

Las curvas tensión-deformación de hormigones ensayados bajo compresión uniaxial monotónica: una revisión sistemática

Stress-strain curves of concrete under monotonic uniaxial compression: a systematic review

E. Salguero^(*), S. Romero^(*), S. G. Melgar^(*), F. Prat^(*), F. Moreno^(*)

RESUMEN

La existencia de más de una treintena de expresiones matemáticas distintas que pretenden representar la evolución tenso-deformacional de una probeta de hormigón sometida a compresión uniaxial monotónica (incluidas las propuestas en las normativas oficiales de los distintos países que tienen regulado por ley el empleo del hormigón como material estructural), parece requerir un esfuerzo adicional a la hora de formular una expresión universalmente aceptada.

Como primer paso hacia ese objetivo, en este trabajo se muestran y analizan de manera sistemática las distintas dinastías de ecuaciones publicadas, desde las primeras propuestas de Ritter y Bach (1897-1899), pasando por los truncamientos polinómicos más o menos complejos de la ecuación de Smith y Young (1956), hasta las aportaciones basadas en distribuciones estadísticas del modelo de daño, concluyendo con el análisis del tratamiento dado a la cuestión por las distintas versiones del Código Modelo y la Instrucción de Hormigón Estructural española (EHE-08).

451-17

Palabras clave: Hormigón estructural; curvas tensión-deformación; revisión bibliográfica; modelado.

SUMMARY

The existence of more than thirty different mathematical expressions that claims to represent the stress-strain relationship of a concrete specimen under monotonic and uniaxial compression (including those proposed in the official regulations of different countries that have regulated by law the use of concrete as structural material), seems to require an additional effort in formulating a universally accepted equation.

As a first step toward that goal, in this paper we show and analyze systematically the different dynasties of equations that have been published, since the first proposals of Ritter and Bach (1897-1899), through the, more or less complicated, polynomial truncations of the Smith and Young's equation (1956), continuing with the contributions based on statistical distributions of the damage model, and concluding with the analysis of the approach to the issue by the successive versions of the Model Code and the Spanish Structural Concrete Instruction (EHE-08).

Keywords: Structural concrete; stress-strain curves; literature review; modelling.

^(*) Universidad de Huelva, (España).

Persona de contacto/Corresponding author: salguero@uhu.es (F. Salguero).

1. LAS PRIMERAS PROPUESTAS

Karl Wilhelm Ritter

Podría decirse que el accidente que se produjo el 28 de agosto de 1901, en el que se derrumbó el edificio en construcción para el Hotel zum Bären en Basilea, causando la muerte de varios de los obreros que se encontraban trabajando en la obra, marcó un antes y un después en la todavía incipiente investigación sobre el hormigón armado. Inmediatamente a la catástrofe, siguió una amplia y agria controversia en contra del nuevo material en la prensa suiza de la época, realizada, entre otros, por J. Rosshändler (1), a la sazón, ingeniero de una empresa de construcción de estructuras metálicas, que ataca violentamente al sistema Hennebique (2).

El debate finalmente se tranquilizará gracias a la intervención de dos profesores del *Eidgenössische Technische Hochschule*, (archiconocido como ETH de Zúrich), Karl Wilhelm Ritter y François Schüle, expertos llamados al rescate del hormigón armado por las autoridades políticas.

Ritter, profesor de estática gráfica y de construcción de puentes en el ETH, fue uno de los primeros en profundizar en el control científico del hormigón armado, proponiendo en 1899, en la revista *Schweizerische Bauzeitung* (3) una ley de tipo exponencial para la curva de deformación del hormigón.

La ecuación propuesta por Ritter se escribía [1]:

$$[1] \quad \sigma = f'_c \left(1 - e^{-1000\varepsilon} \right)$$

donde f'_c representa la tensión máxima alcanzada en el ensayo de rotura a compresión de la probeta de hormigón.

La ecuación de Bach

La otra ecuación propuesta en los primeros años de investigación científica del hormigón en la que nos detendremos corresponde con la ecuación, propuesta por Julius Carl Von Bach en 1897, de la que da cuenta Emil Mörsch en su *Der Betoneisenbau* (4) cuando dice: "las curvas de deformación encontradas por Bach son tan regulares que pueden ser representadas por una ecuación exponencial", se escribía [2]:

$$[2] \quad \varepsilon = a\sigma^m$$

donde ε es la deformación por unidad de longitud o "deformación relativa", σ es la tensión aplicada o fuerza por unidad de superficie y a y m son constantes que dependen de las propiedades del material. En la

representación más empleada actualmente tendríamos [3]:

$$[3] \quad \sigma = K\varepsilon^n$$

con $K = \alpha^{1/m}$ y $n = 1/m$. Los resultados obtenidos por los ensayos de Bach (expresados en kp/cm^2), arrojan unos valores medios de $\alpha = 1/315000$ y $m = 1,15$, lo que en términos actuales supondría $\sigma = 60414,28\varepsilon^{0,87}$

2. LA PROPUESTA DE SMITH Y YOUNG

La propuesta de Smith y Young merece un apartado exclusivo, por ser la más citada de entre todas las ecuaciones enunciadas sobre el comportamiento tenso-deformacional del hormigón. En un primer artículo de 1955, Smith y Young (8), diseñan un cálculo en flexión basado en la ecuación de Bach, proponiendo que el valor del exponente n debe ser proporcional a la resistencia última a compresión del hormigón. Inmediatamente después, abandonan la ecuación de Bach en su artículo (9) de 1956 para proponer una función exponencial en los siguientes términos: encontraron que la relación tenso-deformacional [4]:

$$[4] \quad \sigma = \varepsilon M e^{-N\varepsilon}$$

se ajustaba bastante bien a los resultados de los ensayos de rotura de probetas cilíndricas que presentaban un decrecimiento de la tensión más allá de la tensión máxima. Los valores de M y de N serían constantes evaluadas en términos de las propiedades del hormigón, imponiendo las siguientes condiciones de contorno [5]:

$$[5] \quad \sigma = f'_c \Leftrightarrow \varepsilon = \varepsilon_0; \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = 0$$

siendo ε_0 la deformación experimentada por el hormigón en el punto de tensión máxima.

Tras imponer dichas condiciones de contorno la ecuación [4] se transformaba en [6]:

$$[6] \quad \sigma = \frac{f'_c}{\varepsilon_0} \varepsilon \cdot e^{\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)}$$

Para que la revisión de las ecuaciones sea sistemática, los autores han elaborado, curado y ensayado a compresión una amasada modelo de hormigón de valores "medios". Del ensayo se ha obtenido una curva patrón con la que compararemos las ecuaciones propuestas en la bibliografía para estimar su mayor o menor grado de ajuste con los resultados experimentales obtenidos al ensayar dicha probeta modelo. El método de evaluación de la bondad del ajuste se basará en el cálculo de los estimadores SSE (suma de los errores cuadráticos), R^2 (coeficiente de determinación) y RMSE (raíz del error cuadrático medio).

Cuando hablamos de hormigón de valores medios, nos referimos a que en el diseño de su dosificación se ha empleado la media de los valores extremos permitidos o señalados por la norma EHE-08. Así, la dosificación de la mezcla resultó compuesta de 375 kg/m³ de EN 197-1 CEM I 52.5 R, una relación agua/cemento de 0,44, 925,76 kg/m³ de AG-4/16-R-S y 995,71 kg/m³ de AF-0/4-R-S más la adición de un 1,25% en peso del cemento del superfluidificante GLENIUM AC-30.

3. MODELOS BASADOS EN FUNCIONES RACIONALES

A partir de los años sesenta del siglo pasado, comienzan a aparecer una gran cantidad de propuestas basadas en funciones racionales del tipo [7]:

$$[7] \quad \sigma = \frac{P(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)}$$

donde P(ε) y Q(ε) son polinomios de diversos grados de la deformación relativa ε.

Si seguimos a Yip (10), ello es debido a que las diversas dinastías de propuestas basadas en funciones racionales no son más que aproximaciones a la propuesta de Smith y Young revisada en el epígrafe anterior. En efecto, si desarrollamos en serie de potencias [6] obtenemos [8]:

$$[8] \quad \sigma = \frac{ef'_c \varepsilon}{\varepsilon_0 \left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^3 + \dots \right]}$$

de donde, a veces directamente mediante truncamientos, y otras mediante truncamientos y algunas manipulaciones y añadidas algebraicas irían surgiendo las diversas propuestas que revisaremos a continuación.

Desayi y Krishnan

El caso más paradigmático de truncamiento descrito es la propuesta de 1964 de Desayi y Krishnan (11), [9]:

$$[9] \quad \sigma = \frac{K\varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}$$

donde se dice de K que es una constante (el módulo de elasticidad tangente inicial) tal que $K = 2f'_c/\varepsilon_0$, de modo que [9] se reescribiría [10]:

$$[10] \quad \sigma = \frac{2f'_c\varepsilon}{\varepsilon_0 \left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 \right]}$$

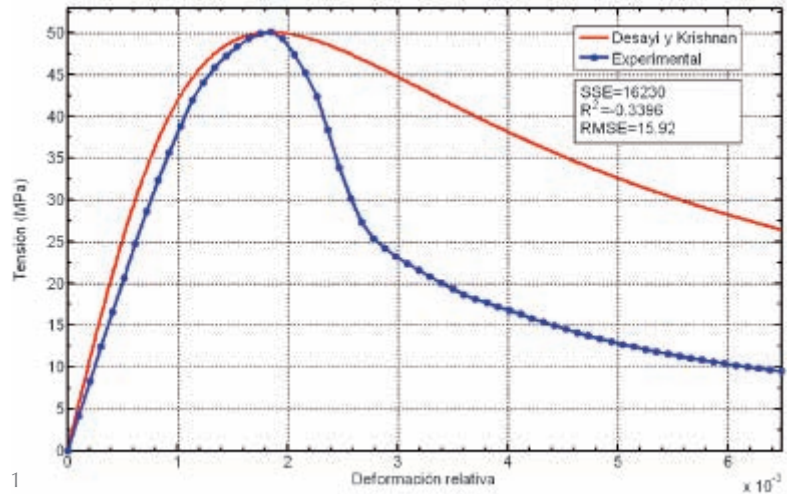
que, como puede observarse, coincide con [9] si truncamos la primera potencia de (ε/ε₀) y las de orden superior a dos, elimina-

mos el factor 1/2 del término (ε/ε₀)² y sustituimos el valor de e = 2,71828... por 2.

La ecuación de Desayi y Krishnan goza, lógicamente, de similares propiedades que la propuesta por Smith y Young y, aunque en la parte ascendente de la curva parece adaptarse mejor a los datos experimentales que la de Smith y Young, en términos generales se adapta tan mal que incluso muestra un valor de R² negativo (Figura 1).

1. Comprobación entre los datos experimentales de la probeta M₁ y la ecuación propuesta por Desayi y Krishnan.

2. Comprobación entre los datos experimentales de la probeta M₁ y la ecuación propuesta por Saenz.



Saenz

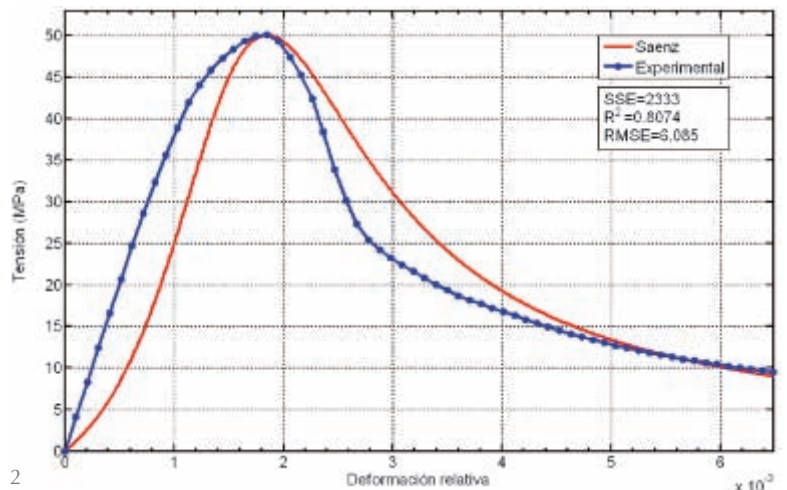
También en 1964, Saenz (12) introduce la siguiente ecuación:

$$[11] \quad \sigma = \frac{K\varepsilon}{1 + \left(\frac{K\varepsilon_0}{f'_c} - 2\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}$$

es decir, comparándola con el desarrollo en serie de [8], rescata el término de la primera potencia de (ε/ε₀) que habían eliminado Desayi y Krishnan, ponderándolo con el factor (Kε₀/f'_c)-2 e introduciendo la constante [12]:

$$[12] \quad K = \frac{ef'_c}{\varepsilon_0}$$

Los efectos de tales manipulaciones se muestran en la Figura 2, resultando un valor de K = 10550 MPa.



3. Comprobación entre los datos experimentales de la probeta M_1 y la ecuación propuesta por Tsai.

Generalizaciones de la ecuación de Desayi y Krishnan: Tulin y Gerstle, Popovics y Carreira y Chu

Con Tulin y Gerstle (13) aparece, en 1964, la primera "generalización" de la ecuación de Desayi y Krishnan, en el sentido de que el exponente cuadrático de $(\varepsilon/\varepsilon_0)$ pasa a ser un exponente genérico $-n-$ que, junto con la aparición de una constante adicional, permite dotar de mayor flexibilidad a la ecuación de Desayi y Krishnan para adaptarse a distintas circunstancias de materiales o métodos. La ecuación propuesta era [13]:

$$[13] \quad \sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{K_2 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n}$$

Por su parte, Popovics (14) –saltamos ahora hasta el año 1972– se da cuenta que la función propuesta por Tulin y Gerstle presenta un máximo en $\varepsilon = \varepsilon_0$ si $K_2 = n-1$, lo que le lleva a proponer la variante [14]:

$$[14] \quad \sigma = \frac{n f'_c \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{n-1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n}$$

introduciendo, como novedad, que n y ε_0 puedan ser expresados como función aproximada de la resistencia máxima del hormigón $-f'_c-$, mediante las fórmulas [15]:

$$[15] \quad n = K_1 f'_c + 1 \quad \varepsilon_0 = K_2 \sqrt[4]{f'_c}$$

Por último, la función propuesta en 1985 por Carreira y Chu (15), es idéntica a la de Popovics [16]:

$$[16] \quad \sigma = \frac{\beta f'_c \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\beta - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^\beta}$$

con la diferencia de que el exponente β y el valor de ε_0 vendrían ahora determinados por las fórmulas [17]:

$$[17] \quad \beta = \left(\frac{f'_c}{C_1}\right)^3 + 1,55 \quad \varepsilon_0 = (C_2 f'_c + 168) \cdot 10^{-5}$$

lo que arroja unos valores de $C_1 = 36,69$ MPa y $C_2 = 0,345$ MPa.

Alexander

La ecuación de Alexander (16) de 1965 puede considerarse una variante de la de Saez de 1964. En efecto: la ecuación de Saez [10] se escribía [18]:

$$[18] \quad \sigma = \frac{K \varepsilon}{1 + \left(\frac{K \varepsilon_0}{f'_c} - 2\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}$$

mientras que la ecuación propuesta por Alexander es [19]:

$$[19] \quad \sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{K_2 + (\varepsilon + K_3)^2} - K_4 \varepsilon$$

Identificando términos, vemos claramente que la ecuación de Alexander coincide con la de Saenz haciendo $K_1 = K \varepsilon_0^2$, $K_3 = (K \varepsilon_0^2 / 2 f'_c) - \varepsilon_0$ y $K_2 = \varepsilon_0^2 - K_3^2$, más el monomio $-K_4 \varepsilon$.

Utilizando técnicas de ajuste de curvas, hemos podido determinar los valores de las constantes de la ecuación de Alexander para mejorar un poco el ajuste que proporcionaba la ecuación de Saenz. Los valores encontrados son: $K_1 = 0,067$, $K_2 = 1,8 \cdot 10^{-6}$, $K^3 = -0,0011$ y $K^4 = 1656$.

Tsai

Según sus propias palabras (17), la ecuación propuesta por Tsai en 1988 puede ser considerada como una generalización de la de Popovics y de la de Saenz. Su expresión es la siguiente: [20]

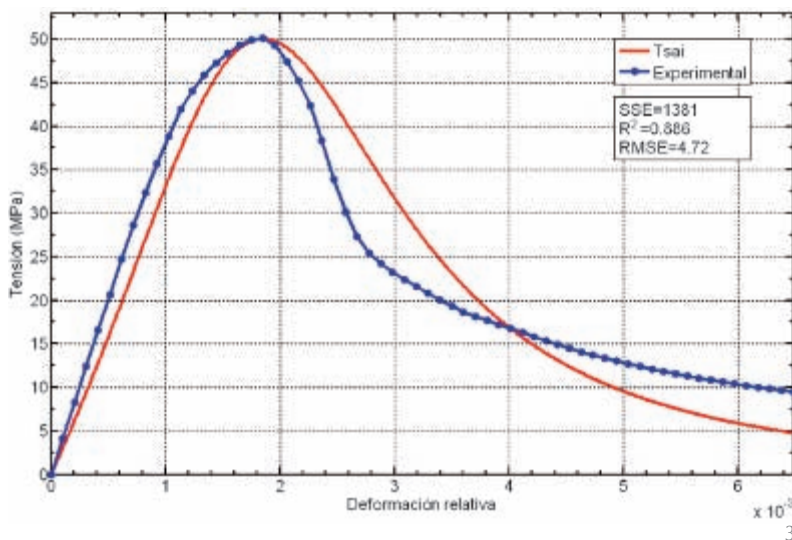
$$[20] \quad \sigma = \frac{K f'_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{1 + \left(K - \frac{n}{n-1}\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n}{n-1}}$$

En efecto, haciendo $K=n/n_{-1}$, la ecuación [20] deviene en la de Popovics [13]. Por otro lado, si $n = 2$, se transforma en la de Saenz [12].

Siguiendo a Popovics, Tsai hace depender los parámetros K y n de la resistencia última del hormigón $-f'_c-$ según las fórmulas [21]:

$$[21] \quad K = 1 + \frac{17,9}{f'_c} \quad n = \frac{f'_c}{6,68} - 1,85 > 1$$

Utilizando estas fórmulas, nuestra probeta de hormigón medio M_1 arrojaba unos valores de $K = 1,358$ y $n = 5,644$, con lo que se obtiene un ajuste peor al que se logra si actualizamos dichos parámetros a nues-



tro hormigón actual tomando $K = 1,08$ y $n = 3,747$. Con estos valores se ha trazado la curva de la Figura 3, mostrándose en la misma el resultado del ajuste.

Primer modelo disociado: la ecuación de Wang, Shah y Naaman

Partiendo de la propuesta de la tesis doctoral de 1971 de Sargin (18) correspondiente a ecuaciones ya estudiadas del tipo [22]:

$$[22] \quad Y = \frac{AX + BX^2}{1 + CX + DX^2}$$

donde $Y = \sigma/f'_c$, $X = \varepsilon/\varepsilon_0$ y A, B, C y D son constantes, merece una especial atención, la reinterpretación de 1978 de Wang, Shah y Naa-man (19), porque es la primera vez que se proponen dos ecuaciones o, más bien, dos variantes de la misma ecuación, distintas en función de si modelan la parte ascendente o la descendente de la curva. En efecto: los autores afirman que la exactitud de la ecuación [22] se mejora mucho cuando A, B, C y D toman valores distintos según evalúen la parte ascendente o descendente de la curva.

En función de los parámetros típicos que venimos estudiando en esta revisión bibliográfica, [22] puede reescribirse como [23]:

$$[23] \quad \sigma = \frac{f'_c \left[K_1 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + K_2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]}{1 + K_3 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + K_4 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2}$$

Tanto para la parte ascendente como para la descendente, imponen las siguientes condiciones de contorno [24]:

$$[24] \quad \sigma = f'_c \Leftrightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow \varepsilon = \varepsilon_0$$

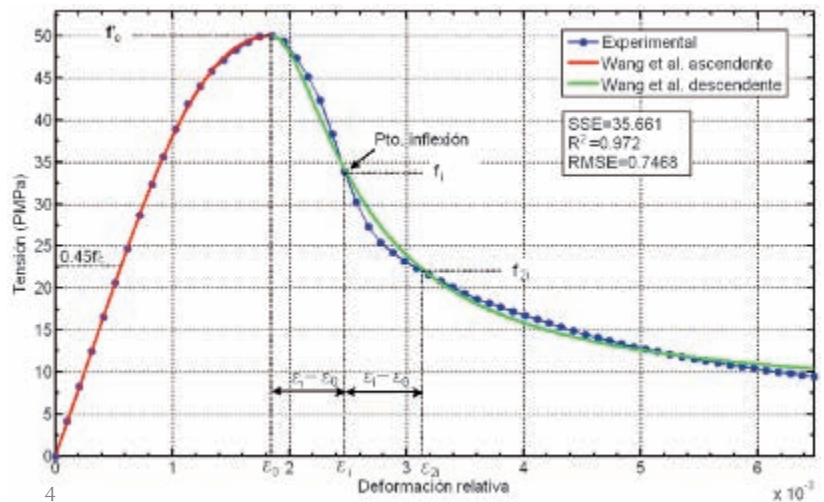
lo que obliga a que $K_1 = (K_2 + 2K_3)/(K_4 - 1)$ y que $K_4 = K_2 + 1$, por lo que podemos eliminar dos constantes de [23] y reducirla a [25]:

$$[25] \quad \sigma = \frac{f'_c \left[\left(1 + \frac{2K_3}{K_2} \right) \varepsilon + \frac{K_2 \varepsilon^2}{\varepsilon_0} \right]}{\varepsilon_0 \left[1 + K_3 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + (K_2 + 1) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]}$$

Para la determinación de las dos constantes de la parte ascendente se imponen estas otras dos condiciones [26]:

$$[26] \quad \sigma = 0,45f'_c \Leftrightarrow \varepsilon = 0,45 \frac{f'_c}{E_c} \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E_c \varepsilon_0}{f'_c} \Leftrightarrow \varepsilon = 0$$

donde E_c representa la pendiente de la recta que pasa por el origen y por el punto de la curva de ordenada igual a $0,45f'_c$ (Figura 4). Con estas condiciones, se obtiene un ajuste de la parte ascendente casi perfecto para los valores $K_2 = -0,3508$ y $K_3 = -0,5752$.



Para la determinación de los parámetros K_2 y K_3 de la versión descendente de [25], las condiciones impuestas son [27]:

$$[27] \quad \sigma = f_i \Leftrightarrow \varepsilon = \varepsilon_i \quad \sigma = f_{2i} \Leftrightarrow \varepsilon = \varepsilon_{2i}$$

donde f_i y ε_i son, respectivamente, la tensión y la deformación del punto de inflexión y f_{2i} y ε_{2i} se refieren a un punto arbitrariamente elegido tal que: $\varepsilon_{2i} - \varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_0$ (Figura 4). Así se obtiene un ajuste aceptable de la parte descendente para los valores de $K_2 = 0,132$ y $K_3 = -1,996$.

Mediante este enfoque se pueden obtener dos expresiones parciales que se ajustan bastante bien, cada una a una parte de la curva experimental, mediante el conocimiento de cuatro puntos clave, a saber: tensión y deformación en el máximo de la curva, tensión y deformación para $0,45f'_c$ –o bien el denominado *módulo de elasticidad secante (Ec)* en ese punto– tensión y deformación en el punto de inflexión y, por último, tensión y deformación en un punto simétrico del máximo respecto del punto de inflexión. Los resultados del ajuste se muestran en la Figura 4.

4. UN MODELO DE DAÑO NO ESTADÍSTICO BASADO EN LAS PROPIEDADES MICRO-ESTRUCTURALES DEL HORMIGÓN

Constituyendo también un modelo disociado, pero a medio camino entre los basados en funciones racionales que acabamos de ver y los basados en distribuciones estadísticas del modelo de daño, que estudiaremos en el apartado siguiente, se encuentra el propuesto en 1995 por Pantazopoulou y Mills (20).

Así es, pues aunque desglosada ampliamente en el artículo –como revisaremos más adelante–, la ecuación propuesta por Pantazopoulou y Mills puede escribirse, usando la misma notación de variables y

4. Comprobación entre los datos experimentales de la probeta M1 y la ecuación propuesta por Wang, Shah y Naaman.

constantes que venimos utilizando desde el comienzo en este trabajo, en la siguiente forma [28]:

$$[28] \quad \sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{1 + K_2 \left[\frac{\varepsilon}{\alpha \varepsilon_0} - b \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon^{\text{lim}}}{\alpha \varepsilon_0 - \varepsilon^{\text{lim}}} \right)^n \right]}$$

donde, para el caso más general, α , b y n son parámetros correctores que, para hormigones de resistencia normal adoptarían los valores $\alpha = 1$, $b = 1$, $n = 2$, con lo que [28] se reduciría a [29]:

$$[29] \quad \sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{1 + K_2 \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon^{\text{lim}}}{\varepsilon_0 - \varepsilon^{\text{lim}}} \right)^2 \right]}$$

Las ecuaciones [28] y [29] se declaran válidas sólo para $\varepsilon \geq \varepsilon^{\text{lim}}$, donde $\varepsilon^{\text{lim}} = -\varepsilon_c / \nu$, siendo ν el conocido coeficiente de Poisson y ε_c la deformación de fisuración del hormigón a tracción. Para $\varepsilon < \varepsilon^{\text{lim}}$, se propone la siguiente expresión [30]:

$$[30] \quad \sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{1 + K_3 \varepsilon}$$

que, dado el intrínsecamente pequeño valor de ε^{lim} , tiende a la recta $\sigma = K_1 \varepsilon$ tal como $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pero más allá de esta opción metodológica, el artículo de Pantazopoulou y Mills destaca por la atribución a las constantes K_1 y K_2 de un significado físico directamente relacionado con las propiedades microestructurales del hormigón y el progresivo daño que éste experimentaría al ser deformado.

En efecto, en su artículo, parten de la sencilla ecuación [31]:

$$[31] \quad \sigma = E_c \varepsilon$$

donde E_c , módulo de deformación secante instantáneo del hormigón, sería una función del módulo de elasticidad tangente en el origen, E_0 , –antes de producirse ninguna deformación en la probeta y, por tanto, libre de daño–, del radio hidráulico medio, r_0 , que representa por definición el volumen total de poros dividido entre el área de su superficie interna y ε_A , la deformación superficial, definida como $\varepsilon_A = \varepsilon_v - \varepsilon_r$, siendo $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, es decir, el invariante lineal del tensor de deformaciones referido a un sistema de referencia principal. Por tanto, la función $F(\cdot)$ podría considerarse una función de daño –no basada en consideraciones estadísticas– y tendríamos [32]:

$$[32] \quad \sigma = E_0 F(r_0, \varepsilon_A)$$

La variable r_0 estaría afectada por la relación agua/cemento, w , más la fracción de aire ocluido, $w_0 = w + a_c$, el grado último de hidratación para un hormigón saturado, $\alpha_\infty = 1,031 w_0 / (0,194 + w_0)$ y cualquier otro factor que determine la porosidad del sólido.

Así pues, la función $F(r_0, \varepsilon_A)$ se explicita mediante la expresión [33]:

$$[33] \quad F(r_0, \varepsilon_A) = \frac{1}{1 + \left(\frac{3 \varepsilon_A}{V_p^3 V_{cpl}} \right)}$$

donde V_p es la fracción volumétrica de pasta de cemento por unidad de volumen de hormigón –los autores dan un valor orientativo de 0,3 para este parámetro– y V_{cpl} es la porosidad capilar de la pasta, para la que se propone la siguiente fórmula [34]:

$$[34] \quad V_{cpl} = 3,22 \frac{w_0 - 0,3064 \alpha_\infty}{1 + 3,22 w_0}$$

El valor de ε_A puede deducirse directamente del de ε_v , como hemos visto anteriormente, ya que $\varepsilon_A = \varepsilon_v - \varepsilon_r$, dándose para el valor de ε_v tres expresiones distintas en función del tramo de la curva considerado y del tipo de hormigón –recuérdense las ecuaciones [28] [29] y [30]–, a saber:

1. Para todo tipo de hormigones, antes de ε_{lim} [35]:

$$[35] \quad \varepsilon_v = (1 - 2\nu)\varepsilon$$

2. Después de ε_{lim} –hormigones normales– [36]:

$$[36] \quad \varepsilon_v = (1 - 2\nu)\varepsilon_0 \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon^{\text{lim}}}{\varepsilon_0 - \varepsilon^{\text{lim}}} \right)^2 \right]$$

3. Después de ε_{lim} –hormigones altos– [37]:

$$[37] \quad \varepsilon_v = (1 - 2\nu)\alpha \varepsilon_0 \left[\frac{\varepsilon}{\alpha \varepsilon_0} - b \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon^{\text{lim}}}{\alpha \varepsilon_0 - \varepsilon^{\text{lim}}} \right)^n \right]$$

Por último, para el valor del módulo de elasticidad tangente inicial del hormigón, E_0 , Pantazopoulou y Mills, propugnan una especie de promedio entre el módulo de la pasta, E_p , y el módulo de los áridos, E_a , en función de las proporciones de pasta y áridos en el hormigón, V_p y V_a , respectivamente, y de un factor de corrección, $A = 1 - 5,8DPZ$, donde DPZ representa la fracción volumétrica de la zona de población disminuida, es decir, la fracción volumétrica de la zona de interfase que se forma alrededor de los áridos, para la que los autores proponen un valor de orientativo de 0,099, con lo que se obtiene [38]:

$$[38] \quad E_0 = \frac{1}{A \frac{V_p}{E_p} + \frac{V_a}{E_a}}$$

Una de las características más reseñables del modelo de Pantazopoulou y Mills es que, mientras el resto de modelos examinados en el presente trabajo, toman como condición de contorno el pico de tensión (ε_0, f'_c), este modelo está basado en las propiedades microestructurales y en la evolución del daño del módulo de elasticidad del hormigón, por lo que “predice”, de

alguna manera dicho pico de tensión, de manera que, aunque su ajuste es aceptable en el conjunto de la curva, no acierta a la hora de modelar la situación de dicho pico de tensión. Los mejores resultados obtenidos se representan en la Figura 5, para los siguientes valores: $A=0,4244$, $V_p=0,4753$, $F_p=13483,24$, $V_a=0,7393$, $E_a=78950$, $w_0=0,5386$, $\nu=0,25$, $\alpha\varepsilon_0=0,001499$, $\varepsilon_{lim}=0,0007886$, $b=4,197$ y $n=2,301$.

5. MODELOS BASADOS EN DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS DEL CONCEPTO DEL DAÑO

Originalmente propuesta por Kachanov (21) en 1956, modificada posteriormente por Rabotnov (22) y desarrollada sobre todo a partir de los años ochenta del siglo pasado, la Mecánica del Daño Continuo –CDM– ha sido ampliamente aceptada para simular el complejo comportamiento constitutivo de muchos materiales utilizados en ingeniería. En especial, los modelos basados en una variable interna de daño representada por una función escalar –daño isótropo–, se caracterizan por su simplicidad de implementación y versatilidad. Esta variable de daño refleja el nivel de deterioro del material a medida que se va deformando y transforma las tensiones reales en tensiones efectivas, de tal manera que una ecuación general que relacione tensiones con deformaciones puede escribirse en la forma [39]:

$$[39] \quad \sigma = \Psi(\varepsilon) [1 - \omega(\varepsilon)]$$

donde $\Psi(\varepsilon)$ representa la respuesta del material no dañado y $\omega(\varepsilon)$ una función escalar de daño que varía entre 0 –cuando el material aún no ha sido tensionado– y 1 –cuando se produce el colapso de dicho material–.

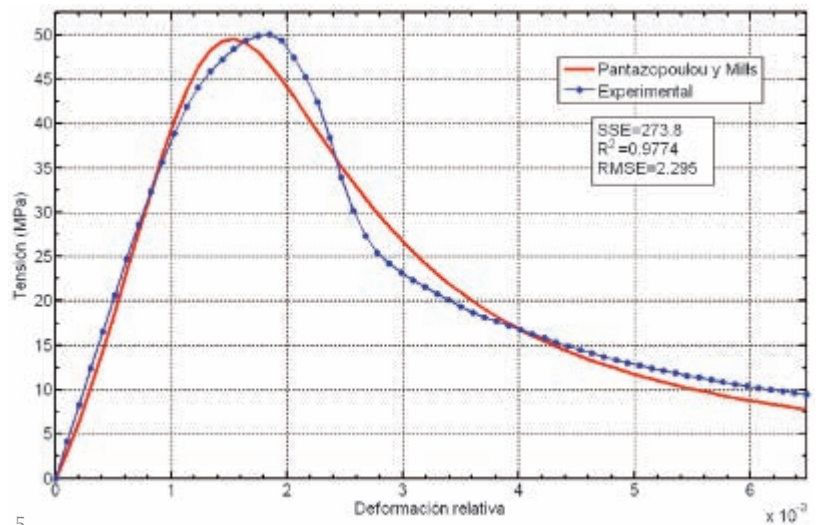
Las propuestas que presentaremos a continuación, asumen que la función $\omega(\varepsilon)$ responde a una función de distribución de probabilidad –CDF– de ocurrencia del daño de las partículas del material y se diferencian en función del tipo de distribución estadística elegida para simular la evolución de dicho daño en función de la deformación relativa impuesta por el ensayo.

Shah y Winter

La ecuación propuesta en 1966 por Shah y Winter (23) podía considerarse una mera generalización de la de Smith y Young [6], pues se escribe [40]:

$$[40] \quad \sigma = K_1 \varepsilon \exp \left[- \left(\frac{K_1 \varepsilon - 2}{K_2} \right)^m \right]$$

donde K_1 , K_2 y m han de determinarse experimentalmente.



5

Sin embargo, este artículo es de capital importancia puesto que en él se deduce, por primera vez, la fórmula exponencial –usada también por Smith y Young con ligeras diferencias– a través de la teoría estadística de la resistencia de materiales de Weibull (24) (25).

Shah y Winter introducen un microelemento estructural de hormigón, compuesto de una partícula cilíndrica de árido rodeada por la matriz de mortero de cemento con un comportamiento perfectamente elástico y perfectamente frágil. Por razones de simplicidad analítica, suponen además que el módulo de elasticidad del árido y del mortero es el mismo.

Sobre esta base, el hormigón podría ser concebido como un material compuesto por un número muy grande de estas unidades estructurales. La resistencia individual de cada elemento podría determinarse por un ensayo de rotura, aunque si este ensayo se repitiese para cada elemento, el valor de la carga de rotura no sería siempre exactamente el mismo –debido, por ejemplo, a la variabilidad de la relación d/r en cada elemento–, sino que presentaría cierta dispersión en torno a un valor medio central. Por tanto, no es posible indicar un valor exacto de la carga de rotura para el elemento, aunque sí lo sería indicar una probabilidad definida de rotura para cada valor σ de la tensión aplicada.

La idea de Shah y Winter fue adoptar la función de distribución de probabilidad propuesta en 1939 por Weibull para la resistencia de las unidades estructurales elementales de que estaría compuesto el hormigón, de manera que a medida que éste es cargado, aquellas de dichas unidades que presenten menor resistencia, romperían en primer lugar, mientras que aquellas con mayor resistencia continuarían resistiendo produciéndose una redistribución de esfuerzos y un proceso de rotura progresivo.

5. Comprobación entre los datos experimentales de la probeta M_1 y la ecuación propuesta por Pantazopoulou y Mills.

La función de distribución de Weibull desplazada se puede escribir en la siguiente forma [41]:

$$[41] \quad F(x, m, x_0, x_a) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - x_a}{x_0} \right)^m \right]$$

por lo que si, como suponen Shah y Winter, el comportamiento de los microelementos es linealmente elástico hasta su rotura frágil, en [40], hacemos $\Psi(\varepsilon) = K_1 \varepsilon$ e identificamos la función de daño $\omega(\varepsilon)$ con la función de distribución de Weibull, obtenemos [42]:

$$[42] \quad \sigma = K_1 \varepsilon \left(1 - \left(1 - \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon - x_a}{x_0} \right)^m \right] \right) \right) = K_1 \varepsilon \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon - x_a}{x_0} \right)^m \right]$$

En la formulación definitiva de Shah y Winter, se modifica un tanto la expresión anterior (entendemos que para que se cumplan algunas condiciones de contorno que no especifican), quedando finalmente en la forma [43]:

$$[43] \quad \sigma = K_1 \varepsilon \exp \left[- \left(\frac{K_1 \varepsilon - 2}{K_2} \right)^m \right]$$

El mejor ajuste se obtuvo para los valores $K_1 = 63690$, $K_2 = 112,4$ y $m = 1,185$.

Las ecuaciones de Blechman

La serie de tres artículos, (26) (27) y (28), que publicó Blechman entre 1988 y 1989, destaca, más que por las ecuaciones propuestas, por sus consideraciones teóricas sobre el proceso de rotura del hormigón en el ensayo de compresión unaxial.

En efecto: en primer lugar, parte de la firme convicción de que el intento de encontrar una simple y única ecuación para modelar la curva tensión deformación completa del hormigón es un trabajo inútil, debido a que en ella se concitan tres estados esencialmente diferentes, a saber: una primera fase perfectamente elástica, otra en la que se produce un fenómeno creciente de atrofia de las características resistentes del material y, por último, la fase final en la que se produce un proceso de destrucción macroscópica en la que el hormigón no acepta incremento de carga alguno.

Por ello, divide la curva tensión-deformación en tres tramos. El primero –tramo verde de la gráfica de la Figura 6–, gobernado por la Ley de Hooke hasta un cierto valor de la deformación, ε_a , que se determinará más adelante, es decir [44]:

$$[44] \quad \sigma = K\varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_a$$

Obteniéndose para nuestro hormigón medio, el mejor ajuste con un valor aproximado de $K = 39990$ MPa.

El segundo representaría el citado proceso de atrofia de las características resistentes

del hormigón y que podemos identificar con el proceso de daño presentado en la introducción a estos apartados mediante la ecuación [45]:

$$[45] \quad Atr(\varepsilon) = 1 - G(\varepsilon)$$

donde la función $G(\varepsilon) = \exp[-\varepsilon^2/2\varepsilon_0^2]$ es la función Gaussiana convencional para valores positivos, también conocida como distribución seminormal. El proceso de razonamiento era como sigue:

Blechman parte de la extraordinaria similitud que observa entre la función de densidad de probabilidad de Lord Rayleigh [46]:

$$[46] \quad f(x;d) = \frac{x}{d^2} \exp \left[\frac{-x^2}{2d^2} \right]$$

y la parte ascendente de la curva tensión-deformación del hormigón. En términos de tensiones y deformaciones tendríamos [47]:

$$[47] \quad \sigma = K\varepsilon \exp \left[\frac{-\varepsilon^2}{2d^2} \right]$$

Imponiendo [48],

$$[48] \quad \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = 0$$

se obtiene $d = \varepsilon_0$ y la ecuación [47] se reescribe ahora [49]:

$$[49] \quad \sigma = K\varepsilon \exp \left[\frac{-\varepsilon^2}{2\varepsilon_0^2} \right]$$

La ecuación [49] sería válida si la atrofia del material se manifestase desde el principio, es decir, desde $\varepsilon = 0$. Sin embargo, Blechman mantiene que existe un intervalo, entre 0 y ε_a en el que el comportamiento del hormigón es perfectamente elástico, sin que se produzca el fenómeno de atrofia. Por tanto, si $\varepsilon \leq \varepsilon_a$, entonces $G(\varepsilon) = 1$ y $\sigma_1 = K\varepsilon$. Para el intervalo $\varepsilon_a < \varepsilon < \varepsilon_0$ tendremos [50]:

$$[50] \quad G(\varepsilon) = \exp \left[\frac{-(\varepsilon - \varepsilon_a)^2}{2d^2} \right]$$

con lo que la función para las tensiones más allá de ε_a valdrá ahora [51]:

$$[51] \quad \sigma = K\varepsilon \exp \left[\frac{-(\varepsilon - \varepsilon_a)^2}{2d^2} \right]$$

ecuación a la que Blechman denomina función central.

Para que la gráfica propuesta por Blechman sea continua, las derivadas laterales correspondientes de las ecuaciones [44] y [51] deben igualarse, por lo que la ecuación [41] debe modificarse y escribirse ahora como [52]:

$$[52] \quad \sigma = K(\varepsilon - \varepsilon_a) \exp \left[\frac{-(\varepsilon - \varepsilon_a)^2}{2d^2} \right] + K\varepsilon_a \exp \left[\frac{-(\varepsilon - \varepsilon_a)^2}{2d^2} \right]$$

Volviendo a imponer [53],

$$[53] \quad \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = 0$$

se obtiene $d^2 = \varepsilon_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_a)$, por lo que [53] debe reescribirse en la siguiente forma [54]:

$$[54] \quad \sigma_2 = K\varepsilon \exp\left[\frac{-(\varepsilon - \varepsilon_a)^2}{2\varepsilon_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_a)}\right]$$

donde σ_2 es el modelo propuesto por Blechman para el tramo de la curva tensión-deformación entre ε_a y ε_0 –tramo verde de la gráfica de la Figura 6–.

Sabiendo que $\varepsilon = \varepsilon_0 \Leftrightarrow \sigma = f'_c$ es posible encontrar un valor bien definido para ε_a , obteniéndose [55]:

$$[55] \quad \varepsilon_a = \varepsilon_0 \left[1 + 2 \ln\left(\frac{f'_c}{K\varepsilon_0}\right) \right]$$

Si bien la concordancia de las ecuaciones propuestas por Blechman en estos dos primeros tramos es excelente, su ajuste con los datos experimentales en la rama descendente de la curva deja bastante más que desear, además de proponer una estrategia un tanto barroca.

Blechman parte de la base de que, mientras en el tramo entre el límite elástico ε_a y el límite máximo ε_0 , las micro rupturas de sus gránulos tensionados no afectan a su *macrocontinuidad* o *macrorigidez*, en la parte descendente la situación cambia drásticamente, dándose la aparición y crecimiento de grietas macroscópicas –observables a simple vista–, reduciéndose la rigidez global de la pieza y, en definitiva, produciéndose un mecanismo creciente de destrucción de la misma, gobernado fundamentalmente por la forma de aplicar la tensión o la deformación mediante la máquina de ensayo.

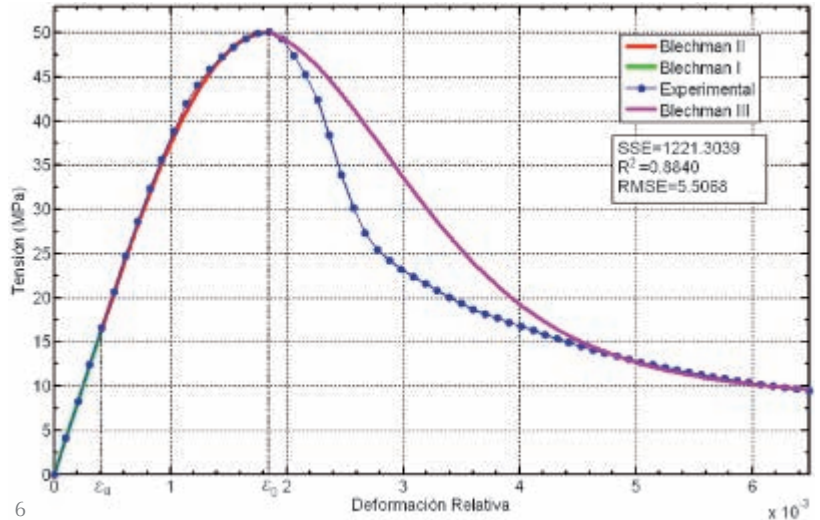
Por ello considera inaplicable el concepto de tensión en esta fase, reemplazando la relación tensión-deformación por la relación deformación-respuesta del hormigón, regida por dos *macrofunciones*: $\sigma(\varepsilon)$ –descrita por la función central de [40] adaptada a las características específicas de la rama descendente de la curva– y $F(\varepsilon)$, una función especial que daría cuenta del estado de confinamiento de la probeta.

Estas dos *macrofunciones* podrían ser obtenidas sólo a través del algoritmo numérico iterativo algo barroco, comenzando en $\varepsilon = \varepsilon_0$ y computándose hasta ε_{\max} –el último punto obtenido de la curva–, en pasos de anchura $\Delta\varepsilon$.

Las constantes a determinar experimentalmente en esta parte de la curva son K_d , C_0 y d^2_R . Desgraciadamente, en los artículos de Blechman no se proporcionan valores para estas constantes por lo que para establecer una comparación con nuestros resultados experimentales, hemos ido ajustándolos a

través de numerosas pruebas hasta obtener la que estimamos mejor aproximación, –mostrada en la Figura 6– para los valores $K_d = 0,001$, $C_0 = -10$ y $dR^2 = 5,5 \times 10^{-6}$ que, aunque se ajustan bastante bien en las partes inicial y final de la curva, no consigue hacerlo en la zona inestable del proceso.

6. Comprobación entre los datos experimentales de la probeta M_1 y las ecuaciones y el algoritmo incremental propuestos por Blechman.



6. MODELOS MULTIEXPONENTE

Collins, Mitchell y MacGregor

La ecuación propuesta por Collins, Mitchell y MacGregor (29) en 1993 [56], en principio, no se diferencia en nada de las ya examinadas de Popovics o Carreira y Chu:

$$[56] \quad \sigma = \frac{nf'_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{n - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{nk}}$$

En efecto, basta hacer $n = nk$ en la ecuación [14] para obtener la de Popovics, o $\beta = nk$ en la ecuación [16] para identificarla como la de Carreira y Chu. Sin embargo, su enfoque diferente, que estudiaremos a continuación, justifica su inclusión en este apartado.

La variante se produce, por un lado, porque Collins *et al.* también consideran –como Wang *et al.* o Blechman– que son necesarias dos expresiones distintas, una para la parte ascendente de la curva y otra para la descendente, coincidiendo ambas en el pico de tensión f'_c , y por otro, porque mientras que Wang *et al.*, [25], proponen que han de cambiarse las constantes de la ecuación según el tramo considerado, Collins *et al.* sostienen que lo que debe modificarse en dicha ecuación es el exponente, para adaptarse a la parte ascendente o descendente, según el caso.

Para la parte ascendente de la curva, el valor de k sería igual a 1, con lo que, en este tramo, la ecuación sería idéntica a la de Po-

7. Comprobación entre los datos experimentales de la probeta M_1 y la ecuación propuesta por Tasnimi.

popovics o Carreira y Chu. Para el exponente n , tanto en la parte ascendente como en la descendente, proponen la fórmula [57]:

$$[57] \quad n = 0,8 + \left(\frac{f'_c}{17}\right)$$

Es en la parte descendente donde el exponente se “adapta” a la nueva forma de la curva mediante [58]:

$$[58] \quad k = 0,67 + \left(\frac{f'_c}{62}\right)$$

Aunque en el artículo se proporciona una fórmula para el cálculo de ϵ_0 , el mejor resultado se ha obtenido tomando su valor experimental, y para n y k los valores $n=2,922$ y $k=1,281$. Sin embargo, los resultados sólo mejoran muy ligeramente los de Popovics o Carreira y Chu.

Tasnimi

Otra formulación idéntica corresponde a la propuesta por Tasnimi (30) en 2004. Partiendo de la misma fórmula que Popovics, Carreira y Chu o Collins *et al.* –en la que sólo se modifica n , β o nk por n^{pq} – y de similares consideraciones sobre partes ascendente y descendente de la curva y variabilidad del exponente propone [59]:

$$[59] \quad \sigma = \frac{n^{pq} f'_c \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)}{\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{n^{pq}} + n^{pq} - 1}$$

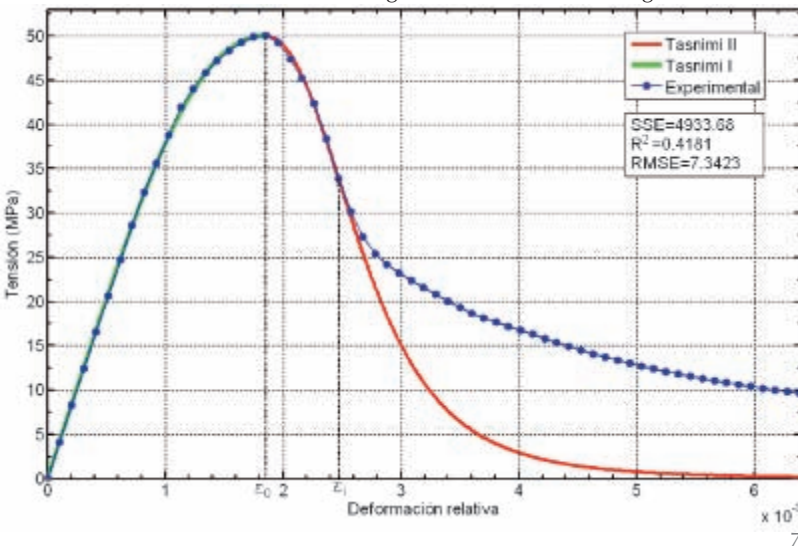
donde para la parte ascendente de la curva, el valor de n^{pq} vendría dado por [60]:

$$[60] \quad n^{pq} = \frac{1}{1 - \frac{f'_c}{\epsilon_0 E}}$$

Siendo [61],

$$[61] \quad E = \left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

es decir, el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el origen.



Tanto para la parte ascendente como para la descendente, el valor de n se mantiene constante –ya que, según Tasnimi, sólo depende de características que se suponen generales del tipo de hormigón–, aunque p y q variarán según modelen la parte ascendente o la descendente, atendiendo a los siguientes razonamientos:

En la ascendente, por conveniencia, asumen $p=3$ y $q=1$, mientras que en la descendente, manteniendo fijo el valor de $p=3$, Tasnimi determina el valor de q de manera que se mantenga la “continuidad” de la curva y, además, pase por el punto de inflexión si éste se produce; es decir, si $P_i=(\epsilon_i, f_i)$ es el punto de inflexión, resolviendo las siguientes ecuaciones [62]:

$$[62] \quad \left. \begin{aligned} \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}\right)^{n^{3q}} - \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}\right) - 1 &= 0 \\ \frac{f_i}{f'_c} \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}\right)^{n^{3q}} + n^{3q} \left(\frac{f_i}{f'_c} - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}\right) - \frac{f_i}{f'_c} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

lo que conduce a [63]:

$$[63] \quad q = \frac{\ln \left[\frac{\ln \left(\frac{\epsilon_i + \epsilon_0}{\epsilon_0} \right)}{\ln \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_0} \right)} \right]}{3 \ln n}$$

Si bien en el artículo de Tasnimi se proporcionan fórmulas empíricas para el cálculo de ϵ_0 y E para tres grandes tipos de hormigones –de peso ligero, de peso normal y de alta resistencia–, su desviación de los datos experimentales actuales nos ha llevado a utilizar nuestro valor experimental para ϵ_0 y a buscar el valor de E –mediante iteraciones– que produjese el mejor ajuste posible, encontrándose el óptimo para $E=41080$ MPa.

Los resultados se muestran en la Figura 7 –donde se representa la curva obtenida para los valores calculados de $n=1,4297$ y $q=1,8443$ –, de la que cabe destacar que, mientras el ajuste es bastante bueno en la parte ascendente y en la descendente hasta el punto de inflexión, más allá de éste la curva tiende a cero con excesiva rapidez.

7. EL CÓDIGO MODELO Y LA EHE-98

Terminamos esta revisión, necesariamente selectiva, de las propuestas más destacables encontradas en la bibliografía sobre modelización matemática de las curvas tensión-deformación de hormigones sometidos a ensayos de compresión uniaxial realizando un repaso sobre las propuestas “oficiales”, como las del *Comité Euro-International du Béton* (CEB), la *Fédération Internationale de la Précontrainte* (FIP), o la española Instrucción de Hormigón Estructural EHE-08 (31) (34).

El Código Modelo para Estructuras de Hormigón fue una iniciativa de la época en que no existían códigos internacionales. Debido a que, en aquellos momentos iniciales, CBE-FIP eran organizaciones destinadas a sintetizar y compilar las investigaciones y experimentos científicos internacionales, se consideró como un paso adelante importante convertir esos conocimientos y experiencias en documentos prácticos de diseño y cálculo, de tal manera que las comisiones normativas nacionales pudiesen aprovecharlos. De hecho, los primeros códigos –redactados en forma de “recomendaciones”– de 1964 y 1970 se usaron de esta manera. Finalmente, el primer Código Modelo para Estructuras de Hormigón fue publicado en 1978 después de su aprobación por el CEB en su décima novena Sesión Plenaria celebrada en Granada en septiembre de 1977 –su publicación se asoció con el octavo Congreso de la FIP celebrado en Londres en mayo de 1978–.

Desde aquella época, el Código Modelo ha tenido un considerable impacto en las normativas nacionales de muchos países y, más concretamente en la armonización de los procesos de normalización, como ejemplifican las actividades de la Comisión Europea, los países del este, el Comité Nórdico para la Regulación de la Edificación y los miembros de la Asociación Europea de Libre Comercio. En realidad, el *Eurocode 2: Design of Concrete Structures, Part 1: General Rules and Rules for Buildings* –publicado en España como Norma UNE (31) (32)– utilizó como documento básico de referencia el Código Modelo de 1978.

Naturalmente, el trabajo del CEB de síntesis de resultados de investigación e información técnica, con el objetivo de trasladarlos a la práctica, continuó y, llegado un cierto momento, se vio la necesidad de realizar una revisión del Código Modelo. Así, se puso en marcha el objetivo de redactar el primer borrador completo del Código Modelo de 1990, poniéndose manos a la obra tanto el CEB como la FIP y el primer borrador completo del Código Modelo de 1990 fue presentado durante el undécimo congreso de la FIP en Hamburgo en junio de 1990 y su aprobación tuvo lugar durante la vigésima séptima Sesión Plenaria del CEB en septiembre de 1990, en París. La versión definitiva (34) fue ratificada en la siguiente Sesión Plenaria del CEB en septiembre de 1991.

El Código Modelo de 1990

La ecuación propuesta por el Código Modelo de 1990 tanto para la rama ascendente como para una parte de la rama descendente se escribe [64]:

$$[64] \quad \sigma = \frac{f'_c \left[\frac{E}{E_s} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{E}{E_s} - 2 \right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)}$$

Donde [65]

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \quad \text{y} \quad E_s = \frac{f'_c}{\varepsilon_0}$$

es decir, la tangente del ángulo que forma la recta que une el origen con el pico de tensión ($\varepsilon_0 f'_c$), denominado *módulo secante* desde el origen hasta el pico de tensión.

Esta ecuación, que puede ser derivada de la propuesta de Sargin haciendo en [23] $A = E/E_s$, $B = 1$, $C = ((E/E_s) - 2)$ y $D = 0$, se declara válida sólo para el tramo comprendido entre el origen y una cierta deformación límite, ε_{lim} , correspondiente a la tensión de $0,5 f'_c$ que se produce pasado ε_0 y para hormigones de resistencia característica inferior a 80 MPa. Para el resto de la rama descendente, el código propone otra ecuación opcional –ya que se transcribe en la columna izquierda del texto– dada por las expresiones [66]:

$$[66] \quad \sigma = \frac{f'_c}{\left(\frac{\zeta}{\varepsilon_0} - \frac{2}{\varepsilon_{lim}} \right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 + \left(\frac{4}{\varepsilon_{lim}} - \zeta \right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)}$$

Con [67]

$$[67] \quad \zeta = \frac{4 \left[\left(\frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0} \right)^2 \left(\frac{E}{E_s} - 2 \right) + 2 \frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0} \frac{E}{E_s} \right]}{\left[\frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0} \left(\frac{E}{E_s} - 2 \right) + 1 \right]}$$

Aunque el código proporciona expresiones para E , ε_{lim} y fija el valor de $\varepsilon_0 = 0,0022$, los valores obtenidos con las expresiones del código no se adaptan a los que arrojan nuestros datos experimentales de la probeta M_1 , por lo que el mejor ajuste se ha obtenido para los valores $E = 41210$ MPa y $\varepsilon_{lim} = 0,00261$.

El Código modelo de 1990 fue reformado parcialmente en 1995 por el Boletín de Información n.º 228 del CEB (34) en el que –siguiendo el modelo propuesto por Gysel y Taerwe (36)–, se amplía el intervalo de validez de las ecuaciones a $50 \text{ MPa} \leq f'_c \leq 100 \text{ MPa}$, se propone la misma ecuación que en el Código Modelo de 1990 para la rama ascendente –ahora válida sólo hasta el pico de tensión f'_c – y se modifica la ecuación de la rama descendente mediante la siguiente expresión [68]:

$$[68] \quad \sigma = \frac{f'_c}{1 + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\eta - 1} \right)^2}$$

donde $\eta = \varepsilon_0 + t$ y t se determina experimentalmente para cada resistencia característica del hormigón. El valor propuesto para un hormigón de $f'_c = 50$ MPa –como el de la probeta

M_1- , por Gysel y Taerwe era de $t=0,00807$, nosotros hemos encontrado el mejor ajuste de la curva para un valor de $t=0,007236$.

El Código Modelo de 2010

Aprobado el 29 de octubre de 2011 por la Asamblea General de la *fib*, reunida en Lausanne (Suiza), la versión final del Código Modelo de 2010 (37) (38), propone la misma ecuación que la del Código modelo de 1990, con la diferencia de que su aplicabilidad se amplía ahora hasta hormigones de 120 MPa de resistencia característica. Por otra parte, se vuelve al campo de validez restringido del Código Modelo de 1990 –olvidando el modelo de Gysel y Taerwe del Boletín n.º 288 del CEB–, un poco más allá del pico de tensión, hasta un cierto ϵ_{lim} cuyo valor se proporciona en una tabla, siendo $\epsilon_{lim}=0,0034$ para hormigones de $f'_c = 50$ MPa. Para la rama descendente más allá de ϵ_{lim} no se ofrece ecuación.

Lo más destacable, en nuestra opinión, de este borrador de código, es la inclusión, por primera vez, del enfoque basado en la teoría del daño. En efecto: en las páginas 124 a 126 del texto principal, después de exponer las características generales del modelo elasto-plástico, el cual se declara apto para describir el comportamiento triaxial no lineal del hormigón, también se admite el modelo de daño para tal descripción, partiendo de una ecuación tensorial dada por [69]:

$$[69] \quad \sigma = E \epsilon$$

siendo E el tensor de elasticidad que variará de acuerdo con el modelo de daño. Como caso especial se considera el daño isótropo escalar [70]:

$$[70] \quad E = (1 - D(\beta)) E_0$$

siendo E_0 el tensor de constantes elásticas del material no dañado, $0 \leq D(\beta) \leq 1$ y β una medida de la deformación equivalente con la restricción $\beta \geq 0$. Además, en el caso de estados simples de carga, se afirma que expresiones para $D(\beta)$ como [71]:

$$[71] \quad D(\beta) = \begin{cases} 0 & \beta \leq \beta_0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{\beta - \beta_0}{\beta_d}\right)^g} & \beta > \beta_0 \end{cases}$$

son apropiadas, donde los parámetros β_0 , β_d y g pueden ser derivados del comportamiento uniaxial del material. Notemos aquí que la expresión propuesta para $D(\beta)$, no es otra cosa que la función de distribución de Weibull desplazada [41].

La Instrucción de Hormigón Estructural EHE-08

El Real Decreto 1247/2008 de 18 de julio, por el que se aprueba la Instrucción de Hor-

migón Estructural (EHE-08), compila la reglamentación técnica –de obligado cumplimiento– relativa al proyecto y ejecución de las estructuras de hormigón en nuestro país.

Como marco normativo de un país perteneciente a la Comunidad Europea, su contenido ha de adaptarse al grupo de normas EN-1992 “Eurocódigo 2. Proyecto de estructuras de hormigón” que, a su vez, como ya se ha visto, tienen como documento básico de referencia el Código Modelo. Por ello, la ecuación propuesta –en los comentarios de la Comisión Permanente del Hormigón, no en el articulado de obligado cumplimiento– por la EHE-08 coincide con la propuesta por el Código Modelo de 1990 con ligeras modificaciones. La ecuación propuesta por la EHE-08 es [72]:

$$[72] \quad \sigma = \frac{f'_c \left[K \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right]}{1 + (K - 2) \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)}$$

es decir, se ha sustituido el término E/E_s de la ecuación del Código Modelo de 1990 por el parámetro k , que ahora se da mediante la ecuación [73]:

$$[73] \quad k = 1 + 2e^{-\left(\frac{f'_c}{40}\right)}$$

además, para el valor de ϵ_0 , se proporciona la expresión [74]:

$$[74] \quad \epsilon_0 = \left[4 + 3k + \sqrt{(4 + 3k)^2 - 40} \right] \frac{f'_c}{10E_{(0,4f'_c)}}$$

Donde $E_{(0,4f'_c)}$ es la tangente del ángulo que forma la recta que pasa por el origen y por el punto de la curva de ordenada $\sigma=0,4 f'_c$ con la horizontal.

Esta curva se declara válida sólo hasta una cierta deformación límite, ϵ_{lim} que, a diferencia con el Código Modelo de 1990, se obtiene de la ecuación [75]:

$$[75] \quad \epsilon_{lim} = \left[1 + 3,1e^{-\left(\frac{1}{k-1}\right)} \right] \epsilon_0$$

Cuadro resumen

A modo de conclusión, finalizamos este artículo mostrando en la Tabla 1 un resumen de las ecuaciones analizadas, ordenadas cronológicamente, conjuntamente con los valores de su tangente en el origen [76].

$$[76] \quad \left. \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0}$$

así como los valores de la suma de los errores cuadráticos –SSE–, del coeficiente de determinación –R²– y de la raíz del error cuadrático medio –RMSE–, calculados al compararlas con nuestra curva modelo experimental completa –obtenida al ensayar el hormigón medio de la probeta M_1- .

Tabla 1. Cuadro resumen de las ecuaciones analizadas y sus resultados de ajuste.

REF.	Año	Autor/es	Ecuación	$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big _{\varepsilon=0}$	Ajuste
4	1897	Bach	$\sigma = K\varepsilon^n$	∞	SSE = 306,8 R ² = 0,9805 RMSE = 2,528
3	1899	Ritter	$\sigma = f'_c \left(1 - e^{-1000\varepsilon} \right)$	$10^3 f'_c$	SSE = 1764 R ² = 0,8876 RMSE = 5,94
9	1956	Smith y Young	$\sigma = \frac{f'_c}{\varepsilon_0} \varepsilon \cdot e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}$	$e(f'_c/\varepsilon_0)$	SSE = 9265 R ² = 0,2351 RMSE = 12,03
11	1964	Desayi y Krishnan	$\sigma = \frac{2f'_c \varepsilon}{\varepsilon_0 \left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 \right]}$	$2(f'_c/\varepsilon_0)$	SSE = 16230 R ² = -0,3396 RMSE = 15,92
12	1964	Saenz	$\sigma = \frac{K\varepsilon}{1 + \left(\frac{K\varepsilon_0}{f'_c} - 2\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}$	K	SSE = 2333 R ² = 0,8074 RMSE = 6,085
13	1964	Tulin y Gerstle	$\sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{K_2 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n}$	K_1/K_2	SSE = 462 R ² = 0,9619 RMSE = 2,752
16	1965	Alexander	$\sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{K_2 + (K_3 \varepsilon)^2} - K_4 \varepsilon$	$K_1/(K_2 + K_3^2) - K_4$	SSE = 1340 R ² = 0,8894 RMSE = 4,612
23	1966	Shah y Winter	$\sigma = K_1 \varepsilon \exp \left[- \left(\frac{K_2 \varepsilon - 2}{K_2} \right)^m \right]$	$\frac{K_1}{\left(\frac{2}{K_2}\right)^m}$	SSE = 1316 R ² = 0,8913 RMSE = 4,645
14	1972	Popovics	$\sigma = \frac{n f'_c \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{n - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n}$ $n = K_1 f'_c + 1 \quad \varepsilon_0 = K_2 \sqrt[n]{f'_c}$	$\frac{f'_c n}{\varepsilon_0 (n - 1)}$	SSE = 1428 R ² = 0,8821 RMSE = 4,76
19	1978	Wang, Shah y Naaman	$\sigma = \frac{f'_c \left[\left(1 + \frac{2K_1}{K_2} \right) \varepsilon + \frac{K_2 \varepsilon^2}{\varepsilon_0} \right]}{\varepsilon_0 \left[1 + K_3 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + (K_2 + 1) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 \right]}$	$1 + 2(K_1/K_2)$	SSE = 35.661 R ² = 0,9941 RMSE = 0,9939
15	1985	Carreira y Chu	$\sigma = \frac{\beta f'_c \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\beta - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^\beta}$ $\beta = \left(\frac{f'_c}{36,69}\right)^3 + 1,55 \quad \varepsilon_0 = (0,345 f'_c + 168) 10^{-5}$	$\frac{f'_c \beta}{\varepsilon_0 (\beta - 1)}$	SSE = 1428 R ² = 0,8821 RMSE = 4,76
26-28	1988	Blechman	$\sigma = K\varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_a$ $\sigma_2 = K \exp \left[\frac{-(\varepsilon - \varepsilon_a)^2}{2\varepsilon_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_a)} \right]$ $(\varepsilon_a \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \left[1 + 2 \ln \left(\frac{f'_c}{K \varepsilon_0} \right) \right]$ Algoritmo incremental ($\varepsilon > \varepsilon_0$)	K	SSE = 1221 R ² = 0,884 RMSE = 5,5068
17	1988	Tsai	$\sigma = \frac{K f'_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{1 + \left(K - \frac{n}{n-1} \right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n}{n-1}}$ $K = 1 + \frac{17,9}{f'_c} \quad n = \frac{f'_c}{6,68} - 1,85 > 1$	$K f'_c / \varepsilon_0$	SSE = 1381 R ² = 0,884 RMSE = 4,72
34	1990	MC 90	$\sigma = \frac{f'_c \left[\frac{K_1}{K_2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{K_1}{K_2} - 2\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}$ $\varepsilon \leq \varepsilon_{lim}$ $\sigma = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \frac{2}{\varepsilon_0}\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{4}{\varepsilon_{lim}} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{4 \left[\left(\frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{K_1}{K_2} - 2\right) + 2 \frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0} - \frac{K_1}{K_2} \right]}$ $\varepsilon' = \frac{\left[\frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0} \left(\frac{K_1}{K_2} - 2\right) + 1 \right]}{2}$	K_1	SSE = 5504 R ² = -1,6994 RMSE = 8,62
35, 36	1995	Gysel y Taerwe (CEB228)	$\sigma = \frac{f'_c \left[\frac{K_1}{K_2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{K_1}{K_2} - 2\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}$ $\sigma = \frac{f'_c}{1 + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\eta - 1}\right)^2} \quad \eta = \varepsilon_0 + K_3$	K_1	SSE = 35,661 R ² = 0,9941 RMSE = 0,9939
20	1995	Pantazopoulou y Mills	$\sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{1 + K_2 \left[\frac{\varepsilon}{a \varepsilon_0} - b \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{lim}}{a \varepsilon_0 - \varepsilon_{lim}} \right)^n \right]}$ $\varepsilon \leq \varepsilon_{lim} = -\varepsilon_c / \nu \quad \sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{1 + K_3 \varepsilon}$	K_1	SSE = 1428 R ² = 0,8821 RMSE = 4,76
30	2004	Tasnimi	$\sigma = \frac{n^{pq} f'_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{pq} + n^{pq} - 1}$	$\frac{f'_c}{\varepsilon_0} \left(\frac{n^{pq}}{n^{pq} - 1} \right)$	SSE = 4933 R ² = 0,4181 RMSE = 7,3423

REFERENCIAS

- (1) Rosshändler, J. Die Basler Baukatastrophe u. Hennebique. Basler Nachrichten de 1 de septiembre de 1901, en Schindler, Y. V. (1995). Und Beton revolutionierte den Brückenbau gewaltig. *Kunst and Architektur*, 46: 181-189.
- (2) Simonnet, C. (2009). *Hormigón. Historia de un Material*, Ed. Nerea, San Sebastián, .
- (3) Ritter, K. W. (1899). Die Bauweise Hennebique. *Schweizerische Bauzeitung*, 33(7): 59-61.
- (4) Mörsch, E. (1902). *Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie*, Wayss & Freytag, Stuttgart.
- (5) Rowe, G. W. (1965). *An Introduction to the Principles of Metalworking*, Edward Arnold Ltd., Londres. (Edición española: Conformado de los Metales, Urmo, Bilbao, 1972).
- (6) Popovics, S. (1970). A review of stress-strain relationships for concrete. *ACI Journal Proceedings*, 67(3): 243-248.
- (7) Walker, S. (1923). Modulus of elasticity of concrete. *Proceedings of the American Society for Testing Materials*, 19(Part II): 510-606.
- (8) Smith, G. M. y Young, L. E. (1955). Ultimate theory by exponential function. *ACI Journal Proceedings*, 52(11): 349-359.
- (9) Smith, G. M. y Young, L. E. (1956). Ultimate flexural analysis on stress-strain curves for cylinders. *ACI Journal Proceedings*, 53(12): 597-609.
- (10) Yip, W. K. (1997). Generic form of stress-strain equations for concrete. *Cement and Concrete Research*, 28(4): 499-508.
- (11) Desayi, P. y Krishnan, S. (1964). Equation for the stress-strain curve of concrete. *ACI Journal Proceedings*, 61(3): 345-350.
- (12) Saenz, L. P. (1964). Discussion of "Equation for the stress-strain curve of concrete" by P. Desayi and S. Krishnan. *ACI Journal Proceedings*, 61(9): 1229-1235.
- (13) Tulin, L. G. y Gerstle, K. H. (1964). Discussion of "Equation for the stress-strain curve of concrete" by P. Desayi and S. Krishnan. *ACI Journal Proceedings*, 61(9): 1236-1238.
- (14) Popovics, S. (1973). A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research*, 3(5): 583-599.
- (15) Carreira, D. J. y Chu, K.-H. (1985). Stress-strain Relationship for plain concrete in compression. *ACI Journal Proceedings*, Vol. 82, n.º 6, pp. 797-804.
- (16) Alexander, S. (1965). A single equation for the stress-strain curve of concrete. *Indian Concrete Journal*, 39(7): 247-277.
- (17) Tsai, W. T. (1988). Uniaxial compressional stress-strain relation of concrete. *Journal of Structural Engineering*, 14(9): 2133-2136.
- (18) Sargin, M. 1971. *Stress-strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections*, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Ontario.
- (19) Wang, P. T., Shah, S. P. y Naaman, A. E. (1978). Stress-strain curves of normal and lightweight concrete in compression. *ACI Journal Proceedings*, 75(11): 603-611.
- (20) Pantazopoulou, S. J. y Mills, R. H. (1995). Microstructural aspects of the mechanical response of plain concrete. *ACI Materials Journal*, 92(6): 605-616.
- (21) Kachanov, L. M. (1958). On the time to rupture under creep conditions. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Otd. Tekhn. Nauk*, 8: 26-31.
- (22) Rabotnov, Y. N. (1959). *A mechanism of a long time failure, in Creep Problems in Structural Members*, USSR Academy of Sci. Publ., Moscú.
- (23) Shah, S. P. y Winter, G. (1966). Inelastic behavior and fracture of concrete. *ACI Journal Proceedings*, 63(9): 925-930.
- (24) Weibull, W. (1939). A statistical theory of the strength of materials. *Ingeniors Vetenskaps Akademiem*, 151: 1-45.
- (25) Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *J. Appl. Mech.*, 18: 293-297.
- (26) Blechman, I. (1988). Stage model of stress-strain relationship for concrete under short-term load. Part 1: Ascending branch. *Cement and Concrete Research*, 18: 863-873.
- (27) Blechman, I. (1989). Stage model of stress-strain relationship for concrete under short-term load. Part 2: Nature of concrete atrophy. *Cement and Concrete Research*, 19: 7-15.
- (28) Blechman, I. (1989). Stage model of stress-strain relationship for concrete under short-term load. Part 3: Descending branch. *Cement and Concrete Research*, 19: 203-215.
- (29) Collins, M. P., Mitchell, D. y MacGregor, J. G. (1993). Structural design considerations for high-strength concrete. *Concrete International: Design and Construction*, 15(5): 27-34.
- (30) Tasnimi, A. (2004). A. Mathematical model for complete stress-strain curve prediction of normal, light-weight and high-strength concretes. *Magazine of concrete Research*, 56(1): 23-34.
- (31) Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code for Concrete Structures (CEB, Lausana, 1978).
- (32) Comité Técnico AEN/CTN 140 Eurocódigos Estructurales. (2010). UNE-EN 1992-1-1:2010 Eurocódigo 2: Proyecto de estructuras de hormigón. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación. AENOR.
- (33) Comité Técnico AEN/CTN 140 Eurocódigos Estructurales. (2011). UNE-EN 1992-1-1:2010 ERRATUM:2011 Eurocódigo 2: Proyecto de estructuras de hormigón. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación. AENOR.
- (34) Comité Euro-International du Béton. CBE-FIP Model Code 90, Thomas Telford, Londres, 1991.
- (35) CEB Working Group on HSC/HPC. (1995). High performance concrete, Recommended Extensions to the MC 90 Research Needs. *Bulletin d'Information CEB*, (228):140.
- (36) Van Gysel, A. y Taerwe, L. (1996). Analytical formulation of the complete stress-strain curve for high strength concrete. *Materials and Structures*, 29: 529-533.
- (37) CEB-FIP. Model Code 2010. (2011). Final approved version. Volume 1. *fib Bulletin*, (65).
- (38) CEB-FIP. Model Code 2010. (2011). Final approved version. Volume 2. *fib Bulletin*, (56).
