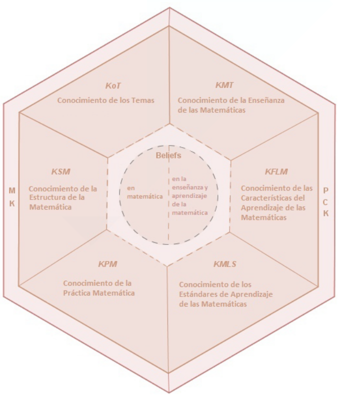
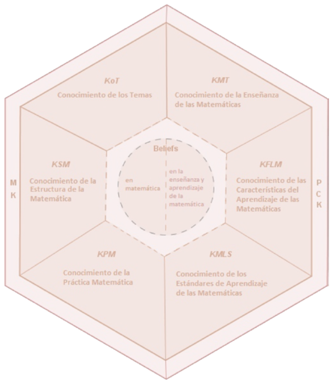
REFLEXIONANDO SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR



ACTAS DE LAS II JORNADAS
DEL SEMINARIO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
DE LA UNIVERSIDAD DE HUELVA.
15 Y 16 DE SEPTIEMBRE 2015



Reflexionando sobre el conocimiento del profesor
Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva.
15 Y 16 de septiembre 2015.

Coordinación de la edición

Los responsables de la edición de esta obra son José Carrillo Yáñez, Luis C. Contreras González y Miguel A. Montes Navarro, miembros del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (SIDM), inserto en el Grupo de Investigación DESYM (HUM 0168) del Plan Andaluz de Investigación.

ISBN

978-84-608-9815-3

Composición y diseño

CG.SE

La configuración de esta publicación le permite una satisfactoria navegación dentro del documento gracias a la inclusión de marcadores e hipervínculos con los que podrá desplazarse entre los diferentes capítulos.

Además, incluye la opción de retroceso, con lo que si el/la lector/a quiere volver al índice, lo puede hacer a través de los marcadores "clicando" tanto en el enunciado de cada capítulo como en el número de página.

Los enlaces web y los emails referenciados en esta publicación están diseñados para que pueda utilizarlos en su navegador web y en su proveedor de correo electrónico.

Igualmente puede realizar anotaciones, incluir notas y realizar búsquedas internas.

Esta obra se realiza al amparo del proyecto de investigación "Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas" (EDU2013-44047P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad del Gobierno de España.

Para su financiación se ha contado también con la colaboración del Programa Oficial de Doctorado en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales, Matemáticas y de la Actividad Física y Deportiva de la Universidad de Huelva.

ÍNDICE

II JORNADAS SIDM
REFLEXIONANDO SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

Por segunda vez, el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (SIDM), inserto en el Grupo de Investigación DESYM (HUM168), celebró sus jornadas de reflexión bianuales que suponen un balance del trabajo del grupo en los últimos años.

Esta vez, dado que el modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK) cumplía dos años, era obligado un análisis retrospectivo de todo el trabajo realizado y, por tanto, esa fue la temática del seminario que reunió a investigadores y colaboradores del grupo, así como a interesados en dicho modelo. Para ello, las Jornadas abordaron las siguientes preguntas: ¿Qué hemos investigado sobre el conocimiento del profesor? ¿Por qué lo hemos hecho? ¿Cómo hemos investigado? ¿Qué resultados (conceptuales y metodológicos) hemos obtenido? ¿Qué repercusión ha tenido en nuestra forma de entender la investigación (sobre el Conocimiento Profesional -CP)? ¿Cómo hemos transferido estos resultados? ¿En qué ámbitos hemos realizado la transferencia? ¿Cómo queremos seguir investigando sobre el CP?

Las Jornadas se celebraron los días 15 y 16 de septiembre de 2015, y se articularon en torno a las siguientes ponencias:

1. *Tránsito desde el MKT al MTSK:* Ambigüedades y dificultades del MKT; aportación del MTSK

Miguel Ribeiro (Universidad de Algarve), Leticia Sosa (Universidad Autónoma de Zacatecas, México), Eric Flores (Universidad de Huelva). Réplica de Miguel A. Montes (Universidad de Huelva).

2. *El KoT:* El KoT en comparación con el conocimiento común y el especializado del MKT; ¿Queda algo sin contemplar en las categorías del KoT?

Mar Liñán (Universidad de Sevilla). Réplica de Luis C. Contreras (Universidad de Huelva).

3. *El KSM:* El KSM en comparación con el conocimiento en el horizonte del MKT; ¿Queda algo sin contemplar en las categorías del KSM?

Miguel A. Montes (UHU). Réplica de Nuria Climent (Universidad de Huelva).

4. *El KPM:* El KPM en comparación con el conocimiento en el horizonte del MKT. ¿Queda algo sin contemplar en las categorías del KPM?

Eric Flores (UHU). Réplica de José Carrillo (Universidad de Huelva).

5. El KMT: El KMT en comparación con el conocimiento de matemáticas y de la enseñanza del MKT. ¿Queda algo sin contemplar en las categorías del KMT?

Dinazar Escudero (Universidad de Huelva). Réplica de Luis C. Contreras (UHU).

6. El KFLM: El KFLM en comparación con el conocimiento de matemáticas y de los estudiantes del MKT. ¿Queda algo sin contemplar en las categorías del KFLM?

Dinazar Escudero (UHU). Réplica de Nuria Climent (UHU).

7. El KMLS en 5 diapositivas

- El KMLS en comparación con el conocimiento del curriculum del MKT

- Las categorías del KMLS. ¿Queda algo sin contemplar?

Ana Escudero (Universidad de Sevilla) presenta. José Carrillo (UHU) replica. Discusión

8. Las creencias en el MTSK: ¿Deben ser las creencias parte del MTSK?¿Debe ser el dominio afectivo parte del MTSK?¿Cómo estamos considerando las creencias en el modelo?

Miguel A. Montes (UHU). Réplica de Luis C. Contreras (UHU).

9. Aportaciones metodológicas: Evidencia-indicio-oportunidad. Escenarios e instrumentos de obtención y de análisis de la información, y de presentación de resultados e informes. El análisis didáctico en la investigación con MTSK.

Jeferson Moriel (Universidad Federal de Mato Grosso, Cuiabá, Brasil), Nielka Rojas (Universidad Católica del Norte, Chile), Álvaro Aguilar (Universidad de Huelva), Dinazar Escudero (UHU), Eric Flores (UHU). Réplica de Pablo Flores (Universidad de Granada) y Cinta Muñoz (Universidad de Sevilla).

10. Resultados de nuestras investigaciones: Una clasificación sobre la base de las preguntas de investigación. Análisis de la producción de los últimos años.

Ana Escudero (US), Nuria Joglar (Universidad Rey Juan Carlos, Madrid), Ana Mª Reyes (Escuela Normal Rural General Matías Ramos Santos, Loreto, Zacatecas, México) y Daiane Corrêa (Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Río Claro, Brasil).

11. La investigación sobre MTSK en las distintas etapas educativas: ¿Cómo se va nutriendo el modelo de las especificidades de cada etapa? ¿Cómo la investigación con MTSK está contribuyendo a una mejor comprensión del conocimiento necesario para enseñar en cada etapa?

Coloquio entre Cinta Muñoz (US) y Miguel A. Montes (UHU) moderado por Eric Flores (UHU).

12. Problemas abiertos, preguntas para la reflexión

Miguel A. Montes (UHU) y Daiane Corrêa. Replican Luis C. Contreras (UHU), Nuria Climent (UHU) y José Carrillo (UHU).

Los documentos que vienen a continuación han sido elaborados con posterioridad a las Jornadas, intentando recoger tanto el contenido de cada aportación y su correspondiente réplica, como las aportaciones de los asistentes. No son, por tanto, unas Actas al uso. El lector podrá comprobar que la redacción de cada aportación ha sido elaborada de forma colaborativa por diferentes asistentes al seminario, no siempre coincidentes con los responsables de las ponencias del mismo. Ello responde al espíritu integrador y colaborativo que inspira nuestras producciones.

Este documento no supone, en absoluto, una visión dogmática del MTSK. Al contrario, debe considerarse como un documento abierto al debate. Al final del mismo, el lector podrá encontrar la filiación de cada uno de los autores. Invitamos a cualquier interesado a ponerse en comunicación con cualquiera de los autores para intercambiar opiniones, perspectivas o comentarios acerca del trabajo realizado y por realizar.

Esperamos contribuir a la mejora de modelos analíticos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que a corto plazo nos permita mejorar su comprensión y, a medio y largo plazo, se convierta en nuestro referente para la formación inicial y permanente de los profesores de matemáticas.

José Carrillo, Luis C. Contreras y Miguel Á. Montes

Editores

1 TRÁNSITO DESDE EL MKT AL MTSK

FLORES-MEDRANO, E.
SOSA, L.
RIBEIRO, C.M..

INTRODUCCIÓN

El modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) ha sido utilizado por el grupo del SIDM para realizar distintas investigaciones (e.g. Ribeiro y Carrillo, 2011; Sosa, 2011). Dichas investigaciones permitieron un avance en la comprensión del conocimiento que utiliza el profesor de matemáticas en diferentes temas matemáticos, a la vez que propició el conocimiento de otros modelos acerca del profesor (e.g. *Knowledge Quartet*, Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009; *Mathematics for Teaching*, Davis y Simmt, 2006).

Estas experiencias investigativas también dieron cuenta de algunas dificultades en el trabajo analítico con el MKT. Para resolver esas dificultades, los investigadores involucrados en cada trabajo establecieron algunos criterios subjetivos para avanzar en los resultados. Esto permitió obtener conclusiones interesantes que a la fecha se siguen explotando (por ejemplo, se escribió el artículo Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2015). En la búsqueda de dar continuidad al trabajo que se estaba realizando, el grupo de doctorado que inició sus estudios en 2011-2012, apoyados por otros doctorandos con la tesis avanzada, analizaron estos trabajos con la finalidad de delimitar nuevos problemas de investigación. Los criterios que se habían establecido para solventar las dificultades no fueron suficientes para consensuar lo que se estaba entendiendo en diversos elementos del MKT.

Este documento recoge, de manera general, las dificultades que se encontraron en el trabajo con el MKT, las preguntas que suscitaron en su momento, las críticas que se generaron y cómo el MTSK aportó en aras de generar una herramienta analítica para comprender el conocimiento del profesor de matemáticas.

Flores-Medrano, E., Sosa, L., Ribeiro, C.M. (2016). Tránsito del MKT al MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 7 -11). SGSE: Huelva.

1. Conocimiento versus habilidades

Un modelo de conocimiento requiere conformarse, en su interior, de elementos de conocimiento. Otra cosa es decir lo que el profesor puede estar posibilitado a hacer cuando posee tal o cual conocimiento (o conjunto de conocimientos, para ser más precisos). De hecho, en las investigaciones que hemos realizado partimos de observar algo que el profesor está posibilitado para hacer y lo que nos interesa es abstraer cuál es el conocimiento que sustenta esas acciones. El objetivo final es interpretar, no describir. Las definiciones que se proponen en muchos de los subdominios del MKT quedan en términos de aquello que el profesor es capaz de hacer al tener ese tipo de conocimiento. Sin embargo, normalmente dichas acciones requieren de más de un tipo de conocimiento.

1.1 Conocimiento común versus conocimiento especializado

Por su definición y los ejemplos que se utilizan para ilustrarlo, el conocimiento especializado del contendido ha llamado la atención de diversos investigadores (e.g. Zembat, 2013), incluidos nosotros. En Flores, Escudero y Carrillo (2013) hacemos un análisis que permite contrastar que las definiciones pueden resultar contradictorias en los análisis y que requieren de un alto grado de subjetividad por parte del investigador, lo cual repercute en la búsqueda de consenso de los resultados. Dichas definiciones se agrupan en dos bloques:

a) Es el conocimiento puramente matemático que solamente tiene el profesor de matemáticas

b) Es el conocimiento que tiene un adulto bien instruido al nivel escolar que se está analizando (conocimiento que se espera que tenga/desarrolle un estudiante en ese nivel analizado).

Una de las conclusiones que surge del trabajo de Sosa (2011) es que el conocimiento que es especializado para un profesor de bachillerato, puede ser común para un profesor de universidad. Esto hace notar que la diferencia entre el conocimiento común y el especializado no está en su naturaleza, sino en las características del sujeto que lo posea o del sujeto que lo analiza.

Ampliando dicha idea, que un conocimiento sea común o especializado puede depender de lo que se espera que aprendan los estudiantes en un determinado colegio. Por ejemplo, puede diferir para un profesor en una escuela de alto rendimiento en el cual, saber un contenido será común y, eso mismo, puede ser especializado para un profesor de una escuela de bajo rendimiento en el mismo nivel escolar, ya que todo depende de lo que se espera que aprenda un hipotético estudiante. Una ampliación más:

¿Qué otro profesional que no sea el profesor de matemáticas emplea el conocimiento que se requiere para multiplicar dos polinomios con cuatro términos y tres variables cada uno? ¿Cuán larga debe de ser la lista de profesiones que recorramos antes de determinar si es un conocimiento exclusivo del profesor? Pensemos que lo es, entonces es especializado.

¿Qué pasa si el currículo establece que ese es un conocimiento que se debe aprender en segundo de secundaria? Entonces se volvería conocimiento común. Un mismo conocimiento, en un mismo profesor, podría ser común y especializado dependiendo de la definición a la que se atienda.

Por otro lado, realizamos el *unpacking* de los conocimientos que se requerían para las tareas con las que, entre otros, Ball, Thames y Phelps (2008) ejemplificaban el conocimiento especializado del contenido. Todas ellas, desde el punto de vista matemático, requerían de contenidos que tradicionalmente forman parte del currículo para estudiantes de primaria. Concluimos que las tareas propuestas por esos autores sí eran propias de la labor profesor pues incluía la evaluación, interpretación o anticipación al pensamiento del estudiante, pero cada uno de los conocimientos matemáticos que se requería para abordarla no eran exclusivos del profesor de matemáticas.

1.2 Conocimiento especializado versus conocimiento del contenido y de los estudiantes

Las tareas que Ball *et al.* (2008) describen como conocimiento especializado requieren de la interpretación del pensamiento matemático del estudiante puesto en juego en una producción matemática. Si esto es parte del conocimiento especializado, ¿qué forma parte del conocimiento del contenido y de los estudiantes? Por ejemplo, imaginemos la siguiente solución de una sustracción que hace un estudiante:

$$\begin{array}{r} 125 \\ \underline{-39} \\ 114 \end{array}$$

¿Interpretar que en las unidades y en las decenas se está restando en orden contrario es interpretar el pensamiento matemático del estudiante? ¿Es eso conocimiento común o conocimiento del contenido y de los estudiantes? ¿Hay alguna ganancia analítica de asignar esto a conocimiento especializado y el hecho de que es un error común establecerlo como conocimiento del contenido y de los estudiantes (tal como hacen sus autores)?

2. Aportaciones del MTSK

En esta sección abordaremos de manera escueta los aportes del MTSK. No entramos al detalle, ya que eso se hace en otros documentos de esta misma jornada de trabajo.

i) Los problemas de delimitación

La definición del conocimiento especializado en los trabajos del grupo de Michigan (e.g. Ball *et al.*, 2008) causa conflictos a la hora de compararlo con otros subdominios, como ya se ejemplificó antes. Es, en sí, la dicotomía común-especializado y el no reconocimiento del conocimiento didáctico del contenido como un ente especializado, lo que causa dichos conflictos.

Para evitar este problema, el MTSK se propuso realizar una división intrínseca a la matemática para el conocimiento matemático. Así, se pasó del conocimiento común, especializado y en el horizonte (o del horizonte) que requieren de una delimitación de decir común con quien y una definición del horizonte a una división en el conocimiento del objeto, de cómo se estructura con otros objetos y de la forma de proceder en matemáticas, todos estos conocimientos son de naturaleza diferenciable.

Por otra parte, el MTSK reconoce la potencialidad de describir un cuerpo de conocimiento que solamente tenga sentido para el profesor de matemáticas. Pero no lo considera que sea completamente de naturaleza matemática ni tampoco específicamente de naturaleza didáctica-matemática. Se considera que es el conjunto de los seis subdominios que componen al modelo lo que es especializado para el profesor de matemáticas (no elemento a elemento, sino el conjunto).

ii) ¿Elementos de conocimiento didáctico general?

Hablar del conocimiento del contenido y de los estudiantes hace pensar en el conocimiento de los estudiantes (análogamente con el conocimiento del contenido y de la enseñanza). De hecho, algunos modelos (e.g. Godino, 2009), proponen que es importante que el profesor conozca a los estudiantes particulares. Desde su labor de formadores de maestros, gran parte de los integrantes del grupo de investigación estará de acuerdo con esto, pero no con la potencialidad que represente considerar dicho conocimiento como parte del conocimiento especializado.

Por ejemplo, un profesor conoce que, si pone a trabajar a sus estudiantes en grupos, estos se motivarán y participarán más. Este conocimiento es de la enseñanza, pero no necesariamente de las matemáticas. De hecho, hay momentos en los que resolver problemas de manera individualizada es más propicio que hacerlo en equipos. En cambio, si un profesor conoce que en una actividad matemática conviene que sus estudiantes formen grupos de 6 ya que de esta manera se podrá establecer la ley de los grandes números al trabajar con un dado, lo que se destaca aquí es el conocimiento de las características matemáticas del recurso de enseñanza, en este caso, la formación de grupos es dicho recurso.

Este tipo de reflexiones nos guio a hablar de aprendizaje de las matemáticas y no de estudiantes (pero sí de sus procesos de adquisición y desarrollo de conocimiento matemático) y de enseñanza de las matemáticas. Esto no es únicamente un cambio en el nombre, sino un reconocimiento de un cuerpo de conocimiento que se ha desarrollado a partir de las investigaciones en didáctica de las matemáticas y de la experiencia del trabajo con profesores.

iii) Del conocimiento curricular al conocimiento de los estándares

El currículo es material orientador sobre contenidos a impartir en un determinado momento escolar que cambia en contenido y forma incluso en regiones cercanas. Hay algunos que solamente señalan lo que se debe de enseñar y otros dan guías sobre cómo enseñarlo. En la literatura de Educación Matemática, la idea de estándar de aprendizaje ha sido impulsada con gran fuerza por la NCTM, por lo cual, hablar de los estándares de aprendizaje de las matemáticas matiza y centra cuál es el objeto que se espera estudiar en dicho subdominio (que, por cierto, contiene, a un nivel nominal, a los elementos del conocimiento común del contenido del MKT).

iv) Consideración de las creencias del profesor en el núcleo del modelo

Sin afán de entrar al detalle, se puede decir que dicho aporte se ha manejado, hasta ahora, desde el punto de vista metodológico. Ha influido en la elección de la definición de conocimiento que no nos lleva a tomar un papel evaluativo del actuar del profesor. Hasta ahora solo se ha publicado un documento que estudia relaciones entre concepciones y conocimiento (ver Flores y Carrillo, 2014). En el PME de 2014 resultó novedoso para algunos participantes, pero no se puede hablar más sobre el aporte que representa su consideración, ya que carecemos de datos fuertes que lo sustenten.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Davis, B. y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-Teaching. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 293-319.

Flores, E., Escudero, D. y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz, Ç. Haser, M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turquía: ERME.

Flores, E. y Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge through her practice. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan, (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 81-88). Vancouver, Canadá: PME.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis del conocimiento del profesor de matemáticas. *Unión, 20*, 13-31.

Ribeiro, C. M. y Carrillo, J. (2011). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th IGPME* (Vol. 4, pp. 41-48). Ankara, Turkey: PME.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. London: SAGE.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos.* Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/FZPmof. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 173-189.

Zembat, I.O. (2013). Specialized Content Knowledge of Mathematics Teachers in UAE Context. En B. Ubuz, Ç. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceeding of CERME 8* (pp. 3307-3316). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

2 CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KOT)

Liñán, M.M.
Contreras, L.C.
Barrera, V.J.

1. Reflexiones sobre el Conocimiento de los Temas (KoT): ¿Qué es?

El grupo de investigación del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva viene desarrollado un modelo analítico de conocimiento del profesor de matemáticas partiendo de otros profundamente trabajados como el Mathematical Knowledge for Teaching (MKT). Debido a la insuficiencia empírica de dicho modelo que el grupo ha mostrado en varios trabajos y a distintos aspectos clave que necesitarían una más profunda discusión (Muñoz-Catalán, Contreras, *et al.*, 2015), de forma consistente con la convicción de que todo el conocimiento del profesor es inherente a su tarea como docente y, por tanto, es especializado, surge el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK en sus siglas en Inglés), en el que se distinguen dos grandes dominios: conocimiento del contenido matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK), que rodean a las concepciones sobre la matemática permeando estas a su vez a los primeros. Nos centramos en este capítulo en el conocimiento del contenido matemático y, más en particular, en el conocimiento de los temas matemáticos.

Podríamos decir que el conocimiento matemático, MK, se conforma en lo que diversos autores llaman grandes ideas matemáticas (Clements, 2014, Charles y Carmel, 2005), es decir, afirmaciones, postulados, o principios fundamentales, centrales en las matemáticas (KoT) y que conectan (KSM), a través de la lógica natural y formal (KPM), los conocimientos matemáticos en un todo coherente. Por ejemplo, en la figura 1 (Ribeiro, Muñoz-Catalán, Liñán, 2015) se plantea una propuesta, desde la dimensión del contenido matemático, sobre lo que significa conocer la resta para su enseñanza como profesor de infantil. Los rectángulos contemplan el KoT, y los conectores señalan las

Liñan, M.M., Contreras, L.C., Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12 -20). SGSE: Huelva.

distintas conexiones en la estructura matemática involucrada (KSM). Estos conectores son bidireccionales porque unos contenidos se cimentan en otros y "los conceptos (KoT) más básicos sustentan el aprendizaje de los más avanzados y a la vez éstos refuerzan a aquellos" (Ribeiro, Muñoz-Catalán, Liñán, 2015, p. 579).

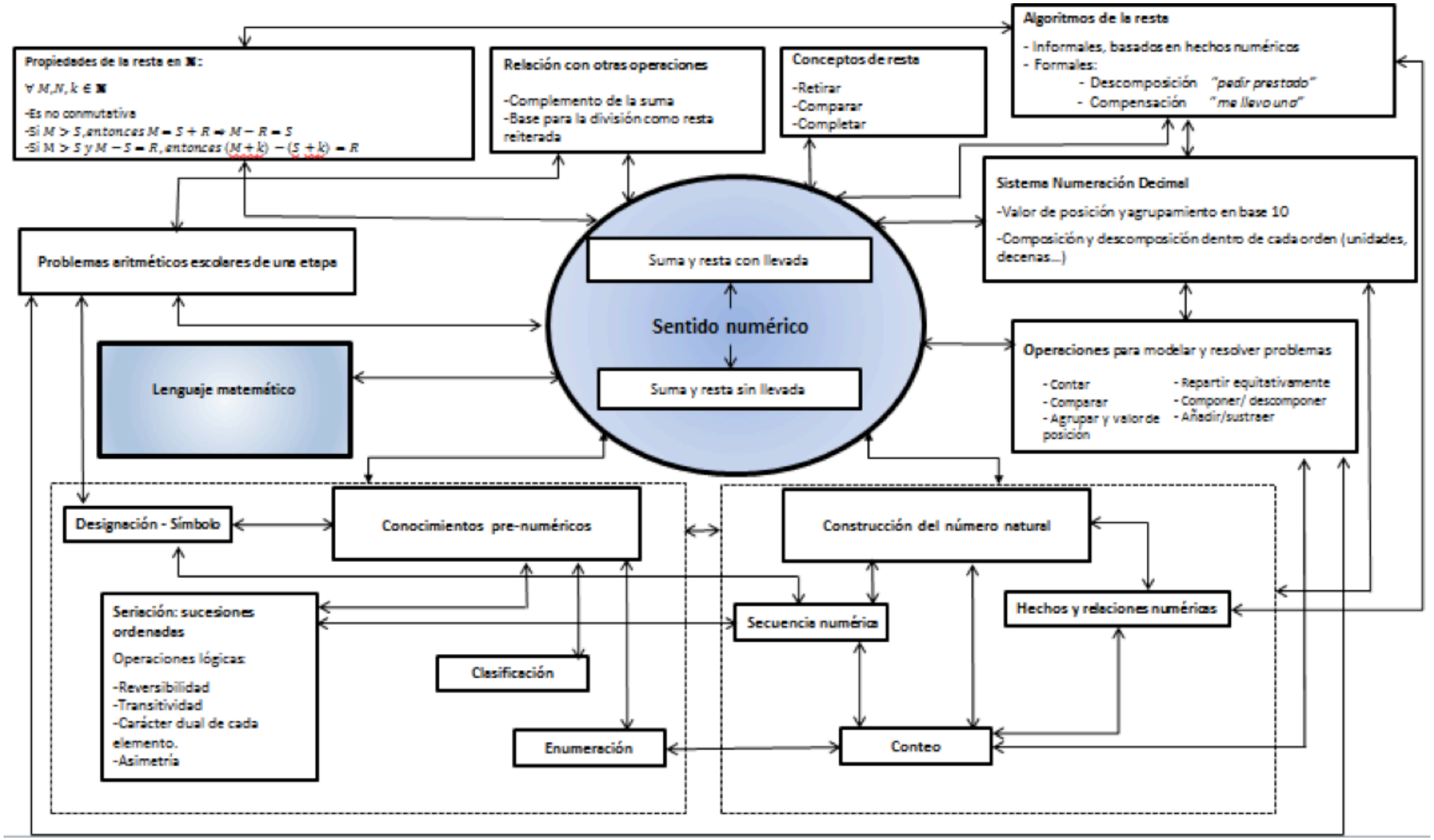
El KoT es, por tanto, uno de los subdominios del dominio matemático del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, MTSK, que contempla el propio contenido matemático en sí mismo.

Entre el conocimiento especializado que debe poseer un profesor de matemáticas debe estar el dominio de la materia a enseñar, eso sí, con un nivel de profundización, organización y estructuración superior al que van a recibir los estudiantes (Ma, 1999), necesario para organizar de manera segura el proceso de enseñanza-aprendizaje. En el Conocimiento de los Temas[1] Matemáticos (KoT) se incluye el conocimiento de los conceptos, proposiciones (lemas, teoremas, corolarios, axiomas), propiedades, procedimientos, clasificaciones, ejemplos, fórmulas y algoritmos, con sus respectivos significados y demostraciones. Las conexiones que se establecen entre los diferentes conceptos se consideran también incluidas en este subdominio pues están vinculadas al conocimiento del significado de un elemento específico (Climent, Carreño y Ribeiro, 2014).

Por ejemplo, el conocimiento del profesor de Educación Primaria sobre fracciones, además de incluir la definición de dicho concepto, la comprensión de la relación que se establece entre fracciones equivalentes, o saber utilizar los algoritmos de las diferentes operaciones aritméticas con fracciones (y sus fundamentos), incluye el conocimiento de los diferentes fenómenos en los que la fracción está implicada y del significado de fracción vinculado a cada una de las interpretaciones posibles: parte-todo, medida, razón, cociente y operador, lo que le permitirá contextualizar el concepto en situaciones cercanas al estudiante en las que estos puedan darle sentido. También es necesario incluir los distintos modos de representación de una fracción: de manera concreta, gráfica, verbal o simbólica y el tratamiento de las fracciones en contextos continuos y en contextos discretos o su relación con los porcentajes y los números decimales.

[1] Por tema se entiende los contenidos correspondientes a los bloques de contenidos considerados de manera tradicional. Se toma como referente las áreas propuestas por el NCTM (2000): Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad

Figura 1. Contenido matemático relacionado con la resta en Educación Infantil
(Adaptación de Ribeiro, Muñoz-Catalán, Liñán, 2015)



Para organizar los diferentes elementos de este subdominio, se han definido cinco categorías: fenomenología, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, definiciones y procedimientos, que vamos a discutir a continuación.

La *Fenomenología*, en la que podríamos incluir conceptos, procesos y procedimientos, se puede ver desde dos posiciones: por un lado, el conjunto de situaciones en las que el profesor puede ubicar un tema, como por ejemplo el concepto de variable y los procesos infinitos relacionados, que resultan ajenos al estudiante de primaria, se pueden ver reflejados fenomenológicamente con el paso del tiempo o la repetición cíclica de las estaciones del año (Montes, 2015, citando a su vez a Gardiner, 1985). Por otro, estaría el conocimiento de los usos y aplicaciones de un tema, pero dentro de las propias matemáticas, no para dar servicio a otra ciencia; podríamos decir aquí que se observan conexiones intraconceptuales, como podría ser que el profesor conozca que una aplicación para el teorema de Pitágoras es construir ángulos rectos.

En las *Propiedades y sus Fundamentos* sobre un tema, están tanto los procesos matemáticos que enuncian (propiedades, teoremas,...) como sus demostraciones. Incluiríamos aquí también todo lo referente a la axiomática, a esos resultados que son principios fundamentales y evidentes que no requieren demostración, como la igualdad de ángulos opuestos por el vértice y comprendidos entre paralelas, sirviendo de marco de referencia para la elaboración de teorías matemáticas (Pérez, 2010), así como ciertos elementos de la geometría euclídea básica, como punto, recta, segmento, semirrecta, que se pueden conceptualizar a través de sus propiedades, lo que en este caso no configura una definición (Ortega, en réplica inédita a la comunicación Liñán, Montes, Contreras, 2015).

Las definiciones y demostraciones no completas, aunque no incorrectas, desde el punto de vista del pensamiento matemático (por ejemplo, las realizadas a través de ejemplos, las comprobaciones, modelizaciones...), constatado que el KoT asociado está bien construido, estarían contenidas en esta categoría; en caso contrario, se podrían interpretar como un indicio de su inconsistencia (Flores, 2015).

En la categoría *Definiciones* se considera el conocimiento del conjunto de propiedades que hacen definible a un objeto determinado además de formas alternativas que se utilicen para definir, pero no se incluye el conocimiento de las características que ha de tener una definición, como tampoco se incluiría en la categoría anterior el conocimiento sobre los alcances de los distintos tipos de prueba y sus lógicas internas, cuestiones ambas contenidas en el conocimiento de la práctica matemática (KPM).

Los *Registros de Representación* contemplan el conocimiento de las diferentes formas en que se puede representar un concepto, proceso o procedimiento. Incluiríamos aquí ciertas modelizaciones, como las que se podrían realizar a partir del enunciado de un problema y que se pueden enmarcar en la primera fase de resolución de Polya (1986). Estas representaciones podrían ser numéricas, gráficas, verbales, analíticas,..., incluyendo el conocimiento de la notación y vocabulario adecuado asociado a dichas representaciones. Hemos de señalar que hay otros elementos de la sintaxis matemática que no formarían parte del KoT, si no del KPM; por ejemplo, los profesores han de conocer y hacer explícito cómo se usa el lenguaje matemático, como el hecho de que existen palabras *especiales* cuyo uso en matemáticas tiene un significado diferente o más profundo que aquel que tienen en el uso común.

Los *Procedimientos* incluyen el conocimiento de algoritmos convencionales y alternativos, el cómo se hace o se utiliza, las condiciones suficientes, es decir, cuándo se puede hacer o utilizar, los fundamentos de los algoritmos o el por qué se hace o utiliza así, lo que implica una conexión con las propiedades y sus fundamentos y, por último, las características que tendría el objeto resultante asociadas al tema en cuestión.

Desde nuestra perspectiva, un conocimiento que no queda ubicado de forma determinante en ninguna de las categorías anteriores (y quizás un poco en todas) es el de los ejemplos. Un *ejemplo* no es un objeto de existencia independiente; el término *ejemplificación* transmite un contenido con una contextualización de lo que se pretende ejemplificar. Watson y Mason (2002) usan el término *ejemplo* para cubrir una extensión amplia de usos en matemáticas: para generalizar (incluyendo relaciones intuitivas y razonamiento deductivo)[2]; ejemplos que ilustran conceptos y principios, para indicar una clase o categoría superior, para motivar, para mostrar la variación y el cambio, para ilustrar técnicas o procedimientos; o ejemplos para la construcción o refutación de pruebas[3]. Existe un abanico importante de variabilidad en los ejemplos usados por un profesor a la hora de enseñar un mismo concepto. La elección de uno frente a otro es lo que Watson y Mason (2005) definen como *espacio de ejemplos*. El espacio de ejemplos de una persona es el conjunto de ejemplos de los que dispone y las relaciones entre ellos, que constituyen una trama organizada a disposición del individuo en un momento determinado y sobre un concepto o procedimiento concreto.

Conscientes del papel esencial de los espacios de ejemplos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas proponemos considerar los *espacios de ejemplos* como una nueva categoría del KoT, una categoría no asociada a un concepto concreto, sino articulada a través de todos los conceptos matemáticos de los que se tiene conocimiento, dado que esa articulación es un indicador de la comprensión del tema que tiene un profesor. De esta forma, la acción de ejemplificar nos brinda un escenario donde estudiar MTSK; los espacios de ejemplo nos informarían del KoT (de su calidad y de su riqueza) y quizás del KSM- cómo los organiza en relación con otros conceptos de orden superior-, y si a través del uso de ejemplos indagamos sobre la intencionalidad con los que el profesor los usa, podrían informar del KMT o KFLM (por qué los elije en relación con dificultades de sus estudiantes). Pero, además, como queda sugerido antes, también el uso de los ejemplos podría informar del KPM (ver notas al pie de la página anterior).

[2] Lo que podría ser un indicio de KPM (saber que con ejemplos adecuados puedo avanzar en un proceso de generalizar).

[3] Elegir el contraejemplo adecuado para refutar una conjetura es KoT, conocer el papel limitado de los ejemplos y el poder de los contraejemplos para invalidar una conjetura es KPM.

Si tenemos en cuenta dicha adecuación a ciertos estudiantes o a una situación de aula, podemos observar aquí una relación clara de este subdominio (KoT) con los correspondientes al PCK (conocimiento didáctico del contenido) relacionados con la enseñanza (KMT) y el aprendizaje (KFLM), incluso del conocimiento de los estándares (KMLS). Podemos resumir con palabras de Montes (2015, p. 38) que este conocimiento permite al profesor "desenvolverse en el contenido que aborda de forma desahogada siendo consciente de los aspectos matemáticos que surgen y pueden surgir durante la explicación de una sesión, teniéndolos en cuenta durante la preparación de la clase, a la hora de seleccionar actividades [...] o evaluar su propia práctica. [...]. Permite responder a los alumnos cuando estos resuelven un problema [...] por alguna concatenación de razonamientos no estándar, ya que ya que el conocimiento profundo de la materia le permitirá hallar los razonamientos matemáticos que subyacen a dicho algoritmo, o reconocer la coherencia de los argumentos dados por los alumnos."

2. El conocimiento de los temas (MTSK) en comparación con el conocimiento común y el especializado (MKT)

Partiendo de Shulman (1986), Ball *et al*. (2008) desarrollaron el modelo MKT, en el que una de las más importantes aportaciones, además de su particularización para el conocimiento del profesor de matemáticas, fue la diferenciación entre el conocimiento del contenido común (CCK) y el especializado (SCK). El primero de ellos es el que cualquier persona bien formada ha de tener, siendo el segundo el que caracteriza el conocimiento del profesor. Los problemas surgen en la distinción de ambos conocimientos, justamente cuando se trata de un profesor de matemáticas; esto obliga a establecer un referente de lo que es común o no, es decir, si tenemos un episodio de información no sabremos si aporta datos sobre conocimiento común o especializado a no ser que lo comparemos con un hipotético referente (Muñoz-Catalán *et al*., 2015).

La investigación en didáctica de las matemáticas ha puesto de relieve la gran importancia que tiene que los profesores tengan un conocimiento profundo de las matemáticas que enseñan para favorecer un buen aprendizaje (Ribeiro *et al*., 2015); uniendo este pensamiento al plasmado como resumen de la descripción del KoT, en palabras de Montes (2015), es este conocimiento el que permitirá al profesor desenvolverse adecuadamente, tomar decisiones ante situaciones no esperadas y ser capaz de trabajar con las soluciones alternativas que puedan surgir en la resolución de problemas, entre otras cosas. Por tanto ¿cómo distinguir su conocimiento común de su conocimiento especializado? La forma en la que conoce un profesor el algoritmo de la suma no es igual a cómo la conoce un ingeniero o un lingüista: todos resolverán la operación adecuadamente, pero mientras que todos deberían saber el fundamento de tal procedimiento (parte-parte-todo), solo el profesor la tiene en cuenta para su enseñanza y no puede verla de otra manera, mientras que otros profesionales pueden mecanizar su operativa.

El conocimiento común (Ball *et al*. 2008) es aquel que se usa en una gran variedad de escenarios, no solo en la enseñanza, mientras que el conocimiento especializado queda definido por el conocimiento y las habilidades matemáticas propias de esta, entre las que incluyen reconocer qué implica el uso de una determinada representación, unir representaciones con las ideas subyacentes y a otras representaciones, conectar temas con anteriores o posteriores, examinar equivalencias, y usar notación y lenguaje matemático.

Si entramos en el análisis de las categorías del KoT y las comparamos con lo que se define como conocimiento común y especializado en MKT, observamos que la *fenomenología*, que se consideraría especializado por ser propio del profesor al implicar el conocimiento de modelos atribuibles a un tema que pueden servir para generar conocimiento matemático (Flores, Escudero *et al*., 2015), así como el conocimiento de los usos y aplicaciones de un tema concreto, no se contemplan explícitamente en el modelo MKT.

Las *propiedades y sus fundamentos* estarían consideradas en MKT como conocimiento común, por estar presentes en una gran variedad de escenarios, no únicamente en la enseñanza. Por ejemplo, cualquier persona que sepa que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa podría darse cuenta de un error cometido al intentar aplicar la conmutatividad en dicha multiplicación cuando estas no son cuadradas; la especialización del conocimiento del profesor, que sabe que esta es una propiedad que puede generar confusión al cambiar en este contexto, será la que le permitirá proponer ejemplos con matrices cuadradas para su comprensión. El conocimiento especializado de las propiedades y sus fundamentos permiten al profesor mejorar su conocimiento para la enseñanza y el aprendizaje.

En cuanto a los *registros de representación,* MKT considera especializado el saber cómo elegir, hacer y usar representaciones matemáticas de forma efectiva, mientras que MTSK distingue, por un lado el conocimiento que el profesor tiene sobre las representaciones de un tema dentro del conocimiento del contenido matemático (MK), y la elección de la más adecuada en cada caso en el conocimiento didáctico del contenido (PCK). Por ejemplo, Ball *et al* (2008) consideran el reconocimiento de las ventajas y desventajas de usar rectángulos o círculos para comparar fracciones como conocimiento especializado, mientras que desde la perspectiva MTSK tendríamos el reconocimiento de dichas representaciones dentro del KoT y las ventajas y desventajas de ser usados en determinados escenarios dentro del PCK.

El conocer las *definiciones* de conceptos matemáticos y reconocer posibles errores en el enunciado de las mismas, en MKT está considerado como conocimiento común. Por ejemplo, en el análisis con este modelo, las definiciones exclusivas e inclusivas de triángulos isósceles y equiláteros sería conocimiento común. Sin embargo un profesor sería capaz, no solo de interpretar ambas como válidas, si no de ver la relación entre las mismas y las consecuencias que el uso de ambas podría tener sobre la enseñanza. En ese sentido se podría considerar conocimiento especializado, que en MTSK estaría incluido tanto en MK (relación entre definiciones) como en PCK (consecuencias en la enseñanza-aprendizaje).

Considerando los *procedimientos* como los algoritmos tradicionales y alternativos para resolver una cuestión determinada, estarían incluidos en el conocimiento común (MKT). Las características que tendría el objeto resultante asociadas a la tarea a resolver no se explicitan en este modelo, mientras que en MTSK estarían incluidas dentro de la categoría citada.

En MKT, buscar ejemplos adecuados para un tema concreto se considera conocimiento especializado. En MTSK se propone una ampliación de esta idea a través de los espacios de ejemplos, pues incluyen no solo un conjunto de ellos, sino la forma en que estos se interrelacionan. Los espacios de ejemplos forman parte del KoT, pero a su vez pueden manifestar KPM (conocimiento del valor limitado de los ejemplos y papel de los contraejemplos), KMT (secuencias de ejemplos) o KFLM (ejemplos para abordar dificultades de los estudiantes).

Finalmente podríamos decir, de forma general, que los conocimientos común y especializado de MKT se contemplan en su totalidad en el modelo MTSK, permitiendo este una ubicación más coherente de ciertos conocimientos en los subdominios del conocimiento didáctico del contenido y refinando la especialización de los mismos. Por otro lado, en el KoT de MTSK se amplía la categorización de conocimientos, ubicando nuevos contenidos como la fenomenología o el espacio de ejemplos y justificando la especialización de todos ellos.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Charles, R. I. y Carmel, C. A. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education*, 7(3), 9-24.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.

Climent, N., Carreño, E. y Ribeiro, C. M. (2014). Elementos de conocimiento matemático en estudiantes para profesor de matemática. El caso de los polígonos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1761-1769). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Flores, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*. Universidad de Huelva, España: Tesis no publicada.

Flores, E. Escudero, D., Montes, M. y Aguilar, A. (2015). Nuestra modelación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila y E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Gardiner, A. (1985). Infinite processes in elementary mathematics. How much should we tell the children? *The Mathematical Gazette*, 69, 77-87.

Liñán, M.M., Montes, M. A. y Contreras, L. C. (2015). Conocimiento especializado sobre la recta de una maestra de educación primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 335-343). Alicante: SEIEM.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Montes, M. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso*. Universidad de Huelva, España: Tesis no publicada.

Muñoz-Catalán, M.C., Contreras, L.C., Carrillo, J., Montes, M.A., Rojas, N. y Climent, N. (2015). *La Gaceta de la RSME*, 18(3), 589-605.

Polya, G. (1986). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas

Ribeiro, C.M., Muñoz-Catalán, M.C., Liñán, M.M. (2015). En I. M. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P. R. Richard (Eds.), *Actas cuarto congreso internacional ETM* (pp. 573-585), Universidad Complutense de Madrid, San Lorenzo del Escorial: Instituto Matemática Interdisciplinar.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Watson, A. y Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(2), 237–249.

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

3 CONOCIMIENTO DE LA ESTRUCTURA MATEMÁTICA (KSM)

Montes, M.A.
Climent, N.

Introducción

En este documento plasmamos no sólo lo evidente, una comunicación y su réplica, sino también la dinámica y filosofía de trabajo que rige el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva. En éste, es habitual que, en un ambiente de cordialidad, uno de los miembros presente sus ideas, sean más o menos conservadoras (dentro de las ideas del propio grupo), y otro replique, detectando aquellos elementos que le generan conflicto. Esto deriva en una discusión grupal sobre los elementos fundamentales de la aportación del primero, en pos de una mejora de dicho trabajo, a la vez que conlleva un avance en la conceptualización de MTSK, como grupo, y permite a todos los integrantes ser conscientes de los elementos en los que se está avanzando en cada momento.

Montes, M.A., Climent,N., (2016). Conocimiento dela estructura matemática (KSM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 21 -29). SGSE: Huelva.

Conocimiento de la Estructura Matemática

Miguel Á. Montes Navarro

1. Reflexiones sobre el Conocimiento de la Estructura Matemática: ¿Qué es?

El KSM constituye un subdominio, en el seno del modelo MTSK, que pretende abarcar el conocimiento que el profesor posee de las matemáticas que imparte, desde una doble perspectiva.

En primer lugar, contempla el conocimiento de cómo se relacionan aquellos elementos que se encuentra considerando en un momento concreto ligado a la enseñanza, con otros. Estas relaciones las denominamos conexiones, que de Gamboa y Figueiras (2014), definen como *"redes de enlaces que coordinan definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos para construir interconceptos*[4]*"* (p.340), dotadas de un carácter lógico y coherente. Estas conexiones, en el modelo MTSK, vienen caracterizadas en cuatro tipos:

Conexiones de Complejización: Este tipo de conexión se produce cuando un profesor reflexiona o usa un concepto desde una perspectiva más avanzada que la que corresponde al contexto escolar en el que se encuentra. Por ejemplo, un profesor familiarizado con los diferentes conjuntos numéricos, puede aceptar que cierto problema tiene una cantidad finita de soluciones al ser el conjunto considerado los números naturales, pero que en los reales podría tener una cantidad infinita. (e.g. La suma de las edades de María y su padre es mayor que 48 y menor que 51 y, al nacer María, su padre tenía más de 38 y menos de 41. Averigua las posibles edades, en la actualidad, de María y de su padre)

Conexiones de Simplificación: Estas conexiones emergen cuando un profesor reflexiona o usa un concepto desde una perspectiva más simple que la que corresponde al contexto escolar en el que se encuentra. Por ejemplo, en Montes, Carrillo, Contreras (2013), mostramos como un profesor, para ayudar a una alumna de segundo de Bachillerato a hallar los valores de x para los que se anula la expresión funcional de la

$$\frac{-\sqrt{(x^2+1)^3}+\dfrac{(x-1)-3(x^2+1)^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}}{(x^2+1)^3}$$

figura 1, recurría a una expresión mucho más simple, como (3 +1/4)/7. Esta expresión servía al profesor para establecer una equivalencia entre la aritmética necesaria al trabajar con variables y la aritmética, presumiblemente conocida por la alumna, de las fracciones, correspondiente a la primaria.

[4] Se entiende por interconcepto el conjunto de definiciones concretas de un concepto que forman una red coordinada y coherente.

Conexiones Auxiliares: En los dos casos anteriores, el uso que se hacía del concepto matemático al considerarlo desde una perspectiva más simple o compleja. En el caso de las conexiones de tipo auxiliar, el profesor se vale de un concepto o tema diferente del que trata, para añadir un elemento adicional, que sin ser el foco de la actividad matemática, aporta elementos que apoyan a ésta. Por ejemplo, en Vasco, Climent, Escudero, Montes, Ribeiro (2016), se muestra como un profesor universitario, en el seno de una clase sobre álgebra de matrices, enfocada en el producto de las mismas, plantea la función $f(x)= 2x^2-5x-3$. El uso que se hace de la función como elemento matemático es puramente auxiliar, puesto que no aporta a la actividad nada, salvo un término que identifica la expresión con la que se trabaja.

Conexiones de Contenidos Transversales: Este tipo de conexiones van ligadas a la naturaleza de algunos conceptos, que aparecen al tratar diferentes conceptos a lo largo de toda la matemática escolar. Por ejemplo, la idea de igualdad tiene diferentes significados, interrelacionados entre si, a lo largo de la matemática escolar, o el concepto de infinito, que sustenta epistemológicamente diferentes nociones matemáticas (continuidad, números decimales, etc.), o lógico-matemáticas (significado de “para todo”).

En segundo lugar, MTSK considera, o podría considerar, el conocimiento desde una perspectiva superior (Kilpatrick, 2008) de la matemática. Esta idea es una reinterpretación de las ideas de Klein (1908), proponiendo un conocimiento que trasciende la conectividad entre temas, ligado a la familiaridad con el territorio matemático (Ball, Bass, 2009; Jakobsen, Thames y Ribeiro, 2013), entendiendo que un profesor puede, y probablemente debe, poseer una visión global de las matemáticas escolares. Es en este caso en el que adquiere de sentido plenamente la expresión “conocimiento de la estructura matemática”, pues es dicha estructura general lo conocido, y no partes de la misma como las conexiones. Esta segunda componente aún no es contemplada explícitamente en MTSK, siendo la base de las reflexiones sobre el HCK (e.g. Ball y Bass, 2009; Ball, Thames y Phelps, 2008; Jakobsen, Thames y Ribeiro, 2013;Mosvold y Fauskanger, 2014).

2. El KSM en comparación con el conocimiento en el horizonte del MKT

¿Qué hay en HCK y no en KSM?

Ball y Bass (2009) consideran cuatro elementos fundamentales en el conocimiento del horizonte matemático:

1) Un sentido del entorno matemático que rodea a la “localización” actual de la instrucción

2) Las ideas matemáticas centrales/fundamentales y las estructuras

3) Las prácticas matemáticas “clave”

4) Los valores y sensibilidades matemáticas centrales

De estos elementos, el primero corresponde a la segunda perspectiva comentada en el apartado anterior, sin la profundización y especificidad que supone la caracterización de las diferentes tipologías de conexiones. El segundo se puede poner en relación con las conexiones de conceptos transversales de forma directa. Sin embargo, los dos últimos no se relacionan con el subdominio del conocimiento de la estructura matemática, pese a estar considerados en otros subdominios de MTSK (en KPM las prácticas), o en otros dominios del modelo (en las creencias los valores y sensibilidades matemáticas).

Asimismo, el HCK es una noción que genera dificultades en los investigadores para establecer con claridad su significado (Jakobsen, Thames, Ribeiro, Fauskanger y Delaney, 2012). Y que genera problemas de delimitación con otros tres subdominios: Conocimiento Común del Contenido, como el Conocimiento Especializado del Contenido, o el Conocimiento Curricular, que lleva a redefinir el propio subdominio (Jakobsen, Thames, Ribeiro, 2013).

¿Qué hay en KSM y no en HCK?

Esta pregunta tiene, desde nuestro punto de vista, dos respuestas en dos niveles diferentes: concreción a nivel local del subdominio, y coherencia a nivel global del modelo.

El subdominio del KSM, y especialmente la forma en que está organizado su contenido, aporta una mayor claridad a la conceptualización del conocimiento del profesor. Mientras que los esfuerzos de los investigadores que usan el HCK como constructo teórico tienden a orientarse en desarrollar una definición del propio subdominio y en estudiar el papel del HCK en las prácticas instruccionales, en el seno del grupo que desarrolla MTSK, el esfuerzo se ha orientado a describir profundamente el subdominio, sin tener (ni buscar) una definición que constriña o limite el contenido del subdominio, usando el vocablo “estructura”, que posee el nivel de concreción suficiente como para dar sentido al subdominio, pero permite cierta flexibilidad en lo que se considera en el subdominio y lo que no. Así pues, KSM aporta una mayor concreción en el contenido del subdominio, respecto a HCK.

En segundo lugar, hemos de mirar KSM como parte de los subdominios de MTSK frente al HCK como parte de los subdominios de MKT. Al tratar con el MKT, nos encontramos con que el conocimiento matemático se define como el compartido con otras profesiones (Conocimiento común del contenido, CCK), el específico (único) que posee el profesor de matemáticas (Conocimiento especializado del contenido, SCK), y el conocimiento del horizonte matemático. Esta clasificación genera un problema evidente de solapamiento. Si definimos el SCK como el conjunto complementario a CCK, y todos están dentro del conocimiento matemático, el tercer subdominio, inevitablemente, emerge entonces la pregunta ¿es específico (único) del conocimiento del profesor el HCK? independientemente de la respuesta, 1) la intersección de HCK con alguno de los otros dos subdominios será no vacía, 2) se requiere un esfuerzo de reflexión para responderla que desvía el propósito de la investigación.

Réplica sobre el Conocimiento de la Estructura de la Matemática

Nuria Climent

3. ¿Hacia dónde va esta réplica?

En el seno de estas jornadas, que entiendo suponen una parada para reflexionar sobre el trabajo que se ha desarrollado en el SIDM en torno al MTSK, la réplica a la presentación de un compañero sobre lo que considera es el desarrollo actual de uno de los subdominios toma el sentido de contrastar su interpretación con la de otro miembro del grupo (en este caso la mía). Hemos desarrollado gran parte del trabajo en grupo, con numerosas discusiones compartidas. Además, cada uno se ha embarcado en investigaciones y exploraciones en otros grupos/subgrupos. Es interesante discutir la construcción compartida desde las interpretaciones individuales.

En la tarea de compartir nuestra interpretación de un subdominio y en la de comunicarlo me parece importante tanto la definición y caracterización del mismo, como el conjunto de ejemplos que le asociamos. Estableciendo un paralelismo con la teoría de Vinner (1991) sobre la comprensión de un concepto geométrico, haré alusión a la (nuestra) *definición* e *imagen mental* del KSM.

El documento muestra madurez en la definición y delimitación del subdominio, con respecto de sus inicios. Así, para definirlo y caracterizarlo no es necesario hacer alusión al HCK, ni a su diferenciación con otros subdominios (como el KoT o el KMLS); por otro lado, los ejemplos son sólidos, muestran diversidad en cuanto a contenidos y niveles, y parecen provenir de la investigación sobre el conocimiento de profesores.

4. Definición del KSM

Se define el KSM desde una "doble perspectiva": conocimiento de conexiones y "conocimiento desde una perspectiva superior (Kilpatrick, 2008) de las matemáticas" (pp.1 y 2 del documento).

En el conocimiento de conexiones se diferencian cuatro tipos (de complejización, de simplificación, auxiliares y de contenidos transversales), que se presentan de manera conjunta. Respecto del documento de Carrillo *et al*. (2014) se omiten dos cuestiones. Una de ellas es la diferencia entre dos grupos de tipología de conexiones consideradas en el KSM: las que provienen de contemplar el contenido desde una perspectiva de complejidad[5] (de complejización y de simplificación), y las que se refieren a cone-

[5] Se hablaba de *Temporalidad* ("temporalidad, no como visión curricular, sino como visión secuenciadora que genera conexiones de complejización y simplificación" p. 76) si bien veo más claro hablar de complejidad que de temporalidad. En ese sentido me parece acertado el cambio del autor de temporalidad a complejidad (en Carrillo *et al.* (2014) se definían ambos tipos de conexiones en términos de relación con contenidos *posteriores* y *anteriores* del currículo). Los dos tipos de relaciones temporales se relacionaban con la matemática elemental desde un punto de vista avanzado (Klein, 1933) y la matemática avanzada desde un punto de vista elemental.

xiones interconceptuales propiamente dichas[6] (que podríamos entender en un mismo nivel de complejidad) (donde se sitúan los otros dos tipos referidos en el documento). Esta diferencia, que se reconoce en el documento en la definición de conexión auxiliar (p.2), además de clarificar los tipos, me plantea una cuestión. La segunda perspectiva del KSM (el conocimiento desde una perspectiva superior de las matemáticas), que el autor no está seguro de que se contemple actualmente en su contenido ("MTSK considera, o podría considerar..." p. 2) y parece ser para él la esencia del KSM ("Es en este caso en el que adquiere ~~de~~ sentido plenamente la expresión "conocimiento de la estructura matemática", p. 2), ¿en qué medida no está contemplado en el primer grupo de conexiones? En el documento no se desarrolla ni se presenta claramente la diferencia entre esta segunda perspectiva y la primera. ¿La diferencia reside en el conocimiento desde una perspectiva superior/avanzada y en cómo éste se engarza con perspectivas más elementales (como sugiere su denominación)? ¿En qué se diferencia entonces de las conexiones de complejización/simplificación? ¿Lo que las diferencia principalmente es el carácter de conocimiento más local (perspectiva de conexiones, conocimiento de algunos contenidos y sus relaciones) o global (conocimiento desde una perspectiva superior –"un conocimiento que trasciende la conectividad entre temas, ligado a la familiaridad con el territorio matemático" p. 2)? ¿Podríamos plantearnos hablar de profesores con un KSM a nivel más local de un contenido determinado o más global? (como hemos hablado en ocasiones de la posibilidad de hablar de un conocimiento del profesor en distintos niveles de profundidad). ¿Hablaría esto de la amplitud del mapa conceptual en que el profesor sitúa un contenido en relación con otros y/o de cómo relaciona distintos núcleos, tópicos y perspectivas de la matemática, incorporando una perspectiva avanzada? ¿O se trata por el contrario de una KSM general y otro local? (como en el KPM hemos hablado de conocimiento de prácticas matemáticas generales -como la diferencia entre demostrar y comprobar- y locales de tópicos -como el conocimiento de tipos de demostración asociado a determinados tópicos).

La otra cuestión que no encontramos en este documento respecto del de Carrillo *et al*. (2014) es la alusión a las conexiones interconceptuales como contraste con las intraconceptuales (Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu, 2011). Esta omisión es acertada en el sentido de no ser necesario en este momento definir el KSM desde el contraste con otros subdominios e interpretaciones en las que nos hemos basado para el desarrollo del MTSK. Esta diferencia ponía el énfasis en que las conexiones del KSM son interconceptuales y entre éstas en Carrillo *et al* (2014) se diferenciaban como dos tipos de conexiones interconceptuales especiales las auxiliares y de contenidos transversales. De este modo, se consideraban en este último documento otras conexiones interconceptuales (que no se engloban en el grupo de conexiones desde una perspectiva de complejidad, ni son auxiliares o de contenidos transversales). Es el caso (ejemplo de Carrillo *et al*, 2014) de la relación entre la definición de las razones trigonométricas y la idea de semejanza de triángulos.

[6] En el documento se alude a "La delimitación de objetos matemáticos que genera conexiones intraconceptuales e interconceptuales" (sólo se considerarán las segundas en el KSM.

Otra cuestión más general que me parece interesante discutir desde el punto de vista de la definición de KSM es la naturaleza que se le atribuye en las definiciones. Entiendo que si estamos hablando de conocimiento del profesor y nos hemos propuesto definir en término de conocimiento y no de acciones en las que éste subyace, merece pararse a analizar los términos en que se define el KSM en el documento:

"Conexiones de Complejización: Este tipo de conexión se produce cuando un profesor reflexiona o usa un concepto desde una perspectiva más avanzada..." (p.1).

"Conexiones de Simplificación: Estas conexiones emergen cuando un profesor reflexiona o usa un concepto desde una perspectiva más simple..." (p.1).

"...el profesor se vale de un concepto o tema diferente del que trata, para añadir un elemento adicional..." (p. 2, en la definición de conexiones auxiliares).

"El uso que se hace de la función como elemento matemático es puramente auxiliar..." (p. 2, en el ejemplo de conexión auxiliar).

En lugar de hablar de la conexión que se produce o emerge, o el uso de un concepto, ¿no sería deseable expresarnos en términos de "el profesor conoce la relación entre contenidos"?

5. Imagen mental del KSM

El repertorio de ejemplos que asociamos a un subdominio y categorías de éste forma parte de nuestra comprensión del mismo y nos ayuda a discutir sobre nuestra inter-comprensión. En ese sentido, me detengo en algunos de los ejemplos del documento.

No me encaja el ejemplo de las conexiones de complejización. Si se definen las conexiones como relaciones entre elementos que corresponden al tema que se está tratando con otros más avanzados, ¿qué elementos se relacionan en el ejemplo? Sí puedo identificar los elementos que se relacionan en el ejemplo de las conexiones de simplificación (las expresiones polinómicas fraccionarias con las operaciones con fracciones). Me planteo que si hablamos de conexiones como *"redes de enlaces que coordinan definiciones, propiedades, técnicas y procedimientos"* (como define el autor citando a Gamboa y Figueiras, 2014, p. 340), deberíamos poder identificar y representar en un mapa conceptual las definiciones, propiedades, técnicas y/o procedimientos que se relacionan, así como dichas relaciones. Por otra parte, en las definiciones de complejización y simplificación, sobre todo la primera, veo una doble perspectiva que hemos integrado en algunos documentos. Por un lado, relaciones entre contenidos (contenidos que se están tratando con otros "más avanzados" –clasificar por tamaños se relaciona con la escala) y, por otro, contemplar un mismo contenido o situación desde un punto de vista más avanzado (es el caso del ejemplo del documento).

En el caso del ejemplo de conexión auxiliar, la justificación de dicho tipo de conexión en términos de que se hace un uso auxiliar de un contenido (no central, no aporta nada a la actividad que se está realizando) me parece poco acertada. Interpretándolo en términos de conocimiento y analizando la situación que se planteaba en Vasco *et al*. (2016) el profesor parece conocer que el producto de matrices es una herramienta cuando se consideran funciones definidas sobre conjuntos de matrices. Este ejemplo parece menos claro que el usado en Carrillo *et al*. (2014) (el conocimiento del uso de ecuaciones para determinar las raíces de una función sería una conexión auxiliar entre ecuaciones y funciones).

Este último ejemplo, que coincide en varios documentos, y el de conexiones de simplificación (el mismo único ejemplo que he encontrado de esta categoría) refuerzan la necesidad de que ampliemos y compartamos el repertorio de ejemplos, que en algunos casos, quizás tengan que ser creados. Sería interesante desarrollar trabajos de investigación de corte teórico que revisen los ejemplos de un mismo subdominio en las investigaciones realizadas, haciendo un análisis transversal de los mismos por categorías, buscando su consistencia.

Por último el ejemplo de las conexiones de contenidos transversales presenta la particularidad de que en este caso la propia conexión recae sobre un contenido que la aglutina. ¿Sería interesante mantener la referencia que se ha hecho en otro momento a *gran idea*? Convendría explorar, a su vez, la noción de *interconcepto* citada en el documento.

6. KSM-HCK

Coincido con el autor en las relaciones que establece entre KSM y HCK. Como resultado de su comparativa, pareciera que en el MTSK se contempla todo lo que contiene el HCK. No entiendo la identificación del entorno matemático que rodea a la localización actual de la instrucción (primer elemento del HCK de Ball y Bass, 2009) con la segunda perspectiva del KSM (visión global) y a su vez con las categorías de las conexiones. Pareciera que se echa en falta esta segunda perspectiva en el KSM (aunque se le ve cabida).

Referencias

Ball, D. L. y Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures.* Disponible en: https://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2009/ Beitra ege/Hauptvortraege/BALL_Deborah_BASS_Hyman_2009_Horizon.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Gamboa, G. de, y Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, M., Fauskanger, J. y Delaney, S. (2012). Non SatisScire: To Know Is Not Enough. Documento presentado en la reunión anual de AERA. Vancouver, BC: Canadá.

Kilpatrick, J. (2008). *A Higher Standpoint.* Ponencia en el 11 International Congress on Mathematical Education. Monterrey: México.

Klein, F. (1933). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkteaus [Elementary mathematics from a higher standpoint]*. Berlin: Springer.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), Investigación en Educación Matemática XV (pp. 429-438). Ciudad Real: SEIEM.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Mosvold, R. y Fauskanger, J. (2014). Teachers' beliefs about mathematical horizon content knowledge. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Disponible en http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/mosvold2.pdf

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema 30*(54), 222-239.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

4 CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA (KPM)

Flores-Medrano, E.

El término Práctica ha tenido diversos usos en la investigación en Educación Matemática. Quizá el más empleado es para referirse a las acciones que suceden en el proceso de enseñanza-aprendizaje. De este se desprenden los términos práctica de enseñanza, cuyo énfasis está puesto en el profesor (e. g. Llinares, 2000), práctica de aula, que incluye los comportamientos de estudiantes y profesores, individualmente e interaccionando e incluso con algunos artefactos externos (e. g. Franke, Kazzemi y Battery, 2007), por mencionar algunos. También es usado como parte de términos acuñados en teorías de Educación Matemática, tal es el caso de Comunidades de Práctica (Wenger, 1998), Práctica Social (Cantoral y Farfán, 2003) o Práctica Matemática que es en el que profundizamos en este trabajo.

En la literatura, el término *práctica matemática* es empleado por Godino y Batanero (1998), quienes lo utilizan para referirse a las actividades matemáticas que se llevan a cabo en situaciones problemáticas que requieren de una matematización.

Definimos a una práctica matemática como aquella actividad matemática cuyo uso constituye un pilar en la creación matemática y que tiene un sustento lógico que nos permite abstraer reglas para esta. Su conocimiento por parte del profesor de matemáticas incluye, entre otras cosas, el que tiene acerca de qué es demostrar, justificar, definir, deducir, inducir..., también incluye el conocimiento de la lógica que sustenta cada una de estas prácticas, el del uso y funcionamiento del ejemplo y contraejemplo, en resumen, se trata un conocimiento sintáctico sobre cómo hacer matemáticas.

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30-34). SGSE: Huelva.

Estas características hacen que el Conocimiento de la Práctica Matemática esté íntimamente relacionado con otras dos denominaciones ampliamente conectadas. Se trata de la noción de *metaconocimiento* matemático (e. g. Robert y Robinet, 1996) y conocimiento sobre matemáticas (e. g. Ball y McDiarmid, 1990) en los cuales, Robert y Robinet (1996) consideran los métodos, estructuras y organización del conocimiento matemático.

En el Conocimiento de la Práctica Matemática que se plantea en el MTSK, y que usamos en este trabajo, se considera específicamente el matiz en los modos de producción y funcionamiento matemático, dejando la estructuración y organización como parte del Conocimiento de la Estructura Matemática.

De acuerdo con nuestra revisión bibliográfica, los estudios teóricos y empíricos que trabajan aspectos del conocimiento de la práctica matemática han tomado como base de estudio los fenómenos de argumentación, validación y justificación matemática. Ponen especial énfasis en la comprensión de la demostración matemática como un mecanismo que promueve un convencimiento interno a una persona, externo hacia un grupo o institucional a la disciplina (Godino y Recio, 2001).

Basados en la literatura, construimos una categorización del Conocimiento de la Práctica Matemática que se espera que, en posteriores estudios, permita profundizar en el conocimiento que tiene/usa/requiere el profesor a este respecto. Partimos de aquellas prácticas matemáticas que reconocimos en las investigaciones y buscamos aspectos que pudieran ser comunes y también aspectos complementarios que nos permitieron abstraer características. Somos conscientes de que dicha categorización no tiene el carácter de exhaustividad, estando abierta a la emergencia de nuevas categorías.

Las prácticas matemáticas a las que nos referimos son demostrar (consideramos aquí las ideas de argumentación, justificación y validación, por su similitud en cuanto al carácter de convencimiento, aunque reconocemos su diferencia en el uso de los criterios de verdad), definir, ejemplificar y usar heurísticos. Merece especial atención el uso que se hace de los contraejemplos ya que tienen rasgos peculiares de criterios de verdad (útil en el proceso de demostración), acotan a las definiciones y pueden usarse para clarificar a los propios ejemplos. Cada una de estas prácticas constituye una categoría en el sistema que aquí se presenta y se nutre de las características de la práctica (funciones, variedades y usos) y del conocimiento de la lógica argumental que está detrás de su uso. En este documento desarrollaremos de manera exhaustiva lo concerniente a la demostración y a la definición y daremos algunas pinceladas sobre la ejemplificación y el uso de heurísticos.

Algunos autores señalan que, pese a que la demostración muchas veces se centra en los niveles superiores de enseñanza matemática, resulta importante que aparezcan elementos de esta en niveles tempranos de formación (Ross, 1998; Schoenfeld, 1994) y, por lo tanto, que los profesores deberían conocer su naturaleza, funciones y constitución (Vicario y Carrillo, 2005).

Godino y Recio (2001) señalan que, en el contexto institucional de la clase de matemáticas, la demostración se basa en argumentaciones deductivas informales, argumentaciones no deductivas e incluso argumentaciones basadas en criterios externos de autoridad, y los teoremas que se intentan demostrar son siempre ciertos. Añaden que esto produce una visión platónica, tanto de los conocimientos matemáticos, como de los criterios de validez. Esta visión está muy relacionada con la que Flores (2007) categoriza como un esquema argumentativo autoritario. En dicha investigación, se presenta una construcción de esquemas argumentativos para diferenciar las formas en las que un individuo utiliza sus razonamientos durante una práctica argumentativa. Estos pueden ser *autoritarios,* cuando se apoyan en las afirmaciones hechas por alguna autoridad (el profesor, un libro de texto, una definición); *simbólicos,* en los que se utiliza un sistema de signos de manera superflua y poco consistente; *fácticos,* en los que se argumenta sobre la base de hechos evidentes a manera de explicación o justificación, a menudo expuestos como si fueran un algoritmo; *empíricos,* cuando son apoyados en hechos físicos o en dibujos (vistos estos como argumento y no como apoyo para argumentar), y *analíticos,* en los que se sigue una cadena deductiva. El uso de cualquiera de los esquemas no necesariamente implica llegar a una conclusión válida. No deben confundirse estos esquemas de argumentación con los tipos de demostración (contradicción, inducción, deducción, construcción, geométrica, etcétera) que también forman parte del conocimiento que consideramos en esta categoría, así como sus posibles usos y fundamentos.

En cuanto a las funciones de la demostración, de Villiers (1993) realiza una investigación con matemáticos en activo y propone que dichas funciones son la verificación (sobre la verdad de una afirmación), explicación (por qué es verdad y qué significados envuelven a una afirmación), sistematización (organización de resultados en un sistema axiomático), descubrimiento (posibilidad de surgimiento de nuevos resultados) y comunicación (de los resultados y de por qué son, o no, ciertos). Vicario y Carrillo (2005) dotan a este sistema de algunas sub-funciones en el trabajo con profesores de matemáticas, entre las que destacan la simplificativa y la didáctica, ambas pertenecientes a la jerarquía de la función explicativa.

Con respecto a la definición, Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros (2014) hacen una extensa revisión sobre lo que distintos autores consideran como caracterizaciones de la definición matemática. Las características encontradas con mayor consenso en las investigaciones consultadas fueron la precisión en la terminología-jerarquización (uso de términos básicos o previamente definidos); no circularidad (no hacer referencia al concepto en la propia definición); no ambigua (caracterización de manera unívoca de una clase de objetos); no contradictoria o estructuralmente inequívoca (las características empleadas deben ser consistentes); invariante bajo cambio de representación (un objeto pertenece a una clase de objetos, y es definible ahí, independientemente de su representación); equivalencia (se puede dar más de una formulación de un mismo concepto); elegancia (de entre las definiciones equivalentes, la más elegante es aquella que usa conceptos generales más básicos); minimalidad (no redundancia de las características, ninguna de las características es deducible del resto), y degeneración (ejemplos del concepto que no se ajustan a la idea intuitiva del concepto). Estos atributos encierran, además de una caracterización de la definición matemática, algunos aspectos de su uso como práctica y de las implicaciones en sus posibles variedades.

Con respecto a la noción de ejemplo como práctica matemática, partimos de la definición que hacen Ronda y Adler (2014) como un representante de un objeto matemático. Dicha definición se adecua a las tipologías que se pueden encontrar sobre los ejemplos (e.g. genérico, aislado en Godino y Recio, 2001). Hay que resaltar que para construir la sensibilidad teórica para esta práctica es necesario desligar la idea de uso didáctico del ejemplo, estudiada por diversos autores (e.g. Watson y Mason, 2002), y que ya ha sido abordado en otros capítulos de este publicación, del estudio de la naturaleza sintáctica del ejemplo.

Para resolver un problema, un profesor utilizará, por lo menos, su conocimiento sobre los temas matemáticos involucrados. Pero hay un conocimiento de una naturaleza diferente al de conocer los objetos matemáticos involucrados y es el conocimiento de *la Resolución de Problemas* como una abstracción de dicha actividad matemática. Es precisamente esto lo que se considera en el KPM. Por ejemplo, una abstracción sobre la resolución de problemas es planteada por Schoenfeld (2011), quien establece que el proceso de solución de problemas involucra cuatro aspectos: recursos, orientaciones, metas y toma de decisiones. Una serie de estrategias más puntuales en su aplicación, pero aun generales en su concepción en la resolución de problemas, son los llamados heurísticos. El uso de heurísticos forma una parte esencial en la resolución *inteligente* de problemas matemáticos.

Referencias

Ball, D.L. y McDiarmird, G. (1990). The subject matter preparation of teachers. En W.R. Houston (Ed.), *Handbook of Research on Teacher Education* (pp. 437-449). New York: Macmillan.

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (2003). Mathematics Education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 255-270.

Escudero, I.M., Gavilán, J.M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 7-32.

Flores, A.H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, 19(1), 63-98.

Franke, M.L., Kazemi, E. y Battery, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). New York: Springer.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405-414.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. da Ponte y L. Serrazina (Eds.), *Educaçao matemática em Portugal, España e Italia* (pp. 109-132). Lisboa: SEM-SPCE.

Robert, A. y Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(2), 145-176.

Ronda, E. y Adler, J. (2014). Mathematical Examples, Tasks, and Talk (METT): A Discursive Lens for Studying and Crafting Lessons. En S. Ulep, A. Punzalan, M. Ferido y R. Reyes (Eds.), *Lesson Study: Learning More Together, Growing in Practice Together* (pp. 249-280). UP NISMED.

Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American Mathematical Monthly*, 3, 252-255.

Schoenfeld, A.H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal for Mathematical Behavior, 13,* 55-80.

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York: Routledge.

Watson, A. y Mason, J. (2002). Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. En A.D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 377-384). University of East Anglia, Norwich, UK: PME.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: learning, meaning and identity*. Cambridge University Press

Vicario, V. y Carrillo, J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración. En A. Maz, B. Gómez, y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, IX* (pp. 145-152). Córdoba: SEIEM.

Villiers, M. de (1993). El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-30.

5 CONOCIMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (KMT)

Escudero-Ávila, D.
Contreras, L.C.
Vasco, D.

1. Antecedentes

En modelos que consideran el conocimiento específico relacionado con la enseñanza de la matemática, distinto del conocimiento matemático en sí mismo, es común encontrar descripciones referentes a conocimientos pedagógicos inmersos en contextos de actividades matemáticas, es decir, existe una tendencia a definir el conocimiento de matemáticas y de la enseñanza como elementos separados que se complementan, e intentar determinar las habilidades o tareas específicas de enseñanza que son propias del profesor de matemáticas más que del conocimiento didáctico que implican estas tareas o que permiten generar dichas habilidades (e. g. Ball, Thames y Phelps, 2008; Shulman, 1986).

Shulman (1986) se refirió inicialmente a las componentes del PCK como el conocimiento de las formas más efectivas de representación y formulación de un contenido, de manera que este pueda ser comprensible para otros, refiriéndose a las analogías más poderosas, a las ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones utilizadas en la enseñanza. Menciona, además, que estas formas de representación "potentes" no son únicas, por lo que el profesor debe conocer distintas alternativas para utilizar a conveniencia.

Las componentes que se asocian más comúnmente a este tipo de conocimiento son los conocimientos del profesor sobre estrategias específicas de enseñanza, las formas más efectivas de representación de ideas y el conocimiento de distintas tareas y actividades relacionadas con la enseñanza de un determinado contenido matemático. Estas componentes han sido utilizadas y reinterpretadas por otros autores, muchos de los cuales se han centrado en ampliar la definición de *las representaciones* como recursos

Escudero-Ávila, D., Contreras, L.C., Vasco, D. (2016). Conocimiento de la enseñanza de la matemáticas (KMT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 35-41). SGSE: Huelva.

para la instrucción, o las llamadas *representaciones instruccionales*, englobando el conocimiento que tiene el profesor de estas representaciones y las formas en las que las interpreta y utiliza en el aula, así como los vínculos que existen entre estos conocimientos con otros de este mismo dominio pedagógico (Pinto y González, 2008).

2. Caracterización del KMT

El subdominio denominado *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT[7]) forma parte del conocimiento didáctico del contenido (PCK[8]) del modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Se define como el conocimiento que tiene el profesor sobre las características del contenido matemático como objeto de enseñanza, englobando sólo lo que el profesor sabe sobre las distintas posibilidades de enseñanza, condicionadas por la naturaleza misma del contenido (Escudero-Ávila, 2015). No se trata de conocimiento de matemáticas por un lado y de la enseñanza por otro, sino que se incluyen tan solo aquellos conocimiento en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza (excluimos, por ejemplo, estrategias de enseñanza que pueden resultar potentes desde la visión de la pedagogía en general, como el trabajo en equipo) (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014). Consideramos importante identificar tareas asociadas al KMT, pero lo realmente necesario y lo que nos interesa es reconocer el conocimiento que encierran dichas tareas.

3. Categorías del KMT

Es importante señalar que, a diferencia de otros modelos de conocimiento, hemos dejado de utilizar el término representación o representación instruccional (e. g. Llinares, Sánchez y García, 1994; Mitchell, Charalambous y Hill, 2014), sustituyéndolo por la categorización que presentamos en este apartado. Esto se debe a que hemos decido ubicar dentro del conocimiento de los temas (KoT), la idea de registro de representación que usa Duval. Además consideramos que el término de representación instruccional es definido tan ampliamente que podría confundirse entre el conocimiento matemático, el conocimiento para la enseñanza y el conocimiento sobre el aprendizaje del contenido matemático que implica una determinada tarea profesional del profesor de matemáticas.

A continuación mostramos las categorías que hasta el momento han sido identificadas para este subdominio y, al igual que en el caso del KFLM, presentamos algunas modificaciones con respecto a categorizaciones anteriores, realizadas sobre la base de la discusión de resultados de investigaciones empíricas en las que se utilizaban las anteriores categorizaciones (e. g. Escudero-Ávila, 2015; Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano y Montes, 2014).

[7] Siglas en inglés correspondientes a Knowledge of Mathematics Teaching.
[8] Siglas en inglés correspondientes a Pedagogical Content Knowledge.

Conocimiento de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático

Al igual que los demás subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido definidos en el MTSK, este puede ser un conocimiento fundamentado en teorías que han resultado de la investigación en Educación Matemática o en la observación y reflexión de la actividad matemática en el aula, por lo que puede provenir tanto de investigaciones, como de las propuestas didácticas que tiene el currículo, o de la experiencia previa del profesor. De acuerdo con Schoenfeld y Kilpatrick (2008), estas teorías condicionan la actuación del profesor y el uso que hace del conocimiento.

Consideramos importante explicitar aquí la incorporación de una categoría que dé cabida al conocimiento de las formas de enseñanza asociadas a un determinado contenido matemático. En este caso se trata de la inclusión de elementos teóricos que derivan directamente de los estudios específicos de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica, correspondientes a teorías de enseñanza. Por ejemplo, derivado de sus lecturas y participaciones en el curso de formación, David, un profesor de bachillerato, participante de un curso virtual de formación continua, diseña una actividad para abordar en clase el concepto de función lineal y de función cuadrática en la que manifiesta conocimientos sobre elementos teóricos referentes a las características de los problemas abiertos (Escudero-Ávila, 2015; Escudero-Ávila, Carrillo, Flores-Medrano, Climent, Contreras y Montes, 2015):

"Me basé en el escrito que habla de las características de los denominados problemas abiertos (Garret, 1988)[9] [...] En los problemas abiertos debemos tener en cuenta los siguientes criterios:

1) No se ofrece explícitamente toda la información requerida para resolverlo, pero el estudiante debe poseer la información para resolverlo.

2) El estudiante debe ser creativo, y muy original para desarrollar la actividad, porque en algunas ocasiones el problema es ambiguo.

3) Hay libertad para seleccionar restricciones, modelos, métodos matemáticos diferentes. La propuesta de diferentes soluciones debe ir acompañada de las correspondientes ventajas y desventajas. "

Consideramos entonces, que David conoce una teoría formal de enseñanza con respecto al trabajo con los problemas abiertos. En esta categoría incluimos también el conocimiento del profesor sobre teorías personales de enseñanza y resulta necesario diferenciarlas de las concepciones del profesor sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Conocimiento de las características matemáticas específicas de recursos didácticos para la enseñanza del contenido matemático

En esta categoría nos referimos al conocimiento de características matemáticas específicas de recursos y materiales físicos o virtuales utilizados para la enseñanza de un contenido particular y no solo al conocimiento

[9] El profesor se refiere al documento: *Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo de ciencias* de R. Garret, publicado en 1988 en la revista Enseñanza de las Ciencias, 6 (3), 224-230.

de un recurso como tal. Por ejemplo, en el caso de David, el profesor hace referencia a que en la actividad:

"Se usarán recursos de lápiz, y papel inicialmente, y para la verificación o validación de la actividad se utilizará un software que puede ser GEOGEBRA o CABRI".

Sin embargo, el hecho de que David conozca un software para hacer gráficas no implica necesariamente que tenga conocimiento sobre las características matemáticas y didácticas de GEOGEBRA o CABRI como recurso virtual para la enseñanza de las funciones lineales y cuadráticas, lo que estaría considerado como parte de esta categoría.

Podríamos decir entonces que David conoce dos software cuyo diseño y uso está pensado específicamente para la enseñanza de las matemáticas, pero no sabemos cuáles son las características matemáticas específicas que conoce de éstos, conocimiento que le permitiría elegir uno de ellos como más o menos propicio para la enseñanza de un tema específico, por ejemplo la noción de función lineal o función cuadrática.

Conocimiento de las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza del contenido matemático.

Como hemos mencionado anteriormente, el profesor necesita conocer los instrumentos que tiene disponibles para abordar el contenido, sus potencialidades, sus limitaciones y las repercusiones que tendría el usarlo como medio para presentar un contenido matemático. Por lo cual se incluyen en esta categoría los conocimientos sobre la potencialidad matemática que pueden tener ciertas secuencias de actividades, tareas, estrategias o técnicas didácticas, que los profesores consideren potentes en el abordaje de un contenido matemático y un momento particular de enseñanza, así como sus limitaciones, o los obstáculos que deberán superarse para que la estrategia alcance el objetivo planteado. Los ejemplos elegidos para representar un contenido, las metáforas, las situaciones y las explicaciones, son utilizados de acuerdo al conocimiento que se tenga sobre sus características y repercusiones en la enseñanza del contenido.

Consideramos aquí aquellos elementos que denotan la intencionalidad de enseñanza del profesor en un tema determinado, por ejemplo con respecto a las ayudas que puede proporcionar un profesor, saber en qué momento y qué tipo de ayuda puede darse a los estudiantes, así como los ejemplos que pueden ser más potentes de acuerdo al momento e intencionalidad de la clase o conocer alguna tarea específica para propiciar el aprendizaje de un contenido matemático. (Flores-Medrano *et al*., 2014)

Incluimos el conocimiento de la adecuación de determinados ejemplos para cada etapa o contexto determinado, el conocimiento del abordaje de una secuencia estructurada de ejemplos para ayudar a entender el significado de un contenido matemático, así como el conocimiento de condiciones específicas del aula a la que se dirigen determinadas secuencias de aprendizaje, las cuales norman el proceder del profesor, todo esto en función del contenido matemático que se aborda.

Estos son los conocimientos que permitirán al profesor elegir un determinado material para el aprendizaje de un concepto o un procedimiento matemático, le capacitan para seleccionar los ejemplos más potentes (de sus espacios de ejemplos) o elegir un libro de texto en función de los beneficios que tenga este como recurso de enseñanza.

Como ejemplo de esta categoría podemos continuar con el caso de David, quien elabora una actividad en la que utiliza su conocimiento sobre una secuencia de tareas que permiten explorar las características específicas de las funciones lineales y relacionarlas con las de las funciones cuadráticas. Además, dada la evidencia en la estructura de su diseño y participaciones en las discusiones del curso en las que afirma que espera que el estudiante:

“Al pasar de un registro al otro [...] establezca las relaciones de variable dependiente-independiente, y pueda observar cómo se podría [...] modelar a partir de este recurso [...] gráfico”

Reconocemos el conocimiento que tiene el profesor sobre el tránsito de un registro de representación a otro como estrategia didáctica. Esto lo justifica a través de la búsqueda de relaciones entre ellos por parte de los estudiantes para el modelado del problema (Escudero-Ávila, 2015).

4. El KMT y el KCT

El KCT *(Knowledge of content and teaching)* que se define en el modelo de Ball y colaboradores (*Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT) contempla el conocimiento que combina lo que se sabe acerca de la enseñanza del contenido con el conocimiento sobre el contenido, el cual permea directamente sobre acciones que realiza el profesor como el diseño de secuencias, permite al profesor elegir ejemplos pertinentes para momentos distintos de la clase, y sirve para el reconocimiento de ventajas y desventajas de usar ciertas representaciones en la enseñanza de un contenido (Ball *et al*., 2008). Al igual que en otros subdominios, esta definición se refiere a actividades o habilidades que el profesor puede realizar o adquirir respectivamente, al poseer esta clase de conocimiento, sin hablar del conocimiento en sí mismo.

Los autores del MKT mencionan también que, dado que para su labor los profesores deben realizar tareas de anticipación a las respuestas de sus estudiantes, elección de ejemplos prediciendo las posibles respuestas, e interpretación de las respuestas de los estudiantes, el profesor requiere de una interacción entre el conocimiento matemático específico y la familiaridad con los estudiantes y su pensamiento matemático, este conocimiento es denominado como conocimiento especializado del contenido (*Specialized content knowledge*-SCK), el conocimiento que combina los saberes acerca de los estudiantes y los saberes acerca de las matemáticas (Ball *et al*., 2008; Sosa, 2010). Observamos entonces que el SCK y el KCT se definen basados en las prácticas del profesor como profesional, lo que dificulta la separación y reconocimiento de estos conocimientos para su análisis.

Consideramos que es importante la delimitación de este subdominio en el MTSK, puesto que este tipo de conocimientos permite resaltar matices importantes con respecto al conocimiento especializado del profesor, que son quizá los más evidentes o sencillos de reconocer dentro de la práctica docente, puesto que están reflejados directamente en aspectos prácticos como el diseño de tareas o el uso de materiales como libros de texto y software, a diferencia de los conocimientos pertenecientes al KPM por ejemplo, los cuales están implícitos en el trabajo matemático del profesor y requieren de una interpretación por parte del investigador. Sin embargo, al estar reflejados en este tipo de actividades es necesario preguntarse por el conocimiento implicado en la tarea y no quedarse en la identificación de la tarea. Al igual que en el KFLM, al focalizar la atención en los aspectos de enseñanza directamente relacionados con el contenido matemático reconocemos aspectos inherentes a la práctica del profesor de matemáticas y nos separamos del conocimiento de pedagogía y didáctica general.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching : What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. A. (Eds.). (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77.

Escudero-Ávila, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Universdidad de Huelva, España: Tesis no publicada.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Llinares, S., Sánchez, V. y García, M. (1994). Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. *Revista de Educación, 30*(4), 199-225.

Mitchell, R., Charalambous, C. y Hill, H. (2014). Examining the task and knowledge demands needed to teach with representations. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(1), 37-60.

Pinto, J. y González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática, 20*(3), 83-100.

Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En T. Wood, y D. Tirosh (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-345). Rotterdam: Sense Publishers.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14.

Sosa, L. (2010). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos.* Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/FZPmof. Huelva, España: Universidad de Huelva.

6 CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KFLM)

Escudero-Ávila, D.
Climent, N.
Vasco, D.

1. Antecedentes

Al momento de hablar de lo que se considera parte del conocimiento didáctico se hace alusión a un conocimiento sobre enseñanza y aprendizaje del contenido, y en ambos casos hay una tendencia a hablar del *conocimiento necesario para* realizar tareas específicas de la docencia más que de los conocimientos que se ponen en juego al enfrentar estas tareas.

Con respecto a la interpretación que se hace de los procesos de construcción de conocimiento matemático, se establecen dos tipos de relaciones en la literatura: *profesor – estudiante*, que se enfoca en el conocimiento que tiene el profesor acerca del estudiante como sujeto cognoscente; y *estudiante – contenido* que se refiere al conocimiento del profesor sobre el propio proceso de aprendizaje. Estas dos formas de interpretar las relaciones implicadas en los procesos de aprendizaje producen cambios importantes en los procesos de análisis del conocimiento del profesor (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes y Carrillo, 2015). Consideramos que este subdominio tiene una tendencia más marcada hacia la perspectiva *estudiante-contenido.* Lo cual no implica que no se consideren también aspectos relacionados con el estudiante como sujeto cognoscente, sino que no se pone como centro de este conocimiento.

Coincidimos con los investigadores (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Pinto, 2010) que reconocen la importancia de poseer un conocimiento que le permita al profesor desarrollar las habilidades necesarias para interpretar las producciones de los estudiantes o desarrollar la capacidad de anticipar razonamientos posibles, así como de asociar distintos contextos que influyen sobre el aprendizaje con el fin de obtener un control sobre el proceso de aprendizaje de sus estudiantes y de entender la procedencia de dichos razonamientos, de los errores, las dificultades de aprendizaje o de concepciones

Escudero-Ávila, D., Climent, N., Vasco, D. (2016). Conocimiento de las carecterísticas del aprendizaje de las matemáticas (KLFM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp.42-48). SGSE: Huelva.

erróneas de sus estudiantes. Sin embargo, más que entender las tareas que enfrenta el profesor en su práctica, nos interesa saber cuáles son los conocimientos que se ponen en juego al enfrentarlas o al intentar desarrollar estas habilidades específicas, lo cual se manifiesta en la definición misma de las categorías y los subdominios del modelo.

2. Caracterización del KFLM

El subdominio denominado conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM[10]) forma parte del conocimiento didáctico del contenido (PCK[11]) del modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Su foco principal lo constituye el contenido matemático como objeto de aprendizaje, lo cual no implica que se le reste importancia al papel del estudiante, sino que nos interesa el conocimiento inherente a las características de aprendizaje derivadas de la interacción del estudiante con el contenido matemático y no las características del estudiante en sí mismo (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014).

Se define el KFLM como el conocimiento que tiene el profesor sobre las características inherentes a un contenido matemático en particular o a la matemática en general como objeto de aprendizaje, y de las características de aprendizaje derivadas de la interacción de los estudiantes con el contenido matemático (Escudero-Ávila, 2015).

Consideramos que esta definición y delimitación ayuda a que en el análisis se puedan establecer relaciones claras entre el conocimiento de características didácticas (en este caso de aprendizaje), específicas de un contenido matemático y el conocimiento del contenido en sí mismo. Esto nos ha permitido mantener la idea de describir solo el conocimiento específico del profesor de matemáticas y dejar fuera del modelo conocimientos referentes al aprendizaje en general, los cuales, aunque son importantes para la práctica profesional de un profesor, consideramos de naturaleza distinta a los que se incluyen en el MTSK.

3. Categorías del KFLM

A continuación presentamos las categorías que hasta el momento han sido identificadas para este subdominio. Se han realizado algunas modificaciones con respecto a categorizaciones anteriores (e. g. Escudero-Ávila, 2015), con base en la discusión de resultados de investigaciones empíricas en las que se utilizaban las anteriores categorizaciones, principalmente la presentada en Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano y Montes (2014).

Conocimiento de las formas de interacción con el contenido matemático

Se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los no habituales (Sosa, Aguayo y Huitrado, 2013).

[10] Siglas en inglés correspondientes a Knowledge of Features of Learning Mathematics.
[11] Siglas en inglés correspondientes a Pedagogical Content Knowledge.

Como ejemplo de las categorías del KFLM, citaremos el caso de David, un profesor de bachillerato, que dentro de las actividades de un curso virtual de formación continua diseña una actividad para abordar en clase el concepto de función lineal y de función cuadrática. La actividad consiste en guiar al estudiante hacia la modelación matemática que represente el comportamiento de un fenómeno físico de llenado de un recipiente a velocidad constante para el caso de la función lineal y de la variación de un área con perímetro constante para el abordaje de la función cuadrática (Escudero-Ávila, 2015).

David reconoce procedimientos específicos que considera se llevan a cabo en su actividad de acuerdo con la estructura misma del diseño y sobre las consecuencias que esta estructura podría tener en la forma en la que los estudiantes interactúan con el contenido matemático:

“Pueden llegar no solo a obtener un algoritmo, [...] determinar las diferentes relaciones que se pueden dar, determinar cómo me puede variar una función con respecto a uno de los parámetros, qué puedo obtener de una gráfica, cuál es el proceso para obtener un modelo matemático” etc...

Resaltemos aquí la estrecha relación entre la forma en la que los estudiantes se relacionarán con el contenido matemático (KFLM) y la estructura del diseño que propone David, el cual dirige al estudiante a llevar a cabo ciertos pasos para lograr el objetivo de resignificación del concepto (KMT).

Esta categoría incluye también el conocimiento del profesor sobre los posibles modos o formas específicas de aprehensión y construcción de conocimiento asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Asociamos aquí el conocimiento de estructuras o teorías sobre el desarrollo cognitivo del estudiante, tanto para la matemática en general como para contenidos particulares.

La consideración explícita en este subdominio del conocimiento sobre constructos teóricos provenientes de la experiencia profesional o de la investigación sobre la generación de marcos que permitan explicar los procesos de construcción de conocimiento matemático desde el punto de vista de la enseñanza y de su aprendizaje, da cabida al análisis de los conocimientos que pueda tener un profesor sobre algunos de los resultados derivados de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica. Esto nos permite saber cómo los usa el profesor e identificar posibles vías de desarrollo de los mismos. Por ejemplo, David reconoce que:

“Para un mejor aprendizaje del conocimiento del concepto de función cuadrática es más probable una mejor aprehensión de este, cuando se ve primero el concepto de función lineal”

El profesor utiliza este conocimiento para elaborar y secuenciar el diseño de las tareas en su actividad. Esto lo justifica comentando que una vez que los estudiantes han podido trabajar con las funciones lineales y han reflexionado sobre sus características será más sencillo repetir el proceso para las cuadráticas observando sus diferencias. Consideramos entonces que el profesor conoce una teoría personal sobre el aprendizaje del concepto de función cuadrática.

Además, David utiliza en el desarrollo de su actividad y sus participaciones en el curso de formación, algunos términos que provienen de la Teoría Socioespistemológica como “práctica de modelación”, “discurso matemático” y “resignificación”, argumentando que:

“La Socioespistemología como teoría me permite mirar la educación matemática no como una práctica donde solamente se transmiten conocimientos, se expresan postulados, se solucionan problemas, se realizan demostraciones, sino además me permite mirar más allá de los conceptos, cuál es el trasfondo de ellos, me permite transformar, me permite llevar los conceptos a otros contextos, me acerca al mundo real”.

Estas participaciones nos ofrecen evidencias de que David tiene conocimiento de constructos teóricos provenientes de la literatura de investigación formal acerca del aprendizaje de las matemáticas aunque no podemos decir que estos se correspondan estrictamente con las definiciones formales de dichos constructos.

Adicionalmente, aquí se categorizan los conocimientos del profesor sobre el lenguaje o vocabulario formal o informal (común o en proceso de adquisición del nuevo contenido matemático – mezcla del lenguaje común con el matemático), así como los gestos o figuras usadas comúnmente por los estudiantes al abordar un determinado contenido. Podría englobarse también el conocimiento que tiene el profesor sobre los detalles de la resolución de un problema, susceptibles de desviar la atención de los estudiantes para llegar a la solución del mismo o, sobre los cálculos matemáticos que podrían hacer mecánicamente los estudiantes sin saber realmente lo que están haciendo. Por ejemplo el saber que los problemas que refieren una comparación de cantidades puede llevar a los estudiantes a realizar un uso indiscriminado de la regla de tres sin reflexionar sobre el tipo de relación que existe entre ellos.

Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje del contenido matemático

La creciente cantidad de investigación cognitiva sobre el aprendizaje del estudiante, desarrollada en las últimas décadas, ha producido muchos resultados enfocados a la identificación de concepciones, errores, obstáculos y dificultades de los estudiantes y de su pensamiento matemático (Event y Tirosh, 1995). Esto nos lleva a incluir en esta categoría los conocimientos sobre los errores, obstáculos y dificultades, típicas y atípicas, relacionadas con las características y procesos de aprendizaje (Muñoz-Catalán, 2010; Sosa, 2010), así como las preconcepciones o concepciones erróneas que existen sobre un determinando tema. Sin embargo, es importante señalar, que incluimos solo las fortalezas y dificultades que son propias del contenido matemático específico, es decir, las que están asociadas directamente con las características matemáticas y no pedagógicas del contenido.

Dentro de esta categoría se ubica también el conocimiento de las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido. Además, hemos querido considerar aquí el conocimiento de características que podrían utilizarse como ventajas o potencialidades aprovechables para el aprendizaje, asociados a la naturaleza de la matemática de un contenido particular. Al igual que en los demás subdominios del MTSK, estos conocimientos pueden estar asociados al contexto específico en el cual se aprende el contenido matemático, de manera que puedan reconocerse distintos matices en las características de aprendizaje de un grupo particular de individuos o de un lugar específico, así como a estudiantes particulares (Pinto y González, 2006).

Por ejemplo, en el caso de David, identificamos un conocimiento inherente al concepto de función en sí mismo, puesto que afirma que es probable que surjan dificultades en el proceso de aprendizaje de la función, lo que atribuye a: "La variedad de sus representaciones en diferentes contextos, y a su forma algorítmica".

La preocupación del profesor por superar esta dificultad puede verse reflejada en el diseño que propone, en el cual busca generar oportunidades para trabajar con distintos registros de representación de las funciones que permitan al estudiante establecer relaciones entre variables.

Conocimiento de los intereses y expectativas de los estudiantes sobre el contenido matemático

Se refiere a los conocimientos que tiene el profesor sobre las expectativas e intereses que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas, y el conocimiento sobre las preconcepciones de facilidad o dificultad asociadas comúnmente a las distintas áreas de las matemáticas. Por ejemplo, David afirma que:

"Las actividades más llamativas para los estudiantes son aquellas que tienen relación con las ciencias naturales, como las relacionadas con caída libre, movimientos, y aquellas donde la medición interviene de una manera primaria"

Esta afirmación lleva al profesor a deducir que la modelación de fenómenos "reales" fomentará en el estudiante el establecimiento de relaciones entre las matemáticas con un contexto atractivo y cercano, y que esto le permitirá construir un ambiente propicio para el trabajo matemático, a través de simulaciones con entornos referentes a situaciones cotidianas. Tomando en cuenta que David liga directamente el trabajo de modelación de fenómenos al tratamiento de las funciones en distintos registros de representación, pensamos que esto puede ser considerado como un conocimiento acerca de los intereses y expectativas de los estudiantes con respecto al trabajo con funciones.

4. El KFLM y el KCS

El KCS (*Knowledge of content and students)* que se define en el modelo de Ball y colaboradores (*Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT), pone el foco sobre el conocimiento que tiene el profesor acerca del estudiante como aprendiz de matemáticas, lo cual se refiere a una relación de tipo *profesor – estudiante*:

"Combina conocimiento acerca de los estudiantes y conocimiento acerca de matemáticas [... algunas tareas del profesor] requieren una interacción entre un entendimiento específico de la matemática y familiaridad con los estudiantes y sus pensamientos matemáticos. El conocimiento de estudiantes comunes es central" (Ball, Thames y Phelps, 2008).

En el MTSK el foco central del conocimiento perteneciente a este y a los demás subdominios que componen el conocimiento especializado debe estar en el contenido matemático. Así, el KFLM centra la atención en los conocimientos de las características de aprendizaje inherentes al contenido matemático. Se pretende entonces, reconocer el conocimiento sobre las características de aprendizaje derivadas de la interacción del sujeto que aprende con el contenido a aprender, dejando en segundo plano las características del sujeto en sí mismo, manteniendo el foco en el contenido matemático como objeto de aprendizaje (Escudero y Carrillo, 2014; Escudero-Ávila, Carrillo, Flores-Medrano, Climent, Contreras y Montes, 2015; Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2015).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching : What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. A. (Eds.). (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77.

Escudero-Ávila, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Huelva, España: Tesis no publicada.

Escudero, D. y Carrillo, J. (2014). Knowledge of features of learning mathematics as part of MTSK. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan, (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 6, pp. 306). Vancouver, Canada: PME.

Even, R. y Tirosh, D. (1995). Subject-Matter Knowledge and Knowledge about Students as Sources of Teacher Presentations of the Subject-Matter. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), 1-20.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Carrillo, J. (2015). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los espacios de trabajo matemático? En I.M. Gómez, J. Escribano, A. Kuzniak y P.R. Richard (Eds.), *Espacio de Trabajo Matemático. Actas del Cuarto Simposio Internacional ETM* (pp.471-482). Madrid: Instituto de Matemática Interdisciplinar.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Muñoz-Catalán, M.C. (2010). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/OA4ydJ. Huelva, España: Universidad de Huelva

Pinto, J. E. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Salamanca, España: Tesis no publicada.

Pinto, J. y González, M. (2006). Sobre la naturaleza conceptual y metodológica del conocimiento del contenido pedagógico en Matemáticas. Una aproximación para su estudio. En M. Bolea, M. Moreno, y M. González (Eds.). *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 237-255). Huesca, España: SEIEM.

Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In T. Wood, y D. Tirosh, *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 1-35). Sense Publishers.

Sosa, L. (2010). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/FZPmof. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Sosa, L., Aguayo, L. y Huitrado, J. (2013). KFLM: Un entorno de Aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). México D. F.: Díaz de Santos.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 173-189.

7

CONOCIMIENTO DE LOS ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (KMLS)

Escudero-Domínguez, A.
Carrillo, J.

1. Antecedentes

La relevancia de considerar el conocimiento que un profesor tiene acerca de lo que está estipulado que aprenda un estudiante y el nivel conceptual con el que se espera que lo asimile en un determinado momento escolar ha sido reflejada por diversos autores.

Shulman señala que el conocimiento curricular está *representado por la totalidad de programas diseñados para la enseñanza de asignaturas y tópicos concretos en un nivel determinado, la variedad de materiales instruccionales disponibles en relación a dichas asignaturas y tópicos, y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso de un currículum especial o un material determinado en unas circunstancias concretas* (1987, p. 10). Por otro lado, el equipo de Michigan, en su modelo MKT**,** señala que el *subdominio de contenido y curriculum (KCC) está representado por el conjunto de programas que se diseñan para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado, la variedad de materiales educativos disponibles en relación con los programas, y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios* (Escudero, Flores y Carrillo, 2012, p. 36).

Escudero-Domínguéz D., Carrillo, J. (2016). Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 49-54). SGSE: Huelva.

2. Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

El *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS),* subdominio del MTSK, comparte con los mencionados de Shulman y MKT que *comprende los contenidos propuestos en las normativas curriculares de los niveles de enseñanza (conocer qué indica el currículo que debe aprenderse en cada nivel) y conocer los materiales o recursos que proponen las normativas para abordar los contenidos* (Rojas, 2014, p. 63), pero el término estándares amplía la referencia del currículo oficial (Escudero-Ávila, Carrillo, Flores-Medrano, Climent, Contreras y Montes, 2015).

El término "estándares" es empleado aludiendo a la traducción que se hizo desde la SAEM Thales, en el año 2000, de la publicación homónima del NCTM en 1989, con el objeto de poner de relieve que el subdominio KMLS es más amplio que el propio conocimiento curricular, de carácter institucional y local, incluyendo aportaciones internacionales sobre lo que debe componer el contenido de la educación matemática de un ciudadano, procedentes de la propia investigación en educación matemática y de instituciones y asociaciones profesionales (Rojas, 2014, p. 63).

A partir de la revisión realizada a todas las publicaciones sobre el modelo MTSK hasta junio de 2015 por Escudero-Domínguez, Joglar, Corrêa, y Reyes (en estas mismas actas), podemos afirmar que KMLS es el subdominio menos analizado hasta el momento, encontrando solo once publicaciones donde se describe este subdominio frente a veintisiete documentos que se ocupan de KoT y veinte sobre KSM y KFLM.

3. Categorías del conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)

Conforme se ha ido profundizando en los distintos subdominios ha surgido la necesidad de ir elaborando un sistema de categorías dentro de cada subdominio que nos permita profundizar en el conocimiento que usa o tiene el profesor a este respecto; por ello, poseemos una categorización, aunque continuamos trabajando en su refinamiento. A continuación presentamos las categorías para este subdominio según Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo (2014).

- *Conocimiento que el profesor tiene acerca de qué contenidos matemáticos se requieren enseñar en el grado escolar en el que esté impartiendo clases*

  Este conocimiento puede ser adquirido por el profesor, ya sea mediante la consulta de un documento que indique cuáles son esos contenidos o como abstracción de las capacidades matemáticas específicas que requiere desarrollar en sus estudiantes en ese momento escolar.

  Por ejemplo, los estándares de la NCTM señalan que se espera que los estudiantes adquieran, entre los grados 3 y 5, la capacidad de explorar semejanza y congruencia. El conocimiento que el profesor usa para determinar qué temas sirven para lograr este fin es un ejemplo del contenido de esta categoría (pp. 66).

• *Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un tópico en un determinado momento escolar*

Se refiere al conocimiento sobre la profundidad con la que debe ser abordado un determinado contenido matemático, en relación con un ciclo escolar determinado.

Por ejemplo, saber qué tipos de clasificaciones de figuras se espera que haga un alumno de tercer grado, forma parte de esta categoría (pp. 66).

• *Secuenciación de diversos temas ya sea dentro del mismo curso o pensando en cursos anteriores o cursos posteriores*

Se refiere al conocimiento sobre la secuenciación de diversos contenidos matemáticos, ya sea dentro de un mismo curso o pensando en cursos anteriores, es decir, los conocimientos y capacidades previas que tiene un estudiante para aprender un nuevo contenido en términos de lo que los estándares marcan que se debe conocer antes de abordar un determinado contenido, y lo que aportará éste en temas posteriores.

Por ejemplo, según el Ministerio de la Presidencia [España] (2006), en el primer ciclo (grados 1 y 2), la multiplicación es trabajada como el número de veces y en el segundo ciclo (grados 3 y 4) es vista como suma abreviada, en disposiciones rectangulares y problemas combinatorios. El conocimiento de esta secuenciación tanto conceptual como procedimental para la multiplicación proveniente de las pretensiones de cada ciclo, forma parte de esta categoría (pp. 67).

En las tesis sobre MTSK leídas hasta el momento, sólo en las de Moriel (2014) y Escudero (2015) se usan estas categorías. Para reafirmar que las categorías se encuentran en proceso de refinamiento mostramos a continuación otra categorización de KMLS (Rojas, 2014; pp. 92-93):

• *Lenguaje matemático*

Promover la formalización de las escrituras según el rigor correspondiente a los niveles escolares.

• *Proceso de instrucción*

Disponer de criterios para asociar los objetivos de aprendizaje planteados (implícitamente o explícitamente) con el desarrollo de la instrucción según los documentos oficiales.

Saber hacer referencia a los contenidos esperados que aprendan los estudiantes, teniendo presente el tipo de alumno y los conocimientos previos de los que parten, según lo reconocido en los documentos oficiales, en los curriculares o en la práctica habitual en los centros.

• *Orientaciones curriculares*

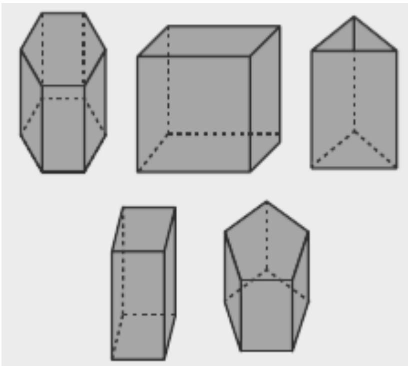
Respecto a las tareas, saber justificar si se adaptan o enriquecen según las orientaciones propuestas en los documentos oficiales o en las indicaciones curriculares de diversas fuentes del currículo en educación matemática (estándares curriculares, currículo nacional, pruebas PISA, etc.), pero también en la práctica habitual de los centros educativos. Asimismo, justificar el uso que se hace de los materiales y recursos didácticos en base a las orientaciones metodológicas estipuladas en los documentos oficiales y en las recomendaciones curriculares.

Analizando ambas categorizaciones encontramos similitudes y/o compatibilidades entre ellas, que pueden enriquecer a las propuestas en Flores-Medrano *et al.* (2014). En cierto modo cada una de las categorías que establece Rojas (2014) puede estar formando parte de las establecidas en Flores-Medrano *et al.* (2014), por tanto podemos considerarlas transversales.

Pensamos que la categoría *lenguaje matemático* puede tener cabida en la categoría *conocimiento que el profesor tiene acerca de qué contenidos matemáticos se requieren enseñar en el grado escolar en qué esté impartiendo clases* ya que el profesor debe ser consciente de que, según en el nivel escolar en el que se encuentre, debe adaptar su lenguaje matemático, utilizando mayor o menor rigor matemático en sus explicaciones y exigir a sus alumnos una determinada formalización de la escritura matemática, entrando así la categoría de *conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado.* Por otro lado, en relación con la categoría *secuenciación de diversos temas,* el profesor debe conocer si debe avanzar en esa formalización del lenguaje matemático en ese curso o posponerlo.

Veamos un ejemplo. En un aula de infantil, 3 años, el profesor identifica los cuerpos geométricos nombrando todos los de la figura 1 como prismas.

Figura 1



Después, en el curso siguiente, 4 años, éste hace distinción entre prismas, realizando un subgrupo, cubos, como nombre especial de un tipo de prisma.

Con respecto a la categoría *proceso de instrucción* resaltar la posible aportación de ésta dentro de las categorías de *conocimiento que el profesor tiene acerca de qué contenidos matemáticos se requieren enseñar* y *secuenciación de diversos temas* ya que consideramos importante disponer de criterios para asociar los objetivos de aprendizaje planteados con el desarrollo de la instrucción según la consulta de todos aquellos referentes que indican en qué momento debe/puede aprenderse cada contenido y a qué nivel de profundidad. Con respecto a la categoría *conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado* conecta perfectamente la categoría proceso de instrucción de Rojas (2014), cuando se refiere a "saber hacer referencia a los contenidos esperados que aprendan los estudiantes…".

Por último, la categoría *orientaciones curriculares* de nuevo la encontramos relacionada con las establecidas en Flores-Medrano *et al.* (2014), aunque en ésta lo que destacamos es que añade un aspecto, desde nuestra opinión, no recogido explícitamente en la otra categorización. Se trata de justificar el uso que se hace de los materiales y recursos didácticos en base a las orientaciones metodológicas estipuladas, pudiendo entrar a formar parte de la categoría *conocimiento que el profesor tiene acerca de qué contenidos matemáticos se requieren enseñar.*

4. Relaciones con otros subdominios

Además de las categorías dentro del subdominio es importante tener en cuenta las relaciones con otros subdominios (Flores-Medrano *et al.*, 2014). El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas no es una estructura particionada sino que tiene todos los subdominios de forma integral, como se puede ver reflejado en estas relaciones entre distintos subdominios. Esta separación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en secciones de conocimiento tiene fines específicamente analíticos.

- Relaciones **KoT-KMLS:**

  Surgen de la categoría de *secuenciación* del KMLS. La relación con el KoT se presenta cuando dicha secuenciación responde, desde el punto de vista matemático, a conexiones intraconceptuales (el mínimo común múltiplo como tema anterior a la suma de fracciones, por ejemplo) (p. 69).

- Relaciones **KSM-KMLS:**

  Surgen de la categoría de *secuenciación* del KMLS ya que tiene aspectos similares con las ideas de conexiones de complejización y simplificación del KSM. Determinar cuáles son conocimientos previos (o posteriores) para un tema T trae consigo dos líneas de argumentación. Por un lado, se pueden señalar y justificar las relaciones matemáticas de complejización (o simplificación) del tema previo (posterior) en T, lo cual consideramos en KSM. Por otro lado se puede hacer referencia al nivel de abstracción esperada para un determinado curso en comparación con el nivel esperado para el tema T, lo cual es información acerca del KMLS. En cualquier caso, las relaciones entre temas posteriores y anteriores promueven reflexiones conjuntas entre estos dos subdominios, siendo las justificaciones matemáticas parte del KSM y las justificaciones didácticas del contenido serían parte del KMLS (p. 69).

- Relaciones **KFLM-KMLS**:

  Reconocemos que existen diversas formas de desarrollar propuestas curriculares y que éstas estarán en función de objetivos e ideologías más amplias al aprendizaje de temas o desarrollo de capacidades. Sin embargo, la interpretación e incluso la elaboración de algunas propuestas sí puede guardar relación directa con la búsqueda de un *desarrollo cognitivo adecuado por parte del que aprende*. Es en esta noción donde estos dos subdominios encuentran sus puntos en común (p. 69).

En el capítulo 4 del libro "Un marco teórico para el MTSK" (Flores *et al.*, 2014) solo aparecen las relaciones que se han mostrado anteriormente, sin embargo recurriendo a publicaciones posteriores encontramos las relaciones con los subdominios que nos faltan, KPM-KMLS y KMT-KMLS. Concretamente en la tesis de Rojas (2014) aparece la relación KMT-KMLS y en la tesis de. Escudero (2015) aparecen ambas relaciones (KPM-KMLS y KMT-KMLS). Por tanto, pensamos que éstas deben ser incluidas en futuras publicaciones, así como su profundización. Por otro lado, se podría indagar sobre las categorías de las que surgen las relaciones, ya que sólo conocemos la procedencia de las relaciones KOT-KMLS y KSM-KMLS.

Podemos pensar que si las relaciones KOT-KMLS y KSM-KMLS surgen de la misma categoría (*secuenciación*), la relación KPM-KMLS también, considerando que las relaciones entre distintos subdominios surgen de la misma categoría. Conforme a las relaciones entre subdominios del mismo dominio de conocimiento KMT-KMLS Y KFLM-KMLS no conocemos de que categoría surgen, ni si ésta es la misma.

Referencias

Escudero, D., Flores, E. y Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Memorias de la XV Escuela de Invierno de Matemática Educativa* (pp. 35-42). Ciudad de México: Cinvestav.

Escudero-Ávila, D., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L.C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77. [http://hdl.handle.net/10481/37190]

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Universidad de Huelva, España: Tesis no publicada.

Escudero-Domínguez, A., Joglar, N., Correa, D. y Reyes, A. (2016). Retrospectiva de las investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). En J. Carrillo, Contreras, L.C. y M. Montes (Eds.), II *Jornadas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Reflexiones sobre el conocimiento del profesor* (pp. 69-86). Huelva.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. Montes (Eds.). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Moriel, J. (2014). *Conhecimento Especializado para Ensinar Divisão de Frações*. Cuiabá, Brasil: Tesis no publicada.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. Universidad de Granada, España: Tesis no publicada.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform Harvard. *Educational Review, 57*(1), 1-22.

8 LAS CREENCIAS EN MTSK

Montes M.A.

1. ¿Deben ser las creencias parte del MTSK?

Para dar respuesta a esta pregunta, proponemos reflexionar en dos sentidos: la consistencia de considerar las creencias como parte del conocimiento, y el aporte que hacen el hecho de considerarlas dentro del modelo a la utilidad de MTSK como herramienta analítica.

Desde el punto de vista de la coherencia del uso de las creencias como parte del conocimiento, es ampliamente aceptado que la naturaleza de ambos es parecida. Sin embargo, existen ciertas características que permiten intentar diferenciar entre ambos, siendo conscientes de que esta tarea puede ser infructuosa en la mayoría de los casos. Estas características son tres, la naturaleza afectiva, la falsabilidad, y la falta de estructuración.

Dentro de las múltiples propuestas recogidas en la literatura para caracterizar las creencias (cf. Furinghetti y Pehkonen, 2002), varias aluden a la naturaleza afectiva de las creencias, ligadas a características emocionales de las mismas. Pajares (1992), establece: *Utilizo conocimiento para referirme a la amplia red de conceptos, imágenes, y habilidades inteligentes que poseen los seres humanos. Las creencias son las verdades personales incontrovertibles que tiene cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, que tienen una fuerte componente afectiva y evaluativa.* En este sentido, la variable afectiva, y lo personal e incontrovertible de las creencias, supone un elemento diferenciador del conocimiento, ya que este si está sujeto a la falsación. Esta es la segunda característica que puede permitirnos diferenciar entre ambos. Una creencia no es falsable, dada su subjetividad. El pasar de la subjetividad a la objetividad implica formular el conocimiento como falsable, lo que implica romper con el sustento afectivo que conlleva la creencia.

Montes, M.A. (2016). Las creencias en MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 55-59). SGSE: Huelva.

En último lugar, un elemento que hemos discutido en los últimos tiempos es la idea de que el conocimiento requiere de una cierta estructuración. Esta estructuración puede estar ligada a la disponibilidad para el uso (Schoenfeld, 2010), por ejemplo. Sin embargo, las creencias, al carecer de un sustento falsable, no pueden conformarse en estructuras apoyadas por elementos externos. Así, Green (1971), defiende que las creencias aparecen en conglomerados, pero no se apoyan en una estructura lógica, sino afectiva.

Por tanto, las creencias entendemos que, si bien no son conocimiento, tienen una naturaleza muy parecida a este, por lo que es consistente considerarlas dentro de un modelo de conocimiento profesional.

Desde la perspectiva del aporte que hacen al modelo MTSK como herramienta analítica, entendemos que, si aceptamos que las creencias permean, filtran, o condicionan el conocimiento o su puesta en práctica, su consideración completa la comprensión que adquirimos de dicho conocimiento al usar este modelo. Esta postura es similar a la práctica habitual al describir el contexto de un profesor (curso en el que imparte, años de experiencia, nivel sociocultural del centro en el que imparte, etc.), para posteriormente analizar su conocimiento, ya que, si bien en este caso lo que describimos es intrínseco al propio profesor, tiene una influencia indiscutible en el objeto a analizar.

2. ¿Qué consideramos actualmente en el dominio de las creencias?

Podemos observar afirmaciones como la siguiente en muchos de los artículos del grupo SIDM:

> *Puede verse también la inclusión de las concepciones y creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje como dimensión que permea todo el conocimiento del profesor. No obstante, no serán objeto de reflexión en este artículo.* (Aguilar, Carreño, *et al.*, 2013, p. 5066)

Asimismo, en una revisión de la producción del grupo, sólo en Flores-Medrano, Carrillo (2014), se aborda el dominio de las creencias/concepciones, en particular, la conexión de éstas con el conocimiento. Por tanto, consideramos que es un subdominio en el que, como grupo, se ha invertido un esfuerzo muy limitado, lo que deriva en carencias en su conceptualización, caracterización, y dotación de contenido. Lo que sigue en este punto es una breve revisión de lo que hemos explicitado que forma parte de este dominio y en el siguiente, algunas reflexiones sobre lo que podríamos considerar dentro del mismo.

En los sistemas de creencias acerca de la matemática, suelen considerarse varios tipos de creencias, que Handal (2003) sintetiza de la siguiente forma. 1) qué es la matemática, 2) cómo sucede el aprendizaje en la actualidad, 3) cómo deberían ser la enseñanza y aprendizaje de la matemática idealmente (inspirado en Ernest, 1989a, 1989b; Thompson, 1992), qué responden a dos naturalezas fundamentales, las creencias acerca de la naturaleza de la matemática, y las creencias sobre la didáctica de la matemática.

En MTSK adoptamos esa diferenciación respecto a los dos tipos de naturaleza de las creencias, y las situamos como ligadas a los dominios matemático y didáctico del contenido, respectivamente.

Dentro de las creencias acerca de la naturaleza de la matemática, encontramos tres tipos, la Platónica, Instrumentalista, y la ligada a la Resolución de Problemas (Ernest, 1989a, 1991; Carrillo y Contreras, 1995).

En cuanto a las creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, consideramos las tendencias tradicional, espontaneísta, tecnológica e investigativa (Carrillo, 1996).

3. ¿Qué podemos considerar 'adicionalmente' en el dominio de las creencias?

En el este apartado se esbozarán algunas posibles inclusiones dentro del dominio de las creencias que creemos que pueden completar este dominio, siempre bajo la asunción de que es una propuesta que debe revisarse en futuras investigaciones, en las sucesivas iteraciones del ciclo de triangulación del modelo y su componentes que realizamos con cada investigación.

- Filosofía de la matemática escolar: Este elemento, considerado en Bromme (1994), está íntimamente relacionado con las creencias acerca de las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Podemos encontrar aquí la tradición de enseñanza a la que el profesor se adhiere, por ejemplo, un profesor puede seguir, incluso actualmente, los preceptos de la 'matemática moderna', o seguir la filosofía del grupo de Bourbaki, que pone un especial énfasis en el rigor y la abstracción a alto nivel, frente a otras aproximaciones más ligadas al discurrir de la intuición matemática.

- Concepciones acerca de conceptos: En muchos casos, conocer un concepto matemático conlleva haber asimilado, a mayor o menor nivel, un cierto 'corpus' de conocimiento socialmente aceptado, como por ejemplo saber que las fracciones son parte de un conjunto matemático que cumple ciertas propiedades (cuerpo conmutativo). Sin embargo, en otros casos, no existe dicho corpus. Ese es el caso del concepto de infinito, donde más que conocimiento sobre su naturaleza, se posee intuición sobre la misma (Fischbein, Tirosh y Hess, 1979).

Los dos siguientes elementos, actitudes y afectos, requieren un estudio en profundidad sobre su compatibilidad con la naturaleza de las creencias, sin embargo, por su impacto en el conocimiento y su uso, creemos que deben contemplarse en MTSK, en el mismo dominio en el que actualmente se consideran las creencias (que podría pasar a ser el dominio de creencias, actitudes y afectos)

- Actitudes hacia las matemáticas (y sus conceptos): Sierpinska (1987), mostró cómo algunos estudiantes demostraban actitudes hacia las matemáticas y ciertos conceptos (en su caso, relacionados con el límite de una función en un punto). En Montes (2015) puede observarse como dichas actitudes pueden encontrarse en un profesor de Secundaria español, que considera que las matemáticas que deben aprender sus alumnos deben ser intuitivas y ligadas a lo real (y materialmente factible). Esto le lleva a una actitud intuitiva empírica (Sierpinska, 1987) hacia las matemáticas, que hace que tienda a rechazar la validez de algunos resultados matemáticos con argumentos basados en lo irrealizable a nivel tangible de algunos elementos.

Afectos hacia las matemáticas: *Es generalmente aceptado que el plano afectivo juega un rol importante en la educación matemática* (Charalampous y Rowland, 2013). En particular, se han estudiado algunos fenómenos como la ansiedad matemática, el miedo al fracaso en matemáticas o la evitación de las propias matemáticas (Zan, Brown, Evans y Hannula, 2006), centrándose habitualmente en los alumnos. Sin embargo, si pensamos en los profesores, en particular en los maestros de primaria, estos afectos tienen, o pueden tener, un efecto en su conocimiento matemático, y especialmente en cómo se usa y articula éste. A continuación se esbozan dos ejemplos donde estos afectos condicionan tanto el dominio del conocimiento matemático como el didáctico:

- La probabilidad y la estadística son contenidos que en muchas ocasiones provocan en los estudiantes para maestro cierta ansiedad o inseguridad, por resultarles especialmente complejos. No parece por tanto casualidad que sean temas que en ocasiones, los propios maestros dejan de impartir bajo diferentes argumentos, condicionando el uso que hacen de su conocimiento.

- *"A mí se me dan fatal (u odio) las matemáticas, así que sigo el libro de texto al pie de la letra"*. Esta es una afirmación (que resulta posible escuchar a determinados profesores), que ilustra cómo la dimensión afectiva condiciona el conocimiento didáctico del contenido (en particular, el KMT), que el profesor usará.

Creemos que estas posibles incorporaciones al dominio de las creencias deben ser tenidas en cuenta, realizando una reflexión sobre las mismas de la misma índole que las realizadas en el primer apartado: ¿Es coherente incluirlas en este dominio? ¿Qué aportan? La respuesta a la primera pregunta requiere de un estudio mucho más profundo y extenso que el que podemos hacer aquí. La respuesta a la segunda pregunta parece la misma que cuando se planteó relativa a las creencias: Nos permitirá hacer análisis más completos del profesor, lo cual nos permitirá comprender al profesor, su conocimiento, y su actividad docente con mayor profundidad.

Referencias

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. y Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. El MTSK. En Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.) *Actas de VII CIBEM* (Vol. 1, pp.5063-5069). Montevideo, Uruguay.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. In R. Biehler, R. Sholz, R. Strässer, y B.

Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Carrillo, J. y Contreras, L.C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática, 7*(3), 79-92.

Charalampous, E. y Rowland, T. (2013). Mathematics Security and the individual. En B. Ubuz, C. Haser, y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp.1299-1308). Antalya, Turquía: ERME.

Ernest, P. (1989a). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics'. En P. Ernest, (Ed.) *Mathematics Teaching: The State of the Art* (pp. 249-254). London: Falmer Press.

Ernest, P. (1989b). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching, 15*, 13–34.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Falmer Press.

Fischbein, E., Tirosh, D. y Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 491-512.

Flores, E. y Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialized knowledge through her practice. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan, (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 81-88). Vancouver, Canadá. PME.

Furinghetti, F. y Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations on Beliefs. En Leder, G.C., Pehkonen, E., Törner, G. (Eds), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp. 40-57). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw-Hill.

Handal, B. (2003). Teachers Mathematical Beliefs: A review. *The mathematics Educator, 13*(2), 47-57.

Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research. 62*(39), 307-332.

Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 371-397.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. In D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127–146). New York: Macmillan.

Zan, R., Brown, L., Evans, J. y Hannula, M.S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational Studies in Mathematics: Affect in Mathematics Education: Exploring Theoretical Frameworks, A PME Special Issue, 63*(2), 113-121.

9 APORTACIONES METODOLÓGICAS DE INVESTIGACIONES CON MTSK

Escudero-Ávila, D.
Gomes Moriel, J.
Muñoz-Catalán, M.C.
Flores-Medrano, E.
Flores, P.
Rojas, N.
Aguilar, A.

Introducción

Este documento fue desarrollado tomando en cuenta las investigaciones que se habían realizado en el grupo que interactúa en el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) en la Universidad de Huelva y que utilizaban el modelo MTSK. Se decidió dar sentido a dichas aportaciones metodológicas mediante tres apartados que recogen herramientas para obtener sensibilidad teórica, analizar la información y categorizar los tipos de elementos de conocimiento respectivamente. Queremos dejar en claro que las herramientas que aquí se exponen son las que se han utilizado, sin embargo, pensamos que es posible utilizar otras herramientas en investigaciones futuras.

Escudero-Ávila, D., Gomes Moriel, J., Muñoz-Catalán, M.C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N. y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60-68). SGSE: Huelva.

1. Sensibilidad teórica para mirar los datos: el análisis didáctico en la investigación con MTSK

El *análisis didáctico* es una herramienta teórica que se desarrolla en el grupo de investigación «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico», del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. El *análisis didáctico* comienza a definirse en los trabajos de Rico (1997a; 1997b), a partir del análisis curricular que articula cuatro dimensiones, con las cuales el profesor aprecia el significado de un contenido matemático: cultural/conceptual, que se relaciona con el organizador contenido; cognitiva, con el organizador cognitivo; ética o formativa, con el organizador instrucción; y social, con el organizador actuación/evaluación.

El *análisis didáctico* se puede emplear con fines formativos e investigativos. Lo primero alude a profundizar sobre un contenido matemático escolar, tanto en aspectos formales como también en los significados, formas de representarlos, etc., lo que constituye el análisis de contenido, asimismo examinar qué objetivos y limitaciones se pueden encontrar en la enseñanza de los temas (análisis cognitivo), como tener presente los recursos, los tipos de tareas y secuencias de tareas para la enseñanza (análisis de instrucción). Lo anterior, permite al investigador profundizar en un tema tanto desde el ámbito matemático como desde su enseñanza (Rojas, Flores y Ramos, 2013). Esta profundización lleva a realizar una apreciación más detallada al investigador de las características de cada uno de los subdominios de modelo MTSK, brindando sensibilidad teórica al momento de categorizar, analizar e interpretar información, independientemente de las herramientas metodológicas empleadas.

Por otra parte, el *análisis didáctico* puede emplearse con fines metodológicos para comprender manifestaciones de los profesores en relación con su conocimiento. Concretamente, existe relación con los componentes que conforman el *análisis didáctico* y cada uno de los subdominios del modelo MTSK. La fusión entre las dos herramientas teóricas, llevan a definir indicadores precisos de conocimiento (para un tema matemático) para cada subdominio del modelo.

Por ejemplo, el análisis de contenido del *análisis didáctico* permite profundizar en la estructura conceptual de un contenido matemático, así como en los aspectos fenomenológicos (significados, contextos y usos) e históricos asociados a un tema y en distintos sistemas de representación, todo esto derivado del conocimiento formal asociado al contenido, que a su vez se relaciona con la naturaleza del subdominio del Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT).

La vinculación entre el *análisis didáctico* y el modelo de conocimiento MTSK permite adoptar un enfoque operativo para comprender el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, obteniéndose indicadores de conocimiento para cada subdominio. Por ejemplo, Rojas (2014) define 54 indicadores de conocimiento sobre el tema de los números racionales para cada subdominio del modelo MTSK, indicadores que surgen a priori de la vinculación entre las dos herramientas teóricas mencionadas. Cada indicador alude a aspectos específicos de conocimiento, siendo una guía para aproximarse a una comprensión profunda del conocimiento especializado del profesor de matemática. El aporte metodológico nace al comportarse cada indicador como una categoría a priori que accede a organizar los datos obtenidos para un trabajo científico, ya sea un discurso escrito, entrevistas, cuestionarios, transcripciones de clases, observaciones de clase, etc. La organización que brindan los indicadores por cada subdominio del modelo, permite construir y organizar el conocimiento que un docente muestra o expresa a través de sus acciones, asimismo admite hacer una reconstrucción del conocimiento plausible que el profesor (sujeto de estudio) manifiesta en su tarea de enseñanza, acercándonos a una comprensión profunda y objetiva del ese conocimiento derivado. Por lo tanto, el *análisis didáctico* se comporta como una efectiva herramienta teórica-metodológica para identificar conocimiento especializado de profesores de matemáticas (Rojas, Flores y Ramos, 2013).

2. Escenarios e instrumentos de obtención y de análisis de la información, presentación de resultados e informes de investigaciones con MTSK

A continuación presentamos, de manera general, un resumen de algunos de los escenarios e instrumentos de obtención, análisis de la información y de presentación de resultados e informes que se han utilizado o se están utilizando actualmente, dentro del SIDM, para realizar investigaciones empleando el modelo de conocimiento MTSK.

Con respecto a la obtención de información, entre los diferentes *escenarios* (Flores, Escudero y Aguilar, 2013) e instrumentos en los cuales se han realizado estudios empíricos con el modelo MTSK, podemos encontrar trabajos en los que se analizan conocimientos para enseñar matemáticas en distintos contextos de práctica y niveles de formación. En su mayoría las investigaciones llevadas a cabo hasta el momento son estudios de caso instrumentales (Stake, 1995). Para recopilar la información se ha recurrido a videograbaciones y grabaciones de audio de clases, notas de campo, diseño de tareas o lecciones, así como discusiones grupales entre profesores en cursos de formación inicial y cursos de formación continua en contextos presenciales y a través de plataformas virtuales como Moodle y Facebook, analizando foros de discusión, cuestionarios y entrevistas semi-estructuradas complementarias a los a instrumentos anteriores (Escudero-Ávila, Carrillo, Flores-Medrano, Climent, Contreras y Montes, 2015; Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2015). En este momento se cuenta con información acerca del conocimiento de profesores de infantil, primaria, secundaria, bachillerato y universidad, además con información sobre el conocimiento de profesores en formación.

Teniendo presente que las primeras investigaciones en que se emplea el modelo MTSK fueron desarrolladas al mismo tiempo que se construía el modelo, el análisis de datos consistió en discusiones teóricas que llevan al establecimiento de categorías para el análisis de los subdominios del modelo MTSK, buscando estudiar de manera profunda y objetiva la información. Para esta generación de categorías se han utilizado herramientas teóricas como el *análisis didáctico* (Rojas, 2014), el *método de compara-*

ción constante, la *Grounded Theory* y el *análisis de contenido* (Bardin, 1985; Krippendorff, 1990) (e. g. Escudero, 2015; Montes, 2015; Moriel-Junior, 2014).

Además de apoyarse en las divisiones y definiciones de los subdominios del modelo MTSK, las distintas investigaciones se sustentan en otros instrumentos que permiten organizar la información acerca del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Por ejemplo, se han utilizado estructuras como aquella propuesta por Schoenfeld (2000), en el cual las grabaciones de aula se organizan en episodios y sub-episodios inclusivos, apoyándose en softwares de análisis cualitativo como MAXQDA para seccionar la información y generar pequeñas unidades de análisis, así como establecer nuevas categorías emergentes.

En cuanto a la presentación de los resultados e informes de las investigaciones, los trabajos posibilitan acceso a una gama de episodios/casos/situaciones en que se muestra cuándo y cómo los conocimientos fueron puestos en juego por los sujetos, logrando aproximarnos a una comprensión profunda del conocimiento manifestado por profesores de matemáticas. Así, se han obtenido mapas que sintetizan los resultados obtenidos acerca del conocimiento especializado para enseñar un contenido específico (como el caso de la división de fracciones o las funciones cuadráticas). Algunos de estos mapas o esquemas de conocimiento han estado inspirados en modelos como el utilizado por Ma (1999)(e. g. Escudero, 2015).

Con respecto a los análisis realizados sobre las concepciones, que se ubican en el centro del modelo, se utilizaron como instrumento las tendencias didácticas propuestas por Carrillo (1998). Sin embargo, este ha sido un campo poco explorado en las investigaciones con MTSK.

3. Organización de la información; diferenciación entre evidencia, indicio y oportunidad para la investigación con MTSK

No siempre es fácil que un investigador tenga elementos para garantizar que un profesor posee, o no, un determinado conocimiento. Aun aplicando técnicas de triangulación de la información, está siempre en juego la interpretación que hace el investigador sobre los datos, la cual tiene una carga subjetiva que no puede despreciarse. En la búsqueda de no omitir posibles aportes que arrojen los datos por detenernos a verificar si lo que se postula forma parte realmente del conocimiento del profesor informante, en algunas de las recientes investigaciones hemos empleado la triada *evidencia-indicio-oportunidad*, la cual se explicará a detalle a continuación.

Evidencias de conocimiento: alude a aquellos elementos que permiten afirmar que un profesor posee, o no, un determinado conocimiento. Habitualmente provienen de una triangulación para garantizar la existencia de tal conocimiento. Por ejemplo, en el siguiente fragmento de texto el profesor muestra evidencias de conocimiento sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas:

> Profesor (P): *Son muchos los cursos en los que se trabaja con fracciones. Especialmente en este debemos lograr que nuestros estudiantes comprendan el significado del producto y división de fracciones, aunque muchas veces no vienen con los conocimientos suficientes para comprender algunas cosas.*

La evidencia es que el profesor conoce qué aspectos de las fracciones deben ser propiciadas en su curso (significados de producto y división de fracciones).

Indicios de conocimiento: son sospechas (propiciadas por alguna declaración o acción del profesor) de la existencia o inexistencia de un determinado conocimiento, son también una aceptación de que se requiere más información para convertirse en evidencias. El texto que sigue muestra indicio de conocimiento relativo al subdominio de las características de aprendizaje de las matemáticas:

> Profesor (P):*Voy a explicaros el procedimiento para multiplicar dos matrices, quiero que pongáis mucha atención ya que es muy común que luego se cometan errores porque trabajar con matrices es muy diferente a todo lo que habíais hecho hasta ahora.*

Observamos que el profesor advierte que se pueden cometer errores y que algunos de estos se producen de manera reiterativa en los alumnos. Da la impresión de que el profesor tiene un conocimiento sobre los errores comunes propios del tratamiento del contenido en cuestión, pero requiere de una indagación más profunda para afirmar si existe o no ese conocimiento.

Las *oportunidades de investigación* son de naturaleza diferente a las evidencias e indicios, ya que estas son momentos o situaciones suscitadas por el profesor o por la dinámica de clase, que sirven para explorar conocimiento de algún subdominio, aunque este no se relacione con el subdominio con el cual se identifica la declaración suscitada. Por ejemplo, el texto siguiente muestra una oportunidad para investigar sobre el conocimiento de la práctica matemática y el conocimiento de los temas:

Profesor (P): ¿Recordáis el experimento que estaba en el museo de ciencia con un triángulo y unos cuadrados en cada lado, que al momento de girarlo el agua pasaba de un lado al otro?, ¿alguien me puede decir con qué tema de los que hemos visto lo puede relacionar?

Alumno (A): *Nos explicaron que era para demostrar el teorema de Pitágoras, que el agua de la hipotenusa es la misma que la que queda en los otros lados.*

P: *Exactamente, el agua con la que se llena el cuadrado que se forma con la hipotenusa llena exactamente los dos cuadrados que se forman con cada uno de los catetos, por eso en el teorema de Pitágoras se suman los cuadrados de los catetos y da como resultado el cuadrado de la hipotenusa.*

El profesor centra su discurso en señalar las relaciones entre el experimento y el teorema de Pitágoras (consideramos que en un contexto real en el que el profesor quisiera aprovechar una situación como la que se describe, este ahondaría más en los detalles; aquí, la intención es simplemente la de ilustrar). Llama la atención que un estudiante haya mencionado la palabra “demostrar”. Una posibilidad sería señalar en el análisis que el profesor desaprovechó una *oportunidad de aprendizaje* (dependiendo del grado escolar, esto puede ser más o menos evidente). La noción de *oportunidad para investigar* posiciona esa palabra en contexto de algún o algunos subdominios de conocimiento. Por ejemplo, podría ser una oportunidad para explorar, a partir de la opinión del profesor sobre si es o no una forma de demostrar ese experimento, el conocimiento que tiene acerca de las características de una demostración matemática, lo cual forma parte del KPM. También podemos generar una oportunidad para investigar su conocimiento acerca de demostraciones del teorema de Pitágoras, que es parte del KoT.

Por último, con la finalidad de enfatizar la diferencia entre evidencia, indicio y oportunidad de investigación, podemos observar el siguiente texto.

Profesor (P): ¿Ya os habéis dado cuenta de que la gráfica del seno y del coseno son casi iguales? [Señala la forma de las gráficas que tiene dibujadas, cada una en un plano, en la pizarra; el intervalo del trazo es $[-\pi, 2\pi]$ *para ambas funciones]*

Alumno (A): *Sí, nada más que la del coseno empieza antes.*

P: *Es verdad, aunque también podríamos decir que empieza después, ¿no es así?*

A: *Sí, pero yo decía que empezaba antes porque en el cero, el coseno ya vale uno y el seno vale cero.*

P: *La observación que hizo su compañero es muy importante. De hecho, existe una identidad trigonométrica que dice [escribe en la pizarra* $sen(\theta) = cos\left(\theta - {}^{\pi}/_{2}\right)$ *y lo lee para sus estudiantes].*

El profesor conoce una identidad trigonométrica que relaciona el seno con el coseno e incluso es capaz de identificar por qué funciona dicha identidad, a esto llamamos evidencia, que forma parte del KoT. No queda claro si el profesor es consciente de que el dominio de las funciones seno y coseno es, en ambos casos, (-∞, ∞) , ya que tanto el hecho de que dibujara la gráfica en un intervalo finito, como la aceptación y refuerzo de un argumento de que la gráfica comienza en un lugar determinado hace que nos planteemos si conoce cuál es el dominio de esas funciones. Tampoco podemos garantizar que no lo sepa, puede ser que haya obviado este hecho y no considerara importante aclarar ese punto en ese momento, esto sería un indicio, una sospecha del cual obtenemos información sobre el conocimiento que manifiesta el profesor para ese tema particular. El indicio que aquí se presenta también es parte del KoT. A propósito de la situación antes descrita, relativa al dominio de la función, surge la oportunidad para indagar acerca del conocimiento que tiene el profesor sobre los posibles efectos de un tratamiento como el que planteó en el proceso de aprendizaje de los estudiantes sobre límites, cuando la variable independiente tiende a infinito $[\lim_{x\to\infty} f(x)]$

y qué concepciones erróneas es común que se generen en esas circunstancias. Esta oportunidad se puede considerar como parte del KFLM; la respuesta del profesor brinda información sobre evidencias o indicios de conocimiento en ese u otros subdominios, incluso puede generar nuevas oportunidades de investigación.

4. Discusión

Todas las investigaciones realizadas hasta el momento con el MTSK han tenido una finalidad principalmente teórica, consistente en construir y fundamentar dicho modelo. Esta finalidad ha determinado el enfoque metodológico seguido, como se ha plasmado en este documento. No obstante, la agenda de investigación presente y futura del grupo plantea nuevas preguntas que nos apelan a reflexionar hasta qué punto influirán sobre los aspectos metodológicos que nos definen como comunidad indagadora. Deberemos estar atentos a las exigencias metodológicas que las nuevas inquietudes y preguntas de investigación puedan suscitar.

Un punto importante a destacar es el paradigma de investigación en el que se han posicionado las investigaciones. Nos enfrentamos a nuestro interés por comprender el conocimiento especializado adoptando un enfoque interpretativo (Bassey, 1999) en la medida que concebimos ese conocimiento como un objeto social construido por sus participantes y situado en un contexto cultural específico, que tratamos de comprender mediante un proceso de interpretación.

Una de las vías de desarrollo de la agenda de investigación parece apuntar hacia la formación inicial y continua diseñada con MTSK, por lo que pretendemos no solo comprender la práctica, sino modificarla para mejorarla. Habrá que preguntarse si es que estamos avanzando hacia un paradigma socio-crítico en el sentido de Ernest (1998) y si ese es el caso, establecer y definir los requisitos que deberían cumplir tales investigaciones. Habrá que ser cautos, pues la mera presencia de un cambio o el hecho de documentarlo y explicarlo no garantiza un cambio de paradigma.

Hasta ahora el uso del estudio de caso instrumental ha servido para la teorización del modelo, pero puede que llegue un momento en el que las pretensiones teóricas vayan orientadas a saturar las categorías e indicadores ya existentes en cada subdominio y debamos realizar un muestreo teórico (Glaser y Strauss, 1967), es decir, una selección intencional de un nuevo escenario o caso de investigación para avanzar con los casos ya estudiados.

Un reto metodológico, específico de este tipo de investigación, con el que se encuentran los investigadores, principalmente los noveles, es el diseño de las *pruebas,* que se conducen a través de las entrevistas o cuestionarios. En este sentido, una aportación interesante consistirá en sistematizar los posibles tipos de preguntas que se han revelado valiosos para obtener información sobre cada subdominio. De esta forma se incidirá sobre los criterios de calidad de una investigación científica; en particular: confiabilidad, replicación y validez de la investigación.

Referencias

Bardin, L. (1985). *Análisis de Contenido.* Traducción por Cesar Suarez. Akal: Madrid.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones.* Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Ernest, P. (1998). The Epistemological Basis of Qualitative Research in mathematics education: A Postmodern Perspective. En A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* (pp.22-39). Reston, Va.: NCTM.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Huelva, España: Tesis no publicada.

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, y N. Climent, *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Glaser, B. y Strauss, A.L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. Chicago: Aldine De Gruyter

Krippendorff, K. (1990). Determinación de las unidades. En K. Krippendorff (Ed.), *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica* (pp. 81-92). Barcelona, España: Paidós Ibérica.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Montes. M. A. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Huelva: Huelva.

Moriel Junior, J. G. (2014) *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações.* Tesis doctoral. Universidade Federal de Mato Grosso, REAMEC: Cuiabá, Brasil.

Moriel Junior, J. G., Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar Matemática com o modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

Rojas. N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos. Tesis doctoral. Universidad de Granada: Granada.*

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education, en D. Holton (Ed.), *Teaching and learning of mathematics at university level*. An ICMI study, pp. 221-236. Dordrecht: Kluwer Academic.

Sosa, L., Flores-Medrano, E., Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 173-189.

Stake, R. (1995). *The Art of case study*. United States of America: SAGE.

Rico, L. (1997a). *Educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Ice - Horsori.

Rico, L. (1997b). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rojas. N. (2014).*Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos.* Tesis doctoral. Universidad de Granada: Granada.

Rojas, N., Flores, P. y Ramos., E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (pp.191-208). Granada, España: Universidad de Granada.

10 RETROSPECTIVA DE LAS INVESTIGACIONES SOBRE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Escudero-Domínguez, A..
Joglar, N.
.Corrêa, D.
Reyes, A.

Introducción

En esta comunicación se analiza el nacimiento y la evolución de un nuevo modelo analítico del conocimiento del profesor de matemáticas denominado *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (*MTSK* por sus siglas en inglés), generado en el seno del grupo *Seminario de Investigación en Educación Matemática* (SIDM) y coordinado desde la Universidad de Huelva, España. Para elaborar este análisis, han sido revisadas todas las publicaciones hasta agosto de 2015 (artículos y tesis doctorales) firmadas por profesores del citado grupo de investigación, observando cuidadosamente, entre otros aspectos, la evolución de los diferentes dominios y subdominios del modelo, las metodologías de investigación asociadas a la utilización en la práctica del nuevo modelo y los contextos diferentes en los que ha sido aplicado desde su nacimiento hasta la actualidad. Entre otras conclusiones, a partir del estudio aquí presentado se detecta la necesidad de seguir investigando con el modelo con profesores, tanto en formación inicial como continua, de niveles educativos y en bloques matemáticos en los que no se ha explotado todavía, y se aconseja también tratar de considerar la incorporación de otras metodologías de investigación así como de publicar en revistas de habla inglesa para que su alcance sea más global.

Escudero-Domínguez, A., Joglar, N., Corrêa, D. y Reyes, A. (2016). Retrospectiva de las investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 69-86). SGSE: Huelva.

1. Cómo hemos abordado este trabajo

El modelo *MTSK*, que nace en el seno del grupo SIDM de la Universidad de Huelva (UHU) en el año 2012, se ha ido refinando a través de los distintos estudios desarrollados en los últimos tres años por miembros del citado grupo de investigación. Estos estudios incluyen una gran cantidad de artículos, comunicaciones, tesis doctorales y trabajos de fin de máster. En esta comunicación se describe esta evolución.

En total, como hemos adelantado, se han revisado 39 artículos y capítulos de libro publicados por miembros del grupo entre 2012 y agosto de 2015, y además cinco tesis doctorales presentadas en los años 2014 y 2015 bajo la dirección de investigadores del grupo SIDM. El objetivo fundamental del análisis aquí presentado es reflexionar sobre el nacimiento y la evolución de este nuevo modelo de conocimiento profesional a partir de los resultados descritos en las publicaciones estudiadas, destacando sus puntos fuertes y las áreas de mejora para así sugerir posibles líneas de trabajo futuro.

En una primera aproximación se ha elaborado un análisis cronológico de los trabajos, organizados en una hoja de cálculo en la que se resumen las características fundamentales de cada uno de ellos para así tener una visión global, dado volumen de los trabajos a revisar. Entre los primeros criterios observados para esta organización destacan: datos generales relacionados con los autores, el título y el lugar de publicación de cada artículo, así como el contexto en el que se enmarca cada estudio descrito, la metodología de investigación utilizada, el nivel escolar en el que se trabaja y el contenido matemático concreto tratado. Este primer documento sirvió para unificar el análisis a realizar por cada uno los autores de este estudio, de manera que cada uno pudiera elaborar un análisis más exhaustivo de cada trabajo asignado. Tras esta primera aproximación, nuestros análisis se centraron en aspectos relacionados ya directamente con el modelo analítico concreto (MTSK). Para ello se diseñó una ficha en la que cada uno de los revisores (autores de esta comunicación) detallaba los antecedentes mencionados en la publicación analizada, los dominios y subdominios del modelo estudiados, indicando especialmente si el nivel de detalle de los análisis de la publicación llegaba a dar indicadores y descriptores de categorías de cada subdominio. Además, en esta fase de los análisis de los trabajos se incluyeron los objetivos de investigación concretos de cada publicación revisada y más detalles sobre los aspectos generales analizados en la primera fase a partir de la hoja de cálculo.

El análisis de las tesis doctorales fue similar, aunque obviamente el nivel de detalle ofrecido por los autores de las mismas es mucho mayor en lo que se refiere a las categorías analizadas de cada subdominio del modelo MTSK.

A raíz de la primera aproximación de nuestro estudio, surgieron una serie que cuestiones que sirvieron de eje para organizar la información obtenida y su presentación en las *II Jornadas del SIDM* que tuvieron lugar los días 15 y 16 de septiembre de 2015 en Huelva (España). A continuación incluimos brevemente unos comentarios sobre estas cuestiones pues son las que servirán también como guion de esta comunicación.

Las primeras cuestiones que nos planteamos tienen que ver con el origen del MTSK, se trataba de detectar cuándo y por qué surge la necesidad de un nuevo modelo analítico del conocimiento del profesor de matemáticas. Al tratar de responder a estas cuestiones a través de la lectura de las publicaciones del grupo entre los años 2012 y 2014, se fueron anotando los distintos antecedentes en los que se había basado el modelo. Estos antecedentes se resumen en la primera sección de esta comunicación.

Tras revisar el origen del MTSK, pasamos a observar cuándo y cómo se había empezado a presentar el modelo en publicaciones, tanto a nivel nacional como internacional, y una vez que se asume que el modelo ha sido ya *oficialmente* presentado a la comunidad científica, comenzamos a analizar más detalladamente cómo y en qué contextos se había explotado el MTSK hasta agosto de 2015. Se ha hecho notar también qué tipo de publicaciones se habían elaborado y qué metodologías de investigación habían sido utilizadas en las distintas publicaciones. En esa fase de nuestros análisis, observamos cuidadosamente qué niveles educativos y qué contenidos matemáticos se habían analizado ya desde el MTSK. Un resumen de estos aspectos se incluye también en una sección específica más abajo. Este nivel de concreción nos ha permitido destacar bloques y niveles educativos que han sido analizados con mucho detalle, y bloques y niveles que no lo han sido tanto y que, por lo tanto, son fuente interesante para trabajos futuros (como por ejemplo el caso de las Matemáticas en Educación (Ed.) Infantil, o el caso del bloque de Probabilidad y Estadística en Ed. Primaria o Secundaria).

Por otra parte, el análisis detallado del tipo de publicaciones del grupo, nos ha permitido apuntar a la necesidad de elaborar publicaciones en inglés para que la difusión del MTSK sea mayor y de más impacto.

La parte central de nuestro estudio ha sido reflexionar sobre la evolución de los distintos dominios y subdominios del modelo MTSK, incluyendo las creencias y las concepciones del profesor de matemáticas, y para ello se han elaborado unas tablas, que se presentan más adelante en esta comunicación, en las que se incluyen las categorías que han ido apareciendo en las publicaciones analizadas para describir cada uno de los subdominios, así como las dificultades que los investigadores se fueron encontrando a la hora de identificar y describir estas categorías.

2. Antecedentes, origen y presentación del MTSK

Tal y como explican varios miembros del grupo SIDM en su publicación de la colección *Materiales para la Docencia* editada por la UHU (Carrillo *et al.*, 2014a; p. 35) y titulada *Un Marco Teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*, “el interés fundamental en la trayectoria de investigación de este grupo, en lo que se refiere a conocimiento del profesor, ha sido el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, entendiendo que incluye también la formación inicial del futuro profesor”. En la página 36 de ese mismo documento, los autores indicaban que “el MTSK se enmarca dentro de una larga tradición de investigaciones que se han preocupado por examinar, con fines analíticos, cuál es el contenido del conocimiento del profesor”.

Desde la perspectiva mencionada en el párrafo anterior, a través de los trabajos analizados comenzando con el artículo de 2012 (Escudero, Flores y Carrillo, 2012), destacamos que la comprensión del contenido del conocimiento del profesor del MTSK es heredada de la contribución de Shulman (1986), y así queda patente a partir de las publicaciones analizadas, pues en todas en las que se describe el modelo MTSK se menciona a Shulman como punto de partida. Así, desde el inicio, se considera la especificidad del conocimiento del profesor en relación con la materia a enseñar, y se distinguen dos componentes (dos dominios en el MTSK), una primera referida al conocimiento de contenido de la materia a enseñar (contenido matemático en nuestro caso, MK según las siglas en inglés) y la segunda referida al conocimiento didáctico del contenido a enseñar (PCK, utilizando de nuevo las siglas en inglés). En algunas de las primeras publicaciones, se incluyen además reflexiones profundas sobre la noción de conocimiento siguiendo por ejemplo a autores como Bromme (1994) o Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep (2009).

En lo que se refiere al dominio del MK, el modelo MTSK considera, basándose en los trabajos del proyecto *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) coordinado desde la Universidad de Michigan (EEUU) por la profesora Deborah Ball, que el conocimiento del contenido matemático que necesita el profesor es distinto del que necesita otro profesional o una persona normal para su vida cotidiana. Analizando las publicaciones del grupo SIDM desde 2012 hasta 2015 hemos constatado que el principal referente del MTSK es el modelo MKT. En ese sentido, las referencias más citadas en las publicaciones del grupo SIDM analizadas son estas tres: Ball, Thames y Phelps (2008), Ball, Hill y Bass (2005) y Ball y Bass (2009). De manera más puntual, aparecen como antecedentes para reflexionar sobre la construcción del MTSK referencias al trabajo de Ma (1999) sobre la complejidad del conocimiento matemático que el profesor necesita para desempeñar su trabajo. Además, en dos publicaciones del año 2014 analizadas, los autores hacen referencia a otros modelos analíticos del conocimiento del profesor de matemáticas como son el *Knowledge Quartet* (Rowland *et al.*, 2009), en el caso de la publicación del PME 38 (Montes, Carrillo y Ribeiro, 2014) o el *Mathematical Proficiency for Teaching* (Kilpatrick, Blume y Allen, 2006) en el caso de la publicación de la Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores (Carrillo, Escudero y Flores, 2014b).

Paralelamente, en varias publicaciones del grupo SIDM de los años 2013 y 2014, tanto a nivel nacional en las actas de los simposios de la SEIEM, como a nivel internacional en el CERME 8, se empiezan a mencionar dificultades a la hora de utilizar el modelo MKT para analizar episodios concretos de clase. Estas dificultades pueden ser clasificadas en tres tipos. En primer lugar aparecen descritos, de manera recurrente, problemas relacionados con la definición del conocimiento especializado del contenido (SCK) y del conocimiento del contenido en el horizonte (HCK), dos de los subdominios del MKT. Es en ese momento cuando varios autores mencionan la necesidad de revisar el carácter especializado del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas. En concreto, se apunta a la importancia de no diferenciar el conocimiento especializado del conocimiento común como lo hacen en el MKT, así desde el punto de vista del MTSK, todo el conocimiento matemático del profesor es considerado como especializado para enseñar (de ahí la S en las siglas del nombre del modelo). Por otra parte, afloran también en las publicaciones de los años 2013 y 2014 dificultades al aplicar el MKT (con sus dominios, subdominios y categorías concretas) en la práctica para analizar episodios de profesores en acción al existir múltiples intersecciones de los distintos subdominios del MKT. Surge en ese momento la necesidad de redefinir los subdominios para que las fronteras estén más claras, desde el carácter especializado. En tercer lugar, cobra importancia la presencia de las creencias y las concepciones en el modelo MTSK a diferencia del MKT. Esta nueva componente se representa en el centro del esquema del modelo (hexagonal, véase por ejemplo Carrillo, Contreras y Flores, 2013) para indicar que afecta a todos los subdominios del modelo planteado. Los autores mencionan trabajos de autores como Thompson (1992), Leatham (2006) y Carrillo (1998) para introducir unas primeras reflexiones sobre esta compoenLas publicaciones revisadas, del año 2012 a los inicios del año 2015, dan cuenta de la evolución que ha tenido la presentación del MTSK en espacios nacionales e internacionales. Inicialmente, se habla de un modelo que ha sido construido mediante elucubración teórica en la UHU, España, como reacción a las dificultades identificadas en modelos como el MKT (Escudero, Flores y Carrillo, 2012) y de lo cual ya se expuso información en los párrafos anteriores. Posteriormente, se presenta el MTSK como un modelo analítico que se ubica en la perspectiva teórica “conceptualizaciones/modelos del conocimiento del profesor” (Ribeiro, *et al.* 2014) y, finalmente, en las publicaciones más recientes revisadas, se menciona que en los próximos años se espera que dicho modelo analítico pueda contribuir al diseño de dispositivos de formación que le permitan a los profesores de matemáticas avanzar en la adquisición del conocimiento especializado para su práctica profesional.

3. El modelo MTSK

El MTSK considera dos grandes dominios de conocimiento. Por un lado, consideramos el conocimiento que el profesor posee de las matemáticas como disciplina científica (MK). Por otro lado, consideramos el conocimiento de aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje (PCK). A continuación se describirán los subdominios correspondientes a cada dominio de conocimiento y se incluirán los resultados de nuestra revisión de trabajos en los que hacemos notar qué subdominios han sido más analizados hasta mediados de 2015. También en esta sección se incluyen comentarios sobre la presencia en las publicaciones analizadas de las creencias y concepciones, aspectos transversales a todos los subdominios en el MTSK. Hay que tener en cuenta que la organización del modelo en dominios y subdominios es una cuestión práctica, para ayudar a analizar episodios concretos, el modelo de conocimiento del profesor es un todo.

3.1. Subdominios

Dentro del dominio de conocimiento MK se consideran tres subdominios que componen y dan sentido al conocimiento matemático.

Conocimiento de los temas matemáticos (KoT): conocimiento que tiene el profesor sobre los contenidos matemáticos escolares. Integra el contenido que queremos que aprenda el alumno, con un nivel de profundización mayor (Escudero-Ávila *et al.*, 2015; p.57).

Conocimiento de la estructura de la matemática (KSM): conocimiento de las relaciones que el profesor establece entre distintos contenidos, ya sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. Se trata específicamente de conexiones entre temas matemáticos (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014; p. 59).

Conocimiento de la práctica matemática (KPM): conocimiento de las formas de proceder en matemáticas. Se trata de saber cómo se explora y se genera conocimiento en matemáticas, cómo se establecen relaciones, correspondencias y equivalencias, cómo se argumenta, se razona y se generaliza, qué papel tiene el convenio, y qué características tienen algunos de los elementos con los que se hacen matemáticas (como una definición o una demostración) (Flores-Medrano *et al.*, 2014; p. 61).

Igualmente, dentro del dominio de conocimiento PCK, consideramos tres subdominios que componen y dan sentido al conocimiento didáctico del contenido.

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM): conocimiento sobre cómo se produce el aprendizaje del contenido matemático, y cómo los alumnos interactúan con el mismo. Nos interesa el conocimiento relacionado con las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático (Flores-Medrano *et al.*, 2014; p. 63).

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): conocimiento de elementos útiles para la enseñanza de las matemáticas, pudiendo ser estos de distinta naturaleza, como materiales manipulativos, teorías sobre enseñanza, o dinámicas para trabajar cierto contenido en un aula (Montes, Escudero-Ávila, Flores-Medrano, Muñoz-Catalán y Carrillo, 2015). Al igual que en el KFLM, en este subdominio hablamos de conocimientos intrínsecamente dependientes de los contenidos matemáticos en sí.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): conocimiento de referentes sobre qué debería aprender un alumno en determinado momento de su escolarización (Montes *et al.*, 2015).

A partir de la revisión realizada de todas las publicaciones sobre el modelo MTSK hasta agosto de 2015, podemos afirmar que la mayoría de publicaciones describen los dos grandes dominios de conocimiento, MK y PCK, sin embargo, a la hora de profundizar en los análisis, observamos mayor número de publicaciones que abordan cuestiones relacionadas con dominio matemático (MK). En la Tabla 1 mostramos a continuación el número de apariciones de cada subdominio en las distintas publicaciones analizadas. Es de destacar que el subdominio KoT es el más analizado, seguido de KSM y KFLM. A partir de la Tabla 1 podemos observar que los subdominios menos explorados son el KPM, KMT y KMLS, lo que sugiere que se necesitan más investigaciones que atiendan a estos subdominios.

Hemos de señalar que también aparecen en algunos estudios relaciones entre distintos subdominios, de las que podemos distinguir relaciones entre subdominios del mismo dominio, y relaciones entre subdominios de diferentes dominios. Desde nuestro punto de vista, el estudio de las relaciones entre subdominios es especialmente importante pues permite el regreso a la integración de todos los elementos que pueden ser estudiados en la práctica de manera diferenciada, enfatizando que la consideración de los 6 subdominios sólo tiene fines analíticos.

Tabla 1.
Subdominios abordados en las distintas publicaciones hasta agosto 2015.

DOMINIOS DE CONOCIMIENTO	SUBDOMINIOS	SUBDOMINIOS DESCRITOS	SUBDOMINIOS ANALIZADOS
MK	KoT	39	27
	KSM	39	20
	KPM	39	18
PCK	KFLM	31	20
	KMT	31	15
	KMLS	31	11

A continuación incluimos una descripción de las categorías y los indicadores que emergen de los estudios realizados para cada subdominio. A este nivel tan concreto se llega especialmente en los trabajos de tesis doctorales, según nuestra revisión.

3.1.1. Categorías

Como hemos mencionado anteriormente, el modelo MTSK ha ido evolucionando. Así, en el inicio, algunos autores hacían un trabajo desde un punto de vista teórico, con los primeros bocetos de los distintos subdominios hasta su consolidación y, con el paso del tiempo, el modelo empieza a ser utilizado para analizar la práctica docente. De este análisis de la práctica y de la elucubración teórica surge la necesidad de ir elaborando un *sistema de categorías* dentro de cada subdominio que nos permita profundizar en el conocimiento que usa o tiene el profesor a este respecto. Desde la revisión de las publicaciones realizada, podemos decir que éstas se encuentran todavía en construcción y evolución, pero destacamos a continuación las más usadas (Flores-Medrano *et al.*, 2014).

- Categorías de KoT: *Fenomenología; Propiedades y sus fundamentos; Registros de representación; Definiciones; Procedimientos.*
- Categorías de KSM: *Conexiones de complejización; Conexiones de simplificación; Conexiones de contenidos transversales; Conexiones auxiliares.*
- Categorías de KPM: *Prácticas ligadas a la matemática en general; Prácticas ligadas a una temática en matemáticas.*

- Categorías de KFLM: *Formas de aprendizaje; Fortalezas y Dificultades asociadas al aprendizaje; Formas de Interacción de los alumnos con el contenido matemático; Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas.*
- Categorías de KMT: *Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza; Recursos materiales y virtuales; Actividades, tareas, ejemplos, ayudas.*
- Categorías de KMLS: *Contenidos matemáticos se requieren enseñar; Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado; Secuenciación de diversos Temas.*

Tras el análisis de todos los trabajos podemos destacar que, al ser el subdominio KoT el más analizado (Tabla 1), son sus categorías las más estudiadas. Resumidamente podemos afirmar que las categorías más analizadas son:

- Dentro del subdominio KoT: *Definiciones*; *Propiedades; Procedimientos.*
- Dentro del subdominio KFLM: *Fortalezas y dificultades*; *Formas de aprendizaje.*
- Dentro del subdominio KMT: *Recursos.*

Pasamos ahora a presentar los indicadores que emergen de las categorías.

3.1.2. Indicadores

Siguiendo el trabajo de Rojas (2014), las categorías e indicadores fueron creados "[...] para aproximarnos a una comprensión del conocimiento del profesor en la práctica" (p. 12). Partiendo de esta idea, la autora elabora un conjunto muy detallado de indicadores para cada subdominio de conocimiento, que pasamos a describir a continuación a modo de ejemplo para ofrecer una visión lo más completa posible del estado del MTSK en la actualidad. Hay que destacar que trabajos de tesis posteriores también incluyen distintos indicadores para las categorías analizadas.

Indicadores de KoT:

Conceptos: *Conocer elementos de la estructura conceptual; Conocer los distintos temas, conceptos y procedimientos; Precisión de las definiciones, propiedades y relaciones entre los conceptos; Conocer etapas de la evolución histórica del contenido.* Fenomenología: *Conocer distintos significados del concepto y de las operaciones en diversas representaciones; Referencias a campos de utilidad del contenido; Conocer los contextos que aparecen las diversas situaciones.* Procedimientos Matemáticos: *Dominio de indicadores de cada operación o de campo de problemas relacionados; Dominio de conceptos y procedimientos.* Sistema de Representación: *Conocer distintos sistemas de representación.* Aspectos de Comunicación: *Amplitud y precisión del lenguaje formal/algebraico utilizado según el nivel de enseñanza; Conocer expresiones cotidianas; Conocer el lenguaje utilizado en la vida cotidiana.* Tareas Matemáticas: *Conocer tareas que ponen de manifiesto los distintos significados del contenido; Conocer y crear ejem-*

plos donde el tema tenga un papel relevante, enmarcados en un contexto y un contenido matemático; Grado en que las situaciones dan sentido al contenido matemático escolar.

Indicadores de KSM:

Relaciones entre componentes de la estructura conceptual: *Relaciones entre los contenidos matemáticos; Relaciones o conexiones entre elementos de la estructura conceptual; Establecimiento de relaciones entre los tipos de representación empleados.*

Indicadores de KPM:

Modos de proceder en matemáticas: *Hacer usos de distintas formas de proceder en matemática; Sentido dado a los algoritmos según el significado empleado.*

Indicadores de KFLM:

Características de aprendizaje: *Conocer cómo se desarrolla la cognición; Conocer concepciones e ideas previas de los estudiantes; Saber identificar qué imagen del concepto o procedimientos tienen los estudiantes; Identificar los elementos de la argumentación en el proceso; Expresar con claridad matemática las respuestas a las preguntas y dudas de los estudiantes.* Errores y dificultades: *Conocer los errores y las dificultades más comunes; Conocer indicadores de la presencia de errores conceptuales; Saber planificar tareas con el objeto de prever dificultades de los estudiantes; Presentar explicaciones a los estudiantes cuando tienen dificultades.* Tareas Matemáticas: *Presentar tareas matemáticas que refuerzan los conceptos o procedimientos matemáticos; Explicar criterios para adaptar las tareas propuestas a las finalidades de aprendizaje; Presentar tareas adecuadas para recordar los caminos de aprendizaje que se intuyen.* Materiales y recursos: *Promover acciones que permiten el empleo de recursos y situaciones que envuelvan diversos significados y contextos.*

Indicadores de KMT:

Estrategias: *Conocer estrategias para abordar un error o una dificultad; Conocer o saber desarrollar líneas argumentales que faciliten la adquisición de los conceptos y procedimientos.* Sistemas de Representación: *Saber elegir los sistemas de representación para la enseñanza; Conocer una variedad adecuada de los sistemas de representación que se emplean en las tareas.* Tareas Matemáticas: *Criterios explícitos para justificar que las tareas planteadas son adecuadas al nivel escolar y cognitivo de los estudiantes; Tareas propuestas en relación con la diversidad del alumnado; Repertorio de tareas que permiten adquirir o reforzar los conceptos matemáticos; La evidencia de que el profesor dispone de un esquema de instrucción; Riqueza de las tareas matemáticas propuestas o improvisadas en el transcurso de la enseñanza.* Materiales y recursos: *Conocer materiales o recursos didácticos empleados para la enseñanza; Saber adecuar los recursos y materiales según el nivel de enseñanza y las finalidades previstas; Saber justificar la utilidad de los materiales o recursos didácticos para el proceso de aprendizaje.*

Indicadores de KMLS:

Lenguaje matemático: *Promover la formalización de las escrituras, los fundamentos matemáticos de las definiciones y de los algoritmos.* Proceso de instrucción: *Disponer de criterios para asociar los objetivos de aprendizaje planteados; Saber hacer referencia a los contenidos esperados que aprendan los estudiantes.* Orientaciones Curriculares: *Conocer estándares de aprendizaje surgidos de investigaciones; Conocer los conceptos, propiedades, relaciones, problemas, etc., del tema; Saber cómo indica el currículo que el tema; Reflejar los contenidos mínimos previstos en el currículo escolar; Comprender los elementos que diferencian las expectativas de aprendizaje y los contenidos de cada nivel; Saber justificar si las tareas enunciadas se adaptan o enriquecen según las orientaciones propuestas en los documentos oficiales; Saber justificar la adecuación entre las propuestas de gestión que se ponen en juego y las previstas en las recomendaciones metodológicas según el currículo escolar; Saber justificar el uso que se hace de materiales y recursos didácticos; Conocer orientaciones curriculares emitidas por asociaciones de profesores, grupos de investigaciones, entre otros.*

Para finalizar la sección 3, pasamos a presentar las creencias.

3.2. Creencias

Las creencias formaron parte del MTSK desde su inicio. Se presentan juntamente con las concepciones, y no es objetivo de las investigaciones realizadas desde el MTSK hacer una distinción entre concepciones y creencias. Según Carrillo *et al.* (2014a), existe una estrecha relación entre los conocimientos del profesor y sus creencias, de forma que estas influyen directamente sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Nuestro objetivo es observar cómo los autores de las tesis y artículos analizados presentan las creencias. Percibimos que no hay ningún trabajo entre los analizados en el que el objetivo principal sea analizar las creencias, pero estas siempre aparecen cuando se analiza el conocimiento especializado de los profesores.

En primer lugar incluimos algunos ejemplos observados sobre las creencias y concepciones de los profesores investigados en las publicaciones del grupo SIDM analizadas. Hemos encontrado concepciones previas erróneas sobre lo que es o no una definición (caso de los polígonos en Climent, Carreño y Ribeiro, 2014; caso del infinito, en Montes, 2015). Por otra parte, también hay referencias a concepciones erróneas por parte de los futuros profesores analizados sobre la práctica y la estructura de las matemáticas (un ejemplo sería el mal uso del ejemplo y el contra-ejemplo, en Moriel-J, Wielewski, Montes, 2013; o la forma de comprender las operaciones con matrices y transmitirlas de manera local, sin relación con otros contenidos, en Carreño, Rojas, Montes, Flores-Medrano, 2013).

En segundo lugar, incluimos a continuación nuestras observaciones sobre las concepciones o creencias de los propios autores de las publicaciones revisadas. Algunas de estas concepciones son por ejemplo las siguientes: para trabajar con la formulación de problemas, los profesores necesitan tener conocimientos matemáticos (KoT, KSM, KPM); es necesaria la modificación de los planes de estudios de los grados de maestro para tratar de eliminar las deficiencias en la formación matemática de los maestros.

Como hemos visto, dentro del modelo aparecen las creencias como algo propio del MTSK, estas permean el conocimiento, pero hay que destacar que pocas veces quedan reflejadas explícitamente en los estudios. En este sentido, hemos observado que solo aproximadamente un tercio de los trabajos analizados hacen alguna referencia a las creencias, lo cual nos lleva a resaltar la importancia de realizar investigaciones cuyo objetivo sea la profundización de esta parte tan importante del MTSK.

4. Utilización del MTSK

En esta sección se expone cómo se ha ido utilizando el MTSK como marco para el análisis del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Nos fijamos en el nivel de explotación de cada uno de los subdominios del modelo descritos en la Sección 3 de este documento y destacamos también los contextos, niveles educativos y bloques de contenidos estudiados.

Como hemos mencionado en la introducción, en esta comunicación hemos analizado 39 artículos publicados entre 2012 y agosto de 2015, que emplean el MTSK para profundizar en el estudio de uno o más subdominios; 27 artículos están publicados en español, siete en inglés y cinco en portugués. En el dominio MK prevalecen más investigaciones, pues tan sólo en el KoT se agrupan 23 trabajos, 15 recurren al estudio del KSM al igual que al análisis del KPM. Por su parte, el dominio PCK se mantiene en el segundo lugar con un menor número de investigaciones, pues ubica 14 trabajos en el KFLM, 10 en el KMT y seis en el KMLS.

Las tesis doctorales desarrolladas bajo la perspectiva teórica del MTSK y donde se abordan cada uno de los dominios y subdominios son cinco en el periodo analizado. En el año 2014 se publicó una tesis en español y una en portugués, y en el año 2015 tres tesis en español fueron presentadas en la UHU.

En el año 2013 se publicaron 13 investigaciones sobre el MTSK en español, inglés y portugués en diferentes congresos como el CERME, la SEIEM, el CIBEM, el CIEM, así como capítulos de libros. De estas investigaciones, nueve artículos se dedican a la presentación del MTSK y a establecer una serie de comparaciones con otros modelos para justificar su origen, como por ejemplo con el MKT. En el resto de las investigaciones (cuatro), el KoT es el subdominio más estudiado (tres de ellas); el KPM y el KFLM sólo se revisan en dos trabajos, mientras que el KSM y el KMT únicamente se analizan en una investigación.

Las publicaciones dedicadas a la presentación y discusión del MTSK continúan siendo un tema vigente para el año 2014 en congresos y revistas en español, inglés y portugués (SEIEM, CLAME, PME 38, CNFP, Revista ADMP, Escuela Abierta y en Materiales UHU). En el dominio MK se ubican nueve trabajos en el KoT, seguido por el KSM con ocho y, al final el KPM con seis.

En el PCK, sólo se encuentran cuatro artículos en el KMT al igual que en el KFLM, mientras que en el KMLS existen tres.

En el primer semestre del año 2015 se han contabilizado 13 investigaciones (español y portugués) presentadas en congresos y revistas nacionales e internacionales (CIAEM, PNA, ETM4, Revista de Educación, BOLEMA, Números, Enseñanza de las Ciencias y capítulos de libros). La mayoría de los trabajos se concentran en el estudio del KoT (11), seguido por el KPM (7) y luego el KSM (6); todos ellos ubicados en el dominio MK. En el dominio PCK, el subdominio KFLM agrupa ocho investigaciones, el KMT cinco y el KMLS una.

4.1 Contextos

Conforme hemos ido analizando las publicaciones que tenemos hasta el momento sobre el modelo, hemos observado que podemos distinguir diferentes contextos donde ha sido utilizado: formación inicial, profesor en activo y formación continua del profesorado. Pasamos brevemente a describir cada uno de ellos.

Formación inicial: se trata de investigaciones realizadas con estudiantes que están recibiendo formación universitaria para ser profesores (futuros profesores).

Profesor en activo: se trata de investigaciones realizadas con profesores que se encuentran en el aula impartiendo clases.

Formación continua: se trata de profesores en activo que están recibiendo voluntariamente algún tipo de formación para "mejorar" su docencia.

Tras el análisis podemos señalar que existen más publicaciones en el contexto de formación inicial, seguido de profesores en activo. Siendo el contexto de formación continua el menos explotado.

4.2 Niveles educativos

Conforme hemos ido analizando las publicaciones hemos observado que podemos distinguir diferentes niveles educativos donde se ha investigado o se podría investigar con el modelo MTSK: Ed. Infantil, Ed. Primaria, Ed. Secundaria, Bachillerato, Grado en Matemáticas, Grado en Ed. Infantil, Grado en Ed. Primaria, Postgrado o Máster Universitario en Profesorado de Ed. Secundaria y Doctorado.

Dentro de la *formación inicial* consideramos los estudiantes que se encuentran cursando el Grado de Ed. Infantil, Grado de Ed. Primaria, Grado en Matemáticas (incluyendo en éste el Máster Universitario en Profesorado de Ed. Secundaria). Respecto a lo analizado hasta el momento en lo referente a formación inicial, donde se ha investigado más ha sido sobre estudiantes que se encuentran cursando el Grado de Ed. Primaria.

Dentro de los *profesores en activo* consideramos los profesores que se encuentran en una aula de la Etapa de Infantil, Primaria, Secundaria, Bachillerato, Grado de Infantil, Grado de Primaria, Grado en Matemáticas y

Postgrado o Máster Universitario en Profesorado de Ed. Secundaria. Con respecto a profesores en activo existe un mayor número de publicaciones analizando profesores de Secundaria.

Dentro de la *formación continua* consideramos los profesores en activo que están realizando cursos de formación. Éstos pueden ser profesores de la Etapa de Infantil, Primaria, Secundaria, Bachillerato, Grado de Infantil, Grado de Primaria, Grado en Matemáticas. En este último caso, en las publicaciones revisadas hasta agosto de 2015, los estudios se centran exclusivamente en profesores de Secundaria y son escasos.

Los resultados analizados muestran que hasta el momento existen algunas pinceladas de casi todos los niveles educativos, aunque es de destacar que en Doctorado no existen investigaciones. No conocemos si puede ser factible analizar MTSK en este nivel ya que somos conscientes de la dificultad y el tiempo que esto supondría. A nivel de Ed. Infantil solo encontramos una publicación al respecto, pero nos consta que en la actualidad se están desarrollando varias al ser conscientes desde el SIDM de la importancia del trabajo en este nivel. En el nivel de Universidad (Grado en Matemáticas) también encontramos pocas publicaciones. En Postgrado encontramos algunos trabajos donde el informante es profesor en activo y está cursando algún tipo de formación inicial. Es de destacar que en la etapa de Secundaria encontramos publicaciones tanto de profesores en activo como formación continua y formación inicial. En cambio en la etapa de Primaria no encontramos estudios con el modelo MTSK en formación continua.

Finalizamos la sección 4 presentando los bloques de contenidos más analizados.

4.3 Bloques de contenidos

Hemos considerado las áreas de contenido matemático que se establecen en el NCTM (2000) como cinco estándares de contenidos la enseñanza obligatoria: *Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y Probabilidad*. Paralelamente, hemos incluido también el *bloque de Análisis Matemático* al avanzar el nivel educativo (final de Secundaria, Bachillerato y Universidad).

Con respecto a los temas analizados hasta el momento observamos que, independientemente del nivel educativo estudiado, podemos destacar que el *bloque números* es el más analizado y dentro de éste nos atrevemos a decir que el contenido *fracciones* es el que tiene un mayor número de publicaciones. Este contenido está seguido por el *bloque geométrico.* Normalmente el *bloque de magnitud y medida* está ligado a la geometría por lo que a veces hemos considerado ambos. Hay que destacar que el *bloque de análisis de datos y probabilidad* es el menos analizado hasta el momento. Por último, hemos de indicar que se ha considerado el *infinito* como contenido transversal, por tanto considerándolo en cada uno de los bloques de contenidos. Los lectores interesados pueden consultar en el Anexo I los detalles sobre los temas y niveles tratados en cada publicación analizada.

Completamos nuestro estudio con unas últimas reflexiones sobre las metodologías de investigación utilizadas en las publicaciones revisadas.

5. Metodología

En este apartado describiremos brevemente la metodología utilizada para el desarrollo de esta comunicación y, en segundo lugar, se hace un repaso de las metodologías de investigación utilizadas en cada uno de los trabajos analizados que utilizaron el MTSK como modelo teórico y/o metodológico.

5.1 Metodología para desarrollar esta comunicación

Como se ha mencionado en la introducción de esta comunicación, para elaborar nuestros análisis creamos algunos instrumentos para resumir y organizar la información de todos los trabajos a analizar. Para tratar de sintetizar y presentar ordenadamente la información en las jornadas, fueran diseñadas las siguientes preguntas que también han servido de guía para desarrollar esta comunicación.

1. ¿Cuándo surge la necesidad de elaborar un nuevo modelo de formación de profesores de matemáticas? ¿Por qué? Antecedentes.
2. ¿Cuándo se empieza a presentar el nuevo modelo? ¿Dónde y cómo se presenta?
3. ¿Qué dominios/subdominios de conocimiento se analizan en detalle desde entonces? ¿Qué categorías han ido apareciendo? ¿Qué dificultades van apareciendo para definirlas?
4. ¿Y las creencias? ¿Cómo aparecen? ¿Del profesor analizado? ¿De los autores de la publicación?
5. ¿Cómo se empieza a "explotar" en investigación el nuevo modelo?
6. ¿Qué metodologías de investigación se utilizan para estos análisis?
7. ¿En qué contextos se "explota" el MTSK? ¿En qué niveles educativos se ha analizado ya? ¿En qué bloques de matemáticas se ha analizado ya?
8. ¿Qué tipos de publicaciones se han hecho (que no sean presentación del modelo o *surveys*) usando el MTSK?

Además de estas cuestiones, en la fase final de los análisis, se diseñaron cuatro cuestiones más para organizar las conclusiones del estudio, detectando puntos fuertes y áreas de mejora y dando sugerencias para estudios futuros que complementan los análisis realizados hasta el momento. Estas conclusiones han sido incluidas en los distintos apartados de este trabajo.

Para completar la sección 5, pasamos a describir las metodologías utilizadas en las publicaciones analizadas teniendo el MTSK como marco teórico y/o metodológico.

5.2 Metodologías de los trabajos sobre el MTSK

Las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas pueden seguir abordajes distintos, dependiendo del paradigma en el que se basen. Hay autores que clasifican las investigaciones en cuantitativas o cualitativas. Pero, hay otros como Guba y Lincoln (1994) que prefieren hacer un análisis comparativo entre realista o relativista y clasificar las investigaciones considerando aspectos ontológicos, epistemológicos y metodológicos (Santos, 2000).

En términos metodológicos, en general las investigaciones en Didáctica de la Matemática pueden centrarse en al menos dos paradigmas distintos: por un lado tenemos el paradigma interpretativo y en el otro extremo tenemos el paradigma positivista. En esta comunicación no tenemos como objetivo presentar o diferenciar cada metodología, pero sí ver las metodologías más utilizadas en las publicaciones e investigaciones hechas a partir del marco teórico y/o metodológico MTSK. En la tabla siguiente se resume la información relacionada con los aspectos metodológicos citados, distinguiendo entre artículos y tesis doctorales por tratarse de documentos de naturaleza muy distinta en lo que a cuestiones metodológicas se refiere.

Tabla 2.
Síntesis de las metodologías utilizadas en las publicaciones y tesis basadas en MTSK

Año	Publicaciones	Tesis	
		Paradigma	Metodología
2012	Revisión teórica.	No hay tesis en 2012-13.	No hay tesis en 2012-13.
2013	Estudio de Caso; Revisión de Literatura; Discusión y presentación teórica; *Survey*.		
2014	Estudio de Caso; Presentación y Revisión teórica; *Practice-based approach*.	No presenta.	Análisis de contenido; Estudio de caso.
2015	Estudio de caso; Revisión de Literatura; Revisión teórica.	Interpretativo.	Estudio de caso; Análisis documental; *Grounded Theory*.

La mayoría de las publicaciones que tienen el MTSK como marco teórico-metodológico utilizan el estudio de caso cómo principal metodología de investigación. También hemos encontrado muchos artículos, especialmente en los primeros años, cuya metodología es el *survey*.

Finalizamos esta sección con la siguiente cuestión: ¿Qué metodologías, distintas de las presentadas en la Tabla 2, podrían ser utilizadas también para investigar desde el MTSK? Esperamos que las futuras publicaciones puedan contestar nuestra pregunta.

6. Conclusiones

A raíz de la revisión realizada para elaborar este trabajo, a través del cual se ha podido poner de relieve el volumen y la calidad de las publicaciones en relación al MTSK, se sugieren las siguientes indicaciones para trabajos futuros por parte de los miembros del SIDM de cara a la continuación de la explotación del modelo MTSK. Por una parte, se aconseja realizar nuevas propuestas en las que se profundicen los análisis de las relaciones entre los distintos subdominios, completando en paralelo el estudio de categorías de los subdominios menos analizados, como es el caso del KMLS. Hay que destacar la necesidad de diseñar propuestas en las que el análisis de las creencias sea objetivo principal. Propuestas con profesores de matemáticas en formación continua son especialmente necesarias en el caso de infantil y primaria. En lo que se refiere a los bloques temáticos, sería muy interesante diseñar actividades para su análisis relacionadas con el bloque de Estadística y Probabilidad en todos los niveles educativos.

Finalmente, y para dar mayor difusión de los trabajos del grupo SIDM, sería aconsejable desarrollar publicaciones en inglés y establecer colaboraciones con investigadores de otros grupos de investigación nacionales e internacionales interesados en el tema del conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas para diversificar los trabajos.

Referencias

Ball, D. L. y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper presented at The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference.

Ball, D. L., Hill, H.C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. Sholz, R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M. y Flores, P. (2014). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 2976-2984). Antalya, Turquía.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones.* Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la*

Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. (2014a). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Escudero, D. y Flores, E. (2014b). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. FOR-MATE. *Revista de Análisis Matemático-Didáctico para profesores, 1*(1), 16-26.

Climent, N. Carreño, E. y Ribeiro, M. (2014). Elementos de conocimiento matemático en estudiantes para profesor de matemática. El caso de los polígonos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1761-1769). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Escudero, D, Flores, E. y Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio y Flor M. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 35-42). México DF: Cinvestav.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77. [http://hdl.handle.net/10481/37190]

Guba, E. y Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. En N. Denzin e Y. Lincoln (Eds), *Handbook of qualitative research* (pp. 105-117). London: Sage Publications.

Kilpatrick, J., Blume, G. y Allen, B. (2006). *Theoretical framework for secondary mathematical knowledge for teaching.* Unpublished manuscript, University of Georgia and Pennsylvania State University.

Leatham K. R. (2006). Viewing Mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education 9*(1), 91–102.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Montes, M., Carrillo, J. y Ribeiro, C. M. (2014) Teachers knowledge of infinity, and its role in classroom practice. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, C. y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 4, pp. 234-241). Vancouver, Canadá: PME.

Montes, M., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2015). El foro como contexto de exploración del conocimiento profesional de maestros en activo. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 381-389). Alicante: SEIEM.

Montes, M.A. (2014). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso.* Tesis doctoral publicada en http://goo.gl/nIxbKq. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Moriel-J, J. Wielewski, G. y Montes, M. (2013). *Conhecimentos Mobilizados durante uma formaçao docente sobre por quês matemáticos: O caso da divisão de fraçoes.* Rio Grande do Sul, Brasil. VI CIEM.

Ribeiro, C. M., González, M. T., Fernández, C., Sosa, L., Escudero, D., Montes, M. A. y Toscano, R. (2014). Mejorar nuestro propio conocimiento mediante el análisis de un episodio de la práctica: distintos focos de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 553-562). Salamanca: SEIEM.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos.* Universidad de Granada, España: Tesis no publicada.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching.* London: SAGE.

Santos, L. (2000). *A práctica letiva como actividade de resoluçao de problemas. Um estudo com três professores do ensino secundário*. Lisboa: APM.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: McMillan.

11 LA INVESTIGACIÓN SOBRE MTSK EN LAS DISTINTAS ETAPAS EDUCATIVAS

Muñoz-Catalán, M.C.
Montes M.A.

Introducción

En este documento presentamos las principales ideas entorno a las cuales gira este tema que se presenta en forma de coloquio. Centra su atención en las relaciones entre el modelo del MTSK y las distintas etapas educativas, aunque son las etapas ubicadas en los extremos del continuo educativo las que han impulsado la reflexión que aquí presentamos. Tratamos de responder a las siguientes preguntas:

-¿Cómo se va nutriendo el modelo de las especificidades de cada etapa?

-¿Cómo la investigación con MTSK está contribuyendo a una mejor comprensión del conocimiento necesario para enseñar en cada etapa?

Respondemos a las siguientes preguntas sobre la base de nuestra experiencia como formadores e investigadores.

Muñoz-Catalán. M.C., Montes, M.A. (2016). La investigación sobre MTSK en las distintas etapas educativas. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 87-93). SGSE: Huelva.

1. El MTSK y la etapa de Educación Infantil

Cuando pensamos en el maestro de infantil, ya sea como investigadores o formadores, necesitamos tener presentes las características relevantes que definen su perfil profesional y su entorno matemático. Destacamos las siguientes:

-Su formación matemática es escasa. Se suele limitar a lo aprendido a lo largo de la escolaridad y a lo trabajado en las escasas asignaturas que los Grados actuales incluyen en sus planes de estudio para este profesional.

-En la formación inicial del maestro tienen un peso muy importante aspectos psicológicos, pedagógicos de naturaleza general, así como cuestiones relacionadas con la realización de manualidades y conocimiento de materiales.

-Su conocimiento matemático, por tanto, suele ser un conocimiento muy superficial, compartimentado, con muchas lagunas y errores conceptuales.

-La matemática escolar de esta etapa se concibe como un conjunto muy limitado de conceptos que convierte a los alumnos en usuarios de matemáticas. En general, no se entiende la matemática como una manera de *conocer* el entorno sino como una manera de *hacer* cosas en él (Bishop, 1999).

-Las matemáticas en esta etapa, según el currículo, están supeditadas al desarrollo de las 3 áreas[12], y aparecen con mucha ambigüedad. No se proporcionan herramientas al profesor acerca de qué impartir, cómo organizarlo y secuenciarlo y cómo hacerlo.

-El conocimiento matemático a impartir no suele problematizarse durante el diseño instruccional. En este proceso se prima la realización de juegos y tareas novedosas, cuyo aprendizaje matemático parece que es una consecuencia colateral.

En relación con la primera pregunta formulada, ¿cómo se va nutriendo el modelo de las especificidades de cada etapa?, la hemos abordado desde la siguiente pregunta: ¿Qué aspectos de conocimiento consideramos que deberían estar presentes en cada subdominio, a modo de categorías o indicadores, cuando estamos trabajando con el MTSK en la etapa de infantil? De alguna manera, consideramos que la lectura conjunta de estas categorías/indicadores debe dar cuenta de los conocimientos pilares que debe caracterizar o articular al conocimiento del profesional de la etapa.

Asumimos que el modelo está en elaboración. Hasta ahora disponemos de categorías/indicadores de dos niveles: un nivel más abstracto, en el que estos elementos se han ido consensuando a medida que iban emergiendo de las investigaciones en curso y se intentaba que fueran válidos para cualquier contenido matemático y nivel educativo (habitualmente pensado para niveles escolares avanzados, e.g. Muñoz-Catalán, Montes, *et. al.*, 2013). Otro nivel, más específico, en el que dichas categorías/indicadores se ajustan al contenido matemático particular que se ha estudiado en una investigación (quizás también ajustado o dependiente del curso escolar de donde proceden los datos, e.g. Rojas, 2014, Gomes-Moriel, 2014, Montes, 2015). Pensamos que quizás sea

[12] Conocimiento de sí mismo y autonomía personal, conocimiento del entorno y lenguaje: comunicación y representación.

útil otro nivel, con un grado de concreción siguiente al genérico, impulsado por las características de la etapa escolar. Por ejemplo, hay contenidos matemáticos cuyo grado de explicitud va variando entre las etapas escolares como ocurre, por ejemplo, con los conocimientos lógicos matemáticos o los tipos de geometría.

Tabla 1: Elementos que caracterizan el conocimiento especializado del profesor de infantil

MK	PCK
KoT Creemos que no existe mucha diferencia a nivel de categorías con otras etapas. Sin embargo, el maestro de infantil debe poseer un buen KoT a nivel fenomenológico, de registros de representación y, principalmente ligados a los bloques de: números y operaciones y geometría. -Las propiedades matemáticas de los procesos lógicos matemáticos se podrían considerar como elementos del KoT (ej. seriación o clasificación).	**KMT** -Habrá que poner de relieve la importancia de conocer y diseñar situaciones reales potencialmente significativas social, cultural y matemáticamente, donde los conceptos y los procedimientos propios de esta área adquieren un significado funcional real (RP). -Conocimiento de recursos materiales para modelizar conceptos. -Lenguaje: selección de términos próximos al concepto que ayuden a los alumnos a intuir conceptos.
KSM Este subdominio debe ser examinado con detenimiento, porque proporciona entidad matemática a los contenidos escolares. -Importante las conexiones de simplificación y complejización, consideradas como una categoría única. -Conexiones transversales: ¿grandes ideas y conocimiento lógico matemático? -No creemos que exista conexiones auxiliares. -Lenguaje: Utilización de términos para marcar las diferencias o las similitudes (clasificaciones inclusivas/ excluyentes)	**KFLM** -No vemos la categoría de concepciones de los estudiantes sobre la matemática. -Habrá que destacar el conocimiento sobre proceso de razonamiento y construcción de conceptos. Desde la perspectiva de la formación de maestros, se echa en falta investigaciones que aborden este proceso de construcción y aprendizaje desde el área de Didáctica de la Matemática. -Fortalezas y dificultades (no errores) en el proceso de aprendizaje.
KPM -Aunque deben existir coincidencias con el de otras etapas, el conocimiento de estas prácticas pueden aparecer más vinculadas al lenguaje, la resolución de problemas y a aspectos del conocimiento lógico-matemático, considerándolos como procesos de razonamiento.	**KMLS** Coincidencia con otras etapas. Particularidad de la indefinición del curriculum en infantil.

En la tabla 1, presentamos aquellos elementos de conocimientos que consideramos que deben estar presentes y caracterizar al conocimiento matemático especializado del profesor de la etapa o aquellos que parecen no ser tan relevantes. Utilizamos la organización por subdominio.

2. El MTSK y la etapa de educación secundaria

Si centramos nuestra mirada ahora en el conocimiento del profesor de secundaria, encontramos ciertas características de su conocimiento, o que influyen en este, derivadas de factores como: la formación inicial, la cultura escolar en secundaria, o la naturaleza de la matemática en este nivel. Son relevantes las siguientes:

- La formación matemática de los profesores de secundaria suele ser sólida, si bien en los últimos años existe un auge de profesores de matemáticas cuya formación no es específicamente matemática (ingenieros, biólogos, químicos), y cuya visión de la disciplina está, de forma natural, sesgada por el uso que se hace de ésta en su disciplina de origen.

- La formación inicial, en cuanto al conocimiento didáctico, es escasa. Actualmente en España, sólo en el Máster de Secundaria se recibe un módulo específico obligatorio de Didáctica de la Matemática. Esto lleva a que, habitualmente, la estrategia de enseñanza del contenido sea el propio contenido en sí, sin ningún tipo de transformación para hacerlo más comprensible, más que la dada por la sensibilidad del profesor hacia las reacciones de sus alumnos.

- En esta etapa, el currículo está segmentado por bloques, entre los que no se suele plantear la exploración de relaciones. Así, los temas ligados al álgebra, tienden a estar claramente diferenciados de los de geometría, análisis, o estadística, por ejemplo.

- Finalmente, existe el condicionante de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU), que lleva a que el objetivo de aprendizaje de algunos (y no pocos) profesores, sea la superación de la prueba en si, y no un aprendizaje significativo del contenido matemático.

Centrándonos ahora en cómo el modelo MTSK se nutre (o ha nutrido) de la investigación en las diferentes etapas educativas, debemos tener cierta visión retrospectiva sobre el proceso de génesis de MTSK. Este modelo emerge, tanto de la sensibilidad teórica desarrollada a lo largo de los años en las discusiones del SIDM, como, desde el momento de su inicial conceptualización, de las investigaciones incipientes o en curso en aquel momento (Carmona, 2011; Montes, 2011; Rojas, 2014; Montes, 2015, Escudero-Ávila, 2015; Flores-Medrano, 2015; Vasco, 2015; Carreño, en desarrollo; Aguilar; 2016). La mayoría de estas investigaciones tienen como contexto de investigación la educación secundaria, y al haberse seguido un proceso basado en la Grounded Theory (Strauss y Corbin, 1990), el modelo está intrínsecamente impregnado de las especificidades de la etapa.

3. ¿Cómo la investigación con MTSK está contribuyendo a una mejor comprensión del conocimiento necesario para enseñar en cada etapa?

El caso del maestro de infantil

Una de las principales influencias del MTSK en el conocimiento del profesor de infantil tiene que ver con otorgarle profundidad y entidad matemática. A pesar del carácter tan elemental de las matemáticas en esta etapa a nivel de conceptos, las investigaciones en curso y nuestra experiencia como formadores están poniendo de manifiesto las grandes carencias matemáticas de estos maestros en el subdominio del KoT. Por tanto, se trata de un subdominio cuya pertinencia y relevancia es una constante en todas las etapas educativas y en infantil se justifica por ser la etapa donde se sustentan las bases.

El KSM, por su parte, se está relevando como un subdominio clave para el profesional de esta etapa (Ribeiro, Muñoz-Catalán y Liñán, 2015). Los contenidos matemáticos de esta etapa pueden concebirse sustento de contenidos posteriores, es decir, como piezas que bien conectadas y compactadas promueven aprendizajes matemáticos avanzados.

En la medida en que las matemáticas en esta etapa pueden concebirse como un contenido que ayuda a dotar de significado a situaciones relevantes para la vida del niño, y, por tanto, como una actividad humana que se desarrolla a través de la resolución de problemas, entendemos que el KPM es un subdominio que debe estar presente. Habrá que indagar cuál es su contenido y alcance para esta etapa, que quizás posea un contenido de menor amplitud que los de KSM o KoT o del mismo subdominio en otras etapas.

El caso del profesor de secundaria

El profesor de secundaria, ha sido habitualmente estudiado como un conocedor profundo de la matemática escolar. Por tanto, MTSK nos ha aportado la posibilidad de distanciarnos de lo ‘local’ de ciertas investigaciones, y, a través del sistema de subdominios y categorías del conocimiento matemático, comprender cómo se interrelacionan diferentes parcelas de conocimiento.

La principal aportación que creemos puede hacer el modelo MTSK al estudio del conocimiento del profesor de secundaria es el énfasis que este modelo hace en el conocimiento didáctico del contenido, ya que esta línea de trabajo, pese haber sido explorada en algunas investigaciones, creemos no ha recibido la debida atención en contextos de investigación. Especialmente, el estudio de KMT, y KFLM puede poner de relieve aquellos aspectos que los profesores desarrollan de forma más natural (dada la escasez de la formación recibida en este sentido en secundaria en España), así como el KMLS puede aportar una visión interesante sobre cómo el profesor experto interactúa con otros profesores .

4. ¿Qué aspectos han emergido de la reflexión sobre etapas para el modelo?

Destacamos la existencia de aspectos que permean el MTSK en todas las etapas y que ahora mismo no están explícitos. No queremos decir que no puedan ser identificados porque pueden relacionarse con categorías ya existentes, aunque a veces no de manera directa. Su aparición explícita puede ayudar a poner de manifiesto su importancia para la comprensión de la materia para su enseñanza. Destacamos los siguientes aspectos:

- El lenguaje es, tanto en el sentido de la búsqueda del rigor y de la precisión, como en cuanto a su papel en la construcción de conceptos matemáticos.

- Resolución de problemas como actividad matemática (KPM), como objeto de aprendizaje para el maestro (KoT) y como recurso para la enseñanza (KMT).

- La visión de las matemáticas que se posee/debe poseer en las etapas. Más allá de una visión que permita simplificar el contenido (Secundaria), como complejizarlo (Infantil y Secundaria), creemos que el KSM nos aporta la consciencia de que un profesor ha de poseer una comprensión de la matemática desde una perspectiva superior (en el sentido de Kilpatrick, 2008), es decir, no ligada a la matemática escolar en si, sino a la comprensión de las matemáticas escolares inmersas en una estructura conceptual más amplia y general. Esta visión es especialmente útil en la etapa de infantil, donde explica cómo el maestro puede comprender desde una visión diferente a la que se trabaja en clase, el contenido matemático que es objeto de enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Aguilar, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra en la clasificación de las figuras planas. un estudio de caso*. Universidad de Huelva, España: Tesis no publicada.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Carmona, E. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza de ecuaciones de la recta en primero de bachillerato*. Trabajo fin de Máster. Huelva: Universidad de Huelva.

Escudero-Ávila, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Universdidad de Huelva, España: Tesis no publicada.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*. Universdidad de Huelva, España: Tesis no publicada.

Kilpatrick, J. (2008). *A Higher Standpoint*. Ponencia en el 11 International Congress on Mathematical Education. Monterrey: México.

Montes, M. (2011). *El conocimiento del profesor en relación con las dificultades para la comprensión del concepto de infinito.* Trabajo fin de Máster. Huelva: Universidad de Huelva.

Montes, M. (2015). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso.* Universdidad de Huelva, España: Tesis no publicada.

Muñoz-Catalán, M.C., Montes, M., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Aguilar, A. (2013). *La clasificación de las figuras planas en primaria: una visión de progresión entre etapas y ciclos*. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva.

Gomes-Moriel, J. (2015). *Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações.* Universidade Federal de Mato Grosso, Brasil. Tesis no publicada.

Ribeiro, C.M.; Muñoz-Catalán, M.C. y Liñán, M. M. (2015). Discutiendo el conocimiento matemático Especializado del profesor de infantil como Génesis de aprendizajes futuros. En I. Gómez-chacón; J. Escribano; A. Kuzniak y P.R. Richard (Eds.). *Actas del Cuarto Simposio ETM* (p. 575-589). Madrid: Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos.* Universdidad de Granada, España: Tesis no publicada.

Strauss, A.L., Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Londres: SAGE.

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal. Un estudio de casos en el nivel universitario*. Universdidad de Huelva, España: Tesis no publicada.

12 MTSK: PROBLEMAS ABIERTOS Y PREGUNTAS PARA LA REFLEXIÓN

Corrêa, D.S.
Montes, M.A.

Introducción

A lo largo de los últimos años hemos afrontado como grupo la tarea de conceptualizar un modelo de conocimiento profesional que se ajustara a nuestras necesidades, percepciones, y creencias acerca de la naturaleza del conocimiento que un profesor puede (y debe) desplegar. Durante el desarrollo de este modelo, emergieron algunos problemas, algunos de ellosyacerrados, como redefinir la idea de especialización o caracterizar el contenido de diferentes subdominios, o abiertos aún.

En las líneas siguientes podrán encontrarse tanto los problemas que consideramos que, como grupo, aceptamos que están por abordar y/o resolver, como algunos elementos que consideramos que aún no han recibido la atención suficiente. Presentaremos primeramente los que se refieren a los subdominios, a las creencias, después a la diferenciación con otros modelos y lo que creemos que es aún necesario en el aporte del MTSK. Por último presentamos objetivos, a largo y medio plazo, que emergen de las preguntas que planteamos a lo largo de lo texto, y algunas consideraciones finales.

Corrêa, D.S., Montes, MA. (2016). MTSK: Problemas abiertos y preguntas para la reflexión. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 94-100). SGSE: Huelva.

1. El contenido del MTSK: Caracterización de subdominios

La mayor parte del trabajo del grupo hasta la fecha ha sido caracterizar los diferentes subdominios. Podemos encontrar categorizaciones refinadas y más aún, contrastadas con investigaciones empíricas, de los subdominios: *Conocimiento de los Temas* –KoT - (Montes, Contreras, *et al*., 2015), *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* – KMT - (Escudero, 2015) y *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas* – KFLM - (Escudero, 2015; Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2015).

Creemos por tanto que los tres subdominios restantes requieren de un mayor esfuerzo:

En lo subdominio de *Conocimiento de la Estructura Matemática* (KSM), pese a poseer una caracterización de su contenido (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014) y las definiciones existentes de este subdominio están ligadas a su contenido, las conexiones, sin llegar a estar claramente definido de forma intrínseca.Creemos necesario reconocer que aunque poseemos ejemplos de su contenido, en las distintas investigaciones llevadas hasta el momento hemos encontrado dificultades para identificarlo. ¿Qué preguntas deben ser planteadas en la entrevista para que este conocimiento sea identificado? ¿Habría otra manera de identificarlo diferente de la entrevista y observación de clase? Uno de los problemas abiertos es buscar escenarios propicios (Flores-Medrano, Escudero y Aguilar, 2013) para profundizar en la definición y análisis de este subdominio.

El subdominio de *Conocimiento de la Práctica de la Matemática* (KPM), desde el inicio de su conceptualización, ha resultado problemático. Inicialmente se denominó "Conocimiento sobre Matemáticas", derivado de la interpretación de las ideas vertidas en Ball y McDiarmid (1990), para posteriormente denominarse "Conocimiento de la Práctica de las Matemáticas", para expresar más claramente su contenido. Sin embargo, hasta el momento no se ha consensuado en el grupo una definición de "Práctica Matemática".

Este subdominio es caracterizado de la siguiente manera en una de las investigaciones doctorales que contribuye a la génesis del modelo: "Se trata de considerar el conocimiento sobre cómo se explora y se genera conocimiento en matemáticas, cómo se establecen relaciones, correspondencias y equivalencias, cómo se argumenta, se razona y se generaliza, qué papel tiene el convenio, y qué características tienen algunos de los elementos con los que se hacen matemáticas (como una definición o una demostración), además del conocimiento que tiene el profesor acerca de la lógica proposicional, de los modos de proceder (el conocimiento de heurísticos en la resolución de problemas, por ejemplo) y de la sintaxis propia de las matemáticas." (Escudero, 2015, p. 33).

Presenta también algunos ejemplos, pero, la mayoría de los que disponemos están ligados al conocimiento del profesor de estructuras demostrativas. Este es, por el momento, el único subdominio que no presenta las categorías de análisis ya definidas.

Las preguntas que creemos que hemos de plantearnos son: ¿Es esto (contenido ligado a estructuras demostrativas) todo lo que podemos encontrar aquí? ¿Cómo profundizar en la definición y categorización de este subdominio? ¿Qué instrumentos pueden favorecer la identificación y análisis de este conocimiento? Aunque nos encontramos en el proceso de una presentación con más rigor de este subdominio, no podemos dejar de considerarlo “ya que provee de estructuras lógicas de pensamiento que ayudan a entender el funcionamiento de diversos aspectos matemáticos.” (Escudero, 2015, p. 33).

El subdominio de *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS), es uno en el que no hemos realizado un esfuerzo profundo en pos de su categorización por diversos motivos, más allá de una caracterización que lo diferencie de KFLM. En la tesis de Escudero (2015) se presentan tres categorías para este subdominio: Conocimiento de las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático en un nivel específico; Conocimiento del nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar; Conocimiento de la secuenciación con temas anteriores y posteriores a un determinado momento escolar. Creemos que hace falta una mayor profundización en los ejemplos, en la definición y en el desarrollo de categorías. Una de las dificultades que surgen es la dificultad de comprender el significado de “estándares”, que en español puede existir cierto consenso, pero al traducir a otros idiomas, como el portugués, por ejemplo, puede carecer del matiz original. Creemos que es necesario continuar realizando esfuerzos en lo que se refiere a la definición, caracterización y ejemplificación de los subdominios en general, principalmente de los que más necesitan.

2. Las creencias como elemento de MTSK

En lo que se refiere a las creencias, la primera pregunta que emerge es: ¿Se trata de un dominio de conocimiento o forma parte de los subdominios? Para nuestro grupo de investigación, las creencias forman parte del conocimiento del profesor, no como un subdominio, sino como un elemento que permea tanto el conocimiento matemático cómo el conocimiento didáctico del contenido.

Este es un dominio en el que nos valemos del bagaje del grupo para dotarlo de contenido. Sin embargo, creemos que la caracterización de este subdominio requiere una profundización mayor, para determinar si se considerará o no el plano afectivo, las actitudes, y/o las creencias matemáticas de los profesores. Las investigaciones hechas hasta ahora, todas consideran las creencias como parte importante del MTSK, pero, ninguna analiza las creencias con detalles. Si las creencias forman parte del MTSK, lo natural creemos que debería ser tender a incorporarlas al análisis del profesor.

Cabe preguntarse también ¿cómo analizar las creencias? Si éstas forman parte de MTSK, deben ser analizadas con el consiguiente esfuerzo que debería ser invertido en su categorización y articulación de herramientas metodológicas para acceder a ellas. ¿Qué tipos de herramientas metodológicas usar? ¿En qué escenarios? Estas son algunas de las preguntas que aún consideramos abiertas.

3. Diferencias con otros modelos

Desde un principio, se asumió que MTSK era una reconceptualización de MKT, que evolucionó hasta tener entidad como para que lo denomináramos 'nuevo' modelo. Es necesario un análisis crítico de la diferenciación de MTSK respecto de MKT. Si bien nos diferenciamos en la naturaleza de la especialización considerada, en no tomar acciones como conocimiento (hecho que depende del posicionamiento epistemológico sobre el conocimiento), y la diversidad de aproximaciones metodológicas que se requiere en MTSK frente a la focalización de MKT en la observación de aula.

Algunas de las diferencias entre ambos modelos parecen no ser tan relevantes: Considerando los subdominios KMT vs KCT, KFLM vs KCS y KMLS vs CK preguntase ¿Cuál es la diferencia real entre estas tres parejas de subdominios? Desde una perspectiva crítica, puede parecer arriesgado decir que son diferentes. Es evidente que en MTSK se ha desarrollado un esfuerzo mayor que en MKT en los subdominios del ámbito didáctico, en pos de dotarlos de contenido y ejemplos, y es necesario remarcarlo. Sin embargo, son necesarios argumentos más explícitos, consistentes, y contundentes, que permitan sustentar la diferencia que existe entre ambos, más allá del mayor refinamiento de uno respecto a otro.

Una pregunta que debería responderse es: ¿Qué aporta considerar las características de aprendizaje en matemáticas en vez de la relación contenido (matemáticas)-estudiantes como eje vertebrador?

Asimismo, nuestro foco "comparador", suele ser MKT. Creemos que puede ser interesante buscar las relaciones con otros modelos, como el *Knowledge Quartet* (Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005), o el *Conocimiento Didáctico-Matemático* (Godino, 2009), en pos de refinar el propio MTSK, así como de buscar nuevos puntos de apoyo para la discusión crítica que ha regido la génesis del modelo. En este último caso, el del modelo de Godino (2009), creemos que tiene el potencial de ser especialmente interesante, por la diversidad de facetas que plantea, y por el profundo sustento teórico del que está dotado.

4. ¿Cuál es el aporte de MTSK?

Este punto aborda una pregunta que va más allá de la mera comparación con otros modelos, sino que se centra en las intenciones del grupo, es decir, ¿Por y para qué desarrollamos MTSK? ¿Qué pretendemos aportar? ¿Por qué es importante analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas? ¿Qué haremos con los resultados de las investigaciones? Algunas respuestas están surgiendo a lo largo de las investigaciones, como por ejemplo, la tendencia de la formación continua que surge en respuesta a las dificultades identificadas en los conocimientos de los profesores investigados. Pero, ¿y las demás preguntas que emergen?

En primer lugar, debemos plantearnos qué aportamos a la disciplina científica. Más allá de diferenciar MTSK de otros modelos, deberíamos plantearnos: ¿Qué puede hacerse con MTSK que otros modelos no permitan?

Una respuesta a esta pregunta puede darnos, a nosotros mismos, el fundamento para reconocer que nuestra aportación a la disciplina científica va más allá de aportar un modelo de conocimiento a la sobreabundante colección de ellos que ya existen en la literatura de investigación. En esta línea, Kilpatrick y Spangler (2015), proponen que la aportación se realiza en el plano de la modelación del conocimiento que futuros profesores universitarios de educación matemática poseen.

En segundo lugar, cabe plantearse el nivel de “transferencia” de la investigación sobre MTSK, en particular la aportación que este modelo hace a la formación de profesorado, así como a la evaluación del conocimiento del profesor. Muchos de los que hemos desarrollado MTSK, que también impartimos clase en centros de formación de profesorado, usamos este modelo como eje vertebrador de la planificación de nuestras clases. Sin embargo, esta transferencia se hace de manera informal, mientras que podríamos, también, centrar nuestros esfuerzos como grupo de investigación, en promover una transferencia más explícita, usando metodologías adecuadas para ello, como los experimentos de enseñanza (e.g. Steffe, Thompson, 2000; Molina, Castro, Molina, Castro, 2011). Además de esto, otra duda que emerge es si MTSK aporta o puede aportar algo a la “transferencia” de la investigación en conocimiento profesional. Pero, más allá de plantearnos esta pregunta, cabe la siguiente reflexión: ¿Deseamos que aporte en este sentido?

A partir de todas las preguntas planteadas en lo que se refiere a los subdominios, creencias, diferencias con otros modelos y aporte del MTSK, proponemos, a seguir, algunos objetivos a medio y largo plazo, que creemos que contribuirían al desarrollo de los trabajos del grupo.

5. Objetivos a medio y largo plazo

A continuación esbozamos algunas de las líneas de trabajo que creemos pueden ser interesantes, si bien creemos que la orientación de los esfuerzos del grupo también debe ser discutida y consensuada, en la medida de lo posible.

La primera de las líneas de trabajo que creemos ha de prolongarse y reforzarse es el desarrollo de investigaciones que caractericen el MTSK ligado a temas concretos. Algunos esfuerzos han sido desarrollados en este sentido ya (e.g., Álgebra Lineal, Fracciones, Infinito), pero para conseguir una comprensión más profunda del conocimiento usado y poseído por los profesores, se necesitan esfuerzos en conceptos menos explorados, como la geometría en general, o con prácticas matemáticas concretas, como la ejemplificación o la generalización.

Una línea de investigación, que creemos de especial relevancia, es estudiar la interrelación de MTSK con perspectivas complementarias de investigación, como pudieran ser la identidad y la práctica, así en estudiar cómo un conocimiento amplio o profundo puede influir en cómo un profesor se desarrolla profesionalmente. Esta línea seguiría el trabajo desarrollado por Climent (2005), o Muñoz-Catalán (2009), desde la perspectiva que aporta MTSK.

Un trabajo en el que actualmente nos encontramos inmersos, y que creemos que tiene el potencial de desarrollarse a largo plazo, es el de la implicación del grupo, y de la perspectiva de conocimiento profesional que tenemos desde el mismo, en el desarrollo de tareas y materiales de formación de profesores. Esto nos lleva a la pregunta relacionada con la transferencia anteriormente planteada, ¿Deseamos que MTSK, y el grupo que lo trabaja y desarrolla, aporte a la formación de profesores de manera intencional?

A medio y largo plazo, creemos que las reflexiones vertidas anteriormente pueden constituir un buen punto de partida para desarrollar, de forma explícita, una agenda de investigación que consista en algo más que metas explícitas con fechas que las acompañen, sino que sería de gran utilidad discutir la dirección en la que desarrollamos nuestros esfuerzos: Mejorar la formación inicial, hacer una categorización profunda del conocimiento profesional tema a tema o desarrollar tareas y materiales para su uso en el aula, son algunas líneas que podrían abordarse, y, si bien son complementarias, creemos una utopía pensar que vamos a centrarnos en todas ellas. Asimismo, entendemos que debe existir un mayor esfuerzo en la formación continua (en la línea de Amaral, Ribeiro y Flores-Medrano, 2014; Ribeiro, Martins y Montes, 2014) de los profesores en servicio, entendiendo que, si bien los profesores en activo poseen conocimiento especializado, éste es susceptible de ser enriquecido a través de la discusión y reflexión acerca de experiencias y situaciones.

6. Consideraciones Finales

En esta comunicación intentamos poner todas las preguntas que, creemos, necesitan de mayores esfuerzos para contestar y tornar aunque más claro el contenido del MTSK. Al final, proponemos algunas acciones que creemos pueden ayudar en esta dirección. Cabe ahora lo trabajo del grupo como un todo, partiendo de acciones más comunes o generales, para juntos continuemos la construcción de este marco importante para los avances en lo que se refiere al desarrollo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Referencias

Ball, D.L. y McDiarmird, G. (1990). The subject matter preparation of teachers. In W.R. Houston (Ed.), *Handbook of Research on Teacher Education* (pp. 437-449).New York: Macmillan.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de enseñanza de la matemática. Un estudio de caso.* Tesis doctoral. Michigan: Proquest Michigan University.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria.* Huelva, España: Tesis no publicada.

Flores, E., Escudero, D. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano,

G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao, España: SEIEM.

Flores-Medrano, E., Escudero- Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Kilpatrick, J. y Spangler, D. (2016). Educating Future Mathematics Education Professors. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 297-311). Routledge: Nueva York.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Montes, M., Contreras, L.C., Liñan, M., Muñoz-Catalán, M.C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación, 367*(1), 36-62.

Muñoz-Catalán, M.C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel.* Tesis doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Ribeiro, C. M., Amaral, R. B., Pinto, H. y Flores-Medrano, E. (2014). Conhecimento matemático especializado do professor - discutindoum caso naformulação de problemas de divisão. En *Actas del II Congresso Nacional de Formação de Professores e XII Congresso Estadual Paulista sobre Formação de Educadores* (pp. 2058–2070). São Paulo, UNESP.

Ribeiro, C. M., Martins, F. y Montes, M. (2014). Conhecimento matemático para ensinar de futuros professoresnaexploraçao de tópicos de organizaçao e tratamento de dados. *En Actas del II Congresso Nacional de Formação de Professores e XII Congresso Estadual Paulista sobre Formação de Educadores* (pp. 2071 - 2081). São Paulo, UNESP.

Rowland, T.; Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015).Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 173-189.

Steffe, L. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment me¬thodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathe¬matics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: Nueva Jersey.

ANEXO 1

Artículos sobre MTSK, hasta agosto 2015

Año	Título	Autores	Revista	Contexto	Metodología	Nivel educativo estudiado	Bloque	Subdominios	Idioma	T+I
2015	ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO Y CONOCIMIENTO DE UN PROFESOR DE ÁLGEBRA LINEAL	Vasco-Mora, Climent	ETM4	Se observa un profesor en aula real	cualitativa e interpretativa; estudio de caso; Análisis de contenido	Profesor de Licenciatura (Nível Superior)	Algebra Lineal	KoT; KMT; KFLM	Español	
2015	EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DETECTADO EN LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LAS CUERDAS	Escudero-A, Carrillo, Flores-M, Climent, Contreras, Montes	PNA, 10(1)	Se observa un profesor en aula real	Estudio de caso	SECUNDARIA	RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LAS CUERDAS	**KoT**, KPM, KFLM y KMLS	Español	sí
2015	DISCUTIENDO EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE INFANTIL COMO GÉNESIS DE APRENDIZAJES FUTUROS	Ribeiro, Muñoz-Catalán, Liñán	ETM4	Reflexión desde la formación de maestros	Revisión literatura, teórico.	INFANTIL	RESTA NATURALES	KoT, KSM y KPM - ETM	Español	SÍ
2015	EL PROFESOR EN EL MARCO DE LOS ETM: EL PAPEL DEL MTSK COMO MODELO DE CONOCIMIENTO	Carrillo, Flores-M, Contreras, Climent	ETM4	Formación de maestros Y ETM	Revisión teórica	GENERAL	FRACCIONES	SM, KPM, KMT Y	Español	NO
2015	¿CÓMO SE RELACIONA EL CONOCIMIENTO QUE TIENE EL PROFESOR ACERCA DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS CON SU ENTENDIMIENTO SOBRE LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO?	Flores-M, Escudero-A, Montes, Carrillo	ETM4	Se observa un profesor en aula real	ESTUDIO DE CASO: David	SECUNDARIA	FUNCIONES LINEALES	KFLM	Español	No
2015	El conocimiento especializado del profesor de matemática frente a problemas abiertos	Galleguillos, Ribeiro, Montes	CIAEM	Profesores en formación	Cualitativa Estudio de caso	SECUNDARIA	Resolución de problemas	K (KoT, KSM, KPM	Español	No
2015	Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas	Montes, Contreras, Liñán, Muñoz-Catalán, Climent, Carrillo	Revista de Educación	Formación inicial	Survey	EPM	Fracciones, decimales y porcentajes	KoT	Español	No
2015	Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales	Rojas, Flores, Carrillo	BOLEMA	Se observa un profesor experto en aula real	21 sesiones Cualitativa Estudio de caso	5º ó 6º de Primaria	Fracciones	KoT, KMT, KFLM	Español	Sí
2015	El conocimiento especializado del profesor de matemáticas	Reyes-C.	Libro Mx	Presentación y discusión MTSK					Español	
2015	Conocimiento Especializado del Profesor para la utilización de Geogebra en el Aula de Matemáticas	Santana, Climent	NÚMEROS	Se observa un profesor experto en aula real	Cualitativa Estudio de caso Paradigma interpretativo	3º ESO	Geometría: figuras planas y en el espacio, rectas y posiciones, rectas notables del triángulo	SCK, KoT, KMT, KFLM	Español	SÍ
2015	Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato	Sosa, Flores-M, Carrillo	Enseñanza de las Ciencias	Se observan dos profesoras expertas en aula real	Cualitativa Estudio de caso Datos Empíricos	Bachillerato	Álgebra lineal	KFLM	Español	SÍ
2015	Conocimiento matemático especializado de los números racionales un caso de una profesora chilena	Zarkaryan, Ribeiro, Valenzuela	CIAEM	Se observa un profesor experto en aula real	Cualitativa Estudio de caso	Primaria	Nº racionales	KoT	Español	No
2015	A ideia de máximo divisor comum para resolver equações diofantinas lineares	Luchetta, Lacerda, Ribeiro	CIAEM	Una clase de simulación de aula en la asignatura de Estagio Supervisionado 3	Análisis Cualitativa Estudio de caso instrumental	Nível Superior (Futuro profesor de Matemática de secundária y ESO)	de Ecuaciones Diofantinas Lineares	KoT; KSM; KPM	Portug.	

2014	**TEACHERS KNOWLEDGE OF INFINITY, AND ITS ROLE IN CLASSROOM PRACTICE**	Montes, Carrillo, Ribeiro	PME 38	Profesor experto	Entrevista: estudio de caso?	Secundaria	INFINITO	MTSK (KSM y KMT), MKT Y KQ	Inglés	
2014	**CONNECTING A MATHEMATICS TEACHER'S CONCEPTIONS AND SPECIALISED KNOWLEDGE THROUGH HER PRACTICE**	Flores-M, Carrillo	PME 38	PROFESORA Experta	Estudio de caso y análisis de contenido	SECUNDARIA	Probabilidad	Concepciones y SCK (KoT y KFLM)	Inglés	
2014	ELEMENTOS DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICA. EL CASO DE LOS POLÍGONOS	Climent, Carreño, Ribeiro	CLAME	Formación inicial	Estudio de caso: Martha	SECUNDARIA (2º)	POLÍGONOS	Kot, KSM, KPM	Español	SÍ
2014	El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria	Carrillo, Escudero-A, Flores-M	Revista de análisis matemático-didáctico para profesores	Formación inicial	REVIEW, capítulo de libro	Primaria	POLÍGONOS	TODOS	Español	
2014	EL CONOCIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO (TEDS-M ESPAÑA) DESDE LA PERSPECTIVA DE SU ESPECIALIZACIÓN	Carrillo	SEIEM	Formación inicial	Relación otros modelos	EPM_Primaria, TEDS-M	Números y operaciones	PCK	Español	NO
2014	UNA PERSPECTIVA DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL PROFESOR CENTRADA EN SU ESPECIALIZACIÓN: EL MODELO MTSK	Escudero-A, Flores-M, Climent, Carrillo, Contreras, Montes, Aquilar, Rojas	CLAME	Formación inicial	Presentación y discusión MTSK vs. MKT	Primaria	Fracciones y operaciones (división) Breve ejemplo	TODOS	Español	NO
2014	CONOCIMIENTO MATEMÁTICO SOBRE CUADRILÁTEROS EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO	Escudero-D, Carrillo	SEIEM	Formación inicial	Mixta: cuanti-cuali, interpretativa. Estudio grupo estudiantes para maestro	EPM	CUADRILÁTEROS	KoT	Español	NO
2014	Conocimiento especializado de los Estudiantes para Maestro: la resolución de un problema con división de fracciones	Liñán, Barrera, Infante	Escuela abierta	Formación inicial	Interpretativo	EPM	Fracciones, división, problemas	KoT, KPM, KSM	Español	SÍ
2014	MEJORAR NUESTRO PROPIO CONOCIMIENTO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE UN EPISODIO DE LA PRÁCTICA – DISTINTOS FOCOS DE ANÁLISIS	Ribeiro, González, Fernández, Sosa, Escudero-A, Montes, Contreras, Flores-M, Carrillo, Climent, Blanco, Cárdenas, Badillo, Flores, Gavilán-I, Sánchez-M, Muñoz-C, Toscano	SEIEM	Profesor-alumno master	Practice-based approach desde cinco perspectivas. Estudio de caso instrumental	Secundaria	Problema de las cuerdas	KQ, MKT, MTSK	Español	NO
2014	Un Marco teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas	MUCHOS AUTORES	SIDM MATERIAL PARA LA DOCENCIA						Español	NO
2014	EXPLORANDO INDÍCIOS DE CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PARA ENSINAR MATEMÁTICA COMO MODELO MTSK	Moriel-J, Carrillo	SEIEM	Formación continua	Pesquisa cualitativa	Profesor de secundária en contexto de formación	División de fracciones	KoT; KSM; KPM	Portug.	
2014	Conhecimento matemático especializado do profesor: discutindo um caso na formulaçao de problemas de divisao	Amaral, Ribeiro, Flores-M	CNFP	Formación inicial	Análisis descritica con estudio de caso instrumental	Alumnos de Licenciatura en Educación Básica	Planteamiento y solución de problemas sobre división	KoT; KSM; KFLM	Portug.	
2014	Conhecimento matemático para ensinar de futuros professores na exploraçao de tópicos de organizaçao e tratamento de dados	Ribeiro, Martín, Montes	CNFP	Formación inicial	Análisis descritica con estudio de caso instrumental	Alumnos de Licenciatura en Educación Básica	Organización y tratamiento de los datos	MKT	Portug.	
2013	**SCK AND HCK– DISCUSSING PROSPECTIVE TEACHERS KNOWLEDGE ON POLYGONS**	Carreño, Ribeiro, Climent	CERME 8	Formación inicial	Estudio de caso: Martha	Secundaria	Polígonos	SCK, HCK. NO MTSK	Inglés	
2013	**MATHEMATICS TEACHER'S SPECIALIZED KNOWLEDGE. REFLECTIONS BASED ON SPECIFIC DESCRIPTORS OF KNOWLEDGE**	Carreño, Rojas, Montes, Flores-M	CERME 8	Profesores expertos	Revisión literatura. Casos de tesis de Sosa	Universidad	Matrices	KoT y KPM	Inglés	
2013	**DETERMINING SPECIALISED KNOWLEDGE FOR MATHEMATICS TEACHING**	Carrillo, Climent, Contreras, Muñoz-Catalán	CERME 8	Discusión y presentación "oficial" del modelo MTSK a partir de pequeños ejemplos teóricos					Inglés	

2013	**A THEORETICAL REVIEW OF SCK**	Fores-M, Escudero-A, Carrillo	CERME 8	Revisión de la literatura, Discusión del SCK del MKT, estudio de dos ejemplos del MKT para definir MTSK					Inglés	
2013	**MTSK: FROM COMMON AND HORIZON KNOWLEDGE TO KNOWLEDGE OF TOPICS AND STRUCTURES**	Montes, Aguilar, Carrillo, Muñoz-Catalán	CERME 8	Presentación y discusión de los subdominios de MK a partir de ejemplos teóricos concretos. Basado en trabajo de Cinta 2010.					Inglés	
2013	**EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: MTSK**	Aguilar, Carreño, Carrillo, Climent, Contreras, Escudero-A, Flores-M, Flores, Montes, Rojas	CIBEM	Presentación y discusión del modelo MTSK					Español	NO
2013	**Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas**	Carrillo, Contreras, Flores	Granada	Presentación y discusión del modelo MTSK					Español	NO
2013	**INVESTIGACIÓN SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN LA UNIVERSIDAD DE HUELVA**	Carrillo, Flores-M, Climent, Contreras, Aguilar, Escudero-A, Montes	Libro Mx	Desarrollo profesional	Revisión teórica			Todos	Español	No
2013	**OPORTUNIDADES QUE BRINDAN ALGUNOS ESCENARIOS PARA MOSTRAR EVIDENCIAS DEL MTSK**	Flores-M, Escudero-A, Aguilar	SEIEM	Formación y en aula, tres episodios	Análisis para evidencias	Primaria y secundaria	Problema de las cuerdas (MFP), Geom. 5º Prim., Ec. Lineales 1º ESO	KFLM, KPM, KoT, KMT y KSM	Español	NO
2013	**DEBILIDADES Y FORTALEZAS EN EL CONOCIMIENTO DE LOS TÓPICOS MATEMÁTICOS EN GEOMETRÍA DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO**	Liñán, Contreras	SEIEM	Formación inicial	Survey	Primaria	Geometría	KoT	Español	NO
2013	**CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: ENFOQUES DEL MKT Y DEL MTSK**	Montes, Contreras, Carrillo	SEIEM	Formación inicial	Análisis de episodio	Bachillerato	Representación funciones	MKT vs. MTSK	Español	NO
2013	**KFLM: UN ENTORNO DE APRENDIZAJE PARA EL PROFESOR AL ANALIZAR LOS ERRORES DE LOS ESTUDIANTES**	Sosa, Aguayo, Huitrado	Libro Mx	Formación continua	Análisis de dos casos	Secundaria	Identidad notable y fracciones con 0	KFLM	Español	SÍ
2013	CONHECIMENTOS MOBILIZADOS DURANTE UMA FORMAÇÃO DOCENTE SOBRE POR QUÊS MATEMÁTICOS: O CASO DA DIVISÃO DE FRAÇÕES	Moriel-J, Wielewski, Montes	CIEM	Formación continua	Pesquisa cualitativa	Profesor de secundária en contexto de formación	División de fracciones	MTSK en general	Portug.	
2012	**EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS**	Escudero-A, Flores-M, Carrillo	EIME	Formación	Revisión teórica	Primaria	Ej. Resta con llevada	MKT vs. MTSK	Español	NO
Tesis MTSK (hasta septiembre 2015)										
2015	Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria	Dinazar I. Escudero Ávila	UHU Carrillo	Pós graduación	Paradigma: interpretativo; metodologia (Top-down y Bottom-up); Grounded Theory o teoría emergente de los datos;	Profesor de secundária en contexto de pós graduación	Situaciones problemas diversos	MTSK en general	Español	
2015	Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)	Eric Flores Medrano	UHU Carrillo	Formación Inicial y formación contínua	paradigma interpretativo, estudios de caso y análisis documental;	Primária; Secundária; Bachillerato	Situaciones problemas; geometria y álgebra	MTSK en general	Español	
2014	Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del Infinito. Un estudio de caso	Miguel Ángel Montes Navarro	UHU Carrillo	Profesor experto	Grounded Theory Estudio de caso	Secundaria	Infinito	Kot, KSM, KPM, KMT,KFLM Y KMLS. Concepciones	Español	SÍ
2014	CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PARA ENSINAR DIVISÃO DE FRAÇÕES	Jefferson Gomes Moriel Junior	UFMT Wielewski-Carrillo	Formación continua	Análisis de contenido	Profesor de secundária en contexto de formación	División de fracciones	MTSK en general	Portug.	
2014	CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO DE CASOS	Nielka Rojas González	UGR Flores-Carrillo	Se observan dos profesores expertos en aula real	Cualitativa Estudio de caso	Primaria y secundaria	Fracciones	Kot, KSM, KPM, KMT,KFLM Y KMLS	Español	Sí

Notas:

Las delimitaciones de los dominios y subdominios se ven condicionadas por las concepciones del investigador que observa

T+I: Incluyen tablas con indicadores rellenadas

RELACIÓN DE AUTORES

Álvaro Aguilar González, Universidad de Huelva (alaguilargon@gmail.com)

Víctor Javier Barrera Castarnado, Universidad de Sevilla, Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU (vbarrera@ceuandalucia.com)

José Carrillo Yáñez, Universidad de Huelva (carrillo@uhu.es)

Nuria Climent Rodríguez, Universidad de Huelva (climent@uhu.es)

Luis Carlos Contreras González, Universidad de Huelva (lcarlos@uhu.es)

Daiane Corrêa Cabanha, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Río Claro, Brasil (dai.matematica08@gmail.com)

Dinazar Isabel Escudero Ávila, Universidad de Huelva (eadinazar@hotmail.com)

Ana Escudero Domínguez, Universidad de Sevilla, (a.escudero_dominguez@hotmail.com)

Pablo Flores Martínez, Universidad de Granada (pflores@ugr.es)

Eric Flores Medrano, Universidad de Huelva (ericfm_0@hotmail.com)

Jeferson Gomes Moriel Junior, Universidad Federal de Mato Grosso, Cuiabá, Brasil (jeferson.moriel@gmail.com)

Nuria Joglar, Universidad Rey Juan Carlos, Madrid (nuria.joglar@urjc.es)

María del Mar Liñán García, Universidad de Sevilla, Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU, (mlinan@us.es)

Miguel Ángel Montes Navarro, Universidad de Huelva (miguel.montes@ddcc.uhu.es)

María Cinta Muñoz-Catalán, Universidad de Sevilla (mcmunozcatalan@us.es)

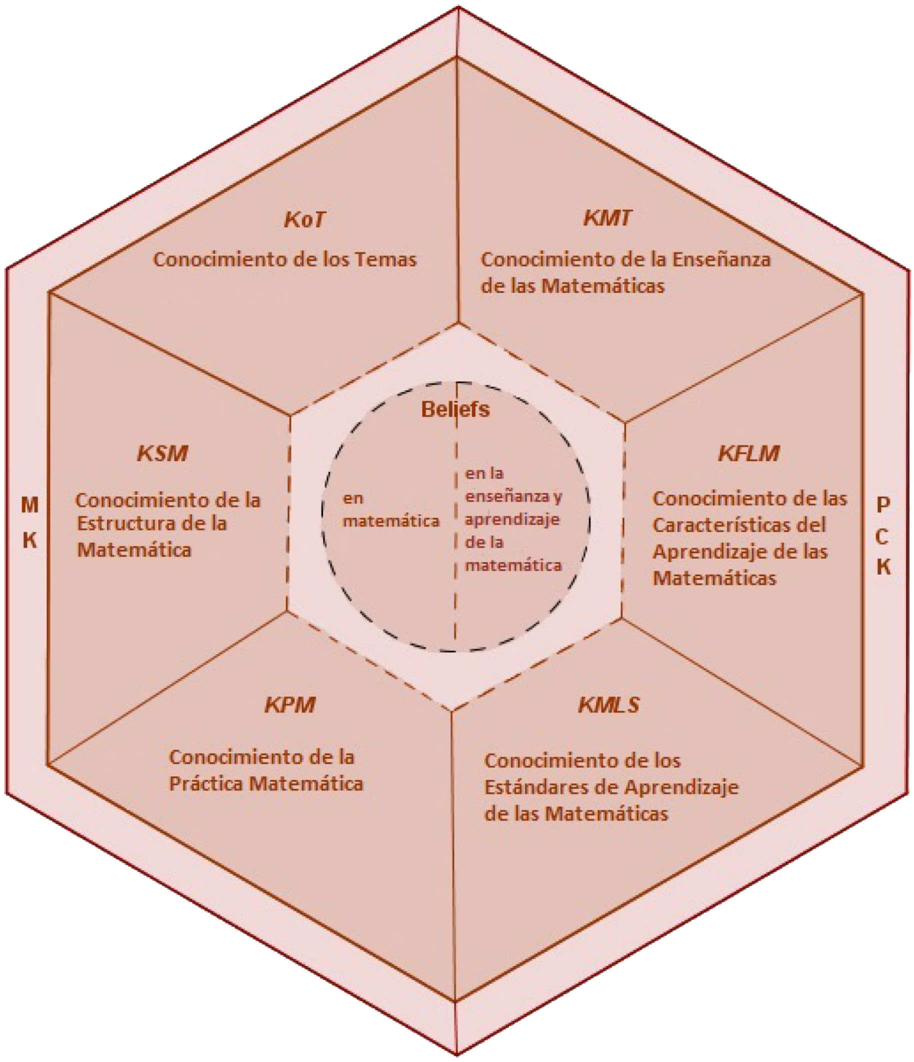
Carlos Miguel Ribeiro, Posdoc UNESP Rio Claro (Brasil)/Associate Profesor University of Algarve, Portugal (cmribeiro@ualg.pt)

Nielka Rojas, Universidad Católica del Norte, Chile (nielka001@gmail.com)

Ana Mª Reyes Camacho, Escuela Normal Rural General Matías Ramos Santos, Loreto, Zacatecas, México (anyreca0712@hotmail.com)

Leticia Sosa Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas, UAZ, México lsosa19@hotmail.com

Diana Vasco Mora, Universidad Técnica Estatal de Quevedo, Ecuador (dianav350@yahoo.com)


KoT
Conocimiento de los Temas
KMT
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas
KSM
Conocimiento de la Estructura de la Matemática
Beliefs
en matemática
en la enseñanza y aprendizaje de la matemática
KFLM
Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas
KPM
Conocimiento de la Práctica Matemática
KMLS
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas
MK
PCK