4 en *Producción-Posesión de una imagen*), según se observa en

la segunda, tercera y cuarta figura. Determina, así, el área de cada una de las figuras en función de esa unidad (ind 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*) aunque los resultados a los que arribó en cada una de ellas, son incorrectos. Según los resultados que expresa, carecemos de información respecto a que la comparación de las figuras, la realice por superposición (ind 2.2 en *Producción de una imagen*)

No podemos afirmar que la niña distinga superficies de igual o distinta forma e igual área (ind 2.8 e ind 2.10 en *Percepción de propiedades*), pues los resultados a los que arriba son todos distintos. En cambio podemos pensar que la niña distingue en el resultado de una medida su dependencia con el tamaño de la unidad utilizada,(ind 4.3 en *Percepción de propiedades*) y es por ello que para comparar las distintas piezas, la niña considera la misma unidad de medida en todas ellas.

En base a los resultados, selecciona correctamente la figura de mayor y la de menor área respectivamente. En cuanto a la última pregunta no podemos afirmar si distingue la superficie de su área, pues aunque responde correctamente, puede haber considerado el área de cada una de las figuras en lugar de la superficie, dado que los resultados obtenidos no coinciden.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B- y con dos indicadores en el anillo *Producción- Posesión de una imagen*- Capa B y Capa C-, un indicador en *Posesión de una imagen*-Capa D- y tres indicadores en *Percepción de Propiedades* - Capa D-

Del análisis de la producción escrita, no poseemos información del indicador 2.2 pues Cecilia compara superficies a través de la medición de una

unidad conveniente (ind 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*).

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ✿ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

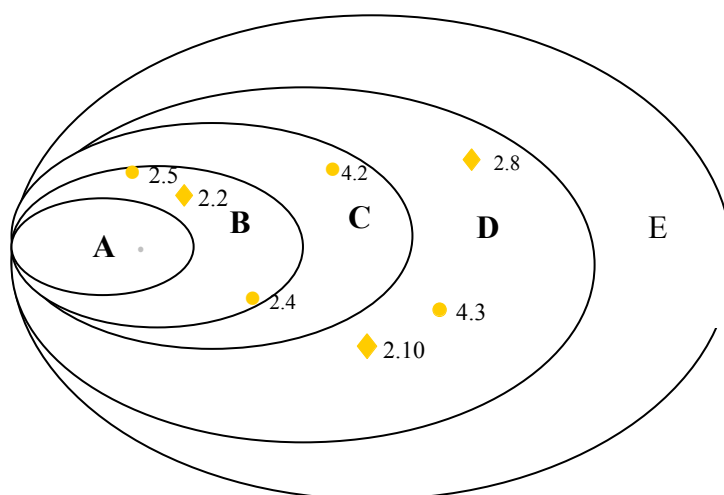


Gráfico de Comprensión a – MP- de Cecilia asociado a la act. 3

- 2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión)
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.

Actividad 4: (MPC4)

En la escuela tienen que embaldosar un patio de 18 metros de largo y 12 metros de ancho. Reciben una donación de 5000 baldosas de 20 cm de lado. ¿Son suficientes para cubrir el patio?

A:- Descripción de la producción escrita

Cecilia responde que “Sí, son suficientes y sobran”. Para ello multiplica 18 m por 12m y obtiene como resultado 216m. También multiplica 5000 por 20, cuyo resultado es 50000cm y, a continuación, divide ese resultado por 10 y obtiene como cociente 5000, valor que le permite responder la pregunta.

Handwritten work showing calculations:

$$\begin{array}{r} 18m \\ \times 12m \\ \hline 36 \\ 180 \\ \hline 216m \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5000 \\ \times 20 \\ \hline 50000 \\ 50000cm \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50000 \\ \div 10 \\ \hline 5000 \end{array}$$

4) Sí, son suficientes y sobran

B.-Análisis de la producción de Cecilia correspondiente a la actividad

4

Como Cecilia no fundamenta lo realizado, podríamos, entonces, pensar en dos posibilidades. En principio, calcula el área del patio al considerar las dimensiones lineales del rectángulo (18m y 12m respectivamente) (ind 5.2.- en Percepción de propiedades) y utiliza la fórmula, pero indica como unidad del área “m”. Si bien es un aspecto que no consideraremos, puesto que la maestra durante la implementación de la secuencia no se propuso abordar la unidad convencional m^2 , podemos pensar que Cecilia no distingue que la dimensión de los lados es unidimensional mientras que el área es bidimensional (ind 4.2 en Posesión de una imagen). Las otras dos cuentas no tienen sentido en el contexto del problema.

Otra posibilidad puede ser que Cecilia considere los números que figuran en el enunciado, haya operado con ellos sin otorgarle el sentido matemático esperado, y seleccione el cálculo de dividir el 50000 por 10 al observar que su resultado puede responder al problema.

Cualquiera de las dos posibilidades nos permite aseverar que Cecilia no selecciona la baldosa como unidad conveniente para calcular el área (ind 4.2 en Posesión de una imagen).

La niña no pavimenta la superficie para calcular el área (ind 4.1.- en Producción de una imagen) ni pretende hallar el número de cuadraditos a través de una multiplicación (ind 5.1 en Producción de una imagen), pero no significa que no sepa, solo podemos afirmar que ha utilizado otro procedimiento.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B- y con un indicador en cada uno de las siguientes capas: *Posesión de una imagen* - Capa C y *Percepción de Propiedades* - Capa D-

Además, del análisis de la producción escrita, estimamos conveniente construir el siguiente gráfico de comprensión, que denota lo logrado por Cecilia.

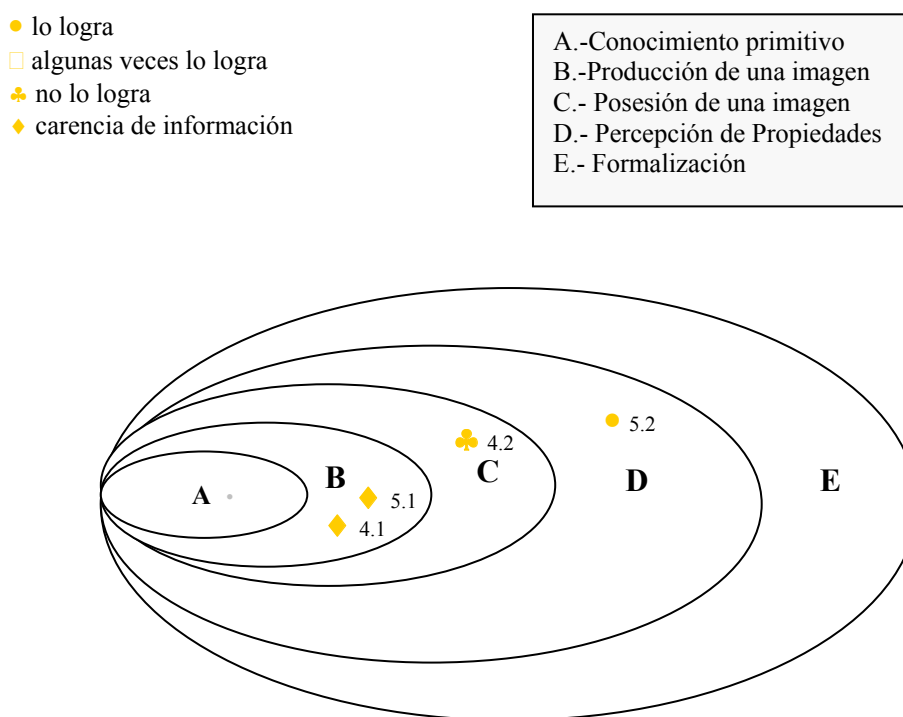


Gráfico de Comprensión a – MP- de Cecilia asociado a la act. 4

- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras.

4.2.5.1. RELACIÓN ENTRE LOS GRÁFICOS DE COMPRENSIÓN: DESEABLE Y EL DE CECILIA

La resolución de las actividades correspondientes al cuestionario acerca de la evaluación a mediano plazo de los contenidos referidos al concepto de área nos ubicaba en la pretensión de detectar la perdurabilidad y funcionalidad que había logrado Cecilia en la construcción del concepto de área.

El cuestionario que pusimos en juego, se compone de cuatro actividades y a cada una de ellas asociamos indicadores de las categorías. Estos indicadores los hemos dispuesto en un gráfico de comprensión, el que denominamos *deseable*, pues recoge todos los indicadores que intervienen en el cuestionario a efectos de explicitar – en detalle- las características del concepto que aspiramos que la niña construya. Así, su distribución en el gráfico es la siguiente: tres indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- dos indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen*-Capas B y C –dos indicadores en *Posesión de propiedades* - Capa C- y ocho indicadores en *Percepción de propiedades* - Capa D-

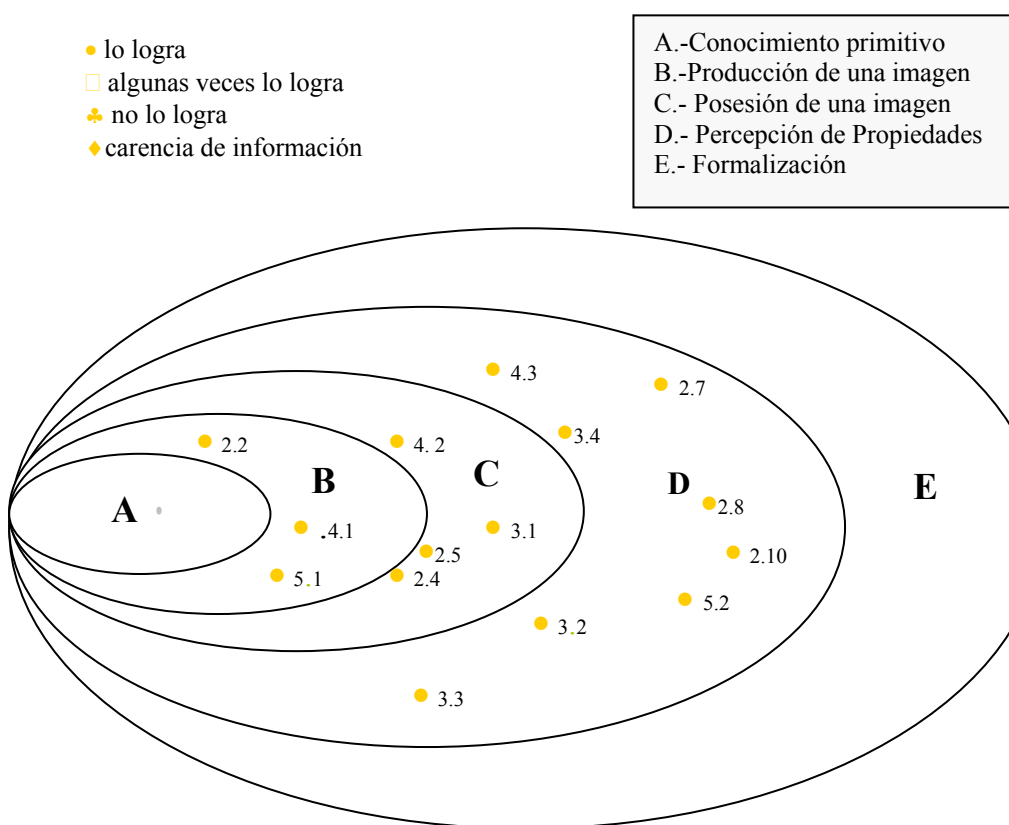


Gráfico Global de Comprensión Deseable a Medio Plazo

- 2-2- Compara superficies por superposición (inclusión)
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies con la medición y utilización de una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si un figura se descompone o recompone con otra, su área no varía
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.2.-Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor /igual/ menor perímetro de la misma.
- 3.3.-Identifica figuras isoperimétricas
- 3.4.-Ordena figuras isoperimétricas respecto del área.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
- 5.1.- Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo
- 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras.

Las respuesta brindadas por Cecilia nos permiten anticipar el gráfico de comprensión en el que volcamos los logros de los indicadores involucrados.

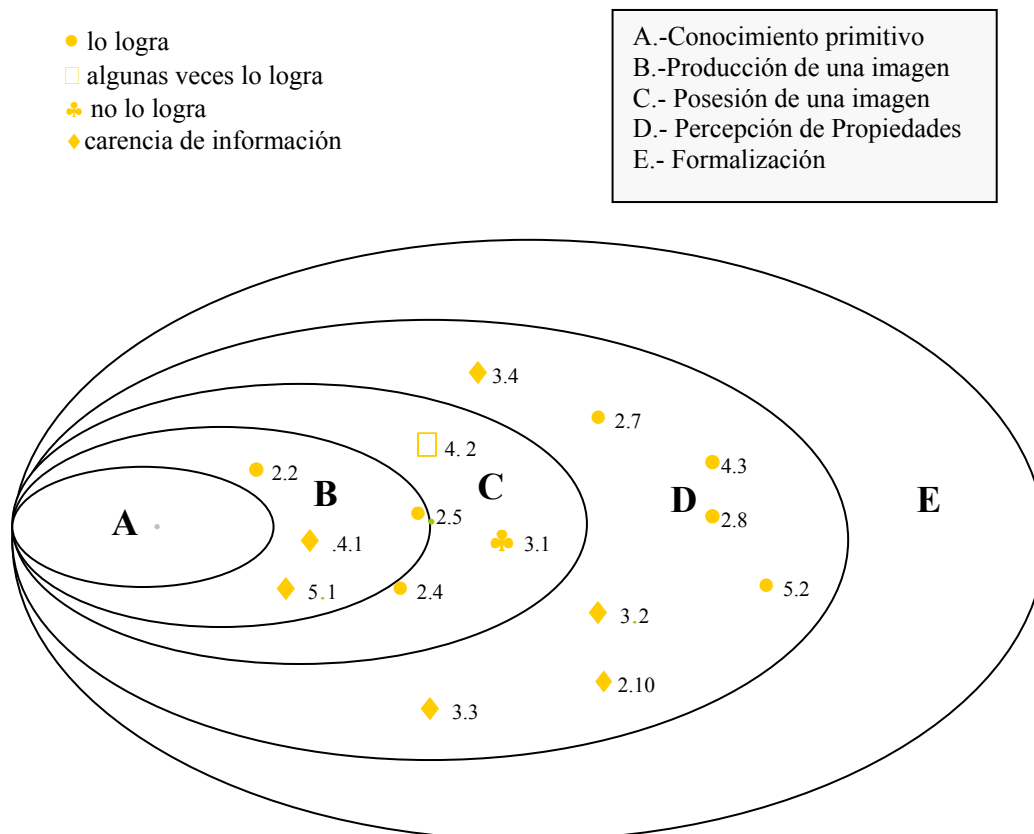


Gráfico Global de Comprensión a Medio Plazo -MP- de Cecilia

Al relacionar ambos gráficos –el de Cecilia y el deseable- observamos que la niña compara las superficies por superposición, (ind 2.2 en *Producción de una imagen*) y por composición y descomposición (ind 2.4.- en *Producción –Posesión de una imagen*). Pues en la primera actividad, compara directamente la superficie A⁸⁹ y analiza si una de las regiones, es parte de la otra, según manifiesta: “*es igual, la parte A es más chica que la B, pero toma parte de la B*”(PEMPM1). En cambio, con la superficie D expone: “*Son iguales, uno entra en el territorio del otro, el otro hace lo mismo*”. Es decir, aunque se refiere a “iguales”, pensamos que la niña reconoce que si una figura se descompone en otra, su área no varía, es decir identifica varias superficies de distinta forma y equivalentes (ind 2.7; ind 2.8 e ind 2.10.- en *Percepción de propiedades*).

Calcula el área y estima para ello dimensiones lineales- en la actividad 4 cuando calcula el área del patio- (ind 5.2.- en *Percepción de propiedades*).

Calcula el área de las distintas figuras a través de la medición y utilización de una unidad conveniente (ind 2.5.- en *Producción –Posesión de una imagen*), y expresa el resultado en función de esa unidad. Estimamos que es conciente que la medida a la que arriba depende de la unidad utilizada.(ind 4.3 en *Percepción de propiedades*) pues para comparar las distintas piezas, la niña considera la misma unidad de medida en todas ellas.

Sin embargo algunas veces se observa confusión en la elección conveniente de la unidad de medida convencional (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*).

Percibimos también, que no distingue la noción de área de la de perímetro- actividad 2, cuando debe identificar el camino más largo- (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*) y no contamos con información acerca de del reconocimiento de la invarianza en la relación perímetro- área (ind 3.2; 3.3 e 3.4 en *Percepción de propiedades*).

⁸⁹ Las partes en que está subdividida la figura A las denomina a su vez A y B respectivamente.

4.2.6.- TENDENCIAS DE LAS CATEGORÍAS DETECTADAS EN RELACIÓN A LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA

A continuación, vamos a volcar en tablas, la información de logros detectados en el análisis efectuado de cada uno de los indicadores de las categorías enunciadas. Para ello consideramos cada una de las actividades que componen los instrumentos, a fin de percibir su tendencia y tratar de avizorar las características de las categorías referidas a la construcción del concepto de área, en este caso, de Cecilia.

Para ello enunciamos cada categoría, sus respectivos indicadores y una tabla para cada uno de ellos, que nos permite visualizar la tendencia de su construcción.

La tabla, según nos referimos en el capítulo 3 apartado 3.6.7, está compuesta por dos filas. En la primera fila, explicitamos cada una de las actividades que conllevan cada uno de los instrumentos implementados e involucrados con el indicador en cuestión. En la segunda fila, expresamos los logros obtenidos, por ejemplo, si lo logra, escribimos “Si”, si no lo logra, escribimos “No”, si sólo lo logra algunas veces, escribimos “AV”. Y si no disponemos de información para poder expresar el logro, escribimos “CI”.

En la última columna, inferimos el resultado global del logro del indicador. Arribamos al mismo, considerando los logros parciales, fundamentalmente, los alcanzados en los últimos instrumentos. Es decir, no inferimos un valor según la cantidad de logros alcanzados, sino que identificamos si al final del proceso lo logra.

Categorías

1.-Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja.

1.1.-Maneja el material mediante manipulación libre. Se corresponde con Producción de una imagen (Capa B)

LO LOGRA, pues

	SC8	Global
Lo logra	Si	Si

1.2.- *Aparea lados.* Se corresponde con *Producción de una imagen* (Capa B)

LO LOGRA, pues

	SC4	SC6	SC7	SC8	EC2	Global
Lo logra	CI	Si	Si	Si	Si	Si

1.3.- *Aparea vértices.* Se corresponde con el anillo *Producción de una imagen - Posesión de una imagen* (Capas B y C)

NO LO LOGRA, pues

	SC6	EC2	Global
Lo logra	CI	No	No

1.4.-*Representa mentalmente la composición de figuras.* Se corresponde con el anillo *Producción de una imagen / Posesión de una imagen.*(Capas B y C)

LO LOGRA, pues

	SC4	SC8	SC9	SC10	SC11	SC12	Global
Lo logra	AV	Si	Si	Si	Si	Si	Si

1.5.-*Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.* Se corresponde con el anillo *Producción de una imagen - Posesión de una imagen.*(Capas B y C)

LO LOGRA, pues

	SC11	SC12	Global
Lo logra	Si	Si	Si

2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.

2. 1.-*Compara superficies por percepción visual* Se corresponde con *Producción de una imagen* (Capa B)

LO LOGRA, pues

	IAC1	IAC4	SC3	Global
Lo logra	Si	Si	Si	Si

2. 2.-*Compara superficies por superposición y/o inclusión. Se corresponde con Producción de una imagen. (Capa B)*

LO LOGRA, pues

	IAC4	SC3	SC4	SC8	EC4	MPC1	MPC3	Global
Lo logra	CI	Si	CI	Si	Si	Si	CI	Si

2.3.-*Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).Equivalencia de figuras Se corresponde con el anillo Producción de una imagen - Posesión de una imagen. (Capas B y C)*

LO LOGRA, pues

	IAC1	IAC4	SC3	SC4	SC7	SC8	SC10	SC11
Lo logra	CI	CI	Si	CI	CI	Si	Si	Si

	SC12	Global
Lo logra	AV	Si

2.4.- *Compara superficies por composición y descomposición (transformación indirecta). Se corresponde con el anillo Producción de una imagen - Posesión de una imagen. (Capas B y C)*

LO LOGRA, pues

	IAC1	IAC4	SC3	SC4	SC7	SC8	SC10	EC4
Lo logra	CI	CI	Si	CI	CI	Si	Si	Si

	MPC1	MPC3	Global
Lo logra	Si	Si	Si

2.5.- *Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente Se corresponde con el anillo Producción de una imagen - Posesión de una imagen. (Capas B y C)*

LO LOGRA, pues

	IAC1	SC4	SC7	SC8	SC11	EC2	EC4	MPC1	MPC3
Lo logra	CI	SI	CI	Si	Si	Si	Si	CI	Si

	Global
Lo logra	Si

2.6.- *Construye superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente* Se corresponde con el anillo *Producción de una imagen - Posesión de una imagen.* (Capas B y C)

LO LOGRA, pues

	SC8	EC2	Global
Lo logra	Si	Si	Si

2.7.- *Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.* Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

LO LOGRA, pues

	IAC1	IAC4	IAC6	IAC8	SC3	SC4
Lo logra	Si	CI	CI	CI	SI	Si

	SC7	SC8	SC11	EC4	MPC1	Global
Lo logra	CI	AV	Si	Si	Si	Si

2.8.-*Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.* Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

LO LOGRA, pues

	IAC4	SC3	SC7	SC8	EC2	EC4	MPC1
Lo logra	CI	Si	CI	Si	Si	Si	Si

	MPC3	Global
Lo logra	CI	Si

2.9.-*Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área.* Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

LO LOGRA, pues

	EC4	Global
Lo logra	Si	Si

2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.

Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

LO LOGRA, pues

	IAC4	SC3	SC4	SC7	SC8	MPC3	Global
Lo logra	CI	Si	Si	CI	Si	CI	Si

2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones. Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

A VECES LO LOGRA, pues

	IAC3	SC8	EC5	Global
Lo logra	CI	Si	AV	AV

3.- Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro.

3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura .Se corresponde con *Posesión de una imagen* (Capa C).

A VECES LO LOGRA, pues

	SC3	SC6	EC2	MPC2	Global
Lo logra	AV	Si	Si	No	AV

3.2.-Reconoce que a mayor/ igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/ menor perímetro de la misma Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

LO LOGRA, pues

	SC6	SC7	MPC2	Global
Lo logra	Si	CI	CI	Si

3.3.- Identifica figuras isoperimétricas. Se corresponde con Percepción de propiedades (Capa D)

CARECEMOS DE INFORMACION, pues

	MPC2	Global
Lo logra	CI	CI

3.4.- Ordena figuras isoperimétricas respecto del área. Se corresponde con la capa *Percepción de propiedades*. (Capas D)

CARECEMOS DE INFORMACION, pues

	SC7	MPC2	Global
Lo logra	CI	CI	CI

3.5.- *Construye figuras equivalentes de distinto perímetro* Se corresponde con el anillo *Percepción de propiedades / Formalización* (Capas D y E)

NO LO LOGRA, pues

	SC6	EC2	Global
Lo logra	CI	No	No

3.6.- *Ordena figuras equivalentes, según el perímetro* Se corresponde con la capa *Percepción de propiedades*, (Capa D)

LO LOGRA, pues

	SC6	Global
Lo logra	Si	Si

4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento

4.1.- *Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado* Se corresponde con la capa *Producción de la imagen* (Capa B)

LO LOGRA, pues

	<i>IAC2</i>	<i>SC4</i>	<i>SC8</i>	<i>SC9</i>	<i>SC11</i>	<i>SC13</i>	<i>EC3</i>
<i>Lo Logra</i>	<i>Si</i>	<i>CI</i>	<i>AV</i>	<i>Si</i>	<i>Si</i>	<i>Si</i>	<i>Si</i>

	<i>EC4</i>	<i>MPC1</i>	<i>MPC2</i>	<i>MPC4</i>	Global
<i>Lo Logra</i>	<i>Si</i>	<i>CI</i>	<i>CI</i>	<i>CI</i>	<i>Si</i>

4.2.- *Elige una unidad adecuada* Se corresponde con la capa *Posesión de una imagen* (Capa C)

A VECES LO LOGRA, pues

	<i>SC4</i>	<i>SC7</i>	<i>SC8</i>	<i>SC9</i>	<i>SC10</i>	<i>SC11</i>
<i>Lo Logra</i>	<i>CI</i>	<i>Si</i>	<i>AV</i>	<i>AV</i>	<i>SI</i>	<i>Si</i>

	<i>SC 12</i>	<i>SC13</i>	<i>EC3</i>	<i>MPC1</i>	<i>MPC2</i>	<i>MPC3</i>
<i>Lo Logra</i>	<i>No</i>	<i>Si</i>	<i>AV</i>	<i>CI</i>	<i>CI</i>	<i>Si</i>

	<i>MPC4</i>	Global
<i>Lo Logra</i>	<i>No</i>	<i>AV</i>

4.3.- *Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.* Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

LO LOGRA, pues

	<i>SC7</i>	<i>SC8</i>	<i>SC9</i>	<i>SC10</i>	<i>MPC3</i>	Global
<i>Lo Logra</i>	<i>AV</i>	<i>CI</i>	<i>AV</i>	<i>Si</i>	<i>CI</i>	<i>SI</i>

4.4.- *Advierte la necesidad de unidades convencionales.* Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

LO LOGRA, pues

	<i>SC8</i>	<i>SC9</i>	<i>SC11</i>	<i>SC12</i>	<i>SC13</i>	Global
<i>Lo Logra</i>	<i>NO</i>	<i>Si</i>	<i>Si</i>	<i>CI</i>	<i>Si</i>	<i>Si</i>

4.5.- *Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud* Se corresponde con *Formalización* (Capa E)

NO LO LOGRA, pues

	<i>SC8</i>	<i>SC10</i>	Global
<i>Lo Logra</i>	<i>No</i>	<i>AV</i>	No

5.- Ccomprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulo como camino más económico

5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo Se corresponde con Producción de una imagen. (Capa B)

LO LOGRA, pues

	<i>IAC2</i>	<i>SC12</i>	<i>EC3</i>	<i>MPC2</i>	<i>MPC4</i>	Global
<i>Lo Logra</i>	<i>Si</i>	<i>CI</i>	<i>CI</i>	<i>CI</i>	<i>CI</i>	SI

5.2.- Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras. Se corresponde con Percepción de propiedades. (Capa D)

LO LOGRA, pues

	<i>IAC2</i>	<i>SC12</i>	<i>SC13</i>	<i>EC3</i>	<i>MPC4</i>	Global
<i>Lo Logra</i>	<i>Si</i>	<i>CI</i>	<i>CI</i>	<i>CI</i>	<i>Si</i>	Si

4.2.7.-ANÁLISIS GLOBAL DEL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE AREA EN CECILIA

A los efectos de abstraer el proceso de construcción del concepto de área en Cecilia, analizamos cada uno de los problemas resueltos en diferentes *sub-fases*. En particular, durante la implementación de la secuencia de aprendizaje, situamos a la niña con sus compañeros y con la maestra en la clase, para analizar si el diálogo y las interacciones entre ellos, nos brindan explicaciones acerca del crecimiento en la comprensión del concepto de área en la niña. La información que brinda cada uno de los instrumentos implicados se complementan unos con otros, en vista a efectuar una mirada global y plasmar la evolución del proceso. Fundamentalmente, en lo que respecta a qué características manifiesta la

niña en relación a la construcción del concepto de área y en cómo se produce dicha construcción junto al grupo de compañeros y la maestra. Esencialmente cómo el folding back y las interacciones contribuyen a la interpretación del proceso de comprensión individual de Cecilia.

4.2.7.1.-EL CRECIMIENTO DE COMPRESION DE LAS CATEGORIAS INVOLUCRADAS EN EL CONCEPTO

En la construcción de conceptos, los niños ponen en juego conocimientos ya construidos que funcionan como herramientas de solución para nuevos problemas; en función de ello, identificamos en Cecilia aquellos conocimientos matemáticos relacionados con la noción de área, que constituyen su *conocimiento primitivo* y que obtenemos a partir de la información procedente del Cuestionario (anexo 3). En función de ello anticipamos que la niña identifica el modelo rectangular como herramienta que resuelve situaciones de conteo por cubrimiento, lo relaciona con el campo multiplicativo y las condiciones de proporcionalidad. En cambio, no identifica el proceso inverso, es decir, la asociación del producto de dos números con el modelo rectangular, cuyas dimensiones coinciden con dichos factores, ni distingue las distintas posibilidades de expresar un número como producto de otros dos. En el campo aditivo, puede distinguir un segmento como la composición de otros dos, pero no puede obtener uno de ellos como complemento entre otro y el total.

Percibe que la relación entre la porción de superficie y el total es independiente de su forma cuando las unidades consideradas son las de uso frecuente o “las convencionales” y, de manera incipiente, puede expresar dicha relación mediante fracciones. Realiza repartos equitativos. Identifica las figuras en forma global (por su forma), sin necesidad de apelar a constataciones empíricas, sin embargo no establece la congruencia a través de transformaciones.

A partir del conocimiento mencionado, explicitamos, de manera pormenorizada, el estado de construcción de cada uno de los indicadores asociados a las categorías relacionadas con el concepto de área en Cecilia. Al mismo tiempo, y desde las capas de comprensión, indicamos cómo los procesos de folding back promueven el crecimiento de la comprensión de dichos

indicadores.

1.-Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja

Indicador 1.1.- Maneja el material mediante manipulación (en Producción de una imagen). Durante el desarrollo de la secuencia, Cecilia manipula distintas piezas para armar otras.

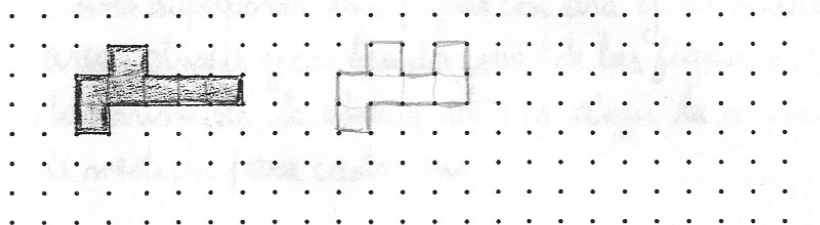
Indicador 1.2.- Aparea lados (en Producción de una imagen). En general, no contamos con información acerca de que Cecilia aparee figuras por sus lados, pero al avanzar en el desarrollo de la secuencia, podemos afirmar que sí lo posee porque en distintas actividades de la secuencia, observamos que en momentos la niña recurre a este indicador, como impulsor, para comprender otros indicadores ubicados en un anillo y capas exteriores. Más precisamente el 2.3.- *Utiliza las mismas piezas en distinta forma*, correspondiente al anillo *Producción de una imagen-Poseción de una imagen* y al 3.2.-*Reconoce que a mayor/igual/menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/igual/menor perímetro*, correspondiente a la capa *Percepción de propiedades*

Por ejemplo, en una actividad(SC6) la niña se le solicita distinguir entre varias figuras equivalentes- cada una de ellas se compone de cuatro cuadrados- la de perímetro menor y, ante la solicitud de la maestra por fundamentar su respuesta, ésta produce un folding back intencional y efectivo, pues Cecilia queda pensativa y comienza a observar la disposición de los cuadrados que apareo según sus lados para cubrir cada una de las figuras y reconoce que en el cuadrado quedan lados que no contará pues son puntos que no pertenecen al borde, según expresa;“*Porque a la vista de este dibujo hay cuadrados adentro*” [SC6 (88,114) en línea 106] y por lo tanto no los considera al calcular el perímetro. Es decir, lleva a la niña a considerar el apareo según los lados de los cuadrados para avanzar en su proceso de comprensión y distinguir entre las figuras , la de perímetro menor. Resultado que la lleva a reconocer que a figuras de igual área no necesariamente les corresponde igual perímetro. En otra actividad,(SC8) cuando las niñas interactúan con las piezas del tangram, las relaciones que establece la maestra entre las piezas y los aportes de sus compañeras Patricia y Flor, producen un folding back efectivo en Cecilia, intencional por parte de la maestra y no

intencional por parte de sus compañeras, que llevan a la niña a retroceder en su proceso de comprensión, aparear las figuras por sus lados y avanzar en dicho proceso, para utilizar las mismas piezas y obtener distintas figuras.

Este retroceso cobra sentido para Cecilia pues en el cuestionario, al finalizar la secuencia, la niña dibuja una figura equivalente a otra de perímetro distinto, apareando para ello, las piezas por sus lados, según podemos observar en su producción escrita.

2) Dibuja una figura equivalente a la dada pero de distinto perímetro. Justifica tu dibujo.



Indicador 1.3.- Aparea vértices (en Producción-Posesión de una imagen).

Los procedimientos empleados por la niña en las actividades que componen la secuencia no dan cuenta que aparee las figuras por sus vértices para obtener otra y en los cuestionarios finales, la producción anterior muestra que Cecilia no lo logra, pues no aparee las figuras por sus vértices para armar otra figura compleja.

Indicador 1.4.- Representa mentalmente la composición de figuras (en Producción-Posesión de una imagen). Cecilia durante todo el proceso, anticipa la composición de figuras cuando resuelve las distintas actividades de la secuencia. En distintas oportunidades *se observan distintos folding back* en el cual la niña recurre a este indicador, como impulsor, para comprender y avanzar en este proceso a otros indicadores ubicados en el mismo anillo o en una capa exterior. Más precisamente al 2.3.- *Utiliza las mismas piezas en distinta forma*, y al 2.5.- *Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente*, ambos correspondientes al anillo *Producción -Posesión de una imagen*, y al 4.2.- *Elige una unidad adecuada correspondiente a la capa Posesión de una imagen*)

Por ejemplo, en una actividad (SC4) Cecilia reconoce, en una primera instancia, que distintas figuras pueden tener distinta forma e igual área pero, al

solicitar la maestra una justificación a esto, la explicación que brinda su compañera Patricia es la siguiente “ *En la T (figura en forma de ...) cambié los cuadraditos, y si pongo este acá me da lo mismo*” (SC4,34) en línea 19] produce un folding back intencional y efectivo en Cecilia, que la lleva a retroceder a una capa interior, identificar mentalmente la composición de las formas y, aunque no avanza a capas exteriores, le permite considerar el cuadradito como unidad conveniente para medir y comparar distintas figuras.

En otro momento (SC9), para calcular el área, la niña anticipa un cubrimiento según una figura unidad solicitada, pero cuando la maestra la interroga, Cecilia expresa su desconocimiento. Mientras Mirta muestra su procedimiento, Cecilia si bien se lo cuestiona monitoreando lo realizado, le permite retroceder a este indicador, repensar nuevamente la composición de figuras propuestas, y lograr realizar el cubrimiento de la superficie para medir según las otras unidades solicitadas. Es decir, se produce un folding back intencional y efectivo por parte de la maestra y no intencional por parte de Mirta, que la lleva a concluir a solicitud de la maestra, “*tengo que saber con la unidad con que mido*” (SC9 en línea 89). En otro momento del desarrollo de la secuencia (SC11), cuando la niña debe comprobar el resultado arribado para detectar el diseño que menor cantidad de tela necesita, utilizando para ello una plantilla cuadrículada, la estrategia propuesta por Patricia de descomponer las figuras y recomponerlas en otra de forma rectangular, lleva a Cecilia a retroceder en su proceso de comprensión, retomar y anticipar la descomposición de las “partes incompletas” para recomponerlas en otra de forma rectangular. Este proceso denota un folding back intencional y efectivo de su compañera Patricia.

Estas consideraciones corroboran el sentido que le otorga la niña de este indicador como impulsor para avanzar en su proceso de comprensión, pues la anticipación que efectúa para representar mentalmente distintas figuras promueve el arribo a otros indicadores ubicados en capas exteriores.

Indicador 1.5.- Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos (en Producción-Poseción de una imagen). Cecilia en las actividades que lo permiten, demuestra la adquisición de este indicador., pues puede seleccionar piezas sin efectuar ensayos manipulativos.

En síntesis, respecto a *desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja*, Cecilia manipula distintas piezas (ind 1.1), las compone y obtiene otras (ind 1.4), apareando las figuras solamente por sus lados (ind 1.2). En principio, identifica las figuras de manera global, por su nombre; pero durante el desarrollo de las actividades que componen la secuencia, anticipa e identifica piezas que componen otra compleja (ind 1.4) y selecciona piezas sin efectuar ensayos manipulativos (ind 1.5), para comprender otros aspectos más complejos del concepto.

Cecilia en varias oportunidades se involucra en el proceso de folding back promovido por sus compañeras, fundamentalmente Patricia y Mita, algunos de ellos de manera intencional y otros no. En cambio otros, fueron inducidos intencionalmente por la maestra, pero todos ellos, efectivos para superar otros indicadores. En este proceso algunos indicadores actúan como impulsores pues el retroceso a ellos, le permite a Cecilia avanzar y superar otros, correspondientes a un mismo anillo o a una capa exterior. Así la niña en distintos momentos, retrocede en su proceso de comprensión, a representar mentalmente la composición de figuras (ind 1.4) y en menor medida, aparear figuras por sus lados (ind 1.2) en vista a avanzar en este proceso y lograr otros indicadores más complejos

En los cuestionarios finales, Cecilia aparea solamente las figuras por sus lados (ind 1.2), pues no logra aparear las mismas por vértices (ind 1.3).

Estos aspectos dan cuenta de que la niña *produce y posee una imagen de la relación entre una figura compleja y las figuras simples asociadas, de manera independiente, aunque al momento de componer figuras, aparee las figuras solamente por los lados.*

2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.

Indicador 2.1.-Compara superficies por percepción visual (en Producción de una imagen). En un principio y según la información que brinda los

cuestionarios iniciales, la niña compara superficies desde la percepción visual y al comenzar a desarrollar las actividades de la secuencia, y pretender comparar figuras, en principio, lo hace desde la percepción visual pero luego acude a métodos directos e indirectos.

Indicador 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión (en Producción-posesión de una imagen) En la resolución de las actividades relacionadas con este indicador, la niña compara figuras por inclusión o superposición y el mismo perdura en el tiempo pues en una actividad del cuestionario a medio plazo, se presentan distintas figuras seccionadas en dos y la niña debe manifestar si ambas porciones tienen igual área. Para ello analiza y anticipa si una de las regiones es parte de la otra parte, según observamos en su producción escrita cuando manifiesta “*son iguales, uno entra en el territorio del otro, el otro hace lo mismo*” (MPC1).

Indicador 2.3.Utiliza las mismas piezas en distinta forma (recompone) (en Producción-posesión de una imagen). La resolución de las actividades del cuestionario sobre ideas previas que involucran este indicador, no nos brinda información respecto de su logro. En cambio de las actividades que componen la secuencia, los procedimientos implementados por Cecilia dan cuenta que ha logrado este indicador a través del proceso de folding back inducidos por la maestra o de manera no intencional por sus compañeras Patricia o Mirta.

Por ejemplo, en una actividad (SC11) cuando compara distintas figuras en función de una unidad convencional- el cuadradito- en vista a determinar la de menor área, Cecilia considera las manifestaciones de su compañera Patricia, que la llevan a retroceder en su proceso de comprensión, identificar la representación mental de las partes de la figura y avanzar en su proceso de construcción a través de la recomposición de dichas partes de la figura en otra, para facilitar su medición.

Indicador 2.4.Compara superficies por composición y descomposición (transformación indirecta) (en Producción-posesión de una imagen). En principio, la producción de la niña acerca de la resolución de las actividades de los cuestionarios iniciales no brinda información respecto a que compare figuras por composición y descomposición. A posteriori en las actividades que componen la

secuencia lo logra, pues en determinados momentos, la niña recurre a este indicador como impulsor, para lograr los indicadores 2.8.- y 2.-10.- *identificar más de dos superficies de igual o distinta forma e igual área*.

Por ejemplo, en una actividad (SC3) se le requiere identificar la figura de menor área entre un conjunto dado, la maestra solicita para ello, que identifiquen las figuras equivalentes. Si bien Cecilia reconoce que una figura se puede descomponer en otra de igual área, las intervenciones de sus compañeras-Mirta y Araceli-producen un folding back no intencional pero efectivo en la niña que la impulsa a retroceder en su proceso de construcción, comparar por descomposición y/o composición las figuras y mostrar a la maestra las figuras que tienen distinta forma y son equivalentes, según podemos observar en la tabla de diálogo [SC3 (156,178) en línea 169].

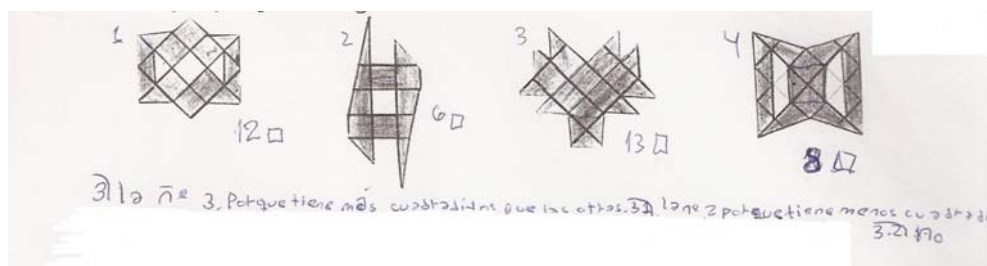
El logro de este indicador ha perdurado en el tiempo pues también lo logra en el desarrollo de los cuestionarios finales. Por ejemplo, en una de las actividades (MPC3) del cuestionario a medio plazo, debe comparar distintas figuras y la niña compone distintas piezas, para formar otra que facilite su medición.

Indicador 2.5.Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente (en Producción-posesión de una imagen). La resolución de las actividades del cuestionario inicial asociadas a este indicador, no brinda información acerca de que Cecilia compare figuras a través de la medición utilizando una unidad conveniente.

Sin embargo, en actividades de la secuencia, los procedimientos empleados muestran que la niña lo logra a través del folding back inducido por su compañera Patricia algunas de las actividades. Mas precisamente, cuando en una actividad de la secuencia (SC4), si bien Cecilia reconoce que figuras de distinta forma pueden tener igual área, la explicación de su compañera Patricia induce un folding back de manera intencional en Cecilia que la lleva a retroceder en su proceso de comprensión, a una capa interior, identificar mentalmente la composición de las formas y avanzar a comparar las distintas figuras a través de medir y utilizar una unidad conveniente.

Asimismo este indicador perdura a través del tiempo, según muestran las actividades resueltas en los cuestionarios a medio plazo. Por ejemplo, en una de

las actividades (EC4) se le solicita que complete la expresión acerca de la comparación de superficies y la niña responde: “*debes superponer una figura con otra y ver si te da igual área, otra es.....y otra es elegir la misma unidad de medida para cada una*”. En otra actividad (MPC3), se solicita distinguir la de mayor área entre distintas figuras, y la niña calcula el área de cada una de las figuras en función de la misma unidad de medida- el cuadrado- según podemos observar en su producción:



Indicador 2.6. Construye superficies midiendo, y utiliza para ello, una unidad conveniente (en Producción-posesión de una imagen). La niña en la resolución de las actividades de la secuencia y en los cuestionarios finales, demuestra que puede construir figuras de una medida establecida, utilizando para ello, otra figura como unidad.

Indicador 2.7. Reconoce que si una figura se descompone y recompone en otra forma, su área no varía (en Percepción de propiedades). Las actividades asociadas a los cuestionarios iniciales no brindan información acerca del logro del mismo. En cambio, los procedimientos empleados por la niña en la resolución de las distintas actividades asociadas a la secuencia muestran que la niña reconoce la invariabilidad del área entre una figura y otra formada por la descomposición-composición de la dada. Indicador que perdura a través del tiempo, según muestran las actividades resueltas en los cuestionarios finales.

Por ejemplo, en una de las actividades (EC4), cuando se le pregunta si dos figuras pueden ser equivalentes con distinta forma, Cecilia responde “*Sí, pueden tener la misma área y debes cortar una de las figuras e ir poniendo (cada una de las partes⁹⁰) una al lado de la otra*”

⁹⁰ Completo la frase y para ello, lo agrego entre paréntesis.

Indicador 2.8 Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área (en Percepción de propiedades). La resolución de las actividades del cuestionario inicial, no brindan información acerca de que la niña haya analizado esta posibilidad. No obstante, de los procedimientos empleados en las actividades de los instrumentos posteriores y asociadas a este indicador, denotan que Cecilia identifica dos superficies de distinta forma e igual área.

Indicador 2.9 Identifica dos superficies de igual forma y distinta área (Percepción de propiedades). La niña logra identificar dos superficies de igual forma y distinta área, según lo observamos en el cuestionario final cuando se le pregunta si dos figuras que tienen la misma forma son siempre equivalentes, la respuesta que brinda es “No, son iguales pero pueden tener distinta área” (EC4) y pensamos que cuando la niña se refiere a “iguales” quiso decir “la misma forma”.

Indicador 2.10 Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área (en Percepción de propiedades). La resolución de las actividades del cuestionario inicial no brindan información acerca del logro de este indicador, pero los procedimientos empleados por Cecilia en las actividades de la secuencia, denotan que puede identificar dos o más superficies de igual o distinta forma e igual área. Por ejemplo, en una de las actividades (SC8) se le solicita identificar las piezas del Tangram equivalentes y Cecilia a través del pavimentado constata que por ejemplo, el cuadrado, el paralelogramo y el triángulo mediano son equivalentes según expresa: “*el cuadrado es equivalente al paralelogramo y al triángulo mediano, pues en todos hay dos triángulos pequeños.*” (SC8, línea 110). En cambio lo podemos manifestar si este logro perdura en el tiempo pues los cuestionarios finales no brindan información al respecto.

Indicador 2.11. Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relaciona las partes y el todo a través de fracciones (en Percepción de propiedades). De las actividades asociadas a este indicador, las relacionadas con el cuestionario inicial, no nos brinda información sobre su logro. En cambio, en la actividad de la secuencia, la niña logra establecer la relación a través de una fracción. Por ejemplo, al relacionar las piezas del Tangram, concretamente el triángulo mediano y el grande, la niña manifiesta “*lo superpongo así y se puede volver a superponer el triángulo en lo que me quedo*”,

y ante la pregunta de la maestra ¿Qué parte ocupa del triángulo grande? responde “*La mitad*” [SC8 (243,293) líneas 252 y 270].

Sin embargo Cecilia muestra discontinuidad en el logro de este indicador, pues en el cuestionario final al intentar expresar una parte respecto de un rectángulo (EC5), expresa correctamente sólo alguna de las partes. Estas consideraciones nos llevan a manifestar que Cecilia sólo algunas veces logra relacionar el área de una parte respecto del todo a través de una fracción.

En síntesis, respecto a *la Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras*, podemos decir que Cecilia compara superficies, en principio, por percepción visual (ind 2.1). A través del desarrollo de la secuencia, implementa métodos directos como es la inclusión y/o superposición (ind 2.2), e indirectos, por descomposición y/o composición (ind 2.4) o midiendo a través de una figura unidad (ind 2.5).

El reconocimiento de la composición y descomposición de figuras le facilitó la identificación de figuras equivalentes (ind 2.7) y la comparación de dos a más figuras de distinta/igual forma le permitió identificar las equivalentes (ind 2.8 e ind 2.10). Incluso demuestra que puede construir figuras de una medida establecida al utilizar otra figura como unidad. (ind 2.6).

Cecilia en varias oportunidades se involucra en el proceso de folding back promovido por sus compañeras, fundamentalmente Patricia y Mirta, algunos de ellos de manera intencional y otros no. En cambio otros, fueron inducidos intencionalmente por la maestra, pero todos ellos, efectivos para superar otros indicadores. En este proceso algunos indicadores actúan como impulsores pues el retroceso a ellos, le permite a Cecilia superar otros, correspondientes a una capa exterior. De esta forma la niña retrocede en su proceso de comprensión, a comparar distintas figuras a través de la composición –descomposición de parte de ellas (ind 2.4), para avanzar y lograr algún los indicador asociado a una capa exterior. En cambio para utilizar las mismas piezas en distinta forma(ind 2.3) tuvo que retroceder en dos oportunidades en su proceso de comprensión, a indicadores ubicados en una capa interior o en el mismo anillo. Por ejemplo a aparear las

piezas por sus lado (ind 1.2) o a representar mentalmente la composición de figuras(ind 1.4).

Así, las intervenciones de sus compañeras durante la resolución de las distintas actividades que componen la secuencia y el momento de la puesta en común de las mismas, constituyeron instancias que le facilitaron a Cecilia avanzar en su proceso de construcción de algunos de los aspectos del concepto.

Por último, de los cuestionarios finales arribamos a que algunos aspectos asociados a esta categoría para Cecilia, perduran en el tiempo, por ejemplo, utiliza métodos directos e indirectos (ind 2.2; ind 2.4 e ind 2.5) para comparar superficies y puede construirlas a través de la composición de otra como unidad conveniente (ind 2.6), identifica dos superficies de igual o distinta forma y de igual o distinta área(ind 2.8 e ind 2.9). Si embargo sólo algunas veces logra relacionar el área de una parte respecto del todo a través de una fracción (ind 2.11) pues su logro en la resolución de las actividades muestra discontinuidades.

Estos aspectos nos llevan a manifestar que Cecilia *produce y posee una imagen del área como cualidad que permite comparar las superficies y, en general, percibe sus propiedades, respecto, por ejemplo, a la comparación y equivalencia entre ellas. En cambio, sólo algunas veces reconoce la relación entre superficies a través de una fracción.*

3.- Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro

Indicador 3.1. Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura (en Posesión de una imagen). La niña muestra discontinuidades en el logro de este indicador. En principio, no resuelve las actividades del cuestionario inicial en el cual podemos detectar si Cecilia distingue las nociones de área y perímetro. Durante el desarrollo de la secuencia, logra establecer la diferencia. Por ejemplo en una actividad (SC6), entre distintas figuras equivalentes se es solicita que pueden decir del perímetro de las mismas y Cecilia propone efectuar la comparación utilizando un hilo como intermediario y efectuar en él una marca. Sin embargo este aspecto no perdura con el tiempo según observamos en la

resolución de las actividades de los cuestionarios finales. Por eso, manifestamos que Cecilia, sólo algunas veces logra distinguir las nociones de área y perímetro.

Indicador 3.2. Reconoce que a mayor/igual/menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/igual/ menor perímetro de la misma (en Percepción de propiedades). Cuando la niña comprende el enunciado de la actividad, reconoce la independencia de la variación entre las nociones de área y perímetro. Por ejemplo, Cecilia no resuelve la actividad del cuestionario inicial asociada a este indicador, pero la actividad de la secuencia relacionada con este indicador, Cecilia logra el reconocimiento de la invariabilidad entre ambas nociones gracias al proceso de folding back durante el proceso de su comprensión. Más precisamente, en una actividad (SC6) se le solicita ordenar distintas figuras equivalentes, según el perímetro de las mismas, para ello la niña a través del folding back inducido de manera intencional por la maestra, retrocede en su proceso de comprensión, visualiza las distintas figuras según el apareamiento de sus lados y reconocer la de perímetro menor.

Es decir, avanza en su proceso de comprensión y reconoce que la igualdad de las áreas de las figuras no se corresponde con la igualdad de su respectivo perímetro. No obstante la resolución de las actividades propuestas en los cuestionarios finales no brindan información acerca que la niña reconozca dicha invariabilidad

Indicador 3.3. Identifica figuras isoperimétricas e Indicador 3.4 Ordena figuras isoperimétricas respecto de su área (ambas en Percepción de propiedades). Carecemos de información respecto del logro de estos los pues en la actividad relacionada con ellos, la niña no comprende el enunciado del mismo.

Indicador. 3.5. Construye figuras equivalentes de distinto perímetro. (en Percepción de propiedades-Formalización). La actividad de la secuencia asociada a este indicador no brinda información acerca del su logro y en los cuestionarios finales, la niña no construye figuras equivalentes de distinto perímetro.

3.6 .Ordena figuras equivalentes, según el perímetro (en Percepción de propiedades). Cecilia no respondió a la actividad (IAC6) del cuestionario inicial en que solicitaba opinión acerca del área y el perímetro de dos superficies, a posteriori, en una actividad (SC6) de la secuencia, se les solicita que averigüe el

perímetro de varias figuras equivalentes y Cecilia arriba a un resultado que le permite establecer un orden entre esas figuras según el perímetro de las mismas, según expresa “*A mi me dieron, tres iguales y uno distinto, el menor*” (SC6 línea 88).

En síntesis, respecto a *Distinguir y relacionar las nociones de área y perímetro*, Cecilia en algunas oportunidades muestra confusión entre ambas nociones y, cuando las distingue, este aspecto no perdura en el tiempo (ind 3.1). Ordena superficies equivalentes según su perímetro (ind 3.6) y a través del proceso de folding back, retrocede a analizar la disposición de las figuras para avanzar y reconocer que a mayor/igual/menor área no necesariamente le corresponde mayor/igual/menor perímetro (ind 3.2). En cambio, no logra construir figuras equivalentes de distinto perímetro y carecemos de información sobre si distingue y, por consecuencia ordena figuras isoperimétricas respecto del área.

Estos aspectos nos llevan a manifestar que *Cecilia solamente, percibe la independencia de la variación de área y perímetro de figuras, al mismo tiempo que puede ordenar figuras equivalentes según el perímetro*.

4.-Nivel de Conceptualización del área como medida de cubrimiento

Indicador 4.1. Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado (en Producción de una imagen). Cecilia implementa este indicador satisfactoriamente en el cuestionario inicial. La resolución de alguna de las actividades de la secuencia denota que, este indicador funciona como impulsor para construir otro indicador asociado a una capa exterior.

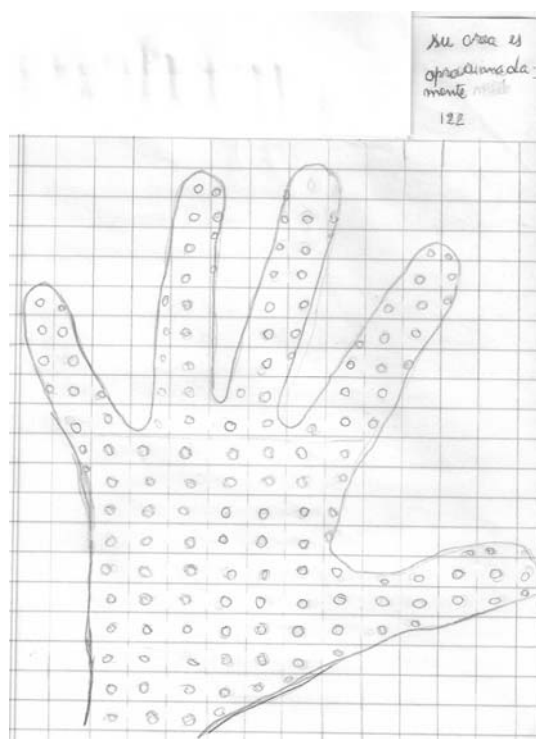
Por ejemplo en una actividad (SC8), las interpretaciones de sus compañeras Mirta y Patricia - promueven un folding back no intencional pero efectivo, que lleva que Cecilia a retroceder en su proceso de comprensión, pavimentar las piezas del tangram y medir en vista a avanzar en dicho proceso para comparar las distintas piezas.

Asimismo, en otra instancia del proceso de resolución de esa misma actividad, las interpretaciones de su compañera Mirta promueve un folding back que lleva a Cecilia a acudir como impulsor, a pavimentar las distintas piezas para avanzar en su proceso de construcción y distinguir una de sus piezas –el triángulo chico- como unidad conveniente. Asimismo, su logro perdura en el tiempo, pues, en una actividad (EC3) del cuestionario final se le solicita que averigüe el área de una figura según dos métodos diferentes y la niña utiliza para uno de ellos la plantilla cuadriculada, que le facilita el cubrimiento en vista a efectuar el conteo del cuadradito-unidad.

Indicador 4.2 Elige una unidad adecuada (en Posesión de una imagen). En principio durante el desarrollo de la secuencia, la niña utiliza una figura como unidad, cuando el enunciado lo sugiere, pero durante el proceso Cecilia muestra discontinuidad en el logro de la selección de una unidad adecuada. En una actividad (SC9) Cecilia refuta en función del número de rectángulos que ella avizora que existen (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*), sobre la superficie sombreada, los resultados a los que arriban sus compañeras.

En otra instancia de la misma actividad y de otra actividad (SC8), las intervenciones intencional por parte de la maestra y no intencional por parte de Mirta, pero siempre efectivo para Cecilia, producen un folding back en su proceso de comprensión que la lleva a retroceder en dicho proceso, en una instancia a representar mentalmente la composición de las distintas figuras propuestas (ind.1.4 en Producción- Posesión de una imagen) o bien a dividir y pavimentar la superficie a medir (ind 4.1 en *Producción de una imagen*) y avanzar en dicho proceso al considerar nuevamente la distintas unidades de medida solicitadas (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*).

En otra (SC13), para calcular la cantidad de espacio que ocupa su mano la niña dibuja la misma sobre papel cuadriculado, considera el cuadradito como unidad conveniente que le permite estimar el resultado, según observamos en su producción escrita:



Sin embargo, en los cuestionarios finales, concretamente en una de las actividades (MPC4), se le solicita que averigüe si es suficiente una cantidad de baldosas para embaldosar el patio de la escuela y Cecilia no selecciona la baldosa como unidad conveniente para calcular el área.

Estas consideraciones nos permiten manifestar que Cecilia sólo algunas veces logra seleccionar una unidad adecuada.

Indicador 4.3. Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada (en Percepción de propiedades). La niña durante el desarrollo de la secuencia, distingue que el resultado, por ejemplo del área, depende de la unidad seleccionada. Durante el desarrollo de una actividad (SC9), el diálogo que se produce con sus compañeras y la maestra cuando tienen que calcular el área de una figura utilizando distintas figuras como unidad de medida da muestra de ello. Concretamente, en la tabla de dialogo (SC9 (5,42)), cuando las niñas resuelven una actividad, observamos que Cecilia no comprende lo solicitado: Su compañera Patricia le muestra cómo debe proceder, pero Cecilia niega lo que le expresa su compañera. Recién cuando la maestra cuestiona a su

compañera Mirta sobre lo que ha expresado y la niña reconoce su equivocación, Cecilia reacciona y juntas, de manera colaborativa, pueden expresar los resultados en función de las unidades solicitadas y, ante la solicitud de la maestra, todos los niños, y en particular Cecilia, responden “*tengo que saber la unidad con que mido*” (SC9 en línea 104). Además, esta noción perdura en el tiempo, pues en los cuestionarios finales, cuando en una de las actividades (MPC3) se le solicita identificar la figura de menor área, la niña calcula el área de cada una de ellas y utiliza para ello, la misma unidad de medida.

Indicador 4.4 Advierte la necesidad de unidades convencionales (en Percepción de propiedades). En el cuestionario inicial, Cecilia cubre un rectángulo con el cuadrado según lo indica la actividad (IAC2). Durante el desarrollo de la secuencia, en una actividad (SC9), la niña calcula el área según distintas unidades de medida y advierte la importancia de considerar unidades convencionales a la hora de pretender establecer relaciones entre ellos. Asimismo cuando en una actividad (SC13) que se le solicita calcule el área de su mano, Cecilia dibuja su palma sobre una hoja cuadriculada y considera el cuadradito de la misma, como unidad de medida. Este aspecto nos permite anticipar que la niña ya advierte la necesidad de considerar una unidad convencional.

Indicador 4.5 Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud (en Formalización). Los procedimientos implementados por Cecilia en las actividades que componen la secuencia nos permiten manifestar que la niña no distingue la relación inversamente proporcional entre el tamaño de la unidad de medida y su influencia en la medida de esta magnitud.

En síntesis, respecto al *nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento*, Cecilia realiza cubrimientos para medir superficies (ind 4.1), distingue que el número al que arriba depende del tamaño de la unidad seleccionada (ind 4.3), pero no establece relación entre ambas (ind 4.5). Advierte la necesidad de unidades convencionales (ind 4.4), aunque solo algunas veces selecciona una unidad adecuada (ind 4.2) pues que este aspecto no perdura con el tiempo.

Cecilia en varias oportunidades se involucra en el proceso de folding back promovido por sus compañeras, fundamentalmente Patricia y Mirta, algunos de ellos de manera intencional y otros no. En cambio otros, fueron inducidos intencionalmente por la maestra, pero todos ellos, efectivos para superar otros indicadores. En alguna de las actividades se acude a pavimentar la superficie y medir (ind 4.1) como indicador impulsor que me permite acceder a otros indicadores asociados a una capa exterior o a un mismo anillo. Con respecto al logro de seleccionar una unidad adecuada (ind 4.2), en dos oportunidades, debió retroceder en su proceso de comprensión, a indicadores ubicados en una capa interior, por ejemplo a pavimentar la superficie y medir (ind 4.1) o a representar mentalmente la composición de figuras (ind 1.4).

Aspectos que nos llevan a manifestar que *Cecilia percibe la noción de área como medida descubrimiento, reconoce que dicho resultado depende del tamaño de la unidad y advierte la necesidad de considerar unidades convencionales, pero denota limitaciones a la hora de elegir la unidad adecuada y/o pretender establecer relaciones entre distintas unidades.*

5.-Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulos como camino más económico.

Indicador 5.1 Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo (en Producción de una imagen). En principio, e los cuestionarios iniciales, Cecilia asocia el cubrimiento rectangular con la multiplicación pero el desarrollo de las distintas actividades que componen la secuencia y los cuestionarios finales, en la cual uno de los posibles procedimientos guarda relación con este indicador, no es utilizado por la niña para arribar al resultado, pero cuando explícitamente se lo requiere la niña lo realiza.

5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras (en Percepción de propiedades). En principio, en el cuestionario inicial Cecilia considera las dimensiones lineales de una figura rectangular para calcular su área, sin embargo en la resolución de las actividades de las secuencia Cecilia acude a otros procedimientos para calcular el área. No obstante en la resolución de las actividades de los cuestionarios finales, la niña acude a las fórmulas – a través de las dimensiones lineales cuando la superficie es un rectángulo, cuadrado o

triángulo- para calcular el área como método económico para medir. Es decir que este procedimiento cobra sentido para la niña.

En síntesis podemos manifestar que Cecilia cuando explícitamente se lo solicita, asocia la cuadrícula con el campo multiplicativo y con el propósito de utilizar las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulo como camino más económico para hallar el área, acude a sus dimensiones lineales,

6.-Significatividad y funcionalidad del concepto

Efectuamos una mirada global acerca del proceso de construcción del concepto de área analizado y los mismos nos llevan a manifestar que Cecilia, sostiene algunos aspectos del concepto a través del tiempo, según hemos explicitado al referimos a cada uno de los distintos indicadores. Por ejemplo, en la resolución de las últimas actividades de la secuencia no se observan avances significativos respecto a la construcción del concepto, no obstante podemos manifestar que ha sostenido durante todo el proceso la implementación de métodos directos e indirectos para comparar y conservar el área, el cálculo de figuras particulares –cuadrado, rectángulo y triángulo- a través de sus dimensiones lineales y la dependencia entre la unidad de medida y su medida.

Asimismo parece que Cecilia cuando se dispone a resolver las actividades propuestas de los distintos cuestionarios, en las cuales dicha noción cobra sentido, es capaz de utilizar el concepto de área en contextos de la realidad, a pesar de la ausencia de justificación que observamos en los procedimientos implementados. No obstante la resolución que ofrece, da cuenta que abstrae la noción de área como cualidad común que tienen las figuras cuando intentamos medir su superficie.

A continuación nos vamos a centrar en el cómo de este proceso, y para ello nos centramos en dos mecanismos que los han promovido, el folding back y las interacciones. Ambos producidos a través del diálogo con sus compañeras y la maestra, los cuales nos permiten describir cómo se desarrolla el proceso de comprensión individual del concepto de área en Cecilia.

4.2.7.2.- EL PAPEL DEL FOLDING BACK EN EL PROCESO DE CRECIMIENTO DE COMPRENSIÓN DE CECICLIA.

A efectos de explicar cómo evoluciona la comprensión del concepto de área, observamos la trayectoria - dibujada en el gráfico de comprensión – que describe dicho proceso en cada una de las actividades de la secuencia, resueltas por la niña. Nuestro foco es el movimiento hacia delante y hacia atrás por las distintas capas de comprensión, fundamentalmente en aquellas actividades que presentaron un desafío para la niña. En estos casos la niña revisa y/o resignifica los conocimientos e ideas existentes acerca del concepto a construir, aspecto que detectamos en el gráfico, por el retroceso a un indicador asociado a una capa más interna o a otro indicador de la misma capa. Lo anterior nos permite detectar cómo dicho proceso sirve a la niña de sustento para avanzar y comprender indicadores ubicados en capas más externas.

En función de ello, observamos los folding back que se produjeron entre algunos de los indicadores durante el proceso y detectamos que en su gran mayoría fueron inducidos de manera intencional y efectiva, por la maestra y promovidos por sus compañeras, Patricia y Mirta de manera no intencional y que adjuntamos en el Anexo XX.

Los indicadores involucrados en el proceso de folding back están asociados al anillo, *Producción y Posesión de una imagen* y a las capas *Producción de una imagen* y *Percepción de propiedades*. El retroceso, al anillo *Producción y Posesión de una imagen* y a la capa *Producción de una imagen*, en su mayoría se produce, para distinguir la representación mental de la composición de figuras simples en una compleja, componer figuras apareando las mismas por sus lados, y, en menor medida, cubrir la superficie y contar el número de unidades o comparar superficies por composición y descomposición.

La resignificación de estas nociones, facilita el avance con una mayor comprensión, esto es, cuando la niña se queda atascada, la participación de la maestra o de una compañera le permite reconocer dónde está su error o adoptar un nuevo procedimiento que le permite avanzar en la resolución del problema y seguir adelante en el proceso de construcción del concepto.

Para ampliar esta información, nos focalizamos en los procesos de folding back operados en la niña y que favorecieron la comprensión del concepto, explicitando en detalle cada uno de ellos:

-Cecilia reconoce que si una figura se descompone y/o recompone con otra forma, su área no varía, pero al momento de identificar más de dos superficies que satisfagan esas condiciones, se ve obligada a retroceder en su proceso de comprensión, comparar cada una de las superficies a través de la composición y descomposición entre ellas (ind 2.4) y recién allí, avanzar e identificar más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área (ind 2.10)

-También reconoce que si una figura se descompone y/o recompone con otra forma, su área no varía pero al pretender comparar distintas figuras se ve obligada a retroceder en su proceso de comprensión a representar mentalmente la composición de figuras (ind 1.4) y avanza en dicho proceso a comparar superficies utilizando una unidad conveniente para medir. (ind 2.5)

-Si bien ordena figuras equivalentes según el perímetro, se ve obligada a retroceder a una capa interior en su proceso de comprensión, a aparear las figuras por sus lados (ind 1.2). en vista a avanzar y reconocer que a mayor/igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/igual/ menor perímetro de la misma (ind 3.2).

-Cecilia representa mentalmente la composición de figuras pero al pretender compararlas, se ve obligada a retroceder en su proceso de comprensión, dividir y pavimentar la superficie a medir (ind 4.1) para lograr avanzar con una mayor comprensión a y comparar superficies en la medición y utilización de una unidad conveniente.(ind 2.5)

-Del análisis de la relación entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud, se ve obligada y al retroceder en su proceso de comprensión nuevamente a aparear las figuras por sus lados (ind 1.2) para avanzar con una mayor comprensión a utilizar las mismas piezas en distinta forma (ind 2.3)

-Se bien elige una unidad adecuada, se ve obligada en un momento a retroceder en su proceso de comprensión, representar mentalmente distintas

figuras de otra compleja(ind 1.4), para avanzar a posterior con una mayor comprensión a de la elección de una unidad adecuada (ind 4.2). En otro momento retrocede a dividir y pavimentar la superficie a medir y contar el número de unidades empleado (ind 4.1) para avanzar en el proceso de comprensión y lograr seleccionar una unidad conveniente (ind 4.2)

-Advierte la necesidad de unidades convencionales, pero se ve obligada a retroceder en su proceso de comprensión, a representar mentalmente la composición de distintas figuras(ind 1.4) en vista a avanzar en dicho proceso y lograr utilizar las mismas piezas en distinta forma (ind 2.3)

Hemos analizado el logro de cada uno de los indicadores relacionados con la categorías asociadas a la noción de área y podemos observar que algunos de los indicadores relacionados con *la percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos* y con *la conceptualización del área como medida de cubrimiento* la niña lo ha logrado a través del folding back como proceso dinámico del crecimiento de su comprensión.

4.2.7.3.- EL PAPEL DE LAS INTERACCIONES EN EL PROCESO DE CRECIMIENTO DE COMPRENSIÓN DE CECILIA

Completamos el análisis refiriéndonos a cómo Cecilia atribuye significado al concepto durante las interacciones producidas con sus compañeras y con la maestra. Por ello, desde el enfoque dialógico, consideramos lo expresado en el capítulo anterior (apartado 3.3.2.) e intentamos comprender las acciones de la niña, el diálogo y el tipo de interacciones que se opera con las niñas y/o con la maestra en un contexto particular del aula, y la resolución de problemas como instrumento metodológico para construir conceptos.

Durante el desarrollo de la secuencia, los niños comenzaron a resolver los problemas de manera individual, pero durante su desarrollo percibieron su complejidad y empezaron a compartir sus ideas.

Cecilia relaciona la información que brinda el enunciado del problema con los conceptos matemáticos disponibles, y arriba a respuestas, aunque en algunos

casos, incompletas, pues no avizora la información de los subproblemas que resultan del enunciado. El diálogo con sus compañeros y con la maestra la lleva a explorar, cambiar de idea, y reflexionar sobre distintas posibilidades. En general, Cecilia no justifica sus procedimientos, pero cuando cuenta con conocimientos, puede responsabilizarse matemáticamente de los resultados a los que arriba, más allá de la veracidad del resultado.

Las interacciones de Cecilia con sus compañeras Patricia y Mirta fueron significativas. Cecilia y sus compañeras, le reconocen a Patricia autoridad matemática y social, en cambio Cecilia no goza de un ascendiente importante en el grupo, ni un reconocimiento por sus saberes matemáticos o al menos por sentimientos afectivos que impulsen a sus compañeras a considerar sus propuestas. No obstante, la niña se compromete con las actividades a resolver, intercambia su procedimientos y sus ideas, al mismo tiempo que cuestiona y/o formula desafíos a las explicaciones de sus compañeras, atiende y se adapta a lo realizado por ellas, es decir, la interacción que opera con sus compañeras son de tipo multivocal.

La colaboración entre las niñas es principalmente indirecta, pues las intervenciones de cada una de ellas son insumos en el proceso de construcción que se opera en cada una de ellas. Al explicitar cada una de las niñas sus ideas en voz alta, aprovechan los comentarios efectuados por la otra.

Por eso, fundamentalmente durante la resolución de las actividades, observamos interacciones de tipo multivocal y colaboración indirecta de Cecilia con Mirta y Patricia.

4.1.- EL CASO DE MIRTA

INDICE	Nº de página
4.3.1.- Análisis de las actividades del cuestionario acerca de sus conocimientos matemáticos primitivos.....	631
4.3.2.- Análisis de las actividades del cuestionario sobre sus ideas previas acerca del concepto de área.....	641
<i>Actividad IAM1</i>	641
<i>Actividad IAM2</i>	643
<i>Actividad IAM3</i>	645
<i>Actividad IAM4</i>	647
<i>Actividad IAM5</i>	648
<i>Actividad IAM6</i>	648
<i>Actividad IAM7</i>	649
<i>Actividad IAM8</i>	651
4.3.2.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Mirta.....	651
4.3.3.-Análisis de las actividades resueltas en la secuencia de aprendizaje.....	654
<i>Actividad SM1</i>	655
<i>Actividad SM2</i>	657
<i>Actividad SM3</i>	662
<i>Actividad SM4</i>	668
<i>Actividad SM5</i>	668
<i>Actividad SM6</i>	669
<i>Actividad SM7</i>	675
<i>Actividad SM8</i>	675
<i>Actividad SM9</i>	694
<i>Actividad SM10</i>	701
<i>Actividad SM11</i>	707
<i>Actividad SM12</i>	714
<i>Actividad SM13</i>	721

	Nº de página
4.3.3.1.- Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Mirta.....	723
4.3.4.-Análisis de las actividades del cuestionario al finalizar la secuencia de aprendizaje.....	729
<i>Actividad EM1</i>	729
<i>Actividad EM2</i>	730
<i>Actividad EM3</i>	731
<i>Actividad EM4</i>	734
<i>Actividad EM5</i>	736
4.3.4.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Mirta.....	738
4.3.5.-Análisis de las actividades del cuestionario a medio plazo	741
<i>Actividad MPM1</i>	742
<i>Actividad MPM2</i>	743
<i>Actividad MPM3</i>	745
<i>Actividad MPM4</i>	747
4.3.5.1.-Relación entre los gráficos de comprensión deseable y el de Mirta.....	750
4.3.6 .-Tendencias de las categorías detectadas en relación con la construcción del concepto de área en Mirta.....	753
4.3.7.-Análisis global del proceso de construcción del concepto de área en Mirta.....	760
..... 4.3.7.1.-El crecimiento de comprensión de las categorías involucradas en el concepto	760
4.3.7.2.-El papel del folding back en el proceso de crecimiento de comprensión de Mirta.	778
4.3.7.3.-El papel de las interacciones en el proceso de crecimiento de comprensión de Mirta.....	780

4.3.-EL CASO DE MIRTA

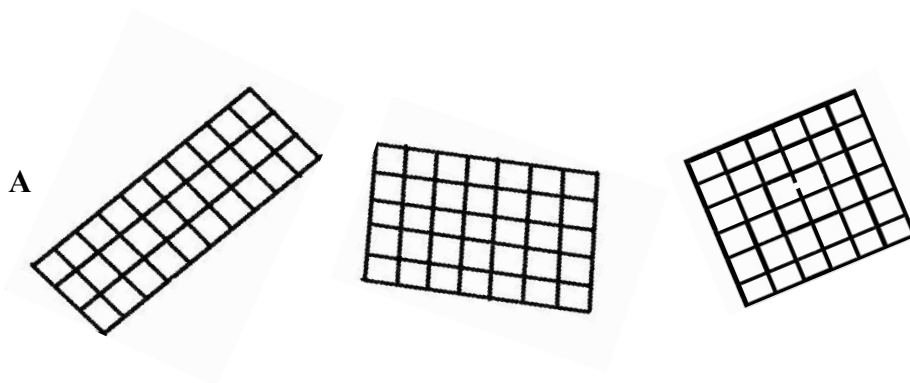
4.3.1.- ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS PREVIOS (CMM)

Consideramos ahora cómo ha sido el proceso de construcción del concepto de área (foco de este trabajo) en Mirta. Para ello, comenzamos y analizamos los cuestionarios referidos a sus conocimientos matemáticos previos, ya explicitados en el apartado 3.5.1.1. y resuelto por la niña, según se adjunta en el Anexo XXI.

Trascribimos, a continuación, el enunciado de cada actividad, describimos el desarrollo propuesto por Mirta y mostramos su producción escrita. Especialmente analizamos lo realizado por la niña, en base a los contenidos matemáticos que estimamos y que se relacionan con el concepto que nos ocupa en este trabajo.

Actividad 1: (CMM1)

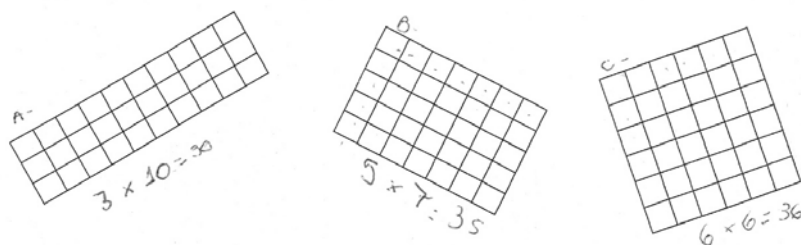
Cada uno de ustedes recibirá distintas cuadrículas. ¿Pueden enviarme, a través de un cálculo, que indique cuáles son las cuadrículas recibidas?



Descripción de la producción escrita

Mirta coloca en cada una de las cuadrículas, un cálculo de multiplicación en la cual los factores son por ejemplo, la cantidad de filas y la cantidad de cuadrados por filas (que coincide con la cantidad de columnas) y el producto indica la cantidad total de cuadraditos de la cuadrícula. Así el mensaje que transmite es: $3 \times 10 = 30$; $5 \times 7 = 35$ y $6 \times 6 = 36$, respectivamente para cada uno de ellos.

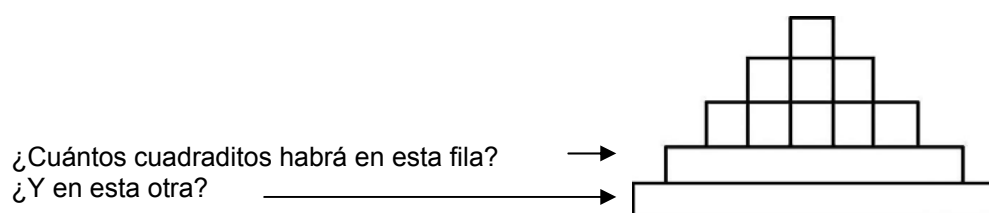
1.- Cada uno de ustedes recibirá distintas cuadrículas. ¿Pueden enviarme un mensaje, a través de un cálculo, que indique cuáles son las cuadrículas recibidas?



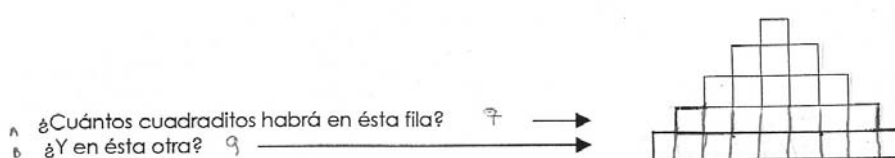
B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 1

Mirta cuenta con una estrategia que le permite calcular la cantidad de cuadraditos, no apela al conteo de los mismos sino que reconoce la multiplicación como operación adecuada. Es decir, puede anticipar la cantidad de cuadraditos que existen en distintas cuadrículas a través del producto de dos números que coinciden respectivamente con el número de filas o columnas y la cantidad de cuadraditos que hay en cada una de ellas.

Por lo tanto, asocia cada cuadrícula con la estructura multiplicativa como herramienta que resuelve el conteo de un recubrimiento rectangular homogéneo.

Actividad 2:(CMM2)**A.-Descripción de la producción escrita**

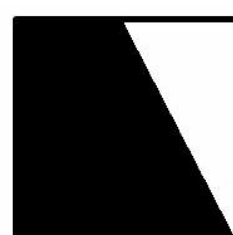
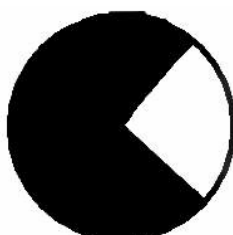
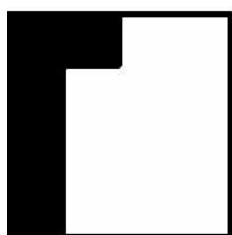
Mirta cubre cada una de las filas con cuadraditos como los dibujados, para ello prolonga los segmentos y le asigna a una fila el numero 7 y a la otra le asigna el numero 9.

**B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 2**

Mirta para averiguar el numero de cuadrados que hay en las filas cubre cada fila ubicando un cuadradito al lado de otro no dejando espacio libres. Así observamos que acude a un proceso empírico y no podemos inferir que distinga la regularidad entre las filas.

Actividad 3: (CMM3)

Cada figura tiene una parte pintada de negro. Indicala mediante una fracción.



A.-Descripción de la producción escrita

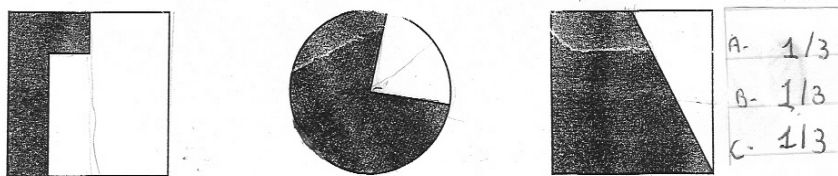
Mirta en la primera figura prolonga uno de los lados de la parte pintada de negro determinando dos rectángulos congruentes y en la figura central traza una línea en el sector sin pintar de manea que quedan dos sectores congruentes.

Al costado les asigna a cada una de ellas $1/3$ pues escribe:

“A.- $1/3$; B.- $1/3$; C.- $1/3$ ”,

es decir asigna a cada figura una letra pero no especifica a cual de ellas se refiere

3.-Cada figura tiene una parte pintada de negro, Indicála mediante una fracción.



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 3

Si bien no explicito a cual figura se refiere, la fracción es la misma, podemos manifestar que Mirta no responde correctamente ninguna de las partes pintadas de negro. Por los tanto podemos manifestar que la niña no establece relaciones entre las partes en que puede subdividir un entero y dicha parte, ni identifica fracciones desde una representación geométrica a otra numérica.

Actividad 4: (CMM4)

¿Cuántos rectángulos podes construir con 12 cuadrados?.En caso de existir más de uno, señala la longitud de sus lados. Fundamenta para ello, tu respuesta.

A.-Descripción de la producción escrita

Mirta dibuja un rectángulo y traza una recta -la base media- que lo

subdivide en dos partes congruentes, en una de las partes esboza líneas de manera que quedan rectángulos no congruentes.

4-¿Cuántos rectángulos podés construir con 12 cuadrados? En caso de existir más de uno, señalá la longitud de sus lados. Fundamenta para ello, tu respuesta



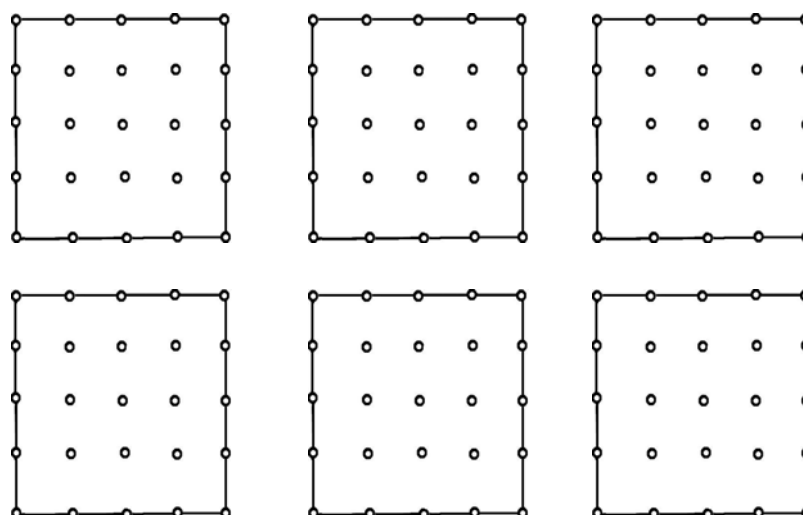
1

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 4

Mirta no responde, ni siquiera ha podido efectuar un dibujo con los 12 cuadrados solicitados.

Actividad 5: (CMM5)

Pinta de rojo y verde, como más te guste, el siguiente cuadrado. Debe resultar la misma cantidad de cada uno de los colores.

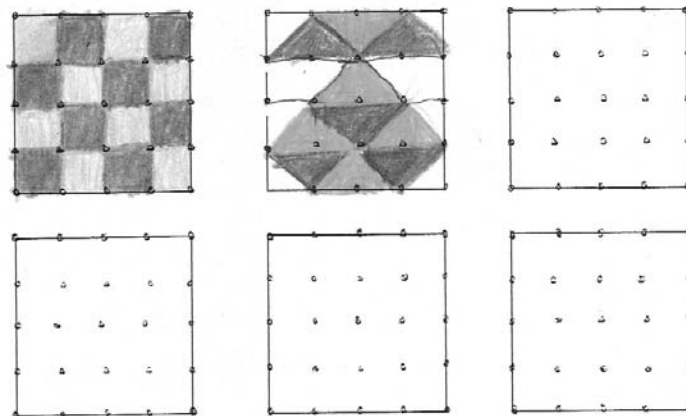


A.-Descripción de la producción escrita

Pinta solo dos cuadros, un cuadro con cuadrados rojo y verde de manera alternada. En el otro considera las cuatro hileras, en tres de ellas dibuja tres triángulos de base 2 y altura 1 –longitud entre dos puntos- en la otra hilera dibuja

sólo un triángulo. En total dibuja 10 triángulos pintados, 5 de ellos de rojo y 5 de verde.

5.-Pintá de rojo y verde, como más te guste, los siguientes cuadrados. Debe resultar, en cada uno de ellos, la misma cantidad de cada uno de los colores



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 5

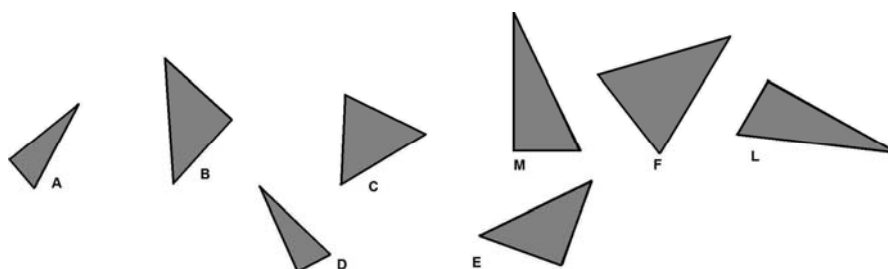
Mirta sólo realiza el dibujo solicitado en un cuadrado, pues en el otro, si bien ha pintado la misma cantidad de rojo que de verde, quedan espacios sin pintar.

Podríamos pensar que Mirta ha tratado de dibujar tres triángulos en cada una de las hileras, pero no ha podido completar la hilera pues no pudo dibujar los triángulos consecutivos, de distinto color.

No ha podido proponer otras posibilidades que ofrecen la consigna y el dibujo.

Actividad 6: (CMM6)

Imagina que cuentas con varios triángulos de cada uno de los modelos presentados



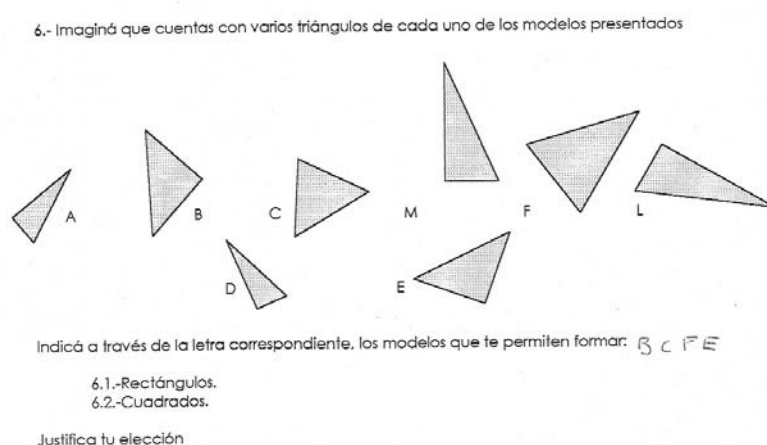
Indica a través de la letra correspondiente,

- *Los triángulos con los cuales puedes formar rectángulos.*
- *Los triángulos con los cuales puedes formar cuadrados.*

Fundamenta tu elección.

Mirta sólo indica “B C F E”

A.-Descripción de la producción escrita



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 6

En las figuras que expresa no explicita con cuáles puede formar cuadrados y con cuáles rectángulos, de manera que no podemos inferir que Mirta haya realizado una selección adecuada pues si bien con las figuras B y E puede armar un cuadrado, con C y F no puede formar ni cuadrados ni rectángulos. En función de ello, manifestamos que Mirta no puede seleccionar las piezas adecuadas, sin efectuar ensayos manipulativos

Actividad 7: (CMM7)

Luís pasea los domingos y suele visitar librerías buscando precios baratos. Así visitó la librería “Rayuela” y encontró la siguiente propuesta. ¿Es una oferta la que ofrece? ¿Por qué? Justifica tus argumentaciones.



A.-Descripción de la producción escrita

Patricia expresa $1 \longrightarrow \$3$; $10 \longrightarrow \$30$; $30 \longrightarrow \$80$. Entonces expresa "Y todos los precios multiplicados dan eso"

7. Luis pasea los domingos y suele visitar librerías buscando precios baratos. Así visitó la librería "Rayuela" y encontró la siguiente propuesta. ¿Es una oferta la que ofrece? ¿Por qué? Justificá tus argumentaciones.

1 — 3 \$
10 — 30 \$
30 — 80 \$

Y TODOS LOS PRECIOS
MULTIPLICADOS DAN ESO.



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 7

Mirta transcribe los datos que figuran en la mesa de saldos, de su respuesta se percibe que ella reconoce la constante -3- que permite anticipar el precio de un libro y de 10 libros, pero no así el precio de 30 libros. Tampoco responde acerca que la propuesta que ofrece sea una oferta, no obstante su respuesta da cuenta que emplea parcialmente, propiedades de la proporcionalidad.

Actividad 8:(CMM8)

Aproxima cada peso a la centena y calcula.

- ✓ ¿Cuánto pesan aproximadamente, las naranjas? ¿Y las bananas?
- ✓ ¿Cuánto más pesan las manzanas que los duraznos?

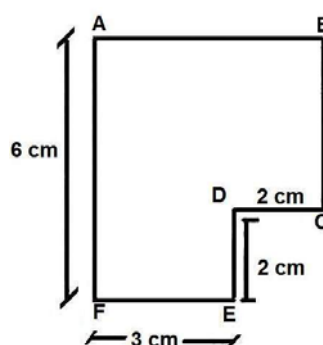


B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 8

Mirta no responde, en consecuencia carecemos de información respecto a que la niña reconozca la posición de las cifras dentro del número como indicador de su valor e implemente estrategias de estimación relacionadas con la medida, por ejemplo el “valor relacionado respecto de”, la noción de valor por truncamiento, por ejemplo, a la centena .

Actividad 9: (CMM9)

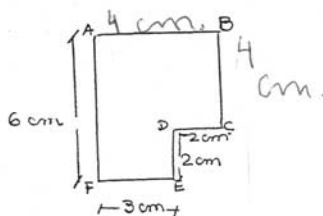
Calcula, sin medir con la regla, la longitud de los restantes lados de la figura. Fundamenta tu respuesta.



A.-Descripción de la producción escrita

Mirta en la gráfica asigna al lado AB: 4cm y el lado BC; 4 cm.

9 - Calculá, sin medir con la regla, la longitud de los restantes lados de la figura. Fundamenta tu respuesta



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 9

Ante la ausencia de justificación podemos pensar que le asigna a la longitud del lado BC; 4 cm. pues efectúa la diferencia entre las longitudes de los

lados AF y DE respectivamente, pero en cambio con la longitud del lado AB en lugar de obtener por composición entre las longitudes de FE y DC respectivamente, pareciera que desde la percepción visual le asigna la misma longitud que la asignada a BC.

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PRIMITIVO DE MIRTA

Las consideraciones que surgen del análisis realizado a través de la toma de este cuestionario y que explicitamos a continuación muestran las nociones matemáticas necesarias para abordar el concepto de área y constituyen el *conocimiento matemático primitivo de Mirta*

- ✓ Identifica el modelo rectangular como herramienta que resuelve situaciones de conteo por cubrimiento, a través del campo multiplicativo. (CMM1)
- ✓ No percibe la relación entre la porción de superficie en que puede subdividir el entero y dicha totalidad (CMM3)
- ✓ Realiza repartos equitativos, aunque no puede proponer todas las posibilidades (CMM5)
- ✓ No reconoce elementos y propiedades de las figuras, para poder establecer afirmaciones sobre los objetos sin necesidad de apelar a constataciones empíricas (CMM6)
- ✓ Emplea propiedades de la proporcionalidad sólo parcialmente (CMM7)
- ✓ Carecemos de información que nos permitan observar conocimientos respecto a la posición de las cifras dentro del número como indicador de su valor, estrategias de estimación y cálculo mental (CMM8)
- ✓ En el campo aditivo puede averiguar parcialmente, datos por complemento (CMM9).

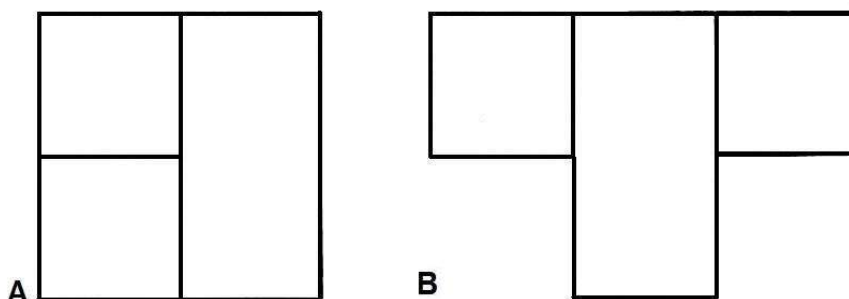
4.3.2.- ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO DE IDEAS PREVIAS ACERCA DEL CONCEPTO DE ÁREA (IAM)

Continuamos con los enunciados de los cuestionarios explicitados en el apartado 3.5.1.2, transcribimos el enunciado de cada actividad, describimos el desarrollo propuesto por Mirta y mostramos su producción escrita; según el cuestionario resuelto por la niña que adjuntamos en el Anexo XXII.

A continuación analizamos lo realizado por la niña, en vista a detectar las ideas previas que posee acerca del concepto de área desde un tratamiento geométrico y numérico del mismo.

Actividad 1:(IAM1)

Con las piezas de la figura A se ha formado la figura B. Si tuvieras que pintar ambas figuras. ¿Utilizas diferente cantidad de pintura para cada una de ellas?



Fundamenta tu respuesta.

A.-Descripción de la producción escrita

Mirta responde “No, porque sólo cambiaron de lado pero es igual”

1- No, porque solo cambiaron de lado pero es igual

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 1

La respuesta es correcta. Podemos inferir, desde una representación geométrica, que realiza la conservación de la magnitud por la transformación de romper y rehacer (ind 2.4 en *Producción-Posesión de una imagen*), ya que descompone una superficie en partes y las reorganiza obteniendo la otra,(ind 2.3 en *Producción – Posesión de una imagen*) de diferente forma pero de igual área.(ind 2.7 en *Percepción de propiedades*)

En relación con el nivel de comprensión que logra Mirta respecto de las capas y/o anillos, conviene recordar que la demanda de este problema se sitúa con un indicador en *Producción de imagen*, con tres indicadores en el anillo *Producción - -Posesión de una imagen – Capa B y Capa C –* y con un indicador a *Percepción de propiedades – Capa D –*La respuesta de Mirta nos permite manifestar que accede a dos, de los tres indicadores correspondientes al anillo *Producción - Posesión de una imagen –capa B y Capa C-* y al indicador correspondiente a *Percepción de propiedades – Capa D -*.

Es decir reconoce la invariancia de la magnitud– área- independientemente de la forma a través de la descomposición y composición en otra de distinta forma.

Con respecto a comparar superficies por percepción visual (ind 2.1 en *Producción de una imagen*) o utilizar otra figura como unidad de medida para medir (2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*) carecemos de información pues la niña utilice otro método para comparar.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ♦ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
 B.-Producción de una imagen
 C.- Posesión de una imagen
 D.- Percepción de Propiedades
 E.- Formalización

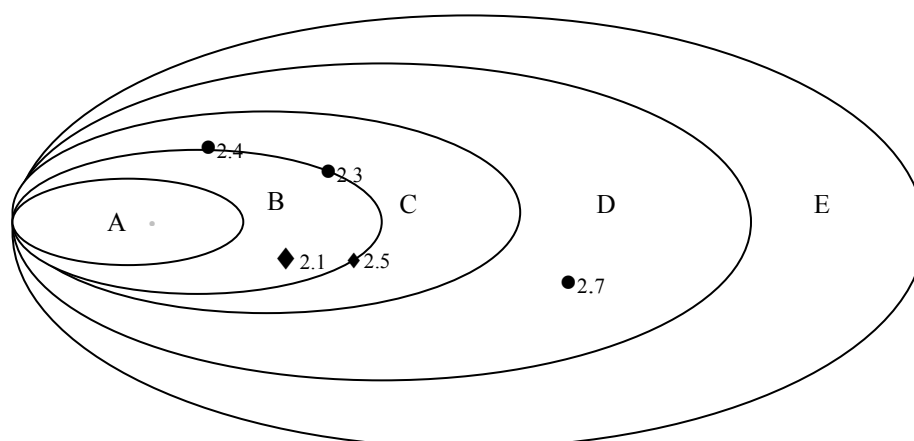
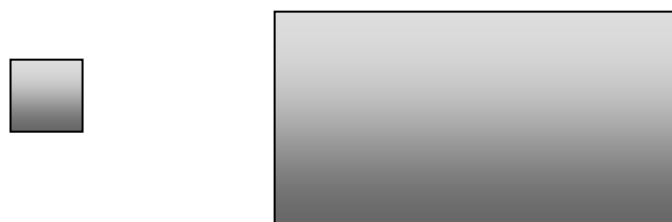


Gráfico de Comprensión -IA- de Mirta asociado a la act.1

- 2.1.-Compara superficies por percepción visual
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficie midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.

Actividad 2: (IAM2)

¿Cuántos cuadrados como el de la izquierda caben en el rectángulo de la derecha? ¿Cómo lo calculaste?



A.-Descripción de la producción escrita

Mirta considera el cuadrado de la izquierda y señala a través de marcas, todos sus lados. El rectángulo los cuadricula con cuadrados iguales al de la izquierda. Numera cada uno de ellos de manera consecutiva hasta 18.

Responde a las preguntas solicitadas así: con respecto a la cantidad de cuadrados que caben en el rectángulo, responde “12” y respecto a cómo lo calculo, responde “el diámetro”

2.- ¿Cuántos cuadrados como el de la izquierda caben en el rectángulo de la derecha? 12.
 ¿Cómo lo calculaste? con el diámetro



1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 2

Mirta respecto a la primera pregunta responde 12, pero el dibujo podemos manifestar que desde constataciones empíricas y un enfoque cuantitativo, cuenta 18. Este número surge de averiguar cuántas veces el cuadrado, como unidad de medida no convencional, está contenido en el rectángulo, a partir de pavimentados o recubrimiento (ind 4.1 en *Producción de una imagen*).

Es decir, el procedimiento empleado por la niña no nos brinda información acerca de implementar la multiplicación como una forma adecuada y eficiente para contar, (ind 5.1 en *Producción de una imagen*) aspecto crucial para concebir la medida de área como un producto de longitudes (ind.5.2 en *Percepción de propiedades*). Con respecto a cómo arribó a ese resultado, la respuesta que propone “el diámetro” no comprendemos a que se refiere.

En relación con el nivel de comprensión que logra Mirta, la demanda de este problema se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- y con un indicador en *Percepción de propiedades*- Capa D-, y *Formalizar* – Capa E-. Mirta solamente accedió al indicador correspondientes a la *Producción de una imagen*- capa B- pues cubre y /o pavimenta el cuadrado y cuenta para responder cuantos cuadrados necesita para cubrirlo, aunque propone una cantidad errónea. No contamos con información respecto de los otros indicadores

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- A.-Conocimiento primitivo
- B.-Producción de una imagen
- C.- Posesión de una imagen
- D.- Percepción de Propiedades
- E.- Formalización

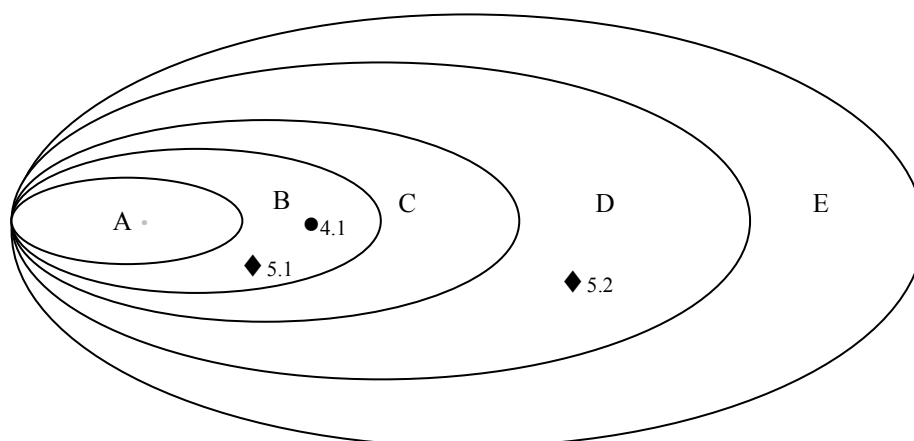


Gráfico de Comprensión -IA-de Mirta asociado a la act.2

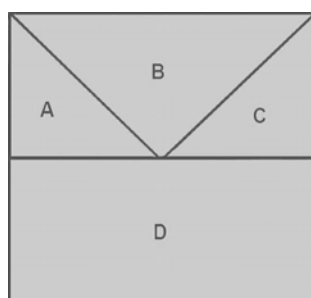
4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado

5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.

5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras

Actividad 3: (IAM3)

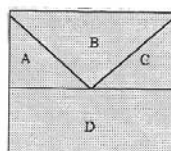
A Lucia le han regalado un rompecabezas cuyas piezas tienen la forma que indica el dibujo. ¿Qué parte del rompecabezas representa cada pieza?



A.-Descripción de la producción escrita

Mirta responde “Representa todo el rompecabezas y tienen 4 piezas A, B, C y D”.

3.- A Lucia le han regalado un rompecabezas cuyas piezas tienen la forma que indica el dibujo. ¿Qué parte del rompecabezas representa cada pieza?



representa
Todo el rompecabezas y tiene
4 piezas
A B C D

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 3

En cuanto a la relación de cada figura con respecto a la figura total, podemos pensar que Mirta no ha comprendido lo que se le solicita, pues se ha referido a que el rompecabezas esta formado por las cuatro piezas. Si bien admite la construcción del todo como unión de las partes, es decir que el total se conserva aunque sea dividido en partes, no puede establecer que parte es cada pieza respecto del rompecabezas, estimando así mitades, cuartos y tercios según distintas representaciones.(ind 2.11 en *Percepción de Propiedades*)

En relación con el nivel de comprensión que logra Mirta, conviene recordar que la demanda de este problema se sitúa en la capa denominado *Percepción de propiedades* – Capa D – relacionando el área de una parte con respecto al total, pero Mirta no interpreto lo solicitado.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ♦ carencia de información

- | |
|--|
| A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización |
|--|

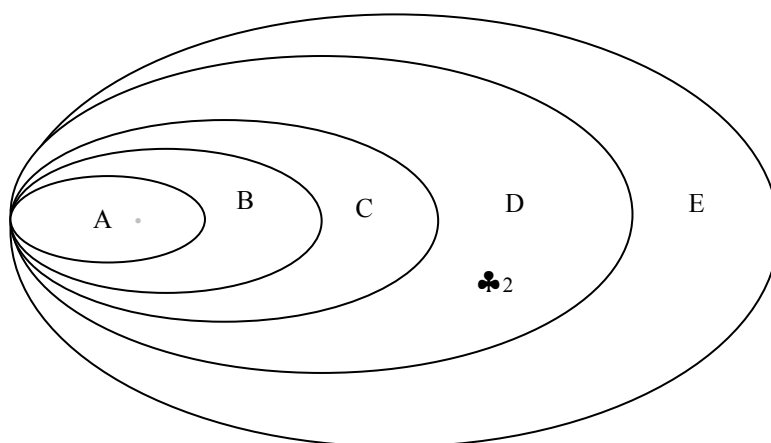


Gráfico de Comprensión -IA- de Mirta asociado a la act.3

- 2.11.- Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones

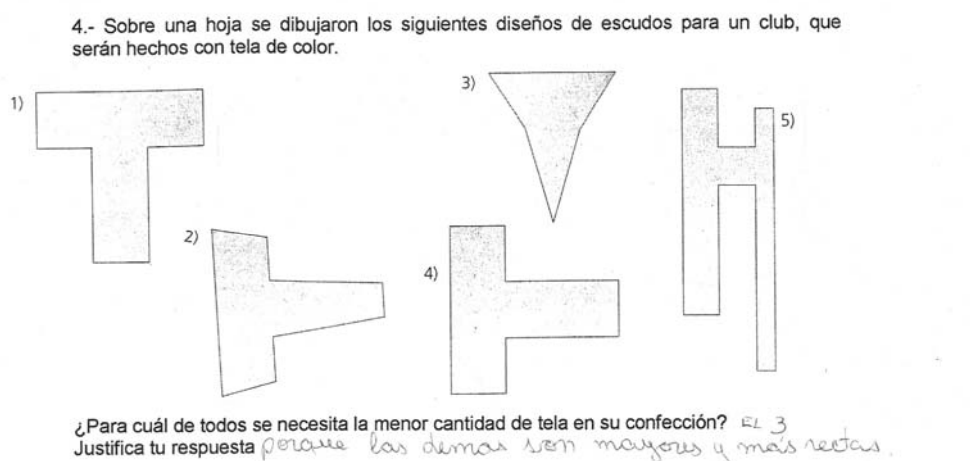
Actividad 4:(IAM4)

Sobre una hoja se dibujaron los siguientes diseños de escudos para un club, que serán hechos en telas de color

¿Para cuál de todos se necesita la menor cantidad de tela en su confección? Justifica tu respuesta

A.-Descripción de la producción escrita

Mirta responde que “El 3 porque las demás son mayores y más rectas”

**B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 4**

Mirta responde correctamente, pero aunque intenta justificar su respuesta, arriba al resultado mediante la observación visual (ind 2.1 en *Producción de una imagen*). Reconocemos que comparar áreas es más complicado que comparar longitudes, debido a las variadas formas que pueden adoptar las figuras equivalentes, pero no se desprende que haya efectuado otro tipo de comparación cuando expresa que “*son mayores y más rectos*”, ni tampoco podemos afirmar que haya aplicado la transitividad en la relación establecida.

Respecto al nivel de comprensión que logra Mirta, conviene recordar que la demanda de este problema se sitúa con dos indicadores en *Producción de una imagen*- capa B- y en el anillo *Producción- Posesión de una imagen* – Capa B y Capa C- y tres indicadores en *Percepción de propiedades*- Capa D-. Mirta solo

compara visualmente, (ind 2.1 en *Producción de una imagen*) es decir que accede solamente a la *Producción de una imagen*- Capa B.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

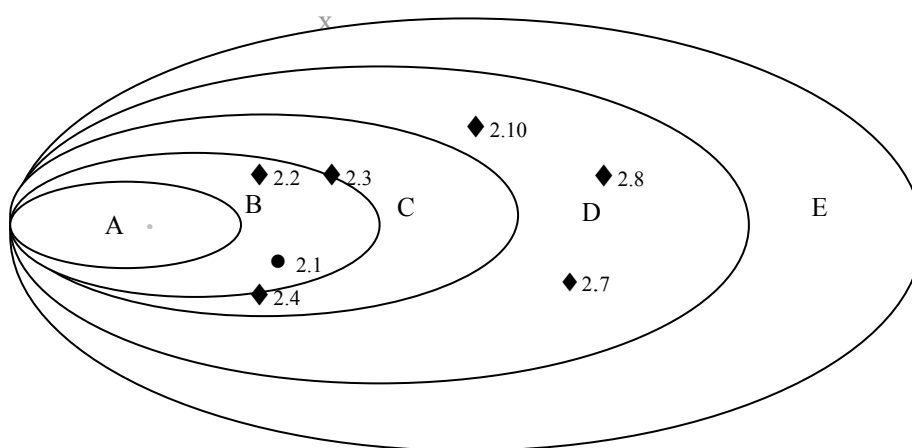


Gráfico de Comprensión -IA-de Mirta asociado a la act.4

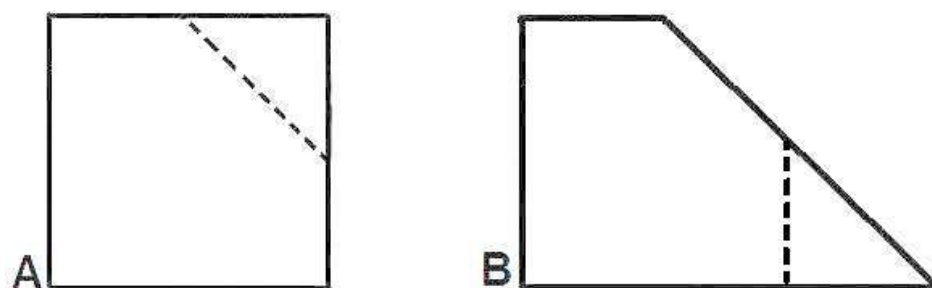
- 2.1.-Compara superficies por percepción visual.
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.

Actividad 5: (IAM5)

No se incluye en el análisis según lo expresado en el apartado 3.5.1.2.-

Actividad 6: (IAM6)

En la figura A se ha recortado por la línea de puntos una de las esquinas, y se ha ubicado como lo indica la figura B.



¿Qué puedes decir de la cantidad de superficie que ocupa cada una de las figuras? Si quisieras bordear una de las figuras con un hilo. ¿Qué puedes decir acerca de la cantidad de hilo necesario para cada una de ellas? Justifica tu respuesta.

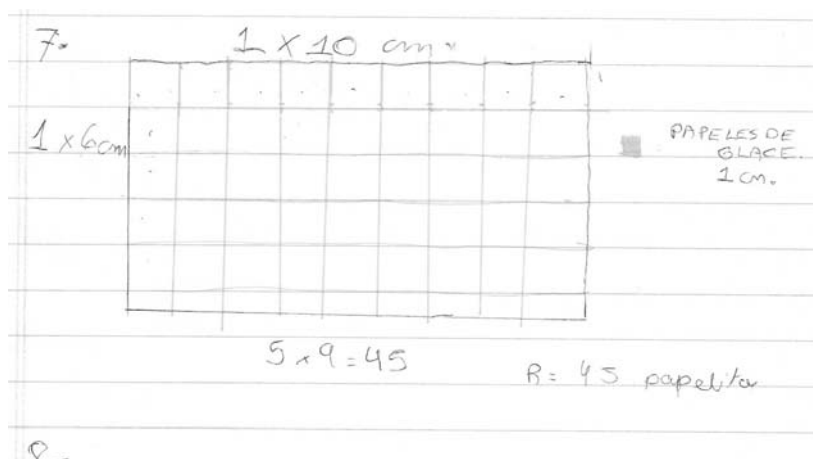
La respuesta de la niña no brinda información para realizar su análisis.

Actividad 7:(IAM7)

Deseo empapelar el pizarrón con hojas de papel glasé. ¿Cuántos de esos papeles necesitaré aproximadamente?

A.-Descripción de la producción escrita

Mirta dibuja el pizarrón y en el margen superior escribe “ $1 \times 10 \text{ cm}$ ”, en el margen izquierdo “ $1 \times 6 \text{ cm}$ ”. En el margen derecho dibujo un cuadrado y lo denomina “papel glasé. 1 cm ” En el margen inferior escribe el cálculo “ $5 \times 9 = 45$ ”
R: 45 papelitos”



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 7

No encontramos una explicación a los productos expresados en los márgenes. No obstante, efectuamos el cubrimiento por iteración de una unidad establecida (ind 4.1 en *Producción de una imagen* e ind 4.2 en *Posesión de una imagen*). Asocia las nociones del campo multiplicativo respecto al modelo rectangular o de la cuadrícula y a través del cálculo puede indicar la cantidad de papeles glasé (ind 5.1 en *Producción de una imagen*).

El cálculo lo realiza en función del rectángulo que dibujó y el cuadrado unidad que dibuja en el margen derecho. Si consideramos que éste representa el papel glasé, la cantidad que estima en el dibujo no coincide con las dimensiones reales del pizarrón. La niña en el procedimiento que desarrolla no considera las dimensiones lineales para el cálculo solicitado (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*)

Hemos pretendido que los niños cuando interactúan con la actividad accedan con dos indicadores a *Producción de una imagen* – Capa B – con un indicador a *Posesión de una imagen* – Capa C- y *Percepción de propiedades*- Capa D- respectivamente. La producción de Mirta denota el alcance de los dos indicadores correspondientes a la *Producción de la imagen*- Capa B – y del indicador correspondiente a *Posesión de una imagen*- Capa C-

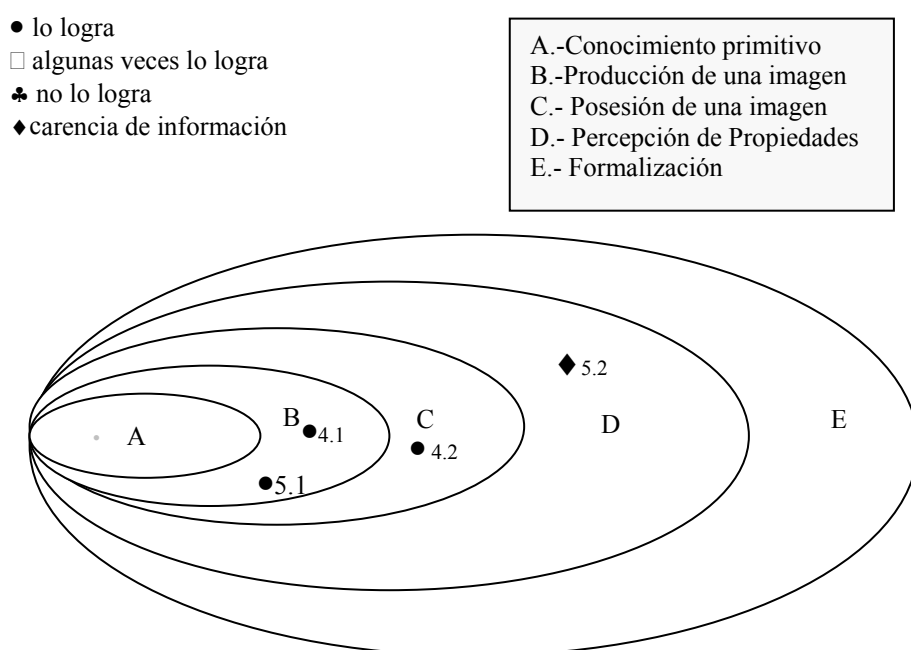
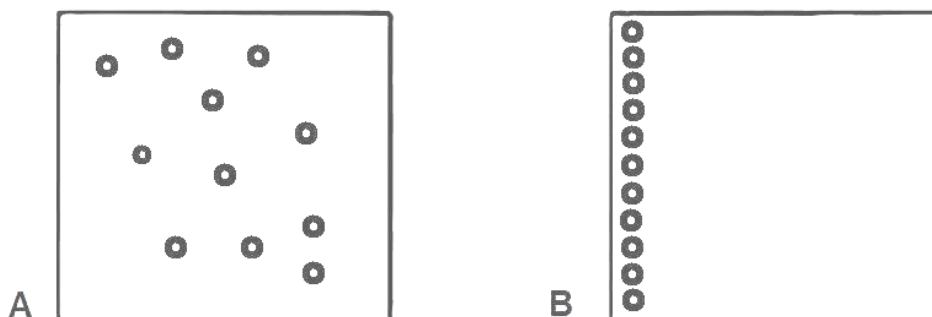


Gráfico de Comprensión -IA- de Mirta asociado a la act.7

- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades Empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras

Actividad 8: (IAM8)

Una máquina perforadora hace agujeros circulares, todos del mismo tamaño sobre planchas de aluminio cuadradas. ¿Qué puedes decir acerca de la cantidad de aluminio que tiene cada plancha? Justifica tu respuesta.



La respuesta de Mirta denota que no ha comprendido el enunciado, en consecuencia no lo consideramos para el análisis.

4.2.2.1.- RELACIÓN ENTRE LOS GRÁFICOS DE COMPRENSIÓN: DESEABLE Y EL DE MIRTA.

Con la resolución de las actividades correspondientes al cuestionario acerca de las ideas previas de los niños respecto del concepto de área, pretendimos detectar qué les sugería o podían anticipar respecto del mismo. El cuestionario está formado por ocho actividades, según nos referimos en el capítulo anterior, apartado 3.5.1.2.-, a cada una de ellas les corresponden indicadores de las categorías. Estos indicadores los hemos dispuesto en un gráfico, denominado de comprensión, organizado en capa a efectos de dar cuenta de la comprensión deseable de los mismos. Así su distribución en el gráfico es la siguiente: cuatro indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- tres indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen*- Capa B y Capa C –dos indicadores en

Posesión de una imagen – Capa C- y seis indicadores en Percepción de propiedades – Capa D-.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

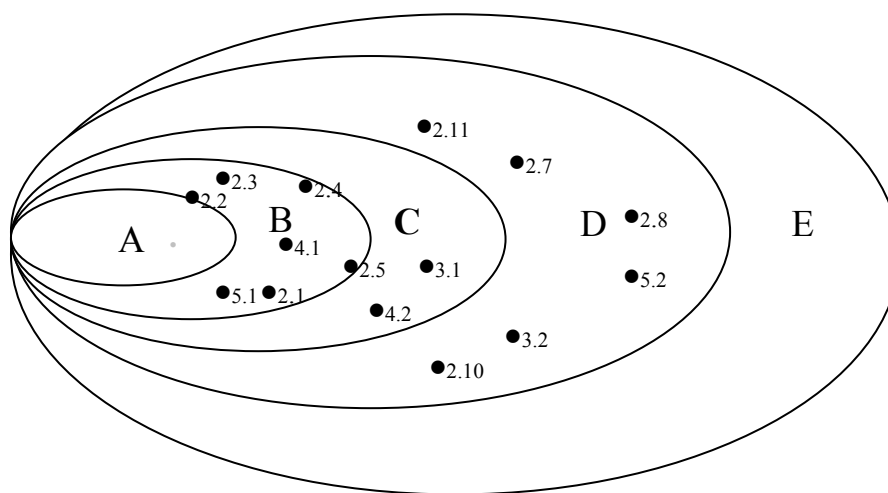


Gráfico Global Comprensión –IA - Deseable

- 2.1.-Compara superficies por percepción visual
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficie midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura.
- 3.2.-Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual / menor perímetro de la misma
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras

Es decir, deseamos detectar si la niña para hallar el área de una superficie, cubre o desplaza otra superficie como unidad de medida, cuenta la cantidad que esta unidad contenida en dicha superficie. Para comparar dos o más superficies, lo hace por percepción visual, componiendo – descomponiendo, por inclusión o por medición, a través de una unidad de medida. Así como también, si distingue la diferencia entre la noción del concepto de perímetro y de área de una superficie y que ambas no necesariamente varían de igual sentido

Las respuesta brindadas por Mirta nos permiten anticipar el gráfico de comprensión en el que volcamos los logros de los indicadores involucrados.

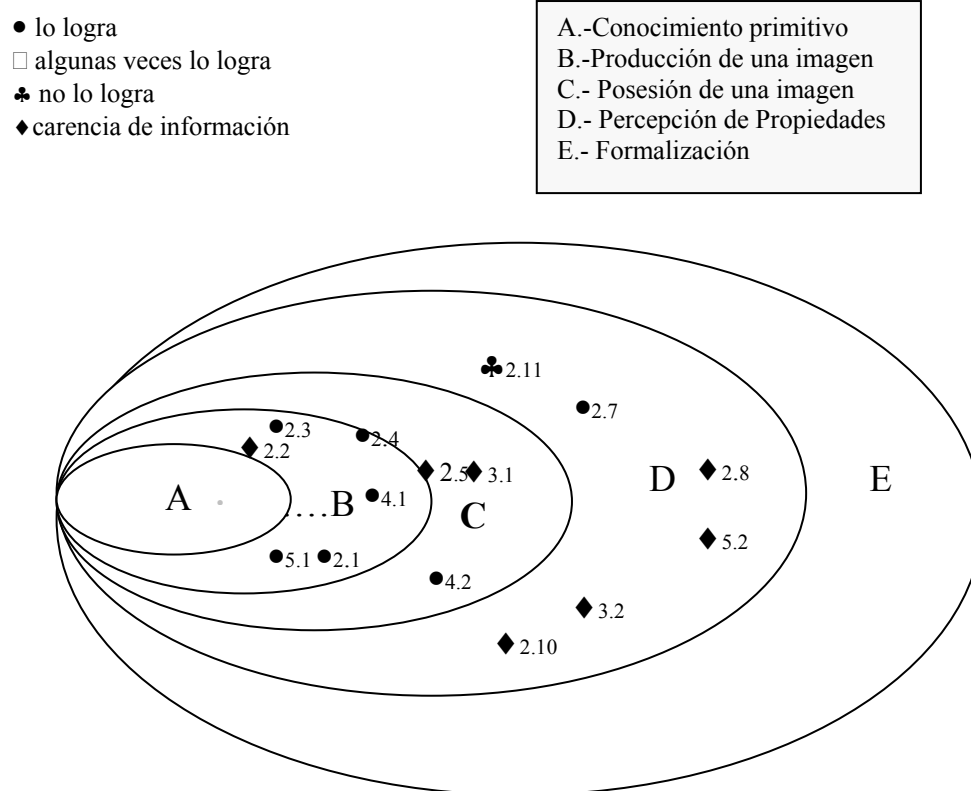


Gráfico Global Comprensión -IA - de Mirta

Relacionamos ambos gráficos de comprensión –el deseable y el de Mirta- destacamos que disponemos de poca información respecto de las ideas que posee la niña acerca del concepto de área, pues las actividades que responde, algunas no nos brindan información o bien los resultados a los que arriba, no los justifica. No

obstante podemos manifestar que utiliza las piezas en distinta forma (ind 2.3 en *Producción –Posesión de una imagen.*), y las figuras resultantes insumen la “misma cantidad de material” (ind 2.7 en *percepción de Propiedades.*

Con respecto a la conservación de la magnitud y la comparación de distintas figuras, la niña la distingue desde la percepción visual,(ind 2.1 en *Producción de una imagen*) o bien, a veces - desde una representación geométrica - a través de transformaciones indirecta,(ind 2.4 en *Producción-Posesión de una imagen*) según se observa en los problemas (IAM1; IAM4)⁹¹.

Cuando se brinda como dato el dibujo de la unidad de medida,(ind 4.2 en *Posesión de una imagen*) realiza cubrimientos por reiteración de una figura - unidad de medida – desde procedimientos empíricos (ind 4.1 en *Producción de una imagen*)y expresa el resultado a través de un cálculo multiplicativo(ind 5.1 en *Producción de una imagen*) (IAM7). También se observa que no relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al total. (ind 2.11 en *Percepción de propiedades*)

Logros ubicados preferentemente en las capas: *Producción de una imagen*, *Posesión de una imagen* y *Percepción de sus propiedades* y el anillo *Producción –Posesión de una imagen*. Estos aspectos constituyen **las ideas previas de Mirta acerca del concepto área.**

4.3.3-ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES RESUELTAS EN LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE (SM)

Mirta en esta sub-fase denominada secuencia de aprendizaje, resuelve 12 actividades de las 15, explicitadas en el capítulo anterior, apartado 3.5.2.1.1.-, ya que dos de ellas la maestra decidió no implementarlas y otra actividad no la resolvió por encontrarse ausente. Asimismo Contamos con la resolución de las actividades realizadas por la niña, según adjuntamos en el Anexo XXIII, y constatamos que dos actividades resueltas, no proporcionan información acerca del proceso de construcción de los indicadores indicados. A continuación comenzamos con el análisis de cada una de las actividades desarrolladas por Mirta

⁹¹ Los códigos se refirieron a la actividad del cuestionario de la cual procede.

Actividad 1:(SM1)

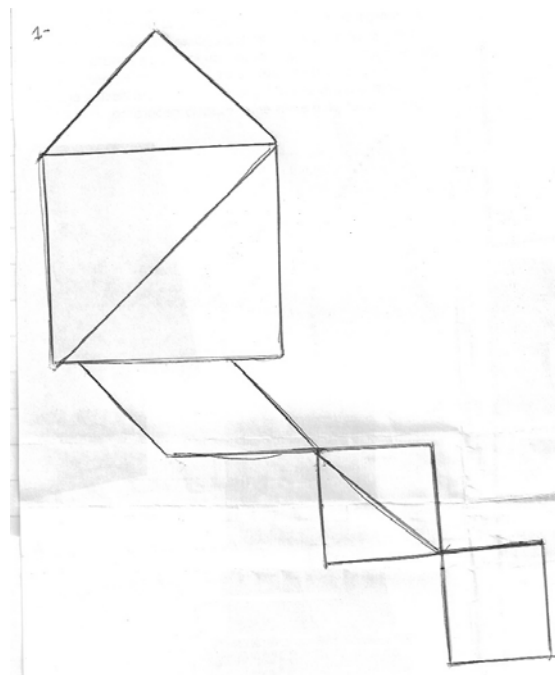
- ✓ Dispones de un equipo de Tangram. Arma un rompecabezas con las piezas, sin superponerlas de manera de obtener distintas figuras, para cada una de ella. No olvides apoyarla sobre la hoja de tu carpeta y marcar el contorno.

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo.

Mirta toma:

- a) Todas las piezas, compone los dos triángulos y obtiene un cuadrado. Sobre un lado apoya el triángulo mediano, según su hipotenusa y sobre el lado opuesto del cuadrado, dispone el paralelogramo, según el lado de mayor longitud.

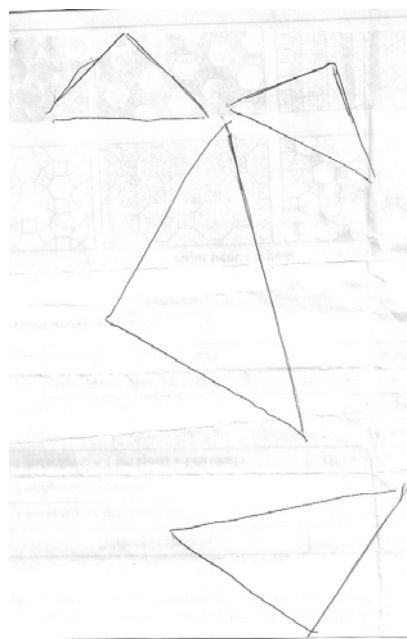
Compone los dos triángulos pequeños y forma un cuadrado, lo aparea según un vértice con el paralelogramo, de manera que el lado de menor longitud del paralelogramo y la hipotenusa de los triángulos pequeños se disponen alineados. Finalmente se ubica el cuadrado, apareado según un vértice y dispuesto en igual dirección.



(PEM1a)

b) Cuatro triángulos, dos chicos, el mediano y uno grande. Los dispone de manera tal que ninguno de ellos tiene puntos en común.

(PEM1b)



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 1

Los alumnos manipulan las piezas del Tangran de manera distendida, en general Mirta construye cada uno de los indicadores que requiere esta actividad pues, forma dos figuras utilizando las piezas sin superponerlas, (ind 1.1.- en *Producción de una imagen* e ind 1.4.- en *Producción –Posesión de una imagen*). Para ello, aparea las piezas por los lados (ind 1.2.- en *Producción de una imagen*) y por los vértices (ind 1.3.- en *Producción –Posesión de una imagen*).

A continuación, dibuja el contorno de cada una de ellas en una hoja. Para una de las figuras toma todas las piezas y para la otra, sólo alguna de ellas, las cuatro triangulares (ind 2.3 en *Producción –Posesión de una imagen*).

Aunque cada uno de los niños trabaja de manera individual, Mirta comparte sus producciones con Cecilia.

Respecto al nivel de comprensión que logra Patricia, la demanda de este problema se sitúa con dos indicadores en la *producción de una imagen* – Capa B - y con tres indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* - Capas B y C -.

Trazamos una curva continua de manera de obtener la trayectoria completa de dicho proceso. En ella observamos un retroceso, del indicador 1.4.- ubicado en el anillo *Producción- Posesión de una imagen* al indicador 1.2.-

ubicado en la capa *Producción de una imagen*, sin que ello constituya un folding back, pues esta direccionalidad se da por el propio proceso de resolución y no para fortalecer la comprensión en los indicadores ubicados en capas exteriores.

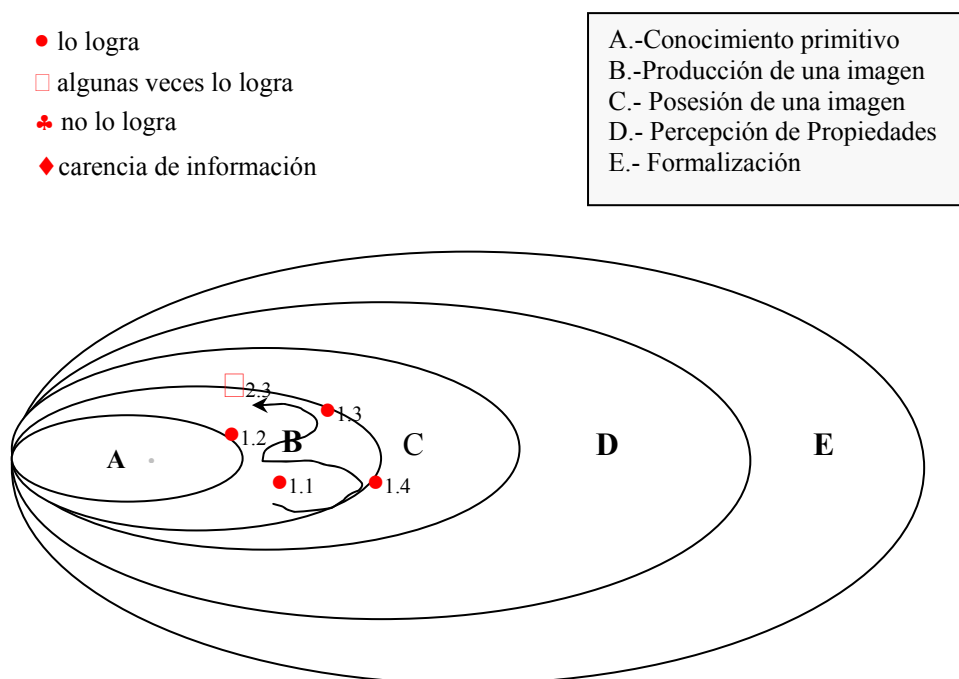
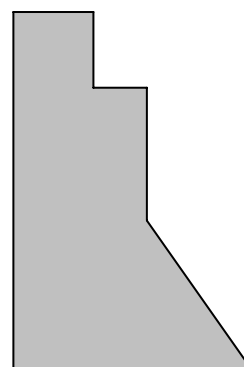


Gráfico de comprensión –S-de Mirta asociado a la act. 1

- 1.1.-Maneja el material mediante manipulación
- 1.2.-Aparea lados.
- 1.3.-Aparea vértices
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 2.3.- Utiliza las mismas piezas en distintas formas.(recompone)

Actividad 2: a (SM2a)

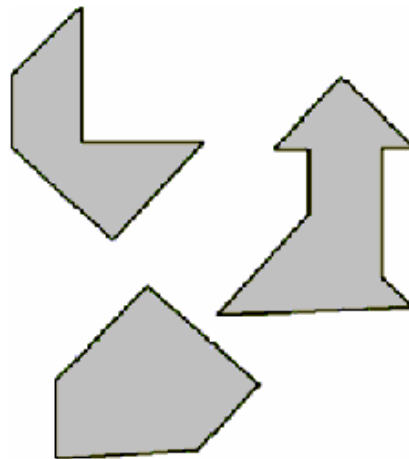
a.- Investiga con cuales de las piezas del Tangram se construyó la siguiente figura.



Si bien cada niño resuelve esta actividad individualmente, no disponemos de la producción, ni existe unidad de significado que de cuenta si Mirta la resolvió

Actividad 2 b (SM2b):

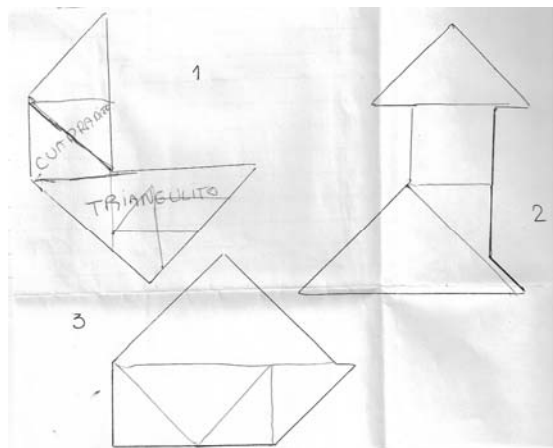
b.- Ahora deben decir con qué piezas del Tangram se armaron las siguientes figuras.



A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

La maestra les entrega la hoja con las tres figuras, cuyo tamaño es diferente al que resulta si los niños lo arman con las piezas del Tangram.

Mirta subdivide cada una de las figuras. En la *figura 1* distingue dos triángulos, uno pequeño y uno grande en el que escribe “*triangulito*”, un cuadrado, en el que ha marcado dos triángulos y escribe “*cuadradito*”. En las *figuras 2 y 3* identifica un triángulo grande, un triángulo chico, un triángulo mediano y un cuadrado.



(PEM2b)

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 2b.

De la producción escrita se aprecia que Mirta puede identificar piezas simples en una figura compleja y dispuestas en diferentes posiciones (ind 1.4 e ind 1.5.- en *Producción-Posesión de una imagen*).

En la tabla de diálogo (SM2b,(34,56)) observamos que la maestra, a través de una intervención de tipo provocativo, intenta que los niños distingan las figuras que están formadas por las mismas piezas- principio de conservación- en respuesta, Mirta toma las piezas afirma y muestra (ind 1.1.- en *Producción de una imagen*) a través de la composición y decomposición de una figura en otra de distinta forma (ind 2.4 en *Producción-Posesión de una imagen*) y manifiesta que las figuras 2 y 3 están formadas por las mismas piezas (ind 2.3 *Producción-Posesión de una imagen*), a través de interacciones de tipo univocal con Patricia y Araceli. Para ello, pasa al pizarrón, domina la situación al resolver la actividad y mientras tanto, los demás niños intervienen, aceptan e interpretan su procedimiento

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
34 Maestra: Muy bien. ¿Se dieron cuenta como se fueron formando las figuras?. Vamos a observar las figuras numeradas, por ejemplo, 1, 2, y la 3. En todos los casos ¿usaron las mismas fichas para formarlas?	Maestra	Propone	Invita a que viertan su opinión	A todo los niños	
44 Alumnos.: NO.	Alumnos	Responden	Explican con palabras lo que desean dar a entender	Maestra	
45 Maestra: ¿se repitieron las piezas en algunas figuras?	Maestra	Cuestiona	Solicita aclaración sobre lo respondido	A los alumnos	
47 Alumnos: ¿en la 1, la 2, y la 3?	Alumnos	Peguntan	Expresan desconocimiento acerca de lo que se preguntan	Maestra	
49 Maestra: En alguna de las tres figuras se usaron las mismas piezas para una de las otras?.	Maestra	Responde	Reformula lo enunciado	Los alumnos	
53 Patricia: Puede ser pero no sé.	Patricia	Responde	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea.	A la maestra	Mirta distingue que con idénticas piezas puede construir distintas formas
54 Ana: No, porque algunas tienen más y otras menos piezas	Ana	Responde	Alienta a la compañera que se bloquee	A Patricia	
56 Mirta: en la 2 y la 3 se usaron las mismas piezas. O: a continuación Mirta pasa al pizarrón y muestra cómo para las figuras 2 y 3 se utilizan las mismas cuatro fichas, cuadrado, triángulo chico, mediano y grande	Mirta	Reacciona	Acepta parcialmente la idea y la completa.	A la maestra y a todos sus compañeros	
					(SM2b : (34,56))

La maestra en vista a institucionalizar que ambas figuras formadas por las mismas piezas tienen igual área, muestra distintas figuras formadas, con la totalidad de las piezas del Tangram.

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con un indicador en la *Producción de una imagen* – capa B- y con cuatro indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen*- capas B y C- y con una indicador en *Percepción de propiedades* - capa D-.

Del análisis de la tabla de diálogo, construimos el siguiente gráfico de comprensión, que denota el proceso de construcción que Mirta va logrando desplazándose desde la *producción de una imagen y posesión de una imagen*.

Si bien la maestra en (SM2b, (70,83)) explica que las distintas figuras que arma con todas las piezas del Tangram resultan equivalentes, no se detectan intervenciones directas de Mirta que denoten que lo ha comprendido (ind. 2.7 en *Percepción de propiedades*).

En función de lo solicitado por la actividad, trazamos una curva continua a efectos de indicar la trayectoria completa de dicho proceso. En la misma observamos un retroceso, del indicador 1.5. ubicado en el anillo *Producción- Posesión de una imagen* al indicador 1.1.- ubicado en la capa *Producción de una imagen*, sin que ello constituya un folding back, pues dicho regresión se da por el propio proceso de resolución y no para fortalecer la comprensión de los indicadores siguientes.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo B.-Producción de una imagen C.- Posesión de una imagen D.- Percepción de Propiedades E.- Formalización

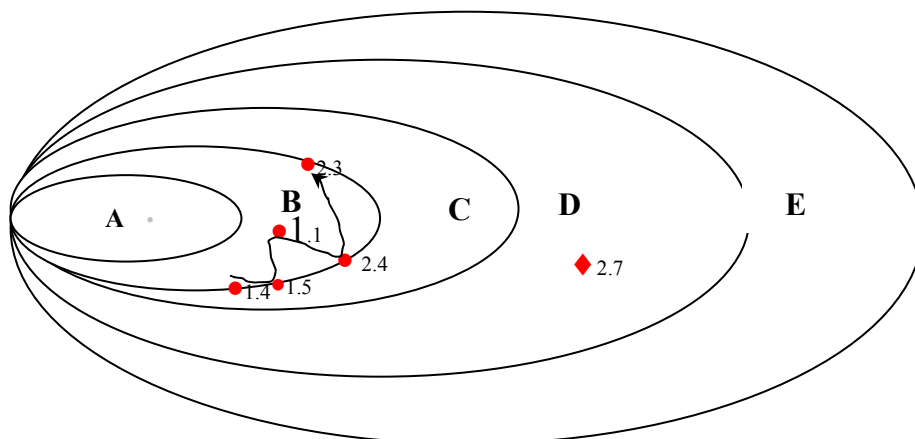
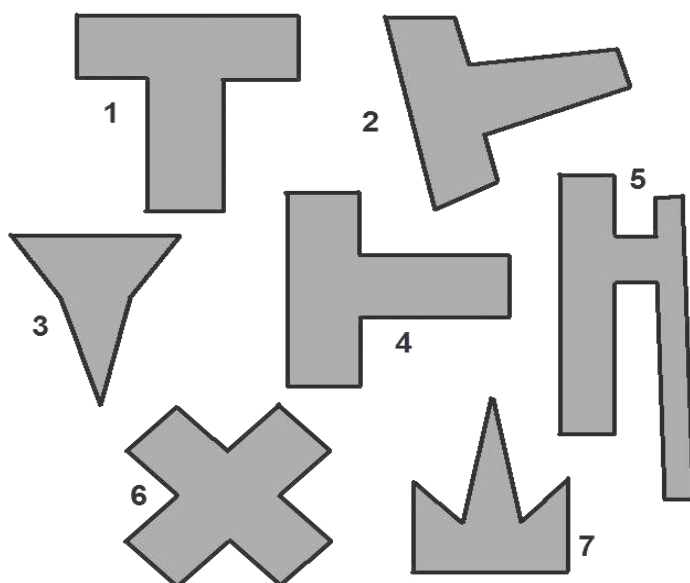


Gráfico de comprensión de Mirta asociado a la act. 2

- 1.1.-Maneja el material mediante manipulación libre
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.

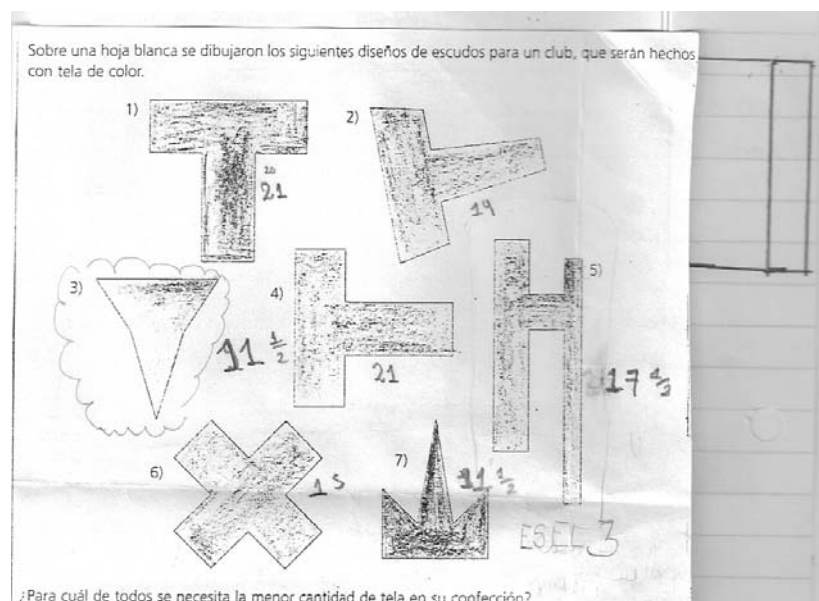
Actividad 3(SM3):

- ✓ *Sobre una hoja blanca se dibujaron los diseños de los escudos para el club, que serán hechos con telas de color ¿para cuál de todos se necesita la menor cantidad de tela?*



A.- Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

Observamos la producción escrita de Mirta y nos remitimos a la respuesta correspondiente a esta actividad. Para ello ha enmarcado la figura 3 y responde “es el 3”



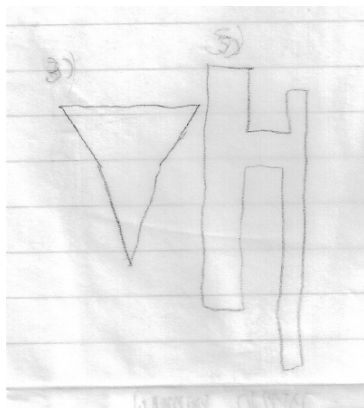
B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 3

En este problema es necesario que los niños comparen entre más de dos superficies.

Mientras Patricia manifiesta sus ideas, se percibe en Mirta el deseo de trabajar juntas. En un principio los niños comienzan a comparar los diseños utilizando la regla pero cuando la maestra les pregunta qué están hallando de las figuras, Mirta responde “la medida”. Recién cuando la maestra les sugiere no dar una respuesta numérica Mirta manifiesta que el diseño 3 es menor que el diseño 6. Al analizar lo que expresa podríamos inferir que responde en función de su percepción visual como atributo medible (ind 2.1 en *Producción de una imagen*).

A continuación, la maestra les solicita comparar los diseños 3 y 5. Mirta descompone uno de los diseño y los dispone de otra forma (ind 2.3 en *Producción-Poseción de una imagen*) a efectos de comparar de forma indirecta. Para ello cubre una figura en otra a través de romper y rehacer (ind 2. 4 en

Producción-Posesión de una imagen), arribando a que para el diseño 5 se necesita más tela que para el diseño 3, según se observa en unidad de significado (SM3, (106,120) en 110) y la PEM3



PEM3

106 Maestra: Ya revisé todos los grupos de trabajo y veo que están comparando el diseño 3 y el diseño 5.

O Mirta pasa al pizarrón en donde la maestra dispuso una lamina con los dibujos de cada uno de los diseños. Mirta señala el dibujo 3 y lo relaciona con el dibujo 5.

110. Mirta: Corto esto y lo pongo aquí, es decir relleno lo que falta y luego observo que esta parte sobra, entonces considero que el diseño 5(la H) necesita más tela que el diseño 3.

117 Maestra: Por el dibujo que hiciste, descartas el diseño 5.

120 Mirta: Si (SM3, (106,120))

En tanto Patricia a través de la colaboración indirecta que se ha establecido con Mirta, al efectuar la comparación entre ambos diseños en voz alta, pudo monitorear y sacar provecho de los comentarios de su compañera Mirta.

A solicitud de la maestra, comparan dos de los diseños (el 1 y el 4), de las interacciones producidas conjuntamente entre Mirta y Cecilia con Patricia, según se observa en la tabla de diálogo (SM3, (159,183)), en una primera instancia, no podemos afirmar que explícitamente que Mirta haya reconocido que los dos diseños son equivalentes. (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*)

A continuación, ante la pregunta de la maestra acerca de que si diseños equivalentes pueden tener distinta forma, la respuesta que manifiesta Mirta

respecto de los diseños 5, 2 y 3. - en línea 181- “*son diferentes y no son equivalentes*” podemos pensar que la niña estima que la forma no esta relacionada con la equivalencia. La respuesta de brinda la niña respecto de los tres diseños, es valida también si consideramos dos de ellos, Es decir que los diseños pueden tener distinta forma y ser algunos equivalentes y otro no (ind 2.7; ind 2.8 e ind 2.10 en *Percepción de propiedades*).

La niña ha utilizado métodos indirectos para comparar, por lo tanto, carecemos de información acerca del indicador 2.2 en *producción de una imagen*. El procedimiento empleado por la niña da cuenta que puede componer y descomponer convenientemente las partes de una figura para comparar.

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con dos indicadores en la *Producción de una imagen* – capa B-; con dos indicadores en la frontera entre *Producción* y *Posesión de una imagen*—capas B y C- y con tres indicadores en *Percepción de propiedades* - capa D-.

Del análisis de la tabla de diálogo y las unidades de significado explicitadas construimos el siguiente gráfico de comprensión en el que dibujamos la trayectoria que denota el proceso y el logro de los indicadores involucrados.

El clima y los momentos de discusión que propicia la maestra promoviendo estrategias cognitivas -explicitar, analizar, justificar, y metacognitivas -favorecedoras de la construcción del conocimiento, llevan a las niñas y, en este caso a Mirta, a construir la mayoría de los indicadores propuestos.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- | |
|--|
| A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización |
|--|

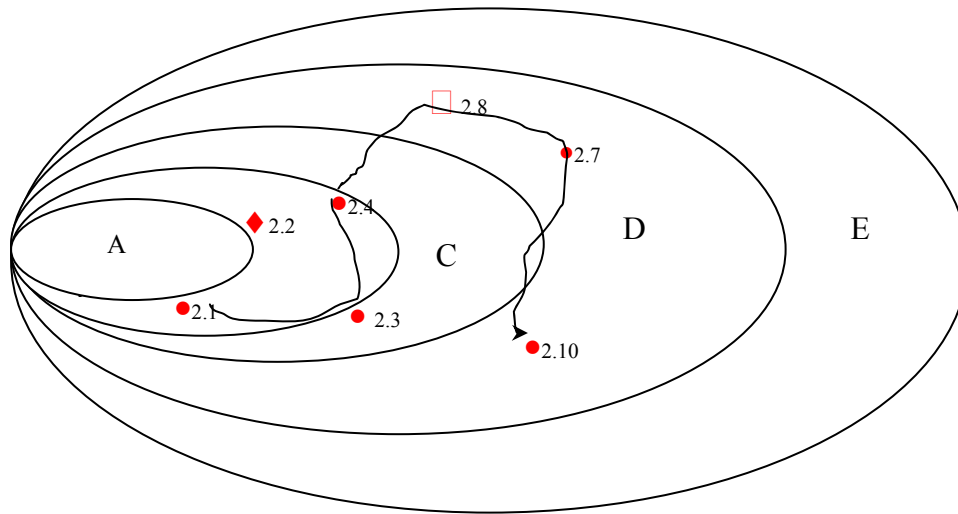


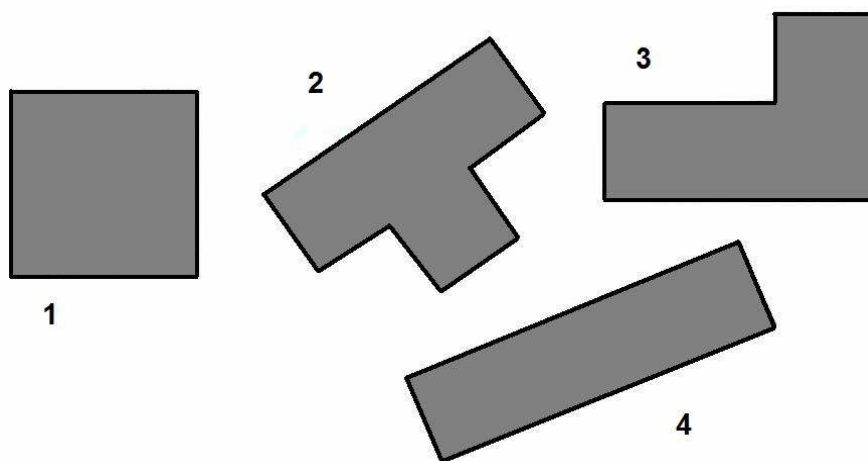
Gráfico de comprensión de Mirta asociado a la act. 3

- 2.1.-Compara superficies por percepción visual.
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
159. Maestra: ¿Apareció otro procedimiento para justificar que el diseño 3 es el de menor cantidad de tela?	Maestra	Propone	Manifiesta una idea invitando a los niños a que viertan su opinión	Los niños	
164. Araceli: Los diseños 1, 2, 3 y 4 son los que llevan igual cantidad de tela.	Araceli	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A la maestra	
167. Cecilia: los diseños 1, 4 y 6 son iguales en medida.	Cecilia	Responde	Acepta lo expresado por la compañera	A la maestra y los niños	
169. Maestra: pero el diseño 6 tienen distinta forma.	Maestra	Cuestiona	Solicita aclaración sobre lo realizado	Cecilia	
<i>O Cecilia muestra cómo debe descomponerse la figura para determinar que son equivalentes y Patricia descompone y recompone las piezas necesarias para justificar su procedimiento a Mirta, Araceli y Cecilia.</i>	Cecilia	Contesta	Propone un procedimiento e invita a sus compañeras a que viertan su opinión	Mirta, Araceli y Patricia	
173 Patricia si agregas este pedazo así, lo tenés.	Patricia	Responde	Acepta parcialmente la idea y la completa.	Cecilia	
175. Araceli: habría que saber cual tiene menor cantidad de tela.	Araceli	Reacciona	Clarifica aspectos relevantes a la compañera	Cecilia	
<i>O. Araceli le pregunta a Cecilia</i>					
178. Todos. El diseño 3.	Todos	Responden	Expresan claramente el resultado a los que han arribado los niños.	A Araceli	Mirta afirma que los diseños pueden ser diferentes y no equivalentes
179. Maestra: Yo aquí observo figuras totalmente diferentes.	Maestra	Cuestiona	Analiza a los niños a que comprueben si su resultado cumple con las condiciones iniciales del problema	Los niños	
181. Mirta: Los diseños 5, 2 y 3 son diferentes y no son equivalentes	Mirta	Responde	Explica con palabras lo que desea dar entender	A la maestra y los niños	
					SM3,(159,183)

Actividad 4 (SM4):

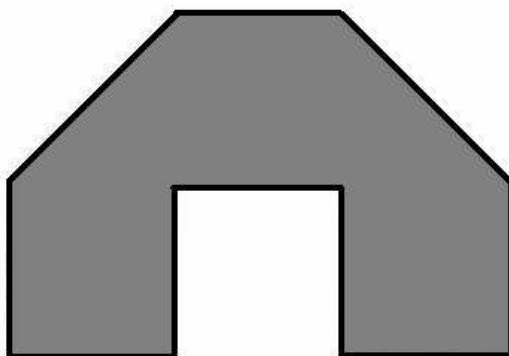
- ✓ ¿Cuáles de las siguientes figuras ocupan más papel?



A través de la resolución de este problema se pretende que los niños detecten que la conservación del área es independiente de la forma de las superficies. En particular la producción de la niña y la ausencia de intervención en el momento de discusión, no nos proporcionan información para efectuar su análisis.

Actividad 5 (SM5):

- a) Encuentra tres figuras que sean equivalentes a la siguiente:



- b) ¿Es posible encontrar un rectángulo equivalente a la figura dada?
Justifica tu respuesta-

A través de la resolución de este problema se pretende que los niños

desarrollen la percepción de una figura compleja a través del reconocimiento de figuras simples, aborden el análisis de figuras equivalentes y conceptualicen el área como medida de cubrimiento.

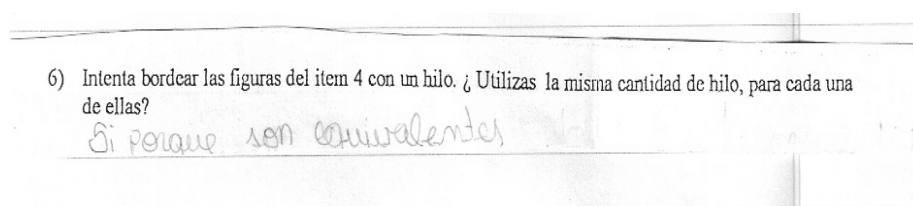
Aspectos que no hemos podido detectar en Mirta pues no concurrió a clase.

Actividad 6 (SM6):

- ✓ *Intenta bordear las figuras del ítem 4 con un hilo ¿utilizas la misma cantidad de hilo para cada una de ellas?*

A.- Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

Mirta solamente responde “*Si, porque son equivalentes*”



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 6

De la tabla de diálogo (SM6,(8,74)) observamos que Mirta considera que al tratarse de figuras equivalentes necesariamente tienen igual perímetro (ind 3.2 en *Percepción de propiedades*). Esta apreciación no es tomada en cuenta por sus compañeras, las cuales se involucran en el problema, y proponen hallar el perímetro y utilizar para ello, un hilo. Esta sugerencia lleva a la niña a desestimar lo manifestado y hallar el perímetro -según lo sugerido- bordeando con el hilo las distintas figuras, (ind 3.1 en *Poseción de una imagen*).

Mientras tanto, retrocede en su proceso de comprensión, percibe que según se aparecen los lados de los distintos cuadraditos (ind 1.2 en *Producción de una imagen*) la cantidad de “*las entraditas*” de la figura influyen en el perímetro de la misma. Es decir avanza en dicho proceso de comprensión a identificar la independencia de variación entre ambas nociones. Esta apreciación enunciada por

la niña da cuenta de cómo el folding back promueve una comprensión más profunda del proceso realizado.

Sin embargo, a pesar de esta consideración, persiste y corta los hilos de modo que todos tengan la misma longitud para responder “*me dan igual*” y afirma que al ser todas las figuras equivalentes, el perímetro es igual en todas ellas. (ind 3.2 en *Posesión de una imagen*).

Por lo tanto a pesar que la niña retrocede a una capa interior, percibe que ante ciertas condiciones el perímetro cambia, pero no es capaz de advertir la independencia entre las variaciones del área y el perímetro. Entonces si bien se produce un folding back provocado por ella misma, de manera no intencional, éste resulta ineficaz (FB~ I-ineficaz- M).

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea unidad
O: La docente les solicita que busquen en su carpeta el problema 4. Algunos niños comienzan a responderla pregunta del problema. Y la docente les solicita a Patricia que lea el problema.	Maestra	Propone	Solicita lea el enunciado	Patricia	
8.Mirta: Si, son equivalentes	Mirta	Responde.	Aporta ideas a la resolución del problema	A la maestra y los niños.	Mirta considera que al tratarse de figuras equivalentes necesariamente tienen igual perímetro
O Patricia: intenta bordear las figuras del problema 4 con un hilo	Patricia	Resuelve	Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento.		
13. Maestra: ¿utilizas la misma cantidad de hilo, para cada una de ellas?	Maestra	Pregunta.	Solicita que justifique sus afirmaciones.	A los niños	
O: todos los niños de la mesa comienzan a mirar a Patricia y ella comienza a bordear el cuadrado, Mirta por su parte, también.					
16 Patricia: supongamos que el hilo sean las líneas. Sumas esto más esto y te da cuanto mide esto. (Patricia va marcando los lados de la figura). Midamos con regla $3 \times 4 = 12$. Miden 12	Patricia	Reacciona	Explica con palabras lo que desea dar a entender.	Cecilia, Araceli Flor y Mirta	
O: Araceli toma las medidas de un solo lado del cuadrado y lo superpone tres veces sobre el hilo para obtener la medida del contorno del cuadrado. Mirta y Patricia, sobre su papel, miden y marcan con lapicera sobre el hilo, luego toman la otra punta del hilo y comienzan a bordear la figura (2)	Araceli Mirta y Patricia	Contesta Contestan	Aporta ideas para la resolución del problema. Resuelven de manera conjunta	Cecilia, Flor y Mirta Al grupo	Hallan el perímetro por superposición de la longitud del lado, que funciona como unidad Mirta y Patricia hallan el perímetro en función de la longitud de cada uno de los lados.
39 Maestra: ¿Usan la misma cantidad de hilo?	Maestra	Cuestiona	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A la totalidad de los niños	Mirta afirma que

41 Mirta: Si, por que son equivalentes. <i>O: Patricia muestra cómo midió el cuadrado.</i>	Mirta Patricia	Responde Responde	Fundamenta su respuesta Explica a través de gráficos lo que desea dar a entender	A la maestra A la maestra	como son equivalentes tienen igual perímetro
45 Mirta: A mi me da igual, señor. 47 Patricia: Yo no creo realmente que esto con el hilo te dé. En realidad no vale la pena....no da lo mismo porque tienen la misma área pero tienen distinto perímetro.	Mirta Patricia	Replica Responde	Acepta la idea Cuestiona lo afirmado por su compañera y regula la situación	A la maestra Maestra , Cecilia, Patricia	
54 Cecilia: tenemos que averiguar si para todos usamos la misma cantidad. Cortamos el hilo y probemos con los otros. <i>O: Patricia se niega a cortar el hilo e insiste en usar la regla</i>	Cecilia Patricia	Contesta Replica	Propone otro procedimiento y los invita a los otros Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento	Mirta Mirta y Patricia	
59 Flor: Yo hago una para cada figura <i>O: Patricia compara los hilos entre sí.</i>	Flor	Replica	Acepta la sugerencia parcialmente	Cecilia	Mirta anticipa que cuando la figura tiene “más entraditas” el perímetro de la misma es mayor
62 Cecilia: pero para que si... 64 Mirta: El cuadrado es más simple....no tienen tantas entraditas. Pues bordear con el hilo te lleva más hilo. Cuando hago este cuadrado, no sabía..... ¿hay que hacer un hilo para cada uno?	Mirta	Responde	Muestra apertura a los procedimientos formulados por un compañero y solicita aclaración	Cecilia y Patricia	
74 Patricia: No me da ninguno igual. (compara las longitudes de los hilos)Esta es “más larga” , o sea mediana y esta es más corta. Lo tenemos que medir con la regla.	Patricia	Responde	Acepta lo que afirma sus compañeras pero resignifica el recurso utilizado	Mirta y Cecilia	(SM6(8,74))

En general las intervenciones de la maestra hicieron reflexionar a los niños y los instó a argumentar sus afirmaciones. Las intervenciones vertidas por los niños indican complementariedad en sus conclusiones. En la puesta en común Ana sintetiza expresando *“El perímetro sería el contorno. ...depende de cómo acomodes los cuadrados te va a dar más o menos perímetro. No porque tengan la misma área, tienen el mismo perímetro. Depende de cómo acomodes los cuadrados”* (línea 205). En esta idea vertida por Ana es significativo lo manifestado por Mirta oportunamente.

Sin embargo no contamos con intervenciones de la niña que dé cuenta si logra reconocer la independencia entre la variabilidad del perímetro y del área. (ind 3.2 en *Percepción de propiedades*). A causa de ello, carecemos de información acerca de ordenar las figuras equivalentes según su perímetro (ind 3.6 en *Percepción de propiedades*).

La evolución de las ideas manifiestas de manera interactiva por los niños durante el desarrollo del problema lleva a la maestra a proponer los siguientes problemas:

Problema 6bis: (**S6bis**) “¿Se puede formar una figura de igual área pero de 16 lados de cuadrado de perímetro?”

La docente, a través de la pregunta formulada, propone un tratamiento numérico y Flor cuando expresa *“Serían cuadrados sueltos porque para que sean figuras tendrían que estar unidos.”*(línea 220) complementa lo manifestado anteriormente por Mirta *“cuando la figura tiene “más entraditas” el perímetro de la misma es mayor”*, a pesar de ello no contamos con intervenciones de Mirta que den cuenta de la construcción solicitada (ind 3.5 en *Percepción de propiedades*).

La demanda de la actividad 6 respecto del nivel de comprensión se sitúa: en dos indicadores en la capa: *Producción de una imagen* – Capa B - y con un indicador en el anillo *Percepción de Propiedades - Formalización* – Capa D y Capa E.

Del análisis de la tabla de diálogo, la inserción de este último problema y

la producción escrita, observamos otros indicadores significativos además de los propuestos, los cuales consideramos para esbozar la trayectoria en el gráfico de comprensión a realizar.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ Carece de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

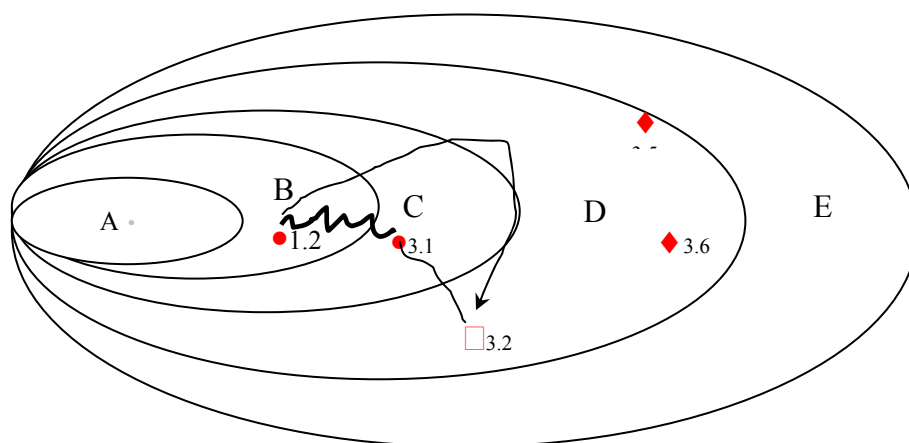


Gráfico de comprensión –S-de Mirta asociado a la act.6

- 1.2.-Aparea lados
- 3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura
- 3.2.- Reconoce que a mayor /igual /menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/menor perímetro de la misma.
- 3.5.- Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.
- 3.6.- Ordena según el perímetro, figuras equivalentes.

Considerar las figuras de la actividad 7 y responder la pregunta que formuló Ana:

Introducción a la Actividad 7 (SM7)

“¿puede dos figuras tener igual perímetro y distinta área?”

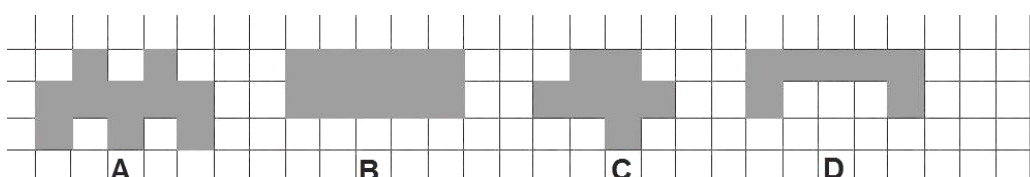
No se observan intervenciones de Mirta que den cuenta su opinión alrededor de las preguntas formuladas, ya que las respuestas son vertidas

fundamentalmente por Ana quien las formuló y tiene sentido para ella.

Actividad 7 (SM7):

Considera las siguientes figuras A, B, C y D

- ✓ ¿Cuáles de ellas tienen igual perímetro?
- ✓ Compara el área de esas figuras



No contamos con la producción escrita de Mirta, ni intervenciones que nos permita inferir su modo de abordar el problema.

Actividad 8 (SM8):

Consigna:

Remarca las piezas de tu Tangram en la carpeta, y responde, explicando cómo lo resuelves: superponiendo, contando triángulos, contando cuadrados.

8.1.-Tomando como unidad el área de la pieza (triángulo chico) ¿cuál es el área de las demás piezas?

8.2.- ¿Qué piezas son equivalentes?

8.3.- ¿Cuáles son iguales? (este ítem la maestra lo omite)

8.4.- ¿Qué relación existe entre las áreas del cuadrado y el triángulo grande?

8.5.- ¿Y entre el paralelogramo y el triángulo grande?

8.6.- ¿Y entre el triángulo mediano y el grande?

8.7.-Tomando como unidad de área el triángulo chico. ¿Cuál es el área del cuadrado que se puede formar con las siete piezas? ¿Y tomando como unidad el triángulo grande? ¿Y tomando como unidad el triángulo

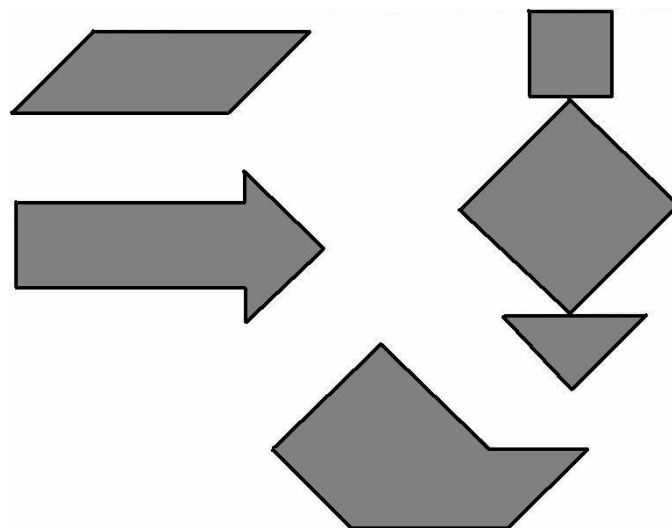
mediano?

El inciso 8.7, la maestra cambia la consigna por:

Arma con las siete piezas un cuadrado. ¿Cuántos triángulos chicos necesitan para formar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo grande, ¿cuántos necesito para armar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo mediano, ¿cuántos necesito para formar el cuadrado del Tangram?

8.8.-Tomando como unidad el área del triángulo chico, construye con tu Tangram una figura que tenga 4 unidades, otra que tenga 8 unidades y otra que tenga 10 unidades, remarcándolas en tu carpeta de trabajo

8.9.-Ahora construye las siguientes figuras de manera tal que el paralelogramo tenga 6 unidades; la flecha, 8 unidades; el barco, 10 unidades y el muñeco 12 unidades. Dibuja cada una de las figuras obtenidas en tu carpeta.



8.10.- ¿Puedes transformar, moviendo una sola pieza, el paralelogramo en un rectángulo? Las dos piezas, ¿tienen la misma área?

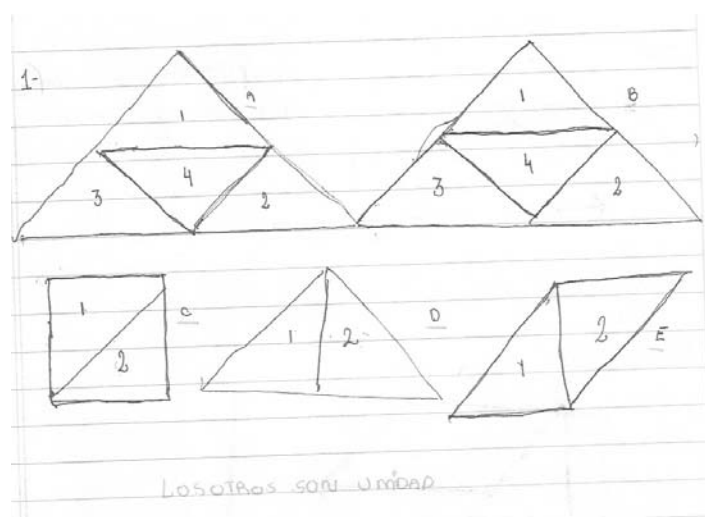
Mirta comienza a armar figuras hasta que la maestra le solicita a Patricia que lea la consigna: “*Remarca las piezas de tu Tangram en la carpeta y responde, explicando cómo lo resuelves, superponiendo, contando triángulos, contando*

cuadrados.

8.1.- Tomando como unidad el área de la pieza (triángulo chico), ¿cuál es el área de las demás piezas?”.

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

Mirta asigna a cada una de las piezas una letra. A los triángulos grandes los designa A y B respectivamente, al cuadrado lo designa C, el triángulo mediano D y al paralelogramo E. Cubre los dos triángulos grandes con cuatro triángulos chicos cada uno, y el mediano, el paralelogramo y el cuadrado, todos ellos con dos triángulos chicos. Numerándolos en cada una de las figuras y a continuación expresa “los otros son unidad”



PEM8.1)

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente al ítem 8,1

En principio Mirta no presta atención y sigue jugando con el Tangram, luego mira a Patricia que le explica el procedimiento para resolver lo solicitado.

O: Cuando la docente comienza a explicar, Cecilia y Mirta toman la fotocopia. Mirta no presta atención, sigue jugando con el Tangram y mira a Patricia que le explica la consigna.

28 Patricia: ¿Que tenés que hacer? , Superponer y decir acá hay dos triángulos distintos, acá hay tres.....y así.

O: Patricia comienza a dibujar en su carpeta. (los triángulos chicos

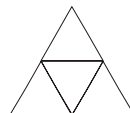
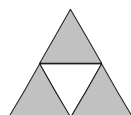
dispuestos de manera que queda el triangulo mediano)

39 Patricia: Yo lo hago con regla pues si no me sale torcido.

O: Mirta dibuja el triangulo grande y cuatro triángulos chicos incluidos en él.

48 Mirta: si lo pones así, te va dando cuantos entran.... cuatro triángulos.

O: Patricia lo dibuja.



52 Mirta: En el triangulo grande entran 4 triángulos chicos y en el más chico va a entrar 1 pues es la unidad.

(SM8 (28,48))

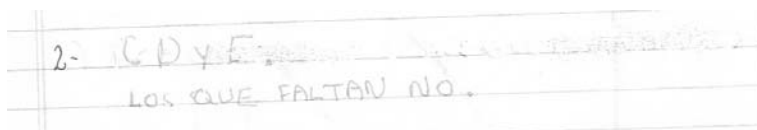
La unidad de significado anterior y la PEM8.1 da cuenta que la niña maneja las piezas, toma el triángulo pequeño solicitado (ind1.1 en *Producción de una imagen*) anticipa la división a realizar, (1.4.- en *Producción – Posesión de una imagen*) y pavimenta cada una de las superficies a medir recontando la unidad empleada (ind 4.1.- en *Producción de una imagen*). Lo enumera y manifiesta que.... “*entran cuatro triángulos*” pero no explicita concretamente el área de cada una de las piezas en función del triángulo chico, aunque distingue que esa pieza es la unidad. Fundamentalmente en las líneas 48 y 52 se observa que las interpretaciones compartidas con Patricia constituyen una colaboración directa entre ellas. No obstante, la ausencia de la expresión del área en cada pieza indica que aún no está dentro de su zona de desarrollo próximo.

La maestra formula el próximo ítem:

8.2.-¿*Qué piezas son equivalentes?*

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

Mirta responde “*C, D y E. Los que faltan no*”



PEM8.2.-

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente al ítem 8,2 y 8.3

Mirta comienza a dibujar nuevamente las piezas y cuando Cecilia explica que “*el cuadrado es equivalente al paralelogramo y también al triángulo porque hay 2 triángulos chicos en cada uno*” Mirta no comprende, y le pregunta si para ello, superpone los triángulos; Cecilia le responde “*....uno a continuación del otro*” (ind 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen*). Esta información indica que Mirta, en principio, no reconoce figuras equivalentes (SM8.2 línea 110).

O: Mirta recién comienza a dibujar cada pieza y Cecilia compara cuantos triángulos chiquitos incluyen

110. Cecilia: El cuadrado es equivalente el paralelogramo y también al triángulo. Por que hay 2 triángulos chiquitos en cada uno.

115 Mirta: Superponiéndolos.

116 Cecilia:....uno a continuación del otro.

No obstante podemos afirmar que la explicación de Cecilia provoca un cambio - folding back- intencional y explícito (FBle-C) acerca de la distinción de equivalencia entre figuras- cuadrado, el paralelogramo y el triángulo mediano- que lleva a Mirta a rever cómo aparear el triángulo chico por sus lados (ind 1.2 en *Producción de una imagen*) y avanzar en su proceso de comprensión para constatar, en función del triángulo chico, que las piezas- mencionadas son de igual área (2.5 en *Producción-Posesión de una imagen*; ind 2.8 e ind 2.10 en *Percepción de propiedades*), según lo sugerido por su compañera Cecilia. Este proceso genera momentos de aprendizaje en Mirta-colaboración indirecta – y multivocal pues si bien Cecilia explica su procedimiento, Mirta cuestiona lo realizado por su compañera.

A continuación la docente omite el tercer inciso, pero de la producción escrita de Mirta se observa que responde este ítem.

8.3.- ¿Cuáles son iguales?

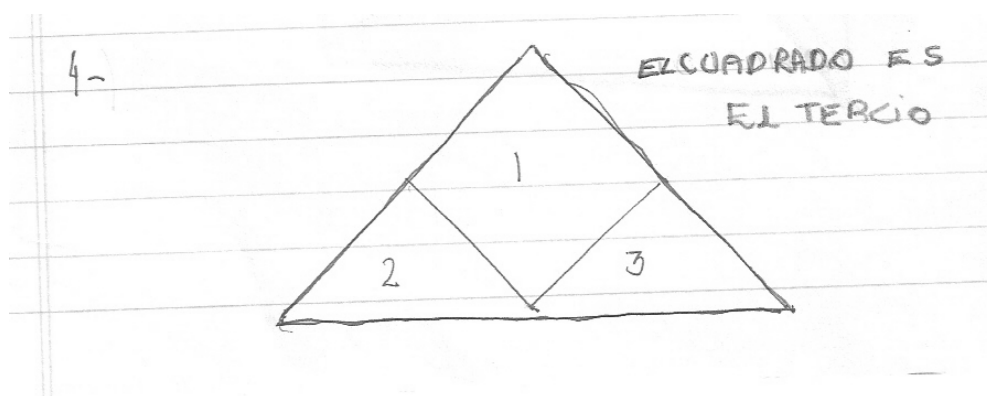
Y responde: “*Los grandes A y B*”

Cuando dice “grandes” se refiere a los dos “triángulos grandes”. Es decir, que identifica las piezas iguales en función de su forma y su medida, cada una de

las piezas se cubre con cuatro triángulos chicos, por transitividad respecto de la unidad, detecta las piezas iguales (ind 2.5 en *Producción-Posesión de una imagen*).

8.4.- “¿Qué relación existe entre las áreas del cuadrado y el triángulo grande?”.

Mirta dibuja la pieza que corresponde al triángulo grande e incluida en él, dibuja la pieza cuadrangular de manera que ambos, compartan además un vértice. Queda así, el triángulo grande cubierto por el cuadrado y los dos triángulos chicos. Al costado escribe “El cuadrado es el tercio”



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente al ítem 8.4

Mirta no tuvo en cuenta la necesidad de que las partes sean figuras equivalentes y se centró tan sólo en el número de partes. Sólo así el cuadrado resulta un tercio del triángulo grande (ind 2.11 en *Percepción de propiedades*).

8.5.- “¿Y entre el paralelogramo y el triángulo grande”.

Mirta dibuja el triángulo grande y traza la base media a dos de sus lados quedando determinado dos triángulos chicos y un paralelogramo. Al costado escribe “El paralelogramo es la mitad del triángulo”

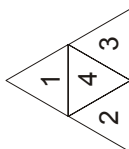
B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente al ítem 8,5

De la tabla de diálogo (SM8.5 (141,160) observamos cómo Mirta particiona el triángulo grande en cuatro triángulos chicos (ind 4.2 en *Posesión de*

una imagen) en tanto que la maestra interactúa con Patricia para establecer la relación, entre el paralelogramo y el triángulo grande.

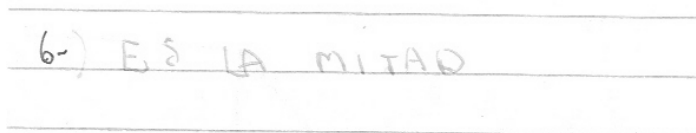
En general Mirta trabaja sola, pero de la subdivisión que realiza en la figura- cuatro triángulos chicos- y su producción escrita, podemos pensar que la respuesta que Patricia brinda a la maestra(en líneas 145 y 160), produjo un folding back no intencional por parte de la niña, (FB~I-P) que llevo a Mirta a retroceder en su proceso de resolución, y componer dos, de los cuatro triángulos chicos dispuestos en el triangulo grande, concretamente los triángulos 2 y 4 y componerlos (ind 2.3 en *Producción –Posesión de una imagen*) para obtener el paralelogramo solicitado. Así dispuestos el triángulo grande queda cubierto por el paralelogramo y dos triángulos chicos. Así la niña avanza en su proceso de comprensión debido a que este cubrimiento le permite establecer que el paralelogramo ocupa la mitad del triángulo grande (ind 2.11 en *Percepción de propiedades*). Relación que le permitirá responder los ítems siguientes:

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
141. ¿Y entre el paralelogramo y el triángulo grande? (8.5)	Maestra	Propone	Invita a dar su opinión.	A los niños	Mirta subdivide el triángulo grande en 4 triángulos chicos.
142. Patricia: $\frac{1}{2}$	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A la maestra y los niños	
145. Maestra: ¿Seguro? ¿Cuántos triángulos chicos ocupa el paralelogramo?	Maestra	Cuestiona	Solicita que justifique su afirmación	Patricia	
147. Patricia :2	Patricia	Contesta	Resuelve en voz alta	A la maestra y los niños	
149. Maestra: ¿y el triángulo grande?	Maestra	Pregunta	Plantea otra nueva cuestión	Patricia	
150. Patricia: 4	Patricia	Contesta	Resuelve en voz alta	A la maestra	
O: Mirta subdivide el dibujo según el triángulo chico así:					
151. Maestra: Entonces ¿Qué relación hay entre el paralelogramo y el triángulo grande?	Maestra	Pregunta	Invita a que vierta su opinión	Patricia	
154. Patricia: Son equivalentes.	Patricia	Contesta	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Maestra y los niños	
155. Maestra: No, Compara la goma eva que lleva cada uno.	Maestra	Responde	Corrige al alumno, animándole a que compruebe el resultado.	Patricia	
160: Patricia: El paralelogramo es igual a la mitad del triángulo.	Patricia	Contesta	Acepta la sugerencia y la completa	Maestra	
					SM8.5(141,160)



8.6.-¿Y entre el triángulo mediano y el grande?

Mirta solo responde “*Es la mitad*”



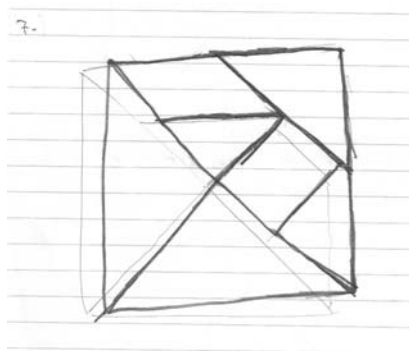
6- ES LA MITAD

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente al ítem 8,6

La niña responde “*es la mitad*”, pues acuerda con el procedimiento que indican Patricia y Cecilia, según apreciamos en la tabla de diálogo(SM 8.6, (243,275)), quienes proponen seccionar el triángulo mediano y componer para formar un paralelogramo (ind 2.4 en *Producción-Posesión de una imagen*) y así arribar a que ambas figuras resultan equivalentes (línea 274) y establecer la misma relación que en el ítem anterior (ind 2.11 en *Percepción de propiedades*)

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
243 Maestra: <i>¿Qué pasa entre el triángulo mediano y el grande? (8.6)</i>	Maestra	Pregunta	Invita a que viertan su opinión	Al grupo	Patricia y Cecilia reconocen la relación entre las figuras requeridas, seccionado el triángulo mediano y disponiendo las piezas de distinta forma. Mirta confirma dando la razón (SM 8.6,(243,275))
247 Patricia: A mí acá no me dio.	Patricia	Responde	Solicita aclaración para comprender el enunciado	A la maestra	
252 Cecilia: Lo superpongo así y se puede volver a superponer el triángulo en lo que me quedo.	Cecilia	Responde	Alienta para continuar con la estrategia que intenta implementar	Patricia	
256 Patricia: Si, si lo cortas y lo pones así. Porque si lo pones así y te dio la mitad de la otra forma también debe ser así. Si lo cortas te va a dar la mitad.	Patricia	Contesta	Acepta lo expresado por su compañera y lo complementa	Cecilia	
O: <i>Mirta y Flor confirman dando la razón</i>					
263 Maestra: La forma que me permite volver a superponer tan fácilmente.	Maestra	Responde	Anima a que comprueben si su resultado cumple con las condiciones iniciales del problema.	Cecilia y Patricia	
266 Patricia: pero entra.	Patricia	Reacciona	Reformula de manera colaborativa lo realizado con otros	Maestra	
267 Maestra: Tienen igual área. ¿Qué parte ocupa el triángulo grande?	Maestra	Pregunta	Invita a que viertan su opinión	A Patricia y Cecilia	
270 Cecilia: La mitad.	Cecilia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender.	Al pequeño grupo	
271 Maestra Al final nos está dando lo mismo entre el cuadrado y el paralelogramo.	Maestra	Cuestiona	Anima a la niña a que compruebe si el resultado cumple con las condiciones del problema.	A la maestra Cecilia	
274 Patricia: porque son equivalentes en área.	Patricia	Responde	Acepta la idea de su compañera y la completa	A la maestra y al grupo	
					(SM 8.6,(243,275))

8.7.-Arma con las siete piezas un cuadrado. ¿Cuántos triángulos chicos necesitan para formar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo grande, ¿cuántos necesito para armar dicho cuadrado? Tomando como unidad el triángulo mediano, ¿cuántos necesito para formar el cuadrado del Tangram?



Mirta solamente dibuja el cuadrado formado por las siete piezas del Tangram y no contamos con unidad de significado, que de cuenta que haya resuelto el problema.

8.8.-Tomando como unidad de área el triángulo chico. Formar una figura que tenga 4 unidades de área, 8 unidades y 10 unidades, apoyarlo en la hoja de carpeta y dibujarlo.

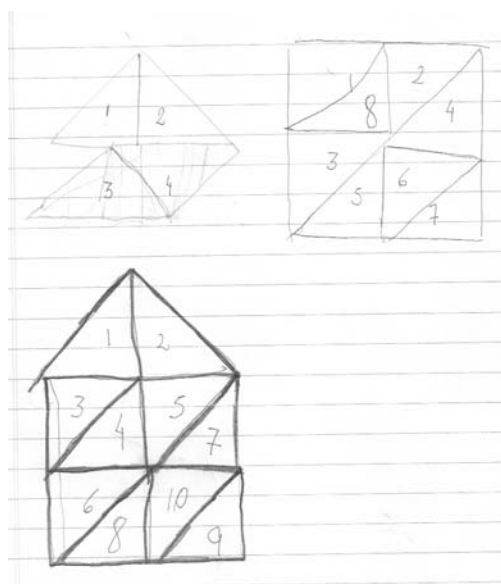
A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

La niña dibuja las figuras solicitadas así:

Para la figura compuesta por 4 triángulos chico de área, Mirta aparea dos de los triángulos y compone otro triángulo isósceles cuyos lados congruentes corresponden a la hipotenusa del triángulo unidad. Sobre el otro lado y con un vértice común, apoya otro triángulo unidad por la hipotenusa. Por último, el otro triángulo lo ubica formando un paralelogramo con el anterior y los lados congruentes son paralelos a los lados congruentes del triángulo formado por los otros dos triángulos.

Para la Figura compuesta por 8 triángulos chico de área, Mirta compone de a dos triángulos formando un cuadrado y aparea los cuatro cuadrados formando otro cuadrado.

Para la figura compuesta por 10 triángulos chico de área, dispone de a dos triángulos componiendo un triángulo isósceles de dos lados congruentes, siendo éstos la hipotenusa del triángulo chico y con los otros, cuatro cuadrados. Éstos los compone en un cuadrado y lo aparea con el triángulo anterior por el lado no congruente.



PM8.8

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente al ítem 8.8

Consideramos que para armar las distintas figuras, Mirta utiliza el triángulo chico según lo solicitado, aunque en la producción escrita, no le explicita. Mirta entonces utiliza dicha figura como unidad y dibuja el número de ellas solicitado, apareando las mismas por sus lados (ind 1.2 en *Producción de una imagen*) y, disponiéndolas en distinta posición, mide a fin de obtener la figura de área solicitada (ind 2.6 en *Percepción de una imagen*)

8.9.-Construye el paralelogramo que tenga 6 unidades, la flecha 8 unidades, el barco 10 unidades y el muñeco de 12 unidades

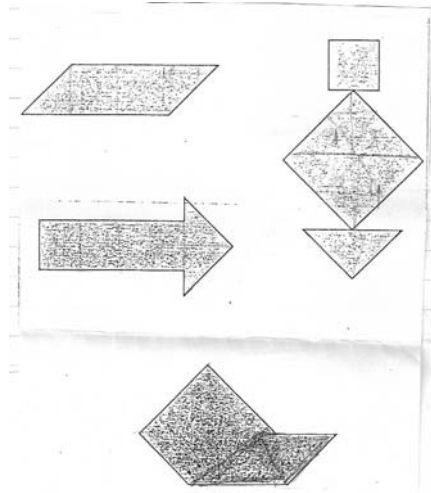
A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

Subdivide el paralelogramo y traza tres segmentos paralelos y equidistantes, congruentes con la altura del mismo. Dos de ellos tienen un extremo en común con dos de los vértices opuestos. Los otros extremos determinan dos segmentos paralelos al par de lados paralelos de la figura. Quedando subdividido el paralelogramo en seis triángulos rectángulos isósceles.

En la “flecha” Mirta traza un segmento que la subdivide en un rectángulo y un triángulo rectángulo isósceles. En éste traza la altura correspondiente a la hipotenusa y en el rectángulo traza dos segmentos paralelos al par de lados de menor longitud quedando determinados tres rectángulos, dos de ellos, congruentes. En cada uno de los rectángulos se traza una de sus diagonales. Así en “la flecha” se distinguen ocho triángulos rectángulos

Subdivide “el barco” en dos, un triángulo rectángulo isósceles y un trapecio isósceles. Considera un punto de la hipotenusa, próximo al vértice del triángulo y traza desde él dos segmentos cuyo otro extremo son los vértices de la base menor del trapecio. Queda subdividido el trapecio en tres triángulos. De manera zigzagueante traza un segmento cuyos extremos son, el vértice correspondiente al ángulo recto del triángulo y uno de los extremos de la base menor del trapecio. Quedando subdividido el “barco” en seis triángulos.

Por último, el “muñeco” esta compuesto por dos cuadrados, de distinto tamaño y un triángulo. Subdivide el cuadrado pequeño en dos triángulos. En el otro cuadrado traza sus diagonales, una de ellas con lápiz y en cada uno de los triángulos determinados traza la base media. Esta base media resulta paralela a dos de los lados del otro cuadrado. En cada uno de los triángulos, los extremos de la base y la intersección de las diagonales determinan un triángulo. En el triángulo rectángulo isósceles del muñeco, traza la altura correspondiente a la hipotenusa. Mirta numera cada uno de los triángulos determinados en el muñeco y en algunos de ellos superpone distintos números.



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente al ítem 8.9

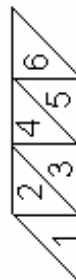
En este ítem se pretende que los niños realicen el proceso inverso a lo solicitado en el ítem anterior, pues ahora deben representar mentalmente la composición de una figura e identificar una figura como unidad de medida conveniente. Para ello, Mirta es conciente de que el resultado depende de la unidad que seleccione (ind. 4.3 en *Percepción de propiedades*) y reconoce la figura adecuada como unidad conveniente para medir solamente en el paralelogramo (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*) y obtener el área solicitada. Muestra de ello, es que la niña lo realiza en el pizarrón a solicitud de la maestra, según se aprecia en la tabla de diálogo (SM8.9 (584,637)).

En cambio si bien pavimenta las otras figuras- la flecha, el muñeco y el barco- , no logra identificar la figura conveniente como unidad para medir (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*), y en el “barco” además, no logra pavimentar la figura según la cantidad de triángulos solicitados. (ind 4.1 en *Producción de una imagen*)

Si relacionamos la resolución de Mirta de este ítem y el anterior podemos mencionar que ella ha demostrado fluidez en construir figuras de un área determinada, pero solo en algunos casos la niña puede identificar la figura como unidad de medida del área propuesta.

Algunos niños no pudieron resolver este ítem; en función de ello la maestra los orientó y les solicitó que los finalizaran para la próxima clase.

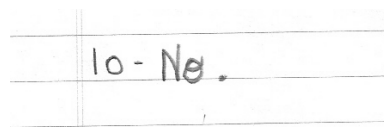
Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
584. Maestra: Tenemos como unidad el triángulo chico. ¿De qué modo puedo encontrar las 6 unidades en el paralelogramo? ¿Alguien necesita otra explicación? ¿esperamos un ratito?	Maestra	Propone	Explica con palabras lo que desea dar a entender	A los niños	
592. O: Mirta comienza a apoyar el triángulo en el paralelogramo y entra 6 veces.					
595. Maestra: ¿entró en el de ustedes 6 veces?	Maestra	Pregunta	Invita a que viertan su opinión	A los niños	
597. Mirta: me dio 6 en la fotocopia.	Mirta	Responde	Explica con palabras y gráficos lo que desea dar a entender	Maestra y los niños	
598. O. La docente comprueba si en el paralelogramo del pizarrón si entra 6 veces.	Maestra	Cuestiona	Corrobora lo realizado	Mirta	
602. O. Cecilia arma la fecha pero no le dan las unidades.	Cecilia	Responde	Acepta parcialmente la idea y la completa	Maestra y Mirta	
605. O. La maestra saca el paralelogramo del pizarrón y le solicita a Mirta que pase y lo realiza como en su fotocopia.	Maestra	Propone	Invita a que vierta su opinión	Mirta	
610.O. Mirta dibuja el paralelogramo apoyando el triángulo chico	Mirta	Contesta	Explica con un gráfico lo que desea dar a entender	Maestra y los niños	
615. Maestra: ¿Quién puede contar 10 unidades en el barco? Para mañana deben traer el trabajo terminado	Maestra	Propone	Invita a que vierta su opinión	A los niños	Mirta pavimenta la superficie según una unidad de medida determinada
619. O. Miguel y Daniel pasan a realizar el muñeco que tienen 12 unidades.	Miguel y Damián	Responden	Explica con un grafico lo que desea dar a entender	La maestra y los niños	
622. Maestra: ¿Cuántas unidades tiene que	Maestra	Cuestiona	Discute lo realizado	A los niños.	



tener el muñeco?					
624.O: Pocos contestaron.	Niños	Responden	Acepta lo expresado por los compañeros. Explica con palabras lo que desea dar a entender	A la maestra A los niños	
626. Maestra: Con 12 triángulos pequeños tienen que formar un muñeco. 629.O: Los alumnos no saben como realizarlo.	Maestra	Propone			
631 Maestra: Lo dejamos para realizarlo en casa.	Maestra	Propone	Proporciona una sugerencia	A los niños	
633.O. Mirta: termino con todas las figuras. 636.O: Cecilia, Flor y Patricia no saben como realizar algunas figuras	Cecilia, Flor y Patricia	contestan	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea.	A la maestra y los niños	
					(SM 8.9,(584,637))

8.10.-¿Puedes transformar, moviendo sólo una pieza, el paralelogramo en un rectángulo? Las dos piezas, ¿tienen igual área?

Mirta responde que “no”.



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente al ítem 8.10

La falta de justificación en su respuesta no nos permite detectar si pretendió realizar la transformación de manera visual o si no pudo “seccionar” una figura determinada, en este caso el paralelogramo, y componerlo en un rectángulo. Con respecto a si tienen igual área, podemos inferir que al considerar que no se puede transformar esa figura en la otra, no responde esta pregunta.

En general, la resolución de los ítems respondidos por Mirta denota que efectúa el cubrimiento en las distintas figuras con el triángulo chico, aunque distingue que esa pieza es la unidad, no explicita el área de cada una de las piezas en función de ella. Este procedimiento y la descomposición-composición los utiliza para comparar y construir figuras. Expresa una figura como parte de otra a partir de una fracción, aunque no siempre de manera correcta. Solo algunas veces identifica la pieza unidad, en una superficie de área dada.

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con tres indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B - con cuatro indicadores en el anillo *Producción - Posesión de propiedades* – Capa B y capa C- con dos indicadores en *Posesión de la imagen*- Capa C- con cinco indicadores en *Percepción de Propiedades* – capa D- y un indicador en *Formalización*- Capa E..

Del análisis de las tablas de diálogo propuestas y la producción escrita estimamos conveniente construir dos gráficos que denoten la comprensión de la niña. En el Gráfico de comprensión A construimos la trayectoria de los ítem 8.1 al ítem 8.5 inclusive y, en el otro, el gráfico de comprensión B, construimos la trayectoria de los ítem 8.6 al ítem 8.10 inclusive. La trayectoria de comprensión

de la actividad, surge de la unión de las trazadas en cada una de los gráficos, se han dibujado así, al solo efecto de facilitar su lectura.

La trayectoria se traza completa, marcamos con un trazo de mayor grosor y zigzagueante, los dos folding back producidos. Por ejemplo, entre el indicador 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen* al indicador 1.2 en *Producción de una imagen*, del indicador 4.2 en *Posesión de una imagen* al indicador 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen*. En otros tramos, la curva retrocede, por ejemplo, del indicador 2.11 ubicado en la capa *Percepción de propiedades* al indicador 2.4 ubicado en el anillo *Producción – Posesión de una imagen*, o bien del ind 4.3 en *Percepción de propiedades* al ind 4.2 en *Posesión de una imagen*, sin que ello constituya un folding back, pues la regresión se da por el propio proceso de resolución y no para fortalecer la comprensión en los indicadores ubicados en capas exteriores.

Asimismo de la tabla de dialogo y la producción escrita, observamos que la niña no utiliza métodos directos para comparar (ind 2.2 en *producción de una imagen*), ni pudimos detectar si reconoce la invariabilidad del área cuando compone una figura en otra (ind 2.7 en *percepción de propiedades*) o advierte la necesidad de unidades convencionales y el establecimiento de la relación inversa entre distintas unidades y el resultado del área (ind 4.4 e ind 4.5 en *percepción de propiedades*). En función de ello, con “carecemos de información”, hemos indicado estos señalamientos.

La trayectoria así caracterizada, se desplaza desde *producción de la imagen*, de la noción de área con las distintas piezas del tangram hasta *Percibir propiedades* de algunos aspectos de la noción, motivo de este trabajo.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo B.-Producción de una imagen C.- Posesión de una imagen D.- Percepción de Propiedades E.- Formalización

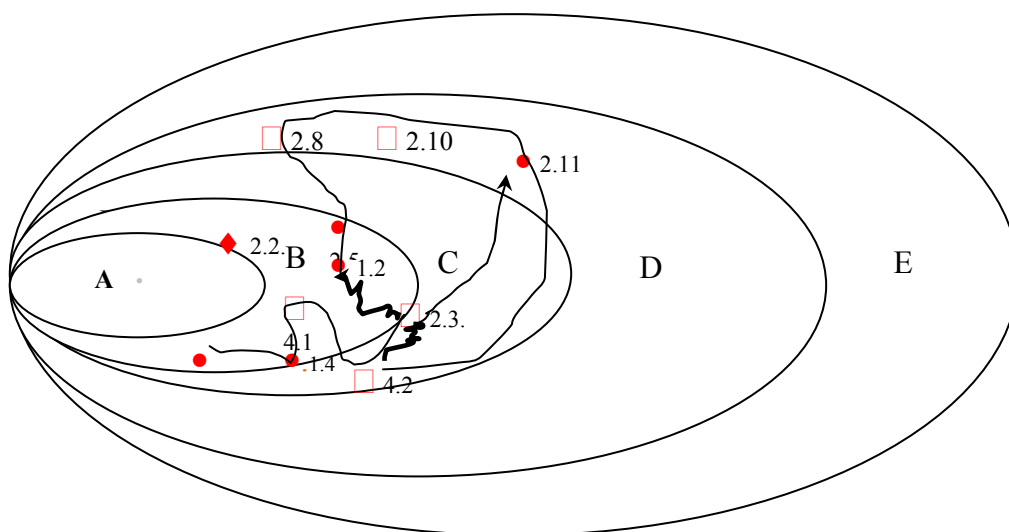


Gráfico de comprensión S de Mirta asociada a los ítem 8.1 al 8.5 inclusive.

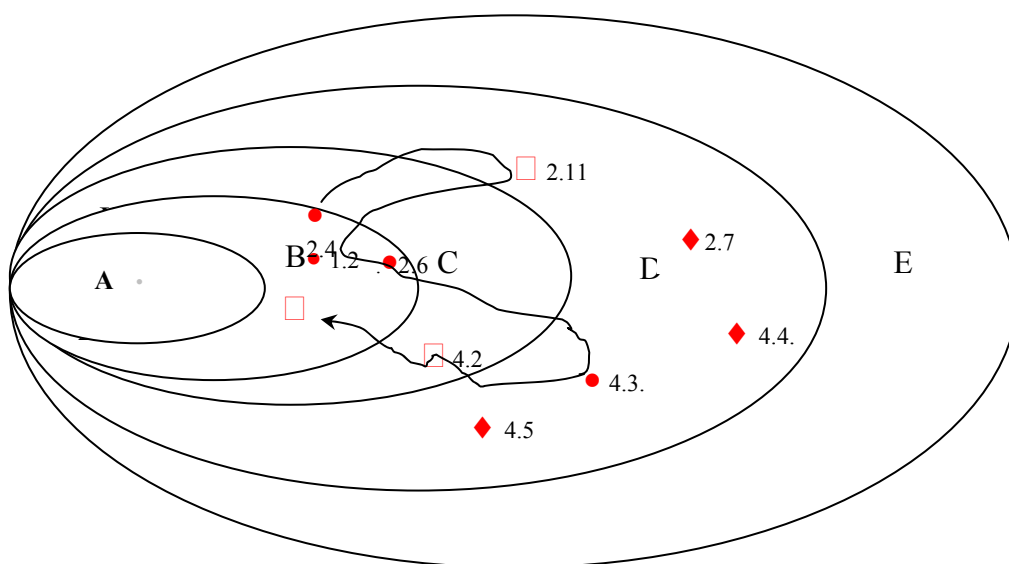


Gráfico de comprensión S de Mirta asociada a los ítem 8.6 al 8.10.

- 1.1.-Maneja el material mediante manipulación libre.
- 1.2.-Aparea lados.
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.

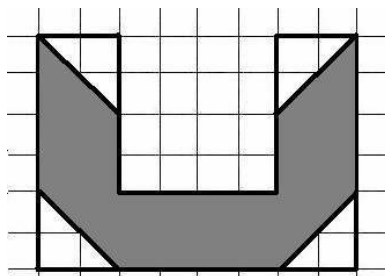
- 2.5.-Compara superficies a través de la medición y utilización de una unidad conveniente
- 2.6.-Construye superficies a través de la medición y utilización de una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones
- 4.1.-División y pavimentación de la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
- 4.4.-Comprende la necesidad de unidades convencionales.
- 4.5.-Distingue la proporción inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida.

Con respecto a las interacciones producidas con sus compañeras, en general Mirta trabaja sola, en algunas ocasiones se observan interpretaciones de colaboración directa entre ella y Patricia. En cambio con Cecilia, no podemos afirmar que las explicaciones vertidas generen momentos de aprendizaje -colaboración indirecta y multivocal - pues si bien Cecilia explica su procedimiento, Mirta se lo cuestiona.

Actividad 9 (SM9):

✓ *Determina el área de la figura sombreada:*

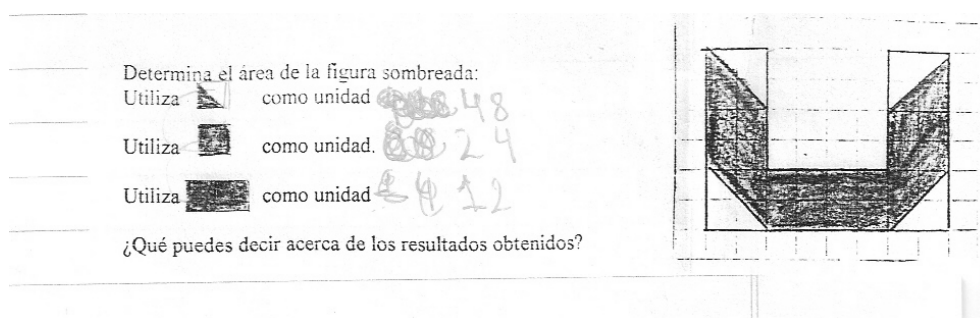
- a. Utiliza  como unidad.
- b. Utiliza  como unidad
- c. Utiliza  como unidad



¿Qué puedes decir acerca de los resultados obtenidos?

A.- Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

Mirta completa un cuadrado sobre el triángulito. Al triángulo como unidad, le asigna 12, al cuadrado le asigna 24 y rectángulo 4, pero tacha esos valores y al costado coloca “48, 24 y 12” respectivamente.



(PEM9)

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 9

Los niños y en particular Mirta, comienzan a representar mentalmente las unidades propuestas por el problema (ind 1.4 en *Producción – Posesión de una imagen*). Patricia relaciona rápidamente las diferentes unidades de medida y cómo éstas inciden en el número resultante de la medida del área de la superficie, (SP9;(5,42)). Explica a sus compañeras Mirta y Cecilia cómo realizar el cubrimiento sin dejar huecos y la relación entre el cuadrado y el triángulo. Esta intervención invocativa de Patricia produce folding back intencional en Mirta, (FB~I-P) pues la escucha, retrocede a pavimentar la superficie y contar la cantidad de unidades, por ejemplo, el triángulo (ind 4.1 en *Producción de una imagen*). A causa de ello, avanza e identifica una medida de unidad adecuada según expresa: “12 triángulos” (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*).

El resultado es cuestionado por la maestra, pero si pensamos que el triángulo que Mirta considera se corresponde con la mitad del cuadrado formado por cuatro cuadraditos, la respuesta que propone, es correcta. No obstante Mirta cuando responde a la maestra “un cuadrado”-en línea 41.- advierte la necesidad

de establecer unidades convencionales (ind 4.4 en *Percepción de propiedades*), pues el resultado que ha manifestado no corresponde con las unidades solicitadas.

Establece relaciones entre las unidades de medida y es consciente de que el resultado depende de ellas, pues efectúa el conteo y anticipa los otros resultados en función de la relación que logra establecer con las otras figuras. Desde un tratamiento cuantitativo, Mirta comprende que la medida del área de una superficie depende del tamaño de la unidad elegida y establece relaciones entre las distintas figuras que proponen como unidad, (ind 4.3 en *Percepción de Propiedades*) según se observa en (PEP9) y la unidad de significado (SP9, 83,90)).

83. Maestra: podemos decir que sin contar 12 rectángulos

85. Mirta: El triángulo entra dos veces en el cuadrado y éste entra dos veces en el rectángulo.

90. Maestra: Cuando una pieza ocupa más superficie, la repetís menos cantidad de veces. Entonces cuando mido con cada pieza obtengo distintas medidas. Pues cuando mido con el triángulo me da una medida, cuando mido con el cuadrado me da otra y con el rectángulo me da otra. Cuando mido superficies, la medida del área depende de la unidad con la que mido.

O: Todos concluyen en lo mismo, tengo que saber la unidad con que se mide.

SP9, (83,90)

La demanda de esta actividad respecto del nivel de comprensión se sitúa: con un indicador en: *Producción de una imagen* - capa B – en el anillo *Producción - Percepción de Propiedades* - capa B y capa C- y *Posesión de una imagen* - capa C- respectivamente y dos indicadores en este último -*Percepción de propiedades*; capa D-

El análisis de las tablas de diálogo y la producción escrita, nos permite construir el siguiente gráfico de comprensión, que muestra el proceso de comprensión de la niña.

Dibujamos la trayectoria completa y observamos un tramo más grueso y zigzagueante que señala el folding back, del indicador 1.4 en *Producción-Posesión de una imagen* al indicador 4.1 en *Producción de una imagen*, pues

advierde la representación de las unidades solicitadas y retrocede a pavimentar la superficie y contar la cantidad de ellos (ind 4.1 en *Producción de una imagen*).que le permite avanzar en su proceso de comprensión y arribar a un resultado según la unidad considerada.(ind 4.2 en *Posesión de una imagen*).En general la trayectoria se desplaza entre las capas *producción de una imagen*, hasta la *percepción de propiedades*, en este caso las distintas unidades de medida y la relación entre ellas.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- A.-Conocimiento primitivo
- B.-Producción de una imagen
- C.- Posesión de una imagen
- D.- Percepción de Propiedades
- E.- Formalización

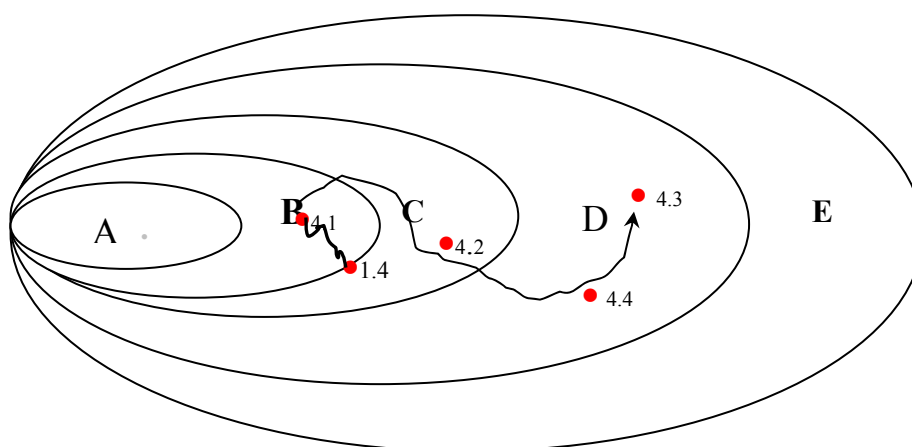


Gráfico de comprensión de S de Mirta asociada ala act. 9

- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
- 4.4.- Comprende la necesidad de unidades convencionales

Durante el desarrollo de esta actividad se observan distintos tipos de interacciones que generaron oportunidades aprendizaje, en particular en Mirta. Con Cecilia trataban de entender y formulaban desafíos a las explicaciones de Patricia. Las manifestaciones de Cecilia y Azul, las sugerencias de Patricia y Aylen en distintos momentos del desarrollo de la actividad, denotaron

interacciones multivocal e indirecta, que permitieron a Mirta establecer, al menos empíricamente, relaciones entre las unidades de medida y, la incidencia de la unidad y la figura dada.

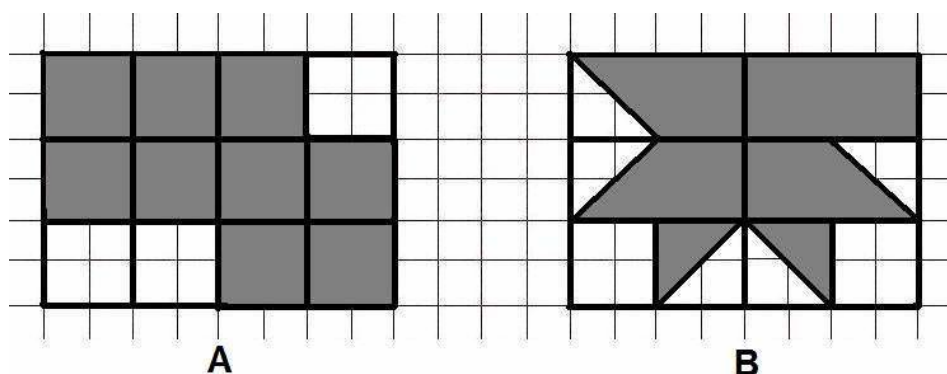
Las relaciones mencionadas las escribe en el pizarrón Aylen en forma gráfica y a través de flechas indica esas relaciones.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
5 Maestra: <i>Determina el área de las figuras sombreadas utilizando estos tres tipos de unidades. ¿Qué puedes decir de los resultados obtenidos?</i> O: Patricia responde rápidamente. 11 Patricia: Primero me fije en el cuadrado y luego lo multiplico por 2 para saber el triángulo. 15 Maestra: ¿Vos Cecilia, encontraste un solo rectángulo? 18 Cecilia: Si.	Maestra Patricia Maestra Cecilia Maestra	Propone Responde Cuestiona Responde Responde	Invita a que viertan su opinión Explica con palabras lo que desea dar a entender Solicita aclaración sobre lo realizado Expresa con palabras lo que desea dar a entender Anima a la niña a que compruebe si su resultado cumple con las condiciones del problema	al grupo A la maestra y su grupo Cecilia Maestra Cecilia	Patricia establece relaciones entre las unidades de medida y es conciente que el resultado depende de las mismas.
<i>O La maestra le muestra que puede haber más.</i> 20 Cecilia: 5 rectángulos. 21 Maestra: ¿Cómo los encontraste? O: Cecilia lo muestra pero no lo comprende. En tanto Patricia le explica a Mirta y a Flor como tienen que hacerlo, les dice que primero busquen el cuadrado y luego lo multipliquen por dos para sacar la cantidad de triángulos. Patricia le explica a Cecilia y le muestra cómo contarlos pero ella le refuta en función de su resultado. 36. Maestra. ¿Cómo lo estás contando? 39. Mirta: Hay 12 triángulos.	Cecilia Maestra Cecilia Patricia Cecilia Maestra Mirta	Reacciona Pregunta Responde Responde Reacciona Pregunta Contesta	Niega lo que expresa la compañera Invita a que vierta su opinión Explica con palabras lo que desea dar a entender Solicita que justifique su afirmación. Valida su procedimiento. Solicita aclaración Reformula lo realizado y expresa claramente el resultado al que ha arribado	Mirta, Flor y Cecilia Patricia Mirta Maestra	Mirta empíricamente establece relaciones entre las unidades de medida
40. Maestra: ¿Eso es un triángulo? 41. Mirta: No, un cuadrado. 42. Maestra. ¿Entonces, Mirta? O: Mirta cuenta toda la figura y le da 48 triángulos, 24 cuadrados y 12 rectángulos.	Maestra Mirta Mirta Mirta	Cuestiona Contesta Pregunta Contesta			(SM 9,(5,42))

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
64. Maestra: ¿Se animan a pasar a medir? O: Ezequiel pasa y mide con el triángulo la cantidad que hay, luego cuenta de 2 en 2 por cada cuadrado.	Maestra Ezequiel	Pregunta Responde	Invita a que viertan su opinión. Explica con gráficos y gestos lo que desea dar a entender	A los niños	
70. Maestra: Nos animamos a decir que una unidad es la mitad de la otra. O: Azul mide con el cuadrado.	Maestra	Propone	Invita a que viertan su opinión.	A los niños	
74. Azul: 24 cuadrados.	Azul	Responde	Acepta lo expresado por el compañero	Maestra y el grupo	
75. Maestra: ¿Qué paso ahora?	Maestra	Cuestiona	Discute lo realizado	A los niños	
76. Aylen: es lo que yo decía, si contas los rectángulos te da 12.	Aylen	Responde	Reformula lo expresado con una expresión más formal	Maestra	
78. Maestra: ¿por qué? ¿Qué relación hay?	Maestra	Cuestiona	Discute si el resultado tienen sentido en función de las condiciones del problema	A los niños	
80. Aylen: Pues dos cuadrados forman un rectángulo.	Aylen	Responde	Valida sus procedimientos.	Maestra y al grupo	Aylen establece relaciones entre las unidades de medida y es conciente que el resultado depende de las mismas.
83 Maestra Podemos decir que sin contar, hay 12 rectángulos.	Maestra	Cuestiona	Alienta para que los alumnos expresen lo realizado	A los niños	
85: Mirta: El triángulo entra dos veces en el cuadrado y este entra dos veces en el rectángulo.	Mirta	Responde	Reformula colaborativamente lo realizado con otros	Maestra y al grupo	
89 Maestra. Cuando una pieza ocupa más superficie, la repetís menos cantidad de veces. Entonces cuando mido con cada pieza obtengo distintos medidas. Pues cuando mido con el triángulo me da una medida, cuando mido con el cuadrado me da otra. Entonces la medida depende de la unidad con la cual mido.	Maestra	Responde	Reformula lo enunciado por la niña con una expresión más formal.	A los niños	
O: Todos concluyen y acuerdan que tienen que saber la unidad con la cual miden.					
105. Todos: Tenemos que saber la unidad con que medimos.	Todos	Responden	Explican con palabras lo que desean dar a entender.	Maestra	Mirta empíricamente establece relaciones entre las unidades de medida y entre la medida y la unidad
					SM9 ₃ (64,105)

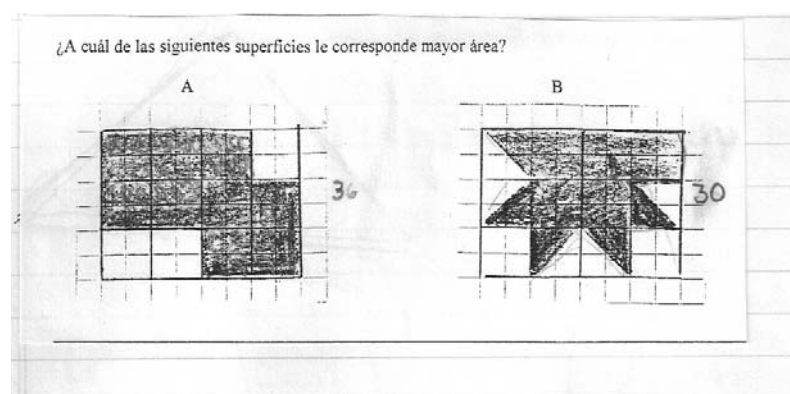
Actividad 10 (SM10):

✓ ¿A cuál de las siguientes superficies le corresponde mayor área?



A.- Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo

Mirta escribe 36 en la figura A y 30 en la figura B.



PEM10

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 10

En la tabla de diálogo (SM10, (3,60)) observamos que Patricia considera el cuadrado como unidad, afirma cual es la superficie que responde a lo solicitado e interroga a Mirta sobre su procedimiento.

En principio Mirta considera los cuadraditos (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*), cuenta para la figura A: “36 cuadraditos” y la explicación que Patricia

ofrece a Cecilia que había considerado triángulos, produce folding back no intencional pero efectivo en Mirta (FB~IE-P), y en función de ello, retrocede a representar mentalmente la composición de triángulos (ind 1.4 en *Producción – Posesión de una imagen*) para avanzar en su proceso de comprensión y, cuando es necesario, componer dos de ellos para formar el cuadradito unidad (ind 2.4 en *Producción-Posesión de una imagen*). Todo ello, en vista a calcular el área de la otra figura en función de la misma unidad de medida y comparar (ind 2.5 en *Producción-Posesión de una imagen*), puesto que, reconoce que la medida del área depende de la unidad que considere (ind 4.3 en *Percepción de propiedades*).

Al interactuar con Cecilia y Flor acerca del procedimiento, arriban al resultado, pero en su producción escrita (PEM10), solo se observa un número. Ppodemos pensar que ha intentado indicar la medida del área de las figuras.

Como ya hemos señalado, las intervenciones de Mirta, Cecilia y Patricia señalan, especialmente en Mirta, la representación mental de la composición de figuras y la conveniencia de utilizar la misma unidad de medida para comparar las figuras.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con tres indicadores en el anillo *Producción- Posesión de propiedades* –Capa B y Capa C- y con un indicador en cada una de las capas *Posesión de la imagen*- Capa C- *Percepción de Propiedades* – Capa D- *Formalización*- Capa E -

Lo expresado nos permite construir el siguiente gráfico de comprensión que denota el proceso de construcción que Mirta logra. Para ello, se desplaza desde *producción de la imagen*, hasta *percepción de propiedades*, para comparar las superficies en función del área de las mismas.

Dibujamos la trayectoria completa en donde indicamos un tramo más grueso y zigzagueante para indicar el folding back del indicador 4.2 en *Posesión de una imagen* al indicador 1.4 en *Producción.-Posesión de una imagen*. Es decir la niña retrocede en su proceso de comprensión, representa mentalmente la composición de triángulos, y cuando es necesario, compone dos de ellos para formar el cuadradito unidad que calcular del área y facilitar la comparación

y, en función de ello, la maestra institucionaliza la necesidad de considerar una unidad común para comparar superficies y que su cantidad depende de unidad que consideren

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
3 Patricia: <i>¿A cual de las siguientes figuras le corresponde mayor área? (fig A y fig B)</i> O: <i>Patricia comienza a contar los cuadrados de la figura A y le pregunta a Mirta. ¿Cómo contas vos?</i> Flor observa lo que hace Patricia y ella toma la figura B y cuenta primero los cuadrados enteros.	Patricia Patricia Flor	Pregunta Responde Reacciona	Le solicita que lea el enunciado Propone un procedimiento e invita a su compañera a que vierta su opinión Acepta parcialmente y la completa	Al grupo Mirta Al grupo	Patricia utiliza la misma unidad para comparar
16 Patricia: <i>yo ya conté los cuadrados Y A tiene más, pero tendría que usar la hoja de calcar.</i> 21 Mirta: <i>A mí me da 36 cuadrados.</i> 23 Cecilia: <i>a mí también.</i> O: <i>Mirta considera los cuadrados chicos, Cecilia cuenta en la figura B cuadrado por cuadrado. Mientras tanto la docente les lee nuevamente la consigna.</i>	Patricia Mirta y Cecilia	Responde Responde	Resuelve en voz alta Aceptan parcialmente la idea y la completan	Al grupo Patricia	
25 Maestra: <i>Hay una superficie sombreada tanto en la figura A como en la figura B, traten de elegir una unidad de medida que ustedes crean conveniente para poder responder a la pregunta.</i> 32: Cecilia: <i>corresponde mayor superficie a la A.</i> 34 Patricia: <i>a mí me dio 26</i> O: <i>Cuanta los cuadrados chicos de B.</i> 36 Cecilia: <i>Yo conté triángulos como 1</i> O <i>Cecilia lo considera en la figura B</i>	Maestra Cecilia Patricia Cecilia	Propone Responde Responde Responde	Plantea un nuevo procedimiento alternativo. Acepta lo expresado por Patricia. Aporta ideas al análisis y resultado del problema Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento.	Al pequeño grupo Al pequeño grupo Patricia, y Mirta	Mirta , Cecilia y Patricia denotan la representación mental de la composición de figuras, y cada
38 Patricia: <i>mal....el ½ son dos triángulos para 1....hay dos mitades y forman un cuadrado.</i> O: <i>Cecilia cuenta nuevamente la figura B con las indicaciones de Patricia y cuenta 30.</i>	Patricia Cecilia	Reacciona Responde	Clarifica aspectos relevantes a su compañera Explica el procedimiento	Al pequeño grupo Patricia y Mirta	

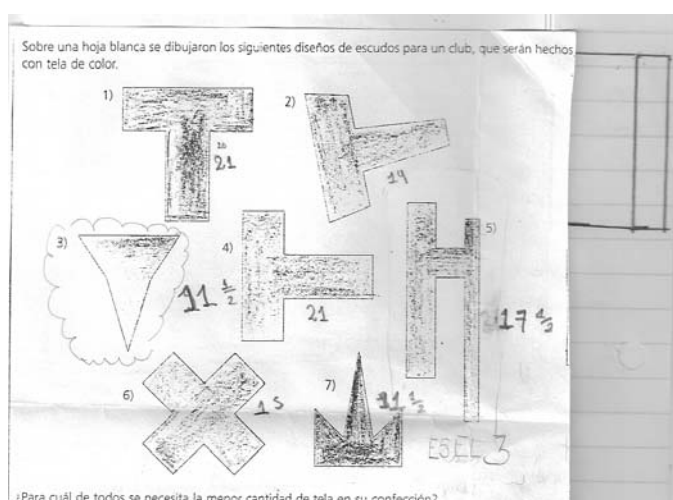
45 Patricia pero este triángulo no es un cuadrado. O: Mirta cuenta igual que Patricia formando con dos mitades 1. Y Patricia reconoce que Cecilia siguiendo sus instrucciones considera dos triángulos para un cuadrado	Patricia	Reacciona	Cuestiona lo realizado por la compañera Resuelven de manera conjunta	Cecilia	una para comparar, utilizan la misma unidad
49 Patricia: la B tienen 30.	Mirta y Patricia Cecilia	Responden	Reconoce su equivocación y admite lo realizado por sus compañeras	Patricia	
55 Mirta ¿Por qué 30?.	Patricia	Responde	Explica con palabras lo que desea dar a entender	Mirta y Cecilia	
56 Cecilia mira....estas dos mitades son 1 Y así...1,2,3,....	Mirta	Responde	Cuestiona el resultado	Patricia	
60 Flor: A mi también me da 30. O: Rápidamente las cuatro coinciden en que la figura A tienen mayor área y comienzan a conversar de otras temas	Cecilia	Responde	Reformula de manera colaborativa lo realizado con Patricia.	Mirta	
	Flor	Responde	Acepta lo expresado por sus compañeras	Mirta y al pequeño grupo.	
					SM 10 (3,60)

Actividad 11 (SM11):

Resuelve nuevamente la situación 3 utilizando las cuadrículas de acetato y comprueba si la elección a la que arribaste es la apropiada

A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Mirta, al lado de cada diseño, escribe un número; por ejemplo, al lado del diseño 1 escribe 21, al diseño 2 escribe 14, el diseño 3 remarca y al lado escribe $11\frac{1}{2}$; al diseño 4 le asigna 21, al costado del diseño 5 escribe $17\frac{1}{2}$, al lado del diseño 6 escribe 15 y por último, al lado del diseño 7, escribe $11\frac{1}{2}$. En el margen inferior derecho escriba “es el 3” y ha dibujado un rectángulo congruente con una parte del diseño 5, prolonga los lados correspondientes a un par de sus lados paralelos, formando otro rectángulo.



En una tabla a la que denomina “DISEÑOS” asigna tres números, 3, 5 y 7 y le asigna a cada uno de ellos, $11/12$; 22 y 11 respectivamente.

PM11

Resuelve nuevamente la situación en la cual debes encontrar el diseño del escudo para el club que menos cantidad de tela necesitas, en este caso utiliza las cuadrículas. Comprueba si la elección fue correcta.

DISEÑOS		
3	5	7
$11/12$	22	11

B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 11

Según se observa en la tabla de diálogo (SM11, (20,51)) Mirta comienza directamente a medir con la plantilla, (ind 4.1 en *Producción de una imagen*), solicita aclaración a su compañera Patricia, quien interactúa principalmente con Cecilia. El protagonismo manifiesto de Patricia muestra un compromiso univocal, por tanto las explicaciones que brinda, le permiten a Mirta utilizar una unidad conveniente (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*) y convencional (ind 4.4 en *Percepción de propiedades*).

Reconoce, por ejemplo, que figuras de distinta forma pueden ser de igual área (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*).

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
O: Patricia solicita papel cuadriculado para poder contar cuando ve las cuadrículas dice ¡ah! Esto me sirve y ubica la cuadrícula sobre cada figura y trata de contar.	Patricia	Reacciona	Propone un procedimiento para la resolución e invita y los demás a que viertan su opinión al respecto.	Al grupo	Entre ellas, Mirta identifica figuras de distinta forma y de igual área a través de unidades convencionales
20 Cecilia: No entran.	Cecilia	Responde	Cuestiona lo realizado por su compañera	Patricia	
O: Flor se distrae y no hace nada, Mirta también superpone la cuadrícula y trata de contar y Patricia cuenta y anota al lado de cada diseño la cantidad de cuadrados.					
27. Mirta: Decime Patricia ¿Cómo lo haces?	Mirta	Pregunta	Expresa desconocimiento acerca de lo que hay que hacer.	Patricia	
28. Cecilia: No me resulta fácil para nada.	Cecilia	Responde	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea	Patricia y Mirta	
30. Patricia: medí primero éste (el diseño 1).	Patricia	Responde	Alienta a la compañera y la orienta para continuar con la estrategia que intenta implementar	Cecilia y a Mirta	
31. Cecilia: 20 y me sobran 2.	Cecilia	Responde	Resuelve de manera conjunta	Patricia y Mirta	
32. Patricia: No...21 porque esto de acá abajo no te va a dar otro cuadrado aunque lo unas.	Patricia	Contesta	Corrige el error de su compañera	Cecilia	
35. Cecilia: 20 me da.	Cecilia	Contesta	Niega lo expresado por la compañera	Patricia	
36. Patricia: Mira Cecilia a mí me sobró esta parte. Señó Cuento estos cachitos que me sobran.	Patricia	Responde	Clarifica aspectos relevantes a su compañera	Cecilia	
Si lo junto me da ½ (en el diseño 1).					
42. Cecilia: ¿Unis los dos de abajo? 21 me da. O Flor trabaja sola y no pregunta nada, la maestra recuerda el problema 3.	Cecilia	Contesta	Valida los procedimientos expuestos.	Patricia	
44. Maestra: Cuando resolvimos anteriormente este problema habíamos concluido que la figura 1, 4 y 6 ¿Cómo eran?	Maestra	Pregunta	Invita a que los niños a que expresen su opinión	Al pequeño grupo	
O: Patricia ya ha determinado que los diseños 1, 4 y 6 tienen 21 ½.	Patricia y el grupo	Responden	Explican con palabras lo que desean dar a entender	Maestra	
51. Todos : equivalentes					SM 11(20,51)

En tanto, observamos en la tabla de diálogo (SP11 (72,147)) que al pretender medir el diseño 5 las niñas dejan la plantilla, puesto que Patricia propone usar la regla y transformar el diseño en un rectángulo. Es decir, intenta construir una figura equivalente para medir sin dificultad con la cuadrícula. Al explicar su estrategia, Cecilia y Flor la escuchan atentamente, pero Mirta se opone manifestando que la maestra les ha dicho “*Que no sirve medir*”.

Estimamos que cuando dice medir se refiere a que no puede usar la regla sino la plantilla- pero las niñas no toman en cuenta sus dichos y todas, empiezan a implementar “la estrategia” de Patricia para medir. Intenta descomponer el diseño y componerlo en otro con forma rectangular (ind 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen*), pero no lo logra, prueba de ello es el dibujo incompleto que se observa en su producción escrita.

En general Mirta trabaja sola, al medir los diseños. La visión de Patricia como autoridad matemática del grupo, podríamos decir que de alguna manera “tapa” las ideas que manifiesta Mirta al grupo, cuando se involucran en explicaciones colectivas vertiendo argumentos y contraargumentos. Igualmente el clima generado durante el desarrollo de esta actividad promovió en el grupo oportunidad de aprendizaje, pues mientras Patricia trataba de explicar su pensamiento a otras niñas, éstas interpretaban y desafiaban dicho procedimiento, muy especialmente Mirta.

La maestra, en función de la estrategia sugerida por Patricia, los procedimientos, los resultados arribados por las niñas y las explicaciones colectivas que caracterizaron un ambiente socialmente constituido en lo que respecta al aprendizaje matemático, considera pertinente explicar el concepto de acotar el área de una superficie entre valores próximos cuando manifiesta “*cuando dicen estamos entre 11 y 11 ½ , puede ser un valor superior y un valor inferior...A veces no se puede, hay que aproximar...dar una respuesta a esta situación es acotar entre dos valores muy cercanos...*” (línea 230)

Muestra de ello es el cuadro que completa Mirta, en el que mide cada diseño utilizando una unidad conveniente (ind 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*).

En cuanto al nivel de comprensión que demanda esta actividad la situamos

con un indicador en *Producción de una imagen*- Capa B- con cuatro indicadores en el anillo *Producción - Posesión de propiedades* – Capa B y Capa C- con un indicador en *Posesión de una imagen* –Capa C- y con dos indicadores en *Percepción de Propiedades* – Capa D.

En base a ello consideramos representativo construir el siguiente gráfico que denota el proceso de construcción que Mirta logra. Dibujamos la trayectoria completa, desplazándose desde el anillo *producción - posesión de la imagen*, hasta la *Percepción de propiedades*, para medir superficies en base al cubrimiento de una unidad que funciona como convencional. Asimismo, del indicador 2.7 en *Percepción de propiedades* al indicador 2.3 en *Producción-posesión de propiedades*, observamos un retroceso, propio del desarrollo de la actividad

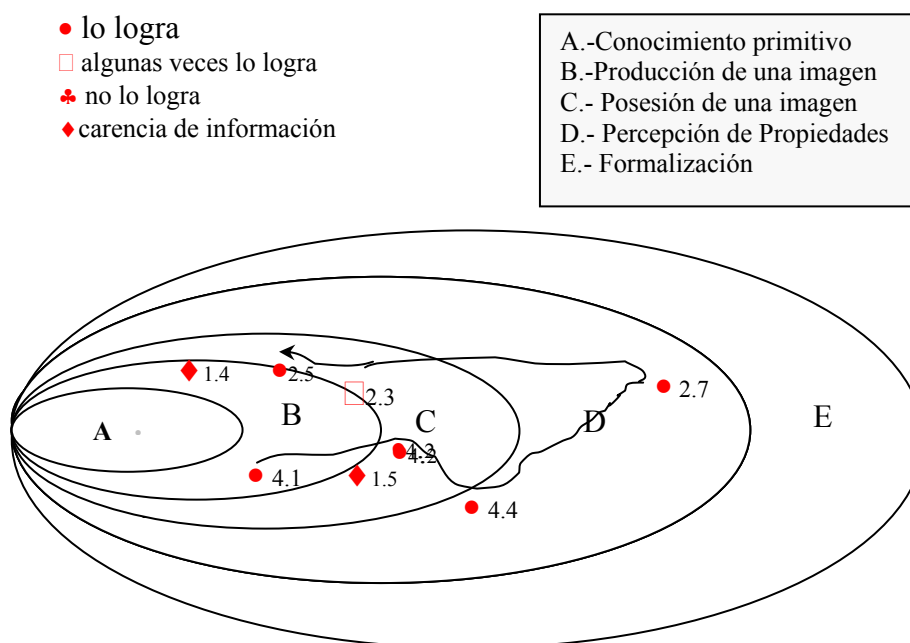


Gráfico de Comprensión -S- de Mirta asociado ala act.11

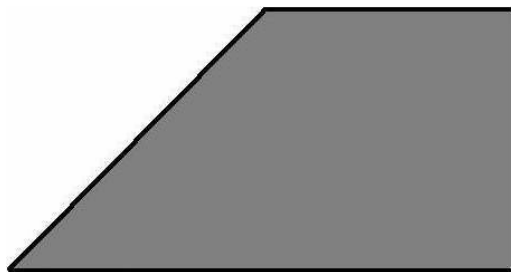
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente.
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el numero de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 4.4.- Advierte la necesidad de unidades convencionales.

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
74 Maestra: Los diseños 5 y 7 tienen más o menos cuadraditos <i>O: Patricia y Cecilia trabajan con dicho diseño. Mirta no ha escuchado a la maestra y continúa diseño por diseño.</i>	Maestra	Pregunta	Solicita aclaración	A los niños	
80 Cecilia: En la 5 ¿Cómo haces?	Cecilia	Pregunta	Expresa desconocimiento acerca de lo que se le pregunta.	Patricia	
81 Patricia: Toma esta parte. <i>O Patricia mide con la regla y Cecilia sigue probando con la cuadrícula.</i>	Patricia	Contesta	Alienta a la compañera y continúa con su estrategia	Cecilia	
84 Cecilia: ¿Cómo mediste la figura 5?	Cecilia	Pregunta	Solicita nuevamente aclaración a la compañera	Patricia	
85 Patricia: Yo uní todas las piezas y me dio este rectángulo) <i>O Patricia le explica valiéndose de un dibujo.</i>	Patricia	Responde	Explica con gráficos lo que desea dar a entender	Cecilia	
 Entonces ahora apoyo la cuadrícula y es mucho más fácil medir.					
94 Cecilia: No puedo.	Cecilia	Responde	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea.	Patricia	
95 Mirta: A mí me dio 17.	Mirta	Responde	Resuelve sola	Patricia y Cecilia	
96 Patricia a mí me dio 28 ½.	Patricia	Contesta	Cuestiona lo expresado por su compañera	Mirta	
97 Flor: a mí me dio 23. <i>O: Cecilia continúa intentando pero dice a cada rato que no puede.</i>	Flor	Contesta	Cuestiona lo expresado por su compañera	Patricia y Mirta	Descompone y compone con otra forma y elige una unidad adecuada. Para medir
101 Mirta: hay Patricia ¿Cómo lo hiciste?	Mirta	Pregunta	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea	Patricia	
104 Cecilia: dame la regla Patricia que lo hago como vos: es más fácil. Tomo el largo de la figura ¿Y ahora? ¿Lo sumo?.	Cecilia	Reacciona	Muestra apertura a los resultados obtenidos por la compañera	Patricia	
109 Patricia No... Yo lo que hice es 1 ½ + 1 ½ <i>O: el 4 ½ lo mide con la regla, es decir que es 4</i>	Patricia	Contesta	Explica con palabras y gestos lo que desea dar a entender	Cecilia	

$\frac{1}{2}$ cm. 125 Cecilia: ahora cuanto mide de largo, $4 \frac{1}{2}$ más. 126 Patricia ¡hay para! 128 Mirta: dice la señorita que no sirve medir. 130 Cecilia: ¡Sí! Para el diseño 5 ... <i>O: Todas han dejado la cuadrícula a un lado y tomaron la regla.....dicen que "les da mejor".</i> 135: Patricia: Miren como se mide. <i>O: va tomando la medida de cada uno de los lados y va sumando y uniendo para formar un rectángulo.</i> 140 Patricia: Ahora sí!!! Apoyas esto (la cuadrícula) y podes contar 142 Mirta: Patricia esta regla no tiene cero ¿por donde empezas a medir ¿ No me da nada con esta regla: <i>O: Patricia y Cecilia afirman que el diseño 5 mide $26 \frac{1}{2}$</i>	Cecilia Patricia Mirta Cecilia Patricia Mirta Patricia y Cecilia	Responde Contesta Reacciona Responde Responde Reacciona Contestan	Acepta parcialmente la idea de su compañera Niega lo que expresa la compañera Aporta una sugerencia al análisis. Cuestiona lo que expresa la compañera Expresa satisfacción con lo realizado Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea Resuelven de manera conjunta	Patricia Cecilia Cecilia y Patricia Mirta Mirta y Cecilia Patricia Mirta	No puede descomponer y componer con otra forma y elegir una unidad adecuada. Para medir	SM11 (72,147)

Actividad 12 (SM12):

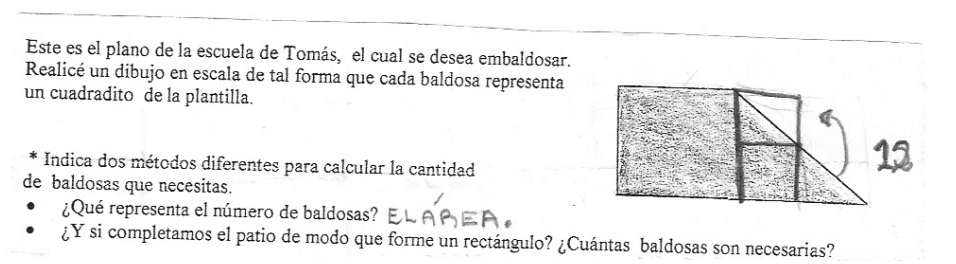
- ✓ *Este es el patio de la escuela de Tomás, el cual se desea embaldosar. Realiza un dibujo en escala de tal forma que un cuadradito de la plantilla, representa una baldosa.*
- a) *Indica dos métodos diferentes para calcular la cantidad de baldosas que necesitas.*
- b) *Y si completamos el patio de modo que formes un rectángulo ¿Cuántas baldosas son necesarias?*



A.-Descripción de la producción en el contexto de la discusión en el grupo'

Mirta subdivide el dibujo del campo en dos regiones, una cuadrangular y la otra triangular. En ésta región, considera los puntos medios de sus lados y subdivide la misma en la un cuadrado y dos triángulos. Con una fecha indica la transposición de un triángulo sobre el otro, obteniendo el rectángulo solicitado y al costado escribe "12".

Finalmente a la pregunta ¿Qué representa el numero de baldosas? responde "El área"



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 12

En principio, Patricia realiza la composición solicitada y para averiguar el área del patio utiliza la plantilla. Mirta mira lo que hace su compañera con la plantilla y cuando desea manifestar una posible opción, sus compañeras no la toman en cuenta. De cualquier modo, la niña representa mentalmente la descomposición a efectuar en el dibujo del patio (ind 1.4 e ind 1.5 en *Producción – Posesión de una imagen*) y expresa la forma de seccionar el dibujo y componer para obtener otra figura equivalente con la anterior (ind 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen*).

Mirta trabaja con Cecilia y Flor, pavimentan la superficie y cuentan los cuadraditos (ind 4.1 en *Producción de una imagen*). Juntas anticipan que necesitan 22 baldosas (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*). En tanto Patricia les cuestiona y fundamenta el resultado, entonces Mirta y Flor vuelven a tomar la plantilla y contando los cuadraditos, arriban al resultado manifestado por Patricia. Aspectos que rescatamos de las tablas de diálogo (SM12, (16,57)) y (SM12, (101,123)).

Mirta reconoce que el resultado al que arribo - 24 baldosas – es el área de la superficie, según lo expresa en su producción escrita, pero arriba al resultado solamente colocando la plantilla y contando las “baldosas” (ind 4.1 en *Producción de una imagen*). A esta altura del desarrollo de la secuencia aspirábamos a que los niños relacionaran la cantidad con el modelo multiplicativo (ind 5.1 en *Producción de una imagen*) o con las dimensiones lineales (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*), al mismo tiempo que advirtieran la necesidad de considerar una unidad convencional(ind 4.4 en *Percepción de propiedades*). Es decir sólo en algunas ocasiones la niña puede vincular el concepto de área en otros contexto

El nivel de comprensión que demanda esta actividad la situamos con un indicador en *Producción de la imagen* – Capa B- con dos indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* – Capa B y Capa C- con un indicador *Posesión de propiedades* – Capa C- con dos indicadores en *Percepción de propiedades* –Capa D- y con un indicador en *Formalización* – Capa E.

Las consideraciones que hemos explicitado nos permiten construir un gráfico de comprensión, en el cual volcamos el logro de cada uno de los indicadores implicados y trazamos también una trayectoria incompleta, pues no disponemos de información de algunos de los indicadores, los cuales nos indica la tendencia en la comprensión que logra la niña, cuando interactúa con esta actividad.

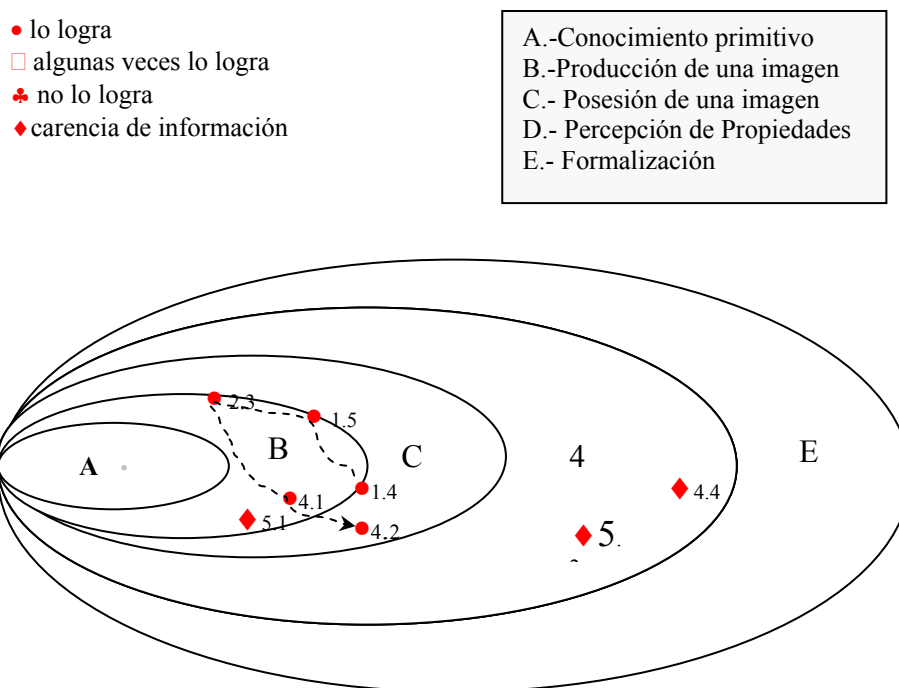


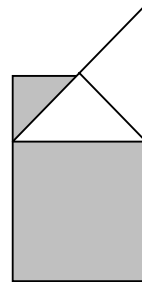
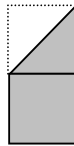
Gráfico de Comprensión -S- de Mirta asociado a la Act. 12

- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 1.5.-Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.
- 2.3.- Utiliza las mimas piezas en distintas formas (recompone)
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleados
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.4.-Advierte la necesidad de unidades convencionales.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.

En cuanto a las interacciones, podemos observar las interacciones producidas en el grupo, pues en principio, Patricia, Mirta y Cecilia se dispusieron a trabajar cada una de ellas desde su zona de posibilidad de desarrollo. Mirta pretendió proponer estrategias de resolución, pero Patricia las desestimó considerando que no aportaba nada nuevo, mientras ella propuso distintas estrategias de resolución de tipo univocal.

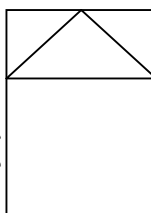
Respecto a proponer otro procedimiento de resolución, no se observan intervenciones significativas de Mirta puesto que Patricia propuso una estrategia e interactuó fundamentalmente con otra niña y la maestra. En todo momento los cuestionamientos que propuso la maestra a la totalidad del grupo les sirvió para reflexionar sobre sus posibles soluciones originales

Unidad de significado	Interlocutor (E.)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R.)	Idea Unidad
16 Cecilia: Esos cuadraditos son muy bonitos pero no me no me sirven. O: Patricia superpone la plantilla sobre la figura.. 19 Patricia. Señó no dice que tenés que contar los cuadraditos. O: Flor y Mirta no saben que hacer. 23: Mirta: tengo una idea mía.	Cecilia Patricia	Responde Contesta	Expresa frustración por ser incapaz de acometer la tarea Aporta una idea a la resolución del problema	Patricia y Mirta y Flor Cecilia	
24 Patricia: Primero averigüemos el área	Mirta	Responde	Alienta a la compañera y brinda una respuesta incompleta para continuar con la estrategia que pretende implementar.	Patricia	
26 Cecilia Mas vale O: Patricia calca la figura y recorta para formar un el rectángulo..	Patricia Cecilia	Contesta Responde	Ignora la intervención de la compañera y lleva adelante su procedimiento. Acepta lo expresado por la compañera	Mirta y el grupo Patricia	
30 Patricia: esto sería el patio.	Patricia	Contesta	Explica con dibujos lo que desea dar a entender	Cecilia	
38 Cecilia: le ponemos otra cosa aquí y forma un rectángulo.	Cecilia	Responde	Clarifica aspectos relevantes a su compañera	Patricia	
40 Patricia: Si ¿y de dónde los sacas? Sobre una cantidad tremenda de baldosas. Por que no se pueden comprar mas baldosas. Ya está. Con papel de calcar, calco un triangulo y lo corto para formar el rectángulo y luego cuento los cuadraditos.	Patricia	Contesta	Ignora las sugerencias de su compañera y lleva adelante su procedimiento	Cecilia	
49 Maestra: Bueno pero tenés que encontrar dos métodos.	Maestra	Pregunta	Solicita otra idea o procedimiento alternativo	Patricia	Mirta descompone y



51: Patricia: uno es con la plantilla.	Patricia	Responde	Explica oralmente lo que desea dar a entender	A la maestra y los niños	compone en otra figura equivalente
52: Maestra: Bueno cuantas baldosas ocupa éste patio. Contalas.	Maestra	Pregunta	Anima a la niña a que compruebe si su resultado cumple con las condiciones iniciales del problema.	Patricia y Mirta	
54 Cecilia: yo armé el rectángulo.	Cecilia	Contesta	Alienta para continuar con la estrategia que pretende implementar	Patricia	
55 Mirta: Mira Patricia acá tengo una forma para cortar el rectángulo.	Mirta	Responde	Proponen una idea e invitan a las compañeras a que viertan su opinión al respecto	Mirta y Flor	
57 Patricia ¿Y que te crees que hicimos?	Patricia	Responde	Cuestiona lo realizado por las compañeras.	Al grupo y la maestra	
					SM 12,(16,57)

Unidad de significado	Interlocutor (E)	Acción	Naturaleza de la acción	Interlocutor (R)	Idea Unidad
101. Maestra: ¿Cómo hacemos con el triángulo que quedo ahí? ¿Qué parte de la superficie es, lo que queda con respecto al cuadrado?	Maestra	Pregunta	Solicita que viertan su opinión.	A los niños	
106. Patricia: me parece que no alcanza a ser la mitad. O: Cecilia, Flor y Mirta le dicen a Patricia que dio 22 baldosas y no 24.	Patricia Cecilia, Flor y Mirta	Responde Reaccionan	Explica con palabras lo que desea dar a entender. Cuestiona lo realizado por la compañera.	Maestra Patricia	
110. Mirta: Tal vez cambie cuando formamos el rectángulo. Flor y Mirta superponen la cuadrícula y verifican el resultado que anticipa Patricia	Mirta	Responde	Muestra apertura a los resultados vertidos por la compañera.	Cecilia y Flor	
114. Cecilia: no entiendo lo que hace Patricia, a mí me dio 22.	Cecilia	Pregunta	Cuestiona el resultado de la compañera.	Al grupo	Mirta superponen la cuadrícula y determina la cantidad de baldosas
117. Patricia: Lo volví a hacer y es 24. Me queda por la mitad. O. Patricia dibuja y Mirta observa lo que hace	Patricia	Responde	Valida el procedimiento expuesto.	Al grupo	
120. Cecilia: Si haces un rectángulo, el triángulo va a seguir estando entonces te va a dar 24. 123. Maestra: Un método ya lo saben. Apoyo la plantilla y cuento. Determinaron que la cantidad baldosas es 24	Cecilia Maestra	Responde Propone	Acepta lo expresado por la compañera Sintetiza el resultado arribado por las niñas	Mirta. Al grupo	
					SM12,(101,123)



Actividad 13 (SM13):

- ✓ *Dibuja la palma de tu mano sobre la hoja de carpeta...Calcula el área aproximada de la superficie que ocupa*

A.- Descripción de la producción escrita

Mirta dibuja en detalle su mano en una hoja, considerando las uñas, el anillo y la pulsera, al costado dibuja un segmento, cuyo extremo superior lo designa con “0 cm.” y al extremo inferior le asigna “16cm”.

**B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad****13**

A través de esta actividad se pretende seleccionar una unidad adecuada para medir la superficie irregular, a partir de una situación real y verosímil. De manera que permitiera a los niños seleccionar estrategias de medición que lleven aparejada la comprensión de la noción de la unidad conveniente para medir. En particular, para medir la superficie de la mano se esperaba que Mirta iterara una misma o más, unidad/es de medida sobre toda su extensión, por ejemplo, a través de la inclusión de cuadrados y rectángulos, o bien recubriera con un cuadriculado, similar a la plantilla de acetato utilizada durante el desarrollo de la secuencia. En cambio, ella no reconoció este procedimiento y, en lugar de considerar la

superficie como una magnitud bidimensional y en consecuencia también, la unidad, considera solamente la longitud de la mano, según esboza mediante el segmento al costado del dibujo, es decir considera, una unidad unidimensional (el cm.). (ind 4,2 en *Posesión de una imagen* e ind 4,4 en *Percepción de propiedades*). Ni siquiera relaciona la unidad de superficie con la de longitud a través de producto de medidas.

Analizando nuevamente el enunciado del problema, decía “*Calcula el área aproximada de la superficie que ocupa*”, pues Ward citado por Dickson (1991) descubrió en una investigación con niños de 10 años que cuando la redacción de un problema no se mencionaba la palabra *área* los niños tendían a medir superficies mediante una sola dimensión, sin embargo, Mirta no da muestra de ello.

De la producción escrita de Mirta inferimos que la niña no ha podido vincular el concepto a este contexto real, y respecto a los indicadores 4.1.- en *Producción de una imagen* y 5.2.- en *Percepción de propiedades*, carecemos de información de su logro.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- | |
|--|
| A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización |
|--|

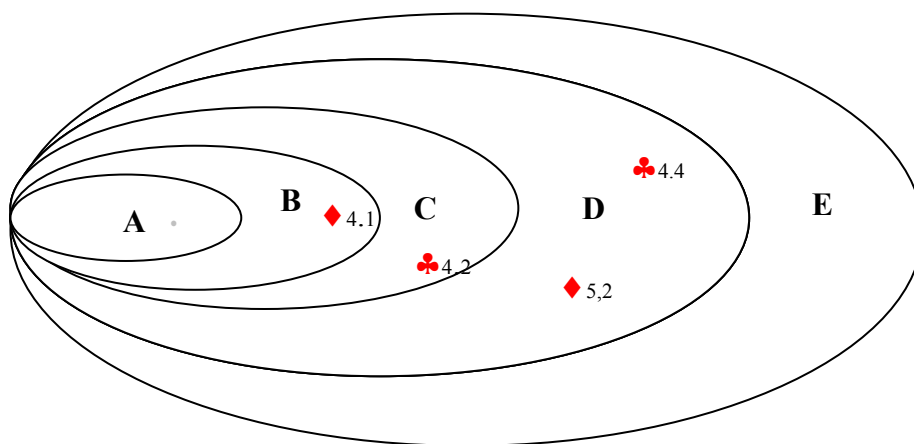


Gráfico de comprensión – S- de Mirta asociado a la act.13.

- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.4.-Comprende la necesidad de una unidad convencional.
- 5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.

4.3.3.1.-RELACIÓN ENTRE LOS GRÁFICOS DE COMPRENSIÓN: DESEABLE Y EL DE MIRTA.

Como ya anticipamos al comenzar el capítulo y referirnos a los casos, en esta instancia analizamos cada una de las actividades en función del desarrollo que realiza un caso en particular, el diálogo con sus compañeras cuando trabajan justas. A fin de recabar información acerca del logro de los indicadores de las categorías relacionadas con la construcción del concepto y de las interacciones que facilitan dicho proceso.

Luego de efectuar el análisis de las actividades que componen la secuencia de aprendizaje, en este apartado volcamos en un gráfico de comprensión - que denominamos *deseable*- todos los indicadores que intervienen, a efectos de dar cuenta sobre la comprensión deseable en la niña. Siendo su distribución la siguiente: seis indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- siete indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* –Capa B y Capa C –dos indicadores en *Posesión de una imagen* - Capa C- nueve indicadores en *Percepción de propiedades* – Capa D- y un indicador en *Formalización*- Capa E-.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ♦ carencia de información

- | |
|--|
| A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización |
|--|

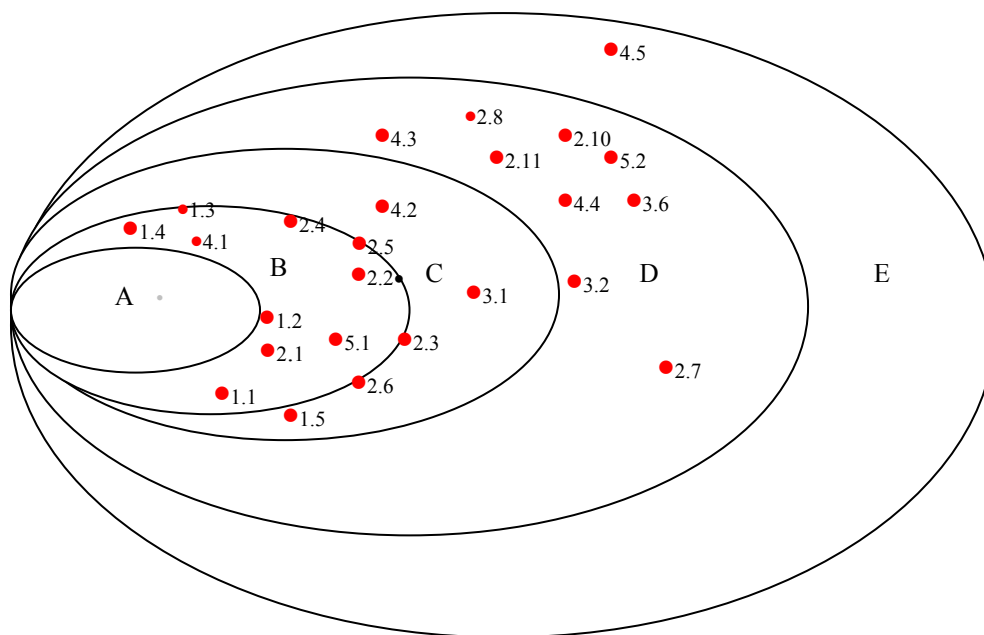


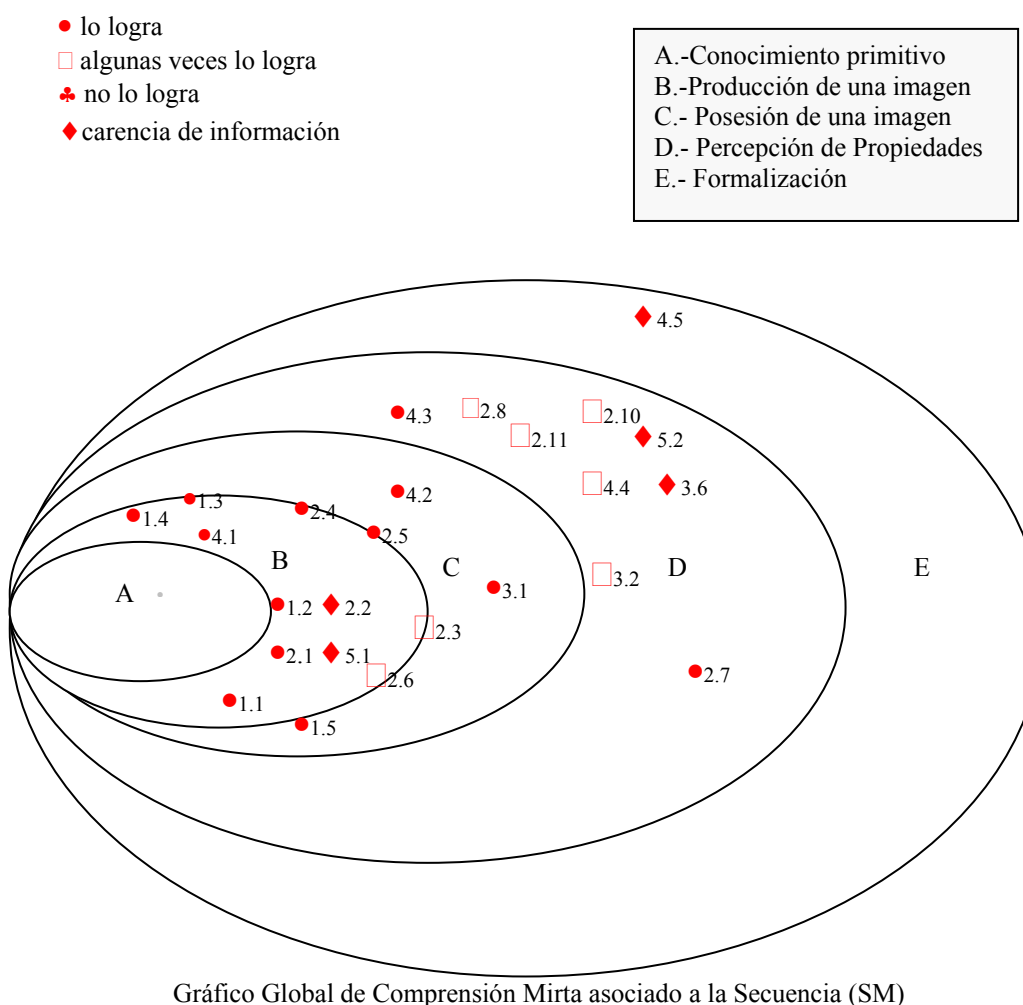
Gráfico Global de Comprensión Deseable asociado a la Secuencia (S)

- 1.1.-Maneja el material mediante manipulación libre
- 1.2.-Aparea lados.
- 1.3.-Aparea vértices
- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 1.5.- Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.
- 2.1.-Compara superficies por percepción visual.
- 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión.
- 2.3.-Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).
- 2.4.-Compara superficies por composición y descomposición.
- 2.5.-Compara superficies a través de la medición y utilización de una unidad conveniente
- 2.6.- Construye superficies a través de la medición y utilización de una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones
- 3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura
- 3.2.- Reconoce que a mayor /igual /menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/menor perímetro de la misma.
- 3.6.- Ordena según el perímetro, figuras equivalentes.
- 4.1.- Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada

- 4.4.-Comprende la necesidad de unidades convencionales.
- 4.5.-Distingue la proporción inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2.-Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras.

Es decir, esperamos que la niña con el logro de los indicadores propuestos desarrolle la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja y el área como cualidad de los objetos que permite compararlos; distinga y establezca relaciones entre área y perímetro; conceptualice el área como medida de cubrimiento; comprenda las fórmulas para el cálculo de área del cuadrado, rectángulo y triángulo como camino más económico.

A continuación construimos el gráfico de comprensión de Mirta y en él, pretendemos detectar el logro de los indicadores mencionados, ubicado cada uno en una capa o anillo de comprensión determinado.



Relacionamos ambos gráficos de comprensión- el *Deseable* con el caso “Mirta”- explicitamos el logro de los indicadores alcanzados por la niña. Algunos de ellos, involucran el folding back, según detectamos en la trayectoria que muestra el gráfico de las capas asociadas, cuando efectuamos el análisis de cada una de las actividades. Por ejemplo:

Respecto a desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una compleja, observamos que la niña puede formar figuras y utiliza para ello, todas o algunas de las piezas del Tangram, sin superponerlas y a través del apareo de sus lados (ind 1.2 en *Producción de una imagen*) o sus vértices (ind 1.3 en *Producción- posesión de una imagen*). De igual forma identifica figuras simples dentro de otra compleja (ind 1.5 en *Producción- posesión de una imagen*) y representa mentalmente su composición (ind 1.4 en *Producción- posesión de una imagen*) (Actividades 1, 2 y 8)

Para percibir el área como cualidad de las superficies que permite compararlas y ordenarlas, en principio Mirta lo hace a través de su percepción visual (ind.2.1 en *Producción de una imagen*) y luego lo realiza desde su representación geométrica- por romper y rehacer- (ind 2.4 en *Producción- posesión de una imagen*), .cuando intenta comparar los diseños 3 y 5 en la actividad 3, pues sus explicaciones: “Corto esto y lo pongo aquí, es decir relleno lo que falta y luego observo que esta parte sobra, entonces considero que el diseño 5(la H) necesita más tela que el diseño 3” (SM3, en línea 110) lleva a que sus compañeras efectúen la comparación a través de este método. En cambio en otro momento de la secuencia Mirta compara figuras como resultado del folding back promovido por su compañera Patricia de manera no intencional, pues lleva a Mirta a retroceder en su proceso de comprensión, a representar mentalmente distintas figuras (ind 1.4.- en *Producción-Poseción de una imagen*) para luego efectuar la comparación por composición-descomposición de las distintas figuras (2.4 en *Producción-Poseción de una imagen*). En cambio, no contamos con información que denote que la niña realiza la comparación por métodos directos, a través de la superposición o inclusión (ind 2.2 en *Producción –poseción de una imagen*).

Durante el desarrollo de otras actividades la niña tiende a detectar la equivalencia de superficies primeramente, por percepción visual- actividades 4 y 8

– o relaciona esta noción con el perímetro de las superficies, como observamos en las actividades de los cuestionarios finales. Mirta en principio no compara superficies a través de la medición con una unidad conveniente. Recién en la actividad en que utiliza como recurso el Tamgran, el folding back explícito e intencional promovido por su compañera Cecilia la lleva a retroceder en su proceso de comprensión, a aparear las distintas piezas por sus lados (ind 1.2 en *Producción de una imagen*) para luego comparar las distintas piezas a través de la medición de una unidad conveniente.(ind 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*). Asimismo, reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía (ind 2.7.- en *Percepción de propiedades*).

Cubre las distintas piezas del tamgran en función de otra que opera como unidad, (ind 4.1 en *Producción de una imagen*) pero no es capaz de expresar en área de cada una de ellas. Recién lo expresa, cuando identifica figuras iguales, es decir reconoce la forma de ambas y realiza el cubrimiento respecto de otra figura que funciona como unidad. Las intervenciones de su compañera Patricia promueven el logro de algunos de los indicadores. Por ejemplo, Mirta considera una figura como unidad adecuada (ind 4.2 en *Producción de una imagen*), a través del folding back promovido de manera no intencional por su compañera, pues la lleva a retroceder a pavimentar la superficie, es decir al indicador anteriormente mencionado y recién identificar a la figura, como unidad adecuada. También la intervención invocativa de ella, le permite a Mirta al menos empíricamente, en distintos momentos del desarrollo de la secuencia, establecer la relación entre las distintas unidades de medida, la medida de la superficie y su dependencia, (ind 4.3 e *Percepción de Propiedades*), cuando manifiesta: “*el triángulo entra dos veces en el cuadrado y éste entra dos veces en el rectángulo, entonces el área de la figura te da: 48 triángulos, 24 cuadrados y 12 rectángulos.... Todos concluyen, que tienen que saber la unidad con la cual miden*”(SM 9,(5,42)). Es decir, Mirta anticipa los diversos resultados que surgen en función de las distintas unidades de medida. Sin embargo no disponemos de información acerca que pueda establecer la relación inversamente proporcional entre la unidad de medida y la medida del área (ind 4.5 en *Formalización*).

Sólo algunas veces, construye una figura de área solicitada, según una unidad establecida (ind 2.6 en *Producción-Posesión de una imagen*). (Actividad 8)- Al pretender distinguir la figura unidad en otra de área dada, no tiene en cuenta la congruencia según esa unidad, en el cubrimiento que realiza.

Las intervenciones de tipo univocal con Patricia y Cecilia, le permiten a Mirta distinguir, en alguna oportunidades, dos o más figuras equivalentes y de distinta forma (ind 2.8 e ind 2.10.- en *Percepción de Propiedades*), al utilizar una misma unidad convencional (ind 4.2. en *Posesión de una imagen* e ind 4.4 en *Percepción de propiedades*) y disponer las piezas en distintas posiciones (ind 2.3 en *Producción-Posesión de una imagen*).

Respecto a la relación entre las partes de una figura, Mirta no tiene en cuenta que dichas partes sean figuras equivalentes, sino que centra su atención en el número de ellas. Hasta que el folding back no intencional promovido por Patricia que la lleva a retroceder a disponer de distinta forma las piezas (ind 2.3 en *Producción –Posesión de una imagen*) y avanzar en dicho proceso a establecer la relación entre cada parte y el total a través de una fracción (ind. 2.11 en *Percepción de propiedades*)

Con respecto a la relación entre el área y el perímetro de diversas figuras, en la actividad 6, cuando se les solicita la comparación de perímetro entre varias figuras equivalentes, Mirta bordea con el hilo cada una de las figuras según lo solicitado, retrocede en su proceso de comprensión, percibe que según aparece los lados de las figuras (ind 1.2.- en *Producción de una imagen*) el perímetro cambia, no es capaz de advertir la independencia entre las variaciones del área y el perímetro (ind 3.2.- *Percepción de propiedades*). Por lo tanto, si bien se produce un folding back provocado por ella misma, de manera no intencional, éste resulta ineficaz (FB~ I-ineficaz- M). En la niña perdura el preconcepto acerca de la correspondencia entre la variabilidad del área y el perímetro (ind 3.2) y podemos pensar que este aspecto funciona como un obstáculo al momento de pretender resolver la actividad en la que se le solicita ordenar figuras equivalentes según su perímetro (ind 3.6 en *Percepción de propiedades*).

Asimismo, al solicitarle construir una figura equivalente pero de perímetro mayor, Mirta anticipa que cuando la figura tiene “*más entraditas*” su perímetro es

mayor, pero no contamos con producción que muestre la construcción solicitada (ind 3.5 en *Percepción de propiedades*).

En la última actividad de la secuencia se pretende hallar el área de una superficie a partir de una situación real y verosímil- el área de la palma de su mano-, de manera que los niños puedan seleccionar aquellas estrategias de medición que permitan resolver la situación, por ejemplo a través de efectuar el cubrimiento sobre toda la extensión de la mano de una figura- cuadrada o rectangular- que funciona como unidad. En lugar de ello la niña considera la longitud de su mano, unidad unidimensional expresada en cm. De manera que el procedimiento empleado no brinda información acerca del cálculo de área según las dimensiones lineales (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*) o el modelo multiplicativo (ind 5.1 en *Percepción de propiedades*).

En todo momento, los cuestionamientos que propone la maestra a la totalidad del grupo, le sirve a Mirta para reflexionar sobre sus posibles soluciones originales, otorgan sentido a las actividades propuesta y favorecen la formulación procedimientos de resolución.

4.3.4.- ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO AL FINALIZAR LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE (EM)

En función del cuestionario explicitado en el capítulo anterior, apartado 3.5.3.1, describimos el desarrollo de Mirta, según el cuestionario completo resuelto por la niña, que adjuntamos en el Anexo XXIV.

Cuando la producción escrita muestra el proceso de construcción que se produce en la niña, la incluimos para dar cuenta de ello.

Actividad 1(EM1): No lo consideramos para el análisis

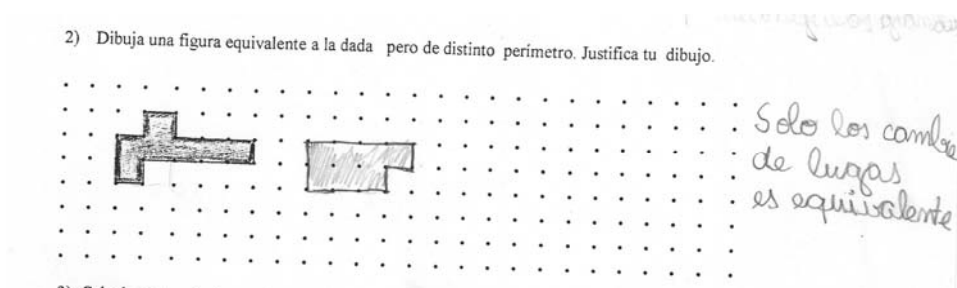
Actividad 2 (EM2):

Dibuja una figura equivalente a la dada pero de distinto perímetro. Justifica tu dibujo.



A.-Descripción de la producción escrita

Mirta a la derecha de la trama, construye una figura, de izquierda a derecha, desplaza el cuadrado situado arriba del segundo cuadrado de la hilera de cinco y lo ubica debajo de él y el quinto cuadrado de esa hilera sigue, manteniendo un lado en común con el anterior pero ahora lo ubica debajo. Al costado escribe “solo lo cambie de lugar es equivalente”



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 2

La niña considera dos de los cuadrados y lo dispone de otra forma apareándolos por sus lados con otros, (ind 1.2 en *Producción de una imagen*), obtiene otra figura (ind 2.6 en *Producción-Poseción de una imagen*). Ambas figuras miden igual, en función del cuadrado como unidad conveniente, (ind 2.5 en *Producción-Poseción de una imagen*). La justificación que expresa Mirta nos permite afirmar que comprende la noción de equivalencia de figuras a través de la conservación del área de las mismas (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*).

Si bien la niña no lo explicita en la justificación que brinda, el perímetro de la figura construida cumple con la condición solicitada (ind 3.5 en *Percepción de Propiedades- Formalización*). Es decir que distingue las nociones de área y de

perímetro (3.1 en *Posesión de una imagen*) y reconoce la independencia de variación entre el área y el perímetro, el dibujo que propone da cuenta de ello.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con un indicador en la capa: *Producción de una imagen*-Capa B-, con tres indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen* – Capa B y Capa C- con un indicador en *Posesión de una imagen* – Capa C- y con un indicador en *Percepción de Propiedades* – Capa D- y un indicador en el anillo *Percepción de propiedades* – *Formalización*- Capa D y Capa E.

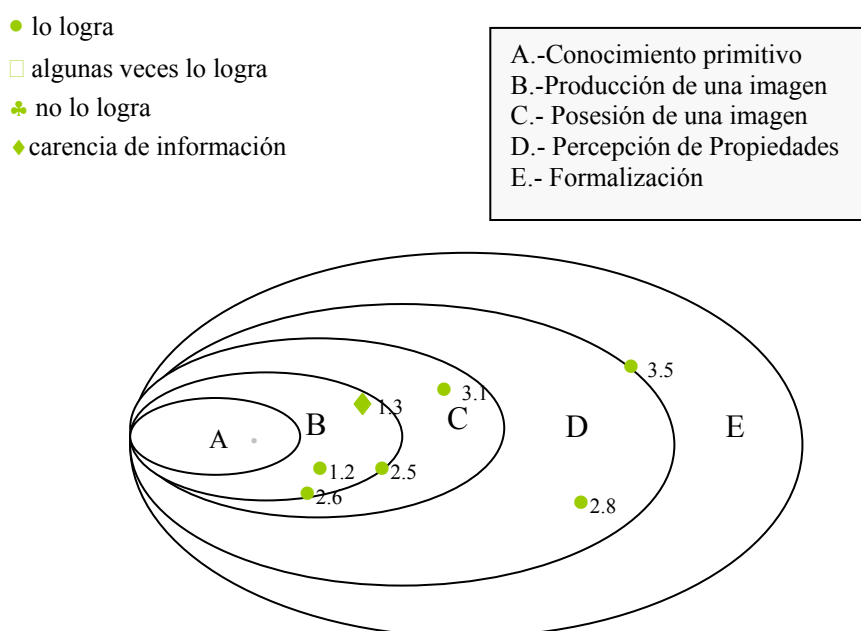
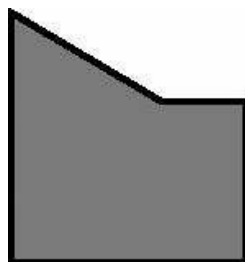


Gráfico de Comprensión -E- de Mirta asociado a la act.2

- 1.2- Aparea lados.
- 1.3- Aparea vértices
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.6.-Construye superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.8- Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.5.-Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.

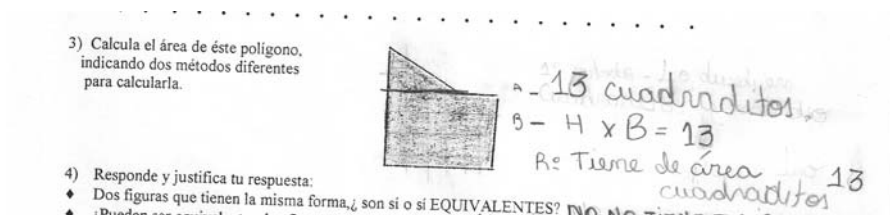
Actividad 3 (EM3):

Calcula el área de este polígono, indicando dos métodos diferentes para calcularlo.



A.-Descripción de la producción escrita

Mirta subdivide el polígono en un triángulo y un rectángulo y al costado escribe “A.- 13 cuadraditos; B.- $H \times B = 13$ ” debajo escribe “R: Tienen de área 13 cuadraditos”



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 3

Mirta para calcular el área del polígono lo subdivide en dos, un rectángulo y un triángulo rectángulo. Pensamos que utiliza la plantilla, pues expresa el área en función del cuadradito como unidad, (ind 4.1 en *Producción de una imagen*), es decir calcula el área a través de un tratamiento unidireccional de la superficie.

De su respuesta, y luego lo confirma el otro método que aplica, podemos observar que la niña calcula el área del polígono-“13 cuadraditos” - a través del área solamente del rectángulo, al que asocia la fórmula del área del polígono con el área del rectángulo. En este caso se observa que asocia la medida del área - no expresa la unidad, solamente escribe 13.- con la formula pero no explicita las dimensiones de H y B. No obstante hace referencia a la unidad para formular la respuesta.

Las consideraciones a las que nos hemos referido nos impulsan a

manifestar que Mirta algunas veces, selecciona una unidad para poder expresar el área (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*), puede también, asociar el recurso de la plantilla con el campo multiplicativo (ind 5.1 en *Producción de una imagen*)pero no estima las dimensiones lineales de la figura para utilizar la fórmula(ind 5.2 en *Percepción de propiedades*)..

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en la *Producción de la imagen* – Capa B- , con un indicador en *Posesión de la imagen*- Capa C- y otro indicador en *Percepción de Propiedades* – Capa D-

El análisis realizado nos permite presentar el siguiente gráfico.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo
B.-Producción de una imagen
C.- Posesión de una imagen
D.- Percepción de Propiedades
E.- Formalización

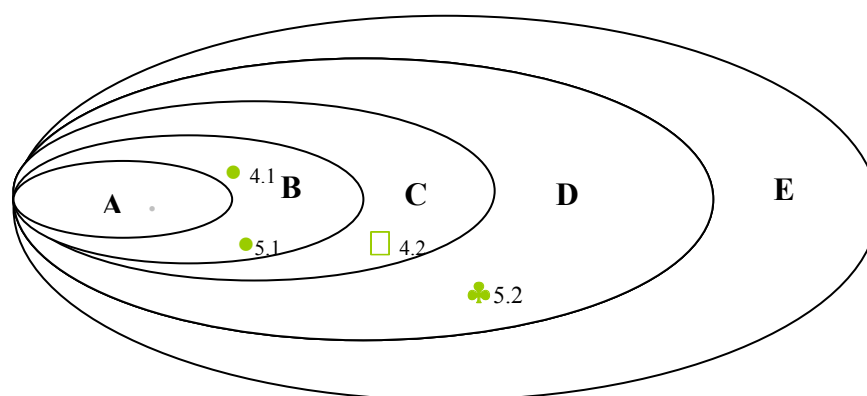


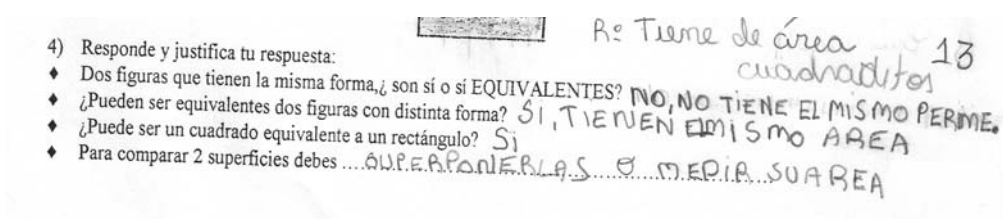
Gráfico de Comprensión -E- de Mirta asociado a la act.3

- 4.1.- Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 5.1.- Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo
- 5.2.-Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras

Actividad 4 (EM4):

✓ Responde y justifica las siguientes preguntas:

1. “Dos figuras que tienen la misma forma ¿son sí o sí EQUIVALENTES?”
2. ¿Pueden ser equivalentes dos figuras con distinta forma?
3. -¿Puede ser un cuadrado equivalente a un rectángulo?”
4. -Completa la siguiente expresión:
 “Para comparar dos superficies debes.....”

A.- Descripción de la producción escrita**B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 4**

Mirta respondió a la **primer pregunta** “No, no tiene el mismo Perime”, a la **segunda pregunta** respondió “Si, tienen el mismo área”, a la **tercera pregunta** respondió “Sí”, por último la **cuarta pregunta** respondió “superponerlas o medir su área”

En principio cuando Mirta responde “Perime” pensamos que se refiere a “perímetro” en función de ello responde y justifica pero si bien es cierto que figuras de igual forma no necesariamente tienen el mismo perímetro, relaciona la equivalencia con la relación entre el perímetro de las figuras, en lugar de relacionarlo con el área de cada una de ellas. (ind 2.9 en *Percepción de propiedades*) La segunda justifica correctamente, pues reconoce que una figura puede descomponerse en otra de distinta forma y ser ambas de igual área y en ese caso las figuras resultan equivalentes (ind 2.7 en *Percepción de propiedades*). La tercera si bien no justifica podemos pensar que la considera como un caso particular de la anterior. Se desprende que identifica a dos figuras de distinta forma y de igual área (ind 2.8 en *Percepción de Propiedades*).

Por ultimo compara superficies de forma directa, pues constata si una es parte de la otra (ind 2.2 en *Producción de una imagen*), aunque pensamos que cuando dice “medir su área quiso decir *medir superficies*” la niña se refiere a “medir el área” - indirectamente- están involucrados los indicadores 4.1 en *Producción de una imagen* y los indicadores 2.4 y 2.5 en *Producción-Posesión de una imagen*.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B- y en el anillo *Producción-y Posesión de una imagen* – capa B y Capa C- respectivamente y con tres indicadores en *Percepción de Propiedades* – Capa D-

Del análisis de a producción escrita, estimamos conveniente construir el siguiente gráfico de comprensión que denota lo logrado por Mirta. Concretamente la niña logra la demanda, excepto que no distingue la conveniencia de considerar una misma unidad de medida para comparar superficies.

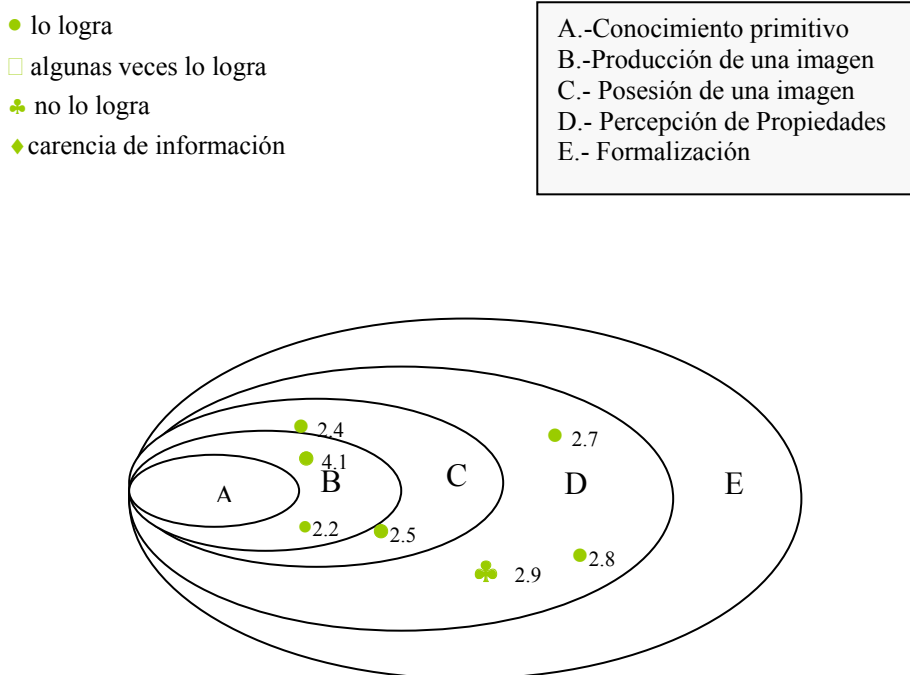


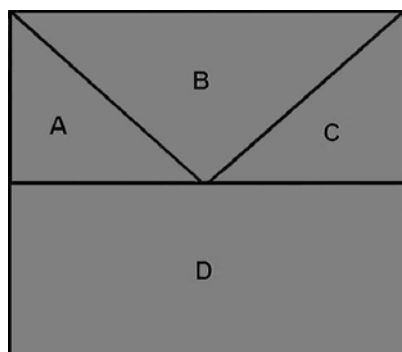
Gráfico de Comprensión -E- de Mirta asociado a la act.4

2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión)

- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.7.- Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra, su área no varía
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 2.9.-Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y recuenta el número de unidades empleado.

Actividad 5 (EM5):

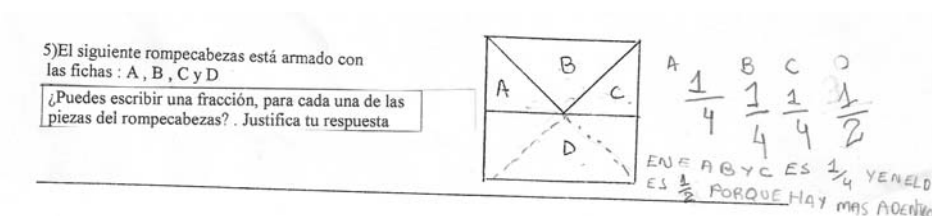
El siguiente rompecabezas está armado con las fichas: A, B, C, y D. Expresa con una fracción cada ficha del rompecabezas.



A.- Descripción de la producción escrita

Mirta traza las diagonales del cuadrado y responde

“ $A = 1/4$; $B = 1/4$; $C = 1/4$ y $D = 1/2$ ” y manifiesta “En A, B y C es $1/4$ y en D es $1/2$ porque hay más adentro”



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 5

Este problema también lo consideramos de anclaje, pues se tomó en el cuestionario sobre ideas previas. En esa instancia, se preguntó ¿Qué parte del rompecabezas representa cada pieza? y la respuesta que brindó Mirta no

respondía a lo solicitado, sino más bien, describió el rompecabezas.

Las fracciones habilitan, entre otros, el establecimiento de relaciones entre las partes en que pueden ser subdivididas la parte entera y esa parte entera. De la respuesta obtenida, Mirta expresa cada pieza del rompecabezas a través de una fracción, estableciendo correctamente la relación de las piezas B y D con el rompecabezas aunque la justificación que brinda para establecer la relación de la pieza D no es pertinente. Pensamos que para las otras piezas –A y C- establece igual relación que con la pieza B pues considera la pieza formada con la línea punteada a las reconoce congruentes con la pieza B. Sin embargo no identifica que las piezas A y C son la mitad de aquella y por esa razón le asigna $\frac{1}{4}$, igual relación que la establecida con la pieza B. (ind 2.11 el *Percepción de Propiedades*)

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se relaciona exclusivamente con *Percepción de Propiedades* – Capa D- y del análisis de la producción escrita podemos manifestar que Mirta sólo en algunos casos, relaciona las partes con el todo en función del área de la superficie, a través de una fracción, aunque la justificación que brinda no aclara los resultados arribados

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo B.-Producción de una imagen C.- Posesión de una imagen D.- Percepción de Propiedades E.- Formalización

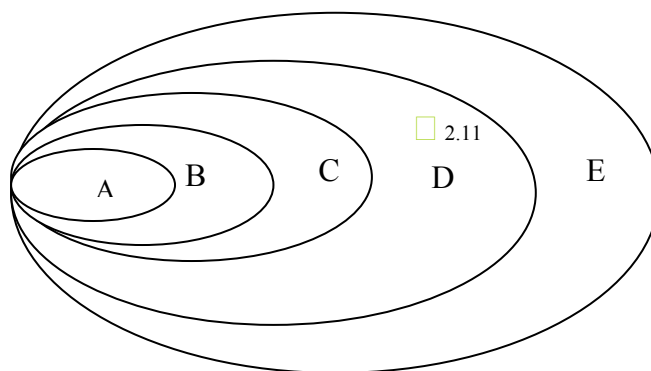


Gráfico de Comprensión -E- de Mirta asociado a la act.5

- 2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones.

Realizamos una mirada global a las respuestas que Mirta propone y apreciamos un esfuerzo, aunque incipiente, por responsabilizarse matemáticamente de los resultados a los que arriba. Puesto que, pretende en la mayoría de las actividades propuestas, dar las razones de por qué responden a esa actividad.

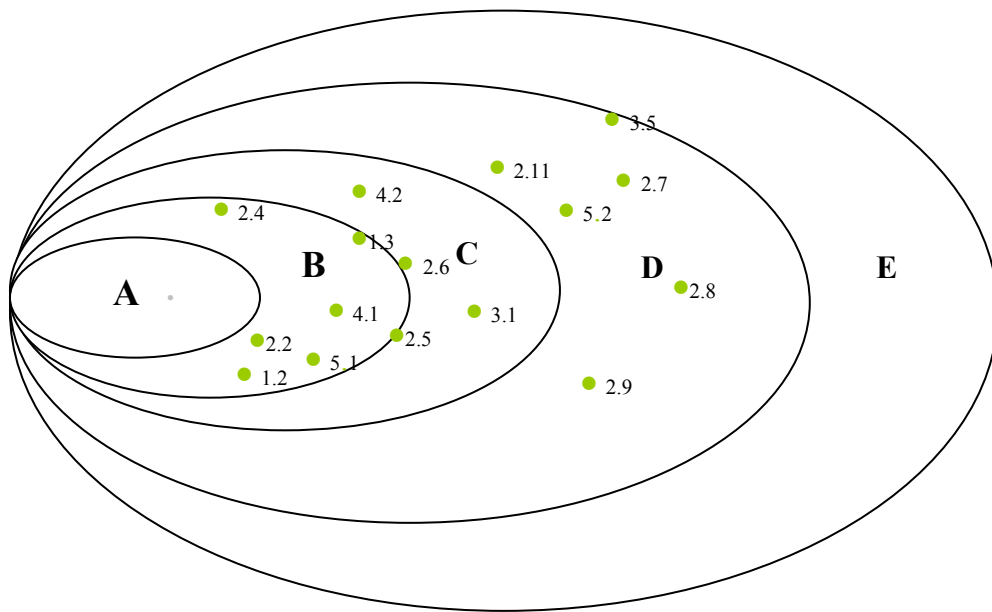
4.3.4.1. RELACION ENTRE LOS GRÁFICOS DE COMPRENSIÓN: EL DESEABLE Y EL DE MIRTA

Con la resolución de las actividades correspondientes al cuestionario de evaluación de los contenidos referidos al concepto de área implementado en la secuencia, pretendemos detectar los logros que obtiene Mirta en la construcción del concepto. El cuestionario se compone de cinco actividades, y a cada uno se le asignan indicadores de las categorías, los cuales disponemos en un *gráfico de comprensión*, a efectos de dar cuenta acerca de la comprensión deseable de los mismos.

Así, su distribución en el gráfico es la siguiente: cuatro indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- cuatro indicadores en el anillo *Producción-Posesión de una imagen*-Capa B y Capa C –dos indicadores en *Posesión de propiedades* - Capa C- cinco indicadores en *Percepción de propiedades* - Capa D- y un indicador en el anillo *Percepción de Propiedades - Formalización*- Capa D y Capa E-.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

A.-Conocimiento primitivo B.-Producción de una imagen C.- Posesión de una imagen D.- Percepción de Propiedades E.- Formalización



- 1.2.-Aparea lados.
- 1.3.-Aparea vértices
- 2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión)
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.6.-Construye superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra, su área no varía
- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 2.9.-Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área.
- 2.11.-Relaciona el todo y las partes y entre las partes. Es decir, relaciona las fracciones con respecto al área de una superficie
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.5.-Construye figuras equivalentes de distinto perímetro.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo
- 5.2.-Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras

Las respuestas brindadas por Mirta nos permiten anticipar el gráfico de comprensión en el que volcamos los logros de los indicadores involucrados.

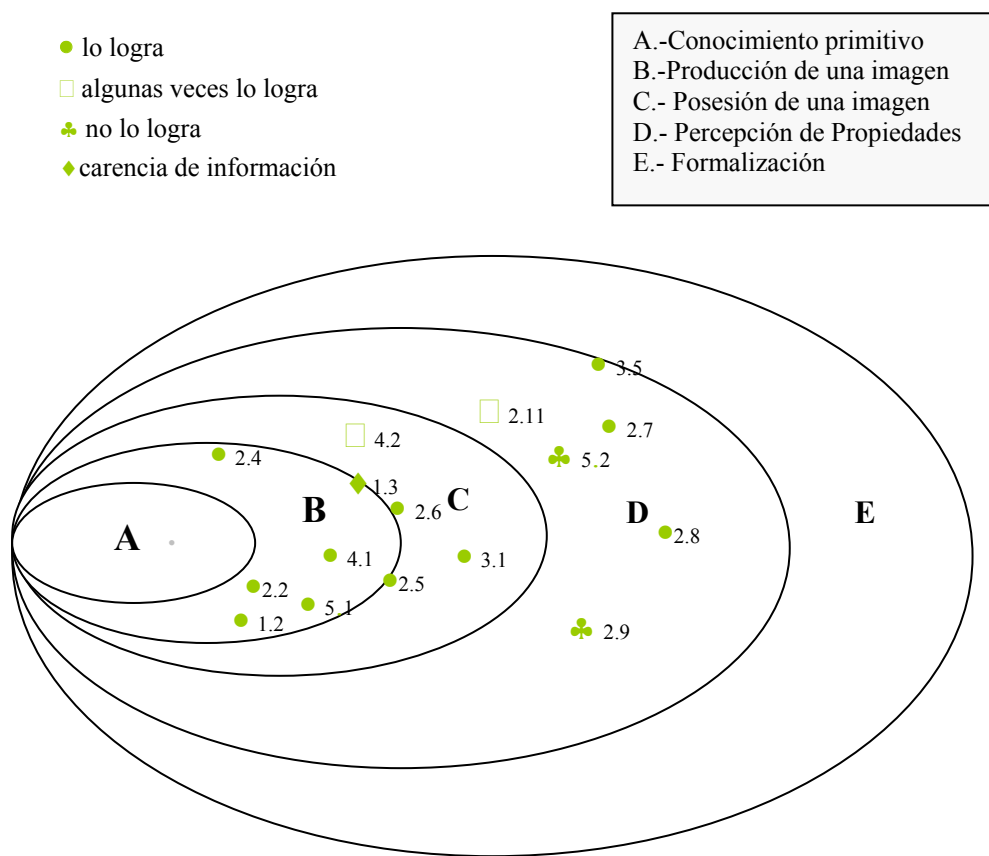


Gráfico Global de Comprensión –E- De Mirta

En relación a ambos gráficos –el deseable y el de Mirta - detectamos que la niña, excepto los indicadores 1.4 y 2.3 asignados a la actividad 1, excluida de este análisis, ha logrado la mayoría, algunos los logra sólo algunas veces, una minoría de ellos no los logra o se carece de información acerca del logro de los mismos.

La niña aparea por sus lados figuras para armar otra compleja (ind 1.2 en *Producción de una imagen*) y su respuesta no aporta información acerca de que pueda construir una figuras compleja apareando otras simples por sus vértices (ind 1.3 en *Producción-Posesión de una imagen*).

Para comparar figuras, utiliza método directos, por superposición (ind 2.2 en *Producción de una imagen*) e indirectos, a través de la composición –descomposición,(ind 2.4 en *Producción-Posesión de una imagen*) cuando en la actividad 2 manifiesta “solo lo cambie de lugar es equivalente”. Por lo tanto

identifica dos figuras de igual o distinta forma y equivalentes. (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*). Distingue la noción de área de una figura, del perímetro de la misma (ind 3.1 en *Poseción de una imagen*) y puede construir figuras equivalentes y de distinto perímetro (ind 3.5 en *Percepción de Propiedades –Formalización*).

Sólo algunas veces para construir figuras, las mide utilizando otra figura como unidad conveniente (ind 4.2 en *Poseción de una imagen*) y relaciona una parte y el todo de una superficie a través de una fracción, por ejemplo en la actividad 5 cuando expresa cada pieza del rompecabezas a través de una fracción, (ind 2.11 en *Percepción de Propiedades*) y establece correctamente solamente la relación de dos regiones (la B y la D).

En alguna ocasión relaciona la equivalencia con la relación entre el perímetro de las figuras, en lugar de relacionarlo con el área de cada una de ellas.

En la actividad 3 expresa el área en función del cuadradito - de la plantilla - como unidad, (ind 4.1 en *Producción de una imagen*) es decir calcula el área a través de un tratamiento unidireccional de la superficie y asocia con el campo multiplicativo (ind 5.1 en *Producción de una imagen*) pero no estima las dimensiones lineales de la figura para utilizar la fórmula (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*).

Es decir, divide y pavimenta la superficie a medir y asocia su cantidad con el modelo multiplicativo y en este caso en particular, utiliza una unidad conveniente.

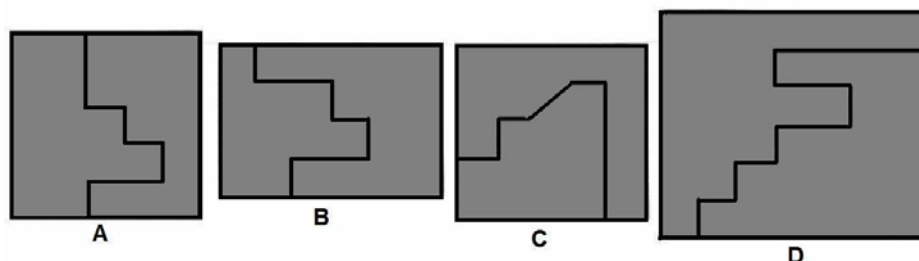
Sin embargo, no identifican dos figuras de igual forma y distinta área - figuras semejantes-(ind 2.9.-en *Percepción de propiedades*).

5.3.5.- ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO A MEDIO PLAZO (MPM)

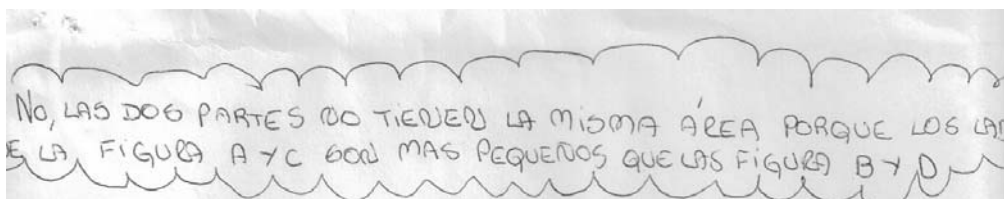
A continuación, se describe el desarrollo propuesto por Patricia. Cuando la producción escrita muestra el proceso de construcción que se produce en la niña, lo incluimos para dar cuenta de ello, a pesar que el cuestionario resuelto por la niña se adjunta en el Anexo XXV.

Actividad 1 (MPM1):

1.- Si cortamos las figuras por la línea marcada ¿las dos partes tienen la misma área?

**A.-Descripción de la producción escrita**

Mirta manifiesta: “No, las dos partes no tienen la misma área porque los lados de la figura A y C son más pequeños que las figuras B y D”

**B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 1**

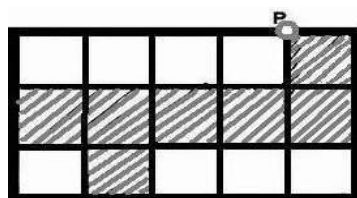
Mirta por un lado, no ha comprendido el enunciado pues no compara el área entre las partes de cada una de las figuras, sino entre las figuras. Por otro, se observa confusión en la noción de área de superficies pues relaciona esta noción con la longitud de los lados de la figura.

Es decir, relaciona la equivalencia de las superficies, al igual que el ítem 4 de la evaluación realizada al finalizar la secuencia de aprendizaje (EM4), con la longitud de los lados de la figura o con el perímetro como en aquella oportunidad, en lugar de relacionarlo con el área de dichas superficies. (Categoría 2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos)

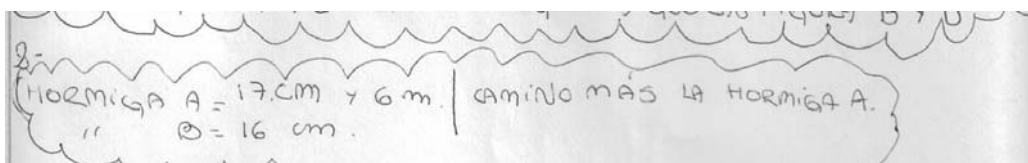
Por lo tanto, no incluimos el gráfico de comprensión de la misma pues carecemos de información de los indicadores que hemos anticipado, involucrados con esta actividad.

Actividad 2 (MPM2):

Una hormiga *A* sale del punto *P*. Recorre el perímetro del rectángulo de trazo grueso y vuelve a *P*. Otra hormiga *B*, también sale de *P* y recorre el perímetro de la zona rayada y regresa a *P*. ¿Cuál de las dos hormigas camino más? ¿Qué puedes decir de la región determinada por cada camino?

**A.-Descripción de la producción escrita**

Mirta con respecto a cual es la hormiga que camina más, responde “camino más la hormiga *A*” y con respecto a que puede decir de la región determinada por cada camino, responde: “Hormiga *A*= 17cm y 6m ; Hormiga *B*=16cm”

**B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 2**

Mirta averigua el camino recorrido por cada hormiga, considera como unidad la longitud del lado del cuadradito (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*), aunque la respuesta que emite la expresa en función de cm. Cuando manifiesta que “camino más la hormiga *A*” ella arriba a resultados diferentes, 17cm y 16cm respectivamente, aunque el perímetro de ambos es igual a 16cm.

No responde cuando se le solicita referirse a la región que determina cada camino, sin embargo es muy posible que la niña haya desconocido el término “región” pues durante el desarrollo de la secuencia la maestra se refirió a “figuras” en lugar de región.

Las consideraciones mencionadas nos permiten inferir solamente que la

niña comprende la noción de perímetro de una figura (ind 3.1 en *Posesión de una imagen*), pero en cambio no podemos verter opinión acerca de la relación que existe con el área que dichas figuras isoperimétricas.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en cada uno de las siguientes capas: *Producción de una imagen*- Capa B- *Posesión de una imagen* – Capa C- *Percepción de Propiedades* – Capa D-

Del análisis de a producción escrita, solamente podemos manifestar que identifica el concepto de perímetro y para ello elige una unidad conveniente. En función de ello estimamos conveniente construir el siguiente gráfico que denota lo logrado por Mirta.

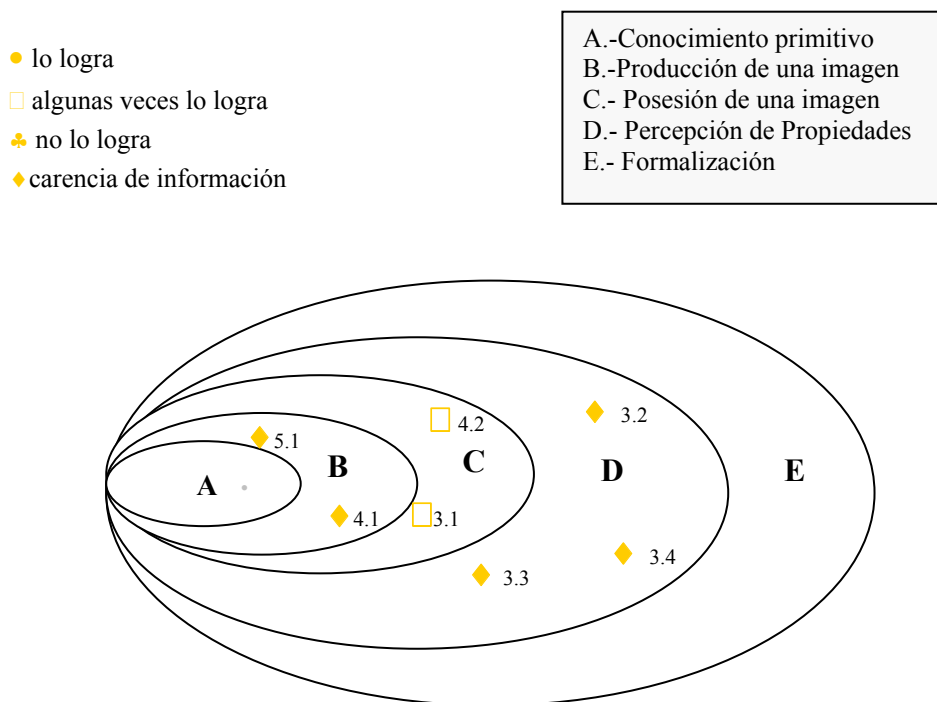
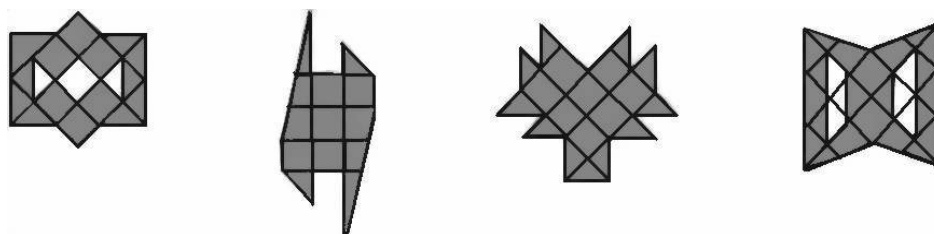


Gráfico de Comprensión -MP-de Mirta asociado a la act.2

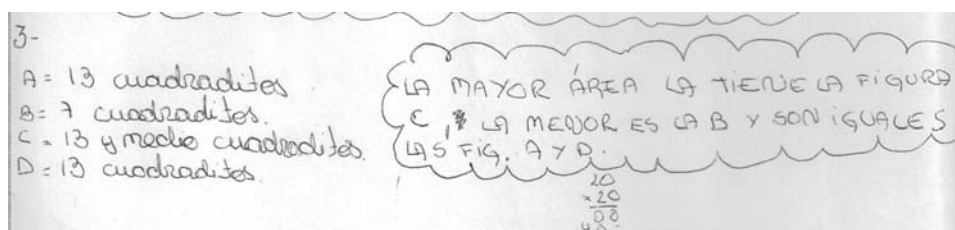
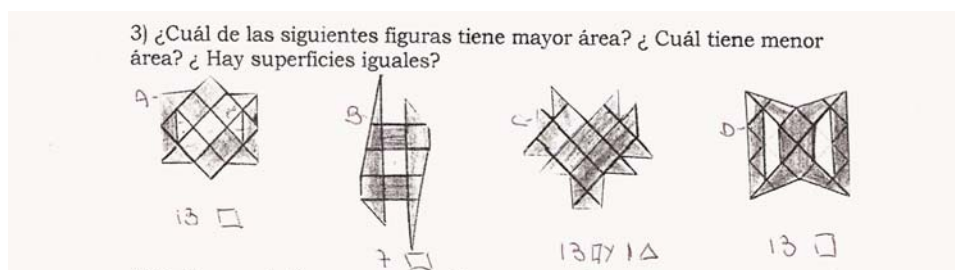
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.2.-Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor /igual/ menor perímetro de la misma.
- 3.3.-Identifica figuras isoperimétricas
- 3.4.-Ordena figuras isoperimétricas respecto del área.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo

Actividad 3 (MPM3):

- ✓ ¿Cuál de las siguientes figuras tiene mayor área? ¿Cuál tiene menor área? ¿Hay superficies iguales?

**A.-Descripción de la producción escrita**

Mirta designa a cada una de las figuras con A, B, C y D respectivamente. Expresa al lado de cada figura, en la primera, “13 □ ” en la segunda, “7 □ de área” en la tercera “13 1/2 □ ” y en la cuarta “13 □ ” responde “La mayor área la tiene la figura C, la menor es la B y son iguales las figuras A y D”.

**B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 3**

Mirta reconoce el cuadrado como unidad conveniente (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*) que le permite, por un lado componer y descomponer y por otro, considerar la misma unidad de medida, ambos aspectos en vistas a comparar (ind 2.4 en *Producción-Posesión de una imagen* e ind 4.3 en *Percepción de*

propiedades). Muestra de ello es el resultado de la figura C, que en un primer momento lo expresa como 13 cuadraditos y 1 triángulo. Recién lo expresa en función de cuadradito – 13 y $\frac{1}{2}$ cuadraditos- para realizar la comparación. (ind 2.5 en *Producción- Posesión de una imagen*).

Excepto la figura C, los resultados a los que arriba son incorrectos. Expresa los resultados a los que arriba según la unidad que considera conveniente. En base a los resultados que ella obtuvo selecciona correctamente la figura de mayor área y la de menor área respectivamente.

En cuanto a la última pregunta, relaciona superficie con el área de la superficie, pues responde en función de los valores del área de las figuras. Aunque los mismos son incorrectos pues el área es de 11cuadraditos y 12 cuadraditos respectivamente, No obstante de la respuesta que vierte podemos manifestar que la niña no establece diferencia entre figuras iguales y figuras equivalentes, de ahí que considere que las superficies A y D son iguales. No obstante podemos manifestar que la niña identifica figura de distinta forma e igual área. (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*). De acuerdo a los resultados a los que arriba, carecemos de informaron acerca de si la niña puede identificar más de dos superficies de igual área (ind 2.10 en *Percepción de propiedades*)

Mirta compara superficies midiendo a través de una unidad conveniente y su producción escrita denota el proceso de construcción.(ind 2.5 en *Producción- Posesión de una imagen*)

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con un indicador en *Producción de una imagen*- capa B- y con dos indicadores en el anillo *Producción - Posesión de una imagen*- Capa B y Capa C-, un indicador en *Posesión de una imagen*-Capa C- y tres indicadores en *Percepción de Propiedades* – Capa D-

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- A.-Conocimiento primitivo
- B.-Producción de una imagen
- C.- Posesión de una imagen
- D.- Percepción de Propiedades
- E.- Formalización

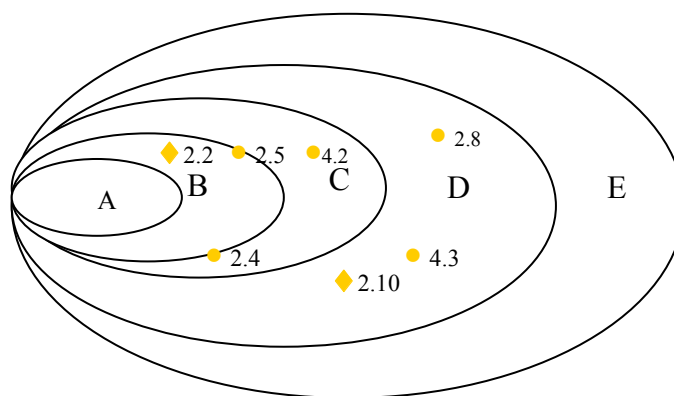


Gráfico de Comprensión -MP- de Mirta asociado a la act.3

- 2.2.-Compara superficies por superposición (inclusión)
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2-5-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.8.- Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.

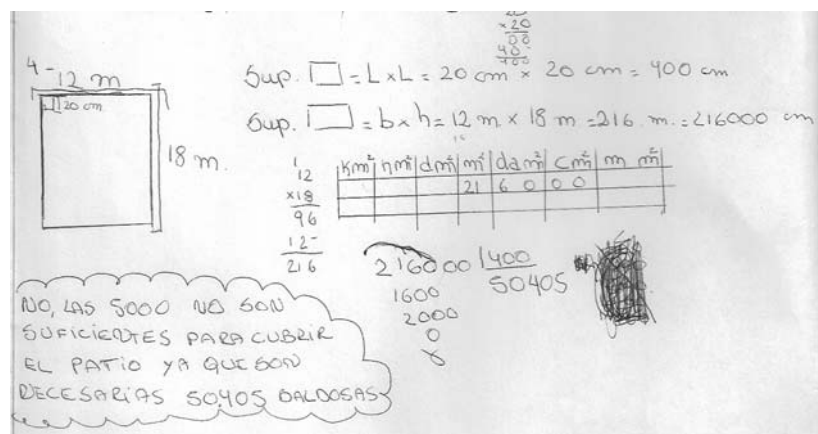
Actividad 4 (MPM4):

En la escuela tienen que embaldosar un patio de 18 metros de largo y 12 metros de ancho. Reciben una donación de 5000 baldosas de 20 cm de lado. ¿Son suficientes para cubrir el patio?

A.-Descripción de la producción escrita

Mirta responde que “No, las 5000 no son suficientes para cubrir el patio ya que son necesarias 50405 baldosas” Para ello dibuja el croquis del patio y de la baldosa y coloca la dimensiones de los lados y del lado de la baldosa, a la derecha escribe “sup.” del cuadrado, la fórmula y a continuación “ $20\text{cm} \times 20\text{cm} = 400\text{cm}^2$ ” y “sup.” del rectángulo, la fórmula y a continuación “ $18\text{ m} \times 12\text{m} = 216\text{m}^2 = 216000\text{cm}^2$ ” Debajo presenta una tabla, en la primera fila la unidad convencional m^2 , los múltiplos y submúltiplos. En la segunda fila asigne “21” al m^2 ; el “60” al dm^2 y “00” al cm^2 .

Por último, una cuenta de división exacta, en la cual 216000 es el dividendo; 400 el divisor y 50405 el cociente



B.-Análisis de la producción de Mirta correspondiente a la actividad 4

Mirta calcula el área de la baldosa y del patio considerando las dimensiones lineales de ambos, utiliza para ello la fórmula del cuadrado y del rectángulo (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*). Sin embargo el resultado del área de ambos, lo expresa en cm. y m. respectivamente y luego efectúa la conversión para expresar en una misma unidad (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*). Observamos que Mirta no distingue que la dimensión de los lados es unidimensional mientras que el área es bidimensional.

Comparando estos resultados y la tabla que ha construido con las unidades convencionales, se percibe que la niña no les ha otorgado sentido, pues sino no podría haber asignado al área de la baldosa y al patio, esa unidad.

No podemos dejar de manifestar que las reducciones realizadas no era un aspecto a considerar en función de los contenidos abordados en este trabajo. Sin embargo, es un efecto no esperado en Mirta aunque muy posible, si consideramos el lapso transcurrido y los conocimientos que ha desarrollado durante este tiempo en el ciclo escolar.

No obstante los errores que se observan en la tabla - en las “reducciones”- provienen de la falta de representación mental de la proporcionalidad que existe entre la unidad convencional, sus múltiplos y submúltiplos. Este obstáculo le impide juzgar criteriosamente los resultados y por lo tanto, arriba a ellos de manera mecánica.

Por último, para encontrar el número de baldosas, relaciona el área del

patio con el área de las baldosas. A pesar de los errores mencionados, para comparar, Mirta efectúa la reducción conveniente entre las unidades (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*).

Muy posiblemente por los datos del problema, la niña no calcula el área del patio pavimentando la superficie con la baldosa y contando las mismas a través del modelo multiplicativo, por lo tanto carecemos de información respecto al logro de los indicadores 4.1 y 5.1 dispuestos ambos en *Producción de una imagen*.

El nivel de comprensión que demanda esta actividad se sitúa: con dos indicadores en *Producción de una imagen*- Capa B- y con un indicador en la capa: *Posesión de una imagen* – Capa C- y *Percepción de Propiedades* – Capa D- respectivamente.

Del análisis de la producción escrita, estimamos conveniente construir el siguiente gráfico de comprensión que denota lo logrado por Mirta en la resolución de un problema del contexto real.

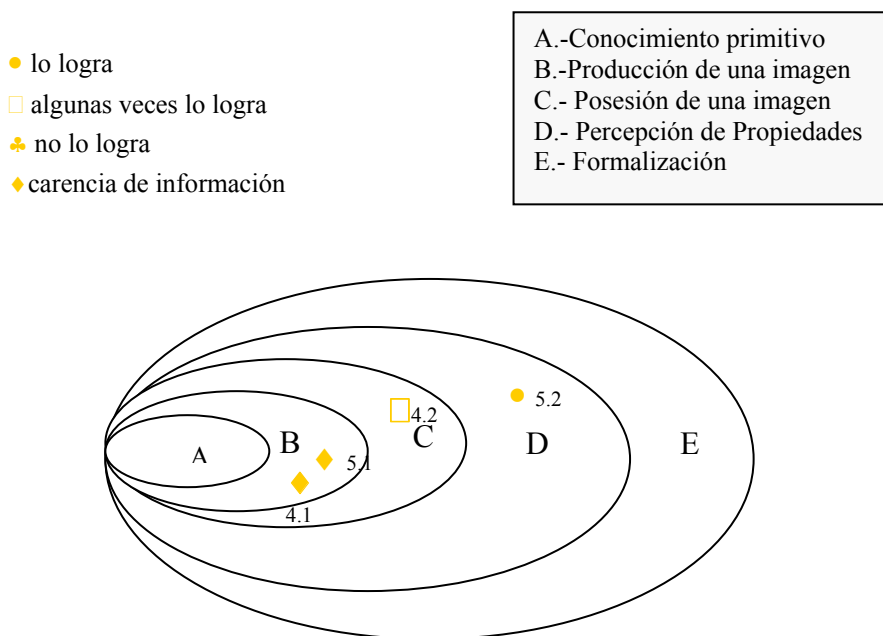


Gráfico de Comprensión -MP- de Mirta asociado a la act.4

- 4.1.- Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 5.1.-Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo.
- 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras.

4.3.5.1. RELACION ENTRE LOS GRÁFICOS DE COMPRENSION: DESEABLE Y EL DE LA NIÑA

Con la resolución de las actividades correspondientes al cuestionario acerca de la evaluación a mediano plazo, pretendimos detectar la perdurabilidad y funcionalidad que Mirta logra en la construcción del concepto de área. El cuestionario se compone de cuatro actividades y a cada una de ellas les corresponden indicadores de las categorías. Estos indicadores los hemos dispuesto en un gráfico de comprensión que da cuenta de la comprensión deseable de los mismos. Así su distribución en dicho gráfico es la siguiente: tres indicadores en *Producción de una imagen* – Capa B- dos indicador en el anillo *Producción - Posesión de una imagen*-Capas B y Capa C –dos indicadores en *Posesión de propiedades* - Capa C- y ocho indicadores en *Percepción de propiedades* – Capa D-

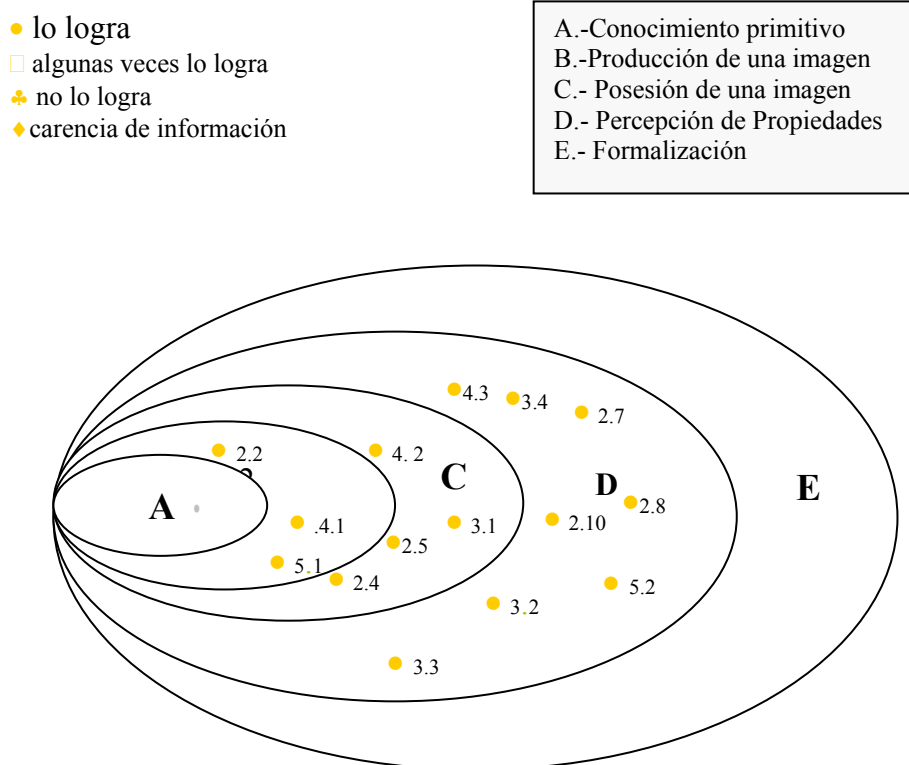


Gráfico de comprensión global a MP Deseable

- 2-2- Compara superficies por superposición (inclusión)
- 2.4.-Compara superficies por composición o descomposición.
- 2.5.-Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente
- 2.7.-Reconoce que si un figura se descompone o recompone con otra, su área no

varía

- 2.8.-Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área
- 2.10.-Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.
- 3.1.-Distingue el concepto de área y el de perímetro en una figura
- 3.2.-Reconoce que a mayor /igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor /igual/ menor perímetro de la misma.
- 3.3.-Identifica figuras isoperimétricas
- 3.4.-Ordena figuras isoperimétricas respecto del área.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado
- 4.2.-Elige una unidad adecuada.
- 4.3.-Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
- 5.1.- Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo
- 5.2.-Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras.

Las respuestas de Mirta nos permiten anticipar el siguiente gráfico de comprensión.

- lo logra
- algunas veces lo logra
- ♣ no lo logra
- ◆ carencia de información

- A.-Conocimiento primitivo
- B.-Producción de una imagen
- C.- Posesión de una imagen
- D.- Percepción de Propiedades
- E.- Formalización

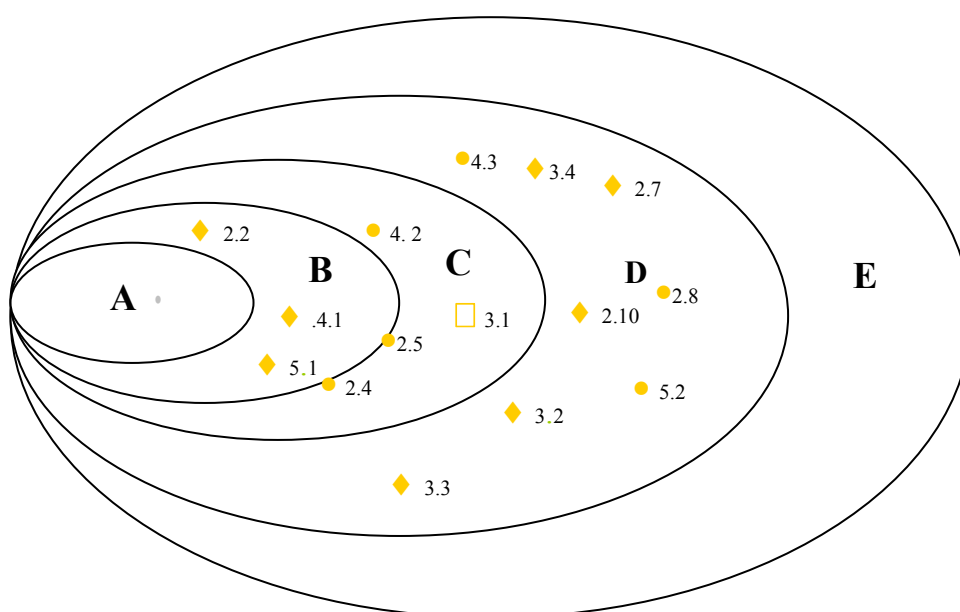


Gráfico de comprensión global a MP de Mirta

Relacionamos ambos gráficos –el deseable y el de Mirta- y podemos manifestar que la niña para comparar superficies, descompone y/o compone una figura en otra o mide las figuras a través de una unidad conveniente (ind 2.4 y 2.5 en *Producción –Posesión de una imagen*), al tiempo que reconoce al cuadrado, como unidad conveniente (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*). A través de estos métodos puede identificar dos figuras equivalentes (ind 2.8 en *Percepción de propiedades*).

Calcula el área de algunas figuras, en función de las dimensiones lineales de la misma (ind 5.2 en *Percepción de propiedades*), no distingue que la dimensión de los lados es unidimensional mientras que el área es bidimensional.

En general, comprende la noción de perímetro, pero se observa confusión en la noción de equivalencia de superficies, pues por un lado, pretende identificar dicha noción a través de la longitud de sus lados y por otro, no la diferencia de la noción de igualdad. Un ejemplo es la actividad 3 en que se refiere de manera indistinta a “*Superficies iguales*” y “*Superficies equivalentes*”. Aspecto asociado al indicador 3.1 en *Posesión de una imagen*.

La carencia de esta distinción lleva a la niña a efectuar incorrectamente reducciones entre las distintas unidades. Efecto no esperado en Mirta, aunque muy posible, si consideramos el lapso transcurrido y los conocimientos que ha desarrollado durante este tiempo en el ciclo escolar. Estimamos también que los errores que la niña realiza es posible que provengan de la falta de representaciones mentales de la proporcionalidad que existe entre la unidad convencional, sus múltiplos y submúltiplos. Obstáculos que la llevan a arribar al resultado de manera mecánica.

Existe una cantidad significativa de indicadores de la cual carecemos de información, algunos por que la niña ha optado por un procedimiento que no implique su utilización, por ejemplo los indicadores 4.1 y 5.1 en *Producción de una imagen*, y otros, por ejemplo las que vinculan área y perímetro (ind 3.2; 3.3; 3.4 en *Percepción de propiedades*) debido a que muy posiblemente la palabra “región” en el enunciado ha llevado a la niña a no comprender lo solicitado.

4.3.6.- TENDENCIAS DE LAS CATEGORÍAS DETECTADAS EN RELACIÓN A LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA

A continuación vamos a volcar en tablas la información de logros detectados en el análisis efectuado de cada uno de los indicadores de las categorías enunciadas. Para ello consideramos cada una de las actividades que componen los instrumentos, a fin de percibir su tendencia y tratar de avizorar las características de las categorías referidas a la construcción del concepto de área, en este caso, de Mirta.

Para ello enunciamos cada categoría, sus respectivos indicadores y una tabla para cada uno de ellos, que da cuenta de la tendencia respecto de la construcción de dicho concepto en Mirta.

En particular, la tabla esta compuesta por dos filas. En la primera fila explicitamos cada una de las actividades que componen cada uno de los instrumentos implementados y el indicador está asociado y en la segunda fila expresamos los logros obtenidos, por ejemplo, si lo logra, escribimos “Si”, si no lo logra, escribimos “No”, si sólo lo logra algunas veces, escribimos “AV”. Y si no disponemos de información para poder expresar el logro, escribimos “CI”.

En la última columna, inferimos un resultado global del logro del indicador en función de los productos parciales, al considerar fundamentalmente el logro que la niña alcanza en los últimos instrumentos. Es decir, no inferimos un valor según la cantidad de logros alcanzados, sino que identificamos si al final del proceso lo logra.

Categorías

1.-Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja.

1.1.-Maneja el material mediante manipulación. Se corresponde con Producción de una imagen (Capa B).

LO LOGRA, pues

	SM1	SM2	SM8	Global
Lo logra	Si	Si	Si	Si

1.2.- *Aparea lados.* Se corresponde con *Producción de una imagen* (Capa B)

LO LOGRA, pues

	SM1	SM6	SM8	EM2	Global
Lo logra	Si	Si	Si	Si	Si

1.3.- *Aparea vértices.* Se corresponde con el anillo *Producción de una imagen - Posesión de una imagen* (Capa B y Capa C)

LOGRA, pues

	SM1	EM2	Global
Lo logra	Si	CI	Si

1.4.- *Representa mentalmente la composición de figuras.* Se corresponde con el anillo *Producción de una imagen / Posesión de una imagen.* (Capa B y Capa C)

LO LOGRA, pues

	SM1	SM2	SM8	SM9	SM10	SM11	SM12
Lo logra	Si	Si	Si	Si	Si	CI	Si

	Global
Lo logra	Si

1.5.- *Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos.* Se corresponde con el anillo *Producción de una imagen - Posesión de una imagen.* (Capa B y Capa C)

LO LOGRA, pues

	SM2	SM11	SM12	Global
Lo logra	Si	CI	Si	Si

2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.

2. 1.- *Compara superficies por percepción visual* Se corresponde con *Producción de una imagen* (Capa B)

LO LOGRA, pues

	IAM1	IAM4	SM3	Global
Lo logra	CI	Si	Si	Si

2. 2.-*Compara superficies por superposición y/o inclusión. Se corresponde con Producción de una imagen. (Capa B)*

LO LOGRA, pues

	IAM4	SM3	SM8	EM4	MPM3	Global
Lo logra	CI	CI	CI	Si	CI	Si

2.3.-*Utiliza las mismas piezas en distintas formas (recompone).Equivalencia de figuras Se corresponde con el anillo Producción de una imagen - Posesión de una imagen. ((Capa B y Capa C)*

A VECES LO LOGRA, pues

	IAM1	IAM4	SM1	SM2	SM3	SM8	SM11	SM12
Lo logra	Si	CI	AV	Si	Si	AV	AV	SI

	Global
Lo logra	AV

2.4.- *Compara superficies por composición y descomposición (transformación indirecta). Se corresponde con el anillo Producción de una imagen - Posesión de una imagen. (Capa B y Capa C)*

LO LOGRA, pues

	IAM1	IAM4	SM2	SM3	SM8	SM10
Lo logra	SI	CI	SI	Si	SI	SI

2.5.- *Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente Se corresponde con el anillo Producción de una imagen - Posesión de una imagen. (Capa B y Capa C)*

LO LOGRA, pues

	IAM1	SM8	SM10	SM11	EM2	EM4	MPM3	Global
Lo logra	CI	SI	Si	SI	SI	SI	SI	SI

2.6.- *Construye superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente* Se corresponde con el anillo *Producción de una imagen - Posesión de una imagen*. Capa B y Capa C)

LO LOGRA, pues

	SM8	EM2	Global
Lo logra	AV	Si	Si

2.7.- *Reconoce que si una figura se descompone o recompone con otra forma, su área no varía.* Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

LO LOGRA, pues

	IAM1	IAM4	IAM8	SM2	SM3
Lo logra	Si	CI	CI	CI	SI

	SM8	SM11	EM4	Global
Lo logra	CI	SI	SI	Si

2.8.-*Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área.* Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

LO LOGRA, pues

	IAM4	SM3	EM8	EM2	EM4	MPM3	Global
Lo logra	CI	AV	AV	Si	Si	SI	Si

2.9.-*Identifica dos superficies de igual forma y de distinta área.* Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

NO LO LOGRA, pues

	EM4	Global
Lo logra	NO	NO

2.10.-*Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área.* Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

A VECES LO LOGRA, pues

	IAM4	SM3	SM8	MPM3	Global
Lo logra	CI	Si	AV	CI	AV

2.11.-Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relacionan las partes y el todo a través de las fracciones. Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

A VECES LO LOGRA, pues

	IAM3	SM8	EM5	Global
Lo logra	NO	AV	AV	AV

3.- Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro.

3.1.- Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura. Se corresponde con *Posesión de una imagen* (Capa C).

LO LOGRA, pues

	SM6	EM2	MPM2	Global
Lo logra	Si	Si	AV	Si

3.2.-Reconoce que a mayor/ igual/ menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/ igual/ menor perímetro de la misma. Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

A VECES LO LOGRA,pues

	SM6	MPM2	Global
Lo logra	AV	CI	AV

3.3.- Identifica figuras isoperimétricas. Se corresponde con *Percepción de propiedades* (Capa D)

CARECEMOS DE INFORMACION, pues

	MPM2	Global
Lo logra	CI	CI

3.4.- Ordena figuras isoperimétricas respecto del área. Se corresponde con el anillo *Producción de una imagen - Posesión de una imagen*. (Capa D)

CARECEMOS DE INFORMACION, pues

	MPM2	Global
Lo logra	CI	CI

3.5.- *Construye figuras equivalentes de distinto perímetro* Se corresponde con el anillo *Percepción de propiedades / Formalización* (Capa D y Capa E)

LO LOGRA, pues

	SM6	EM2	Global
Lo logra	CI	SI	Si

3.6.- *Ordena figuras equivalentes, según el perímetro* Se corresponde con *Percepción de propiedades*, (Capa D)

CARECEMOS DE INFORMACION, pues

	SM6	Global
Lo logra	CI	CI

4.- Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento

4.1.- *Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado* Se corresponde con *Producción de la imagen* (Capa B)

LO LOGRA, pues

	IAM2	IAM7	SM8	SM9	SM11	SM12	SM13
Lo Logra	Si	Si	AV	SI	SI	SI	CI
	EM3	EM4	MPM2	MPM4	Global		
Lo Logra	Si	Si	CI	CI	SI		

4.2.- *Elige una unidad adecuada* Se corresponde con *Posesión de una imagen* (Capa C)

LO LOGRA, pues

	IAM7	SM8	SM9	SM10	SM11	SM12	SM13
Lo Logra	Si	AV	SI	SI	Si	SI	NO

	EM3	MPM2	MPM3	MPM4	Global
Lo Logra	AV	AV	Si	AV	Si

4.3.- *Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.* Se corresponde con *Percepción de propiedades.* (Capa D)

LO LOGRA, pues

	SM8	SM9	SM10	MPM3	Global
Lo Logra	SI	Si	Si	Si	Si

4.4.- *Advierte la necesidad de unidades convencionales.* Se corresponde con *Percepción de propiedades.* (Capa D)

A VECES LO LOGRA, pues

	SM8	SM9	SM11	SM12	SM13	Global
Lo Logra	CI	Si	Si	CI	NO	AV

4.5.- *Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud* Se corresponde con *Formalización* (Capa E)

CARECEMOS DE INFORMACION, pues

	SM8	SM10	Global
Lo Logra	CI	CI	CI

5.- Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo, triángulo como camino más económico

5.1.- *Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo* Se corresponde con *Producción de una imagen.* (Capa B)

LO LOGRA, pues

	IAM2	IAM7	SM12	EM3	MPM2
Lo Logra	CI	SI	CI	CI	CI

	MPM4	Global
Lo logra	CI	SI

5.2.- *Calcula áreas estimando las dimensiones lineales de las figuras.* Se corresponde con *Percepción de propiedades.* (Capa D)

A VECES LO LOGRA, pues

	IAM2	IAM7	SM12	SM13	EM3
Lo Logra	CI	CI	CI	CI	No

	MPM4	Global
Lo logra	Si	AV

4.3.7.-ANÁLISIS GLOBAL DEL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE AREA EN MIRTA

A los efectos de abstraer el proceso de construcción del concepto de área en Mirta, analizamos cada uno de los problemas resueltos en las diferentes *sub-fases*. En particular, durante la implementación de la secuencia de aprendizaje situamos a la niña con sus compañeros y la maestra en la clase, para analizar si el diálogo y las interacciones entre ellos, nos brindan explicaciones acerca del crecimiento en la comprensión del concepto de área, en este caso, de Mirta.

La información que brinda cada uno de los instrumentos implicados se complementan unos con otros, en vista a efectuar una mirada global y plasmar la evolución del proceso en lo que respecta a qué características manifiesta la niña respecto a construcción del concepto de área y en cómo se produce dicha construcción junto al grupo de compañeros y la maestra. Fundamentalmente cómo el folding back y las interacciones contribuyen a la interpretación del proceso de comprensión individual en la niña.

4.2.7.1.-EL CRECIMIENTO DE COMPRENSION DE LAS CATEGORIAS INVOLUCRADAS EN EL CONCEPTO

En la construcción de conceptos, los niños ponen en juego conocimientos ya contruidos que funcionan como herramientas de solución para nuevos problemas; en función de ello, identificamos en Mirta aquellos conocimientos matemáticos relacionados con la noción de área, que constituyen su *conocimiento primitivo* y que obtenemos a partir de la información procedente del Cuestionario (Anexo XXI). En función de ello, anticipamos que la niña identifica el modelo rectangular como herramienta que resuelve situaciones de conteo por cubrimiento y lo

relaciona con el campo multiplicativo. Sólo en parte, emplea propiedades relacionadas con la noción de proporcionalidad y averigua datos por complemento entre un número y el total.

Realiza repartos equitativos dentro de las sub-regiones de una superficie, pero no expresa todas las posibilidades, reconoce propiedades de las figuras sólo a través de procedimientos empíricos y no percibe la relación entre una porción de una superficie y su totalidad.

A partir del conocimiento mencionado, intentamos explicitar, de manera pormenorizada, el estado de construcción de cada uno de los indicadores asociados a las categorías relacionadas con el concepto de área en la niña. Al mismo tiempo, y desde las capas de comprensión, indicamos cómo el folding back promueve el logro de dichos indicadores.

A diferencia de los que ocurre con los casos de Patricia y Cecilia, en este caso no contamos con información de varios de los indicadores analizados, pues la niña varias de las actividades propuestas no las resuelve o bien las resuelve pero no explicita los procedimientos que le permiten arribar al resultado.

1.-Desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja

Indicador 1.1.- Maneja el material mediante manipulación (en Producción de una imagen). Durante el desarrollo de la secuencia, momento en que tuvieron la oportunidad de observar este indicador, Mirta manipula con soltura, distintas piezas para armar otras sin superponerlas.

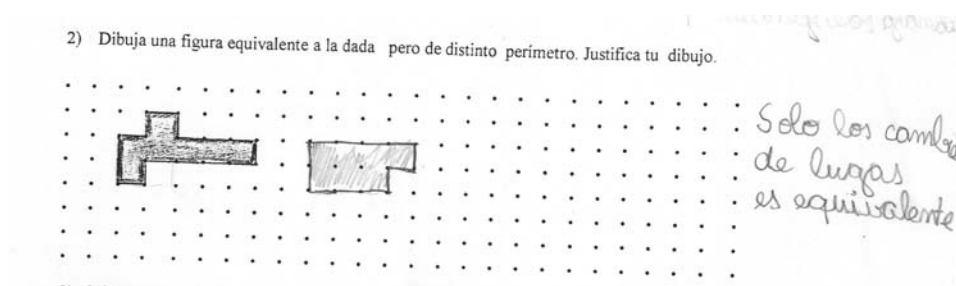
Indicador 1.2.- Aparea lados (en Producción de una imagen). En todas las actividades que componen la secuencia relacionadas con este indicador, Mirta aparea por sus lados distintas piezas de igual o distinta forma para armar una figura compleja.

Durante el desarrollo de la secuencia, en algunas de las actividades, este indicador es impulsor que le permite a Mirta, avanzar en el proceso de comprensión para lograr otros. Nos referimos al proceso de folding back que llevan a la niña a retroceder a este indicador para obtener una comprensión mejor

de los indicadores 2.5.-*Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente* correspondiente al anillo *Producción-Posesión de una imagen*; y al 3.2.-*Reconoce que a mayor/igual/menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/igual/menor perímetro*, todos correspondientes a la capa *Percepción de propiedades*

Inicialmente, en una actividad (SM6) la niña distingue las nociones de área y perímetro entre varias figuras equivalentes, compuestas cada una de ellas por cuatro cuadrados, pero considera que al ser de igual área necesariamente son de igual perímetro. Al pretender hallar el perímetro con un hilo, la niña retrocede a este indicador en su proceso de comprensión, produce un folding back provocado no intencionalmente por ella misma, pues percibe que según se apareen por sus lados los cuadrados, la cantidad de “*entraditas*” de la figura, influye en su perímetro. En otra actividad (SM8), ante la solicitud de identificar las piezas equivalentes del Tangram, su compañera Cecilia le provoca un folding back intencional y explícito a Mirta que la lleva a revisar cómo aparear el triángulo chico por sus lados y medir las distintas piezas en función del triángulo chico como unidad de medida, y detectar que el paralelogramo, el triángulo mediano y el cuadrado son, entre ellos, equivalentes.

Además, este procedimiento perdura en el tiempo, pues en una actividad (EM2) de los cuestionarios finales, se le solicita construir una figura equivalente a una dada pero de distinto perímetro y la niña la construye apareando las piezas-cuadrado – solamente por sus lados, según podemos apreciar en su producción:



Indicador 1.3.- Aparea vértices (en Producción-Posesión de una imagen).

Para resolver algunas de las actividades de la secuencia, la niña aparea figuras por sus vértices. Por ejemplo, compone distintas piezas del tangram, alguna de ellas

por sus vértices, para obtener otra (SM1). En cambio los cuestionarios finales no brindan información sobre si persiste en esta noción, pues resuelve las actividades solicitadas (EM2) sin tener que acudir a este indicador, según podemos observar en el apartado anterior.

Indicador 1.4.- Representa mentalmente la composición de figuras (en Producción-Posesión de una imagen). En todas las actividades que componen la secuencia relacionadas con este indicador, Mirta anticipa mentalmente la composición de figuras.

En una de las actividades de la secuencia, este indicador es impulsor que le permite a Mirta, avanzar en el proceso de comprensión para lograr otro. Es decir nos referimos al folding back que lleva a la niña a retroceder a este indicador y avanzar en la comprensión del indicador 2.4.- *Compara superficies por composición –descomposición*, correspondiente al anillo *Producción –Posesión de una imagen*. Concretamente en esa actividad (SM10), se le solicita determinar la superficie de mayor área entre dos superficies dibujadas sobre papel cuadriculado. Mirta considera los cuadraditos, la explicación que Patricia ofrece a Cecilia que había considerado triángulos, produce folding back no intencional pero efectivo en Mirta, (FB~IE-P) pues la obliga a retroceder a este indicador, representa mentalmente la composición de triángulos y avanzar en su proceso de comprensión, y calcular el área de las superficies componiendo cuando es conveniente, dos triángulos para formar el cuadrado unidad.

En una de las últimas actividades (SM12) se le solicita calcular el área de un patio y Mirta para comenzar, representa mentalmente la descomposición a efectuar en el dibujo del patio

Indicador 1.5.- Elige las piezas sin efectuar ensayos manipulativos (en Producción-Posesión de una imagen). En una de las actividades del cuestionario inicial -sobre conocimientos matemáticos- Mirta no puede establecer afirmaciones sobre distintas superficies sin apelar a constataciones empíricas, recién puede superarlo en aquellas actividades de la secuencia asociadas con este indicador. Por ejemplo en una actividad al comenzar la secuencia, Mirta identifica las piezas que componen otra compleja sin apelar a ensayos manipulativos y este aspecto perdura durante todo su desarrollo pues en una de las últimas actividades en la

cual se le solicita embaldosar un patio, Mirta identifica la descomposición en distintas partes del dibujo del patio. De esta manera, podemos manifestar que la niña supera la adquisición de este indicador, es decir, puede seleccionar piezas sin efectuar ensayos manipulativos.

En síntesis, respecto a *desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja*, En principio en los cuestionarios iniciales, Mirta no puede elegir piezas sin apelar a ensayos manipulativos.(ind 1.5).Durante el desarrollo de la secuencia manipula las piezas para componer y obtener otra (ind 1.1), apareando las figuras por sus lados (ind 1.2) o sus vértices (ind 1.3), aspecto que le permite reconocer propiedades de las figura y paulatinamente, Mirta comienza a anticipar, identificar y seleccionar piezas que componen otra compleja, sin efectuar ensayos manipulativos.(ind 1.5.)

Asimismo, acude en distintos momentos a aparear figuras por sus lados (ind 1.2) o a representar mentalmente su composición (ind 1.4), para comprender otros aspectos más complejos del concepto. Es decir, dichos indicadores los consideramos impulsores de otros, pues Mirta en distintas oportunidades se vio obligada a retroceder en su proceso de comprensión a ellos para avanzar y superar otros

Estos aspectos dan cuenta de que la niña *produce y posee una imagen de la relación entre una figura compleja y las figuras simples asociadas, de manera independiente,*

2.- Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.

Indicador 2.1.-Compara superficies por percepción visual (en Producción de una imagen). En un principio, y según la producción de Mirta en las actividades de los cuestionarios iniciales, para comparar lo hace desde la percepción visual, pues así lo hace en una de las actividades (IAM4), en la que se le solicita comparar un conjunto de superficies y cuando esa actividad (SM3) se presenta nuevamente en la secuencia, la niña reincide y anticipa nuevamente el resultado por percepción visual.

Indicador 2.2.-Compara superficies por superposición y/o inclusión (en Producción-posesión de una imagen). La resolución propuesta por la niña, a las distintas actividades del cuestionario inicial y de la secuencia relacionadas con este indicador, no dan cuenta de que la niña utilice métodos directos, por superposición y/o inclusión para comparar superficies. Recién en los cuestionarios finales la niña se refiere a este método de comparación. Por ejemplo, en una actividad (EM4) se le solicita que complete la siguiente frase “*Para comparar dos superficies debes.....*” y la niña completa *debes superponerlas o.....* Sin embargo en otras actividades, la niña opta por otro método de comparación.

Indicador 2.3. Utiliza las mismas piezas en distinta forma (recompone) (en Producción-posesión de una imagen). La resolución del cuestionario inicial por Mirta revela que identifica superficies formadas por las mismas piezas.

Durante el desarrollo de la secuencia, al momento de distinguir las piezas que componen distintas superficies, la niña por una parte, muestra discontinuidades en el logro de este indicador y por otra, este indicador es impulsor que le permite a Mirta, avanzar en el proceso de comprensión para lograr otros indicadores. Por ejemplo en una actividad (SM8) se le solicita establecer relaciones entre distintas piezas del tangram, para ello utiliza el triángulo chico como unidad para intentar medir las piezas pero las explicaciones que expresa Patricia a la Maestra, función de ello la niña retrocede en su proceso de comprensión, ubica el triángulo chico en otra pieza del tangram, en distintas formas, de esta manera logra avanzar en el proceso de comprensión y establece la relación entre el paralelogramo y el triángulo grande a través de una fracción, correspondiente a la capa exterior, mas precisamente *Percepción de propiedades*. Es decir, se observa en el proceso un folding back no intencional promovido por su compañera Patricia. En cambio, en otra actividad (SM11) de la secuencia, la niña no puede descomponer un diseño en otro de forma rectangular y en la actividad siguiente (SM12) lo logra nuevamente. Estas consideraciones nos impulsan a pensar en la posibilidad de que en la resolución de una actividad, un indicador puede funcionar como impulsor para lograr otro, sin que ello garantice su logro durante el desarrollo de las próximas actividades. Estas consideraciones nos llevan a manifestar que Mirta sólo algunas veces, utiliza las mismas piezas en

distinta forma. Posibilidad de logro que revela limitaciones cuando pretendemos referirnos a la evolución del proceso de construcción de este indicador.

Indicador 2.4. Compara superficies por composición y descomposición (transformación indirecta) (en Producción-posesión de una imagen). En la resolución de las actividades de los cuestionarios iniciales relacionadas con este indicador, Mirta compara superficies por composición-descomposición. Por ejemplo en una actividad (IAM1) ante dos superficies de diferente forma, se le pregunta si necesitan la misma cantidad de pintura para pintar cada una de ellas y Mirta arriba a la respuesta a través de descomponer una superficie y componerla según la otra. En las actividades que componen la secuencia, Mirta en la resolución que lo requiere, compone y descompone parte de las superficies a efectos de compararlas. Por ejemplo, en una actividad (SM10) se le solicita identificar entre dos superficies la de mayor área, a lo cual Mirta para calcular el área de cada una de ellas considera un cuadradito, como unidad conveniente. En cambio, sus compañeras Patricia y Cecilia consideran como unidad los triángulos, y la explicación que producen entre ellas promueve un folding back no intencional pero efectivo en Mirta, pues en función de ello retrocede en su proceso de comprensión, representa mentalmente la composición de triángulos y en función de ello, avanza en su proceso de comprensión a efectuar la comparación de las superficies solicitadas, por composición –descomposición.

Indicador 2.5. Compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente (en Producción-posesión de una imagen). En principio, la producción de la niña acerca de la resolución de las actividades de los cuestionarios iniciales no brindan información respecto a que compare figuras midiendo a través de una unidad conveniente, pero durante el desarrollo de la secuencia lo logra, fundamentalmente, a través de procesos de folding back. Por ejemplo, en una actividad (SM8), en que deben distinguir las piezas equivalentes del Tangram, la explicación que formula su compañera Cecilia provoca un folding back no intencional pero explícito en Mirta que la lleva a retroceder en su proceso de comprensión a aparear por sus lados el triángulo chico y avanzar en dicho proceso pues logra comparar el paralelogramo, el cuadrado y el triángulo

mediano. a través de la medición en función del triángulo chico como unidad conveniente.

Asimismo, el logro de este indicador ha perdurado en el tiempo según podemos observar en la resolución de las actividades de los cuestionarios finales. Por ejemplo, en una de las actividades (MPM3) del cuestionario a medio plazo, debe comparar distintas figuras y Mirta mide cada una de ellas utilizando la misma unidad de medida, el cuadradito, para facilitar la comparación entre ellas.

Indicador 2.6. Construye superficies midiendo, y utiliza para ello, una unidad conveniente (en Producción-posesión de una imagen). La resolución de una de las actividades de la secuencia propuesta por Mirta revela discontinuidades en la construcción de figuras de un área establecida, según una unidad de medida. A posteriori, en los cuestionarios finales, en una actividad (EM2) se le solicita construir una figura equivalente a la dada y de distinto perímetro, la niña construye la figura según las condiciones requeridas, y utiliza para ello el cuadradito como unidad de medida conveniente.

Indicador 2.7. Reconoce que si una figura se descompone y recompone en otra forma, su área no varía (en Percepción de propiedades). En una de las actividades asociadas a los cuestionarios iniciales, Mirta reconoce que si una figura se descompone y recompone en otra, su área no varía. Luego, durante el desarrollo de la secuencia, la resolución de algunas de las actividades dan cuenta de sostiene su logro, por ejemplo en una de las actividades (SM3) se le solicita entre varios escudos, identificar el que necesite menor cantidad de tela. La respuesta de la niña acerca de que si diseños equivalentes pueden tener distinta forma: "son diferentes y no son equivalentes" (línea 181), nos permite manifestar que Mirta estima que la forma no está relacionada con la equivalencia. Asimismo, la resolución de las actividades de los cuestionarios finales muestra que la niña sostiene el logro del indicador, pues en una actividad (EM4) se le pregunta si pueden ser equivalentes dos figuras con distinta forma y, la niña reconoce que una figura puede descomponerse en otra de distinta forma y ser ambas de igual área.

Indicador 2.8 Identifica dos superficies de distinta forma y de igual área (en Percepción de propiedades). El procedimiento empleado por Mirta en la actividad del cuestionario inicial relacionada con este indicador no brinda

información acerca de su logro, y la actividad de la secuencia revela discontinuidades en el mismo. En cambio, en las actividades de los cuestionarios finales, la niña identifica dos superficies de distinta forma e igual área. Por ejemplo en una actividad (MPM3) se le solicita que, entre cuatro superficies de distinta forma, responda si hay entre ellas superficies iguales. Si bien la niña presenta confusión entre “superficies iguales” y “superficies equivalentes”, pues considera como superficies iguales, las superficies equivalentes, su respuesta da cuenta de que identifica dos superficies de distinta forma e igual área.

Indicador 2.9 Identifica dos superficies de igual forma y distinta área (Percepción de propiedades). Al finalizar el proceso, en una actividad de los cuestionarios finales (MPM4) se le pregunta a Mirta si dos superficies de igual forma, pueden tener distinta área, pero Mirta no identifica esta posibilidad.

Indicador 2.10 Identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área (en Percepción de propiedades). El procedimiento empleado por Mirta en la actividad del cuestionario inicial relacionada con este indicador no brinda información acerca de su adquisición, en tanto que la actividad de la secuencia (SM8), revela discontinuidades en el logro del mismo, pues en principio Mirta no reconoce las tres piezas equivalentes del tangram –paralelogramo, cuadrado y triángulo mediano- pero luego lo constata cuando mide cada una de las piezas, utilizando el triángulo chico como unidad. Asimismo, los cuestionarios finales no brindan información acerca del logro de este indicador, por lo tanto manifestamos que solo a veces logra identificar más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área. Posibilidad de logro que revela limitaciones cuando pretendemos referirnos a la evolución del proceso de construcción de este indicador.

Indicador 2.11. Relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, es decir, relaciona las partes y el todo a través de fracciones (en Percepción de propiedades). De los procedimientos de resolución implementados por Mirta en el cuestionario inicial se detecta que no logra relacionar una parte de una superficie respecto del total mediante fracciones. De las actividades de la secuencia relacionados con este indicador, Mirta solo algunas veces puede expresar a través de una fracción la relación. Por ejemplo, en una

actividad (SM8) se le solicita relacionar las piezas del tangram, más precisamente, entre el cuadrado y el triángulo grande. Mirta se centra solamente en el número de partes y en función de ello intenta establecer la relación, lo cual expresa incorrectamente. En cambio, cuando se le solicita establecer la relación entre el paralelogramo y el triángulo grande, Mirta particiona el triángulo grande en cuatro triángulos chicos y la respuesta que Patricia brinda a la maestra produce un folding back no intencional (FB~I-P) que obliga a Mirta a retroceder en su proceso de comprensión, componer dos de los triángulos en el paralelogramo solicitado. Así dispuesto, Mirta avanza en su proceso de comprensión y establece la relación entre el paralelogramo y el triángulo grande a través de una fracción, según escribe *“El paralelogramo es la mitad del triangulo grande”*. Asimismo la resolución de alguna de las actividades de los cuestionarios finales confirma que solo algunas veces logra expresar la relación entre una parte de una superficie y el total a través de fracciones. Por ejemplo en una actividad (EM5), se le solicita expresar cada parte respecto del total- de un cuadrado- y Mirta solo dos de las cuatro partes en que subdividieron la figura, puede expresar correctamente.

En síntesis, respecto a *la Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras*, podemos decir que Mirta compara superficies, en principio, por percepción visual (ind 2.1). Durante el desarrollo de la secuencia, implementa métodos directos e indirectos, para comparar. Es decir, logra comparar superficies por inclusión y/o superposición (ind 2.2) , y/o por descomposición y/o composición (ind 2.4) o midiendo a través de una figura unidad (ind 2.5.-). Este último indicador, perdura en el tiempo según apreciamos en los cuestionarios finales.

La comparación a través de la composición-descomposición (ind 2.4.-) y según el cubrimiento de otra, considerada unidad de medida (ind 2.5.-), Mirta lo logra a través de los folding back explícitos de sus compañeras: Patricia y Cecilia, que llevan a Mirta a retroceder en su proceso de comprensión y efectuar la representación mental conveniente (ind 1.4.) o bien a aparear las figuras por sus lados (ind 1.2.) respectivamente y en este proceso la niña avanza y lograr los indicadores indicados.

Respecto a la posibilidad de disponer de distinta forma las piezas de una figura (ind 2.3). Mirta durante todo el proceso de resolución de las distintas actividades que componen los distintos instrumentos, muestra discontinuidades. Sin embargo en este proceso este indicador actúa como impulsor que le permitió a la niña lograr otro asociado a una capa exterior, concretamente, relacionar una parte con el todo a través de una fracción (ind 2.11). El análisis del proceso evolutivo de este último indicador y la identificación de más de dos superficies de igual o distinta forma e igual área (ind 2.10), dan cuenta que Mirta muestra discontinuidades respecto al logro de cada uno de ellos. Estas intermitencias revelan limitaciones cuando pretendemos referirnos a la evolución del proceso de construcción de los indicadores mencionados.

Por último, los procedimientos empleados por Mirta en los cuestionarios finales nos permiten manifestar, algunos aspectos asociados a esta categoría perduran en el tiempo, por ejemplo, demuestra que puede construir y comparar figuras según una medida establecida al utilizar otra figura como unidad (ind 2.5 e ind 2.6). Reconoce la equivalencia entre una figura y otra formada por la descomposición-composición (ind 2.7) e identifica dos superficies de distinta forma e igual área (ind 2.8). En cambio, Mirta no logra identificar dos superficies de igual forma y distinta área (ind 2.9).

Estos aspectos nos llevan a manifestar que Mirta *produce y posee una imagen del área como cualidad que permite comparar las superficies, y percibe alguna de sus propiedades*.

3.- Distinción y relaciones entre concepto de área y perímetro

Indicador 3.1. Distingue el concepto de área y el de perímetro de una figura (en Posesión de una imagen). La producción de Mirta en las actividades del cuestionario inicial no brinda información acerca del logro de este indicador. En cambio, de los procedimientos implementados por Mirta en las actividades que componen la secuencia, podemos manifestar que la niña logra distinguir las nociones de área y perímetro. En particular, podemos manifestar que la noción de perímetro perdura en el tiempo, pues en una actividad de los cuestionarios finales (MPM2), dos hormigas salen de un mismo punto y recorren cada una de ellas una

región determinada, se les solicita averiguar quién de ellas caminó más, Mirta calcula correctamente el perímetro de cada una de las regiones aunque no arriba al resultado esperado del mismo.

Indicador 3.2. Reconoce que a mayor/igual/menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/igual/ menor perímetro de la misma (en Percepción de propiedades). La producción de Mirta en las actividades del cuestionario inicial no brinda información acerca de este indicador. Los procedimientos implementados por Mirta en las actividades de la secuencia involucrada con este indicador, revela que sólo algunas veces la niña reconoce la independencia de la variabilidad de las nociones de área y perímetro. Por ejemplo, en una actividad (SM6) donde se presenta un conjunto de figuras equivalentes y debe averiguar el perímetro de las mismas, Mirta supone que al tratarse de figuras equivalentes deben ser isoperimétricas. No obstante, bordea las figuras con el hilo según lo solicitado, retrocede en su proceso de comprensión pues observa que, según aparee por los lados las partes de la figura cuando ésta “*tiene más entraditas*”, la figura resulta de mayor perímetro, noción que identificamos con un folding back producido de manera no intencional por ella misma Sin embargo, este folding back es ineficaz, pues a pesar de la consideración a la que arriba, persiste, corta los hilos de modo que sean todos de igual longitud y responde “*me da igual*”, es decir, mantiene su idea original. Respecto de las producciones que brinda la niña en las actividades que componen los cuestionarios finales, los mismos no aportan información acerca del logro de la niña respecto a la independencia de la variación entre el área y el perímetro. En consecuencia la valoración en cuanto al logro del indicador se constituye en un obstáculo al momento de arribar a un resultado en términos de su evolución.

Indicador 3.3. Identifica figuras isoperimétricas e Indicador 3.4 Ordena figuras isoperimétricas respecto de su área (ambas en Percepción de propiedades). La producción de Mirta correspondiente a la actividad del cuestionario final relacionada con estos indicadores no brindan información acerca de su logro, pues en la actividad (MPM2) el resultado arribado (perímetros distintos), no permite analizar lo solicitado.

Indicador. 3.5. Construye figuras equivalentes de distinto perímetro. (en Percepción de propiedades-Formalización) La producción de de la actividad de la secuencia no brinda información sobre si la niña construye figuras equivalentes de distinto perímetro, pero Mirta lo logra según la producción de la actividad correspondiente a los cuestionarios finales. Por ejemplo, en una actividad (EM2) se solicita que dibuje una figura equivalente a una dada pero de perímetro distinto y la niña dibuja la figura que satisface las condiciones, según la producción que adjuntamos cuando nos referimos al indicador *1.2 Aparea las figuras por sus lados*.

Indicador 3.6.- Ordena figuras equivalentes, según su perímetro (en Percepción de propiedades) Los procedimientos implementados por Mirta en la actividad de la secuencia, relacionada con este indicador, no brinda información acerca de su logro, pues en la actividad (SM6) se le solicita investigar el perímetro de varias figuras equivalentes y no contamos con intervenciones de la niña ni su producción da cuenta que ordene las figuras equivalentes según su perímetro

En síntesis, respecto a *Distinguir y relacionar las nociones de área y perímetro*, Los procedimientos implementados por Mirta y su producción correspondiente a actividades de la secuencia y/o del cuestionario final permiten manifestar que la niña distingue las nociones de área y perímetro(ind 3.1) y puede construir figuras equivalentes de distinto perímetro(ind 3.5).Con respecto al reconocimiento de la independencia entre la variabilidad de área y perímetro (ind 3.2), en un momento Mirta lo logra y otras veces no, ejemplo de ello es el folding back ineficaz promovido por ellas misma, pues si bien detecta que la “cantidad de entraditas” de una figura aumenta el perímetro de la misma, cuando arriba a un resultado la niña responde que el perímetro es igual. Es decir que solo a veces lo logra. , entonces podemos observar que la discontinuidad en el logro del indicador, se convierte en un obstáculo al momento de analizar su evolución

Con respecto a identificar figuras isoperimétricas (ind 3.3) y ordenarlas según su área (3.4) o ordenar figuras equivalentes , según su perímetro (ind 3.6) pro procedimientos y la producción que brinda Mirta no permiten analizar estas consideraciones.

Consideraciones que nos permiten solamente manifestar que *Mirta percibe la distinción entre las nociones de área y perímetro, puede construir figuras equivalentes de distinto perímetro, en algunas oportunidades divisa la independencia de la variación de área y perímetro de figuras.*

4.-Nivel de Conceptualización del área como medida de cubrimiento

Indicador 4.1. Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado (en Producción de una imagen). Cuando así lo requieren las actividades del cuestionario inicial, Mirta divide y pavimenta la superficie para contar el número de unidades empleado. Durante el desarrollo de la secuencia, en una de las actividades, este indicador es impulsor que le permite a Mirta, avanzar en el proceso de comprensión para lograr otro. Nos referimos al proceso de folding back que llevan a la niña a retroceder a este indicador para obtener una comprensión mejor, en una capa exterior, más precisamente el indicador 4.2.- *elige una unida adecuada.* Por ejemplo, en una actividad (SM9) en la se le solicita calcular el área de una superficies según las unidades de medida indicadas, la explicación de Patricia sobre cómo realizar el cubrimiento según las unidades solicitadas provoca un folding back no intencional en Mirta que la lleva a retroceder en su proceso de comprensión para avanzar y pavimentar la superficie, según el triángulo, y arribar al resultado según expresa: “12 triángulos”.

Asimismo, perdura su logro según las producciones asociadas a las actividades de los cuestionarios finales. Así, en una de las actividades (EM3), deben calcular el área de una figura irregular a través de dos métodos distintos y Mirta para uno de ellos, utiliza la plantilla y cubre la superficie. En cambio no disponemos de información acerca de que Mirta haya acudido a este procedimiento para resolver las actividades (MPM3 y (MPM4) que componen el cuestionario a medio plazo.

Indicador 4.2.-Elige una unidad adecuada (Posesión de una imagen). Mirta resuelve una de las actividades (IAM7)del cuestionario inicial en función de una unidad, pues se le solicita averiguar la cantidad de papel glasé que necesita para empapelar el pizarrón del aula y Mirta arriba a valor solicitado según su

producción escrita a “45 papelitos”. Asimismo, la resolución de Mirta respecto a las actividades que componen la secuencia, dan cuenta que la niña logra cuando así lo requiere la actividad, elegir una unidad conveniente. Por ejemplo en una actividad la niña identifica la unidad solicitada y arriba al resultado, según el folding back no intencional de su compañera Patricia, más precisamente, en una actividad (SM9), como explicitamos en el apartado anterior, se les solicita calcular el área de una figura según distintas unidades de medida, las explicaciones de su compañera Patricia acerca de las figuras a considerar para realizar el cubrimiento, llevan Mirta a retrocede en su proceso de comprensión, pavimenta la superficie, a fin de avanzar e identificar la unidad solicitada. Por ultimo, la producción de Mirta respecto a la resolución de las actividades que componen los cuestionarios finales, dan cuenta que la noción perdura en el tiempo, pues en una actividad (MPM3) se le solicita que distinga entre varias superficies, la de mayor y la de menor área y Mirta reconoce el cuadrado como unidad conveniente para calcular el área de las mismas.

Indicador 4.3. Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada (en Percepción de propiedades). Durante el desarrollo de la secuencia, Mirta distingue que el resultado, por ejemplo del área, depende de la unidad seleccionada pues por ejemplo, en una actividad (SM9) se les solicita calcular el área de una superficie según distintas unidad de medida y manifestar que puede decir de los resultados arribado, a los efectos de responder Mirta es conciente de que el resultado depende de cada una de las unidades propuestas ellas y establece relaciones entre las distintas figuras que proponen como unidad. Esta propiedad perdura en el tiempo, pues en una actividad de los cuestionarios finales (MPM3), la niña entre varias figuras debe distinguir, por ejemplo la de mayor área, y a los efectos de poder establecer comparaciones, utiliza la misma unidad de medida para calcular el área de las distintas figuras.

Indicador 4.4 Advierte la necesidad de unidades convencionales (en Percepción de propiedades). Sólo en algunas de las actividades de la secuencia, la niña advierte la necesidad de utilizar unidades convencionales. Por lo tanto, no poseemos información suficiente para hacer referencia a este indicador en términos de evolución.

Indicador 4.5 Distingue la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud (en Formalización). Los procedimientos implementado por la niña en actividades de la secuencia relacionadas con este indicador no brinda información sobre el mismo., por lo tanto, carecemos de información sobre si Mirta distingue la relación ente distintas unidades de medida.

En síntesis, respecto del *nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento*, Mirta a partir de sus producciones respecto a actividades del cuestionario inicial realiza cubrimientos para medir superficies y elige una unidad adecuada para ello y estos aspectos perduran durante todo el proceso.. Durante el desarrollo de la secuencia los procedimientos empleados y la producción de aquellas actividades asociadas a esta categoría, dan cuenta que la niña además de los aspectos enunciados, distingue que el número al que arriba como medida del área, depende del tamaño de la unidad seleccionada, aspecto que perdura en el tiempo. Sin embargo no podemos manifestar que la niña haya podido distinguir que dicha relación es inversamente proporcional. Respecto a la selección de una unidad, solo algunas veces, advierte la necesidad de unidades convencionales

Estas consideraciones nos llevan a manifestar que *Mirta concibe la noción de área como medida descubrimiento y considera para ello una unidad adecuada, pues advierte que la medida del área depende del tamaño de dicha unidad aunque no disponemos de información si la niña distingue que dicha relación es inversamente proporcional. Con respecto a la unidad de medida, denota limitaciones a la hora de advertir las unidades como convencionales*

5.-Comprensión de las fórmulas del cuadrado, rectángulo y triángulos como camino más económico.

Indicador 5.1 Asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo (en Producción de una imagen). En el cuestionario inicial Mirta asocia el cubrimiento rectangular con la multiplicación. Por ejemplo, en una de las actividades (IAM7) se le solicita que empapele el pizarrón con hojas de papel glasé; para ello la niña

realiza un dibujo y anticipa un número de acuerdo al siguiente cálculo multiplicativo “ $5 \times 9 = 45$ papelitos”. A pesar que en el desarrollo de las actividades de la secuencia y de los cuestionarios finales relacionadas con este indicador, Mirta utiliza otros procedimientos para arribar a una respuesta, cuando se le solicita expresamente, asocia la cuadrícula con el modelo multiplicativo

5.2. Calcula el área estimando las dimensiones lineales de las figuras (en Percepción de propiedades). La resolución de la niña en las actividades del cuestionario inicial y de la secuencia no brinda información acerca de que Mirta calcule el área de figuras o de parte de ellas en secciones rectangulares a través de sus dimensiones lineales. En cambio, de los cuestionarios finales podemos manifestar que a veces lo implementa, pues por ejemplo, en una actividad de un cuestionario (EM3) se le solicita calcular el área de un polígono por dos métodos diferentes; Mirta subdivide una de las superficies de forma rectangular, y para calcular el área considera sus dimensiones lineales, según indica: “ $H \times B = 13$ Tiene de área 13 cuadraditos”. En otra actividad (MPM4) de otro de los cuestionarios, le preguntan si son suficientes una cantidad (5000 baldosas) para embaldosar el patio de la escuela y Mirta calcula el área de la baldosa y del patio a través de las dimensiones lineales del rectángulo y del cuadrado respectivamente.

En síntesis, Mirta desde un principio y cuando se lo solicita, *posee la representación mental para asociar el cubrimiento rectangular con el campo multiplicativo y sostiene en el tiempo la percepción de las dimensiones lineales del cuadrado, rectángulo y triángulo, con el propósito de utilizar las fórmulas como camino más económico para el cálculo del área.*

6.-Significatividad y funcionalidad del concepto

El análisis de cada uno de los indicadores correspondientes a las categorías asociadas al concepto de área nos permite efectuar una mirada global al proceso de construcción operado en la niña y en función de ello manifestamos que Mirta logra y sostiene a través del tiempo algunos de los ellos. Por ejemplo, la comparación de superficies la sostiene a través de la implementación de métodos

indirectos, y reconoce superficies de distinta forma, equivalentes. Construye una figura según un área dada, equivalente a otro dada y/o distinto perímetro. Realiza cubrimientos sobre una superficie y selecciona una unidad de medida conveniente a efectos de calcular su área al tiempo que reconoce que el resultado del área de una superficie depende del tamaño de dicha unidad. Cuando la superficie es de forma rectangular y se lo requiere explícitamente, asocia el cubrimiento con el modelo multiplicativo asocia y considera las dimensiones lineales para utilizar la fórmula.

En principio, la ausencia de justificación en la respuesta propuesta a las actividades del cuestionario inicial no nos permite anticipar si Mirta puede vincular el concepto a contexto de la realidad. Durante el desarrollo de la secuencia la ausencia de justificación a los resultados sigue siendo un obstáculo y en alguna de las actividades podemos manifestar que no es capaz de vincular el concepto de área para resolver una situación de contexto real. Mas precisamente en una actividad (SM13) en que se le solicita calcular el área de su mano, la niña considera la superficie como una magnitud unidimensional, ni siquiera relaciona la unidad de superficie con la de longitud a través de producto de medidas. Recién la producción que brinda a una actividad (MPM4) de los cuestionarios finales puede vincular el concepto a otros contextos de la realidad, más precisamente se le solicita averiguar si son suficientes una cantidad determinada de baldosas para embaldosar un patio, la niña a pesar de los errores, ha podido llevar a cabo un procedimiento y arribar aun resultado.

Es por ello que respecto a *la significatividad y la funcionalidad del concepto*, la ausencia de justificación en la resolución de las actividades que componen los distintos instrumentos, constituye un obstáculo al momento de abstraer la perdurabilidad en el tiempo de la noción que tiene Mirta respecto al área como cualidad común que tienen las figuras. Sin embargo hemos podido explicitar algunos aspectos del concepto. Asimismo al finalizar el proceso ha podido utilizar el concepto de área a otros contextos de la realidad.

A continuación, nos vamos a ajustar al cómo de este proceso, y para ello nos fijamos en dos mecanismos que lo ha promovido: el folding back y las

interacciones. Ambos se producen a través del diálogo con sus compañeras y la maestra, los cuales nos permiten describir cómo se desarrolla el proceso de comprensión individual del concepto de área en Mirta.

4.2.7.2.- EL PAPEL DEL FOLDING BACK EN EL PROCESO DE CRECIMIENTO DE COMPRENSIÓN DE MIRTA

A efectos de explicar cómo evoluciona la comprensión del concepto de área, observamos la trayectoria - dibujada en el gráfico de comprensión – que describe dicho proceso en cada una de las actividades de la secuencia, resueltas por la niña. Nuestro foco es el movimiento hacia delante y hacia atrás por las distintas capas de comprensión, fundamentalmente en las actividades que presentaron un desafío para Mirta. En estos casos, ella revisa y/o resignifica los conocimientos e ideas existentes acerca del concepto a construir, aspecto que detectamos en el gráfico, por el retroceso a un indicador asociado a una misma capa o más interna. Lo anterior nos permite detectar cómo dicho proceso le sirve a Mirta de sustento para avanzar y comprender indicadores ubicados en capas más externas.

En función de ello, observamos los folding back que se produjeron entre algunos de los indicadores durante el proceso y detectamos que en su gran mayoría fueron inducidos de manera no intencional por sus compañeras, principalmente por Patricia, según adjuntamos en el Anexo XXVI.

Los indicadores involucrados en el proceso de folding back están asociados a las capas *Producción de una imagen*, *Percepción de propiedades* y al anillo *Producción y Posesión de una imagen*. El retroceso a la capa *Producción de una imagen* y al anillo *Producción y .Posesión de una imagen*, especialmente lo observamos para componer figuras apareando las mismas por sus lados, y, en menor medida, para distinguir figuras simples en una compleja, cubrir la superficie y contar el número de unidades o identificar que con un grupo de piezas se pueden formar otras, de distinta forma. Consideramos a estos indicadores como impulsores pues la resignificación de estas nociones, facilita en Mirta un avance con una mayor comprensión a indicadores ubicados en el mismo anillo o a una capa exterior. Es decir cuando Mirta se queda atascada, la participación de sus

compañeras- fundamentalmente Patricia-, le permite reconocer dónde está su error o adoptar un procedimiento para continuar y seguir adelante en el proceso de construcción del concepto, sin que esto suponga necesariamente la resolución correcta del problema.

Para ampliar esta información, nos focalizamos en los procesos de folding back operados en la niña y que favorecieron o no, la comprensión del concepto, explicitando en detalle cada uno de ellos:

-Mirta distingue las nociones de área y perímetro pero al momento de reconocer la independencia de la variación de ambos, se siente obligada a retroceder en su proceso de comprensión, construir figuras apareando otras simples, por sus lados(ind 1.2), en vista a lograr avanzar e identificar la independencia de variación entre ambas nociones (ind 3.2). Sin embargo la niña si bien percibe que ante ciertas condiciones el perímetro cambia, no es capaz de advertir la independencia entre las variaciones del área y el perímetro, por lo tanto el folding back promovido por ella misma le resulta ineficaz

-También utiliza idénticas piezas en distintas formas, pero al pretender comparar superficies debe retroceder nuevamente a aparear las figuras simples por sus lados(ind 1.2), y logra así, avanzar y comparar las superficies, utilizando para medir, una unidad conveniente.(ind 2.5)

-Representa mentalmente la composición de figuras pero al pretender una figura como unidad de medida conveniente, se siente obligada a retroceder en su proceso de comprensión, dividir y pavimentar la superficie a medir contando el número de unidades empleado(ind 4.1), para lograr avanzar e identificar una unidad de medida adecuada.(ind 4.2)

-Elige una unidad adecuada, y la pretender comparar superficies se siente impulsada a retroceder en su proceso de comprensión, representar mentalmente distintas figuras de otra compleja (ind 1.4) en vista a avanzar en dicho proceso y comparar por composición-descomposición distintas superficies (ind 2.4).

-También elige una unidad adecuada, pero ahora al pretender relacionar el área de una parte de una superficie y el total, a través de una fracción, se siente

impulsada a retroceder en su proceso de comprensión, utilizar las mismas piezas en distinta forma (ind 2.3), para avanzar y lograr relacionar el área de una parte de una superficie y el total, a través de una fracción (ind 2.11).

De esta forma observamos que Mirta acudió al indicador *1.2 Aparea las figuras por sus lados*, dos oportunidades como indicador impulsor que le permite lograr otros, correspondientes a anillo o capas exteriores.

De esta manera hemos analizado el logro de cada uno de los indicadores relacionados con la categorías asociadas a la noción de área y podemos observar que algunos de los indicadores relacionados con *la percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos y la conceptualización del área como medida de cubrimiento* la niña lo ha logrado a través del folding back como proceso dinámico del crecimiento de su comprensión. En cambio Mirta no logra acceder a través del folding back, al logro del indicador relacionado con la *distinción de las relaciones entre los conceptos de área y perímetro* debido a que el mismo no resultó, es decir la niña retrocedió a una capa interior en su proceso de comprensión pero la modificación observada en dicho proceso no sirvió para aplicar en la actividad específica.

4.2.7.3.- EL PAPEL DE LAS INTERACCIONES EN EL PROCESO DE CRECIMIENTO DE COMPRENSIÓN DE MIRTA

Completamos el análisis refiriéndonos a cómo Mirta atribuye significado al concepto, durante las interacciones producidas con sus compañeras y con la maestra que generaron la construcción de nuevos conocimientos. Por ello, desde el enfoque dialógico, consideramos lo expresado en el capítulo anterior (apartado 3.3.2.) e intentamos comprender las acciones de la niña, el diálogo y el tipo de interacciones que se opera con las niñas y/o con la maestra en un contexto particular, el aula y la resolución de problemas como instrumento metodológico para construir conceptos.

Durante el desarrollo de la secuencia, los niños comenzaron a resolver los problemas de manera individual, pero durante su desarrollo percibieron su complejidad y empezaron a compartir sus ideas. En general, Mirta trabaja sola, pero ante las explicaciones que manifiesta su compañera Patricia, se interesa por

trabajar con ella. Así Mirta y Patricia, se disponen a trabajar cada una, desde su zona de posibilidad de desarrollo, de sus conocimientos disponibles.

Durante el desarrollo de alguna de las actividades se observan distintos tipos de interacciones que impulsaron a Mirta a involucrarse activamente en la resolución la actividad. Por ejemplo, con Patricia, la colaboración es indirecta y univocal pues si bien Mirta trata de entender y formula desafíos a las explicaciones de Patricia cuando se involucran en explicaciones colectivas vertiendo argumentos y contra-argumentos, la visión de Patricia como autoridad matemática del grupo, de alguna manera hace que Mirta termine aceptando las ideas de ella. Igualmente, el clima generado durante el desarrollo de las actividades promueve en el grupo oportunidad respecto a la construcción de conocimientos, pues mientras Patricia trata de explicar su pensamiento, promueve folding back no intencional en Mirta que le permiten avanzar en su proceso de comprensión. Mirta pretende proponer estrategias de resolución al abordar las distintas actividades, pero Patricia las desestima pues considera que no aporta nada nuevo. En general, no se observan intervenciones significativas por parte de Mirta.

Con Cecilia la interacción es también preferentemente indirecta pero multivocal; pues Mirta cuestiona sus procedimientos y cada una monitorea lo realizado por la otra. Juntas tratan de entender y formulan desafíos a las explicaciones de Patricia.

La gestión de la clase por parte de la maestra favoreció las interacciones en el grupo, y en todo momento los cuestionamientos que propuso instaron a la niña a argumentar sus afirmaciones y a reflexionar sobre distintas posibilidades.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

ÍNDICE	Nº de página
5.1.-Perspectiva de los resultados en relación con las preguntas de Investigación.....	785
5.2.-Aportes, limitaciones del estudio y cuestiones abiertas.....	806
5.3.- Algunas sugerencias para abordar la enseñanza del concepto de área	811

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

5.1.-PERSPECTIVA DE LOS RESULTADOS EN RELACIÓN CON LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este apartado mostrarnos los resultados de la investigación. La fuente principal para su elaboración es el capítulo cuatro, en el cual presentamos el análisis de los tres casos según los objetivos de investigación que formulamos en el capítulo tres.

De manera es que pretendemos caracterizar, comprender e interpretar el proceso de construcción de un concepto matemático, más precisamente el concepto de área, cuando se implementa una metodología de resolución de problemas. Para ello nos interesamos en indagar acerca de qué y cómo construyen dicho concepto cada uno de los tres casos considerados en este estudio, que son tres alumnas/niñas de 5° de primaria integrantes de un mismo grupo.

En este estudio, la consideración del contexto juega un papel importante puesto que referirnos al contexto significó, por una parte, considerar las interacciones en un aula de primaria; y por otra, establecer la estrategia

metodológica a implementar, acorde con la resolución de problemas, durante las distintas sub-fases en que recogimos la información.

La primera sub-fase nos permitió acceder a los conocimientos matemáticos disponibles y las ideas previas acerca del concepto de área de cada caso; en la segunda sub-fase, accedimos al proceso de construcción que se operó cuando resolvieron la secuencia de problemas alrededor de ese concepto en particular.

Por último, la sub-fase al finalizar el desarrollo de la secuencia y después de transcurrido 6 meses, nos proporcionó la construcción del concepto de área logrado y las características de dicha construcción después de un período de tiempo determinado.

Esta información nos permitió proporcionar una interpretación global de los datos en cada uno de los casos, pues a través de cada una de estas instancias tratamos de plasmar, de manera pormenorizada, la evolución del proceso de construcción operado en cada una de ellos, en lo que respecta a qué características manifiestan respecto de la construcción del concepto de área (apartado 2.4.4.1.-) y en cómo construyen dicho conocimiento a través de la interacción.

Por lo tanto, no nos interesa solamente qué han logrado sino cómo lo han hecho. Es decir, nos interesa analizar el proceso de comprensión respecto a la comparación y/o conservación de superficies, a través del uso de métodos directos e indirectos, la noción de área como medida de cubrimiento y la independencia de variación entre dicha noción y el perímetro de las superficies.

Pero además, nos referimos, desde el enfoque dialógico (Linell 2005a), a las acciones derivadas del diálogo de cada caso con sus compañeros y/o la maestra cuando se involucra activamente en el proceso de aprendizaje, establece conexiones y resuelve problemas. Para ello, a efectos de interpretar el proceso de comprensión individual, focalizamos la atención en dos elementos que lo promueven: el folding back (apartado 2.3.2.), que ha emergido como un proceso relevante, y las interacciones (apartados 3.3.2.).

En este apartado, pretendemos trascender los casos estudiados, según la consideración expresada en el capítulo 3 apartado 3.4, identificando los procesos

que subyacen en la construcción del concepto de área cuando se trabaja bajo una metodología de resolución de problemas.

Consideramos, en consecuencia, los objetivos de investigación, según se enuncian en el capítulo tres y, en función de la información obtenida, aspiramos responder:

- ✓ *Caracterizar el proceso de comprensión del concepto de área, en tres niñas de 5° año de primaria, cuando la estrategia metodológica es la resolución de problemas*

La construcción del concepto de área, desde su origen intuitivo hasta las operaciones de comparación y/o conservación de superficies mediante el uso de métodos directo e indirecto, el nivel de conceptualización como medida de cubrimiento y su relación con el perímetro, constituye un proceso complejo.

Sin pretender arribar a generalizaciones, hemos de especificar aquellos aspectos de los tres casos que nos resultan significativos para formular algunas aseveraciones alrededor de las categorías analizadas, según los problemas resueltos en las distintas sub-fases mencionadas, al solo efecto de revelar el proceso implicado en su construcción.

Reconocimiento de figuras simples en una figura compleja.

Una figura puede surgir como composición y/o recomposición de otras, sin superponerlas al aparear éstas, por sus lados y/o vértices. Los tres casos manipulan distintas piezas e identifican las figuras de manera global por su nombre; pero, durante el desarrollo de las actividades que componen la secuencia, anticipan e identifican las piezas que componen otra compleja y las seleccionan sin efectuar ensayos manipulativos, para comprender otros aspectos más complejos del concepto.

En esa composición, acuden a aparear las piezas por sus lados y durante el desarrollo de las distintas actividades también las aparean por sus vértices. Estos aspectos dan cuenta de que los tres casos construyen una imagen acerca de una figura en relación con cada una de las figuras simples asociadas.

Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.

Las figuras pueden cambiar o mantener su forma y sin embargo admiten un ordenamiento, según la magnitud área, y/o el establecimiento de una parte de ella respecto del total o de otra figura.

En principio, para comparar superficies, los casos se dejan guiar por la percepción visual y, en su mayoría, arriban a conclusiones erróneas, pues no proponen argumentos lógicos para justificar, y arriban solamente a una estimación de lo solicitado.

Estos resultados, es justo señalar, coinciden con los obtenidos por Perrin Glorian- Douady (1989) y Corberán (1996). No obstante, durante la resolución de las distintas actividades que componen la secuencia, implementan métodos directos, por inclusión y/o superposición, e incorporan métodos indirectos por descomposición y/o composición o miden según otra figura considerada unidad.

Por ejemplo, en la subfase final, pudieron advertir que para comparar superficies era necesario efectuar la medición de las mismas. Según constatamos, en el caso de Patricia, cuando se le solicitó que completara la siguiente expresión: *“Para comparar dos superficies debes.....”* respondió: *“Para comparar dos superficies debes medir el área que deseas comparar”* (EP4).

La implementación de estos métodos les permitió a los casos reconocer e identificar varias superficies equivalentes de igual o de distinta forma, pues consideramos que la descomposición de una superficie en distintas piezas y su reubicación para formar otra superficie es fundamental al momento de pretender comprender la invariancia del área.

Incluso la comparación de dos superficies a través de la medición utilizando una unidad conveniente, les facilitó construir figuras de un área preestablecida. Sobre estos aspectos Cabañas-Cantoral (2007) y Speiser (2006) advierten relaciones en la práctica entre el área, la medición y la conservación de superficies. Sin embargo, en la subfase final no siempre fue posible advertir estas relaciones.

Los casos muestran discontinuidad durante todo el proceso en el logro del establecimiento de relaciones entre una parte de una superficie y el todo a través de una fracción, pues al momento de relacionar las piezas del tangram, la

respuesta que brindan no se centra en el análisis de la equivalencia de las partes, criterio fundamental para comprender el establecimiento de la relación través de una fracción, según expresan Piaget, Inhelder y Szeminska(1960, en Dickson et al.,1991) y Sadovsky (2005).

En la etapa final del proceso, pretendimos indagar acerca de la noción de proporcionalidad geométrica, pero algunos de los casos -Patricia y Mirta- no identificaron dos figuras de igual forma y de distinta área. Si bien este resultado era esperable, pensamos que las actividades implementadas durante el desarrollo de la secuencia podían proporcionar herramientas para que arribaran a una respuesta satisfactoria.

Estos aspectos nos llevan a manifestar que los casos, a través del proceso de construcción que hacemos referencia, producen y poseen una imagen del área como cualidad que permite comparar superficies, al mismo tiempo que reconocen y detectan la equivalencia entre ellas. Aunque sólo en ciertas oportunidades, los casos- Cecilia y Mirta- pueden formar con idénticas piezas superficies de distinta formas y establecer la relación entre superficies a través de una fracción.

Distinguir y relacionar las nociones de área y perímetro

Las nociones de área y perímetro permiten establecer relaciones entre varias superficies, en vista a compararlas, ordenarlas y cuantificarlas. Se propusieron actividades de contexto puramente matemático y real para facilitar el establecimiento de conexiones entre estas nociones.

Se observaron discontinuidades respecto del logro de esta categoría, pues en principio, en los cuestionarios iniciales, no distinguen ambas nociones, aunque durante el proceso lo logran. Por ejemplo, se les solicita calcular el área y el perímetro de diferentes figuras y la respuesta del caso- Patricia- denota claridad en dichas nociones, al responder: “*En área son 4 cuadrados y en perímetro es 8 lados de cuadrado*” (SP6, línea 158).

Sin embargo, sólo algunas de las actividades de los cuestionarios finales dan cuenta de que puede establecer esta distinción. A pesar de ello, los casos no evidencian una relación de correspondencia directa entre el área y el perímetro entre un grupo de figuras, pues reconocen que a mayor/igual/menor área no

necesariamente le corresponde mayor/igual/menor perímetro, respectivamente, y ordenan figuras equivalentes según su perímetro.

Así fue posible observar en el caso de Patricia cuando manifiesta: “*no importa éstas –figuras- tienen además de equivalencia de áreas, el perímetro, en cambio la otra-figura- no*” (SP6; línea 191).

Distinguir esta propiedad les permite a los casos seleccionar figuras equivalentes de distinto perímetro y ordenarlas según esta noción. Solo parcialmente, Patricia y Mirta construyen figuras equivalentes y de distinto perímetro. En cambio, no disponemos de información acerca de que identifiquen figuras isoperimétricas y, en consecuencia, puedan ordenarlas según su área.

Estos aspectos nos llevan a manifestar que los casos, durante el desarrollo de las actividades, sólo algunas veces disponen de una imagen conveniente acerca de las nociones de área y perímetro; no obstante perciben algunas propiedades entre ambas, al reconocer la independencia de variación entre las relación de ambas.

En función de ello, ordena distintas figuras equivalentes según su perímetro, y solo parcialmente construir figuras equivalentes de distinto perímetro. Sin embargo no disponemos de información acerca de que ordenen un conjunto de figuras isoperimétricas.

Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento

Es elemental visualizar una superficie como región bidimensional y la noción de su cubrimiento al momento de pretender medirla. De manera que los casos, desde la resolución de las actividades del cuestionario inicial, realizan cubrimientos sobre superficies pues dividen y, sin dejar huecos, pavimentan la superficie a medir y cuentan el número de unidades empleado. Esta división y conteo favorece la comprensión de dicha unidad como una unidad de medida conveniente.

Las propiedades relacionadas con las unidades requieren un tratamiento explícito y conlleva un intenso proceso de aprendizaje. Es así que los casos, a través del desarrollo de la secuencia, distinguen que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.

Por ejemplo, en una actividad se le solicita determinar entre dos

superficies la de mayor área, y advierten la dependencia entre la cantidad y la unidad de medida. Ejemplo de ello es la manifestación del caso -Patricia-: *“El área de la figura es 36 cuadraditos y al grupo de Agustina le dio 9 cuadraditos. En la figura están lo cuadrados chiquitos de 2x2 y los de 1x1..... El grupo de Agustina contó cuadrados de 2x2”* (SP10; línea 82).

En otra actividad, se les solicita calcular el área de su mano; uno de los casos estima conveniente considerar como unidad el cuadrado, y desarrolla distintas estrategias para expresar el resultado como iteración de la unidad considerada.

Por ejemplo, observamos que el cuadradito, como unidad de medida conveniente facilita el cubrimiento de la mano. Sin embargo, la elección de esta unidad trae otras dificultades, pues debe componer e intercambiar partes para “armar” unidades completas. Compartimos lo manifestado por Hildreth (1983, citado por Del Olmo et.al, 1993) respecto a que estimar el área de una forma irregular con cierta exactitud es una labor dificultosa que involucra determinados conceptos y habilidades.

No obstante, cuando se les solicita, uno de los casos -Patricia- advierte la necesidad de unidades convencionales, concretamente se refiere al cm^2 , noción que no nos propusimos abordar en esta instancia de aprendizaje.

Con respecto a la relación proporcional inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud, sólo la logran identificar parcialmente. Más precisamente, en una actividad de la secuencia se le solicita calcular el área de una superficie según distintas unidades –cuadrado, triángulo y rectángulo- y un caso manifiesta *“el cuadrado ocupa la mitad de superficie que el rectángulo, entonces me da como área el doble del rectángulo”* (SP9, línea 52).

Aspectos que nos permiten expresar que los casos, desde un principio, perciben la noción de área como medida de cubrimiento y poseen una imagen de la unidad adecuada. Durante el desarrollo de las actividades de aprendizaje advierten las relaciones entre distintas unidades, pero, solo de manera parcial, establecen la relación inversa entre el tamaño de la unidad y la medida de la cantidad de magnitud

Comprensión de las fórmulas del área del cuadrado, rectángulo y triángulo como camino más económico

La estrategia de medición de superficie basada en el cubrimiento respecto de una figura considerada como unidad de medida, muestra significativas consecuencias cuando dicha superficie es de forma rectangular, la unidad se puede organizar según filas y columnas, y la medida puede expresarse como producto entre la cantidad de cuadrados dispuestos en una fila por la cantidad de filas que cubren la superficie.

Estas cantidades a su vez coinciden con las dimensiones lineales de la superficie. El tratamiento explícito de estos aspectos conlleva la construcción comprensiva de las fórmulas del rectángulo.

Desde un principio, los casos asocian la cantidad de una unidad en un cubrimiento rectangular con el campo multiplicativo. En una de las últimas actividades, se les solicita calcular el área de un polígono por dos métodos diferentes. Un caso-Patricia, para uno de los métodos, subdivide la superficie poligonal en dos regiones, rectangular y triangular, muy posiblemente porque asocia cada una de ellas con el campo multiplicativo.

Con respecto a calcular el área de una superficie estimando sus dimensiones lineales, los casos utilizan cuando es posible esta noción durante todas las actividades que así lo requieren.

Así, en una actividad se les solicita calcular el área de un polígono y, durante la puesta en común, uno de los casos le responde a la maestra: *“Para sacar el área tenés que hacer con la medida que uno quiera, por ejemplo cuadraditos: haces lado horizontal por lado vertical y te da el área del cuadrado o del rectángulo. Tenés que fijarte cuánto tenés de cada lado. Pero eso solamente sirve para el cuadrado y para el rectángulo”* (SP12; línea 130).

En este sentido, Lehrer et al (2003) y Chavez et al (2008) expresan que cuando las superficies pueden reducirse a formas rectangulares, la multiplicación es una forma eficiente para contar y, en consecuencia, el área puede expresarse como producto de longitudes, al mismo tiempo que facilita la visualización de las propiedades conmutativa y asociativa de esta operación.

En otra actividad, se les solicita responder acerca de la suficiencia de una cantidad determinada de baldosas para embaldosar un patio. Los casos calculan el área en función de las dimensiones de ambos lados de cada una de ellas, a través de las fórmulas del rectángulo y del cuadrado, respectivamente.

Estos aspectos son significativos pues Battista et al (1998, citado por Lehrer, 2003) manifiestan que, desafortunadamente, muchos niños multiplican las longitudes de los lados de superficies rectangulares para generar su área sin comprender que estos productos componen una distribución matricial.

En general, al momento de resolver aquellas actividades relacionadas con el cálculo de áreas de superficies rectangulares o divisibles en esa forma, los casos optaron por implementar la multiplicación de sus dimensiones lineales. Previamente, habían resuelto actividades a través de los dos procedimientos mencionados con la intención de que pudieran relacionar comprensivamente el sentido visual del área con la noción abstracta de multiplicación.

Estas consideraciones nos inducen a manifestar que los casos asocian desde un principio el cubrimiento rectangular con el modelo multiplicativo y, al finalizar el proceso, acudieron a sus dimensiones lineales con el propósito de utilizar las fórmulas del rectángulo, cuadrado y triángulo, como camino más económico.

En cuanto a la significatividad y funcionalidad del concepto

Efectuamos una mirada global al proceso de construcción operado por los casos, según el análisis de cada una de las categorías, en vista a detectar si sostienen el concepto a través del tiempo, cómo lo sostienen y si lo vinculan a otros contextos.

Respecto a la perdurabilidad del concepto, la resolución de las actividades de los sucesivos instrumentos muestra que los casos van reconociendo la noción de área como cualidad común que tienen las figuras cuando intentamos medir su superficie, y esta noción va enriqueciéndose a través de las propiedades que van logrando establecer.

Por ejemplo: la comparación de superficies por métodos directos e indirectos -más precisamente, la construcción y comparación a través de la medición con una unidad conveniente-; la equivalencia de figuras; y el cálculo de áreas estimando dimensiones lineales como camino más económico.

No obstante, la ausencia de justificación en las producciones de alguno de los casos constituye un obstáculo para detectar este aspecto, pues limita la información. En cambio, no contamos con información que nos permita advertir

la perdurabilidad de la disposición de una imagen en cuanto a establecer relación entre una parte y el todo de una superficie a través de una fracción, las nociones de área y perímetro y la independencia de su invariancia, puesto que durante el proceso los casos denotaron discontinuidades en el logro de estos aspectos. La resolución de las actividades de los cuestionarios finales da cuenta de esto.

Respecto a la vinculación del concepto de área a contextos de la realidad, la resolución de las actividades del cuestionario inicial que brindan los casos lo evidencian aunque incipientemente. A través del proceso, y fundamentalmente la resolución de las últimas actividades de la secuencia y los cuestionarios finales, logran trascender el concepto de área a otros contextos de la realidad.

A continuación nos proponemos abordar el siguiente objetivo

- ✓ *Profundizar en cómo se produce el proceso de construcción del concepto de área en tres niñas de primaria, cuando se implementa la metodología de resolución de problemas.*

Existen indicadores que demuestran cómo los casos han logrado resolver las distintas actividades. Un ejemplo es *la comprensión de las fórmulas como camino más económico*, muy posiblemente, debido a que desde sus conocimientos primitivos asocian la cuadrícula con el modelo multiplicativo. En cambio, otros se lograron a través del diálogo con los casos y/o con la maestra en un contexto de resolución de problemas, en el cual se aclararon aquellas cuestiones que obstaculizaban el proceso de evolución en la comprensión de un concepto.

En el capítulo anterior hemos analizado dicho proceso con cada uno de los casos, fijándonos en dos mecanismos que lo han promovido: el folding back y las interacciones. Ahora, efectuamos una mirada global en cada uno de ellos a efectos de completar el análisis y formular nuestra interpretación de dicho proceso de comprensión.

-El papel del folding back en el proceso de crecimiento de comprensión del concepto

Para cada de las actividades que componen la secuencia de aprendizaje resueltas por cada uno de los casos, hemos confeccionado un gráfico de

comprensión en el que mostramos las trayectorias que describen cómo evoluciona la comprensión del concepto durante el proceso de resolución, dado que el crecimiento de la comprensión matemática es un proceso construtivista y dinámico (Pirie-Kieren, 1994, 1999). Ejemplo de ello es el siguiente gráfico de comprensión correspondiente a un caso -Mirta-asociado a la novena actividad de la secuencia de aprendizaje:

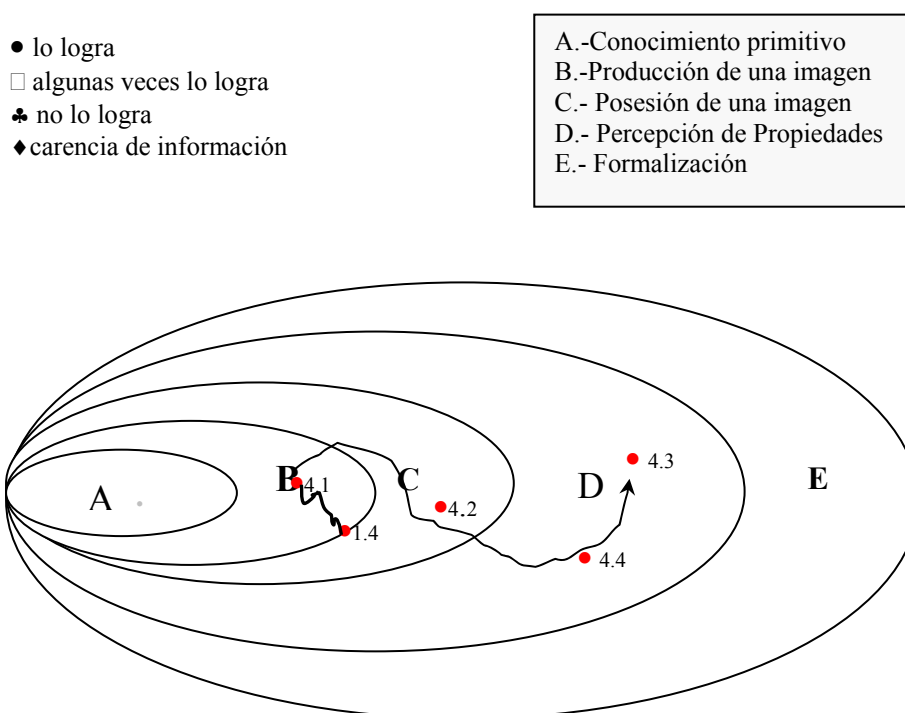


Gráfico de comprensión de S de Mirta asociada a la act. 9

- 1.4.-Representa mentalmente la composición de figuras.
- 4.1.-Divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado.
- 4.2.- Elige una unidad adecuada.
- 4.3.- Observa que el resultado de una medida depende del tamaño de la unidad utilizada.
- 4.4.- Comprende la necesidad de unidades convencionales

Esta trayectoria pone de relieve la presencia de un mecanismo denominado folding back (Pirie- Kieren, 1994,1999; Martín, 2008, 2009) que ha emergido como un indicador clave para comprender cómo se resuelven los estados de duda y de incomprensión en el proceso de construcción de un concepto durante la resolución de problemas.

El folding back se visualiza cuando la trayectoria, en dichos gráficos,

retrocede a indicadores ubicados en una capa interior y después avanza a otros pertenecientes a capas exteriores. Estos retrocesos se producen fundamentalmente en aquellos problemas que presentaron un desafío para los casos.

En particular, se corresponden con aquellos momentos en los que los casos se quedan atascados, momentos en los cuales la interacción con la maestra o con un compañero les permite revisar y/o resignificar sus conocimientos e ideas previas acerca del concepto a construir, o bien reconocer dónde está el error y avanzar con una comprensión más profunda, con el fin de lograr indicadores ubicados en una capa exterior y continuar con la resolución del problema.

Un ejemplo lo observamos en el gráfico de comprensión que hemos presentado anteriormente. Dicho gráfico corresponde a una actividad en la que se presenta a los niños una superficie dibujada sobre papel cuadriculado y se les solicita que determinen su área según distintas unidades de medida.

El folding back se visualiza en el trazo más grueso que tiene origen en el indicador 1.4 y retrocede al indicador 4.1. Pues en principio, el caso -Mirta- comienza a representar mentalmente las unidades propuestas (ind 1.4 en *Producción-Posesión de una imagen*) hasta que su compañera Patricia explica cómo realizar el cubrimiento sin dejar huecos y expresa la relación entre dos de las tres unidades propuestas, el cuadrado y el triángulo. Esta intervención invocativa de la niña induce un folding back (FB~I-P) en Mirta, que, al escucharla, retrocede en su proceso de comprensión pavimentando la superficie y contando la cantidad de unidades utilizadas (ind 4.1 en *Producción de una imagen*), para avanzar en el proceso de resolución y arribar al resultado “12 triangulitos” (ind 4.2 en *Posesión de una imagen*).

Es decir, el retroceso al indicador- 4.1- le permite a Mirta avanzar en el proceso de resolución del problema, y utilizar el triángulo como unidad de medida adecuada -4.2.- Como la niña no puede solucionar de inmediato lo solicitado, la manifestación de su compañera Patricia le permite retroceder en su proceso de comprensión a un indicador ubicado en una capa interior, reorganizar su construcción inicial, generar nuevas ideas para continuar en el proceso de comprensión y arribar a la solución.

De esta manera, el proceso de folding back detectado en cada uno de los casos, durante la resolución de las distintas actividades que componen la

secuencia de aprendizaje, se ha mostrado poderoso para promover la dinámica de acción en el proceso de crecimiento de la comprensión del concepto de área, aunque con efectos diferentes en cada caso.

En el caso –Patricia-, que contaba con conocimientos primitivos significativos y un compromiso manifiesto con la resolución de las actividades, el folding back le permitió avanzar hacia procedimientos más formales desde una perspectiva matemática.

En el caso –Cecilia- sus conocimientos primitivos le resultaban insuficientes al momento de resolver las actividades y el folding back le ayudó a adoptar nuevos procedimientos para avanzar en la resolución del problema. Lo mismo ocurrió con Mirta, pero en su caso, la adopción de un nuevo procedimiento matemático no suponía necesariamente la resolución correcta del problema.

A continuación, consideramos el conjunto de los gráficos de comprensión de cada uno de los casos, nos focalizamos en aquellos indicadores que se han logrado a través de un folding back y nos planteamos una serie de preguntas que a continuación formulamos y respondemos. ¿Cuáles son los indicadores logrados a través del folding back? ¿Existen indicadores que, a lo largo de la secuencia de aprendizaje, son logrados a través de diversos folding back?

Los siguientes indicadores: *elige una unidad adecuada, compara superficies por composición –descomposición y midiendo, a través de una unidad conveniente; relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, a través de fracciones; utiliza las mismas piezas en distintas formas; identifica más de dos superficies de igual o distinta forma e igual área y reconoce que a mayor/igual/menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/igual/menor perímetro de la misma*; son logrados a través de folding back.

A su vez, algunos de ellos, como por ejemplo los indicadores: *utiliza las mismas piezas en distintas formas, relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, a través de fracciones; elige una unidad adecuada y compara superficies midiendo, a través de una unidad conveniente*, lo logran a través de diversos folding back, vinculados con la resolución de distintas actividades que componen la secuencia.

Durante el análisis, y en la consideración del mecanismo del folding back, hemos observado que existen determinados indicadores que han jugado un papel

más decisivo como sustento para avanzar en la construcción del concepto de área.

Es decir, aquellos indicadores que han actuado como promotores de una mayor comprensión en cada uno de los casos, los denominamos *indicadores impulsores de comprensión* y nos referimos a ellos como IIC.

Un ejemplo es el indicador: *representa mentalmente la composición de figuras* (IIC), pues el caso- Cecilia -retrocede en varias oportunidades a dicho indicador, lo resignifica de manera que funciona como impulsor de comprensión que le permite lograr los indicadores: *compara superficies midiendo, utilizando para ello una unidad conveniente; utiliza las mismas piezas en distintas formas y elige una unidad adecuada*.

Patricia- de igual forma- retrocede en dos oportunidades al indicador: *Compara las superficies por composición –descomposición* (IIC) como impulsor del logro de los indicadores: *utiliza las mismas piezas en distintas formas y relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, a través de fracciones*, ubicados en el mismo anillo o una capa exterior respectivamente.

Entonces nos planteamos: ¿Aquellos indicadores logrados a través de un folding back, en los distintos casos, fueron impulsados por el mismo indicador?

No necesariamente ha ocurrido así, pues todos los casos – Patricia, Mirta y Cecilia- logran el indicador: *reconoce que a mayor/igual/menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/igual/menor perímetro de la misma* impulsados por el indicador: *aparea las figuras por los lados* (IIC); pues todos ellos retroceden a él y lo resignifican para lograr ese indicador.

Solamente los casos -Patricia y Mirta- logran el indicador: *relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total, a través de fracciones* impulsados por el indicador: *Utiliza las mismas piezas en distintas formas* (IIC) y los casos- Cecilia y Mirta – logran el indicador: *elige una unidad adecuada*, impulsados por el indicador *divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta del número de unidades empleado* (IIC).

En cambio, los casos –Cecilia y Mirta- logran *comparar superficies midiendo, utilizando para ello una unidad conveniente*, y los casos-Patricia y

Cecilia- logran *utilizar las mismas piezas en distintas formas*, impulsados cada uno de ellos por distintos indicadores.

Entonces, destacamos como *indicadores impulsores de comprensión* (IIC), los siguientes: *maneja el material mediante manipulación, aparea lados, representa mentalmente la composición de figuras; compara superficies por superposición y/o inclusión; utiliza las mismas piezas en distintas formas; compara superficies por composición y descomposición; divide y pavimenta la superficie a medir y cuenta el número de unidades empleado.*

Todos ellos están asociados, en su mayoría, a las dos primeras categorías: *desarrollar la percepción mediante el reconocimiento de figuras simples en una figura compleja y percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.*

Estas consideraciones, en definitiva, respaldan las decisiones que tomamos en la selección de las actividades de los cuestionarios iniciales, en las que consideramos que los niños necesitaban: reconocer figuras simples en una figura compleja, detectar figuras formadas con idénticas piezas y comparar superficies a través de método directos para comenzar a incursionar en la construcción del concepto de área.

Destacamos también dos indicadores que, para alguno de los casos, han funcionado como IIC (*impulsores de comprensión*) y para otros, han sido logrados a través del folding back: *utiliza las mismas piezas en distintas formas y compara las superficies por composición –descomposición,*

Además, el indicador: *utiliza las mismas piezas en distintas formas*, al comenzar la secuencia se logra a través de folding back, pero cuando se avanza en el desarrollo de la secuencia, funciona como impulsor para lograr otros ubicados en capas exteriores.

Por ejemplo, en el caso –Patricia-, en una de las primeras actividades, retrocede en su proceso de comprensión a comparar superficies por composición y descomposición para avanzar y lograr identificar otras figuras formadas por idénticas piezas que antes no lograba distinguir.

Al continuar el desarrollo de la secuencia, en otra actividad, la niña retrocede a dicho indicador, el cual sirve como impulsor para acceder al indicador: *relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total a*

través de fracciones.

Retomamos los indicadores que han sido logrados como resultado de procesos de folding back y explicitamos la categoría correspondiente en vista a expresar algunas hipótesis.

Así, por ejemplo, los indicadores: *utiliza las mismas piezas en distintas formas; compara superficies por composición y descomposición; compara superficies midiendo, utilizando para ello, una unidad conveniente; identifica más de dos superficies de igual o distinta forma y de igual área; relaciona el área de una parte de una superficie con respecto al área total a través de fracciones* corresponden a la categoría: Percepción del área como cualidad de los objetos que permite compararlos, en particular, equivalencia de figuras.

Por su parte, *Reconoce que a mayor/igual/menor área de una superficie no corresponde necesariamente mayor/igual/menor perímetro de la misma; ordena figuras equivalentes según su perímetro* corresponden a la categoría: Distinción y relaciones entre el concepto de área y perímetro.

Por último, solo un indicador *elige una unidad adecuada* corresponde a la categoría: *Nivel de conceptualización del área como medida de cubrimiento*, los cuales fueron construyéndose según el desarrollo de la secuencia.

En función de ello, podríamos manifestar que estos indicadores podrían ser considerados como medulares a la hora de incursionar en la construcción del concepto, pues avizorarían algunas nociones propias, como por ejemplo, la noción de equivalencia, al momento que pretendieran medir superficies.

Al mismo tiempo, la consecución de ellos permitiría incursionar en el logro de otros indicadores propuestos. Se trata de un tema que podría ser objeto de atención en futuros estudios.

En general, los folding back detectados fueron inducidos intencionalmente por la maestra y promovidos de manera no intencional por cada uno de los casos. En su gran mayoría resultaron efectivos pues posibilitaron el crecimiento de la comprensión de cada uno de ellos y mostraron cómo el diálogo con los compañeros y/o la maestra co-determinaron las acciones de comprensión matemática

-El papel de las interacciones en el proceso de crecimiento de la comprensión del concepto

El *enfoque dialógico* intenta comprender la acción de las personas, la cognición y principalmente la comunicación y el lenguaje, es decir, cómo se construye el conocimiento y cómo le atribuimos significado (Linell, 2005a).

Las interacciones es el otro mecanismo que nos permitió acceder a cómo se construye el conocimiento. Desde el enfoque mencionado, intentamos comprender el intercambio comunicativo entre los casos cuando resuelven distintas actividades durante el proceso de construcción del concepto, y detectar cómo le atribuyen significado.

Es por ello que consideramos el diálogo y analizamos el tipo de interacciones que se producen entre los casos y/o con la maestra en un contexto particular: el aula y la resolución de problema como instrumento metodológico. Como anticipamos en el capítulo 3, apartado 3.3.1.-, nos focalizamos en el uso de la palabra, de las frases, de los símbolos, con el objeto de recapturar la naturaleza dialógica del discurso.

Con el recurso del instrumento denominado *Tabla de diálogo*, compuesto por columnas denominadas: unidad de significado, interlocutor – emisor y receptor-, acción, naturaleza de la acción e idea unidad, analizamos el papel de las interacciones en este proceso de comprensión.

Consideramos, entonces, las mencionadas columnas: *unidades de significado*, en donde incluimos un recorte del diálogo entre los niños y/o la maestra; *acción*, donde indicamos el tipo de intervención de los casos y/o la maestra en relación con la intervención anterior y poniendo de relieve la naturaleza retroactiva de cada contribución; *Naturaleza de la acción* en la que plasmamos aquellos verbos-expresiones que permiten expresar la función comunicativa que desempeñan los interlocutores, según se trate de los casos o la maestra y que la investigadora asigna en función de cada intervención y su relación con la intervenciones posteriores: y el *interlocutor* (R) a quien va dirigida la acción.

Estos elementos permiten poner de relieve el tipo de interacciones, por un lado, entre los casos, y por otro, entre la maestra y el caso. Por ejemplo, en cada uno de los casos, analizamos la naturaleza de sus interacciones respecto del nivel de compromiso, de colaboración y de autoridad (Cobb, 1997).

En cambio, entre la maestra y cada uno de los casos consideramos la acción de la maestra con respecto a la capa de comprensión a que remite al caso, en vistas a favorecer la construcción de conocimiento (Martín, 2008).

El análisis de las interacciones mencionadas durante la resolución de las distintas actividades, según este instrumento, nos permite manifestar que las interacciones entre los casos- Patricia y Mirta -son preferentemente *univocales*; pues Patricia le explica a Mirta y ésta organiza sus ideas mientras acepta y trata de interpretar lo sugerido.

En la mayoría de ellas, Patricia monitorea el procedimiento implementado y domina la situación; no obstante, sus intervenciones, en algunas oportunidades, promueven un *folding back* no intencional en su compañera, que le permite a Mirta avanzar en la resolución de las actividades y en el proceso de comprensión del concepto.

En cambio, las interacciones entre los casos -Patricia y Cecilia- son fundamentalmente *multivocales* pues intercambian sus procedimientos y sus ideas al tiempo que Cecilia cuestiona y/o formula desafíos a las explicaciones de su compañera Patricia, pero atienden y se adaptan a lo realizado por la otra.

Entre Cecilia y Mirta las interacciones preferentemente son también *multivocales*, pues Cecilia explica un procedimiento, pero, por lo general, Mirta se lo cuestiona pero no formula otro procedimiento alternativo, por lo tanto, no podemos afirmar que las explicaciones vertidas generen entre ellas avances en la construcción de conocimiento.

Con respecto al nivel de autoridad, percibimos que los casos reconocen a Patricia como autoridad matemática y social. Por ejemplo, el caso Mirta, en algunos momentos, trata de justificar sus procedimientos y el caso Patricia o no la escucha o hace que termine aceptando sus ideas.

Sin embargo, Mirta desea trabajar con ella. Cecilia, por su parte, no goza de ser una ascendiente importante en el grupo ni por sus saberes matemáticos ni por sentimientos afectivos que impulsen a sus compañeras a considerar sus propuestas.

No obstante, ella se compromete con su tarea, intercambia sus procedimientos y sus ideas al tiempo que cuestiona y/o formula desafíos a las explicaciones de su compañera-Patricia-, pero se adecua a los desafíos y

argumentaciones sostenidos por sus compañeras y arriba a la solución del problema.

De esta manera, y al transcurrir el desarrollo de las actividades, constatamos que la colaboración entre los casos es predominantemente indirecta, pues, cada uno de ellos, manifiesta sus ideas en voz alta y el otro aprovecha los comentarios. Es decir, son insumos en el proceso de construcción que se opera en cada uno de ellos.

Por último, las interacciones producidas por la maestra con los casos son fundamentalmente provocativas e invocativas. Provocativas, pues en algunas oportunidades, sus manifestaciones impulsan a los casos a desplazarse a una capa exterior, e invocativas, ya que los impulsa hacia una capa interior con la intención de inducir un folding back, según hemos referido anteriormente.

Las respuestas manifestadas por los casos dan cuenta que cómo cada uno de ellos va construyendo el concepto, el cual no es meramente un proceso mental sino también un proceso social, y ambos se imbrican y complementan.

En cuanto a la *metodología de resolución de problemas*: expresamos algunas reflexiones sobre el papel desempeñado, puesto que es el contexto en el que se ha desarrollado la secuencia de aprendizaje.

Dicha metodología, la concebimos como un proceso progresivo de diálogo y reflexión, pues intentó promover procesos de crecimiento de comprensión en cada uno de los casos, en un clima distendido de trabajo.

Especialmente, consideramos el salón de clase como un lugar donde se promovieron actividades que fomentaron la formulación de preguntas, conjeturas, argumentos, explicaciones, pues en sus diferencias los casos avanzaron tanto en sus procedimientos como en la comprensión del concepto a construir.

Los cuestionamientos que propuso la maestra a la totalidad de la clase le sirvió a cada uno de los casos para considerar su “hacer” y “su reflexión sobre su hacer” sobre las posibles soluciones planteadas. Por ejemplo, el caso Patricia se involucró en explicaciones colectivas, monitoreadas por la maestra, que la instaron a reflexionar acerca de aspectos concretos de la construcción del concepto de área.

A través de la implementación de esta metodología pretendimos crear condiciones adecuadas para apoyar y enriquecer los procesos de construcción del conocimiento.

Y para finalizar, nos referimos al diseño de los instrumentos que facilitaron el análisis y la interpretación, según el siguiente objetivo

- ✓ *Ahondar en el diseño de instrumentos para el análisis e interpretación del proceso de comprensión del concepto.*

Nuestro propósito fue analizar la comprensión del concepto en términos de los indicadores que habíamos formulado y mostrar la comprensión en acción, a través del folding back, si lo hubiere, involucrado en la cognición del concepto.

Para su desarrollo y consustanciados con los conceptos de la teoría dinámica para el crecimiento de la comprensión matemática de Pirie - Kieren (1994,1999), contamos con un gráfico denominado *Gráfico de comprensión*, para el cual redefinimos cada una de las capas y anillos a utilizar, según los fines de este trabajo, en las capas denominadas: *Conocimiento primitivo*, *Producción de una imagen*, *Posesión de una imagen*, *Percepción de propiedades* y *Formalización*, respectivamente.

De esta forma, contamos con un gráfico de comprensión para cada una de las actividades resueltas y en cada uno de los casos.

En la construcción, contamos con distintos instrumentos que elaboramos para ese fin. Por ejemplo, la tabla denominada *Relación entre las capas de comprensión y las categorías vinculadas al concepto de área*, realizada según la reflexión llevada a cabo, en base a las investigaciones relativas a la construcción del concepto en los niños- apartado 2.4.2.- y mi experiencia en el aula.

Ambas decisiones nos facilitaron la asignación de cada uno de los indicadores de las categorías a las capas o anillos del gráfico. Dicha tabla nos facilitó la construcción de la siguiente, denominada *Relación entre los problemas, las categorías y las capas de comprensión vinculadas al concepto de área* mediante la cual consideramos solamente los indicadores asociados a una actividad concreta.

De esta forma, a cada uno de los problemas que componen los cuestionarios- excepto el de conocimientos matemáticos primitivos- y la secuencia, asignamos un determinado gráfico de comprensión.

A fin de determinar el logro de los indicadores asignados a cada uno de los gráficos de comprensión, contamos con la producción escrita de los niños, o parte de ellas, y para las actividades de la secuencia de aprendizaje, dispusimos también de otro instrumento denominado: *Tabla de diálogo*. Esta tabla la diseñamos en base al instrumento diseñado por Muñoz–Catalán (2012). La misma nos facilitó el análisis pues nos brindó información desde varias perspectivas. Nos proporcionó información acerca de las interacciones producidas en la dinámica del diálogo producido entre cada uno de los casos, con otros compañeros y /o con la maestra.

Además, nos brindó información a través de la cual pudimos anticipar el logro del o de los indicador/es involucrados en cada problema, en particular, e interpretar el proceso de comprensión que se opera en cada caso, al permitimos dibujar la trayectoria y, en algunos casos, distinguir el folding back.

En particular, la información que brindaron las columnas: *Unidad de significado* y el contexto que da sentido a cada contribución -*Acción y Naturaleza de la acción*- nos permitieron, por un lado, inferir aspectos relacionados con el estado de logro de los indicadores involucrados en ese problema, los cuales especificamos en la columna *Idea unidad*.

Por otro lado, nos permitieron establecer la secuencia según la aparición del logro de los mismos. Esta información posibilitó el dibujo de la trayectoria del proceso de comprensión que se operó en una niña en particular respecto de un problema, y detectar, cuando existe, el folding back contribuyendo a interpretar dicho proceso.

Para completar el análisis y con el objeto de plasmar la evolución del proceso de construcción del concepto en cada una de las niñas, utilizamos otro instrumento denominado *Tendencias de las categorías*.

Este instrumento nos brindó el logro detectado en cada uno de los indicadores asociados a las categorías analizadas y especificados según los problemas de los distintos cuestionarios y la secuencia. De manera que su visión global nos facilitó el proceso evolutivo de cada uno de ellos.

Estas consideraciones revelan la utilidad y potencialidad que estos instrumentos ofrecieron para el análisis de este trabajo.

5.2.-APORTACIONES, LIMITACIONES DEL ESTUDIO Y CUESTIONES ABIERTAS

A continuación, presentamos algunos tópicos acerca de los cuales este trabajo supone una aportación al campo de la Didáctica de la Matemática:

La secuencia de aprendizaje como favorecedora de la construcción del concepto: El análisis de cada una de las actividades resueltas por los casos nos permite manifestar que, en líneas generales, la secuencia inspirada en las aproximaciones que plantea Freudenthal según nos referimos en el capítulo 2, apartado 2.4.4.2.-, favoreció la construcción del concepto de área.

De todos modos, si realizamos una mirada retrospectiva al diseño de la misma podemos resaltar algunos aspectos que satisficieron los propósitos previstos. Por ejemplo, advertimos que la secuenciación de los conocimientos abordados resultó, en su gran mayoría, conveniente, pues decidimos presentar el área directamente, disociada de la forma de la superficie y del número que la mide, enfatizando el proceso de comparación entre varias superficies, e indirectamente, evitando confusiones entre área y perímetro, al utilizar para ello unidades no convencionales.

Asimismo, la comprensión del significado de la unidad favoreció el concepto de medida del área, entendida como un proceso de comparación de dos superficies, y posteriormente, la conveniencia del estudio de las fórmulas asociadas a superficies rectangulares o triangulares.

El abordaje social en la construcción de conceptos: No solo nos referimos a qué características del concepto construyen sino que nos interesamos muy especialmente en cómo arribaron a ellas en el contexto de un aula de primaria, donde se implementa como metodología la resolución de problemas.

Arribar a una respuesta, demandó la inmersión profunda y detallada del fenómeno a comprender y consideramos para ello el estudio de caso, de tres

casos. La perspectiva dialógica del discurso (Linell, 2005a), a su vez, nos proporcionó una fundamentación consistente respecto del papel del diálogo y las interacciones en el proceso de construcción del concepto.

Accedimos así, a la realidad que viven los casos, detectamos cómo se implican en la resolución de cada uno de los problemas, cómo interactúan con sus compañeros y con la maestra, en vista a interpretar cómo desarrollan el significado del concepto de área.

La tabla de diálogo, un instrumento que operativizó el análisis: Intentamos comprender la atribución de significado de cada uno de los casos durante el proceso de interacción.

Si bien Bjuland (2004) y Cobb et al. (1997) se preocuparon por el diálogo y las interacciones entre los niños y/o con la maestra, según explicitamos en el apartado 5.1, no nos proporcionaron un instrumento metodológico que satisficiera nuestras necesidades.

Sin embargo, el instrumento IMDEP construido por Muñoz-Catalán (2012), que facilitaba el análisis de las interacciones de una maestra con otros colegas en un contexto colaborativo de desarrollo profesional, nos permitió la construcción de nuestro instrumento *-Tabla de diálogo-*, el cual nos facilitó el análisis a través del diálogo producido entre los niños y/o la maestra. Este instrumento nos permitió detectar, por un lado, los avances cognitivos alrededor de la construcción de la noción de área, en cada uno de los casos.

Por otro lado, nos permitió divisar el proceso de su comprensión, fundamentalmente en lo que se refiere al *folding back*, una noción clave para comprender cómo se resuelven los estados de duda, de incompreensión en el proceso de construcción de un concepto durante la resolución de problemas en el contexto de un aula de primaria.

El folding back como herramienta de acción para comprender el crecimiento de la comprensión del concepto: Esta noción se ha revelado como mecanismo significativo en el proceso de crecimiento de comprensión del concepto, en correspondencia con los términos de Pirie-Kieren (1994, 1999).

Observamos que el niño se involucra y toma conciencia de sus limitaciones respecto a sus conocimientos en un momento determinado del proceso de comprensión, y gracias a una intervención adecuada, resignifica o revisa sus conocimientos para avanzar con una comprensión más potente y continuar el proceso.

En este trabajo, no solo nos hemos detenido en los indicadores que se lograron a través del folding back, sino también en aquellos indicadores que, como ya anticipáramos, han actuado como promotores de una mayor comprensión y que denominamos *indicadores impulsores de comprensión*.

En consecuencia, hemos detectado que algunos indicadores han sido logrados por lo casos, a través del folding back, y otros indicadores han funcionado como impulsores para promoverlo.

De manera que el folding back nos permitió identificar cuál es el papel que los distintos indicadores poseen en el proceso de comprensión del concepto, pues algunos se manifiestan como medulares o esenciales, puesto que por su complejidad requieren de un mayor esfuerzo para su logro obligando al niño a revisar y / o resignificar cuestiones sabidas.

Otros indicadores, sin embargo, se manifiestan como impulsores de comprensión (IIC), al funcionar como promotores de conocimiento en el proceso de comprensión del concepto. De este modo, podemos manifestar que el folding back no solo promueve la comprensión de un concepto, sino que evidencia el rol diferente que tienen los indicadores involucrados en la construcción del concepto.

Con respecto a la intervención adecuada del folding back y en concordancia con Martín (2008,2009), explicitamos quién lo inducía o promovía y la intencionalidad con que lo realizó.

Caracterización relacionada con la noción a abordar: Pirie-Kieren (1994) y Duzenli-Gokalp (2010) han investigado acerca del crecimiento de la comprensión de un tema en concreto, por ejemplo *Suma y resta de fracciones* y Villa Ochoa (2011) sobre *Tasa de variación*.

En este trabajo, redefinimos las capas y anillos del modelo en función del concepto área, desde el conocimiento existente que el caso trae-conocimiento primitivo-, a través de la confección y posición de una imagen, a la advertencia de propiedades y formación de esa imagen e intentamos ampliar y analizar el proceso de comprensión al abordar una noción más amplia: la magnitud área. Esto supuso abordar varios aspectos del concepto, durante un periodo determinado de tiempo, a través de la implementación de una secuencia de aprendizaje confeccionada para este fin.

A continuación, destacamos algunos aspectos que condicionaron nuestra investigación y otros que reconsideraríamos en futuros estudios:

-Nos vimos obligados a acotar la selección del grupo entre los alumnos de uno solo de los cursos de quinto año y desestimar los otros a cargo de la maestra, debido a inconvenientes ajenos a este trabajo.

-Durante el desarrollo de las distintas actividades y, fundamentalmente en la puesta en común, las reflexiones producidas con la totalidad de los niños, las preguntas y repreguntas formuladas por la maestra abrieron otras posibilidades y aparecieron otras características del concepto, por ejemplo, *estimar el resultado entre valores próximos*.

Aunque hubiera sido interesante abordarlas, la maestra optó por focalizarse solamente en los contenidos implicados en la secuencia. Es sabido que la metodología de resolución de problemas propicia momentos de discusión entre los niños y con la maestra, al tiempo que impulsa a reflexionar acerca de lo realizado.

Debiéramos, en todo caso, destacar que esto no se da espontáneamente; la intervención de la maestra es determinante para llevar adelante ese momento, el cual depende, por ejemplo, de sus propósitos, del contenido matemático a enseñar y de los conocimientos de los niños. Es por ello que, en ese contexto, la maestra tomó decisiones que la llevaron a priorizar los contenidos involucrados en la secuencia.

-Exhortar a los niños a escribir los procedimientos implementados en la resolución de los distintos problemas, en vista a obtener información pormenorizada para realizar el análisis del proceso de construcción que se opera

en ellos, conscientes de que la ausencia de argumentación fue un obstáculo a la hora de efectuar el análisis.

Anteriormente señalábamos como cualidades de la secuencia de aprendizaje su apertura y flexibilidad con respecto a los conocimientos aprendidos, las actividades implementadas y al contexto en el cual se desarrolló; no obstante, planteamos aspectos que nos invitan a señalar algunas consideraciones en vista a su mejora. Por ejemplo,

-Durante su desarrollo consideramos adecuado referirse de manera indistinta a figuras, superficies o región, pues en las actividades de la secuencia no nos referimos a una superficie como región y la utilización de ese término en el cuestionario final se convirtió en un obstáculo al momento de interpretar la comprensión de la consigna, pues los niños desconocieron ese término.

-Revisar las actividades que componen la secuencia en vista a brindar más información respecto a la vinculación del concepto a otros contextos y perdurabilidad del mismo a través del tiempo, pues solamente hemos podido efectuar una interpretación global del mismo en cuanto a su significatividad y funcionalidad.

-Como ya hemos anticipado, durante la resolución de las últimas actividades, una de las niñas expresa el resultado en centímetros cuadrados y lo denota cm^2 , al mismo tiempo que lo relaciona con un cuadrado de 1cm de longitud de lado.

Es decir, que el símbolo que le asigna tiene sentido para ella, lo cual nos impulsa a considerar otro posible indicador: *Utilización del cm^2 como una unidad de medida convencional estándar*. Esta noción enunciada en función de la construcción efectuada por uno de los casos da cuenta de la posibilidad que tienen los niños de construir otros aspectos del concepto.

-Podríamos pensar en incursionar en la proporcionalidad geométrica, a través de alguna actividad que considere la existencia de figuras de igual forma y distinta área, si bien no pretenderíamos que las identifiquen por su nombre, como figuras semejantes.

-Incluir en el diseño de la secuencia más actividades involucradas con la construcción de distintas figuras a través de la utilización de idénticas piezas y solicitar respuestas que lleven a los niños a estimar el área de una superficie entre valores próximos.

Asimismo, planteamos algunos asuntos sobre los que sería interesante indagar y que pueden funcionar como futuros temas de investigación:

-Investigar la perdurabilidad de las nociones del concepto logradas en esta instancia por un periodo más prolongado que el previsto para este trabajo. Por ejemplo, proyectar el trabajo por un periodo que cubra dos lectivos a efectos de abordar la construcción del concepto según los requerimientos del nivel primario.

-Detectar, analizar e interpretar la construcción de otros conceptos matemáticos en contextos de resolución de problemas

- Identificar los indicadores medulares y /o los impulsores de comprensión (IIC) en la construcción de un concepto matemático concreto.

-Analizar la perdurabilidad de los indicadores asociados a determinadas características del concepto de área que se lograron a través del proceso del folding back.

5.3.-ALGUNAS SUGERENCIAS PARA ABORDAR LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE ÁREA.

Como formadora de profesores de educación primaria considero significativo en este apartado aproximarnos a aquellos aspectos del trabajo que pueden aportar algunas ideas al momento de revisar los diseños curriculares de nivel primario, y/o para la formación inicial de profesores y profesores en actividad del nivel implicado, relacionadas con la enseñanza de este concepto en particular.

Respecto del diseño curricular vigente del nivel primario de la provincia de Buenos Aires:

En la unidad de aprendizaje propuesta para este trabajo, los contenidos abordados fueron tomados del diseño curricular de la provincia de Buenos Aires, vigente durante su implementación.

En esa oportunidad, el diseño curricular proponía un conjunto de contenidos para desarrollar durante el ciclo (de 4°, 5° y 6° años) y era responsabilidad de la escuela la distribución de los mismos en los distintos años. En ese momento, la selección a la que arribamos señalaba significativas diferencias con los contenidos que había desarrollado la maestra en el ciclo anterior.

Actualmente, el diseño curricular vigente, implementado a partir del año 2008, prescribe los contenidos a desarrollar en cada año de primaria. En particular, para 5° año, sugiere las siguientes recomendaciones, según se adjunta en el Anexo VIII, y he marcado en negrita las que se corresponden con los sugeridos en esta propuesta de trabajo:

*“.....el tratamiento del área implica la posibilidad de **comparar áreas de figuras sin necesidad de medir, a partir de recortes y superposiciones.** En este tipo de situaciones los alumnos/as podrán **identificar si una figura tiene mayor, menor o igual área que otra sin conocer aún las fórmulas para el cálculo.** Otro aspecto será la **diferenciación entre área y perímetro como magnitudes independientes, más allá del modo de calcular ambas medidas.** De allí que **en un comienzo se proponen problemas que ponen el acento en “transformar figuras” de manera tal que varíe el área independientemente del perímetro y viceversa.***

*Para avanzar en el trabajo con el área, se propone ofrecer a los alumnos/as **problemas que implican el uso de diferentes figuras como unidades de medida (cuadraditos en hoja cuadriculada, triángulos, rectángulos, etc.) y con ellas determinar el área de otras figuras.** Será imprescindible, una vez más, **apelar a fracciones** para dar cuenta de la cantidad de unidades de medida que entran en la figura que se mide, ya que, en algunas oportunidades, dicha unidad de medida deberá ser subdividida. En este caso también será importante **identificar que si cambia la unidad de medida, cambia la cantidad de unidades de medida que se necesitan para cubrir una figura.**”(pág 209)*

Observamos, entonces, que la propuesta es acorde con el diseño curricular vigente y, si bien los especialistas han considerado material de investigación actualizado para su diseño, este trabajo puede brindar un enfoque científico a las decisiones adoptadas.

Desde este enfoque, y a solo efectos de manifestar nuestro parecer, en función de las consideraciones que hemos arribado en este trabajo y los contenidos que el diseño propone desarrollar, en 6° año- figura en el Anexo VIII- proponemos que los especialistas del diseño consideren la posibilidad de trasladar el siguiente contenido: *Variación del área y del perímetro de una figura en función de la variación de la medida de algunos de sus elementos* al próximo año, es decir, al primer año de Secundaria Básica

Respecto de la formación inicial de profesores y profesores en actividad del nivel implicado, relacionadas con la enseñanza del concepto de área.

Los conocimientos matemáticos que aborda la formación inicial de profesores de educación primaria y los profesores diplomados del nivel, se apoyan en un conjunto de saberes y experiencias que se construyen durante el desarrollo de su carrera profesional

Además del conocimiento matemático propiamente dicho, debe contar con aquellos conocimientos que le permitan transformar los contenidos para su enseñanza, con el fin de hacerlos comprensibles a los alumnos (Shulman, 1987).

Para ello, los estudiantes para profesor, en su formación, y los profesores en actividad necesitan diseñar unidades didácticas en función de ciertos organizadores (Rico, 1997) en vista a su posterior implementación y autoevaluación.

Como formadora de profesores de nivel primario me interesan aquellas conclusiones del trabajo que aporten a los profesores en formación desde dos perspectivas. Por un lado, hemos diseñado una unidad de aprendizaje alrededor de un contenido en particular, el concepto de área. Para ello hemos formulado el análisis didáctico, consustanciados con las ideas de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009), con la intención de ofrecer un espacio de reflexión que muestre el proceso de construcción de dicho concepto y los criterios que permiten abordar su complejidad. Enfocamos el análisis respecto: al contenido propiamente dicho (a partir de la revisión de los documentos curriculares, identificación y organización de los múltiples significados del concepto a abordar), al enfoque cognitivo (anticipar hipótesis acerca de cómo los niños progresan en la construcción del

concepto cuando resuelven las actividades propuestas para su aprendizaje), de instrucción (a través del diseño y selección de problemas que componen la secuencia de aprendizaje) y de actuación (anticipación sobre los distintos procedimientos que implementan los niños y las dificultades a las que pueden enfrentarse), aspectos que hemos explicitado en el capítulo 2, apartado 2.4.4.2.-y capítulo 3, apartado 3.5.2.1.-respectivamente. Todo ello según un contexto del aula donde se implementa una metodología de resolución de problemas.

El diseño de dicha unidad puede, entonces, analizarse en las aulas de los institutos de formación docente y ofrecer pautas para que los estudiantes para profesor puedan esbozar unidades de aprendizaje alrededor de otros conceptos, y su respectivo análisis didáctico, pues ni las tradiciones, ni los textos explican, por ejemplo, qué aspecto de un concepto se está poniendo de relieve con un determinado problema, ni explicitan la progresiva complejidad que han de representar.

Por otro lado, el análisis respecto a la construcción del concepto de área en cada uno de los casos brinda ejemplos para que los profesores en formación, con el propósito de otorgar sentido a su enseñanza y recapacitar acerca de sus propuestas, interpreten el aprendizaje de los niños, a través de la observación, el análisis crítico de sus producciones y el diálogo con sus compañeros y /o el docente.

Asimismo, podemos tener en cuenta estas consideraciones como sugerencias para los profesores en actividad del nivel. Pensamos que estos aportes brindan información para avanzar en los aspectos relativos al proceso de construcción de conceptos matemáticos y contribuye a la formación de profesionales comprometidos con el aprendizaje de los niños.

Finalizo este trabajo, por así decir, movilizada a seguir indagando en el proceso de construcción de este concepto y de otros conocimientos matemáticos que los niños deberán construir en el pasaje por los distintos niveles de la escolaridad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alsina, C., Burgués, C.y Fortuny, J. (1992). *Una Invitación a la Didáctica de la Geometría. 12*. Madrid: Síntesis.
- Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA*, 8 (1), 30-46.
- Anijovich,R.yCapelletti,G.(2009).*Transitar la formación pedagógica: dispositivos y estrategias*. Buenos Aires: Paidós.
- Arcavi, A.& Friedlander,A.(2007). Currículo developers and problem solving the case of Israeli elementary school projects. *ZDM*, 39, 355-364. doi: 10-1007/s11858-007-0050-3
- Armendáriz, M.V., Azcárate,C.y Deulofeu,J. (1993). Didáctica de la Matemática y Psicología. *Infancia y Aprendizaje*, 62-63; 77- 99.Recuperado de:
http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/guerr_o/praticamatema/referencias/compromisos2/Armend%Elriz%20y%20otros.pdf

- Artigue, M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Reserches en Didactique des Mathematiques*, 10(23), 241-286. Traducido por Maria Fernanda Espitia Olaya. Recuperado de: <http://grupocalculo.galeon.com/articulo2.doc>
- Artigue, M. & Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. *ZDM*, 39 (5-6), 365-382, doi:10-1007/s11858-007-0048-x
- Azcarate, P. (2001). *El conocimiento profesional didáctico –matemático en La formación inicial de los maestros: Una propuesta de intervención para su organización y Elaboración*. Cádiz: Universidad de Cádiz Publicaciones.
- Baquero, R. (2001). *Debates constructivista.*, Buenos Aires: AIQUE.
- Baquero, R. (2004). *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: AIQUE.
- Barba Téllez, M; Cuenca Díaz, M. y Gómez, A. (2007). Piaget y L.S. Vigotsky. en el análisis de la relacion entre educación y desarrollo. *Revista Iberoamericana de Educación*, 42(7), Organización de los Estados Iberoamericanos para la Educación de Ciencia y la Cultura (OEI) recuperado de: <http://www.rieoei.org/deloslectores/1616Tellez.pdf>
- Barallobres, G. (1997). *Matemática 7 EGB*. Buenos Aires: AIQUE
- Bardin, L. (1986). *Análisis de contenido*. Madrid: Akal.
- Barrantes, H. (2006). La Teoría de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 1(2). Recuperado de: <http://cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%206.pdf>
- Barraza Macias, A. (2002). Constructivismo Social: Un paradigma en formación. *Psicología Científica.com*, 4(3). Recuperado de <http://www.educarchile.cl/Userfiles/P0001%5CFile%5Cconstructivismo-social-un-paradigma-en-formacion.pdf>
- Bartolini-Bussi, M. (1991). Theoretical and empirical approaches to classroom interaction. In R. Biehler Scholz & R. Straesser (Eds.) *The didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. (pp.121-132). Dordrecht: Kluwer.

- Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press
- Battista, M.T & Clements, D.H. (1998). Student's Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 503-532
- Blanco Nieto, L. (1993). *Consideraciones Elementales sobre la Resolución de Problemas*. Badajoz: Universitas.
- Blumer, H. (1969). *Symbolic Interactionism. Perspective and Method*. Englewood Cliffs: N. J. Prentice Hall
- Blue, W.& Niss, M. (1991).Applied mathematical solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.
- Boaler, J.& Greeno, J. G. (2000). Identity, Agency and Knowing in Mathematical Worlds. In J. Boaler (Ed.) *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*. (pp.171-200). Westport, CT: Ablex
- Boero,P;Dapueto,C.& Parenti, L.(1996).Didactics of mathematics and the professional knowledge of teachers. In A.Bishop, et.al (Eds.) *International handbook of mathematics education*. (pp.197-212). Dordrecht: Kluwer.
- Boero, P.(2007) Problem solving in mathematics education in Italy: dreams and reality. *ZDM*, 39, 383-393, doi:10-1007/s11858-007-0051-2
- Bonotto,C (2001) How to connect school mathematics with student's out-of-school knowledge. *ZDM Mathematics Education*, 33 (3), 75-84
- Bonotto, C. (2003). About Students'Understanding and Learning of the Concept of Surface Area. In D.H. Clements & g. Bright (Eds.),*Learning and teaching measurement:2003 yearbook of the National Council of Teachers of Mathematic*. (pp. 157-167). Reston, VA.: NCTM
- Brown.S.L.&Walter, M.I.(2005). *The Art of Problem Posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Cabañas, G y Cantoral, R. (2006).La conservación en el estudio del Área. En R.Cantoral; R.Covian; J. Farfan y J.Lezama. (Eds.), *Investigaciones sobre*

- enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp.199, 226). México DF: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A.C
- Cai, J.& Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: research and practice. *ZDM*, 39, 459-473, doi: 10-1007/s11858-007-0042-3
- Campbell, S. (2006). Educational neuroscience: New horizons for research in mathematics education. En J. Nototná, H.Moraová, M. Krátká & N.Stehliková. (Eds.) *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*. (pp. 257-264) Prague: PME.
- Carretero, M. (1997). *Introducción a la psicología cognitiva*. Buenos Aires: AIQUE
- Carretero, M. (2001). *Debates constructivistas*. Buenos Aires: AIQUE.
- Carrillo Yáñez, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemática de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. Sevilla.
- Carrillo Yáñez, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: Metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones
- Carpenter, T.P (1975). Measurement concepts of first-and second-grade students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 6(1), 3-13.
- Cass, M.; Cates, D.; Jackson, C.W.& Smith, M. (2002). *Facilitating Adolescents with Disabilities Understanding of Area and Perimeter Concepts via Manipulative Instruction*. Extraíble en: <http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED463113.pdf> <http://www.eric.ed.gov>
- Castelnuovo, E. (1963). *Didáctica de la matemática Moderna*. México: Trillas.
- Castorina, J.; Ferreiro, E.; Kohl, M y Lerner, D. (1999). *Piaget-Vigotsky; contribuciones para replantear el debate*. Buenos Aires: Paidós.

- Castro Martínez, E. (2008). Resolución de problemas: Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo González; A.Gómez; M.Camacho Machín y Blanco Nieto, L. J. (Eds) *Investigación en educación Matemática. XII*, Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM
- Clement, D.H. (1999).Teaching Length Measurements: Research Challenges. *School Science and Mathematics*, 99 (1), 5-11
- Clemens, S.& Daffer, P. (1998). *Geometría*. Serie AWLI. México: Pearson Educación.
- Cobb, P. (1995) Mathematical Learning and Small-Group Interaction: Four Case Studies. En P.Cobb & H. Bauersfeld.(Eds.) *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. (pp. 25-129).Mahwh, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cobb, P; Yachel E & Wood, T. (1999) The interactive constitution of Mathematical Meaning in One Second Grade Classroom: All Illustrative Example. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (4), 469-488.
- Cockcroft, W. H. (1985). *Informe Cockcroft Las matemáticas sí cuentan*, traducción española por el Ministerio de Educación y Ciencia- MEC. (pp. 90-91). Madrid.
- Cohen, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.
- Colás, M.P y Buendía, L. (1998). *Investigación educativa*. Sevilla: Alfar.
- Cole, C.y Solé, I. (1989).Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica. *Cuadernos de Pedagogía*, 168, 12-16
- Contreras, L.C. y Carrillo, J. (2000) Un amplio campo de la resolución de problemas. En J.Carrillo & L.C Contreras (Eds.). *Resolución de Problemas en los Albores del Siglo XXI: Una Visión Internacional desde Múltiples Perspectivas y Niveles Educativos* (pp.13-37).Huelva: Hergue
- Corberán, R. (1996). *Análisis del Concepto de Área de Superficies Plana. Estudio de su Comprensión por los Estudiantes desde Primaria a la Universidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. Valencia.

- Coriat, M. (1999). *Materiales Didácticos y Recursos*. En E. Castro (Ed.) *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. (pp.71, 82).Madrid: Síntesis Educación
- Cubero, R. (1994). Concepciones alternativas, preconceptos, errores conceptuales: ¿distinta terminología y un mismo significado? *Investigación en la escuela*, 23, 33-42
- Cubero Pérez, R. (2005) Elementos Básicos para un constructivismo social. *Avances en Psicología Latinoamericana*. 23, Bogotá: Fundación para el avance de la Psicología. 43-61. Recuperado de <http://redalyc.uaemex.mx>
- Cruz, F. y Gualda, E. (1996). *Métodos y Técnicas de Investigación Social*. Huelva: Asociación de Estudios Sociales “Miguel Ángel Caro”.
- Curry, M., Mitchelmore, M. & Outhred, L. (2006) Development of children's understanding of length, area, and volume measurement principles. In J. Nototná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková. (Eds.) *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2; 377-384, Prague: PME.
- Chamorro, M. y Belmonte, J. (1991). *El problema de la medida*. 17. Madrid: Síntesis Educación.
- Chamorro, M. (1996) El Currículum de medida en la educación primaria y el E.S.O. y las capacidades escolares. En *Medida. UNO. Revista de didáctica de la matemática*, 10, Barcelona: Graó, 43-62
- Chamorro, M. C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesis de doctorado. Universidad Nacional de Educación a Distancia. UNED. Madrid.
- Chamorro, M. (2001) Las dificultades en el aprendizaje de las magnitudes en educación primaria y E.S.O. En E. Fernández González (Coord.). *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*. (pp.81-124). Madrid: MEC.
- Chamorro, M. (2003). Las magnitudes multilíneas: la superficie y el volumen. En *Didáctica de la Matemáticas*. (pp.246-278). Madrid: Pearson Educación.

- Charnay, R.(1993).Probleme ouvert, probleme pour chercher. En *Grand 51*, Grenoble: IREM
- Charnay, R. (1994) Aprender por medio de la resolución de problemas. En C.Parra y I. Saiz.(comp.) *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones*. (pp.51-65).Buenos Aires: Paidos.
- Chavez, M; Sousa,M y Ribeiro,C.(2008). À descoberta das fórmulas das áreas: Do retângulo ao triângulo, un percuso constructivo cõn alunos dos 4 ano. *Educação Matemática*, 98, 19-23.
- Chevallard, Y. (1991) *La Transposición Didáctica*. Buenos Aires: AIQUE
- D'Ambrosio, U.(2007). Problem solving: a personal perspective from Brazil. En *ZDM*,39, 515-521, doi: 10-1007/s11858-007-0039-y
- Davini, M.C.(2008). *Métodos de enseñanza: Didáctica general para maestros y profesores*. Buenos Aires: Santillana.
- De Los Reyes, M.I. (1999) *Diferenciando el Área y el Perímetro. Enseñanza Experimental Aplicada a un Grupo de 3er Grado de Primaria*. Tesis de Maestría en Ciencias. México: CINVESTAV.
- Del Olmo, M.A; Moreno, M.F. y Gil, F. (1993).*Superficie y Volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* 19, Madrid: Síntesis Educación.
- Dickson, L.; Brown, M. & Gibson, O. (1991) *El Aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: Labor /MEC.
- Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos aires. Consejo General de Cultura y Educación (1997).*Documento Curricular. Área matemática- C.2*. Buenos Aires.
- Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires. Consejo General de Cultura y Educación (2001).*Diseño Curricular. Educación Inicial Educación General Básica. Marco General*. Buenos Aires.
- Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires. Consejo General de Cultura y Educación (2001).*Diseño Curricular. Educación Inicial Educación General Básica. Tomo I*. Buenos Aires

Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires.
Consejo General de Cultura y Educación (2001). *Diseño Curricular. Educación Inicial Educación General Básica. Tomo II*. Buenos Aires

Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires.
Consejo General de Cultura y Educación (2004). *Programa de Evaluación de la Calidad. Documentos Definitivos*. Buenos Aires

Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires.
Consejo General de Cultura y Educación (2004) *Aportes para el Fortalecimiento de la Enseñanza de la Matemática en la E.G.B.* Dirección de Currículo y Capacitación Educativa de la Provincia de Buenos Aires, Documento de apoyo para la capacitación. DGCyE/ Subsecretaria de Educación. Recuperado en:

<http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/aportesmatematicaegb.pdf>

Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires.
Consejo General de Cultura y Educación (2005)-*Circular N° 2 ¿Cómo trabajar desde el enfoque de la resolución de problemas en el Primer Ciclo de la EPB?* Recuperado de

<http://abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/default.cfm>

Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires.
Consejo General de Cultura y Educación (2008) *Diseño Curricular de Educación Primaria. Marco General*. Buenos Aires. Recuperado de:

<http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/documentosdescarga/marcogeneral.pdf>

Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires.
Consejo General de Cultura y Educación (2008) *Diseño Curricular de Educación Primaria. Segundo Ciclo*. Buenos Aires. Recuperado de:

<http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/documentosdescarga/diseniocularparaeduacionprimaria2ciclo.pdf>

- Duoady, R. (1996). *Enseñanza de la Matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Grenoble: Soto. Toxiques éditions. Publication des I.R.E.M. Traducción. Paloma Ferreras
- Duzenli-Gokalp, N & Sharma, M.D. (2010). A study on addition and subtraction of fractions: The use of Pirie and Kieren model and hands-on activities. *Procedia Social Behavioral Sciences*, 2, 5168-7171. Recuperado de: www.sciencedirect.com
- Echevarria, H. (2005). *Los diseños de investigación y su implementación en educación*. Rosario: Homo Sapiens
- English, L.D. (2003). Problem posing in the elementary currículum. En F. Lester & R. Charles (Eds.) *Teaching Mathematics Through Problem Solving*. (pp. 187-198) Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- English, L. (2006). Mathematical Modeling in the primary school: Children's construction of the consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 62 (3), 303-329.
- English, L.D. (2007). Complex systems in the elementary and middle school mathematics curriculum: A focus on modeling. En B. Sriraman (Ed.) *Festschrift in Honor of Gunter Torner. The Montana Mathematics Enthusiast*. (pp. 139-156). Charlotte: Information Age Publishing.
- English, L.D. (2009) Promoting interdisciplinary through mathematical modeling. *ZDM*, 41(1), 191-181.
- English, L. & Sriraman, B. (2010) Problem solving for the 21st century. In B. Sriraman & L. English. *Theories Mathematics Education*. (pp. 263-285). *Seeking New Frontiers*: Springer
- Erickson, F. (1890). Métodos Cualitativos de Investigación sobre la Enseñanza. En M. Wittrock. (ed.). *La Investigación de la Enseñanza II*. (pp. 195-295). Barcelona: Paidós/MEC.
- Ernest, P. (1994a). Variedades de Constructivismo: Sus metáforas, epistemologías e implicaciones pedagógicas. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*. 1-14. (versión castellana: J. Godino). Recuperado de:

http://webdelprofesor.ula.ve/nucleotachira/oscar/materias/epistemologia/lecturas/unidad3/equipo3_Ernest1994_Constructivismo.pdf

Ernest, P. (1994.b). Social Constructivism and the Psychology of Mathematics Education. En P. Ernest (Ed.) *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematical Education*, 6, (pp.62-72). Londres: The Falmer Press

Ernest, P. (1996). Varieties of Constructivism: A framework for Comparison. En L. Steffe & P. Nesher (Eds). *Theories of Mathematical Learning* (pp. 335-350). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Ernest, P (1998) *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany: SUNY.

Ernest, P (2004) La conversación como una metáfora para la matemática y el aprendizaje. *Revista Uno, Didáctica de la Matemática*, 37, 81-91, Barcelona: Graó.

Ernest, P. (2006) Reflections on Theories of Learning. *ZDM*, 38 (1), 3-7

Ernest, P. (2010) Part II: Reflections on Theories of Learning. In B. Sriraman & L. English. (Eds.), *Theories of Mathematics Education*. Seeking New Frontiers. (pp.39-48). London: Springer.

Ferrandes, E. (2000). Fazer Matemática Compreendendo e Compreender Matemática Fazendo: A Apropriação de Artefatos da Matemática Escolar. *Cuadrante*, 9 (1), 49- 78

Figueras, O. & Waldegg, G. (1984) A First Approach to Measuring. (Children between 11 –13 years old). *Proceeding of the 6th Annual Meeting PME-NA*. Madison W, 95-100.

Fioriti, G. (1998). *Didáctica de la Medida*. Informe Final del Trabajo de Investigación. Universidad Nacional del Comahue. Cipolletti.

Forni, P. (2003). *Las Metodologías de George Herbert Mead y Herbert Blumer. Similitudes y Diferencias*. Universidad del Salvador. IDICSO. Serie Documentos de Trabajo. IDICSO. Recuperado de:

<http://www.salvador.edu.ar/csoc/idicso/docs/sdti014.pdf>

- Freudenthal, H. (1983) *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. Traducción de L. Puig (1994) publicada en. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV. México.
- Freudentahl, H. (1991) *Revisiting Mathematics Education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer.
- García Amadeo, G. B. (2005) *La construcción del concepto de área a través de la resolución de problemas*. Tesis de maestría inédita. Universidad del Comahue. Neuquén.
- García, C. M. (1992) *La Investigación sobre Formación del Profesorado: Métodos de Investigación y Análisis de Datos*. Sevilla: Cincel.
- García J.E. (1994). El conocimiento escolar como proceso evolutivo. *Investigación en la Escuela*, 23, 65-76.
- García J.E.(1998). Hipótesis, perspectivas y criterios en la organización y construcción del conocimiento escolar. En J. García *Hacia una teoría alternativa sobre los contenidos escolares*. (pp.17-20). Sevilla: Díada.
- García, J. y García, F (1994). *Aprender Investigando*. Sevilla: Díada.
- García-Madruga, J.A.(2002). Resolución de Problemas. En P.Abrantes; C.Barba;I. Batlle; T.Colomer y M,Torra. *La resolución de problemas: Teorías y experiencias*. (pp.27, 35).Barcelona: Graó
- García; A; Zorzoli, G. (1996). *Construyendo con Lápiz y Papel*, 5, 2º Ciclo. Buenos Aires: Tiempos.
- Gaulin, C. (2000) *Tendencias actuales en la resolución de problemas*. Conferencia pronunciada el 15 de diciembre, Palacio Euskalduna, Bilbao.
- Goetz, J.P y Le Compte, M.D. (1988). *Etnográfica y Diseño Cualitativo en Investigación Educativa*. Madrid: Morata.
- Godino, J. (2001) *Confrontación de herramientas teóricas para el análisis cognitivo en didáctica de la matemática*. XVI Reunión del SIIDM. Grupo DMDC, SEIEM, Huesca.

- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemática de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada.
- Goodchild, S.(2010) Commentary 1 on Reflections on Theories of Learning by Paul Ernest. In (Eds.) B.Sriraman; &L.English.. *Theories of Mathematics Education*. (pp.52). Seeking New Frontiers. Springer.
- Gravemeijer, K & Terwel, J.(2000). Hans Freudenthal, A mathematician in didactics and curriculum theory. En *Currículo Studies*, -Instituto Freudenthal de la universidad de Utrech, Holanda, 32(6), 777-796, versión castellana: Saggese,N.; Gallego, F.; Bressan,A.
- Grupo Cero de Valencia (1984). *De 12 a 16. Un currículo de matemáticas*. Valencia: Edelvives
- Grupo Cero de Valencia (1989) *De 12 a 16. Materiales Curriculares para la Educación Primaria*. Tercer Ciclo. Valencia: Edelvives.
- Grupo Cero de Valencia (1990). *De 6 a 12. Figuras de Plakene en "Matemática III"*- Segundo Ciclo- Materiales Curriculares Para la Educación Primaria, Valencia: Edelvives.
- Grupo Cero de Valencia (1991). *De 6 a 12. Medir superficies en "Matemática IV"*- Segundo Ciclo- Materiales Curriculares Para la Educación Primaria, Valencia: Edelvives.
- Guba, E. y Lincoln, Y. (1981). *Effective Evaluation*. London: Jossey-Bass Publishers
- Hart, K.M., et.al. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*, C.S.M.S. London: John Murray.
- Heraud, B. (1987). Conception of Área Units by 8-98 Years-old-Children. In . *Proceeding of the Eleventh International Conference*. (pp. 299-304). Montreal: PME.
- Hershkwitz, R.& Ben Chaim, D.(1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In P.Nesher, P & J.Kilpatrick, (Eds) *Mathematics and Cognition: a Research Synthesis by the International Group for the Psynthesis of*

- Mathematics Education. (PME)*, Cambridge: Cambridge University Press. 75-95.
- Hildret, D.J.(1983).The use of Strategies in Estimating Measurement. *Arithmetic Teacher*, 30(5), 50-54.
- Hughes, E.; Bell, D & Roger,J (1975).*Área weight and volumen-monitoring and encouraging children's conceptual development*. London: Nelson. School Council Published
- Hutton, J.(1978).Memoirs of a Maths Teacher. *Mathematics Teacher*, 82, 8-14.
- Irwin.K.C. (1996). Young children's formation of numerical concepts: or $8=9+7$. In H.Mansfield N. Pateman, & N.; Bednarz.(Eds.) *Mathematics for tomorrow's young children .international perspectives on curriculum*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers
- Itzcovich, H.(2007) *La matemática escolar: las practicas de enseñanza en la escuela*. (pp. 9-26) Buenos Aires: AIQUE
- Jarowski, B. (1994) *Constructivism and teaching- the socio-cultural context*. Chreods, 7, 13-18.
- Kamii, C., & Kysh, J. (2006) The difficulty of "length x width": Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior*, 25 (2),105-115.
- Kantowski,M.G. (1980) Some Thoughts on Teaching for Problem Solving. En S.Krulik. & R.E. Reys. (Eds.) *Problem Solving in School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM
- Kaput, J.& Goldin, G. (1996) A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematic. En L.Steffe & P.Nesher (edits) *Theories of Mathematical Learning*. (pp.397-430).New Jersey: Lawrence Erlbaum
- Kilpatrick, J. (1985) A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. En E.A.Silver (Ed.) *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. (pp. 1-15.).London: Lawrence Erlbaum Associates .LEA.

- Kordaki, M. & Potari, D.(1998). Children's Approaches to Area Measurement Through Different Contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (3), 303-316.
- Kordaki, M & Potari, D.(2002). The effect of Area Measurement Tools on Student Strategies: The Role of a Computer Microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(1), 65-100. Netherlands: Springer
- Kouba, V.; Brown, C. (1988) Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: Measurement, geometry, data interpretation, attitudes, and other s. *Arithmetic Teacher*, 35, 10-16.
- Kvale, S.(1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Labinowics, E. (1986) *Introducción a Piaget: Pensamiento- Aprendizaje- Enseñanza*. México: Adison Wesley Iberoamericana.
- La Torre, A., Del Rincón D. y Arnal, J.(1997).*Bases Metodológicas de la Investigación Educativa*. Barcelona: Hurtado.
- Lehrer.R.; Jaslow L. & Curtis, C. (2003). *Learning Teaching Measurement*. (pp.100-121) Reston, Virginia: NCTM Yearbook.
- Lerman, S. Sierpinska, A. (1996). Epistemologías de las matemáticas y de la educación matemática. En: A.J.Bishop et.al. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education*. 4, (pp 827-876),Dordrecht: Kluwer. (Traducción de Juan Godino)
- Lerman, S.(1996) Intersubjectivity in Mathematics Learning: A Challenge to the Radical Constructivist Paradigm?. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133-150
- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.) *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* .(pp.19-44). Westport, CT: Ablex.

- Lerner, D.(1996) La enseñanza y el aprendizaje escolar. Alegato contra una falsa oposición. En J.Castorina, E. Ferreyro, M. Kohl y D. Lerner *Piaget –Vigotsky: contribuciones para replantear el debate*. Buenos Aires: Paidós. Punto III.
- Lester, F.(2002) On the purpose of mathematics education research: making productive contributions to policy and practice. En L.D. English (Ed) *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 19, (pp 489-506). Mahwah, N. J: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers,
- Lester, F.& Kehle,P.(2003).From problem solving to modeling. The evolution of thinking about rearch on complex mathematical activity.En R.Lesh & H. Doer. (Eds), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning ,and teaching*. (pp.501-517).Mahwah, N.:Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Linell, P.& Marková, I. (1993). Acts in Discourse: From Monological Speech Acts to Dialogical Inter-Acts. *Journal for the Theory of Social Behaviour*, 23 (2), 173-195.
- Linell, P. (1995): Troubles with mutualities: towards a dialogical theory of misunderstanding and miscommunication. En I. Marková, C. Graumann & K. Foppa, (Eds) *Mutualities in dialogue*. (pp. 176-213). Cambridge: Cambridge University Press.
- Linell, P. (1998). Elementary contributions to discourse. In *Approaching Dialogue: Talk, interaction and contexts in dialogical perspectives* (pp.159-80). Amsterdam: John Benjamin's Publishing Co.
- Linell, P. (2005a): Essentials of dialogism. Aspects and elements of a dialogical approach to language, communication and cognition. Paper given at several universities, such us, Växjö University (2000), Copenhagen University (2003) and Oslo University (2004). Draft completed 2005-06-23 ([Recuperado de: <http://isis.ku.dk/kurser/blob.aspx?feltid=119154>]
- Linell, P. (2005b): Dialogical language, dialogical minds, dialogical brains. Paper given at the Conference on “Cognitive Dynamics and the Language Sciences”. Cambridge. 9-11 Recuperado de:

<http://www.psy.herts.ac.uk/dlg/papers/linell.doc>.

Lovell, K. (1986) *Desarrollo de los Conceptos Básicos Matemáticos y Científicos en los Niños*. Madrid: Morata.

Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación de formación inicial de profesores de matemática de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada.

Maher, B. & Beatty's, C.(1986) Examining the Construction of Área and its Measurement by ten to Fourteen Years old Children . *Proceeding of the Eighth Annual Meeting PME-NA*. (pp. 163-168). East Lansing, MI.

Mantica ,A.; Götte,M y Dalmaso,M. (2005) Un camino para la comprensión del concepto de área. *Yupana. Revista de Education Matemática de la Universidad Nacional del Litoral*. 2(04). 25-42.

Marin, A. (1997). Programación de Unidades Didácticas. En L.Rico. (Coord.) *La Education Matemática en la Enseñanza Secundaria*. (pp.15-38).Barcelona: Horsori.

Marková, I.& Linell, P. (1996).Coding elementary contributions to dialogue: Individual acts versus dialogical interactions. *Journal for the Theory of Social Behaviour*, 26 (4), 353-373.

Martín, L. (2008) Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren Theory. *The journal of Mathematical Behavior*, 27, 64-85. Recuperado de:

www.elsevier.com/locate/jmathb

Martin, L.& Towers, J. (2009) Improvisational coactions and the growth of collective mathematical. *Research in Mathematics Education*, 11(1), 1-19, Recuperado de: www.informaworld.com/smpp/title-content=t779044232

Martínez Delgado, A. (1999) Constructivismo Radical: Marco Teórico de Investigación y Enseñanza de las Ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3),493-502.

Martínez, A. y Martínez, G. (1995) *La Unidad Didáctica en Primaria (elaboración y diseño)*. 30. Madrid: Bruño.

Molina, M.; Castro, E. y Castro, E. (2007). *Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza*. Comunicación presentada en Seminario Metodologías de investigación de trabajos en curso (Grupo FQM-193) (30 de Noviembre y 1 de Diciembre 2007). Universidad de Almería. Recuperado de:

http://funes.uniandes.edu.co/1567/1/InvDise%C3%B1o_Almer%C3%ADa_2007.pdf

Matos, J.F. (1999) Aprendizagem e prática social: Contributos para a construção de ferramentas de análise da aprendizagem matemática escolar. *Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália*. Actas de verão, em Educação Matemática. 65-92

Mayer, R.(1983) *Pensamiento, Resolución de Problemas y Cognición*. Buenos Aires: Paidós.

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, República Argentina. Consejo Federal de Cultura y Educación. (1995). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*. Buenos Aires.

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, República Argentina, (2007) Núcleos de aprendizajes prioritarios. –NAP-Matemática. Serie Cuadernos para el aula. Buenos Aires.

Miles, M.B.; Huberman, A. M.(1984) *Qualitative data analysis: A Sourcebook of New Methods*.. London: Sage publications Beverly Hills.

Monereo, C.(Coord.)(1995) *Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje*. 112.Barcelona: Graó.

Moreira, C & Contente, M.(1997). The rol of writing to foster pupil's learning about area.En E. Penhkonen (Ed.). *Proceedings of the 21st PME International Conference*, 3, 256-263.

Moreno, M.F; Gil, F. (2001) Área y Volumen. En E. Castro.(Coord.) *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. (pp. 503,533). Madrid: Síntesis Education.

- Moyer, P. (2001) Using Representations to Explore Perimeter and Area. *Teaching Children Mathematics*, 52-62.
- Muir, T., Beswick, K., & Williamson, J. (2008) I'm not very good at solving problem: An exploration of students problem solving behaviors. *Journal of Mathematical Behavior*, 27(3), 228-241.
- Munoz-Catalán, M.C. (2012) *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: Un caso de una maestra novel*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. Huelva.
- Munoz-Catalán, M.C., Carrillo, J. & Climent, N. (2010.a) Mathematics teacher change in a collaborative environment: to what extent and how. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(5), 425-439.
- Muñoz-Catalán, M.; Carrillo, J. y Climent, N. (2010.b). Modelo de análisis de interacciones en un contexto colaborativo de desarrollo profesional. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp.451-462). Lleida: SEIEM.
- Muñoz-Catalán, M.C., Carrillo, J. & Climent, N. (2010.c) Analysis of interaction in a collaborative context of professional development. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds). *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6)* (pp. 2010-2019). Lyon, Francia: Service des publications, INRP.
- Nápoles Váldez, J. (2005). *Aventuras, venturas y desventuras de la resolución de problemas en la escuela*. Recuperado de:
<http://www.edutecne.utn.edu.ar/napoles-valdes/problemas.oz.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989) Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Autor.
- Nystrand, (1997) Opening dialogue. Understanding the dynamics of language and learning in the English classrooms. New York Teachers College Press. Recuperado de
www.uio.no/studier/emner/uv/isp/SNE4110/h06/undervisningsmateriale/Hjulstad120906Dialogism.ppt

- Nunes, T.; Light,P.& Mason,J. (1993).Tools for Thought: The Measurement of Length and Area. *Learning and Instruction*, 3(1), 39-44
- Nunes, T; Campos, T; Magina.S. & Bryant.(2005) *Edacacao Matemática: Números e operacoes numérica*. Sao Paulo: Cortéz
- Nunokawa,K.(2005) Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect student to obtain. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 325-340.
- Outhred,L & Mitchelmore, C. (2000) Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144-167.
- Owens, K.& Outhred, L.(2006). The complexity of learning geometry and measurement. En A.Gutierrez y P. Boero. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. (pp.83–115). Rotterdam: Past, Present and Future, Sense Publishers.
- Panizza, M (2003) Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza (Comp.) *Enseñar matemática en el nivel inicial y primer ciclo de la EGGB: Análisis y Propuestas*. (pp.59- 73).Buenos Aires: Paidós.
- Parcerisa, A. (1996). El Centro Escolar y el Nuevo Modelo Curricular. En S. Antúnez; L.M. del Carmen; F.Inbernon; A.Parcerisa y A. Zabala.(Eds.) *Proyecto educativo a la programación del aula*, 109, (pp. 39-63), Barcelona: Grao.
- Patton, M. (1984) *How to use qualitaive methods in evaluation*. Bervely Hills, C.A: Sage
- Pérez Echeverria, M. (1994). Aprender a Resolver Problemas y Resolver Problemas para Aprender. En J. Pozo (Edit) *La Solución de Problemas*. (pp.14- 50). Madrid: Santillana. Aula XXI.
- Pérez Gómez, A (1991) Conocimiento Académico y aprendizaje significativo: Bases teóricas para el diseño de instrucción. En J. Gimeno y A. Perez Gómez *La enseñanza: su teoría y su práctica*. (pp.322- 348). Madrid: Akal.
- Perkins, D.(1997). *La escuela inteligente*. Barcelona :Gedisa,

- Perrin – Glorian & Duoady, R. (1989) Investigaciones en Didáctica de Matemática: Áreas de Superficie Planas en cm. y 6éme.(Primera Parte). *Hacer Escuela*. Revista de Educación de la Escuela .Mundo Nuevo. 9(9).
- Perrin – Glorian & Duoady, R. (1992) Investigaciones en Didáctica de Matemática: Áreas de Superficie Planas en cm. y 6éme.(Segunda Parte). *Hacer Escuela*. Revista de Educación de la Escuela *Mundo Nuevo*. 14(11).
- Pirie, S.& Kieren, T.(1991).Recursion and the mathematical experience. In: P.Steffe (Ed) *Epistemological Foundations of Mathematical Experience* (pp 78-101) New York: Springer-Verlag.
- Pirie, S.& Kieren, T. (1994) Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can represent it?. *Educational Studies in Mathematics*, 25 (2-3), 165-190.
- Pirie,S.; KierenT., &Gordon,C. (1999) Growing Minds, growing mathematical understanding: Mathematical understanding, abstraction and interaction. En. L. Burton (Ed.). *Learning Mathematics. From Hierarchies to Networks*. (pp. 209-231). London: Falmer Press
- Olimpiadas Matemática Ñandú (1998) *Problemas semanales del 26 de junio*. Primer nivel. VII-116- En *Olimpiadas Matemática Argentina*. Buenos Aires. Recuperado en <http://www.oma.org.ar/nacional/omn.htm>
- Polya,G.(1984) *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México.
- Porlan, R. y Martín, J.(1994). El saber práctico de los profesores especialistas: Aportaciones desde las didácticas específicas. *Investigación en la Escuela*, 24, 49-59.
- Pozo, J.I. (coord.).(1994). *La solución de problemas*. Aula XXI. Buenos Aires: Santillana.
- Proyecto Albanta (1994). *Libro de Recursos Matemática 5 y 6*.Madrid: Alhambra Longman.
- Puig Adam, P. (1969). *Curso de Geometría Métrica Tomo I. Fundamentos*. Madrid: Biblioteca Matemática.

- Puig, L.(1996) *Elementos de Resolución de Problemas*. Coleccion Mathema. Granada: Comares.
- Puig, L.(1997) Análisis fenomenológico. En L.Rico (Coord) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*.(pp.61-94).Barcelona: Horsori.
- Puig, L.(2001) Notas para una lectura de la fenomenologia didáctica de Hans Freudenthal. Universidad de Valencia. Extraíble de:
<http://www.uv.es/puigl/intronota.pdf>
- Puig.L. (2008) Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En R. Luengo González; B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco, (Eds.) *Investigación en educación Matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 93-111). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática
- Pujadas, M. yEguiluz, L.(2000) *Fracciones ¿Un Quebradero de Cabeza?* Buenos Aires: Novedades Educativas.
- Quaranta, M.E y Wolman.S. (2003) Discusiones en la clase de matemática: Qué , para qué y cómo se discute. En M. Paniza. (Coord.) *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB: .Análisis y propuestas*. (pp.189-243). Buenos Aires: Paidos.
- Rencoret Bustos, M.C. (1994). *Iniciación Matemática: Un modelo de jerarquía de enseñanza*. Chile: Andrés Bello.
- Restivo, S. (1988). The social construction of mathematics. ZDM, 20(1),15-19.
- Rico, L.(1993). Resolución de problemas .En P.Gomez; J.Kilpatrich y L.Rico. *Educación matemática*. (pp. 51-68). México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Rico, L. (1997a) Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Corord.)*La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp.39-60). Madrid: Horsori.
- Rico, L. (1997b) *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis Educación.

- Rico, L.y Segovia, I.(2001).Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Comp.) *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. (pp. 83 - 104).Madrid: Síntesis Educación.
- Rodríguez, M. (2012) Resolución de problemas. En M. Pochulu y M.Rodríguez. (Comp) *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Universidad Nacional de General Sarmiento. (pp.153 -174).Villa Maria: Universitaria Nacional de Villa Maria.
- Rodrigo, J.M.(1994)El hombre en la calle, el científico y el alumno: ¿un solo constructivismo o tres? *Investigación en la Escuela*, 23, 7-15.
- Rodrigo, J.M y Arnal, J. (1997) *La construcción del conocimiento Escolar*. Buenos Aires: Paidós.
- Roth, W.& Lee, Y. (2007) Vygotski's neglected legacy: Cultural –historical activity theory. *Review of Educational Research*, 77 (2), 186-232.
- Ruiz, A; Alfaro,C.y Gamboa, R.(2006) Conceptos, procedimientos y resolución de problemas en la lección de matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*,1(1), Extraíble de <http://es.scribd.com/doc/53894589/Conceptos-Procedimientos-y-Resolucion-de-Problemas-en-la-Leccion-de-Matematicas>
- Sáenz Lerma, I (2001) *Matemática y su Didáctica II. Geometría y Medida*. San Sebastián: Universidad del país vasco.
- Sadovsky, P y Parra, C. (1993) III Resolución de Problemas *en Contenidos Básicos Comunes para la E.G.B. Ministerio de Cultura y Educación-*. Buenos Aires
- Sadovsky, P (2005) *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal
- Saiz, I. (1996). III: Resolución de problemas. En *Fuentes para la transformación Curricular. Matemática* (pp.113-137)..Ministerio Nacional de Cultura y Educación. Buenos Aires.

- Sáiz Roldán, M. (2003) Algunos objetos mentales relacionados con el concepto de volumen de maestros de primaria. *Revista Mexicana de investigación educativa*- 8(18). México. 447-478.
- Santos Trigo, L.(1996) *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas*. Mexico: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Santos Trigo, L.(1998) Problematizar el Estudio de las Matemáticas: un aspecto esencial en la organización del currículo y en el aprendizaje de los estudiantes. En F. Hitt Espinosa. (ed) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp.425, 443). México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Santos Trigo, L. (2008) La resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo González; B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco, (Eds.) *Investigación en educación Matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 157-187). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática
- Schifter, D.& Szymaszek, J. (2003). Structuring a rectangle: Teachers write to learn about theis students' thinking. In D. Clements & G.Bright (Eds.) *Learning Teaching Measurement*. NCTM. Yearbook. (pp.143-156).Reston VA: NCTM.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York. Academic Press.
- Schoenfeld,A.(1992).Learning to think mathematically: problem solving,metacognition,and sense making in mathematics. In D. Grows. (Ed),*Handbook of Research on mathematics teaching and learning*,(pp.334-370), New York: NC TM.
- Schoenfed, A.(2002) Research Methods in (Mathematics) Education. In L.D: English (ed) *Handbook of international research in mathematics education*, 18, (pp 435 -487),.Mahwah, N. J: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers,
- Schoenfeld, A. (2007) problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM*, 39, 537-551, doi: i: 10-1007/s11858-007-0038-z.

- Schroeder, T.L.& Lester, F.K-(1989) Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In Yearbook NCTM. (pp.31-42). Reston,VA: NCTM.
- Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Simon, M., & Blume, G.(1992). Understanding multiplicative structures: A study of prospective elementary teachers. In W. Geeslin & K. Graham (Eds.), *Proceedings of the sixteenth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, III , 11–18, Durham: NH.
- Simon, M.A.(1995) Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal Research in Mathematics Education*, 26 (2),114-145.
- Sirvent, M. (2006) *El proceso de investigación*. Universidad de Buenos Aires. (Cuaderno de Cátedra) .Buenos Aires: Facultad de Filosofía y Letras.
- Shotter, J.(1993) *Conversational Realities: Constructing Life though Language*. London. Sage Publication
- Spieser , B.(2006) Productive thinking about area: An introduction to the paper by Kamii and Kysh. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(2),103-104.
- Sriraman, B& Haverhals, N.(2010) Preface to Part II Ernest's Reflections on Theories of Learning. Lakatos-harsh-Ernest:Triangulating. Philosophy-mathematics_ mathematics Education. In B.Sriraman & L.English. (Eds.) *Theories of Mathematics Education*. Seeking New Frontiers, (pp.35-38) London: Springer.
- Stacey, K.(2005) The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behavior*,24(3-4), 341-350.
- Stake, R. (2007) *Investigación con estudio de caso*. Madrid: Morata.
- Steffe, L. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In A. Nelly & R. A. Lesh (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Tarasow, P.(2007) La tarea de planificar. En A.Castro; A.Díaz, M.Escobar; A.Fernández..... y S. Wolman. *Enseñar matemáticas en la escuela primaria*. (pp.15- 24). Buenos Aires: Tinta Fresca.
- Törner, G, Schoenfeld, A.H.,& Reiss,K.M (Eds.).(2007) .Problem solving around the World: Summing up the State of the art. *ZDM*, 39(5-6). 353.-561
- Vergnaud, G; y Ricco, G. (1985) Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y métodos. *Revista Argentina de Educación*, 6, Buenos Aires.
- Vergnaud, G.(1990) La teoría de los Campos Conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 10(2, 3),133-170. Extraíble de:
http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf
- Vergnaud, G (1996). The Theory of Conceptual Fields. In L.P.Steffe (Ed.) *Theories of Mathematical Learning*. (pp. 219- 238). Mahwah: LEA.
- Vergnaud, G. (2002) Actividad y conocimiento operatorio. En C. Coll (comp.)*Psicología genética y aprendizaje escolar*. (pp. 91-104). Madrid: Siglo XXI
- Vigotsky, L. (1982) *La imaginación y el arte en la infancia*. Madrid: Akal
- Vigotsky, L. (1986) *Pensamiento y Lenguaje*. Madrid: Paidós Ibérica.
- Vigotsky. L (1988) *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Mexico: Grijalbo-Critica. Traducción de la versión inglesa, *Minds in Society: The embelopeng of higger spsycological proceses*. Cambrigde: MA: Harvard University Press
- Villa Ochoa, J.A. (2011) Aspecto emergentes en la comprensión de la tasa de variación. XIII CIAEM-IACME, Recife. Recuperado de:
<http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/1237/submitmission/review/1237-3214-1-RV.pdf>

- Vinner, S.(1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal for Mathematical Educational in Science and Technology*, 14, 293-305.
- Vinner, S. & Dreyfus,T.(1989) Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Educatio*, 20(5), 356-366.
- Wagman, H. G. (1982). The Child's Conception of Area Measure. In M.K.Rosskopt. *Children's Mathematical Concepts. Six piagetian studies in mathematics education*. (pp.71, 110).New York: Teacher Collage Press.
- Weinberg, D.& Gavelek, J. (1987). A Social Constructivist Theory of Instruction and the Development of Mathematical Cognition. *Proceeding of PME 11*. 3.(pp.346-352). Montreal
- Witrock, M.C. (Ed.) (1990).*La investigación de la enseñanza II*. Barcelona: Paidos /MEC
- Woods, P. (1992). Symbolic Interactionism: Theory and Method. In M.D.LeCompte;W.L. Millroy y J. Preissle, (Eds), *The Handbook of Qualitative Research in Education* (pp. 337- 404).
- Yackel, E. (1996). Social Interaction and individual Cognition. In L.P.Steffe, PNesher; P.Coob;G.Goldin & B.Greer (Eds).*Theories of Mathematical learning*. (pp.85, 90). EE.UU: Lawrence Erlbaum Associates.
- Yackel, E. (2002).What can we learn from anlyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, 21,423-440
- Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 224-239.
- Zimmermann, W.& Cunningham,S. (Eds.) (1991).Visualization in teaching and learning Mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America.



Universidad
de Huelva

Depto. Didáctica de las Ciencias y Filosofía

HUELVA, 2013