

Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía



Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato : un estudio de dos casos

**Memoria para optar al grado de doctora
presentada por:**

Leticia Sosa Guerrero

Fecha de lectura: 27 de enero de 2011

Bajo la dirección del doctor:

José Carrillo Yáñez

Huelva, 2011

ISBN: 978-84-15147-53-4

D.L.: H 56 - 2011

ANEXOS

ANEXO I. Transcripción de las clases de Emi

ANEXO II. Transcripción de las clases de Aly

ANEXO III. Cuestionarios

ANEXO III.1. Preguntas de los cuestionarios

ANEXO III.2. Cuestionarios contestados

ANEXO III.2.1. Respuestas de Emi

ANEXO III.2.2. Respuestas de Aly

ANEXO IV. Guión de la entrevista

ANEXO V. Transcripción de la entrevista realizada a Emi

ANEXO VI. Transcripción de la entrevista realizada a Aly

ANEXO VII. Apartado V.1.1. de los resultados: Presentación cronológica de los subdescriptores identificados en cada subdominio del conocimiento matemático para la enseñanza (CME) por tema, para el caso de Emi y luego para el caso de Aly

ANEXO I. Transcripción de las clases de Emi

Transcripción de la primera clase grabada de la profesora Emi del lunes 29/09/08.

Resumen: Emi hace referencia a un ejemplo de criptografía, luego empieza a definir una matriz de orden $m \times n$. Enseguida aborda “Tipos de matrices”: Matriz cuadrada, diagonal principal, matriz fila, matriz columna, matriz nula, matriz triangular (superior e inferior), matriz escalar, diagonal, unidad, matriz traspuesta y matriz opuesta.

L		Transcripción
1	Emi:	Vamos a recordar un poco.
2		¿Qué es lo que vimos en la última sesión?
3		A ver alguien me puede decir con qué idea se ha quedado
4		de lo que estuvimos viendo el último día en clase,
5		¿qué es lo que recuerdan?
6	E1:	Había que poner los datos en una especie de tabla.
7	Emi:	Que cuando nos plantean un problema,
8		tú quieres decir que es útil colocar los datos no de cualquier manera
9		sino en una tabla que nos facilita la toma de datos
10		y luego el planteamiento del problema.
11		[Emi voltea a ver a E1 y le pregunta] ¿No es así?
12	E1:	Si.
13	Emi:	Efectivamente comenzamos el Álgebra.
14		¿Quién me dice qué es el Álgebra?
15		[Nadie contesta].
16		El Álgebra es una parte de las matemáticas,
17		comenté el otro día que durante muchos siglos
18		se ocupaba principalmente de resolver ecuaciones,
19		por eso nuestro primer ejemplo fue un sistema de ecuaciones,
20		y, ¿qué fue lo que vimos después?
21		[Nadie contesta].
22		La utilización de matrices en diferentes contextos ¿no?
23		¿Quién recuerda?
24		[Emi voltea a ver al grupo y nadie contesta].
25		Por ejemplo, las matrices no se utilizan solamente en matemáticas
26		sino en sociología, en economía, en política...
27		[Nadie contesta].
28		¿Qué tipo de ejercicios estuvimos viendo que no conocían?
29		Que era la primera vez que se os planteaba.
30	E2:	Problemas.
31	Emi:	Exactamente unos problemas, que los planteábamos a través de grafos
32		y al grafo, ¿qué le asociábamos?
33	E3:	Una matriz.
34	Emi:	La matriz de adyacencia, ¿no?
35		Hay algunos otros ejemplos que iremos viendo a lo largo de este tema,
36		en los que se aplican las matrices,
37		uno muy curioso que no les comenté el otro día pero que si puede
38		resultar entretenido, es el relacionado con la criptografía,
39		con los mensajes cifrados.

40		¿Cómo se os ocurre que podemos escribir un mensaje cifrado?
41		[Nadie contesta].
42		Nosotros utilizamos el abecedario A, B, C, D, E, F, G, H...
43		hasta llegar a X, Y y Z que son las últimas letras de nuestro alfabeto,
44		¿Qué se puede hacer para cifrar un mensaje?
45		¿Qué podemos asociar a cada una de las letras?
46	E3:	Un número.
47	Emi:	Un número, pero para que no sea fácil de descifrar ese mensaje.
48		¿Cómo asociamos el número a cada una de las letras?
49	E3:	Con el orden.
50	Emi:	Si seguimos cierto orden sería fácil descifrarlo, es todo lo contrario.
51	E3:	Sin seguir ningún orden.
52	Emi:	Exacto como tú dices sin seguir ningún orden,
53		es decir, al azar, asignando a cada una de las letras un número,
54		pero ese número buscado aleatoriamente.
55		Entonces aleatoriamente asignamos números a cada una de las letras
56		pero, ¿cómo se puede hacer eso?
57		Pues hay tablas de números aleatorios,
58		hay libros en los que aparecen tablas y entonces abrimos el libro
59		por una página y decimos vamos a coger los primeros números
60		que hay aquí escritos aleatoriamente,
61		también las calculadoras y los ordenadores tienen una función de
62		encontrar números aleatorios y nos van dando aleatoriamente números.
63		Entonces imaginad que nosotros al asignar números aleatorios
64		a la letra A le corresponde el número 11;
65		a la B el 9; a la C, 34; a la D, 15; a la E, 7; F, 48 y así ¿no?
66		Vamos a escribir una palabra, con estas letras que tenemos.
67		¿Cómo podemos poner con esas letras?
68	E3:	Sería...
69	Emi:	Por ejemplo cabe, la palabra CABE,
70		¿qué número le correspondería?
71	E4:	34.
72	Emi:	Pondríamos el 34, el 11...
73	E4:	El 9.
74	Emi:	El 9 y el 7, ¿de acuerdo?
75		En el mensaje cifrado aparecerían estos números [34,11, 9 y 7],
76		la persona que asigna aleatoriamente los números a esas letras,
77		luego a la persona que va a descifrarlo le tiene que transmitir el código,
78		¿no?
79		Eso no es muy seguro, entonces, ¿cómo reforzamos la seguridad?
80		Pues utilizando las matrices,
81		podemos para proteger este código, formar una matriz que tiene que ser
82		regular, que ya hablaremos después que significa eso,
83		en este caso por ejemplo [primera fila 3 y 2 y segunda fila 0 y 5].
84		Además de asignar de forma aleatoria números a cada una de las letras
85		elegimos una matriz, y ahora ¿qué hacemos?
86		[Emi señala los números 34, 11, 9 y 7 que había escrito debajo de cada
87		una de las letras de la palabra "CABE"].

88		Tomamos estas cifras de dos en dos y las multiplicamos por esta matriz.
89		[Emi anota el 34 y 11 como elementos de la primera matriz en forma de
90		fila, por la segunda matriz con los elementos 3 y 2 en la primera fila
91		y 0 y 5 en la segunda fila].
92		¿Esto no sabéis cómo se hace?
93	E3:	No.
94	Emi:	Esto lo vamos a ver hoy en clase, podemos multiplicar matrices,
95		podemos tomar estos dos números como parte de una matriz, multiplicar
96		ambas matrices y nos sale otro número, nos saldrán otros números
97		distintos.
98	Es:	[Nadie contesta].
99	Emi:	El 102 y el 119 [Emi se despista comete un error aritmético, en lugar de
100		119 es 123 obtenido de $(34)(2)+(11)(5)$], es decir, después de realizar
101		esta operación de multiplicación entre estas dos matrices, la pareja que
102		teníamos se ha convertido en 102 y 119,
103		haríamos lo mismo con el otro par de números, multiplicaríamos por la
104		matriz, tendríamos otro y este código que está cifrado,
105		[Emi señala los números 34, 11, 9 y 7 que había escrito debajo
106		de cada una de las letras de la palabra “CABE”]
107		pasaría a este otro 102 y 119.
108		¿Qué es lo que hace la persona que recibe el código cifrado?
109		Pues no solamente necesita conocer la asignación aleatoria de las cifras
110		de los números, con las letras perdón, sino que debe conocer la inversa
111		de esta matriz, porque para pasar de este código [Emi señala los números
112		34, 11, 9 y 7 que había escrito debajo de cada una de las letras de la
113		palabra “CABE”] a éste [Emi señala el 102 y 119] se ha efectuado un
114		producto de matrices,
115		entonces calculando la matriz inversa, necesitaría multiplicar estos
116		números [Emi señala el 102 y 119], por la inversa y volveríamos a
117		encontrar éstos [Emi señala los números 34, 11, 9 y 7],
118		y a partir de éstos descifraríamos el texto, es decir,
119		[Interrupción de un profesor que llega a pedirle tiza a Emi]
120		las matrices no sólo nos sirven para guardar datos, para almacenar
121		información, sino que con las matrices podemos realizar operaciones
122		en las cuales pues como en este caso, nos ayudan a proteger el descifrado
123		de un texto, de un mensaje cifrado y luego también con la ayuda de la
124		operación inversa, de la matriz inversa volver de nuevo al mensaje
125		original.
126		¿De acuerdo?
127		Todo esto lo iremos viendo a lo largo del tema.
128		¿Quién me dice qué es una matriz?
129		Porque hemos estado haciendo ejemplos de distintos tipos,
130		matrices numéricas, matrices no numéricas, matrices asociadas a grafos,
131		matrices asociadas a problemas, bueno no a problemas, a estudios
132		sociológicos, ¿lo recordáis?
133		Del ejemplo que vimos de, de la pregunta que se hace a sus amigos
134		acerca de: ¿quién cree que va a aprobar la selectividad?
135		[Pregunta de un problema visto unas clases anteriores].

136		Pues también podríamos plantear un estudio parecido en esta clase,
137		yo os podría preguntar a cada uno de vosotros,
138		¿quién creéis que es una persona idónea para ser el delegado de la clase?
139	Es:	[Nadie contesta].
140	Emi:	No quien quiere ser, sino ¿quién pensáis que podría ser un buen
141		delegado, incluyéndose a vosotros mismos?
142		Aunque vosotros no queréis serlo.
143		Aquí no se está planteando si queréis o no queréis ser, sino la capacidad
144		de un alumno para desempeñar esa tarea, entonces, ¿cómo plantearíamos
145		el estudio con lo que hemos visto?, ¿qué es lo que haríamos?
146	Es:	[Nadie contesta].
147	Emi:	Primero recogeríamos la información, a cada uno de vosotros quién
148		queréis ser un nombre o varios nombres ¿no?
149		Podréis incluir el vuestro si vosotros os creéis capacitados para ser un
150		buen delegado, incluirías seguramente el de varias personas más de la
151		clase ¿no?
152	E3:	Aja.
153		[E3 mueve la cabeza de arriba hacia abajo indicando que sí].
154	Emi:	Con eso, ¿qué haríamos una vez que tengamos toda la información?
155	E5:	El grafo.
156	Emi:	El grafo muy bien.
157		¿Qué puntos?
158		¿Cuáles serían los nodos del grafo?
159	Es:	[Nadie contesta].
160	Emi:	¿Cada punto qué representaría?
161	E3:	¡Uf! [Mostrando cansancio].
162	E6:	Una persona.
163	Emi:	Una persona de la clase, cada miembro del grupo, entonces cada uno de
164		los puntos, cada punto representaría un alumno de la clase y luego,
165		¿qué utilizaríamos para indicar que una persona cree que si serviría para
166		el cargo?
167		A través de direcciones, entonces si este alumno A piensa que el alumno
168		B sería un buen delegado trazaríamos esta línea con esta dirección.
169		[Emi une el punto A con el punto B].
170		Si a su vez ese mismo alumno se cree que él también está capacitado
171		para ser un buen delegado lo marcamos con su bucle.
172		[Emi encierra a el punto A en un bucle].
173		Pero también esa misma persona podría pensar que no solamente B
174		sino también C entonces habrá otro grafo de A a C.
175		[Emi une el punto A con el punto C]
176		Y así... [Emi une el punto A con el punto D].
177		Establecíamos el grafo de opinión una vez dibujado todo el grafo,
178		que en este caso pues sería bastante grande porque, bueno ¿cuántos
179		estáis en clase? [Emi empieza a contar] 2, 4, 5, bueno unos 14 ó 15
180		alumnos y dibujaríamos la matriz ¿no?
181		¿Y qué pondríamos? ¿Cómo?
182	E6:	Pues depende.
183	Emi:	¿Cómo pondríamos los alumnos?

184		¿Cómo los situamos en la matriz?
185	Es:	[Nadie contesta].
186	Emi:	Vamos a suponer que A es el primero el número uno.
187	E5:	A, B.
188	Emi:	Entonces pondríamos ordenados muy bien, A, B y C... hasta P
189		[Emi lo escribe en forma de fila]
190		y luego en el mismo orden A, B y C... hasta P
191		[Emi lo escribe en forma de columna]
192		y a continuación, por ejemplo en el caso de A que lo tenemos reflejado,
193		hemos dicho que A se creía capacitado para ser delegado,
194		entonces en la intersección de la columna A con la fila A.
195		¿Qué escribimos?
196		Escribiríamos un uno.
197		Si A piensa que B también sería buen delegado otro uno
198		[Emi anota un uno en la intersección de la fila A con la columna B]
199		por C también lo piensa
200		[Emi anota un uno en la intersección de la fila A con la columna C].
201		Y, ¿qué pasaría a partir de D?
202	E6:	Ceros.
203	Emi:	Ya serían cero porque opinan que el resto de los alumnos de la clase
204		no serían buenos delegados, lo haríamos con cada uno de los puntos y
205		entonces, ¿qué información nos daría esta matriz?
206		Pues sería una información mucho más clara que el grafo,
207		porque veríamos muy bien cómo están los sitios distribuidos,
208		entonces por ejemplo, ¿quién creéis que sería el mejor delegado?,
209		¿cómo lo veríamos en la matriz?
210	Es:	El que tenga más unos.
211	Emi:	Exactamente sería aquel alumno que tuviera más unos.
212		¿Cómo deberíamos ver eso, en filas o en columnas?
213	E6:	En columnas.
214	Emi:	Muy bien en columnas,
215		imaginad que B es el alumno que ha obtenido los unos de toda la clase
216		[Emi anota puros unos en toda la columna correspondiente a B]
217		Pues sería la columna correspondiente a B llena de unos.
218		¿Cómo observaríamos en una columna que según la clase,
219		no está capacitado para que ser delegado?
220	E3:	Con los ceros.
221	Emi:	La columna con más ceros que tuviera, es decir, que estas matrices se
222		utilizan en estudios sociológicos, para ver la opinión que tienen esas
223		personas de si mismas dentro de un grupo.
224		No son los ejemplos que vamos a desarrollar.
225		Os los he puesto porque me parece interesante que veáis que las
226		matemáticas se aplican a campos muy diversos, pero nosotros nos
227		centraremos más en el campo económico, veremos qué matrices se
228		utilizan en economía, no las vamos a ver ahora preferiría cuando
229		hayamos desarrollado toda la teoría y ya hemos visto cuáles son las
230		partes, bueno los aspectos a destacar del tema y ya como aplicación
231		pues sí que veremos cómo se aplica la teoría de matrices en economía.

232		Bueno visto esto decidme, ¿qué es una matriz?, ya tenéis que tener una
233		idea.
234	E7:	Un conjunto de datos que se disponen en columnas.
235	Emi:	¿Si en lugar de datos decimos elementos?
236	E7:	También.
237	Emi:	Sería prácticamente lo mismo y más genérico,
238		entonces es un conjunto ordenado de elementos dispuestos en filas y
239		columnas, es lo que nosotros llamamos matriz.
240		¿De acuerdo?
241		Y para distinguir una matriz de una tabla, que no es lo mismo aunque
242		tengan a veces un aspecto parecido los elementos.
243		[Emi hace con las manos la forma de una matriz]
244		La matriz la anotábamos con unos paréntesis ¿no?,
245		entonces un ejemplo, un ejemplo de matriz.
246		Hemos visto unos cuantos pero hay un aspecto que no hemos indicado.
247		¿Es importante decir el número de columnas y el número de filas
248		que tiene la matriz?
249	E7:	Si.
250	Emi:	Si, ¿no?
251		Es determinante para la matriz, la matriz siempre va a tener una forma
252		es como una caja, importa la dimensión que tenga,
253		entonces vamos a hablar de matriz de dimensión $m \times n$, una matriz de
254		dimensión $m \times n$, pues como bien habéis dicho es un conjunto de
255		elementos ordenados dispuestos en ¿cuántas filas?
256	Es:	[Nadie contesta].
257	Emi:	m filas y n columnas.
258		¿ m y n qué serán?
259		¿Qué tipos de números?
260	E3:	Enteros.
261	Emi:	¿Enteros?
262		¿Tendría sentido que m y n fueran números negativos o decimales?
263	E8:	Naturales.
264	Emi:	Naturales, muy bien m y n van a ser siempre números naturales
265		[Emi escribe con símbolos que m pertenece a los números naturales y n
266		también], entonces una matriz de orden $m \times n$ de dimensión $m \times n$
267		de orden $m \times n$, es decir de las dos maneras, consta de m filas y n
268		columnas, ¿cuál es la matriz más pequeña de tamaño?
269	E7:	[E7 responde 1×1 , pero Emi no lo escucha y observa a E3 que es al que
270		escuchó].
271	E3:	$m \times 1$.
272	Emi:	¿ $m \times 1$?
273		Una columna.
274		¿ 1×1 ?
275	E3:	Si.
276	Emi:	Exactamente una matriz de 1×1 sería, una matriz con una fila y con una
277		columna.
278		¿Cuántos elementos van a tener? Uno nada más ¿no??
279		Tenemos luego que podemos hablar de matrices 2×1 , 3×2 , 4×5 , 6×6 ,...

280		en fin, que aquí existen infinitas matrices con infinitos tamaños
281		nosotros trabajaremos con matrices pequeñas eh, de orden pequeño,
282		porque la teoría es la misma para todas y es más fácil operar con
283		matrices pequeñas que con grandes.
284		Vamos a ver la notación asociada a una matriz,
285		las matrices se llaman con letras mayúsculas,
286		la matriz A con la letra mayúscula A ese es el nombre de la matriz
287		y los elementos de los que consta esa matriz con la letra minúscula a,
288		pero los elementos van a tener dos subíndices,
289		un subíndice que vamos a llamar i y otro subíndice que vamos a llamar j,
290		entonces diríamos que la matriz A esta formada por los elementos
291		a sub ij.
292		¿Qué significa la i y qué significa la j?
293		Por supuesto los valores de la i si la matriz es de orden $m \times n$,
294		pues los valores de la i están a lo mucho desde 1, 2, ..., hasta m
295		y los de j serían desde 1, 2, ..., hasta n.
296		Hemos dicho que en el orden de la matriz, m nos indica el número de...
297	E3:	De columnas.
298	Emi:	¿Y n el de filas?
299		¿Es así?
300		Es al revés es m el número de filas y n el número de columnas.
301		Porque en $m \times n$, m indica el número de filas y n el segundo lugar,
302		el número de columnas.
303		Una matriz de orden 5×4 tendrá 5 filas y 4 columnas,
304		¿cuántos elementos tendrá en total la matriz si están dispuestos en 5 filas
305		y 4 columnas?
306	E9:	Veinte.
307	Emi:	Muy bien tendrá veinte ¿no?, si multiplicamos los números el resultado
308		nos da el número total de elementos que están distribuidos en esas filas y
309		columnas, entonces, ¿qué significa el primer subíndice y qué significa
310		el segundo subíndice?
311		[Emi señala a sub ij].
312		Pues estos subíndices nos dan la posición del elemento en la matriz.
313		¿Qué necesitamos conocer de un elemento para conocer su posición?
314		Tenemos que decir en qué fila está y en qué columna ¿no?
315		La intersección de esa fila con esa columna nos da la posición del
316		elemento, entonces se distribuyen de la siguiente manera la primera fila
317		a uno uno, a dos dos, a dos tres.
318		[Emi se da cuenta que está escribiendo algo incorrecto, borra y corrige]
319		Perdón a uno dos, a uno tres, a uno cuatro,..., a uno ene
320		la segunda fila a dos uno, a dos dos, a dos tres, a dos cuatro,..., a dos ene
321		la tercera fila a tres uno, a tres dos, a tres tres, a tres cuatro,..., a tres ene
322		y la última fila a eme uno, a eme dos, a eme tres, a eme cuatro, ...,
323		a eme ene.
324		Como veis, la otra forma de escribir las matrices es mucho más
325		abreviada, que es la que está formada por los elementos a_{ij} aquí se ve de
326		forma explícita cuáles son los elementos que componen la matriz,
327		hemos dicho que tiene m filas y n columnas.

328		[Emi señala la matriz en donde están dispuestos cada uno
329		de los elementos de la matriz].
330		Entonces por ejemplo el elemento a dos tres, el que tiene los subíndices
331		2 y 3, ¿dónde está situado?
332	E3:	En la tercera columna segunda fila.
333	Emi:	Vamos a ver, aunque da lo mismo decir primero el número de columnas
334		y luego el número de filas, nos vamos a acostumbrar a dar primero el
335		número de filas y luego el número de columnas.
336		¿Qué número de fila es?
337	E3:	Segunda.
338	Emi:	Segunda y ¿columna?
339	Es:	Tercera.
340	Emi:	Entonces, ¿qué me indica el primer subíndice?
341	Es:	La fila.
342	Emi:	La fila y ¿el segundo?
343	Es:	La columna.
344	Emi:	Entonces el elemento a sub ij
345		¿En qué posición está?
346		Es el elemento que está en la fila i, columna j.
347		¿De acuerdo?
348		Vamos a poner,
349		[Emi se acerca a E9 para mostrarle en su libro de Braille
350		el ejemplo que se va a hacer, luego Emi regresa a la pizarra]
351		vamos a ver un ejemplo concreto,
352		cuando estos números están dispuestos en filas y columnas
353		son números reales, la matriz se dice que es una matriz real eh,
354		aunque no lo haya mencionado, nosotros la mayoría de las veces vamos
355		a trabajar con matrices reales, es decir, matrices cuyos elementos son
356		números reales.
357		Entonces eh, por ejemplo la matriz de orden 4x5.
358		[Emi pide a E9 le dicte los elementos por fila].
359	E9:	7, 6, 1, 0, 3.
360	Emi:	Siguiente fila.
361	E9:	4, 15, 8, 9, 9.
362	Emi:	Siguiente.
363	E9:	2, 1, 7, 5, 4.
364	Emi:	Y la última.
365	E9:	0, 3, 25, 18, 2.
366	Emi:	¿De qué orden es esta matriz?
367	E3:	4x5.
368	Emi:	¿Cuál?
369	E3:	4x5.
370	Emi:	¿Cuántas filas tiene?
371		1, 2, 3, 4 filas.
372		Es una matriz de orden 4 por...
373		¿Cuántas columnas?
374		1, 2, 3, 4, 5 columnas.
375		Matriz de orden 4x5.

376		¿Qué tipo de números componen la matriz?
377		En este caso son todos números enteros pero no tienen porque siempre
378		ser números enteros, pueden ser números racionales, pueden ser
379		decimales, pueden ser fraccionarios, es decir, a ver ¿cuál es el elemento
380		a sub 2, 4?
381		Tenemos que buscar el elemento que está en la segunda fila, columna 4.
382		Entonces bajamos a la segunda fila [Emi lo indica con su mano] y nos
383		vamos columna 1, 2, 3 y 4, y luego el 25 ¿qué elemento es?
384	E3:	El 4, 3.
385	Emi:	El número 25 está 1, 2, 3 en la fila 4, columna 1, 2, 3.
386		Entonces este es el elemento a sub 4, 3, ¿de acuerdo?,
387		es muy sencillo solamente hay que contar para conocer la posición.
388		Bueno, ya que sabemos qué es una matriz,
389		vamos a ver distintos tipos de matrices,
390		vamos a empezar por hablar de una matriz cuadrada.
391		A ver, ¿qué será una matriz cuadrada?
392	E7:	La que tiene forma de cuadrado.
393	Emi:	Muy bien, aquella matriz que tenga el mismo número de filas que de
394		columnas eh.
395		Si identificamos una matriz con un rectángulo, el cuadrado tiene los
396		lados iguales, en este caso el número de filas debe coincidir con el
397		número de columnas entonces m va a ser igual a n, en este caso como
398		coincide el número de filas con el de columnas no hablaremos de $m \times n$
399		sino diremos que es de orden n.
400		Por ejemplo, vamos a suponer n igual a 2, una matriz cuadrada de orden
401		2, ¿cómo sería?
402		Dos filas y dos columnas, sin dar números concretos, sino simplemente
403		mencionando los elementos de una matriz.
404		El primero ¿cuál sería?
405	E3:	a uno uno.
406	Emi:	¿Y el segundo?
407	E3:	a uno dos.
408	Emi:	En la primera fila tendríamos a uno uno y a uno dos.
409		Y, ¿en la segunda?
410	E3:	a dos uno.
411	Emi:	a dos uno y a dos dos.
412		¿De acuerdo?
413		Es un ejemplo genérico de matriz cuadrada de orden 2, no hemos
414		concretado cuáles son los números pero es una matriz de dos filas
415		y dos columnas.
416		Si fuera de n igual a 3, ¿cómo sería?
417	E3:	a uno uno.
418	Emi:	Tendríamos que añadir una fila más y una columna más.
419		Los elementos ...
420	E3:	a uno uno.
421	Emi:	a uno uno.
422	E3:	a uno dos, a uno tres.
423	Emi:	a uno dos, a uno tres, para la primera fila.

424		Y ¿para la segunda?
425		a dos uno, a dos dos, a dos tres.
426		¿Para la tercera?
427		a tres uno, a tres dos, a tres tres.
428		¿De acuerdo?
429		¿Hay alguna duda en la notación?
430		¿En cómo se disponen los elementos y lo que indican los subíndices?
431		Bueno pues una matriz cuadrada, fijaros en los elementos que estoy
432		señalando [Emi señala los elementos que aparecen en la diagonal
433		principal de ambas matrices cuadradas, la de orden 2 y la de orden 3]
434		He señalado en la primera el elemento a uno uno y a dos dos
435		y en la de orden tres sería a uno uno, a dos dos y a tres tres.
436		[Emi se acerca con E9 para ver si va entendiendo, Emi pregunta a E9 si
437		va entendiendo lo que han visto hasta el momento y E9 le contesta que
438		sí, luego Emi regresa a la pizarra].
439		Muy bien eso es una...
440	Es:	[Nadie contesta].
441	Emi:	Si hemos dicho que si en este caso la matriz se parece a un cuadrado,
442		¿Esto a qué correspondería en un cuadrado?
443		Pues a la diagonal, pues esta diagonal se llama diagonal principal.
444		Por semejanza con la Geometría, llamamos diagonal principal a los
445		elementos que ocupan una posición en la que el número de fila coincide
446		con el número de la columna.
447		Bueno, vamos a ver otro tipo de matrices, ¿qué pasa si m vale uno?
448		Una matriz con una sola fila, ¿cómo sería?
449		Una matriz de orden $1 \times n$, ¿qué tendría?
450		Una fila y n columnas, ¿cómo la representamos?
451		Esta matriz A igual a sería a uno uno, a uno dos,..., hasta llegar a a uno
452		ene.
453		Una sola fila.
454		¿Esta cómo se llama?
455	Es:	[Nadie contesta].
456	Emi:	Propuestas para nombrar a esta matriz...
457	Es:	[Nadie contesta].
458	Emi:	Si sólo tiene una fila.
459	E9:	$1 \times n$.
460	Emi:	Es de orden $1 \times n$, pero ¿cómo llamamos a este tipo de matrices?
461		Matriz...
462	E5:	Fila.
463	Emi:	Muy bien matriz fila.
464		¿Cómo será una matriz que tenga una sola columna?
465	Es:	Columna.
466	Emi:	¿La llamaremos?
467	E3:	Matriz columna.
468	Emi:	Exacto matriz columna, una sola columna, la n vale uno, que será de
469		orden $m \times 1$.
470		Si la representamos, ¿cuáles son los elementos de la matriz?
471	E3:	a sub uno uno, a sub dos uno, a sub tres uno, a sub cuatro uno.

472	Emi:	Y así hasta llegar a la fila m ¿no? A a sub eme uno.
473		La matriz fila por constar nada más de una fila sus elementos tienen una
474		orientación horizontal, mientras que la matriz columna, sus elementos,
475		por constar nada más de una sola columna sus elementos forman una
476		columna por eso reciben ese nombre ¿no?
477	Es:	Si.
478	Emi:	Vale.
479		Vamos a continuar con los ejercicios de matrices.
480		¿A qué llamaremos matriz nula?
481		La palabra nula, ¿con qué número la podemos asociar?
482	Es:	Con el cero.
483	Emi:	Con el cero, entonces una matriz nula será aquella en la que todos sus
484		elementos sean...
485	Es:	Cero.
486	Emi:	Cero.
487		No importa el orden que tenga, puede haber matrices nulas de orden 2×2 ,
488		3×3 y no importa siempre y cuando sus elementos sean cero pues diremos
489		que es una matriz nula.
490		[Emi escribe una matriz nula de $n \times n$].
491		¿De acuerdo?
492		¿Por qué creéis que resaltamos esta matriz y le damos un nombre, para
493		ello?
494		¿Qué importancia tiene el cero en los números reales?
495		¿El cero es igual que cualquier otro número real?
496		¿Qué propiedades tiene el cero?
497	E7:	Cancela al número.
498	Emi:	Con el producto sí y ¿con la suma?
499	E7:	Da el mismo.
500	Emi:	Cuando sumamos cualquier número real, le sumamos el cero y el
501		resultado es...
502	E7:	Es el mismo.
503	Emi:	Es el mismo número real, entonces, ¿cómo se llama ese elemento?
504		El elemento neutro de la suma.
505		Por eso introducimos aquí esta matriz, porque va a tener un papel muy
506		parecido al cero con los números reales.
507		¿De acuerdo?
508		Vamos a continuar con otro tipo de matrices.
509		Vamos a ver la matriz triangular, que puede ser triangular superior o
510		triangular inferior.
511		Se llama matriz triangular superior a una matriz cuadrada en la que todos
512		los elementos que están situados por encima de la diagonal principal son
513		cero.
514		¿Cómo escribo yo eso?
515		Una matriz de orden n.
516	E3:	Dibujamos primero la diagonal principal.
517	Emi:	Si vamos a dibujar primero la diagonal principal,
518		a uno uno, a dos dos,..., a ene ene.
519		¿De acuerdo?

520		¿Cuáles son los que están por encima?
521		Los que están en esta parte hacia la derecha.
522		[Emi lo señala con sus manos].
523		Si son ceros eso significa que el elemento que va al lado del a uno uno es
524		cero y todos los demás hasta llegar a la última columna son también
525		ceros.
526		A partir de a dos dos el siguiente elemento es cero hasta llegar a la
527		última columna que es cero.
528		[Emi completa los elementos que faltan en esa matriz].
529		¿Por qué se llama triangular superior?
530		La diagonal principal y si marcamos los elementos que están por encima,
531		[Emi encierra en forma rectangular la diagonal principal y a los ceros de
532		la parte superior en un triángulo]
533		¿qué forma tienen?
534	Es:	Un triángulo.
535	Emi:	¿Por qué la llamamos triangular superior?
536	E3:	Porque forma un triángulo arriba.
537	Emi:	Exactamente porque el triángulo que contiene todos los ceros,
538		es un triángulo formado por ceros y está por encima de la diagonal,
539		de forma análoga podemos definir la triangular inferior, la situación
540		simétrica a ésta, es decir, que por debajo de la diagonal todos los
541		elementos sean cero.
542		[Emi señala el espacio donde iría ese triángulo en la matriz].
543		El triángulo no se forma por encima sino que esté por debajo.
544		Entonces de forma resumida, si marcamos aquí la diagonal principal,
545		[Emi escribe una nueva matriz indicando nuevamente a la diagonal
546		principal en forma rectangular y un triángulo debajo de esa diagonal
547		con un cero grande dentro]
548		aquí tenemos un triángulo en el que todos sus elementos son cero.
549		¿De acuerdo?
550	E3:	Y son cuadradas.
551	Emi:	Se habla de matrices cuadradas, lo que ocurre es que luego podemos
552		hablar también de matrices no cuadradas, habrá que buscar la diagonal
553		principal, lo que pasa es que ya no es una diagonal como en el cuadrado
554		que va de vértice a vértice, y podremos hablar de triangular superior
555		y triangular inferior.
556		Vamos a ver ahora otro tipo de matrices, las matrices escalares.
557		Matriz escalar, matriz diagonal y matriz unidad.
558		De estas tres matrices voy a empezar con la matriz diagonal.
559		Una matriz diagonal es una matriz en la que todos los elementos
560		que están fuera de la diagonal principal, volvemos a referirnos a matrices
561		cuadradas, son cero.
562		Si ponemos un ejemplo de una matriz de orden 3,
563		de una matriz cuadrada de orden 3, tenemos por lo tanto la matriz, 1, 0, 0
564		[en la primera fila]; 0, 2, 0[en la segunda fila] y 0, 0, 3[en la tercera fila].
565		He dibujado una matriz de orden 3, una matriz cuadrada, los elementos
566		de la diagonal principal el 1, el 2 y el 3,
567		[Emi encierra la diagonal principal en un rectángulo]

568		y fuera de la diagonal principal todos los elementos son cero,
569		a esta diagonal, a esta matriz se le llama diagonal.
570		¿Por qué se le llama diagonal?
571	E7:	Porque los números están en la diagonal.
572	Emi:	Porque los únicos elementos significativos, los no nulos están en la
573		diagonal principal, esta matriz diagonal, ¿qué tiene de particular?
574	E6:	Una matriz triangular superior y ...
575	Emi:	Muy bien una matriz triangular superior y una matriz triangular inferior,
576		es decir, aquellas matrices que son triangulares superior e inferiormente
577		son las diagonales.
578		¿De acuerdo?
579		¿Qué pasa con...?
580		¿A qué se le llama matriz escalar?
581		Pues a una diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son
582		todos iguales.
583		Por ejemplo si pongo el 2, entonces la matriz 2,0,0 [en la primera fila];
584		0,2,0 [en la segunda fila] y 0,0,2 [en la tercera fila], esta es la escalar.
585		[Emi se acerca a E9 para ayudarla a localizar este ejemplo en las notas
586		que Emi le prepara a E9 en Braille, Emi apoya el dedo de E9 y le va
587		señalando con su dedo, está es la matriz unidad que vamos a ver ahora
588		si todos los números son distintos diagonal y si todos son iguales
589		escalar].
590		Entonces son tres matrices muy parecidas.
591		La matriz escalar, la diagonal y la matriz unidad.
592		Porque estas matrices fuera de la diagonal principal son matrices
593		cuadradas en las que todos sus elementos son cero, la matriz diagonal.
594		Os he puesto ya los dibujos y luego pasamos al ejemplo de matriz
595		escalar, es una matriz diagonal pero con la particularidad de que todos
596		los elementos de la diagonal son iguales, entonces si en la diagonal
597		principal tenemos 2, 2, 2 [Emi señala la matriz que había escrito]
598		y en el resto ceros a esta matriz la llamo matriz escalar.
599		Y ¿a qué llamo matriz unidad?
600		¿Qué tengo que poner en la diagonal principal?
601	E3:	Cero.
602	Emi:	¿Unidad de qué viene?
603	Es:	Uno.
604	Emi:	Uno.
605		¿Qué pasaría si en lugar de unos fueran ceros, E3?
606		Lo que tú has dicho, ¿en qué se convertiría la matriz?
607		Si en lugar de unos anoto ceros, ¿en qué se convierte la matriz?
608	Es:	En nula.
609	Emi:	Entonces la matriz unidad es una matriz cuadrada en la que todos los
610		elementos de la diagonal principal son unos.
611	E5:	Pero también es escalar ¿no?
612	Emi:	Claro es que las escalares son diagonales y la matriz unidad es escalar
613		pero también es diagonal.
614		¿De acuerdo?
615		Bueno como veréis primero comenzamos, estamos aprendiendo

616		vocabulario de matrices eh, cómo se clasifican la matrices y qué nombre
617		se le da a cada tipo de matriz.
618		¿Por qué mencionamos estas matrices?
619		Porque estás van a tener cierta relación luego cuando veamos
620		operaciones con matrices.
621		¿De acuerdo?
622		En el libro hay una serie de matrices que yo no enseñé al principio pero
623		que las vamos a ver ahora, ya que estamos clasificando y hablando de
624		matrices, vamos a hablar de matriz traspuesta.
625	E5:	¿Ese es otro tipo de matriz verdad?
626	Emi:	Si, matriz traspuesta de A.
627		¿Qué pasa si a una caja le doy la vuelta?
628	E3:	¿Si qué?
629	Es:	[Risas].
630	Emi:	[Sonríe].
631		Vamos a ver, las matrices de $m \times n$,
632		[Emi dibuja un rectángulo]
633		¿con qué forma las hemos asociado?, ¿qué forma tienen?
634	Es:	Rectangular.
635	Emi:	m filas y n columnas.
636		[Emi escribe sobre la altura del rectángulo, m filas y en el lado contiguo
637		n columnas]
638		¿Qué pasa si yo le doy vuelta al rectángulo?
639		[Emi dibuja la nueva forma que tendría el rectángulo al darle la vuelta
640		y observa la cara de sus alumnos].
641		Una...
642	E7:	Se cambian las filas por las columnas.
643	Emi:	Cambio las filas por las columnas, entonces una matriz traspuesta de
644		otra.
645		Si yo tengo una matriz A de orden $m \times n$, la matriz traspuesta de A es la
646		matriz de orden $n \times m$, de forma que lo único que cambiamos es la
647		posición de los elementos, cambiamos las filas por las columnas.
648		Es lo mismo que cambiar el rectángulo, tumbarlo y ponerlo de pie.
649		Vamos a ver un ejemplo.
650		Hemos dicho que la matriz traspuesta de una matriz dada es aquella que
651		se obtiene cambiando las filas por las columnas entonces vamos a
652		suponer que tenemos una matriz de orden 2×3 la primera fila 1, 2 y 3
653		y en la segunda fila 4, 5 y 6.
654		¿De acuerdo?
655		Una matriz de dos filas y tres columnas, los elementos de la primera fila
656		el 1, el 2 y el 3 y de la segunda fila el 4, el 5 y el 6.
657		¿Cómo escribiríamos esa matriz cambiando las filas por las columnas?
658	Es:	[Se escuchan murmuraciones de los estudiantes, hablando entre ellos
659		cómo sería].
660	Emi:	Vamos a trasponer la matriz, vamos a ver a A traspuesta,
661		la primera fila habíamos dicho que era el 1, el 2 y el 3
662		y la segunda fila 4, 5 y 6.
663		[En el dibujo de la matriz A, Emi encierra en un rectángulo

664		la primera fila y luego la segunda fila en otro].
665		Entonces ¿cómo quedará?
666		Pues vamos a cambiar.
667	E3:	1, 4.
668	Emi:	La primera columna, ¿cuál sería si la primera fila es 1, 2, 3?
669		Entonces la primera columna es 1, 2 y 3.
670		[En el dibujo de A traspuesta, Emi encierra en un rectángulo la primera
671		columna de A traspuesta, que sería la primera fila de A, para que los
672		estudiantes noten que la primera fila de A ahora es la primera columna
673		de A traspuesta, similarmente encierra en un rectángulo la segunda
674		columna de A traspuesta que sería la segunda fila de A].
675		¿Y la segunda columna sería?
676	Es:	4, 5, 6.
677	Emi:	4, 5, 6, es decir, disponemos los mismos elementos cambiando la
678		posición.
679		¿Está claro?
680		La primera fila que era 1, 2, 3 ahora es la primera columna
681		y la segunda fila 4, 5, 6 ahora es la segunda columna.
682		A es de orden 2x3 y A traspuesta es de orden 3x2.
683		¿De acuerdo?
684		Entonces son dos matrices.
685		¿Cuándo va a coincidir una matriz con su traspuesta?
686	E5:	¿Cómo asegurarse de que sea la traspuesta?
687	Emi:	Comparando fila por fila si coinciden los elementos con cada columna
688		de A traspuesta.
689		En este caso te fijas en la primera fila de la primera y la comparas con la
690		primera columna de la otra matriz, luego pasas a la siguiente fila y veis
691		si coincide con la segunda columna de la otra,
692		y si coinciden las filas de una matriz con las columnas de la otra será la
693		traspuesta, sino no.
694		Por ejemplo, voy a poner una matriz cuadrada de orden 3.
695		Vamos a poner la primera fila 2, 4, 6, en la primera fila los primeros
696		tres múltiplos de 2; en la segunda fila vamos a poner los tres primeros
697		múltiplos de 3, 3, 6, 9; y en la tercera fila vamos a poner los primeros
698		múltiplos de 5, 5, 10, 15.
699	E3:	Hallar la traspuesta.
700	Emi:	Si, hallar la traspuesta.
701		Es una matriz cuadrada, entonces, ¿cómo será su traspuesta?
702	E5:	Cuadrada.
703	Emi:	También cuadrada de orden 3.
704		¿Cuál es la forma más sencilla de escribirla?
705	Es:	Acomodando los cambios.
706	Emi:	Cogemos la primera fila y si hemos dicho que la primera fila
707		eran los primeros múltiplos de 2,
708		entonces ahora la primera columna son los primeros múltiplos de 2.
709		[Emi escribe 2, 4, 6 como primera columna de A traspuesta].
710		¿Qué pasa con la segunda columna?
711		Entonces la segunda columna serán los múltiplos de 3, 3, 6, 9;

712		y en la tercera columna irán los múltiplos de 5, 5, 10 y 15.
713		¿De acuerdo?
714		Bueno pues vamos a ver la matriz opuesta, esta es la matriz traspuesta,
715		ahora ¿cuál sería la matriz opuesta?, ¿a qué le suenan los opuestos?
716	E7:	A los que dan ceros.
717	Emi:	En la suma, no.
718		La matriz opuesta es aquella en la que los elementos son los opuestos de
719		la matriz dada, solamente tenemos que cambiar los signos.
720		¿De acuerdo?
721		Bueno sólo nos ha faltado ver otro tipo de matrices, que son las matrices
722		simétricas y eso lo veremos el próximo día y empezaremos con las
723		operaciones con matrices.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la segunda clase grabada de la profesora Emi del martes 30/09/08.

Resumen: Emi hace un esquema donde vienen nombrados diferentes tipos de matrices: Matriz cuadrada, matriz fila, matriz columna, matriz triangular (superior e inferior), matriz diagonal, matriz escalar, matriz unidad, matriz nula, matriz transpuesta, matriz opuesta. Luego presenta la matriz simétrica y antisimétrica. Después empieza a hacer operaciones con matrices, empezando por la suma, luego multiplicación de una matriz por un escalar y finalmente comenta un poco respecto al producto de dos matrices.

L		Transcripción
1	Emi:	Voy a comenzar pasando lista como siempre
2		[Emi va diciendo los nombres de cada uno de los alumnos inscriptos
3		y los estudiantes van contestando]
4		Bueno continuamos con el tema de matrices,
5		en la pizarra os he escrito un esquema de lo que hemos visto estos días,
6		[Emi hace un esquema donde vienen nombrados diferentes tipos
7		de matrices: Matriz cuadrada, matriz fila, matriz columna,
8		matriz triangular (superior e inferior), matriz diagonal, matriz escalar,
9		matriz unidad, matriz nula, matriz transpuesta, matriz opuesta],
10		entonces la primera pregunta, ¿alguna duda? acerca de las matrices,
11		¿Qué es una matriz?,
12		Tipos de matrices,
13		¿Tuvieron algún problema al hacer los ejercicios que les propuse?
14		Son muy sencillos,
15		de hecho son tan sencillos que ni siquiera los vamos a corregir
16		a menos que hayan tenido problemas con alguno de ellos,
17		vamos a continuar avanzando en el tema,
18		pero ¿cómo nos quedamos?
19		[Emi se acerca a E9 para preguntarle si ha tenido
20		algún problema al resolver los ejercicios pero E9 le comenta que no],
21		Vamos a ver,
22		vamos a repasar un poco a ver E11,
23		¿Qué es una matriz?
24	E11:	Como una tabla con datos de números.
25	Emi:	Algo parecido.
26	E5:	Un conjunto ordenado de datos de un problema.
27	Emi:	Eso es, si lo queremos decir de forma más precisa,
28		podemos definir matriz como un conjunto de elementos ordenados
29		dispuestos en filas y en columnas,
30		entonces algo que caracteriza la matriz es el...
31		¿Puede tener cualquier número de filas y cualquier número de
32		columnas una matriz?
33		En principio sí, no hemos fijado nada para ello,
34		entonces cada matriz vendrá determinada en un principio por el tamaño,
35		ese tamaño cómo lo llamamos, al número de filas
36		y de columnas que tiene.
37	E5:	El orden.
38	Emi:	El orden de una matriz o dimensión de la matriz,
39		entonces hablamos de orden $m \times n$, ¿no?

40		Cuando nos refiramos a una matriz siempre conviene hablar
41		del tamaño que tiene, el primer número qué indica, la m,
42		la m indica siempre...
43	E1:	Las filas.
44	Emi:	Muy bien el número de filas y la n...
45	E1:	El número de columnas.
46	Emi:	Muy bien, entonces E1 dime una matriz cuadrada
47		¿por qué se caracteriza?
48	E1:	Porque la m y la n son iguales.
49	Emi:	Exactamente por tener el mismo número de filas que de columnas,
50		eso de forma abreviada escribimos que m es igual a n, muy bien,
51		E1 y una matriz fila ¿porqué se caracteriza?
52	E1:	Porque solamente tiene una fila.
53	Emi:	Solamente tiene una fila, entonces ¿cuál es el orden de la m?
54	E7:	Uno.
55	Emi:	Exactamente, y una matriz columna ¿por qué se caracteriza?
56	E12:	Por tener una columna.
57	Emi:	Por tener una columna nada más,
58		entonces la n vale uno, eh,
59		E12 ¿cuál es la matriz triangular?
60	E12:	[Sólo se escucha que dice algo en voz baja pero
61		no se distingue lo que dice]
62	Emi:	No te oigo bien, voy a cerrar la puerta.
63		[Emi cierra la puerta],
64		Ahora sí puedes repetirlo por favor
65	E12:	Una matriz triangular que incluye un triángulo.
66	Emi:	A ver quien especifica mejor a qué llamamos matriz triangular.
67	E1:	Que lo de arriba del triángulo son cero y la diagonal principal
68		son números.
69	Emi:	Vamos a ver, en la matriz cuadrada hemos dicho que
70		los elementos están dispuestos en filas y en columnas,
71		geométricamente podemos decir que forman un rectángulo ¿no?,
72		cuando el número de filas es igual que el número de columnas es
73		cuando ese rectángulo se convierte en cuadrado y es cuando hablamos
74		de matrices cuadradas,
75		la matriz triangular,
76		ya no hace referencia a la forma de la matriz,
77		sino a los elementos que van por encima
78		o por debajo de la diagonal principal,
79		entonces si yo tengo una matriz cuadrada la diagonal principal
80		está formada por qué elementos...
81	E7:	a uno uno, a dos dos...
82	Emi:	Muy bien a uno uno, a dos dos, ..., a ene ene,
83		son los elementos que están situados en una fila y columna
84		con el mismo número,
85		geométricamente se corresponden con la diagonal del cuadrado,
86		es decir, la matriz es cuadrada,
87		y la matriz triangular superior

88		¿por qué se caracteriza?
89		Por tener todos los elementos por encima de la diagonal principal,
90		ceros.
91		El resto no definimos que valores tiene,
92		solamente nos fijamos en esta condición.
93	E3:	Pero eso es para que sea superior.
94	Emi:	¿Para que fuera inferior cómo sería E3?
95	E3:	Abajo los ceros, pero en el libro no lo trae Emi.
96	Emi:	Bueno, a ver no me lo puedo creer.
97		[Emi va y ve su libro]
98	E3:	El dibujo está hecho al revés.
99	Emi:	Pues yo ni me he dado cuenta
100		[Al revisar en su libro]
101		pues es cierto,
102		bueno no importa mucho porque en matemáticas ocurren estas cosas, eh,
103		es cuestión de ponerse de acuerdo si nosotros aceptamos que es así
104		[Emi señala el dibujo de la matriz donde el triángulo con ceros está
105		por encima de la diagonal principal],
106		pues podemos seguir trabajando con este nombre,
107		no lo vamos a cambiar porque no es importante.
108		E3 ya que estás en eso, la matriz diagonal
109		¿por qué se caracteriza?
110	E3:	La matriz diagonal se caracteriza porque todos los elementos
111		son cero excepto la diagonal.
112	Emi:	Si y todos los que están fuera de la diagonal son cero,
113		¿de acuerdo?
114		y ¿la matriz escalar?
115	E5:	En la diagonal está formada por el mismo número.
116	Emi:	Muy bien E5 es una matriz diagonal en la que todos los elementos
117		de la diagonal coinciden
118		¿y la matriz unidad?
119	E3:	Con unos.
120	Emi:	Si muy bien en la diagonal todos son unos y fuera de ella todos son cero.
121		La matriz nula ¿cuál es?
122	Es:	La de ceros.
123	Emi:	La que todos sus elementos son cero, habíamos visto cuál es
124		la matriz transpuesta de una matriz ¿no?,
125		¿qué teníamos que hacer para hallarla?
126	E7:	Cambiar las filas a columnas.
127	Emi:	Muy bien cambiando filas por columnas
128		¿de acuerdo?,
129		justamente nos habíamos quedado aquí,
130		vamos a retomar el tema hablando de las matrices simétricas.
131	E1:	Falta la opuesta.
132	Emi:	Tienes razón me faltó esa.
133		A ver E1, ¿cuál es la matriz opuesta?
134	E1:	Pues es la que se anota pero se le cambia de signo.
135	Emi:	La matriz opuesta de una matriz es otra matriz,

136		¿del mismo orden o de distinto orden?
137	Es:	Del mismo orden.
138	Emi:	Muy bien y ¿cómo se llamará?
139		Pues por similitud con los números,
140		aunque las matrices no sean números,
141		pero utilizamos una notación muy parecida,
142		con lo cual si hablamos de una matriz A,
143		su opuesta la vamos a llamar $-A$, y
144		¿cómo será esta matriz respecto de la matriz A?
145		¿cómo serán los elementos?
146	Es:	Negativos.
147	Emi:	Es decir, que si los de la matriz A son de la forma a sub ij,
148		los de la opuesta ¿cómo serán?
149	E3:	Negativo a sub ij
150	Emi:	Sería menos a sub ij, es decir,
151		cada uno de los elementos de la matriz opuesta
152		son los opuestos correspondientes a la matriz A,
153		los opuestos no tienen por que ser negativos,
154		anotamos el signo menos para decir que es el opuesto
155		pero si el número es negativo su opuesto ¿cómo será?
156	Es:	Positivo.
157	Emi:	Positivo ¿no?,
158		bueno después de la matriz opuesta vamos a hablar
159		de una matriz simétrica,
160		¿qué es una matriz simétrica?
161		Os voy a poner un ejemplo antes de deciros,
162		vamos a escribir la matriz asociada a las distancias
163		entre unas localidades,
164		tenemos la siguiente situación,
165		un pueblo que llamamos A que se comunica con otro
166		pueblo al que llamamos B
167		mediante una carretera.
168		Y desde B se comunica con otro que llamamos C
169		y B se comunica a su vez con D,
170		nos dan las distancias por carretera de cada uno de los pueblos,
171		la distancia por carretera entre A y B es de 30 km,
172		entre B y C es de 15 Km y entre B y D 20 Km,
173		vamos a escribir la matriz de las distancias entre los pueblos,
174		a través de carretera,
175		¿qué debemos hacer para escribir la matriz de las distancias?
176		¿cuántos pueblos tenemos?
177	Es:	Cuatro.
178	Emi:	Cuatro, entonces ¿cuántas filas y cuántas columnas tendrá esa matriz?
179	Es:	Cuatro.
180	Emi:	Será una matriz cuadrada de orden cuatro,
181		lo lógico es que si a cada pueblo lo asignamos con una letra
182		lo ordenemos alfabéticamente ¿no?,
183		entonces la primera columna la representaremos A,

184		la segunda B, y así hasta D
185		entonces haremos lo mismo con las filas en el mismo orden ¿no?,
186		entonces se trata de escribir la matriz cuadrada de orden cuatro,
187		como esta matriz está asociada a un problema real entonces las filas
188		y las columnas tienen un significado por eso tenemos
189		que establecer el acuerdo del orden de las filas y las columnas,
190		en este caso este A, B, C y D,
191		entonces el elemento que está en la primera fila y primera columna,
192		¿qué es lo que nos tiene que dar?
193		La distancia por carretera entre A y A, ¿cuál va a ser?
194	Es:	Cero.
195	Emi:	Si ahora nos vamos al segundo elemento
196		de la primera fila segunda columna ¿qué tenemos que escribir?
197	Es:	30.
198	Emi:	La distancia entre A y B, ¿no?,
199		ahora al elemento de la primera fila tercera columna,
200		la distancia entre A y C, en este caso 35, y entre A y D.
201	Es:	No es 35 es 45.
202	Emi:	Tienen razón,
203		[Emi corrige]
204		Y ¿entre A y D?
205		si va por carretera,
206		entonces primero tiene que pasar por B y luego llegar a D
207		entonces son 50,
208		podéis completarla vosotros solos por favor
209		[Emi les pide anotar los valores correspondientes en la matriz
210		de distancias entre los pueblos]
211		[Emi se acerca a E9 para indicarle en sus notas lo que van haciendo]
212		E12 podrías completar la matriz,
213		en la segunda fila que tenemos 30, 0, 15, 20,
214		en la segunda fila 45, 15, 0, 35 y en la última fila 50, 20, 35, 0
215		¿qué le pasa a esta matriz? ¿qué peculiaridad tiene?
216	Es:	La diagonal es cero.
217	Emi:	La diagonal es cero claramente porque en la diagonal están
218		las distancias de un pueblo así mismo
219		¿y qué pasa fuera de la diagonal?
220	E3:	Que la parte superior y la inferior es igual.
221	Emi:	Si, vamos a ver ¿qué son estas rayas que he dibujado?
222		[Emi dibuja todas las diagonales en dirección hacia arriba
223		para que se note más la simetría]
224		¿qué ocurre con las distancias?
225		¿es la misma desde A a B que de B a A?
226		Sí, por eso el elemento de la primera fila segunda columna
227		coincide con el de la segunda fila primera columna,
228		por eso el elemento de la primera fila tercera columna coincidirá
229		con el elemento de la tercera fila primera columna y así respectivamente.
230		Si yo doblase el papel por la diagonal ¿qué ocurriría?
231		coincidirían los elementos a un lado y a otro de la diagonal,

232		esa situación en matemáticas,
233		¿cómo se llama?
234		Decimos que aparece una simetría,
235		estas matrices son las que llamamos matrices simétricas,
236		esta es una matriz simétrica, los elementos que están por encima
237		de la diagonal coinciden con los respectivos por debajo de la diagonal,
238		pero para ser más precisos, si llamamos A a la matriz,
239		ahora ya no tiene nada que ver eso con los pueblos,
240		si yo llamo a una matriz A y a sus elementos a sub ij,
241		¿cómo describo esta situación?
242		¿cómo digo que la matriz es simétrica?
243		Decimos que los elementos coinciden a un lado y a otro de la diagonal,
244		entonces un elemento cualquiera a sub ij
245		¿con cuál va a coincidir?
246		¿qué otro elemento de la misma matriz es idéntico al que está
247		en la fila i columna j?
248	E1:	El que está por debajo de la diagonal.
249	Emi:	Y ese ¿cuál es?
250	Es:	a sub ji
251	Emi:	Es lo que hemos dicho antes,
252		el elemento que está en la fila i columna j coincide con el que
253		está en la fila j columna i,
254		¿qué es lo que hacemos?
255		cambiar la fila por la columna, intercambiar filas por columnas
256		y si coinciden los elementos entonces decimos
257		que la matriz es simétrica y ya para terminar,
258		¿a qué se llama matriz antisimétrica?
259		Bueno se me ha olvidado decir,
260		¿qué pasa?, porque hemos dicho que la matriz simétrica,
261		si cambiamos la fila por la columna
262		y la columna por la fila los elementos coinciden,
263		¿en qué operación o en qué transformación hacíamos,
264		que cambiábamos filas por columnas?,
265		que a partir de una matriz obteníamos otra
266		cambiando filas por columnas.
267	Es:	La transpuesta.
268	Emi:	Muy bien, la matriz transpuesta, recordáis,
269		para pasar de una matriz A a su transpuesta,
270		si la matriz A tenía m filas y n columnas,
271		la transpuesta al contrario,
272		n filas y m columnas,
273		le dábamos la vuelta cambiábamos las filas por las columnas,
274		entonces
275		¿qué pasa si yo hago la transpuesta de una matriz simétrica?
276	E3:	Es igual.
277	Emi:	Muy bien efectivamente,
278		si le doy la vuelta obtengo la misma matriz,
279		entonces característica de la matriz simétrica,

280		que es idéntica con su transpuesta, aquí lo podemos ver,
281		si observamos la matriz por filas
282		[Emi hace referencia a la matriz simétrica]
283		tenemos que la primera fila coincide exactamente
284		con la primera columna,
285		la segunda fila coincide exactamente con la segunda columna
286		y así sucesivamente
287		¿alguna duda?,
288		pues ya para terminar toda esta clasificación de las matrices
289		vamos a ver qué es la matriz antisimétrica y
290		la matriz antisimétrica cumple la siguiente propiedad,
291		si trasponemos la matriz y después ponemos
292		la opuesta de la transpuesta,
293		obtenemos la misma matriz, una matriz antisimétrica,
294		claro si fuera la matriz transpuesta la llamaríamos simétrica,
295		¿por qué la llamamos antisimétrica?
296		Porque es la opuesta de la transpuesta.
297		Vamos a ver un ejemplo de la matriz antisimétrica.
298		Vamos a ver uno de una matriz de orden 3,
299		vamos a poner un ejemplo sencillo de matriz simétrica,
300		si en la primera fila tengo los elementos 1, 2, 3,
301		en la primera columna
302		¿qué debemos poner para que sea simétrica?
303	Es:	1, 2 y 3.
304	Emi:	Y si en la segunda fila tengo 2, 4 y 6
305		¿qué pondré en la segunda columna?
306		2, 4 y 6 y en el elemento que me queda
307		¿qué pongo?
308		[Emi fue completando la matriz con los elementos
309		que ha dicho y sólo le queda sitio para un elemento]
310		El que quiera ¿no?
311		Porque ya no importa qué elemento sitúe en la diagonal,
312		ya cualquier elemento que ponga de todas formas
313		va a ser simétrica, entonces por ejemplo voy a poner...
314	E3:	18.
315	Emi:	Voy a poner 9
316		[Emi sonríe]
317		¿por qué 9?
318	E6:	Por la sucesión.
319	Emi:	Si por la sucesión,
320		¿es simétrica esta matriz?
321		Pues sí está es una matriz simétrica
322		coincide con su transpuesta,
323		si cambiamos las filas por las columnas
324		volvemos a la matriz de partida,
325		¿cuál sería la matriz opuesta de A?
326	E4:	El menos 2, menos tres.
327	Emi:	La matriz opuesta será -A

328		y consiste en poner los elementos opuestos de A
329		-1, -2, -3 en la primera fila,
330		luego -2, -4, -6 en la segunda fila y
331		finalmente -3, -6 y -9 en la última fila,
332		ahora voy a poner otra matriz B,
333		y en la primera fila 1, -2, -3,
334		luego en la segunda fila 2, 4, -6 y
335		en la última fila 3, 6, 9,
336		¿cómo es esta matriz B?
337		¿Es simétrica esta matriz?
338		Vamos a marcar la diagonal principal.
339	E3:	La matriz superior es opuesta a la inferior.
340	Emi:	Eso es, pero no es igual,
341		entonces
342		¿podemos decir que es simétrica?
343	Es:	No.
344	Emi:	No lo es,
345		¿podríais encontrar la transpuesta de esta matriz?
346		[Cada quien lo intenta hacer en su cuaderno y
347		Emi se acerca a E9 para ayudarle,
348		luego Emi pasa a supervisar el trabajo de cada uno de los estudiantes]
349		¿algún problema para encontrar la transpuesta?
350		A ver E11 ¿te importa decirme cuál es la transpuesta de B?
351		a ver E11, ¿has tenido problemas para calcular la transpuesta?
352		¿cuál es la primera fila?
353	E11:	1, -2, -3.
354	Emi:	La vamos a poner como primera columna 1, -2 y -3, luego...
355	E11:	2, 4, -6.
356	Emi:	2, 4, -6 en la segunda columna y
357	E11:	3, 6, 9.
358	Emi:	La forma más rápida de transponer una matriz,
359		¿qué hacemos?
360		Leemos la matriz por filas
361		y la transpuesta la escribimos por columnas,
362		vamos leyendo fila a fila y vamos escribiendo columna a columna
363		y hallamos la transpuesta,
364		¿podéis decirme cuál es la opuesta de esta transpuesta?
365	E5:	-1, -2, -3 luego la segunda fila 2, -4 -6 y por último 3, 6 y -9
366	Emi:	Muy bien, ¿qué ha pasado ahora? ¿esa es la matriz B?,
367		¿es la matriz B o no es la matriz B?
368	E3:	No.
369	Emi:	No lo es, vamos a ver,
370		¿cuál es el problema que tenemos para inventar
371		una matriz antisimétrica?,
372		pues si ponemos los números,
373		los elementos de forma que la escribamos simétrica pero
374		que cambiemos los signos de los elementos
375		que están por encima con respecto de los que están por debajo,

376		van a tener la condición de matriz antisimétrica se daría pero
377		¿dónde está nuestro problema?
378	E3:	En la diagonal.
379	Emi:	En la diagonal,
380		aquí tendríamos que obtener la misma diagonal de la matriz B,
381		¿qué elementos conocemos que son iguales a sus opuestos?
382		¿hay algún número que sea igual a su opuesto?
383	E5:	El cero.
384	Emi:	El cero, es el único elemento que coincide con su opuesto,
385		entonces para conseguir una matriz antisimétrica,
386		¿qué tenemos que poner aquí?
387		[Emi señala la diagonal principal]
388	Es:	Ceros.
389	Emi:	Ceros .
390		[Emi reemplaza los elementos de la diagonal principal por ceros en B,
391		B transpuesta y la opuesta de B transpuesta]
392		¿hemos conseguido ahora que la opuesta de la transpuesta
393		coincida con la matriz de partida?
394		Ahora sí
395		Ahora B coincide con la opuesta de su transpuesta,
396		entonces podemos decir que B es una matriz antisimétrica
397	E3:	¿Entonces toda simétrica tiene antisimétrica?
398	Emi:	No vamos a ver,
399		cuidado en esta clase de matrices he mezclado cosas distintas, es decir,
400		que hay matrices que llevan un nombre determinado
401		por cumplir una característica determinada,
402		como lo de matriz cuadrada, matriz fila, matriz columna,
403		matriz triangular superior e inferior,
404		matriz diagonal, escalar, unidad, matriz nula, matriz simétrica
405		y matriz antisimétrica,
406		pero la matriz transpuesta y matriz opuesta,
407		a ninguna matriz se le llama transpuesta ni opuesta,
408		se le llama la matriz transpuesta de otra o matriz opuesta de otra,
409		¿de acuerdo?
410		no son operaciones
411		pero si a partir de una matriz obtenemos otra,
412		como llamamos a esa matriz,
413		partimos de una matriz A,
414		cambiamos las filas por columnas,
415		a la nueva matriz la llamamos matriz transpuesta de la primera
416		y cuando a una matriz cambiamos los elementos
417		ponemos todos los opuestos,
418		la matriz que obtenemos la llamamos opuesta de la primera
419		¿de acuerdo?,
420		entonces una matriz puede ser que sea simétrica o no ser simétrica,
421		será simétrica cuando cumpla esta condición $[a_{ij}=a_{ji}]$,
422		una matriz puede ser antisimétrica o no,
423		lo será solamente en este caso

424		[B igual a la opuesta de su transpuesta],
425		pero siempre podemos hallar la transpuesta de una matriz y
426		la opuesta de una matriz.
427	E3:	Vale.
428	Emi:	Lo mismo que en una matriz fila podemos encontrar
429		la opuesta de la matriz fila
430		¿de acuerdo?
431		Bueno pues ahora vamos a ver las operaciones con matrices.
432		Si operamos con las matrices obtenemos soluciones
433		a muchos problemas, no sólo son interesantes como objetos en sí
434		sino porque a través de las operaciones
435		vamos a resolver muchos problemas,
436		vamos a ver cómo se opera con matrices
437		Vamos a partir de dos matrices A y B,
438		las matrices siempre las llamamos con letras mayúsculas,
439		hemos dicho que cuando haya una matriz,
440		¿qué tenemos que especificar?
441	Es:	El orden.
442	Emi:	Entonces de orden $m \times n$,
443		tenemos dos matrices del mismo orden,
444		ya vamos a ver por qué tienen que ser del mismo orden,
445		vamos a definir una nueva matriz que va a ser la matriz suma de A y B,
446		¿cómo podemos llamar a la matriz suma?
447		Vamos a llamarla C,
448		pero por analogía con los números reales diremos que $C=A+B$
449		¿de acuerdo?
450		Si tenemos la matriz A y la matriz B entonces
451		conocemos sus elementos,
452		¿cómo llamamos a los elementos de A?
453	E1:	a sub ij .
454	Emi:	a sub ij ,
455		a los de B ¿cómo los llamaremos?
456	Es:	b sub ij .
457	Emi:	Muy bien b sub ij , y a los de C los llamaremos...
458	E7:	c sub ij .
459	Emi:	Muy bien c sub ij ,
460		entonces hemos dicho que tenemos que partir de
461		dos matrices de un mismo orden y
462		vamos a obtener una nueva matriz
463		a partir de estas dos matrices,
464		construimos una nueva que la llamamos matriz suma,
465		entonces la primera pregunta,
466		¿cuál va a ser el orden de la nueva matriz?
467		¿qué orden va a tener?
468	Es:	El mismo.
469	Emi:	Muy bien, entonces vamos a decir que C también tiene orden $m \times n$,
470		si conocemos los elementos que componen cada una
471		de las matrices A y B,

472		tenemos que decir cuáles son los elementos de la matriz C,
473		c_{ij} ,
474		¿cómo la llamaremos?,
475		donde está el elemento de la fila i y columna j de la matriz C,
476		¿cuál es la definición más natural de la suma?
477	E7:	a_{ij} más b_{ij} .
478	Emi:	Exactamente, nos iremos al elemento a y
479		nos fijaremos en el que esté en la fila i columna j y
480		lo sumaremos con el elemento que está en la misma posición
481		en la otra matriz,
482		es decir, con b_{ij}
483		¿cómo sumamos los elementos?
484		Cada uno según la posición que tenga,
485		sumamos los elementos que estén en la misma posición,
486		¿por eso es importante que las dos matrices tengan el mismo orden?
487		Si porque sino no podríamos hacerlo,
488		¿de acuerdo?
489		entonces vamos a ver un ejemplo de esto,
490		vamos a ver una matriz de orden 2x3,
491		la matriz A por ejemplo en la primera fila 1, 2, 3 y
492		en la segunda fila, 4, 5, 6
493		y ahora la matriz B, la primera fila 1,1,1 y
494		la segunda fila 2,2,2
495		¿cuál es la matriz suma?
496		A hemos dicho que es de orden 2x3 y
497		B hemos dicho que es de orden también 2x3,
498		entonces la matriz C,
499		la que va a resultar también es de orden 2x3,
500		sumamos los elementos que estén en la misma posición
501		¿cómo queda la matriz esta E10?
502	E10:	[Nadie contesta].
503	Emi:	Vamos a ver, vamos en orden,
504		empezamos por la primera fila, primera columna,
505		identificamos ese elemento en las dos matrices.
506	E3:	1, 1.
507	Emi:	E10 este elemento y este
508		[Emi señala en la pizarra al primer elemento en cada una
509		de las dos matrices]
510		están en la misma posición,
511		los sumamos y lo colocamos en la matriz C
512		en la misma posición que tiene [primera fila primera columna]
513		[Emi coloca el 2 que resultó de sumar
514		el 1 de la primera fila primera columna de A y de B],
515		¿de acuerdo?
516		pasamos al siguiente elemento,
517		ahora 2 más 1 pues ocupan la misma posición en las dos matrices
518		[primera fila segunda columna],
519		los sumamos y nos da 3

520		[Emi escribe el 3 en la posición de primera fila segunda columna
521		en la matriz C]
522		que le corresponde en C, ahora 3 y 1
523		[Emi hace referencia al siguiente elemento de A y B que está
524		en la primera fila tercera columna]
525		cuatro
526		[Emi anota el 4 en la posición de primera fila tercera columna
527		de la matriz C]
528		y ahora hago lo mismo con los elementos de la segunda fila,
529		4 y 2 son 6, 5 y 2 son 7, 6 y 2 son 8
530		[Emi anota estos resultados, 6, 7 y 8 en este orden
531		en la segunda fila de C]
532		¿alguien se ha perdido en esto de la suma?
533		Podríamos definir otra forma de sumar pero
534		la verdad es que no tendría mucho sentido,
535		esta es la definición natural de la suma,
536		sumar elemento a elemento según la posición.
537		A ver E6, ¿cómo he hecho yo la suma?
538		¿cómo he ido sumando?
539		¿por donde he empezado?
540		Este 1 en qué posición está
541		[Emi se refiere al 1 de la primera fila, primera columna de A],
542		si tenemos dos filas y tres columnas en esta matriz, y luego
543		¿yo cómo iba colocando los elementos resultado,
544		por filas o por columnas?
545	E6:	Por filas.
546	Emi:	He ido sumando una con la otra [filas] pero me refiero a que aquí
547		¿cómo iba acomodando los elementos de la matriz suma,
548		por filas o por columnas?
549		¿cómo lo he hecho?
550	E6:	Por filas y por columnas.
551	Emi:	Yo lo he hecho por filas,
552		yo he empezado a sumar los elementos de la primera fila y
553		luego sumamos los elementos de la segunda fila,
554		mi pregunta es
555		¿podría haber cambiado la forma de escribir los elementos
556		de la matriz suma, en lugar de ir sumando por filas,
557		podría haber sumado por columnas?
558	E6:	Si.
559	Emi:	Yo podría ir sumando por columnas e ir anotando
560		el resultado por columnas,
561		por ejemplo el 1 más 1 son 2
562		[Emi señala el 2 que resultó de sumar el 1 de A con el 1 de B
563		en la primera fila, primera columna]
564		luego 4 y 2 son 6
565		[Emi señala el 6 que resultó de sumar el 4 de A con el 2 de B,
566		en la segunda fila primera columna,
567		de tal forma que ahora quedarían los resultados por columna]

568		entonces yo puedo escribir la matriz suma por filas o por columnas,
569		cada uno de vosotros puede elegir la forma que le parezca más cómoda,
570		yo me he acostumbrado a que casi siempre escribo las matrices
571		por filas en lugar de por columnas,
572		pero es indiferente cómo lo hagáis
573		¿de acuerdo?
574		vamos a pasar a la siguiente operación,
575		si en esta no hay dudas de cómo se define y
576		cómo se resuelve la operación.
577		Después de definir las operaciones veremos las propiedades que tienen,
578		pero hoy prefiero dedicarme nada más a ver cómo se realizan
579		las operaciones y mañana veremos las propiedades,
580		entonces producto de una matriz por un número real,
581		cuando hablemos de matrices y no especifiquemos nada más
582		nos referiremos a matrices reales,
583		es decir, a matrices cuyos elementos son números reales,
584		entonces ahora vamos a definir cómo hacer esta operación,
585		son, ¿una matriz y un número real tienen la misma naturaleza?
586	E3:	No.
587	Emi:	Vamos a suponer que tenemos una matriz de orden $m \times n$ y
588		un número real que vamos a llamar...
589		[Emi voltea a ver la cara de los estudiantes]
590		Un momento es que ahora no sé si usar las letras
591		del alfabeto griego o no lo utilizo.
592	Es:	No.
593	Emi:	Las letras del alfabeto griego son muy bonitas, quedan muy bien,
594		¿lo intentamos?
595	Es:	[Sonríen]
596		[Emi escribe en la pizarra la letra lambda
597		y voltea a ver la cara de los estudiantes]
598		Lambda,
599		los números reales nosotros los representamos
600		por letras del abecedario con letras minúsculas, a, b, c, d... pero
601		¿por qué no le quiero llamar a al número real por el que
602		voy a multiplicar la matriz?
603		Lo podría hacer sin ningún problema porque si a la matriz
604		la he llamado A a sus elementos,
605		¿cómo los llamamos?
606		a sub ij , no pasaría nada si yo tomara un número real a
607		y lo multiplicara por a sub ij ,
608		pero para que no se repitan,
609		aparte lambda es una letra muy bonita,
610		entonces lambda va a ser un número real.
611		¿De acuerdo?
612		Entonces para multiplicar una matriz por un número
613		vamos a anotar una matriz que podría ser B
614		y que va a ser el producto,
615		¿cómo asignamos el producto?

616		¿cuál es la notación que utilizamos para el producto?
617		¿cándo estamos multiplicando números reales?
618		Si yo pongo ab ¿qué pasa?
619	E3:	Se están multiplicando.
620	Emi:	Entonces sin utilizar ningún símbolo podría ser
621		que la operación que los une aquí es el producto,
622		lo mismo que si yo pongo xy,
623		aquí puedo poner lamda por A [λA],
624		al final vamos a seguir la misma notación
625		que con los números reales,
626		cuando escribamos λA ,
627		sin nada por en medio sabemos sin especificarlo
628		que es el producto,
629		entonces si a los elementos de la matriz B,
630		los llamamos b sub ij,
631		¿cómo puedo hallar?,
632		¿cómo defino los elementos de esa matriz?
633		que resultan del producto de la matiz A y el número real lambda,
634		¿cómo se puede multiplicar?
635	E5:	a sub ij con lambda.
636	Emi:	Claro el elemento b sub ij de la matriz B,
637		lo puedo escribir como el correspondiente de la matriz A,
638		a sub ij multiplicado por el número lambda
639		¿qué significa esto?
640		Que he definido la operación
641		¿en qué forma?,
642		¿cómo se realiza el producto?
643		¿qué tenemos que ir multiplicando?
644	E3:	El número real por cada a sub ij.
645	Emi:	Claro, a cada elemento lo vamos ir multiplicando
646		por el número real lambda y
647		¿dónde colocamos el resultado de ese producto?
648	Es:	En la misma posición.
649	Emi:	Exactamente en la misma posición,
650		si yo tomo la matriz A por ejemplo A igual a 1, 2 en la primera fila
651		y 3, 4 en la segunda fila,
652		es una matriz cuadrada de orden 2,
653		vamos a multiplicar esa matriz por ejemplo por 5,
654		¿cuál sería la matriz 5A?
655		¿qué hacemos?
656	E9:	5A sería cinco por A.
657	Es:	5 por 1, 5 por 2.
658	Emi:	Claro iríamos multiplicando cada uno de los elementos
659		por el número 5 y el resultado se anota en la misma posición
660		[Emi escribe 5, 10 en la primera fila
661		y 15, 20 en la segunda fila],
662		multiplicar un número real es muy fácil,
663		igual que sumar,

664		porque no cambiamos la posición.
665		La suma la hacemos elemento a elemento
666		que estén situados en la misma posición
667		y en el producto vamos multiplicando cada elemento
668		de la matriz por el número y el resultado aparece
669		en la misma posición.
670		¿De acuerdo?
671		Bueno pues ahora la última operación que
672		vamos a ver hoy va ser el producto de dos matrices,
673		ahora no tenemos una matriz y un número,
674		sino dos matrices y ahora para poder definir la operación,
675		así como en la suma hemos dicho que tenían que tener
676		el mismo orden las matrices,
677		el mismo tamaño,
678		aquí tiene que ocurrir una condición que es la siguiente,
679		si yo tengo una matriz de orden $m \times n$,
680		la llamo A y tengo una matriz B de orden $n \times p$,
681		¿qué tienen en común estás dos matrices?
682	Es:	[Voces]
683	Emi:	La n, ¿no?,
684		esta es $m \times n$ y esta es $n \times p$
685		[Emi encierra en un círculo la n de $m \times n$ y la n de $n \times p$],
686		la n en la matriz A
687		¿qué me indica?
688		Número de columnas, pero en la segunda matriz, en la matriz B
689		¿qué indica?
690		El número de filas,
691		entonces ya en la definición,
692		de partida estoy diciendo que en dos matrices
693		necesito esta condición,
694		que el número de columnas de una coincida
695		con el número de filas de la otra,
696		entonces voy a llamar C la matriz producto de estas dos matrices
697		[A y B]
698		y se denota C igual a A por B
699		[$C=AB$],
700		si llamamos C a la matriz producto y a sus elementos c_{ij}
701		tenemos que definir cómo se calculan esos elementos
702		a partir de los elementos de la matriz A y B,
703		entonces aquí ya empieza un poco a complicarse
704		la cuestión de las operaciones porque esta operación
705		no es tan sencilla como la suma o el producto con un número real
706		porque lo que vamos a hacer es lo siguiente,
707		fijaros que he puesto A por B
708		[AB]
709		y no B por A
710		[BA]
711		y esto no es por casualidad sino por esta condición

712		[Emi les señala la condición que había escrito antes,
713		que el número de columnas de una coincida con el número
714		de filas de la otra]
715		entonces antes de darles la definición,
716		les voy a contar cómo se hace el producto,
717		colocamos la matriz A y al lado la matriz B,
718		multiplicamos la primera fila de la matriz A
719		con la primera columna de la matriz B
720		y el resultado os va a aparecer aquí
721		[Emi señala la posición C sub 1,1]
722		bueno como ha tocado el timbre y no me he dado cuenta,
723		ha pasado el tiempo tan rápido pues prefiero dar la definición
724		y la explicación ya tranquilamente mañana,
725		lo que hemos visto es muy sencillo,
726		repasarlo y les voy a mandar ejercicios de sumas de matrices
727		que aunque sean muy elementales pero conviene que los hagáis
728		para que vayáis cogiendo esa habilidad en el cálculo con matrices
729		para que os fijáis en las filas y en las columnas,
730		para casa, página 13 ejercicio 4.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la tercera clase grabada de la profesora Emi del martes 01/10/08.

Resumen: Producto de matrices: Ejemplos y ejercicios. Emi les indica cómo se hace el producto de dos matrices, luego con ayuda de los estudiantes hace un ejemplo de un producto de dos matrices cuadradas de orden dos. Enseguida Emi les propone hacer un ejemplo, planteándoles una situación en la que les da información y que ellos intenten con eso, escribir la matriz A y B, hacer el producto AB e interpretar el resultado del producto. Posteriormente Emi les propone tres ejercicios para que practiquen cómo se hace el producto de dos matrices, pasa a supervisar que los hagan, ayuda a E1 y E13 y luego comenta los resultados de esos ejercicios en la pizarra.

L	Transcripción
1	Emi: La vez pasada vimos la suma de matrices
2	y el producto por un número real,
3	hoy vamos a continuar con el producto de dos matrices
4	entonces necesitamos...
5	nos tenemos que fijar en el orden que tiene cada matriz,
6	para poder efectuar la multiplicación,
7	es necesario que se cumpla la condición de que si la matriz A
8	es de $m \times n$ y la matriz B de $n \times p$,
9	debe coincidir el número de columnas de la primera matriz
10	con el número de filas de la segunda matriz,
11	el orden de la multiplicación es muy importante,
12	estamos explicando como se efectúa el producto de A por B,
13	de que orden es la matriz producto C,
14	pues si el orden de la matriz A es de $m \times n$ entonces el producto
15	también tiene m filas y si la matriz B tiene p columnas,
16	la matriz producto también tendrá p columnas,
17	la forma de hacer la operación es sencilla,
18	colocamos la matriz A y la matriz B,
19	la matriz A la dividimos por filas
20	y la matriz B la dividimos en columnas
21	y ahora tenemos que efectuar el producto de cada una de estas filas
22	por cada una de estas columnas,
23	¿cómo se multiplica una fila por una columna?
24	Multiplicar una fila por una columna significa,
25	multiplicamos el primer elemento por el primero
26	[Emi señala el primer elemento de la primera fila de A
27	y el primer elemento de la primera columna de B],
28	luego el segundo por el segundo
29	[Emi se refiere al segundo elemento de la primera fila de A
30	por el segundo elemento de la primera columna de B],
31	el tercero por el tercero,
32	el último por el último y sumamos todos esos productos
33	y lo anotamos aquí
34	[Emi señala el sitio C uno uno donde se anotará el resultado],
35	luego repetimos la operación,
36	primera fila y ahora segunda columna
37	[Emi se refiere a la primera fila de A y segunda columna de B]

38		y colocamos aquí el elemento
39		[Emi señala el sitio C uno dos donde se anotará el resultado],
40		vamos haciendo el producto de la primera fila
41		por cada una de las columnas y así
42		completamos la primera fila de la matriz producto,
43		repetimos el proceso la segunda fila por cada una de las columnas
44		nos da la segunda fila
45		[Emi se refiere a la segunda fila de A
46		por cada una de las columnas de B,
47		da la segunda fila de la matriz producto C],
48		y así hasta llegar a la última fila por cada una de las columnas
49		nos da la última fila.
50		Como veis las matrices no tienen porque ser cuadradas,
51		la única condición que se pide es esta
52		[Emi señala el lugar en la pizarra donde anotó anteriormente
53		que debe coincidir el número de columnas de la primera matriz
54		con el número de filas de la segunda matriz].
55		Vamos a hacer un ejemplo con matrices cuadradas,
56		una matriz A de orden 2 por ejemplo la matriz A,
57		1, 2 en la primera fila y 3, 4 en la segunda fila,
58		la multiplicamos por la matriz B,
59		2, 0 en la primera fila y 1, 5 en la segunda fila,
60		¿de qué orden son?
61		Como he dicho la primera es de orden 2x2
62		y la segunda es también 2x2.
63		Como veis con las matrices cuadradas no hay nunca problemas
64		pues porque siempre va a coincidir
65		que el número de columnas de la primera
66		es igual al número de filas de la segunda.
67		Vamos a aplicar la regla que hemos dado para el producto,
68		vamos a dividir en filas la primera matriz y en columnas la segunda
69		[$(=)()$]
70		¿de acuerdo?
71		A ver E12 multiplícame la primera fila por la segunda columna
72		¿qué hay que multiplicar? 1 por 2.
73	E12:	1 por 2 y 2 por 1.
74	Emi:	Si 1 por 2 y 2 por 1 y sumarlos,
75		si efectuamos los productos nos dará 1 por 2, 2 más 2 por 1, 2,
76		entonces 2 más 2, 4
77		[Emi anota el 4 en la primera fila primera columna de la nueva matriz,
78		la matriz producto],
79		E2 multiplícame la primera fila por la segunda columna.
80	E2:	1 por 0, 0.
81	Emi:	1 por 0, 0
82	E2:	y 2 por 5, 10.
83	Emi:	2 por 5, 10; 0 más 10, 10
84		[Emi anota el 10 en la primera fila segunda columna de la nueva matriz,
85		la matriz producto],

86		ya tenemos la primera fila de la matriz producto
87		porque ya he multiplicado la primera fila por cada una de las columnas
88		A ver E3, la segunda fila por la primera columna.
89	E3:	10.
90	Emi:	3 por 2, 6; 4 por 1, 4; 6 más 4, 10
91		[Emi anota el 10 en la segunda fila primera columna de la nueva matriz,
92		la matriz producto].
93		A ver E5, multiplicar la segunda fila por la segunda columna.
94	E5:	3 por 0, 0 y 4 por 5, 20.
95	Emi:	[Emi anota el 20 en la segunda fila segunda columna
96		de la matriz producto].
97		Si, ahora ya tenemos la segunda fila y ésta es la matriz producto,
98		¿de qué orden nos ha salido la matriz resultado, la matriz producto?
99		también 2x2,
100		porque siempre que multipliquemos dos matrices cuadradas,
101		porque tienen que ser del mismo orden para poder multiplicar,
102		lo que nos va a salir es otra matriz cuadrada también de ese orden
103		¿de acuerdo?
104		Bueno vamos a ver un ejemplo sencillo de la multiplicación
105		del producto,
106		aunque luego vamos a ver,
107		a multiplicar matrices de distintos tamaños,
108		vamos a ver el siguiente en donde ahora es el producto de dos matrices,
109		yo os doy la siguiente situación,
110		aeropuerto de Sevilla y aeropuerto de Nueva York
111		y entre Sevilla y Nueva York nos vamos a fijar en Barcelona,
112		en Dublín, en Londres y en Madrid,
113		vamos a suponer que todas estas ciudades tienen aeropuerto,
114		que de Sevilla a Barcelona hay 3 vuelos diarios,
115		de Sevilla a Dublín no tenemos vuelo directo
116		pero si tenemos Sevilla con Londres un vuelo al día
117		y dos vuelos diarios desde Sevilla hasta Madrid,
118		a su vez desde estas ciudades pues tenemos
119		que de Barcelona a Nueva York no hay vuelo directo,
120		de Dublín a Nueva York hay dos vuelos directos,
121		de Londres a Nueva York hay tres vuelos directos
122		y de Madrid a Nueva York un vuelo directo.
123		Entonces quiero que me escribáis la matriz A,
124		que va a ser una matriz fila
125		que me indique el número de vuelos de Sevilla
126		a cada una de estas ciudades intermedias
127		y vamos a llamar B a la matriz columna, el número de vuelos
128		desde los puntos intermedios a Nueva York,
129		quiero que me escribáis la matriz A y la matriz B,
130		tenéis que calcular A por B y después de calcular A por B,
131		ver si se pueden multiplicar, y luego quiero que me digan
132		qué significado tiene el producto,
133		¿está claro lo que os propongo?

134	E3:	Si.
135	Emi:	Luego comentaremos porque una matriz tiene que ser una matriz fila
136		y la otra una matriz columna
137		[Emi empieza a pasar por las mesas a supervisar
138		lo que hacen sus estudiantes].
139		A ver E8 me puedes decir cuáles son los elementos de la matriz A,
140		vamos contando
141		¿de Sevilla a Barcelona cuántos vuelos hay?
142		3 vuelos,
143		entonces el primer elemento es 3, Sevilla-Dublín.
144	E8:	0.
145	Emi:	0, Sevilla-Londres.
146	E8:	1.
147	Emi:	¿Y Sevilla-Madrid?
148	E8:	2.
149	Emi:	Muy bien, entonces los elementos de esta matriz
150		nos indican el número de vuelos que hay
151		desde la ciudad de Sevilla a cada una de estas ciudades
152		que hemos llamado intermedias.
153		¿De qué orden es esta matriz?
154	Es:	[Voces].
155	Emi:	E12, ¿cuántos?
156	E12:	4.
157	Emi:	Mmmmmhhh [mostrando su desacuerdo] a ver
158		¿cuántas filas tiene?
159	Es:	Una.
160	Emi:	¿Y cuántas columnas tiene?
161	Es:	Cero.
162	Emi:	Columnas, ¿cuántas columnas tiene?
163		Una, dos, tres, cuatro
164		[Emi va señalando en la pizarra cada columna],
165		es una matriz de una fila y cuatro columnas,
166		es una matriz de orden 1x4,
167		es decir,
168		una columna puede ser pequeña o grande,
169		en este caso cada columna tiene un solo elemento
170		pero se considera primera columna, segunda, tercera y cuarta
171		[Emi va señalando en la pizarra cada columna].
172		Vamos a ver E4, puedes decirme ¿cuál es la matriz B?
173	E4:	0.
174	Emi:	De Barcelona a Nueva York, 0.
175	E4:	2.
176	Emi:	De Dublín a Nueva York, 2.
177	E4:	3.
178	Emi:	Londres-Nueva York, 3 y Madrid-Nueva York, 1.
179		¿Qué tipo de matriz es ésta?
180		Una matriz columna,
181		si yo no os hubiera indicado nada

182		de la característica de la matriz,
183		podrías haberlo puesto de una manera
184		o de otra pero en el problema luego veremos
185		porque una en fila y otra en columna.
186		¿De qué orden es esta E4?
187	E4:	4x1.
188	Emi:	Muy bien,
189		tiene cuatro filas y una columna,
190		4x1 entonces la primera pregunta,
191		E1, ¿se pueden multiplicar?
192	E1:	[Mueve su cabeza de arriba hacia abajo diciendo que sí].
193	Emi:	Si tenemos una de 1x4 y otra de 4x1,
194		¿cuál es la condición que necesitamos para la multiplicación?
195		que el número de columnas de la primera
196		coincidiera con el número de filas de la segunda,
197		siempre que estos números coincidan podemos hacer el producto
198		y ahora la matriz qué me va salir,
199		¿de qué orden me va a ser?
200	E3:	1x1.
201	Emi:	Muy bien 1x1.
202		Vamos a multiplicar.
203		La forma de hacer el producto consistía en señalar las filas
204		de la primera matriz
205		y las columnas de la segunda,
206		como aquí sólo tengo una fila,
207		nada más que señalo la fila que tengo,
208		como aquí sólo tengo una columna [refiriéndose a la de la matriz B]
209		pues sólo señalo la que tengo,
210		E3, ¿cómo se hace el producto?
211		¿qué multiplicamos?
212	E3:	3 por 0,
213		0 por 2,
214		1 por 3
215		y 2 por 1
216		y luego sumamos.
217	Emi:	Entonces 0, 0, 2 y 3
218		obtenemos 5.
219		¿Es una matriz de orden 1x1?
220	Es:	Si.
221	Emi:	Luego se podía efectuar el producto
222		y esta matriz de 1x1
223		es la matriz producto,
224		ya hemos hecho la primera parte,
225		calcular A por B,
226		¿qué significa este número que nos sale?
227	Emi:	Si multiplicamos el número de vuelos de la ciudad de Sevilla
228		a las ciudades intermedias,
229		el número de vuelos de cada ciudad intermedia al destino final

230		que es Nueva York,
231		esto nos va a dar el número de combinaciones posibles
232		desde Sevilla a Nueva York, ¿no?
233		Es decir,
234		la matriz producto nos indica
235		el número de combinaciones de vuelos
236		de Sevilla a Nueva York,
237		¿Era necesario realizar estas operaciones con matrices
238		para conocer el número de combinaciones posibles?
239		No.
240		Pero veis que según como definamos las matrices,
241		el producto va a tener un significado concreto en algunos casos,
242		¿alguna duda?
243		Bueno vamos a practicar un poquito.
244		Me gustaría que multiplicarais estas dos matrices,
245		hemos empezado con dos matrices pequeñas de orden 2x2,
246		ahora vamos a poner un ejemplo de 3x3,
247		vamos a coger la matriz, 1, 2, 1 en la primera fila,
248		0, 1, 3 en la segunda fila y 3, 2, 1 en la última fila
249		y la vamos a multiplicar por 4, 1, 0 en la primera fila.
250	E3:	¿Va a ser de 3x3?
251	Emi:	Si de momento sólo matrices cuadradas,
252		5, 2, 1 en la segunda fila y por último 3, 1, 2
253		hay que hacerla,
254		[Emi agrega un ejercicio más para resolver,
255		en la primera matriz los elementos 1, 0, 0 en la primera fila,
256		0, 1, 0 en la segunda y 0, 0, 1 en la tercera
257		y en la otra matriz, 1, 2, 3 en la primera fila, 4, 5, 6 en la segunda
258		y 7, 8, 9 en la tercera].
259		[Emi continúa supervisando que sus estudiantes calculen los productos
260		de matrices].
261		Después de hacer la de arriba, sino os importa, hacer la de abajo,
262		[Emi se refiere a la que acabó de anotar]
263		y vamos a anotar una que no sea cuadrada
264		[la primera es una matriz de orden 2x3,
265		en la primera fila 1, 2, 3 y en la segunda 4, 5, 6,
266		luego la otra matriz es de orden 3x4,
267		primera fila 1, 2, 1, 2; segunda 0, 1, 0, 1 y tercera 3, 2, 1, 0].
268		¿Alguien necesita ayuda?
269		[E1 levantó la mano y Emi se acerca a ella].
270		Tienes que multiplicar la primera fila por la primera columna
271		[Emi marca en el cuaderno de E1, en el primer ejercicio la primera fila
272		de la primera matriz y la primera columna de la segunda matriz]
273		y luego tienes que ir multiplicando cada una de las filas
274		por cada una de las otras columnas.
275	E13:	Emi.
276	Emi:	[Emi acude a ayudar a E13]
277		[Emi y E13 empiezan a calcular el primer elemento

278		de la matriz producto del primer ejercicio,
279		luego E13 marca la segunda fila,
280		Emi le dice que primero hay que terminar de multiplicar
281		la primera fila por cada una de las columnas,
282		para obtener la primera fila de la matriz producto].
283		Tú vas a multiplicar la primera fila por la primera columna,
284		luego la primera fila por la segunda.
285	E13:	A bueno, entonces 1 por 1, 2 por 2 y 1 por 1
286		[E13 se refiere al producto de la primera fila por la segunda columna].
287	Emi:	Entonces son 1, 4 y 1, son 6 ¿dónde lo pones?
288	E13:	Aquí [en la posición primera fila segunda columna de la matriz
289		producto].
290	Emi:	Y ahora ¿qué columna te falta?
291	E13:	Esto es lo que hay que hacer, 1 por 0, 2 por 1 y 1 por 2
292		[son los productos correspondientes a la primera fila, tercera columna,
293		E13 automáticamente coloca ese número en la posición correspondiente
294		a la primera fila tercera columna de la matriz producto].
295	Emi:	Entonces la primera fila de la matriz producto se completa multiplicando
296		la primera fila de la primera matriz por cada una de las columnas de la
297		segunda matriz.
298		Ahora hacer lo mismo con la siguiente fila.
299	E13:	Ésta con ésta [E13 señala la segunda fila y la primera columna].
300	Emi:	Eso es.
301	E13:	Yo creía que multiplicaba sólo el primer elemento de la fila
302		por toda la columna
303		[en términos generales a sub uno uno por b sub uno uno,
304		luego por b sub dos uno, y finalmente por b sub tres uno],
305		pero entonces ahora es 0 por 4, 1 por 5, y 3 por 3
306		[son los productos correspondientes a la segunda fila por la primera
307		columna].
308	Emi:	Si muy bien.
309	E13:	[E13 anota 14 en la posición correspondiente a la segunda fila
310		primera columna de la matriz producto].
311	Emi:	¿Y ahora?
312	E13:	Pues ahora 0 por 1, 1 por 2 y 3 por 1.
313	Emi:	Exactamente.
314	E13:	[E13 anota 5 en la posición correspondiente a la segunda fila
315		segunda columna de la matriz producto].
316		Ahora 0 por 0, 1 por 1 y 3 por 2, 7
317		[E13 anota 7 en la posición correspondiente a la segunda fila tercera
318		columna de la matriz producto]
319		y ahora la última.
320	Emi:	Si.
321	E13:	3 por 0, 2 por 1 y 1 por 2, 4
322		[que son los productos correspondientes a la tercera fila, tercera columna
323		pero anota 4 en la posición correspondiente a la tercera fila primera
324		columna de la matriz producto],
325		ya me perdí.

326	Emi:	¿Qué columna has hecho?
327		la primera ¿no?
328		y luego la segunda.
329	E13:	Otra vez ya me lié.
330	Emi:	Sitúate, haz hecho la primera fila completa
331		[Emi señala en el cuaderno de E13, la primera fila de la matriz producto]
332		y luego la segunda fila completa
333		[Emi señala en el cuaderno de E13, la segunda fila de la matriz producto]
334		y ahora estás completando la última fila, entonces como es la última fila,
335		lo haces con esta fila de aquí,
336		[Emi señala la tercera fila de la primera matriz],
337		tienes el elemento de la primera columna
338		[se refiere al primer elemento de la tercera fila primera columna
339		en la matriz producto],
340		ahora vete a la segunda columna
341		[para obtener el elemento correspondiente a la tercera fila segunda
342		columna de la matriz producto]
343		y multiplica la fila por la segunda columna
344		[Emi le remarca en su cuaderno la tercera fila de la primera matriz y
345		la segunda fila de la segunda matriz].
346	E13:	[E13 se queda callada y no hace nada].
347	Emi:	Mira tú multiplicabas la primera fila [de la primera matriz]
348		por cada una de las columnas [de la segunda matriz]
349		y obteníais la primera fila [de la matriz producto],
350		luego la segunda fila por cada una de las columnas
351		y obteníais la segunda fila,
352		ahora vas a hacer la tercera fila por cada una de las columnas,
353		ésta por ésta, ésta por ésta y ésta por ésta
354		[Emi escribe unas flechas que van de la tercera fila de la
355		primera matriz a cada una de las columnas de la segunda matriz]
356		¿cómo multiplicas 3, 2, 1 por 4, 5, 3?
357		[son los productos correspondientes a la tercera fila primera columna].
358	E13:	3 por 4, 2 por 5 y 1 por 3, son 25.
359	Emi:	Exacto nos habíamos equivocado, yo también me he despistado
360		[pues E13 había anotado en esa posición un 4].
361	E13:	Si por eso decía ¿de dónde salió el 4?
362		[E13 borra el 4 y anota el 25 en la posición correspondiente a
363		la tercera fila primera columna de la matriz producto].
364	Emi:	Si, nos habíamos ido a la última columna sin darnos cuenta.
365	E13:	Y ahora ésta por ésta ¿no? [E13 señala la tercera fila por la segunda
366		columna].
367	Emi:	Eso es.
368	E13:	Ahora 2 por 1, 2; 2 por 2, 4
369		[está multiplicando sólo el 2, que está en la posición de
370		la tercera fila segunda columna de la primera matriz,
371		por cada elemento de la segunda fila de la segunda matriz].
372	Emi:	No, es 3 por 1, 2 por 2 y 1 por 1,
373		¿en qué fila estamos?

374		Es la tercera fila por la segunda columna, entonces son 3, 4 y 1 son 8.
375	E13:	[E13 anota el 8 en la posición correspondiente a la
376		tercera fila segunda columna de la matriz producto].
377	Emi:	Finalmente ya sólo tienes 3 por 0, 2 por 1 y 1 por 2
378		[son los productos correspondientes a la tercera fila
379		por la tercera columna].
380	E13:	[E13 anota el 4 en la posición correspondiente a la tercera fila
381		tercera columna en la matriz producto].
382	Emi:	[Emi acude a vigilar lo que está haciendo E8, luego regresa a la pizarra].
383		A ver vamos a corregir E3.
384	E3:	Dime.
385	Emi:	¿Tienes el resultado del primer producto?
386	E3:	17, 6, 4 en la primera fila, 14, 5, 7 en la segunda fila
387		y 25, 8 y 4 en la tercera.
388	Emi:	A ver, ¿a alguien no le coincide alguno de los elementos?
389	Es:	[Voces].
390	Emi:	¿Cuál?
391	E12:	Ese de abajo.
392	Emi:	No ese de abajo no, pues tienen una posición exacta de fila y columna.
393	E12:	El 5.
394	Emi:	A ver dí primero la fila.
395	E12:	Fila tres columna uno.
396	Emi:	[Emi señala en la pizarra el elemento correspondiente a esa indicación]
397		Ese elemento viene de multiplicar la tercera fila por la primera columna,
398		3 por 4, 12; 2 por 5, 10; 1 por 3, 3;
399		12 más 10, 22 más 3, 25.
400		Aquí las equivocaciones pueden producirse por dos motivos,
401		uno que multipliquemos mal o sumemos mal
402		o que nos confundamos de fila y de columna,
403		entonces aquí hay que estar atento a las cuentas con los números
404		y también hay que estar atentos a la geometría del producto,
405		esto tiene una geometría y tenemos que ir en un orden determinado,
406		no confundirnos con las filas y columnas que tenemos que coger.
407		¿Algún otro problema con otro elemento que no os coincida?
408		A los demás os habéis salido toda la matriz completa bien,
409		a pues estupendo, bueno a ver E14 dime qué pasaba aquí
410		[quiere el resultado del segundo ejercicio].
411	E14:	1, 2, 3 en la primera fila, 4, 5, 6 en la segunda y 7, 8, 9 en la tercera.
412	Emi:	A ver E2, ¿esta matriz y ésta?
413		[en el segundo ejercicio, la segunda matriz y la matriz producto].
414	E2:	La misma.
415	Emi:	Es la misma, qué tiene de especial esta matriz que tenemos aquí
416		[en el segundo ejercicio primera matriz].
417	E2:	Es diagonal.
418	Emi:	Es diagonal pero además la diagonal, tenemos unos,
419		¿esta matriz se llama?
420	E3:	Identidad.
421	Emi:	Identidad, matriz identidad,

422		¿vamos a tener esto siempre que trabajemos con la matriz identidad?
423		[al multiplicar la identidad por una matriz, se obtendrá la misma matriz].
424	E3:	Si.
425	Emi:	Nos va a pasar siempre cuando multipliquemos por la matriz identidad
426		es como cuando multiplicamos por el uno algún número.
427		E7 me dices el último producto.
428	E7:	10, 10, 4, 4 en la primera fila y 22, 25, 10 y 13 en la segunda.
429	Emi:	¿Estáis todos de acuerdo?
430	Es:	Si.
431	Emi:	¿Algún elemento que no os coincide?
432		¿Qué te pasa a ti E15? [Emi se acerca a E15].
433		Vamos a comprobarlo
434		[Emi ve que E15 no está muy convencida del 10 de la primera fila
435		segunda columna].
436		Vamos a ver, este 10 viene de multiplicar la primera fila por la segunda
437		columna,
438		entonces, 1 por 2, 2 por 1 y 3 por 2,
439		son 2 y 2 son 4 y 6 son 10.
440		¿Alguna duda más? No.
441		¿De qué orden nos dan las matrices producto?
442		Si son cuadradas el resultado sigue siendo una matriz cuadrada
443		y si tenemos una matriz de orden 2×3 y se multiplica por una de 3×4 ,
444		el resultado, ¿cuál sería?,
445		¿cuántas filas tiene la primera matriz?
446		2,
447		y la de 3×4 ¿cuántas columnas?
448		4,
449		¿de qué orden nos sale la matriz producto?
450		de 2×4 ¿de acuerdo?
451		qué pasa si yo quisiera cambiar el orden de este producto
452		[de la matriz de 2×3 y 3×4].
453	E3:	No se puede.
454	Emi:	¿Podría multiplicar una matriz de 3×4 por una de 2×3 ?,
455		no puedo pues son distintos el 4 y el 2,
456		en este caso,
457		no podemos realizar el producto con cualquier orden,
458		en este caso el orden es importante.
459		Para mañana veremos las propiedades de todas las operaciones
460		que hemos estudiado y también daremos la fórmula,
461		la expresión que nos da el producto,
462		hoy lo hemos visto de una forma más bien casera y
463		ya mañana daremos la definición.
464		Sino os importa les dejaré unos ejercicios para practicar,
465		en el libro en la página 15 el ejercicio 5
466		y en la página 26 los ejercicios 32 y 33,
467		¿de acuerdo? pues eso es todo.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la cuarta clase grabada de la profesora Emi del viernes 3/10/08.

Resumen: Propiedades de las operaciones con matrices y método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa (un ejemplo de una matriz de 2×2).

L		Transcripción
1	Emi:	En la sesión anterior vimos cómo se hacía el producto de matrices
2		y hoy vamos a ver y a reflexionar acerca de las propiedades
3		de las matrices,
4		propiedades de las operaciones con matrices,
5		os voy a dar las tres
6		[se escucha desorden en el grupo y Emi se detiene].
7		A ver, por favor, lo tenéis todo en el libro, es decir,
8		que no es necesario que lo copiéis,
9		lo que si me gustaría es que atendierais y estuvierais en silencio.
10		Las tres operaciones que hemos visto, la suma de dos matrices,
11		producto de una matriz por un número real
12		y el producto de dos matrices.
13		Nosotros estamos acostumbrados a trabajar con números reales
14		y conocemos y aplicamos las propiedades de los números reales,
15		¿qué ocurre con las operaciones de las matrices?
16		Pues que algunas de sus propiedades se derivan directamente
17		de las propiedades de los números reales.
18		Por ejemplo con la suma de matrices,
19		si tenemos una matriz A cuyos elementos son a_{ij}
20		y otra matriz cuyos elementos son b_{ij}
21		¿qué necesitamos para poder sumar dos matrices?
22		¿cómo tienen que ser las dos?
23	E3:	Iguales.
24	Emi:	Mmmhh [Emi hace un gesto con la cara para hacer ver su desacuerdo]
25	E8:	Del mismo orden.
26	Emi:	Efectivamente del mismo orden, del mismo tamaño
27		sino no las podemos sumar y a la nueva matriz que obtenemos,
28		la matriz suma $C = A + B$,
29		sus elementos, ¿cómo se determinan sus elementos?
30		Bueno primero ¿de qué orden es?
31		Si sumamos dos del mismo orden nos da otra del mismo orden
32		y los elementos ¿cómo los calculamos?
33	E3:	Pues a_{ij} más b_{ij} .
34	Emi:	Exactamente, si los elementos de la matriz suma los llamamos c_{ij} ,
35		como tú has dicho E3,
36		el elemento que está en la fila i columna j,
37		¿qué hacemos para obtenerlo?
38		Pues nos vamos a la matriz A
39		y cogemos el elemento que está en esa misma posición,
40		fila i columna j y lo sumamos con el elemento de B
41		que esté en la misma posición,
42		que esté en la misma fila y la misma columna ¿de acuerdo?
43		entonces,

44		¿qué propiedades tendrá la suma de matrices si se calcula la suma
45		de esta manera?
46		Pues por ejemplo tenemos la propiedad asociativa,
47		no se si recordáis en qué consiste la propiedad asociativa
48		en los números reales para la suma,
49		para las matrices es idéntica,
50		qué significa que si voy a sumar tres matrices,
51		no dos sino tres,
52		¿cómo efectuamos la suma?
53		Pues primero dos y luego otra,
54		¿Cómo las asociamos para hacer la suma?
55		Pues nos da lo mismo si tenemos tres matrices, A, B y C
56		y tenemos que hacer la suma,
57		podemos sumar primero las dos primeras A y B
58		y a lo que resulta sumarle C,
59		o bien podemos sumar las dos últimas y lo que nos de, sumarle A.
60		¿Por qué se cumple esta propiedad en las matrices?
61		Porque como sumamos las matrices,
62		con los números reales que están en la misma posición,
63		entonces los números reales tienen esta misma propiedad para la suma,
64		con lo cual es prácticamente intuitivo ver que esta propiedad
65		se cumple siempre.
66		Después tenemos la propiedad del elemento neutro,
67		en la suma de los números reales.
68	E3:	El 0.
69	Emi:	El 0, porque al sumárselo a los números reales no los cambia,
70		entonces, ¿tenemos elemento neutro en las matrices?
71		¿tenemos alguna matriz que al sumarla a las otras las deje cómo estaban?
72	E2:	¿Cuál?
73	Emi:	Aquella matriz con puros ceros ¿cómo se llama?
74	E2:	La matriz nula.
75	Emi:	Muy bien la matriz nula,
76		la matriz nula es la matriz cuyos elementos son todos 0,
77		cuando la sumamos a otra la deja invariante,
78		la deja como está.
79		Tenemos también que se cumple la propiedad del elemento simétrico,
80		con los números reales vamos a pensar,
81		dado un número real tenemos otro que al sumarlo nos de el 0,
82		¿cómo se llaman esos números?
83	E3:	El negativo.
84	Emi:	El opuesto.
85	E3:	El opuesto.
86	Emi:	Entonces si yo con una matriz puedo poner otra que al sumarla
87		me de la matriz nula ¿cuál será?
88	E3:	La opuesta.
89	Emi:	Muy bien E3 entonces si a una matriz A le sumo la opuesta,
90		¿cómo llamamos a la opuesta?
91		A la opuesta le llamamos...

92	E3:	Menos A.
93	Emi:	Muy bien, si a una matriz le sumamos la opuesta,
94		¿cómo se obtiene la opuesta de una matriz?
95	E7:	Cambiando el signo.
96	Emi:	Cambiando el signo de toda la matriz,
97		entonces nos da la matriz nula
98		[resultado de sumar una matriz más su opuesta]
99		que es la matriz formada por ceros.
100		Y luego en los números reales tenemos también
101		la propiedad conmutativa,
102		¿qué significa eso para la suma de números reales?,
103		importa el orden en que las sumamos,
104		sumo una con otra e importa el orden o ¿no?
105	Es:	No.
106	Emi:	Pues esta misma propiedad se les transmite a las matrices,
107		la propiedad conmutativa cómo sería para la suma de matrices,
108		pues puedo sumar A más B o B más A
109		y el resultado es el mismo,
110		entonces son propiedades que se cumplen en las sumas de las matrices
111		porque estas propiedades se cumplen también
112		con la suma de números reales,
113		tal y como está definida es inmediata la demostración ¿alguna duda?
114		Entonces cuando vayamos a sumar matrices no importará,
115		y si tenemos que sumar más de dos matrices no importará
116		cómo las asociemos
117		y sabremos siempre que tenemos la matriz nula
118		y que cada matriz va a tener su opuesta que al sumarla nos da la nula.
119		Vamos a pasar al producto de una matriz por un número real,
120		de forma análoga a las propiedades de los números reales,
121		se transmiten a las matrices con esta operación,
122		si tenemos una matriz A cuyos elementos son a_{ij}
123		y es de orden $m \times n$ y si tenemos un número real λ ,
124		podemos definir el producto de este número por una matriz $[\lambda A]$,
125		llamamos a esta matriz B,
126		¿de qué orden será esta nueva matriz?
127	E3:	Del mismo orden que A.
128	Emi:	Exactamente del mismo orden que A.
129		Si a los elementos de B los llamamos b_{ij}
130		¿cómo se obtiene cada uno de los elementos?
131	E3:	Multiplicando el número por cada elemento de A.
132	Emi:	Muy bien multiplicamos cada uno de los elementos de la matriz A
133		por el número que nos dan, ¿de acuerdo?
134		Entonces ¿qué propiedades se cumplen con esta operación?
135		Pues como seguimos tendiendo una operación con números reales,
136		ya que estamos multiplicando un número por otro número real $[\lambda a_{ij}]$,
137		entonces tenemos una serie de propiedades.
138		Si yo sumo dos matrices y las multiplico por un número λ ,
139		el resultado que obtengo será el mismo que si multiplico

140		cada matriz por ese número y luego efectúo la suma,
141		¿es fácil ver que esta propiedad se cumple?
142		se intuye ¿no?
143		Por como están definidas la suma y el producto por un número real
144		me va a dar lo mismo sumar primero las dos matrices
145		y luego multiplicar
146		que multiplicar cada una de ellas por el número real y luego sumarmas.
147		Lo mismo si sumamos dos números reales
148		y los multiplicamos por una matriz va a dar el mismo resultado
149		que si multiplicamos cada número por la matriz
150		y después efectuamos la suma.
151		Y si multiplicamos dos números y lo que nos de lo multiplicamos...
152	E5:	Eso tiene nombre.
153	Emi:	En el libro les ponen un nombre pero en realidad no tienen nombre
154		porque es sólo una especie de distributiva $[\lambda(A+B)]$
155		pero no lo es porque los elementos son de distinta naturaleza
156		y esta sería una especie de asociativa $[(\lambda\mu)A]$.
157		Pero tampoco lo es porque las propiedades que tienen nombre
158		se establecen para operaciones determinadas y esta operación $[\lambda(A+B)]$
159		utiliza elementos de distintos conjuntos,
160		pero si lo veis con nombre tampoco pasa nada.
161		Entonces si multiplicamos dos números
162		y lo que nos de lo multiplicamos por la matriz A
163		es lo mismo multiplicar la matriz por uno y luego por el otro.
164		Estas propiedades se intuyen por la propia definición tanto del producto
165		como de la suma
166		y ¿qué pasa si multiplicamos una matriz por el 1?
167	Es:	Es la misma.
168	Emi:	La matriz es la misma,
169		estas propiedades no tienen nombre
170		pero si nosotros estudiáramos estructuras algebraicas
171		estas propiedades son muy importantes
172		porque junto con las de la suma,
173		es decir,
174		si consideramos un conjunto de matrices
175		y las operaciones de suma y producto de una matriz por un número real,
176		al cumplirse las propiedades que se cumplen para la suma
177		y al cumplirse estas propiedades pues se constituye
178		una estructura importante,
179		nosotros [bachillerato de ciencias sociales] no estudiamos estructuras,
180		entonces no os voy a decir cómo se llama esta estructura
181		pero no se nombran por casualidad estas operaciones,
182		en matemáticas de ciencias [bachillerato científico tecnológico] sí,
183		se habla de estructuras de espacio vectorial,
184		de todas formas cuando hagamos ejercicios si vamos a aplicar
185		estas propiedades que por eso os estoy dando,
186		porque cuando veamos ecuaciones algebraicas
187		aplicaremos estas propiedades ¿de acuerdo?

188		Y ya para finalizar las propiedades de las operaciones con matrices
189		vamos a ver qué pasa con el producto.
190		Aquí es donde las cosas ya no son tan bonitas
191		porque la definición de la suma y del producto por un número real
192		hace que las propiedades de los números reales las hereden las matrices
193		pero ahora tal y como está definido el producto
194		no se pueden heredar las propiedades de los números reales.
195		Si yo tengo dos matrices,
196		una matriz A de orden $m \times n$ y otra B,
197		¿de qué orden tiene que ser B?
198	Es:	De $n \times p$.
199	Emi:	¿Qué es lo que coincide siempre?
200	E1:	El número de columnas de la primera
201		con el número de filas de la segunda.
202	Emi:	Si, el número de columnas de la primera
203		con el número de filas de la segunda,
204		entonces si llamamos C a la matriz producto,
205		¿de qué orden es la matriz producto?
206	Es:	$m \times p$.
207	Emi:	$m \times p$, recordad que m es el número de filas de la primera
208		y p el número de columnas de la segunda.
209		Si llamamos c_{ij} a los elementos de la matriz producto,
210		¿cómo obtenemos los elementos de la matriz producto?
211		Entonces alguien ya se sabía la fórmula para obtener el elemento c_{ij} ,
212		el elemento que está en la fila i columna j,
213		a ver antes de ver la fórmula vamos a pensar en cómo sería,
214		si está en la fila i columna j,
215		a ver E3 voy a poner la matriz A y la matriz B vale.
216		Dijimos que la matriz A se desglosa en...
217	Es:	En filas.
218	Emi:	A se estructura por filas, y la matriz B por columnas,
219		Entonces, ¿qué fila de la matriz A tengo que coger
220		para encontrar el elemento c_{ij} ?
221	Es:	[Voces].
222	Emi:	No, yo no pregunto que cómo se hace, yo pido la fila,
223		¿qué fila tengo que coger de la matriz A?
224		Os recuerdo cómo se hacía el producto,
225		para la primera fila del producto que fila cogía de A.
226	Es:	La primera.
227	Emi:	Entonces la primera fila, por cada una de las columnas
228		[primera fila de A y columnas de B],
229		entonces si yo quiero encontrar un elemento c_{ij} ,
230		este elemento está en la fila i y está en la columna j,
231		entonces qué fila de aquí [matriz A]
232		debo utilizar para encontrar este elemento [c_{ij}].
233	Es:	Necesitas c.
234	Emi:	Vamos a ver, con la primera fila del producto.
235	Es:	[Voces].

236	Emi:	No quiero que me digáis la columna,
237		sólo quiero que me digáis la fila,
238		a ver primera fila por cada una de las columnas me da la primera fila
239		[de la matriz producto],
240		segunda fila, segunda fila [Emi ya desesperada]
241		por cada una de las columnas,
242		segunda fila de aquí [de la matriz producto].
243		Entonces, si yo quiero la fila i de aquí [de la matriz producto]
244		¿qué fila tomamos?
245	E2:	Si quieres la fila i tienes que coger la fila i.
246	Emi:	Muy bien E2, la fila i, puede ser la uno,
247		la dos, la que sea,
248		muy bien E2 no te había oído [E2 ya lo había dicho antes cuando
249		se escuchaban voces de varios estudiantes].
250	E2:	Es que he dicho la fila i y empezaron a reír.
251	Es:	[Risas].
252	Emi:	Pues E2 tenía toda la razón, [risas].
253		¿Cuál es el número i?
254		El número i no hemos dicho cuál es,
255		puede ser la primera, la segunda o la última,
256		cualquiera de ellas [cualquiera de las filas de la matriz A],
257		como no lo estoy mencionando por eso hablo de i, muy bien.
258		Y ahora para obtener esta fila [la fila i-ésima en la matriz producto]
259		multiplicaríamos esta fila [fila i de la matriz A]
260		por cada una de las columnas [de la matriz B],
261		el elemento de la primera columna
262		[de la fila i-ésima en la matriz producto]
263		¿qué columna cogería de aquí [de la matriz B]?
264		La uno ¿no?,
265		¿y el que está en la columna j?,
266		¿qué columna necesito [de la matriz B]?
267	E1:	La columna j.
268	Emi:	Muy bien, la columna j, yo cogería una columna j ¿de acuerdo?,
269		al multiplicar la fila i por la columna j obtengo este elemento
270		[el elemento c_{ij}] que está en la fila i columna j ¿de acuerdo?
271		Y ahora si es así, ¿cómo lo debo hacer?,
272		¿cuáles son los elementos de la fila i? ¿me los podéis decir?
273	E3:	a sub i1.
274	Emi:	a sub i1.
275	E3:	a sub i2.
276	Emi:	A sub i2.
277	E3:	A sub i3.
278	Emi:	a sub i3 hasta llegar al último, qué sería...
279	Es:	A sub i [se quedan pensando qué columna sería].
280	Emi:	¿Qué columna sería?
281		¿cuál es el orden de las columnas de A?
282	Es:	n.
283	Emi:	[Emi escribe a sub in como último elemento de la fila i en la matriz A].

284		Muy bien, si nos vamos a ver cuáles son los elementos de la columna j
285		[en la matriz B].
286	Es:	b sub j1.
287	Emi:	Bien b sub j1 ¿cuál sería el siguiente?
288	Es:	b sub j2.
289	Emi:	Muy bien, hasta llegar al último, que sería b sub j
290		[Emi espera que los alumnos le indiquen el orden de la columna]
291		¿cuál es el orden de la matriz B?,
292		n x p.
293		¿Esto que escribimos está bien [refiriéndose a los b sub j que
294		había escrito]?
295		No, está al revés, la fila se escribe primero y la columna después
296		[Emi borra en la pizarra los subíndices que había anotado
297		en la columna j de B].
298		Este es b sub 1j [Emi vuelve a escribir los elementos de la
299		columna j de B],
300		fila 1 columna j, luego b sub 2j, fila 2 columna j y así
301		hasta llegar al último, b sub nj, fila n columna j,
302		¿cuántas filas tiene B?
303		n,
304		entonces el último elemento de la columna j es b sub nj, fila n columna j.
305		¿Cómo se multiplica la fila i por la columna j?,
306		Dijimos el primer elemento por el primero,
307		el segundo por el segundo
308		[multiplicación de los elementos de la fila i de A
309		por los elementos de la columna j de B],
310		entonces si tenemos esta fórmula [c sub ij]
311		¿a qué será igual? ¿qué ponemos?
312	E3:	a sub i1 por b sub 1j.
313	Emi:	Si, más ahora el segundo.
314	Es:	a sub i2 por b sub 2j.
315	Emi:	Muy bien puntos suspensivos hasta llegar al último a sub in por b sub nj,
316		está es la fórmula del producto [cij= ai1.b1j+ai2.b2j+...+ain.bnj],
317		¿de acuerdo?
318		Se puede reducir la fórmula,
319		en matemáticas utilizamos un símbolo para reducir estas fórmulas
320		y escribirlas de una forma más abreviada,
321		¿cuál? porque tenemos suma,
322		usamos el símbolo, sumatorio [Σ],
323		ese es el símbolo sumatorio, la sigma mayúscula y ahora
324		¿qué tenemos en cada sumando?
325		¿en cada término de la suma?,
326		pues es el producto de a por b ¿no?
327		[Emi está anotando la fórmula reducida del producto],
328		vamos a ver
329		¿cuáles son los subíndices que permanecen siempre iguales,
330		la i aparece en todos los elementos
331		y no cambia entonces ponemos la i

332		[como subíndice de a],
333		en la b ¿cuál es el subíndice que no cambia?
334	Es:	La j.
335	Emi:	Pues ponemos la j [como subíndice de b],
336		Entonces, ¿cuál es el subíndice que va cambiando en cada uno
337		de los sumandos?
338		Pues vamos teniendo 1,1, luego 2,2, y así hasta n,n
339		[los subíndices que van variando en los sumandos],
340		le podemos llamar a ese subíndice que va cambiando,
341		k que es el mismo para la columna de la a y la fila de la b,
342		y ¿cuáles son los valores que toma k?
343		el primer valor de k en el primer término es...
344	Es:	Uno.
345	Emi:	Uno, luego vamos hasta llegar a n,
346		entonces indicamos en el sumatorio desde k igual a uno hasta n.
347		Entonces es así como se escribe la fórmula del producto,
348		que evidentemente no hay que sabérsela porque
349		con saber multiplicar es suficiente pero
350		¿por qué la hemos puesto?
351		Pues para que nos hagamos idea de que con esta definición,
352		con esta forma de multiplicar las matrices
353		¿se van a heredar las propiedades de los números reales en el producto?
354		Pregunto, ¿qué pensáis?
355		En las otras operaciones, las fórmulas eran muy simples ¿no?,
356		la suma era sumar un elemento con otro en la misma posición
357		y el producto por un número real era multiplicar cada elemento
358		por ese número,
359		entonces por eso se heredaban todas las propiedades
360		de la suma y el producto de los números reales,
361		pero aquí [Emi señala la fórmula del producto]
362		¿por qué no se van a heredar?
363		porque esta definición no es tan simple,
364		está bastante compleja,
365		entonces algunas propiedades se transmitirán y otras no,
366		vamos a ver las que si y las que no.
367		Entonces por suerte hay algunas que si se van a transmitir
368		como las propiedades distributivas,
369		la distributiva del producto respecto a la suma,
370		entonces si yo tengo,
371		os voy a recordar,
372		porque no se si conocéis esta propiedad,
373		la habéis aplicado cuando resolvéis ecuaciones con números,
374		la apliquéis muchas veces pero vamos a ver a qué se refiere.
375		En los números reales si yo tengo dos números b y c
376		y los multiplico por a [a(b+c)],
377		es lo mismo que hacer a por b más a por c [ab+ac],
378		las operaciones que tenéis con paréntesis,
379		si yo tengo b más c en un paréntesis,

380		multiplicado por a,
381		quito el paréntesis ¿cómo?
382		Multiplicando cada término del paréntesis por a,
383		esta propiedad aunque no os haya dicho el nombre se llama distributiva
384		y es también distributiva si en lugar de empezar con el producto
385		empiezo con una suma $[(a+b)c]$
386		entonces sería a por c más b por c $[ac+bc]$,
387		esto para números reales ¿de acuerdo?
388		¿con matrices cómo sería?
389		Utilizo letras mayúsculas para las matrices
390		entonces A por B más C $[A(B+C)]$,
391		será lo mismo que A por B más A por C $[AB+AC]$.
392		Y si tengo A más B por C $[(A+B)C]$
393		es lo mismo que A por C más B por C $[AC+BC]$ ¿de acuerdo?,
394		es decir, si multiplicamos en un sentido o en otro
395		$[A(B+C)]$ ó $(A+B)C]$,
396		por un lado o por otro,
397		una suma de matrices es equivalente a que realice primero la suma
398		y luego el producto,
399		que efectuar primero el producto y luego la suma, ¿de acuerdo?
400	E3:	Parece mejor hacer primero la suma y luego el producto.
401	Emi:	Pues sí, en realidad parece mejor hacer primero la suma
402		y luego el producto pero cuando nos planteen ecuaciones matriciales
403		tenemos que aplicar esta propiedad,
404		entonces hay que conocerla o en caso de hacer operaciones concretas
405		es más fácil simplificado que desarrollado
406		[por ejemplo simplificado $A(B+C)$, desarrollado $AB+ AC]$
407		y ¿qué otra propiedad tenemos, también que tenemos de los
408		números y se transmite a las matrices?
409		La propiedad asociativa A por B por C $[(AB)C]$,
410		si tengo que multiplicar tres matrices ¿cómo lo hago?
411		Tres matrices no se pueden multiplicar, es decir,
412		si me dicen A.B.C no hay forma.
413	Es:	Multiplicamos A por B y luego por C.
414	Emi:	Bueno ¿pero cuáles vamos a tomar primero?
415		Primero B y C o primero A por B.
416	E13:	Pero da lo mismo ¿no?
417	Emi:	Sí, nos tiene que dar lo mismo.
418	Es:	[Voces].
419	Emi:	Precisamente por eso hay que colocar paréntesis $[(AB)C=A(BC)]$
420		al cumplirse esta propiedad significa que podemos elegir
421		si multiplicamos A por B y lo que nos de por C
422		o si multiplicamos B por C y lo que nos de por A,
423		para no liar mucho las cosas,
424		no he dicho cuál es el orden de las matrices,
425		se supone que cuando se escribe una propiedad,
426		las matrices tienen el orden que hace falta tener
427		para poder hacer la operación, que son, que hay que hacer explícito.

428		Hay una propiedad de los números que no se cumple en las matrices,
429		¿cuál es?
430		Sabéis cuál es la propiedad conmutativa en el producto,
431		igual que para la suma pero ahora para el producto,
432		el orden en que se efectúe un producto
433		con los números reales no importa,
434		lo mismo es multiplicar a por b que b por a,
435		¿va a cumplirse esto con las matrices?
436	E3:	No.
437	Emi:	Pues no, es decir, A por B va a ser distinto de B por A,
438		en este caso la propiedad conmutativa no se cumple,
439		en general A por B va a ser distinto de B por A,
440		entonces ya veremos la semana que viene [pues hoy es viernes],
441		ejercicios sencillos para que lo comprobéis,
442		pero ya incluso sin hacer ninguna cuenta,
443		¿por qué podemos decir que esto es cierto $[AB \neq BA]$?
444		Porque aquí en la definición importa el orden,
445		hemos dicho que el número de columnas de la primera
446		debe coincidir con el número de filas de la segunda
447		[primera $m \times n$ y segunda $n \times p$],
448		si cambiamos el orden, si una es 2×3 [orden de A]
449		la otra es 3×4 [orden de B]
450		podemos hacer A por B
451		pero ¿qué pasa con B por A?
452	Es:	Uno es 4 y otro es 2.
453	Emi:	B por A no se puede porque entonces ya no coincide
454		el 4 con el 2, ¿de acuerdo?
455		Pues continuando con las propiedades de las matrices con el producto,
456		ya hemos visto,
457		hay que tener cuidado en el orden en que se efectúan
458		[A por B o B por A],
459		inclusive cuando se puedan hacer de las dos maneras,
460		no va a coincidir,
461		a ver ¿quién me dice cuando podemos multiplicar siempre A por B
462		y B por A?
463	E3:	Cuando son cuadradas.
464	Emi:	Muy bien cuando son cuadradas,
465		entonces ahora nos vamos a fijar en las matrices cuadradas,
466		el producto pero solamente con matrices cuadradas,
467		por ejemplo, producto de dos matrices cuadradas,
468		¿qué va a pasar si nos centramos solamente en el conjunto
469		de las matrices cuadradas?,
470		el producto no hace falta que lo volvamos a definir
471		porque se define exactamente de la misma manera
472		y las propiedades que se cumplen para todas las matrices
473		se cumplen también para las cuadradas,
474		lo que hemos visto de la conmutativa,
475		pues no se cumple,

476		pero en este caso A por B se puede calcular y B por A también,
477		pero van a salir matrices distintas,
478		en general, pues puede haber casos en los que puede coincidir
479		pero que en otros no coincida, vale.
480		Pero tiene otra propiedad,
481		¿recuerdan la matriz identidad?
482	E3:	Si.
483	Emi:	¿Cómo es la matriz identidad (I)?
484	Es:	Pones ceros y en la diagonal unos.
485	Emi:	Muy bien, la diagonal principal llena de unos y fuera, ceros.
486		Entonces, ¿qué propiedad tiene esta matriz en las matrices cuadradas?,
487		si tengo $AI=IA$, ¿a qué es igual?
488	E3:	a A.
489	Emi:	Muy bien, eso lo vimos el otro día que al multiplicar una matriz A
490		por la matriz identidad I,
491		nos vuelve a dar A, vale.
492		Bueno en los números reales,
493		la matriz identidad sería equivalente ¿a qué número?
494		En el producto de los números reales.
495	E3:	A 1.
496	Emi:	Muy bien, cuando multiplicamos en los números reales por 1,
497		el resultado no cambia,
498		aquí esta función la tiene esta matriz, la identidad,
499		en el producto de números reales.
500		Todos los números reales tienen elemento inverso excepto el 0 ¿no?,
501		¿podemos hablar de matrices inversas?,
502		en los números reales excepto el 0 tienen inverso,
503		¿qué significa eso? si yo multiplico un número por su inverso,
504		¿cuál es el inverso de a?
505	Es:	Menos a.
506	Emi:	No ese es el opuesto, pero el inverso es...
507		Uno partido por a ($1/a$),
508		¿cuál es el resultado de multiplicar un número por su inverso?
509		Uno, ¿no?
510		Entonces cuando a es distinto de 0,
511		si yo tengo números reales,
512		con los números reales yo tengo esta propiedad,
513		un número que no sea 0,
514		multiplicado por su inverso da siempre 1 y ahora pregunto
515		¿con las matrices ocurrirá eso?,
516		¿cada matriz tiene su inversa?
517		Si tuviera su inversa ¿qué condición tendrían que cumplir las matrices?,
518		Si tengo A y llamo B a la inversa, ¿qué me tendría que dar?
519		Si yo digo que B es la matriz inversa por analogía
520		con los números reales,
521		si B es la inversa de A,
522		el producto de estas dos matrices $[AB]$ en ambos sentidos
523		$[AB]$ o $[BA]$ tendría que dar la matriz...

524	E3:	A...
525	Emi:	Hemos dicho que esta matriz [la matriz identidad I] equivale al uno
526		de los números reales,
527		ahora no estoy con números estoy con matrices,
528		entonces ¿qué matriz nos dará?
529	E3:	La identidad.
530	Emi:	Es decir I, decimos que una matriz es inversa de otra,
531		en matrices cuadradas,
532		una matriz cuadrada es inversa cuando al multiplicarla
533		por los dos lados obtenemos la matriz identidad,
534		claro con números es muy fácil encontrar el inverso
535		es uno partido por el número ¿no?,
536		con matrices no hemos hablado
537		ni de fracciones ni de divisiones ni de nada,
538		entonces eso no tiene analogía en las matrices,
539		tenemos que buscar la matriz inversa de otra manera,
540		vamos a ver ahora cómo vamos a calcular esa inversa
541		pero también vamos a centrarnos aquí [números reales],
542		¿todos tienen inverso?
543	Es:	Si.
544	Emi:	El cero no.
545		¿Qué matriz no va a tener nunca inverso? que ya conocemos.
546	E3:	La matriz nula.
547	Emi:	Si la matriz nula muy bien,
548		entonces esa no va a tener inversa,
549		cuando multiplicamos una matriz por la matriz nula
550		¿qué resultado nos da?
551		Una matriz cuadrada A por la matriz cuadrada nula ¿qué nos va a salir?
552	E5:	Ceros.
553	Emi:	La matriz nula ¿no?,
554		entonces no puede tener inversa la matriz nula por la misma razón
555		que el 0 no tiene inverso,
556		pero ¿habrá más matrices que no tengan inverso?
557		a partir de esta matriz nula,
558		pues aquí es donde hay diferencia con todos los números reales,
559		todos los números reales, positivos, negativos, racionales,
560		todos tienen inverso menos el número 0,
561		con las matrices no va a ocurrir eso,
562		algunas tienen inversa y otras no tienen inversa,
563		vamos a ver primero cómo calcularla y luego plantearemos
564		la cuestión de la existencia.
565		Vamos a ver las transformaciones elementales de una matriz,
566	Es:	[Voces]
567	Emi:	A ver vamos a continuar, por favor,
568		que me gustaría dejar la teoría concluida para ya no aburriros más,
569		porque yo sé que la teoría siempre os cansa más,
570		pero claro la teoría la necesitamos conocer para luego
571		aplicarla a la práctica,

572		entonces terminamos hoy y ya el próximo día nada más la práctica.
573		Bueno para poder saber hacer la matriz inversa
574		necesitamos saber las transformaciones elementales en una matriz,
575		hay tres tipos de transformaciones elementales,
576		la primera y más simple es cambiar una fila por otra,
577		entonces si cambiamos una fila por otra, cambiamos la matriz
578		¿de acuerdo? ¿cómo escribimos esa transformación?
579		Pues se simboliza, si cambiamos una fila por otra,
580		por ejemplo la fila i doble flecha fila j [$F_i \leftrightarrow F_j$] ,
581		entonces cambiar fila i por fila j y fila j por fila i,
582		es decir, intercambiar una fila por otra,
583		esto quiere decir intercambiar las filas i y j,
584		este es el primer tipo de transformación elemental en una matriz,
585		intercambiar dos filas, por ejemplo si yo tengo aquí una matriz A,
586		1,2 en la primera fila y 3,4 en la segunda,
587		tengo nada más que dos filas,
588		entonces yo puedo intercambiar la fila 1 por la fila 2,
589		¿cómo escribo esta transformación?
590		Pues la fila con una F mayúscula y el 1 para la fila 1
591		y el 2 para la fila 2 y la doble flecha para indicar el intercambio
592		entonces la matriz A ¿en qué se convierte?
593		Pues la segunda fila ahora es la primera
594		y la primera fila ahora es la segunda.
595	E3:	Y ya está.
596	Emi:	Y ya está, esa es una transformación elemental,
597		¿es la misma matriz? pues no,
598		hay que tener en cuenta que las transformaciones modifican la matriz eh,
599		siguiente tipo de transformación elemental.
600	E5:	Pero si tiene más filas, ¿no puedo cambiar más filas?
601	Emi:	Si, por ejemplo si tenemos más filas,
602		tú puedes cambiar la primera por la segunda, la tercera por la cuarta.
603	E13:	Y si ...
604	Emi:	Te da más posibilidades.
605	E10:	¿Y si tiene tres Emi?
606	Emi:	Puedes cambiar la primera por la segunda,
607		la segunda por la tercera o la primera por la tercera,
608		esas tres transformaciones son del mismo tipo,
609		intercambiar fila, vale.
610		Entonces multiplicar una fila por un número,
611		es otra transformación elemental.
612	E3:	¿Sólo una fila?
613	Emi:	Si, si multiplicamos toda una fila por un mismo número,
614		no toda la matriz sino una fila,
615		es decir, una fila i por un número a,
616		por ejemplo tengo la matriz A,
617		1,2 en la primera fila y 3,4 en la segunda
618		y yo quiero multiplicar la primera fila por 7.
619	E1:	¿Es por a?

620	Emi:	Si, si yo multiplico por un número,
621		por ejemplo en este caso,
622		si quiero multiplicar la fila 1 por siete,
623		¿en qué se transforma la matriz?,
624		pues se transforma en, la primera fila es 1,2, al multiplicar por 7,
625		será ahora 7,14 y la segunda fila se queda como está
626		porque no he indicado ninguna transformación para la segunda fila
627		¿de acuerdo?
628	E3:	¿Y para qué sirve?
629	Emi:	Pues esto sirve para dos cosas muy importantes,
630		una hallar a la matriz inversa
631		y otra para determinar el rango de una matriz
632		y además también vamos a ocupar esto de las transformaciones
633		elementales para resolver sistemas o sea que esto que es tan elemental
634		tiene una utilidad grandísima.
635		El tercer tipo de transformación elemental es sumar
636		a una fila otra multiplicada por un número $[F_i + aF_j]$,
637		entonces esto significa que cuando escribo F_i más a por F_j
638		significa que a la fila i le sumamos la fila j multiplicada por a .
639	E3:	¿Cualquier número real?
640	Emi:	El que queramos, entonces si volvemos a tener la misma matriz A ,
641		1,2 en la primera fila y 3,4 en la segunda
642		y yo quiero hacer lo siguiente, a la fila 2 sumarle 5 veces la fila 1
643		¿qué significa esto?,
644		cuidado porque aquí el orden es muy importante.
645		¿Cuál es la fila que voy a cambiar, la 1 ó la 2?
646		La que cambiamos es la 2,
647		es decir, que volvemos a escribir la uno como estaba $[1, 2]$
648		y ahora a la fila 2, sobre la fila 2 es sobre la que actúa la transformación,
649		le vamos a sumar 5 veces la fila 1,
650		¿cómo lo hacemos?
651		Tenemos un 3
652		[el 3 de la posición segunda fila primera columna de A],
653		arriba un 1 [el 1 de la posición primera fila primera columna de A],
654		entonces tenemos 1 por 5 son 5 más 3 son 8
655		y para el otro elemento,
656		abajo tenemos un 4
657		[el 4 de la posición segunda fila segunda columna de A]
658		y arriba tenemos un 2
659		[el 2 de la posición primera fila segunda columna de A]
660		entonces si lo multiplicamos por 5, 2 por 5 son 10 más 4 son 14
661		¿de acuerdo?
662	E5:	Me puedes explicar otra vez por favor.
663	Emi:	Si, está escrito fila 2 menos 5 veces la fila 1,
664		significa que la fila 1 no la modificamos se queda como está
665		y donde hacemos el cambio,
666		donde transformamos es la fila 2, transformamos la fila 2
667		¿cómo? al número que tenemos en la fila 2 le sumamos 5 veces

668		el número de la fila 1,
669		es decir, que éste [1], lo multiplicamos por 5 y luego lo sumamos
670		a éste [3],
671		5 por 1 son 5 más 3 son 8
672		[Emi señala el 8 que había anotado en la matriz resultado,
673		que está en la posición segunda fila primera columna].
674		Y ahora hacemos lo mismo con el siguiente [el 2],
675		multiplicamos por 5, 5 por 2 son 10 y se lo sumamos
676		a este que teníamos,
677		entonces 10 más 4 son 14
678		[Emi señala el 14 que había anotado en la matriz resultado,
679		que está en la posición segunda fila segunda columna].
680		Entonces al número de la fila dos le hemos sumado
681		la fila uno multiplicada por 5, vale.
682	E3:	Ok.
683	Emi:	Pues estos son los tres tipos de transformaciones elementales
684		y estas transformaciones elementales se consideran
685		en muchas cosas con las matrices,
686		una de ellas como os he indicado antes es hallar la matriz inversa.
687		El método se llama método de Gauss-Jordan.
688	E5:	¿Y ese quién es?
689	Emi:	Lleva el nombre de Gauss-Jordan que fue un matemático eh.
690		Bueno pues aquí el más importante no es Jordan sino Gauss,
691		lo tenéis en vuestro libro, porque Gauss está considerado
692		como uno de los grandes matemáticos de la historia,
693		además nacido en el siglo XVIII y muerto en el siglo XIX ,
694		era un genio, de todos los genios que ha habido en matemáticas,
695		es uno de los mayores.
696		Bueno el método es muy simple,
697		como todas las cosas buenas y bonitas
698		cuanto más simples mejor,
699		entonces ¿cómo hallamos la matriz inversa?
700		Colocamos la matriz A,
701		estamos hablando de matrices cuadradas
702		y a su lado colocamos la matriz identidad,
703		realizamos transformaciones elementales de forma que donde estaba A,
704		consigamos obtener la matriz identidad
705		y donde teníamos la matriz identidad pues tenemos la inversa
706		$[(A I) \rightarrow (I B)]$,
707		¿cómo llamamos a la operación inversa?
708		Vamos a llamarla B, vale.
709		Si conseguimos pasar mediante transformaciones elementales
710		de la matriz A a la matriz identidad,
711		al aplicarle los cambios que hagamos a la matriz A
712		y a la matriz identidad que colocamos primero $[(A I)]$,
713		ésta matriz que encontremos [B] es la inversa de A.
714		Entonces vamos ahora con un caso muy simple,
715		vamos a calcular la inversa de una matriz pequeña de orden 2,

716		vamos a hacer la inversa.
717		Hallar la inversa de A siendo A en la primera fila -1,4
718		y en la segunda fila 1 y -1.
719		Vamos a hallar la inversa de esa matriz,
720		hemos elegido una matriz que tiene inversa,
721		ya en la próxima semana [hoy es viernes] haremos más ejercicios
722		y veremos cuando tienen y cuando no,
723		pero ahora calcularla es muy sencillo.
724		Ponemos la matriz A, en la primera fila -1, 4 y en la segunda fila 1 y -1
725		y ahora colocamos una línea [vertical] discontinua
726		y a su lado la matriz identidad,
727		como estamos trabajando con una matriz cuadrada de orden dos,
728		¿cuál es la matriz identidad?
729	E3:	En la primera fila 1, 0 y en la otra [segunda] 0, 1.
730	Emi:	Muy bien y ahora vamos a realizar transformaciones elementales
731		en estas dos matrices al mismo tiempo,
732		las transformaciones se hacen al mismo tiempo,
733		ahora en lo que nos tenemos que fijar es en la matriz A,
734		¿qué hemos dicho?
735		Que aquí [en la matriz A] tenemos que poner,
736		conseguir llegar a la matriz identidad,
737		la matriz identidad tiene aquí un 1
738		[Emi señala posición de la primera fila primera columna en A]
739		pero en esta matriz [A] tenemos -1 y abajo
740		[en la posición del elemento de la segunda fila primera columna de A],
741		si yo cambio la fila segunda por la primera obtengo el 1 que buscaba,
742		pues es lo primero que vamos a hacer, cambiar la fila uno por la fila dos
743		¿cómo nos quedará?
744		Si cambiamos la fila tiene que ser la fila completa eh,
745		no partirlo, no partáis aunque este ahí la recta,
746		toda la fila completa 1, -1, 0 y 1
747		[Emi escribe éstos como elementos de la primera fila
748		de la matriz transformada].
749		Y ahora la segunda fila [de la matriz transformada] -1, 4, 1, 0 vale,
750		[Suenan el timbre que indica que la clase ha terminado],
751		un minutito por favor que esto en dos pasos lo terminamos.
752		Para calcular la inversa colocamos la matriz de la cual queremos
753		calcular la inversa y a su lado la matriz identidad,
754		y ahora tenemos que pasar de esta matriz A,
755		a la identidad en este sitio,
756		entonces como sabemos que la identidad tiene un 1 en este sitio
757		[Emi señala el 1 de la primera fila primera columna de la matriz
758		identidad],
759		entonces yo quiero conseguir aquí un 1
760		[Emi señala el menos 1 que está en la primera fila primera columna
761		de la matriz A]
762		entonces cambio la primera fila por la segunda y obtengo ese 1
763		[Emi señala el 1 que está en la primera fila primera columna

764		de la matriz transformada],
765		primer objetivo conseguido.
766		Ahora ¿qué necesito? que abajo sea 0 ¿no?
767		[Emi se refiere al 0 de la posición segunda fila primera columna
768		de la matriz identidad].
769		¿Qué operación tengo que hacer con estas dos filas
770		para obtener ese 0?
771	E7:	Multiplicarla por...
772	Emi:	A la fila dos
773		¿qué le tengo que hacer a través de la fila uno para que me de 0?,
774		¿qué pasa si sumo ese número?
775		Si a la fila dos le sumo la fila uno ¿qué pasará?
776		[de la matriz transformada],
777		pues que tengo el 0 donde yo lo quería conseguir,
778		entonces esta transformación ¿cómo se aplica?
779		Dejamos la fila uno como está 1, -1, 0 y 1
780		y ahora a la fila dos como hemos indicado, le sumamos la fila uno,
781		entonces -1 más 1 es 0 [Emi lo anota en la posición de la segunda fila
782		primera columna de esta matriz que está transformando y sigue anotando
783		los resultados de esta suma en esa fila],
784		4 más -1 es 3, 1 más 0 es 1 y 0 más 1 es 1,
785		¿habéis visto cómo se hace la suma?
786	Es:	[Nadie contesta].
787	Emi:	Repito a la fila 2 le vamos a sumar la fila 1,
788		entonces sumamos elemento a elemento 1 más -1, 0; -1 más 4, 3;
789		0 más 1, 1; 1 más 0 es 1
790	E5:	Pero ¿por qué hacer eso?
791	Emi:	Porque yo quiero que aquí me aparezca la matriz identidad
792		[Emi señala el lugar de la matriz A que escribió al inicio del ejercicio],
793		entonces empiezo por conseguir este 1
794		[Emi señala el 1 de la primera fila primera columna de la matriz
795		con la primera transformación]
796		y ahora por conseguir este 0
797		[Emi señala el 0 conseguido con la última transformación].
798	E15:	Entonces ahora hay que hacer otra.
799	Emi:	Si ahora aplico una nueva transformación,
800		ahora quiero conseguir aquí un 1
801		[en la segunda fila segunda columna de la última transformación],
802		¿por cuánto tengo que dividir esto para que aquí obtenga un 1?
803		[Emi señala el 3 de la segunda fila segunda columna
804		de la última transformación].
805	E4:	Por 3.
806	Emi:	Por 3, entonces multiplico la fila dos por un tercio,
807		dejamos la primera fila como estaba [1, -1, 0 y 1]
808		entonces 0 entre 3 es 0, 3 entre 3 es 1;
809		1 entre 3 es un tercio y 1 entre 3, un tercio
810		[Emi escribe estos resultados en la segunda fila
811		de esta matriz transformada] ya he conseguido el 1.

812		Primero es conseguir este 1 [el 1 de la primera fila primera columna
813		de la matriz identidad],
814		luego este 0 [el 0 de la segunda fila primera columna
815		de la matriz identidad],
816		en tercer lugar conseguir este 1
817		[el 1 de la segunda fila segunda columna de la matriz identidad],
818		¿qué me falta por conseguir para la matriz identidad?
819	E13:	El 0.
820	Emi:	El 0 aquí [el 0 de la primera fila segunda columna
821		de la matriz identidad],
822		¿cómo consigo ese 0?
823	E7:	Sumando.
824	Emi:	Sumando muy bien, entonces a la fila dos le vamos a sumar
825		la fila uno eh.
826		Entonces ahora ponemos la misma fila 1, -1, 0 y 1
827		[Emi escribe la fila uno de la última transformación],
828		entonces que nos da si sumamos a la fila 2 la fila uno,
829		pues aquí nos da 1 [en la segunda fila primera columna,
830		Emi se da cuenta que se ha equivocado
831		y que no es esa la transformación que le interesa,
832		pues eso sería un retroceso a lo alcanzado].
833		Pero esta no es la transformación que me interesa
834		entonces es justo lo contrario a la fila uno le voy a sumar la fila dos
835		¿por qué?
836		Por que así lo que tengo que hacer es cambiar este número
837		[Emi se refiere al -1 de la primera fila segunda columna
838		que tenía en la transformación anterior],
839		entonces dejo la segunda fila que tenía,
840		como está, 0, 1, un tercio y un tercio, entonces si a la uno le sumo la dos
841		[Emi se refiere a las filas]
842		1 más 0 es 1, -1 más 1 es 0 [Emi va anotando estos resultados
843		en la primera fila de esta última matriz transformada]
844	E5:	No entiendo nada eh.
845	Es:	[Risas].
846	Emi:	[Sonríe], por favor podemos terminar y luego me decís en dónde
847		os habéis perdido.
848	Es:	[Voces].
849	Emi:	Os importa que lo termine y luego volvemos a repasar,
850		entonces un tercio más 0 es un tercio
851		y 1 más un tercio son cuatro tercios
852		[Emi continua anotando estos resultados en la primera fila
853		de esta última matriz transformada].
854	Es:	[Voces expresando que cada quien se perdió en algún paso].
855	Emi:	A ver esta matriz ¿cuál es?
856		[Emi señala la matriz de 2x2 obtenida].
857		La identidad y ¿esta?
858		[la matriz de 2x2 obtenida, que está al lado de la matriz identidad],
859		la matriz inversa de A.

860		Vamos a ver, este proceso es sencillo pero es cierto
861		hay que tener mucha práctica para asimilarlo,
862		porque una cosa es...
863	E13:	Pues yo me perdí eh.
864	Emi:	E13,
865	Es:	[Voces compartiendo la respuesta de E13].
866	Emi:	Un momentito, E13 es lógico la primera vez que lo escuchas decís
867		¡Uy cuántos cambios!
868		Pero es un proceso que tú vas aplicando una y otra vez
869		y no es complicado, sí que es muy importante seguir uno a uno.
870		Entonces hay que conseguir el 1 primero
871		[el 1 de la primera fila primera columna de la matriz identidad]
872		y luego este 0 [el 0 de la segunda fila primera columna
873		de la matriz identidad],
874		y luego este 1 [el 1 de la segunda fila segunda columna
875		de la matriz identidad]
876		y luego este 0 [el 0 de la primera fila segunda columna
877		de la matriz identidad]
878		y practicando mucho con las transformaciones elementales
879		que es lo que vamos a hacer el próximo día,
880		practicar nada más con transformaciones y ya este proceso
881		resultará sencillo ¿de acuerdo?
882		Entonces de deberes.
883	Es:	No.
884	Emi:	De matriz inversa no voy a poner nada eh,
885		en el examen sí para deberes no,
886		entonces vas a hacer de la página 26 el 41,
887		perdón es página 27 el 41, el 42.
888	E13:	Y ya.
889	Emi:	El 43, ya está esos tres vale.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la quinta clase grabada de la profesora Emi del viernes 10/10/08.

Resumen: Determinante y el método para calcular la inversa (usando el determinante).

L		Transcripción
1	Emi:	[Inicia dándoles una fotocopia a los estudiantes,
2		donde vienen ejercicios propuestos tomados de selectividad
3		de años anteriores y de pruebas que elaboran
4		personas encargadas de selectividad
5		y que no usan y luego desechan]
6		Estos ejercicios no me los he inventado yo eh.
7		No sé si os han comentado cómo hacen los exámenes de selectividad
8		pues en matemáticas,
9		hay un grupo de personas que se dedican a hacer esos exámenes
10		y entonces durante el año hacen seis modelos de examen,
11		de esos seis modelos de examen que elaboran,
12		ya sabéis que en el examen de selectividad hay dos opciones,
13		la opción A y la opción B,
14		entonces estas preguntas
15		[que ella les acaba de entregar en la fotocopia]
16		son sacadas de esos exámenes,
17		que algunas si llegaron a ser preguntas de selectividad
18		y otras que no se pusieron pero que se prepararon
19		y pudieron haber caído.
20	E1:	Pero el 2 [ejercicio] no lo hemos dado.
21	Emi:	¿Cuál?
22	Es:	Es el 2.
23	Emi:	Si lo hemos dado.
24	Es:	Pero X por la matriz.
25	Emi:	Vamos a ver, toma E9 perdona,
26		[a Emi se le había olvidado darle fotocopia a E9,
27		se acerca a ella y le comenta de lo que se está hablando]
28		vamos a ver, el ejercicio 2 es sobre una matriz,
29		¿qué tipo de matriz es?
30	Es:	Cuadrada de orden dos.
31	Emi:	Muy bien,
32		¿qué diferencia a esta matriz de otras que hemos visto?,
33		¿los elementos son todos numéricos?
34		[la matriz es 2, X en la primera fila y 0, X+2 en la segunda fila]
35		aparece una letra, la X, ¿no?
36		entonces en el primer apartado ¿qué nos piden?
37		Hallar X para que se cumpla...
38	Es:	Que A al cuadrado sea igual a 2A.
39	Emi:	Ah, que A al cuadrado sea igual 2A
40		entonces, primera pregunta,
41		¿Sabemos hallar 2 por A? Si.
42		¿Sabemos hallar A al cuadrado? Si.
43		y sabemos poner,
44		decir ¿cuándo una matriz es igual a otra?

45	Es:	[Nadie contesta].
46	Emi:	Es decir,
47		puede ser que no os hayáis enfrentado a un ejercicio con este enunciado,
48		pero con toda la teoría y con toda la práctica que hemos visto,
49		se supone que debéis de ser capaces de realizar esos ejercicios eh
50		entonces esto es como todo,
51		en matemáticas si uno sabe leer y sabe mirar
52		entonces es capaz de resolver los problemas,
53		entonces leemos el enunciado y ¿qué nos piden?
54		encontrar X para que se cumpla que A al cuadrado es igual a 2A,
55		¿Qué tenemos que hacer?
56		Por un lado poner la matriz 2A
57		y por otro lado calcular la matriz A al cuadrado
58		que sabemos que es A por A,
59		cuando ya tengamos esos resultados,
60		ponemos que una es igual a la otra y claro dos matrices son idénticas
61		si los elementos son idénticos,
62		entonces comparando los elementos de una
63		y de otra podemos encontrar los valores de la X.
64		¿Qué otro ejercicio ven que os puede causar conflicto?
65		O que ven que es necesario hacer una aclaración.
66	Es:	[Observan detenidamente los ejercicios que vienen en la fotocopia]
67	Emi:	A ver el último, el 6, nos dan la matriz A
68		y nos piden encontrar la matriz A a la n,
69		entonces tenemos la matriz A,
70		1,1 primera fila y 0,1 en la segunda fila y tenemos que hallar A a la n,
71		n es un número natural
72		[en el ejercicio aparece a qué conjunto pertenece n]
73		¿cuáles son los valores de los números naturales?
74	Es:	[Nadie contesta].
75	Emi:	1, 2, 3,...
76		A elevado a la 1, es la matriz A ¿no?
77		y ya la tenemos ahora A al cuadrado ¿cuál será?
78		Pues A por A, entonces lo que tenemos que hacer es multiplicar A por A
79		[Emi escribe dos paréntesis grandes indicando que así sería A por A]
80		y eso nos dará una matriz resultado.
81		Ahora A al cubo ¿qué será?
82	E4:	A al cuadrado por A.
83	Emi:	A al cubo es A por A por A,
84		pero también es A al cuadrado por A,
85		entonces lo que nos ha salido de A al cuadrado lo multiplicamos por A
86		¿no?
87		si queréis hallar hasta A a la cuarta, encontrarais primero A al cuadrado,
88		A al cubo y A a la cuarta y luego
89		¿cómo hallaríamos A a la n?,
90		¿cuántas matrices tendríamos que hallar?
91		Infinitas, se supone que no tenemos que hallarlas todas,
92		pero si nos ponen hallar A a la n,

93		es porque tenemos que encontrar una forma más sencilla,
94		es decir, que observando cómo son los elementos de A,
95		de A al cuadrado, de A al cubo, A a la cuarta,
96		encontraremos alguna relación con el exponente en cada caso.
97		Lo intentáis vale.
98		Bueno vamos a hacerlo, venga sacad el cuaderno y hacedlo
99		en el libro creo que también había uno,
100		es que veréis,
101		si pongo cualquier ejemplo no vale, este está preparado y por eso,
102		bueno vamos a ver,
103		haced el producto de A por A,
104		[Emi denota los elementos de A por A],
105		¿cuál es la matriz resultado? recordad,
106		se multiplica primera fila
107		[de la primera matriz]
108		por primera columna
109		[de la segunda matriz],
110		y luego la primera fila
111		[de la primera matriz]
112		por la segunda columna
113		[de la segunda matriz],
114		y así se encuentran los elementos de la primera fila
115		[de la matriz resultado]
116		¿cuánto da?
117	E3:	1, 2 en la primera fila
118		y 0,1 en la segunda fila.
119		[Emi escribe esta matriz resultado].
120	Emi:	Bueno pues muy bien,
121		ahora los que hayan hecho ésta
122		[A por A],
123		la multiplicamos por A y a ver qué nos da
124		[Emi denota lo que sería A al cubo,
125		el resultado de A al cuadrado por los elementos de A].
126	E13:	¿Fila por columna o por separado?
127	Emi:	¿Cómo por separado?
128	E13:	Número por número.
129	Emi:	Número por número es cuando multiplicas un número por una matriz
130		pero cuando multiplicas matriz por matriz son filas por columnas.
131	E13:	¿Siempre?
132	Emi:	Siempre.
133		Bueno ¿cuánto sale?
134		[de A al cubo].
135	E3:	1,3 [en la primera fila]
136		y 0,1 [en la segunda fila].
137	Emi:	Y ¿si hacemos A a la cuarta?
138	E3:	Sólo cambia el elemento de la segunda fila segunda columna
139		[de la matriz resultado].
140	Emi:	Eso es.

141	E3:	1, 4 [en la primera fila]
142		y 0,1[en la segunda fila].
143	Emi:	[Emi denota lo que sería A a la cuarta,
144		el resultado de A al cubo por los elementos de A y anota el resultado]
145		Si, siempre tienen los productos la misma forma,
146		¿podemos sacar la forma general de formación de estos productos?
147	E3:	1, n [en la primera fila]
148		y 0,1[en la segunda fila].
149	Emi:	[Emi anota ese resultado]
150		Pues es lo que pedían en el ejercicio.
151	E13:	Pues yo no me he enterado de nada.
152	Emi:	¿No?,
153		¿Haz hecho el de A por A?
154		y te sale 1,2 y 0,1.
155		[En las filas de la matriz resultado].
156	E13:	[E13 mueve la cabeza indicando que si].
157	Emi:	¿Haz hecho el de A cuadrada por A?
158		y te sale 1,3 y 0,1 [en las filas de la matriz resultado].
159	E13:	[E13 observa lo que Emi va señalando en la pizarra].
160	Emi:	¿Si haces A a la cuarta te sale 1,4 y 0,1
161		[en las filas de la matriz resultado]?
162	E13:	A sí si.
163	Emi:	¿Qué tienen en común todas estás matrices?
164		[Las matrices resultado de A al cuadrado, A al cubo y A a la cuarta]
165		Siempre te sale en el primer elemento 1 en todas.
166		[Emi señala el 1 en cada una de las matrices resultado].
167		El primer elemento de la segunda fila siempre es 0,
168		nos sale 0 en todas
169		[Emi señala el 0 en cada una de las matrices resultado].
170		El segundo elemento de la segunda fila siempre es 1
171		[Emi señala el 1 en cada una de las matrices resultado].
172		¿Cuál es el número que va cambiando de un producto a otro?
173		Pues en la primera cuando el exponente es uno [A a la uno],
174		este número es 1
175		[el elemento de la primera fila segunda columna de la matriz A]
176		cuando el exponente es dos,
177		es decir, cuando calculamos A al cuadrado,
178		este número es 2,
179		[el elemento de la primera fila
180		segunda columna de la matriz resultado de A al cuadrado]
181		me estoy refiriendo al número que cambia
182		porque las matrices cuadradas de orden dos, tienen cuatro elementos.
183	Es:	[Algunos estudiantes están hablando].
184	Emi:	Por favor
185		[Emi invita a los estudiantes que hacen desorden a que guarden silencio].
186		Entonces me voy refiriendo al elemento que cambia en los productos,
187		que es el segundo elemento de la primera fila
188		entonces el segundo elemento de la primera fila en la matriz A es 1,

189		el segundo elemento de la primera fila de la matriz A al cuadrado es 2,
190		luego en A al cubo es 3
191		[Emi señala el 3 en la matriz resultado de A al cubo],
192		y en A a la cuarta es 4
193		[Emi señala el 4 en la matriz resultado de A a la cuarta].
194		Pues ¿qué relación hay entre el exponente de la matriz
195		y el número que cambia?
196		Es siempre el mismo ¿no?,
197		entonces si yo tengo A a la n,
198		¿qué número me va a salir en el segundo elemento de la primera fila?
199	E13:	El n.
200	Emi:	El n.
201		Eso es lo que hay que averiguar, observar cómo quedan las matrices,
202		observar qué es lo que tienen en común y lo que va cambiando,
203		cómo cambia en relación al exponente.
204	E3:	Pero no siempre va a ser igual.
205	Emi:	Pero los [ejercicios] que les ponen de este tipo
206		siempre están puestos para que se vea fácilmente.
207	E13:	¿Y cuánto puede valer este?
208		[En el examen de selectividad].
209	Emi:	Pues un puntito o puntito y medio.
210	Es:	[Risas].
211	E4:	¿Cuántos problemas vienen en selectividad?
212	Emi:	Pues hay cuatro problemas,
213		entonces hay un problema que es siempre de álgebra,
214		otro que es de funciones y otro que es de...
215	E3:	De probabilidad.
216	Emi:	Si otro de probabilidad y estadística,
217		no recuerdo muy bien.
218		Ya os enseñaré a finales del curso modelos de exámenes de selectividad
219	E5:	Pero son difíciles.
220	Emi:	E5 estamos empezando el curso,
221		te podrán parecer difíciles ahora
222		pero cuando tú hayas visto toda la materia
223		te van a parecer sencillos,
224		éstos son todos de selectividad
225		[Emi señala la fotocopia que les dio]
226		y todos son sencillos.
227		Entonces queda esta hoja [la fotocopia]
228		como hoja de trabajo para que lo hagáis.
229		Además todos los que estáis aquí tienen capacidad de sobra
230		para hacer las cosas que se os piden.
231	E13:	Yo no.
232	Es:	[Risas].
233	Emi:	Vamos a ver,
234		capacidad y facilidad son cosas distintas,
235		yo no he dicho facilidad yo he dicho capacidad [mirando a E13],
236		¿qué diferencia hay?

237		Capaz significa que puedes
238		pero no significa que puedas fácilmente o no,
239		algunos pueden más fácilmente y otros pueden con mayor dificultad,
240		¿me entiendes?
241		Entonces puede que lo hagas con mayor dificultad,
242		aunque luego no es tanta la dificultad eh.
243	E13:	Es que me hablan de Matemáticas
244		y parece que me están hablando en chino, vamos.
245	Emi:	[Emi voltea a ver a E13 y le pregunta].
246		¿Pero esto que hemos visto hoy si lo has entendido?
247	E13:	Sí.
248	Emi:	Pues entonces tú ve ejercicio a ejercicio,
249		pasito a pasito, si tu vas viendo que vas entendiendo
250		paso a pasito, pues entonces ya luego entiendes todo ¿no?
251		Hoy vamos a ver los determinantes,
252		entonces tenemos que volver al inicio, recordáis que os dije...
253	E15:	Emi tenemos que corregir un ejercicio.
254	Emi:	¿Qué ejercicio teníamos que corregir?
255	E4:	Unos de matrices.
256	Emi:	Los de ecuaciones matriciales,
257		bueno, pues
258		¿me permiten que meta primero determinantes y luego ya corregimos?
259		Porque con los determinantes vamos a poder calcular la matriz inversa
260		de forma más rápida y les va a ayudar a resolver los ejercicios.
261		Como os decía antes,
262		empezamos el álgebra estudiando las ecuaciones algebraicas,
263		es decir, hace casi cuatro mil años que los hombres,
264		habían ya matemáticos que eran capaces de resolver ecuaciones
265		y durante muchos siglos muchos matemáticos estudiaron las ecuaciones,
266		nosotros también sabemos resolver ecuaciones
267		pero que sabéis que las ecuaciones también son un tema,
268		una parte de las matemáticas que se ha estudiado desde siempre
269		y que las han resuelto desde hace cuatro mil años,
270		solamente que a partir del siglo XVIII es cuando cambia el tratamiento
271		para resolver,
272		para enfrentarse a estas ecuaciones
273		y un tratamiento novedoso es el de utilizar las matrices,
274		como estamos viendo ahora que aplicaremos
275		cuando veamos los sistemas de matrices.
276	E12:	[E12 está causando desorden].
277	Emi:	¿Qué pasa E12?
278	Es:	[Callados].
279	Emi:	Un método novedoso al que se le está bautizando,
280		es el método en las matrices,
281		pero las matrices no surgieron primero,
282		sino surgieron después de los determinantes,
283		entonces vamos a ver hoy los determinantes,
284		para qué sirven,

285		sobre todo y en qué contextos se aplican
286		Entonces, determinante de una matriz cuadrada.
287		Las matrices que no sean cuadradas no van a tener determinantes.
288		No voy a dar la definición,
289		Porque dar la definición para el caso general
290		es una definición no complicada,
291		pero si tienen que tener unos conocimientos previos de permutaciones
292		y de los estudios de permutaciones que vosotros no conocéis,
293		entonces me voy a saltar toda la definición
294		y simplemente nos vamos a quedar con esta idea,
295		si yo tengo una matriz cuadrada A,
296		a esta matriz le voy a asociar un número,
297		una matriz cuadrada va a tener asociado un número,
298		un número que lo voy a llamar determinante de la matriz y
299		¿cómo lo voy a representar?
300		Pues como la matriz A entre barras [A]
301		¿Cómo se va a calcular ese número?
302		Pues no a través de la definición, que no conocéis.
303		Sino a través de un cálculo muy sencillo,
304		como solamente vamos a manejar matrices cuadradas
305		de orden dos y de orden tres,
306		los métodos que existen para calcular el determinante,
307		que son varios,
308		nos dan el valor del determinante de la matriz de forma rápida y sencilla,
309		pero yo sólo les voy a explicar uno,
310		hay varios pero sólo voy a explicar uno.
311		Bueno un método para calcular el determinante,
312		si yo tengo una matriz cuadrada de orden dos
313		por ejemplo con elementos a y b [en la primera fila]
314		y c y d [en la segunda fila].
315		¿Cómo se calcula el determinante de esta matriz?,
316		¿Cuáles son los elementos de la diagonal principal?
317		a y d
318		¿Tiene otra diagonal la matriz?
319		¿Distinta de la principal?
320	E5:	b y c.
321	Emi:	Pues se multiplican los elementos en diagonal y se resta ese producto,
322		empezamos con el producto de la diagonal principal,
323		entonces sería a por d menos b por c,
324		pues así calcularíamos
325		el determinante de una matriz cuadrada de orden dos.
326		Entonces el determinante de la matriz 1, 2 [en la primera fila]
327		y 3, 4 [en la segunda fila]
328		¿Cuánto valdría?
329		El determinante de la matriz cuadrada cuyos elementos son 1,2; 3, 4.
330		Son 1 por 4, 4 menos 2 por 3, 6, luego 4 menos 6, menos 2,
331		entonces esto es el determinante.
332	E13:	¿Y entonces ahí ya no se hace más nada?

333	Emi:	Si solamente me piden calcular el determinante de la matriz,
334		pues ese es el valor del determinante.
335		Es un método muy elemental,
336		lo hemos visto para matrices de orden dos.
337		Para las matrices de orden tres,
338		si tenemos una matriz, a, b, c [en la primera fila];
339		d, e, f [en la segunda fila];
340		g, h, i [en la tercera fila].
341		Podía haber puesto como siempre ponemos con los subíndices,
342		a uno uno, a uno dos, etc.
343		Pero para no escribir con tantos subíndices lo ponemos así,
344		entonces el método que os voy a explicar
345		para calcular el determinante cuando la matriz es más grande,
346		cuando es de orden tres,
347		se llama método de Sarrus,
348		entonces es un método bastante gráfico, visual
349		y nos fijamos como antes, en las diagonales.
350		¿Cuál es la diagonal principal de la matriz?
351	E5:	a,e,i.
352	Emi:	Muy bien [Emi señala esa diagonal],
353		luego trazamos las diagonales secundarias
354		con la misma inclinación [hacia abajo], serían b, f y d, h.
355		Decíamos que en las matrices cuadradas de orden dos,
356		hacíamos productos de dos elementos, vale.
357		Aquí en las de orden tres van a ser productos de tres,
358		entonces la diagonal principal no tiene problemas,
359		ya tiene a sus tres elementos [a, e, i].
360		¿Qué pasa con las otras dos diagonales? [b, f y d, h].
361		Son más pequeñas y sólo tienen dos elementos,
362		¿Cuál es el elemento que le añadimos para completar?
363		Pues habría dos opciones,
364		pero se hace mediante un triángulo,
365		trazamos este triángulo por un lado [con vértices b, f y g].
366		Y este otro triángulo con el otro [con vértices d, h y c].
367		Entonces voy a borrar las letras y voy a poner puntos,
368		[Emi intenta hacerlo más visual y escribe la matriz formada por
369		nueve puntos, tres en cada una de las tres filas]
370		¿de acuerdo?
371		Entonces primer producto,
372		la diagonal principal,
373		segundo la diagonal que va por encima con el elemento
374		más alejado de ella, que está solo, ¿de acuerdo?
375		¿Cuáles faltan por considerar, con la misma inclinación?
376		Esta la que está por debajo de la diagonal principal por el elemento
377		que está más alejado y formamos el otro triángulo.
378		Por un lado esta, estos productos,
379		ahora a esos productos les vamos a restar lo mismo,
380		los productos justo con la orientación contraria

381		[Emi escribe nuevamente una matriz con nueve puntos, tres en cada fila].
382		Si la diagonal principal está inclinada hacia la izquierda,
383		ahora cómo sería,
384		pues la diagonal inclinada a la derecha que sería esta
385		[la correspondiente a g, e y c],
386		Entonces multiplicamos estos tres elementos,
387		¿Cuáles son las diagonales que nos quedan con esa inclinación?
388		Pues ésta y ésta [correspondientes a h, f y d, b]
389		Ahora los elementos para multiplicar estos dos [correspondientes a d, b]
390		¿cuál será?
391		Los multiplico por el de abajo,
392		Por este [correspondiente a i]
393		Y estos dos [h, f] por el de arriba [correspondiente a a].
394	E3:	Pero ¿estás y estás? [E3 se refiere a los productos de la primera
395		orientación y los de la segunda].
396	Emi:	A los productos de la primera se le restan los de la segunda.
397	E3:	¿Pero entre los productos de cada una?
398	Emi:	Se suman y después las restamos.
399		Vamos a verlo con números.
400		Por ejemplo, vamos a poner una matriz cuadrada de orden tres
401		con elementos,
402		1,2,0 [en la primera fila];
403		-1,1,3 [en la segunda fila];
404		0,2,1 [en la tercera fila].
405		Intentad hacerlo por favor,
406		E9 trata de hacerla [Emi se acerca al lugar de E9 para ayudarlo].
407		[Le vuelve a explicar el método a E9 en su cuaderno].
408		¿Lo tenéis ya hecho?
409		[Emi observa que hay confusión en el método con algunos estudiantes].
410		Mira E1, diagonal principal multiplica todos los elementos, 1 por 1 por 1
411	E1:	1.
412	Emi:	1 más, bueno seguimos con esta inclinación,
413		siempre con esta inclinación con las otras diagonales con esa inclinación,
414		ahora vamos por la que está encima [de la diagonal principal].
415		Multiplicamos 2 por 3, pero necesitamos otro elemento,
416		¿cuál tomamos?
417		Pues el 0, entonces 2 por 3, 6 por 0, es 0, entonces más 0, más...
418		Y ahora nos vamos a la otra diagonal, que es ésta
419		[la que está por debajo de la diagonal principal].
420		Sería -1 por 2 y nos falta un elemento,
421		tomamos el más alejado que en este caso es 0.
422		Entonces -1 por 2 son -2, por 0 es 0, entonces más 0, vale,
423		esto es la primera parte
424		[el producto de las diagonales tomando tres elementos
425		con orientación hacia abajo].
426		Entonces esto menos
427		Ahora vamos a hacer lo mismo pero con la orientación contraria,
428		ahora en lugar de tomar las diagonales inclinadas a la izquierda

429		[hacia abajo],
430		serán las diagonales a la derecha.
431		A la derecha la diagonal es ésta [la diagonal opuesta a la principal].
432		Si multiplicamos 0 por 1 por 0, es 0
433		[Emi lo anota donde va escribiendo los resultados de los productos
434		de las diagonales].
435		Y ahora 2 por -1 y tomaría el 1 que es el que está más alejado,
436		sería 2 por -1, es -2 por 1 es -2
437		[Emi lo anota donde va escribiendo los resultados
438		de los productos de las diagonales].
439		¿Y ahora cuál nos queda?
440		Si seguimos con esa inclinación,
441		ahora cogemos la otra diagonal que nos queda,
442		2 por 3, son 6 por el otro asociado que es 1 entonces 6 por 1 son 6
443		[Emi lo anota donde va escribiendo los resultados de los productos
444		de las diagonales].
445		Entonces vamos a hacer las sumas,
446		de la primera parte $[1+0+0]$ nos queda 1
447		Menos la segunda parte $[0-2+6]$,
448		Entonces 1 y el menos con -2 es +2 y luego -6,
449		tenemos $1+2-6$ que es -3,
450		ese número es el valor del determinante de la matriz, vale.
451		[Emi se acerca al lugar de E3 para explicarle una duda
452		sobre un número que no le daba igual al resultado anotado en la pizarra]
453		[Interrupción sobre un asunto de la secretaría,
454		firmar un documento de proveedores].
455		[Emi regresa a la pizarra] entonces se van haciendo los productos
456		y sólo vamos anotando los sumandos eh.
457	E13:	Yo es que me he liado con los signos.
458	Emi:	¿Qué signos?
459	E13:	Por qué ahí está ese -6
460		[En los resultados de los productos de la segunda parte].
461	Emi:	Es que he quitado el menos y el paréntesis $[(1+0+0)-(0-2+6)]$.
462	E1:	Pero es que yo tengo 1 -4.
463	Emi:	A bueno ustedes preferís eso, pues muy bien,
464		vale 1-4 [haciendo la operación $[(1+0+0)-(0-2+6)]$].
465		Bien, ¿así mejor?
466	Es:	Sí.
467	E13:	Así es más fácil.
468	Emi:	Vale.
469		Bueno, ¿para qué se utiliza esto de los determinantes?
470		Pues en principio para dos cosas distintas.
471	E3:	¿Y si tenemos una matriz de orden 4?
472	Emi:	Si es una matriz de orden cuatro ya hay que buscar otro método
473		porque en ese caso no nos sirve la regla de Sarrus.
474		Bueno entonces tenemos que si el determinante de una matriz A
475		es diferente de 0 entonces existe la matriz inversa de A.
476		Esta propiedad que tampoco vamos a demostrar es muy útil

477		para saber cuándo una matriz tiene inversa o no.
478		Una matriz cuadrada tendrá inversa sólo en el caso en el que
479		el determinante sea distinto de 0
480		pero si sabemos que una matriz tiene inversa,
481		sabemos también que su determinante es distinto de 0.
482		Bueno hay una manera de calcular la inversa utilizando determinantes.
483		Entonces vamos a ver un método para calcular la matriz inversa
484		con determinantes.
485		Conocemos el método de Gauss-Jordán pero es un método,
486		seguro, fácil, simple y elegante, pero se tarda un poquito.
487		Este método es más rápido.
488	E13:	¿Cuál es más rápido?
489	Emi:	Este [usando determinantes].
490		Entonces vosotros elegís el método que os parezca mejor,
491		entonces para encontrar la inversa, usad el que más os guste.
492		Entonces vamos a usar la matriz que ya tenemos,
493		el determinante ¿cuánto nos ha salido?
494		-3
495		Y entonces vamos a calcular la inversa.
496		Primero vamos a aprender cómo se hace la matriz adjunta,
497		la fórmula es esta.
498		A a la menos uno es uno partido por el determinante de A,
499		por la adjunta de A traspuesta.
500	Es:	¡Aaahhhhuu! [sorprendidos por la fórmula].
501		[Risas].
502	Emi:	Entonces esta fórmula tampoco la vamos a deducir,
503		la vamos a utilizar.
504		Esto que parece tan feo de los adjuntos,
505		pues no lo es tanto como parece,
506		vamos a ver qué es el menor complementario de un elemento.
507		En una matriz cuadrada el menor complementario de un elemento
508		es el valor del determinante,
509		que resulta de eliminar la fila y la columna de donde está situado
510		el elemento.
511	Es:	¡Eh!, ¿qué?
512	Emi:	Vamos a hallar el menor complementario del elemento a uno uno,
513		del que está en la primera fila y primera columna.
514		Entonces en una matriz tenemos a uno uno, a uno dos, a uno tres
515		[en la primera fila],
516		a dos uno, a dos dos, a dos tres [en la segunda fila]
517		y a tres uno, a tres dos y a tres tres [en la tercera fila].
518		Si yo elimino la fila y la columna de donde está situado
519		el elemento a uno uno,
520		si elimino la fila uno y la columna uno,
521		¿De qué orden es la matriz que me queda?
522	E1:	Una matriz cuadrada.
523	Emi:	Si una matriz cuadrada de orden dos.
524		¿Cuánto vale el determinante de esta matriz cuadrada? [de 2x2]

525		¿Cómo lo calculo?
526		Multiplicando una diagonal [principal] menos la otra [secundaria].
527		Pues ese es el menor complementario para ese elemento.
528		En esta matriz [la de 3x3].
529		¿Cuál es el menor complementario del primer elemento,
530		que está en la primera fila y primera columna?
531		Eliminando fila y columna nos queda esta de aquí
532		[1 y 3 en la primera fila y 2 y 1 en la segunda],
533		entonces 1 por 1, es 1 menos 2 por 3 que son 6, nos quedan -5.
534		Pues el menor complementario de ese elemento
535		[El de la primera fila primera columna] es -5.
536	E3:	¿Y los números que quedan? [los números de la matriz que faltan].
537	Emi:	No, vamos a ver ahora,
538		voy a poner una matriz con los menores complementarios,
539		fijaros que el determinante de la matriz de orden 3x3
540		lo hemos calculado con la regla de Sarrus
541		y nos ha salido que el determinante de esta matriz es -3.
542		Ahora estamos calculando los menores complementarios.
543		Entonces vamos a poner en una matriz todos
544		los menores complementarios,
545		el del 1 [que es el elemento de la primera fila y primera columna],
546		hemos dicho que es -5 [Emi lo anota en esta nueva matriz de menores
547		cuadrados, en la posición de la primera fila y primera columna].
548		[Emi se acerca a E9 y le pide que copie la matriz en su cuaderno].
549		E9 abajo vamos a poner una matriz donde vamos a ir poniendo
550		los menores complementarios
551		[Emi regresa a la pizarra].
552		Entonces vamos a encontrar el menor complementario
553		del siguiente elemento,
554		del elemento que está en la primera fila y segunda columna,
555		¿Cuál es su menor complementario?
556		¿Qué tenemos que eliminar?
557	E4:	Pues la primera fila y la segunda columna.
558	Emi:	Muy bien primera fila y segunda columna, entonces ¿qué nos queda?
559		-1 por 1 es -1 y 0 por 3 que es 0,
560		entonces -1 menos 0 es -1
561		[Emi calcula el determinante de la matriz de orden 2x2
562		que quedo de eliminar dicha fila y columna].
563	E13:	A vale.
564	Emi:	Entonces el menor complementario es -1.
565	E13:	Pero a ver, ¿por qué se ha eliminado esa fila?
566		[la fila eliminada para calcular este menor complementario].
567	Emi:	A ver porque yo voy calculando los menores complementarios
568		de cada elemento.
569		Entonces, para el primer elemento
570		[de la posición primera fila y primera columna],
571		¿qué he eliminado?
572		Su fila y su columna.

573		Entonces si ahora lo hago para este elemento
574		[de la primera fila y segunda columna],
575		elimino su fila y su columna.
576		Entonces elimino la fila y la columna del elemento de donde esté situado
577		el elemento del cual quiero calcular su menor complementario.
578		Si ahora voy con el elemento de la primera fila tercera columna,
579		eliminamos la fila primera y la tercera columna,
580		nos queda este determinante
581		$[-1 \text{ y } 1 \text{ en la primera fila y } 0 \text{ y } 2 \text{ en la segunda}]$.
582		Entonces $-1 \text{ por } 2 \text{ es } -2 \text{ menos } 0 \text{ por } 1 \text{ que es } 0$,
583		entonces eso nos da -2 .
584		[Emi lo anota en la matriz de menores cuadrados en la posición uno tres]
585		Seguimos con la siguiente fila, primer elemento,
586		el -1 , ¿cuál es su menor complementario?
587		Eliminamos columna y fila y ¿qué nos queda?
588		$2 \text{ por } 1 \text{ y } 2 \text{ por } 0$, luego $2 \text{ menos } 0 \text{ es } 2$
589		[Emi lo anota en la matriz de menores cuadrados en la posición dos uno]
590		Ahora seguimos, la del 1 [de la segunda fila segunda columna]
591		$1 \text{ por } 1, 1 \text{ y } 0 \text{ por } 0 \text{ es } 0$, entonces $1 \text{ menos } 0 \text{ es } 1$
592		[Emi lo anota en la matriz de menores cuadrados en la posición dos dos]
593		Seguimos, para el 3 [de la segunda fila tercera columna],
594		es $1 \text{ por } 2 \text{ y } 0 \text{ por } 2$, es 2 .
595		[Emi lo anota en la matriz de menores cuadrados en la posición dos tres]
596		Ahora la otra [última fila] para el 0 [de la tercera fila primera columna],
597		sería $2 \text{ por } 3 \text{ y } 1 \text{ por } 0$, son $6 \text{ menos } 0 \text{ son...}$
598	E5:	6.
599	Emi:	6 [Emi lo anota en la matriz de menores cuadrados
600		en la posición tres uno].
601		Ahora para el 2 [de la tercera fila segunda columna],
602		sería $1 \text{ por } 3 \text{ y } -1 \text{ por } 0$, son $3 \text{ menos } 0 \text{ son...}$
603		¿Cuánto es?
604	Es:	3.
605	Emi:	Muy bien, 3
606		[Emi lo anota en la matriz de menores cuadrados en la posición tres dos]
607		¿Y el último? [el 1 de la tercera fila tercera columna],
608		sería $1 \text{ por } 1 \text{ y } -1 \text{ por } 2$, $1 \text{ por } 1 \text{ es...}$
609	Es:	1.
610	Emi:	Muy bien ahora, son $1 \text{ menos } -1 \text{ por } 2$.
611	E13:	Es que yo ahí es donde me lío [donde tiene dificultad].
612	Emi:	Bueno vamos a hacerlo a aparte [ese determinante de 2×2].
613		[Emi anota los elementos del determinante, 1 y 2 en la primera fila
614		y $-1 \text{ y } 1 \text{ en la segunda}]$.
615		Entonces para calcular este determinante sería $1 \text{ por } 1$,
616		que es la diagonal principal, 1,
617		ahora menos la otra diagonal que es $2 \text{ por } -1$.
618		Entonces ¿cuánto es $1 \text{ por } 1$?
619	Es:	1.
620	Emi:	Ahora menos por menos más 2 [la operación es $-(2)(-1)$].

621		Entonces la operación completa es 1 más 2 son 3.
622		El menor cuadrado es 3
623		[Emi lo anota en la matriz de menores cuadrados en la posición tres tres].
624	Es:	A vale.
625	Emi:	Bueno entonces siguiendo con la fórmula
626		[para calcular la inversa con determinantes].
627		Vamos a calcular la adjunta.
628		Entonces ahora vamos a hallar los..., de esta matriz [de la de 3x3],
629		los adjuntos.
630		Entonces vamos a buscar una nueva matriz que será la de los adjuntos.
631	E3:	Entonces los que encontramos ¿cómo se llaman?
632	Emi:	Esos son los menores complementarios.
633	E5:	Pero entonces esos ¿a qué equivalen en la fórmula?
634	Emi:	Si ahora te lo voy a decir [pues es lo que dirá Emi enseguida].
635		Bueno para los adjuntos vamos a poner esto
636		más, menos, más [en la primera fila],
637		menos, más y menos [en la segunda fila]
638		y más, menos, más [en la tercera fila].
639		¿Cómo se ponen los signos que he escrito?
640		¿Qué regla estoy siguiendo?
641	E3:	Más, menos, más.
642	Emi:	[Emi sonríe], empiezo con más.
643	Es:	[Risas].
644	Emi:	Esto se llama alternancia de signos.
645		Vamos alternando ¿no?
646		Si voy a la derecha, a la izquierda, arriba o abajo,
647		siempre se alternan los signos.
648	E4:	Menos las diagonales.
649	Emi:	Exactamente menos las diagonales.
650		Entonces,
651		¿qué tiene que ver esto con la de los menores complementarios?
652		como preguntaba E5.
653		Bueno pues ahora en esta matriz de los signos,
654		pongo los menores complementarios.
655		Entonces en la matriz [nueva] me quedaría -5,
656		cuál sería el segundo elemento,
657		cómo quedaría si teníamos en la matriz de menores cuadrados -1
658		y ahora en la matriz de signos hay un menos.
659	E1:	Pues 1.
660	Emi:	Muy bien ahora el segundo elemento [de la posición uno dos] es 1,
661		siguiente elemento,
662		si teníamos -2 y en la matriz de signos hay un más, ¿qué nos queda?
663	Es:	-2.
664	E13:	Yo ya me he liado eh.
665	Emi:	A ver E13, [Emi va a explicarle nuevamente el procedimiento].
666	E13:	Ah, ya, ya [no es necesaria la explicación de Emi].
667	Emi:	Pues ahora el siguiente [de la posición dos uno] es 2 pero en la matriz
668		de signos hay un menos entonces nos queda -2,

669		luego es 1 [de la posición dos dos], luego -2 [son los de la segunda fila],
670		y luego 6, -3 y 3 [así queda la tercera fila].
671		Pues esta es la matriz de los adjuntos
672		[-5, 1, -2 en la primera fila; -2, 1, -2 en la segunda fila;
673		6, -3, 3 en la tercera fila].
674		¿recordáis cuál es la fórmula para la inversa?
675	E5:	Hay que trasponerla.
676	Emi:	Exacto.
677	E2:	Hay que trasponerla y se multiplica por ésta [adjuntos], ¿no?
678	Emi:	Se multiplica por uno partido por el determinante.
679	E2:	A vale.
680	Emi:	Entonces si trasponemos.
681	E7:	-5.
682	Emi:	-5, 1, -2 [en la primera columna], -2,1,-2 [en la segunda columna]
683		y 6, -3, 3 [en la tercera columna].
684		Bien pues ahora hay que multiplicar,
685		pues la fórmula es A a la menos igual a 1 partido por el determinante
686		de A y eso multiplicado por la Adjunta de A, traspuesta.
687		Entonces la Adjunta de A, traspuesta es esta última.
688		¿Cuánto valía el determinante de A?
689	E1:	-3.
690	Emi:	El determinante era -3.
691		Entonces tenemos que multiplicar menos un tercio por esta última matriz
692		[Adjunta de A, traspuesta],
693		eso es lo que hay que hacer.
694		Entonces ¿qué matriz nos queda?
695		La pongo aquí -5 tercios, 2 tercios y -2 [en la primera fila],
696		luego -1 tercio, -1 tercio y 1 [en la segunda fila] ,
697		luego 2 tercios, 2 tercios y -1 [en la tercera fila].
698		Bueno pues esta última es la inversa [matriz inversa de la matriz A].
699	E2:	Pues a mi se me hace más fácil el método de Gauss
700		[al ver este método con determinantes por primera vez].
701	Emi:	Entonces, fijaros que yo les he escrito el proceso por separado
702		todos los pasos, pero se puede hacer todo en una.
703	Es:	¡Todo en una!
704	E3:	¡Cómo sería!
705	Es:	[Risas].
706	Emi:	Podemos pasar por lo menos de la A a la traspuesta de la Adjunta,
707		se puede hacer mentalmente en un solo paso.
708	E1:	¿Pero sino lo podemos hacer mentalmente?
709	Emi:	Pues quien quiera puede hacerlo por pasos.
710	E5:	[E5 trata de convencer a E1 para que lo intente mentalmente].
711	Emi:	¿Cómo se hace en un solo paso?
712	E4:	Bueno pero el determinante ya lo habíamos sacado.
713	Emi:	Si el determinante ya lo habíamos calculado.
714		¿Este método es más corto o más largo?
715	E4:	Es más largo pero...
716	Emi:	Bueno es más largo porque lo he desglosado en pasos

717		pues como os he dicho,
718		se puede pasar de la matriz A a la traspuesta de la Adjunta directamente.
719	E3:	Pues enseñanos el truco.
720	Emi:	Pues el truco...
721		Bueno voy a cambiar de matriz [poner un nuevo ejemplo].
722		Bueno hoy con esta porque como ya no me va a dar tiempo,
723		a ver ¿os digo cómo se hace directamente?
724	Es:	Si.
725	Emi:	Bueno hay que hacer todo despacio pero
726		haciendo los cálculos mentalmente, ¿vale?
727		Entonces ya sobre la matriz A pongo yo los signos, vale,
728		[Emi los anota pequeños al lado de los elementos de la matriz A].
729		Entonces ¿qué tengo que hacer mentalmente?
730		Calculo los menores complementarios de cada elemento,
731		del 1 [posición uno uno], eliminamos fila y columna
732		y hacemos el determinante de la matriz de 2x2 que queda,
733		1 por 1 es 1 y 2 por 3 son 6, 1-6 es -5, -5 vale,
734		y como va multiplicado por más pues queda -5
735		[Emi lo remarca en la matriz traspuesta de la Adjunta de A].
736		Ahora sigo con el 2 [posición uno dos en la matriz A]
737		queda -1 por 1 que es -1 [del determinante de 2x2]
738		pero como tengo un signo menos pues es 1,
739		y como tengo que trasponer,
740		si aquí voy por filas, ahora lo anoto en columnas
741		[Emi lo remarca en la matriz traspuesta de la Adjunta de A],
742		Siguiente elemento el 0 [posición uno tres en la matriz A]
743		queda -1 por 2 que es -2, como hay un más pues queda -2
744		[Emi lo remarca en la matriz traspuesta de la Adjunta de A].
745		Lo mismo para el siguiente elemento,
746		el -1 [posición dos uno en la matriz A] queda 2 por 1,
747		2 pero como hay un menos entonces es -2
748		[Emi lo remarca en la matriz traspuesta de la Adjunta de A].
749		[Se escucha el timbre indicando que ya se terminó la clase].
750		Y así lo voy haciendo para cada elemento de la matriz A
751		y es mucho más rápido.
752	E5:	Si [muy convencida].
753	Es:	[Empiezan a guardar sus cuadernos].
754	Emi:	Bueno pues para casa los de la hojita
755		[la fotocopia que les entregó hoy al inicio de la clase].

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la sexta clase grabada de la profesora Emi del viernes 17/10/08.

Resumen: Emi les proporciona materiales (fotocopias) para que hagan más ejercicios y explica el procedimiento (estrategia) para resolver un problema que les había dejado como deber para casa, luego inicia con el tema de Sistemas de Ecuaciones, tipo introducción, es decir, sólo planteamiento del problema (2 ejemplos de planteamiento del problema).

L		Transcripción
1	Emi:	[Empieza repartiendo una fotocopia donde vienen las soluciones a
2		los ejercicios anteriores y otra copia en la que vienen
3		nuevos ejercicios propuestos con matrices de 3x3].
4		Bueno he dado una hoja en la que vienen las soluciones
5		de los ejercicios con matrices,
6		entonces vienen las soluciones a los ejercicios tipo selectividad,
7		ya hemos corregido algunos pero para que los tengan todos corregidos os
8		he hecho la fotocopia con las soluciones,
9		soluciones que están detalladas, paso a paso, vale.
10		Si alguien tiene duda que las pregunte la siguiente semana eh,
11		intentad hacer los ejercicios sin mirad las soluciones,
12		si os atascan pues entonces podéis ver las soluciones ¿de acuerdo?
13		Y os voy a dar otra hoja con ejercicios.
14	E13:	¡Más!
15	Emi:	Si, esta hoja [la nueva fotocopia que les esta dando] se parece a la
16		anterior, la diferencia es que en esta hoja las matrices son más grandes,
17		aparecen matrices de orden tres, y en la otra no aparecían.
18	Es:	[Voces].
19	Emi:	A ver por favor [Emi intenta callarlos].
20		Por favor, es viernes, después del recreo, pero por favor silencio.
21		Os había dejado una tarea para casa, en la que había que enviar
22		un mensaje con una sola palabra.
23		¿Alguien lo ha hecho?
24	Es:	[Todos hablan entre ellos pero nadie responde a Emi].
25	Emi:	¿Alguien lo ha hecho?
26		A ver E12, ¿tú lo has hecho?
27	E12:	[No contesta y se pone a observar sus hojas donde ha resuelto
28		los ejercicios].
29	Emi:	[Emi se acerca para ver las hojas que está viendo E12].
30		[Después de pasar a ver lo que han hecho varios estudiantes,
31		Emi regresa a la pizarra].
32		Voy a repetir el procedimiento para resolver el problema de un mensaje
33		codificado.
34	E13:	Pero no lo vas a resolver.
35	Emi:	No, yo quiero que lo hagáis vosotros.
36	E13:	¿Aquí?
37	Emi:	No en casa.
38		Entonces voy a volver a explicar cómo se hace,
39		nos dan una hoja en la que todo el abecedario tiene asociado
40		un número asignado aleatoriamente,

41		ahora se da una matriz de encriptamiento,
42		una matriz para proteger el mensaje,
43		la protegemos todavía más [a la palabra],
44		la palabra que está ahí es la palabra protegida,
45		yo lo que quiero saber es la palabra original,
46		sino hubiera usado la matriz de encriptamiento,
47		simplemente me iría a las letras y vería el número que le correspondería,
48		pero como está protegida, ese sistema no me vale,
49		tengo que hacer un paso intermedio.
50		¿Cuál es el paso intermedio?
51		Pues por ejemplo, si la palabra cifrada consta de los números
52		1,5,10,7,23,10, cojo esos números de dos en dos y yo sé que los números
53		que busco X [(a,b)], multiplicados por esta matriz A que me dan,
54		me da como resultado (1,5) [$XA=(1,5)$ o bien $(a,b)A=(1,5)$], vale.
55		¿Cómo hallo la X [(a,b)] si conozco A?
56	E2:	Con la inversa ¿no?
57	Emi:	Claro X [(a,b)] sería igual a (1,5) por A a la menos uno.
58		Si yo tengo que A es igual a 2,1 [en la primera fila]
59		y -1,0 [en la segunda fila],
60		lo único que tengo que hacer es calcular la inversa de esta matriz A,
61		multiplicarla por (1,5) y encuentro los números originales,
62		y los números originales pues voy a la tabla
63		[donde está el alfabeto con los números aleatorios asignados a cada letra]
64		y veo en donde están las letras y los números, veo qué letras son.
65		¿De acuerdo?
66	E2:	Y luego así con los otros dos.
67	Emi:	Si así con los otros dos [(c,d) y (e,f)].
68		Y así vas descifrando la palabra ¿de acuerdo?
69		Pero quiero que lo hagáis vosotros.
70		Os he dado la hoja de soluciones de la hoja de ejercicios anteriores
71		y una hoja nueva de ejercicios.
72		El examen es la semana que viene entonces interesa que trabajéis
73		bastante las operaciones con matrices,
74		la semana que viene os daré la hoja de las soluciones de los ejercicios
75		de la hoja 2 [que son los ejercicios de una de las hojas que les dio hoy].
76		Y os daré también un modelo de examen para que vayáis preparándolo,
77		¿de acuerdo?
78		Os daré el modelo también con soluciones.
79		Lo tenéis que estudiar vosotros y haced los ejercicios vosotros.
80		Bueno voy a pasar lista porque no he pasado lista todavía
81		[Emi normalmente pasa lista al inicio de la clase].
82	E13:	Emi puedes venir un momento.
83	Emi:	[Emi se acerca al lugar de E13].
84		Le pregunta sobre el ejercicio que empezaron hoy en la clase,
85		[Emi le da un vistazo a lo que hizo E13],
86		pero tú no haz hecho la inversa [E13 mostró a Emi lo que había hecho
87		en casa sobre ese ejercicio, pero E13 aún no calcula la matriz inversa
88		de A].

89	E6:	¿Emi voy bien? [E6 muestra lo que está haciendo respecto a ese mismo
90		ejercicio].
91	Emi:	[Emi da un vistazo a lo que ha hecho E6 y le dice] Bien muy bien.
92		A ver, bueno hoy vamos a ver un tema nuevo,
93		no vendrá en el examen [de la siguiente semana].
94	E12:	Menos mal.
95	Emi:	Es el segundo tema que vamos a ver,
96		en el segundo examen si entrará todo esto.
97		Entonces, como hoy habéis hecho examen de Estadística algunos
98		de vosotros, la clase de hoy va a ser de introducción al Sistema
99		de Ecuaciones Lineales, ¿de acuerdo?
100		Recordáis cuando vimos el primer tema de matrices y en esa clase
101		os planteé un problema, ¿recordáis?
102		Porque os comenté en la introducción a las matrices,
103		que desde siempre el hombre había intentado resolver problemas,
104		¿y cómo los habían resuelto?
105		Pues por métodos distintos pero ya cuando empezaron a funcionar
106		las Matemáticas, planteando ecuaciones, ¿de acuerdo?
107		Entonces nosotros nos vamos a centrar en este tipo de problemas,
108		problemas que se plantean a través de ecuaciones lineales.
109		Entonces tenemos dos tipos de cuestiones que afrontar,
110		por un lado el planteamiento de los problemas y por otro lado
111		la resolución de los mismos.
112		Vamos a trabajar con problemas cuyo planteamiento utiliza
113		el planteamiento de sistemas de ecuaciones y después veremos
114		distintos métodos de resolución, ya conocéis algunos,
115		la clase de hoy se va a centrar en el planteamiento de los problemas.
116		Como problema clásico, he escogido para empezar la clase de hoy, un
117		problema que se llama: “El problema de los bueyes” y os lo voy a leer.
118		Dice 75 bueyes necesitan 12 días para comerse un prado de 60 áreas,
119		81 bueyes consumen en 15 días la hierba de un prado de 72 áreas
120		¿Cuántos bueyes se precisan para que coman un prado de 96 áreas
121		en 18 días?
122		Muy bien, ¿por qué he elegido este problema?
123		He elegido este problema porque ya 200 años a. de c.
124	E13:	¿Tantos?
125	Es:	[Risas].
126	Emi:	Si, este problema, he querido empezar con un problema histórico,
127		este problema se ha modernizado un poco pero,
128		se hace referencia a este problema ya en la Odisea de Homero, eh,
129		hay un párrafo en el que se dice:
130		“Entonces llegarás a la isla de Trinaquia, donde en gran número
131		pacen bueyes y gruesas ovejas del dios sol”.
132		Entonces en esta obra de Homero hace referencia a esta Isla
133		donde aparecen los bueyes, también las ovejas,
134		bueno pues resulta que Arquímedes que vivió en el siglo III a. de c.
135		y que como sabéis fue un gran físico, matemático, mecánico, inventor...
136	E3:	De todo.

137	Es:	[Risas].
138	Emi:	¿Dónde nació Arquímedes? ¿Sabéis dónde nació Arquímedes?
139	E13:	En Grecia.
140	Emi:	Si era griego, pero nació en la Isla de Sicilia en Siracusa,
141		pero entonces en la época pertenecía a los griegos,
142		bueno pues este Arquímedes que todos conocemos estudió en una ciudad
143		llamada Alejandría, esta ciudad ¿saben dónde estaba?, en el norte de
144		África. Y en esta ciudad se encontraba otro gran sabio que se llamaba
145		Eratóstenes, Eratóstenes había nacido en Cirene, se conoce como
146		Eratóstenes de Cirene, pero él estuvo trabajando en Alejandría,
147		donde conoció a Arquímedes y Arquímedes le planteó este problema,
148		de hecho, incluso, Arquímedes le dedicó el libro en el que escribió
149		el método y le mandó a Eratóstenes el problema llamado
150		“El problema de los bueyes” para que lo difundieran entre
151		los matemáticos de la ciudad de Alejandría.
152		Nosotros, ¿cómo lo vamos a resolver?
153		Pues primero, para comprender el enunciado, nos hablan de bueyes ¿no?,
154		y de prados de distintas dimensiones, hacen referencia a la superficie
155		de los prados, ¿en qué unidades está la superficie? En áreas.
156		¿Sabéis lo que es un área?, ¿recordáis?
157		Es lo mismo que el decámetro cuadrado, es decir, cien metros cuadrados,
158		cada área son cien metros cuadrados, entonces nos hablan de distintos
159		prados de distintas extensiones y nos dicen que esos prados tienen
160		hierba, la hierba crece ¿no?
161		Y a lo largo de unos días, ¿qué nos dan como dato?
162		Pues que al cabo de unos días, los bueyes agotan la hierba del prado
163		¿Cómo podemos plantear el problema?
164		Pues tenemos que tener claras cuáles son las incógnitas,
165		entonces como lo he leído muy rápido y quisiera que os enteréis bien
166		había hecho unas fotocopias para entregároslas...,
167		haber si las encuentro [Emi busca en su portafolio esas fotocopias].
168		[Mientras Emi las busca dice] Este problema es curioso porque tenemos
169		la superficie, los días, los bueyes, la hierba que crece.
170		[Emi sigue buscando las fotocopias].
171		Bueno pues me parece que lo tendréis que copiar a mano.
172		No he encontrado esas fotocopias, ¿podéis copiar los datos a mano
173		entonces?
174		A ver 75 bueyes necesitan 12 días [Emi va diciendo esto para que los
175		estudiantes lo anoten].
176		[Emi repite] 75 bueyes necesitan 12 días para comerse toda la hierba
177		de un prado de 60 áreas.
178	E13:	¿Que necesitan qué?
179	Emi:	Bueno no es necesario que escriban todo, sólo que cojáis los datos.
180		75 bueyes necesitan 12 días para comerse toda la hierba de un prado
181		de 60 áreas.
182		Entonces ponemos [Emi lo escribe en la pizarra] 75 bueyes, 12 días,
183		60 áreas.
184		Como nos dicen [en el siguiente dato] 81 bueyes consumen en 15 días

185		la hierba de un prado de 72 áreas,
186		entonces sería 81 bueyes, 15 días, 72 áreas.
187		¿Cuántos bueyes se precisan para comer la hierba de un prado de 96
188		áreas en 18 días?
189	E3:	¿De cuántas áreas?
190	Emi:	De 96 [y Emi señala ese dato que ya está escrito en la pizarra].
191		Entonces como en todo problema es fundamental la comprensión
192		del enunciado, una vez que hayamos comprendido el enunciado,
193		el siguiente paso es el de pensar cuáles son las incógnitas
194		que vamos a emplear para plantear las ecuaciones,
195		pero aquí primero tenemos que pensar en qué es lo que vamos a igualar,
196		entonces, ¿qué datos tenemos?, en todos los casos nos hablan de una
197		cantidad total de hierba que se comen los bueyes, ¿no?
198		Pues vamos a plantear las ecuaciones teniendo en cuenta ese dato,
199		que los bueyes acaban con toda la hierba del prado y tenemos que pensar
200		en qué cantidad de hierba se comen los bueyes,
201		entonces os voy a dar una ayuda,
202		yo os voy a dar en este caso cuáles son las incógnitas necesarias
203		para el planteamiento de las ecuaciones entonces,
204		la primera sugerencia que os doy es que utilizéis la x para la altura inicial
205		de la hierba, la y para la altura que crece la hierba por día
206		y la z para el número de bueyes pedido.
207		[Emi lo anota en la pizarra].
208	E13:	¿Y z qué?
209	Emi:	El número de bueyes pedido.
210		Como veis es bastante original el problema,
211		porque claro primero hay que partir de un supuesto, que los prados...
212	E3:	Son verdes.
213	Es:	[Risas].
214	Emi:	Que los prados tienen hierba, que hay una altura inicial para la hierba
215		y que la hierba crece a lo largo de los días,
216		entonces ese ritmo de crecimiento de la hierba se va a suponer
217		que es constante.
218		Entonces, para plantear las ecuaciones,
219		pues lo que vamos a hacer es igualar lo que comen los bueyes
220		en esos campos, entonces la cantidad de hierba total...
221		¿Podéis intentad plantear las ecuaciones?
222		Lo que comen los bueyes durante los días que se indican que
223		comen toda la hierba, la cantidad total.
224	Es:	[Hablando entre ellos tratando de hacer lo que les indicó Emi].
225	Emi:	Los problemas que plantearemos y resolveremos en clase no serán
226		de este tipo.
227		Lo he elegido para que veáis que los que nosotros haremos,
228		nosotros nos vamos a dedicar a unos problemas que van a ser mucho
229		más sencillos.
230	E2:	No podría ser $12x$ más y igual a 60, ah no a ver...
231	Emi:	Vamos a ver.
232	E2:	$x+12y=...$ [silencio].

233	Emi:	Vamos a ver, ¿qué cantidad de hierba habrá en el prado?
234		Vamos a empezar por ahí.
235	E2:	Pues x más el número de días.
236	Es:	[Haciendo desorden].
237	Emi:	¿Podemos centrarnos en el problema?
238		A ver, lo que estaba diciendo E2 va a conducirnos a la solución,
239		eso forma parte del planteamiento.
240		Vamos a ver qué cantidad de hierba hay en cada prado ¿no?
241		Entonces la cantidad de hierba en cada prado.
242		Pues si la hierba, la altura inicial es x, pues será x más,
243		a ver primero vamos a poner primer prado,
244		¿qué cantidad de hierba se comen los bueyes ahí?
245		$x+12y$.
246	E2:	Igual...
247	Emi:	Pero eso sería respecto a una hierba ¿no?,
248		¿qué superficie tiene el prado?
249	E2:	60 áreas.
250	Emi:	Entonces eso $[x+12y]$ lo multiplico por 60 [áreas],
251		eso nos daría la cantidad.
252	E2:	Pero, ¿no tenemos que convertir esas áreas?
253	Emi:	No, siempre y cuando usemos las mismas unidades en todas
254		las ecuaciones, no tenemos porque convertirlas.
255		El segundo prado.
256	E2:	$x+15y$ todo por 72.
257	Emi:	Vamos a pensar en la parte sencilla,
258		en la parte que E2 ha estado pensando,
259		[Emi voltea a ver al grupo y les pregunta].
260		En el segundo prado ¿qué cantidad tendremos si ya tenemos la
261		del primer prado?
262	E2:	Pues $(x+15y)$ por 72.
263	Emi:	Entonces la cantidad de hierba total que se comen los bueyes
264		en el segundo prado es x más 15y por 72 $[(x+15y)72]$.
265		¿Conformes?
266		¿Y en el tercer prado qué tendremos?
267	E2:	Pues $(x+18y)$ por 96.
268	Emi:	Bien pues ya tenemos la cantidad total de la hierba en cada uno
269		de los prados eh.
270		¿Quiénes se comen la hierba?
271	Es:	Los bueyes.
272	Emi:	Pero, ¿en cuántos días?
273	E2:	En 12 días, ...
274	Emi:	Eso ya está aquí [Emi indica la parte de las ecuaciones donde aparece
275		12y, 15y y 18y].
276		[Emi voltea a ver a E2 y le pregunta] ¿Entonces?
277	E2:	Pues hay que buscar z.
278	Emi:	Bueno pero antes de buscar z,
279		¿esa hierba quiénes se la comen?
280	Es:	Los bueyes.

281	Emi:	¿Pero en cuántos días?
282		En el segundo prado se cambia de hierba, ¿cuántos días?
283	E2:	15.
284	Emi:	Y, ¿en el tercer prado?
285	E2:	18.
286	Emi:	¿Cuántas ecuaciones vamos a tener ahí?
287		Estamos hablando de tres prados,
288		entonces, ¿cuántas ecuaciones vamos a utilizar en el planteamiento?
289	E2:	Tres.
290	Emi:	Pues tres ecuaciones, en cada prado igualamos lo que come cada buey
291		por cada uno de los días.
292		Entonces, ¿qué tendríamos?
293	E2:	Pues 75 por 12 igual a x más 12y por 60 [$75 \cdot 12 = (x + 12y)60$].
294	Emi:	Y, ¿en el segundo prado qué tendríamos?
295	E2:	81 por 15 igual a x más 15y por 72 [$81 \cdot 15 = (x + 15y)72$].
296	Emi:	Y, ¿en el tercer prado?
297	E2:	z por 18 igual a x más 18y por 96 [$z \cdot 18 = (x + 18y)96$].
298	Emi:	Entonces ya tenemos las tres ecuaciones.
299		Son tres ecuaciones con tres incógnitas,
300		la x, la y y la z, y estas ecuaciones se llaman lineales.
301		¿Por qué se llaman lineales?
302		Porque el exponente que aparece en cada una de nuestras incógnitas
303		[x, y, z] es 1.
304		Sólo en las expresiones algebraicas tenemos productos pero no hay
305		de orden dos, es decir, no habrá exponentes mayores que uno.
306		¿Cómo solucionarías este problema?
307		Aunque no lo vamos a hacer ahora pero,
308		¿cómo se os ocurriría resolverlo?
309		¿Qué observáis en las primeras dos ecuaciones?
310	E3:	Que sólo tenemos dos incógnitas.
311	Emi:	Exactamente en las primeras dos ecuaciones sólo tenemos dos incógnitas
312		¿Vosotros sabéis resolver sistemas con dos ecuaciones y dos incógnitas?
313		Si verdad, ¿qué métodos conocéis?
314	Es:	De reducción, de sustitución...
315	Emi:	Exactamente, vosotros ya conocéis métodos para resolver ese sistema
316		de estas dos ecuaciones [las dos primeras],
317		y cualquiera que uséis,
318		luego que encontréis los valores de x y y los sustituís en la tercera
319		y encontraréis el valor de la z, ¿de acuerdo?
320		Nosotros no vamos a utilizar esta técnica para resolver los sistemas,
321		vamos a utilizar una técnica un poco más avanzada,
322		la técnica matricial, ya veréis lo eficiente que es, ¿de acuerdo?
323		Bueno pues después de haber visto un problema tan antiguo,
324		vamos a pasar a otro muchísimo más moderno.
325		Nos vamos al segundo problema, uno del siglo XX.
326	E13:	¿Qué, eso qué es?
327	Emi:	Es un nuevo problema que vamos a ver.
328	E13:	Entonces, ¿ese sí lo vamos a hacer?

329	Emi:	Hoy sólo nos vamos a dedicar al planteamiento de los problemas.
330		¿De acuerdo?
331		A ver cómo diferentes problemas se pueden plantear con ecuaciones
332		lineales y por lo tanto, a través de un método adecuado para encontrar
333		la solución.
334		Aquí si que he encontrado las fotocopias, que les voy a repartir.
335		En el siglo XX un economista, Leontief,
336		recibió el premio novel de economía,
337		entre otras cosas le dieron el premio novel por desarrollar toda la teoría
338		económica utilizando las matrices input/output,
339		entonces esas matrices, las tenéis como ejemplo en su libro de texto.
340		Vamos a ver, esas matrices input/output se usan en economía,
341		de la siguiente manera, vosotros sabéis que en economía se dividen,
342		se habla de tres grandes sectores, el sector agrícola, el sector industrial
343		y el sector de servicios ¿de acuerdo?
344		Cada uno de estos sectores tienen una producción y además consumen
345		bienes que producen los otros sectores,
346		entonces en estas matrices si ponemos el sector agrícola [A],
347		el sector industrial [I] y el sector de servicios [S],
348		[Emi escribe A, I, S en forma de fila y en forma de columna].
349		Se ponen por filas las cantidades,
350		los bienes dependiendo si hablamos de cantidades o de bienes,
351		que cada uno [de los sectores] consumen respecto de los que fabrica
352		el otro y esas son las matrices input/output, ¿de acuerdo?
353		Entonces nosotros vamos a plantear un problema de este modelo
354		pero de una manera mucho más sencilla,
355		en lugar de irnos a la macroeconomía y a todos los sectores vamos
356		a tener una sociedad sencilla formada,
357		como aparece en la fotocopia [que les entregó Emi],
358		que se trata de un agricultor, un carpintero y un sastre, ¿de acuerdo?
359		Cada uno produce un bien, el agricultor produce los alimentos, el sastre
360		los vestidos, la ropa, y el carpintero las casas, construye las casas.
361		Entonces para simplificar el problema,
362		decimos que cada una de estas personas,
363		a lo largo de un año produce un bien,
364		es decir, todos los elementos que produce el agricultor pondremos
365		unidad uno, la cantidad que quieran pero en total diremos que ha
366		producido una unidad, la cantidad total que produce el carpintero,
367		todas las casas que construye lo vemos como un conjunto global,
368		como una unidad y para el sastre también tenemos lo mismo,
369		¿de acuerdo?, la cantidad de vestidos y de trajes que fabrique pues
370		también tenemos que la cantidad total que produzca es una unidad.
371		Entonces, en la tabla que aparece en la fotocopia,
372		es la parte de cada artículo que consume cada uno de ellos,
373		porque el agricultor produce unos bienes,
374		el carpintero otros y el sastre otros, pero a su vez,
375		estas personas que son productores pues
376		son a su vez también consumidores,

377		el agricultor consume bienes del carpintero y bienes del sastre
378		y al contrario.
379		Entonces si ponemos aquí la tabla, ponemos la A para el agricultor,
380		la C para el carpintero y la S para el sastre.
381		[Emi anota A, C y S en forma de fila y luego lo mismo en forma
382		de columna].
383		Pues lo que nos dice esa tabla es que el agricultor
384		consume 7 dieciseisavos de los bienes que produce él,
385		[Emi anota esa cantidad en el sitio correspondiente a la primera fila
386		primera columna],
387		que de lo que produce el agricultor, 7 dieciseisavos los consume él.
388		Después el agricultor consume 3 sextos de los bienes producidos
389		por el carpintero y consume 3 dieciseisavos de los bienes producidos
390		por el sastre.
391	E5:	Pero se puede simplificar 3 sextos por 1 medio.
392	Emi:	Exactamente, se puede simplificar 3 sextos es igual a 1 medio.
393	E1:	También podemos simplificar 3 dieciseisavos.
394	Emi:	No, porque 16 no es múltiplo de 3.
395		[Emi ahora escribirá los datos de la segunda fila de la matriz].
396		Tenemos que el carpintero consume 5 dieciseisavos de lo que produce
397		el agricultor, 1 sexto de lo que produce él mismo y 5 dieciseisavos de
398		lo que produce el sastre.
399		Y el sastre a su vez, consume 4 dieciseisavos de los bienes que produce
400		el agricultor, si lo simplificamos esto es 1 cuarto,
401		el sastre consume 2 sextos de lo que produce el carpintero,
402		es decir, 1 tercio y 8 dieciseisavos de los bienes que produce él mismo,
403		es decir, la mitad, 1 medio.
404		He puesto ahí [en la matriz] tanto las fracciones simplificadas
405		como las no simplificadas para que observéis una cosa,
406		si leemos en horizontal [los datos de la matriz],
407		estaremos viendo los bienes consumidos,
408		pues si la leemos en horizontal esto nos dice los bienes que consume
409		el agricultor, el carpintero y el sastre, ¿de acuerdo?
410		Tenemos por ejemplo que el agricultor consume 7 dieciseisavos de
411		lo que él produce, 1 medio de lo que produce el carpintero
412		y 3 dieciseisavos de lo que produce el sastre.
413		Entonces si lo miramos en columnas en lugar de filas,
414		¿qué es lo que tenemos?
415		No los bienes consumidos sino los bienes producidos,
416		¿qué es lo que produce el agricultor?
417		Pues 7 dieciseisavos, 5 dieciseisavos y 4 dieciseisavos,
418		si sumamos ¿cuánto nos da? 7 y 5, 12 y 4, 16 y 16 dieciseisavos es uno,
419		por eso habíamos dicho que para simplificar tendríamos
420		que cada uno producía una unidad, el carpintero ¿qué es lo que produce?
421		3 sextos, 1 sexto y 2 sextos, son 6 sextos, es decir, la unidad.
422		Y aquí ocurre lo mismo [con el sastre] 3 dieciseisavos, 5 dieciseisavos
423		y 8 dieciseisavos hacen 16 dieciseisavos nos da lo que produce el sastre,
424		la unidad, vale.

425		Podemos ver por ejemplo que el sastre consume bastante de lo
426		que él mismo produce, ¿no?,
427		porque la mitad de los vestidos que produce el sastre se los deja el sastre
428		o por ejemplo, con la comida pasa exactamente lo mismo,
429		¿quién es el que más comida consume?
430		Pues el que la produce, el agricultor consume más comida que el resto,
431		y en el caso de las viviendas,
432		¿quién es el que consume más?
433		El agricultor también, el agricultor es el que más viviendas consume.
434		Esto sería una matriz input/output muy simplificada
435		porque hemos simplificado la sociedad,
436		en lugar de trabajar con el sector agrícola, industrial y de servicio,
437		hablamos de un agricultor, de un carpintero y de un sastre,
438		la sociedad simplificada que se reduciría a esto.
439		Bueno pues vamos a llamar x a cada unidad de alimento,
440		y por unidad de casa y z por unidad de vestido.
441		Y vamos a suponer que cada uno paga lo mismo por todo,
442		es decir que no importa que uno sea el productor o el consumidor,
443		es decir, si el agricultor consume alimentos que él ha producido paga
444		por ellos lo mismo que el carpintero o el sastre, ¿de acuerdo?
445		Entonces se plantea el siguiente modelo,
446		queremos que haya un estado de equilibrio.
447		Y, ¿cómo definimos el estado de equilibrio?
448		Por decir, digamos que nadie gana o pierde dinero, ¿de acuerdo?
449		Entonces nadie gana o pierde dinero.
450		Bueno pues ahora lo que os pido es que digáis cuánto vale la x,
451		la y y la z, es decir,
452		¿cuáles son los precios de los bienes que se producen para que se dé
453		esta situación de equilibrio?
454		Es decir, ¿qué precio hay que darle a los alimentos?,
455		¿qué precio hay que darle a las casas? y
456		¿qué precio hay que darle a los vestidos para que se de este equilibrio?
457		Para que con esta palabra input/output, bienes producidos, consumidos,
458		nadie pierde o gane dinero,
459		todos hacen, todos consumen pero nadie sale ganando más
460		pero tampoco nadie se empobrece en su situación.
461		Entonces se trata de un problema económico,
462		este problema se dice que es un modelo cerrado de Leontief,
463		pues se puede resolver usando sistemas de ecuaciones lineales
464		y es lo que quiero que hagáis, que planteéis las ecuaciones, ¿y cómo?
465		Pues en la fotocopia les doy una ayuda diciéndoles qué pasos
466		hay que seguir para llegar a cada una de las ecuaciones del sistema,
467		entonces la primera que quiero que averigüéis,
468		es saber cuál es el gasto del agricultor.
469		Vamos a ver, aquí tenemos lo que consume,
470		consume 7 dieciseisavos de alimento más 3 sextos de vivienda
471		más 3 dieciseisavos de ropa y sabemos que
472		x es el precio de los alimentos, y es el precio de la vivienda

473		y z el precio de los vestidos.
474	E2:	Pues hay que multiplicar.
475	Emi:	Entonces ¿cuánto es lo que gasta el agricultor? A ver E2
476	E2:	Pues se puede multiplicar 7 dieciseisavos por x más 3 sextos por y
477		más 3 dieciseisavos por z.
478	Emi:	¿Estáis los demás conformes con lo que dice E2?
479		Dice ella que si el agricultor consume 7 dieciseisavos de alimentos,
480		3 sextos de casas y 3 dieciseisavos de vestido,
481		y x,y,z son los precios correspondientes,
482		entonces lo que gasta el agricultor serían 7 dieciseisavos por x
483		más 3 sextos por y más 3 dieciseisavos por z.
484		¿De acuerdo?
485		Vamos a ver, ¿cuáles serían los ingresos del agricultor?
486		A ver, el agricultor sólo tiene ingresos por lo que produce,
487		entonces por el precio de los alimentos,
488		y el precio de los alimento es x,
489		¿cuáles son los alimentos? [Emi señala la primera columna de la tabla].
490		Son 7 dieciseisavos, 5 dieciseisavos y 4 dieciseisavos,
491		pero todo esto es uno, entonces el ingreso es 1 por x, es decir, x.
492		Porque aquí en esta tabla todo lo que se fabrica es consumido,
493		es decir, se consume todo lo que se produce,
494		entonces si hemos dicho que hay una unidad,
495		producida por cada uno de ellos, normalmente,
496		si x es el precio por unidad, lo que recibe el agricultor es x, ¿de acuerdo?
497		Y vamos a hacer lo mismo con el resto.
498		¿Cuáles son los gastos del carpintero? ¿Lo podéis poner?
499		A ver, los gastos del carpintero.
500	E2:	5 dieciseisavos por x más 1 sexto por y más 5 dieciseisavos por z.
501	Emi:	Y los ingresos del carpintero.
502	Es:	Es y.
503	Emi:	Es y, muy bien.
504		¿Y para el sastre?
505	E13:	Lo mismo.
506	Emi:	Es 4 dieciseisavos por x más 2 sextos por y más 8 dieciseisavos por z.
507		Y sus ingresos [del sastre] son z.
508		Bueno entonces ya hemos adelantado mucho.
509		Si ahora aplicamos la condición de equilibrio.
510		Si decimos que se gasta lo mismo que se tiene de ingresos,
511		¿qué es lo que tenemos que igualar?
512	E2:	Pues lo que gasta con lo que ingresa.
513	Emi:	Exactamente, entonces significa que sus gastos son igual
514		que sus ingresos,
515		entonces lo mismo ocurriría con el agricultor,
516		con el carpintero y con el sastre.
517		Si hemos dicho que nadie gana y nadie pierde,
518		entonces de los primeros datos obtenemos la primera ecuación
519		del sistema,
520		sería 7 dieciseisavos por x más 3 sextos por y más 3 dieciseisavos por z

521		igual a x.
522		Aplicando la misma situación de equilibrio al carpintero,
523		si hemos dicho que ni gana ni pierde dinero,
524		los gastos que tiene son igual a sus ingresos,
525		lo que gasta igual a lo que gana, por lo tanto,
526		5 dieciseisavos por x más 1 sexto por y más 5 dieciseisavos por z
527		igual a y [sería la segunda ecuación del sistema].
528		Y ya para la última persona de la sociedad sería 4 dieciseisavos por x
529		más 2 sextos por y más 8 dieciseisavos por z igual a z, vale.
530		¿Qué hemos planteado?
531		Un sistema de ecuaciones, como todos veis,
532		es un sistema de ecuaciones lineales.
533		Entonces el planteamiento de estos problemas.
534		Este del siglo XX y el otro de 200 años a. de c. ¿en qué se parecen?
535		Pues que todos los planteamos con el mismo tipo de ecuaciones.
536		Entonces en este tema haremos el planteamiento de distintos problemas
537		y luego haremos la resolución y veremos qué métodos aplicar en cada
538		caso, como ya queda muy poco tiempo [para que termine la clase].
539		¿Qué hacemos con estas ecuaciones?
540		[Con las tres ecuaciones del último problema].
541		¿Cómo podemos relacionar esto con las matrices?
542		¿Podríamos escribir eso en forma matricial?
543	Es:	[Silencio, observando].
544	Emi:	¿Cómo sería?
545		¿Se podría pasar de este sistema a una forma matricial?
546		A ver, os doy una pista, una matriz por la otra igual a la otra.
547		[Emi escribe unos paréntesis grandes por otros igual a otros paréntesis,
548		simulando que cada uno corresponde a una matriz, $(\)(\)=(\)$].
549		Si aquí hay una igualdad, ¿qué pondría aquí?
550		[En el último paréntesis, el que esta después de la igualdad],
551		[Suena el timbre que indica que la clase ha terminado].
552	Es:	x, y, z.
553	Emi:	Si x, y, z.
554	E2:	Y ahí [en lo que sería la primera matriz], 7 dieciseisavos, 3 sextos
555		y 3 dieciseisavos.
556	Emi:	7 dieciseisavos, 3 sextos y 3 dieciseisavos [primera fila].
557		Luego, 5 dieciseisavos, 1 sexto y 5 dieciseisavos [en la segunda fila],
558		4 dieciseisavos, 2 sextos y 8 dieciseisavos.
559	E2:	Y en la matriz que falta sería x, y z.
560	Emi:	Si x, y, z.
561		Si multiplicamos la primera fila
562		[7 dieciseisavos, 3 sextos y 3 dieciseisavos]
563		por esta columna [x,y,z], igualado al primer termino de la matriz
564		[que está al otro lado de a igualdad],
565		obtendríamos la primera ecuación ¿lo veis?
566	E3:	Si.
567	Emi:	El sistema matricial de las ecuaciones,
568		pues hacemos el planteamiento y luego escribiremos la correspondiente

569		ecuación en forma matricial y trabajaremos siempre con matrices
570		y aplicaremos todos nuestros conocimientos de matrices para
571		la resolución de problemas ¿de acuerdo?
572		¿Ya han tocado el timbre, verdad?
573	E5:	Si.
574	Emi:	Pues entonces ya sabéis para el fin de semana haced los ejercicios
575		y estudiar, que el examen está cerca.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la séptima clase grabada de la profesora Emi del lunes 20/10/08.

Resumen: Emi da una introducción para explicar posteriormente el método de reducción de Gauss (para resolver sistemas de ecuaciones lineales) a través de un ejemplo, luego intenta dar otro ejemplo pero se termina la clase y sólo llega al planteamiento de las ecuaciones del problema y les deja de tarea que lo escriban en forma matricial, y lo resuelvan con el método de Gauss.

L		Transcripción
1	Emi:	Bueno en un sistema nosotros pretendemos hallar la solución de un
2		sistema, pero ¿hallar la solución de un sistema, qué es?
3		Pues hallar la solución común para todas las ecuaciones
4		que aparecen en el sistema, entonces tenemos que encontrar los valores
5		de x,y,z que definen todo el sistema,
6		si sustituyo los valores de x, y, z en cada una,
7		se cumplen todas las igualdades, ¿de acuerdo?
8		Entonces, ¿qué transformaciones realizaremos en un sistema de modo
9		que no modifiquemos las soluciones del sistema?
10		Pues qué pasaría si yo cambiara el orden de las ecuaciones en el sistema,
11		¿cambiaría la solución?
12		Pues no, si yo cambio las ecuaciones no altera la solución del sistema.
13		¿Qué otras transformaciones?
14		Por ejemplo, si multiplicamos toda una ecuación por un número distinto
15		de 0, o lo dividimos para el caso sería lo mismo,
16		¿cambia la solución de la ecuación?
17		Por ejemplo si yo pongo $12x+4=28$,
18		ahí todo eso lo podemos reducir, ¿no?
19		Si simplificamos la ecuación se convierte en $6x+2=14$,
20		entonces la pregunta es, ¿éstas dos ecuaciones son equivalentes?
21		Cuando hablamos de ecuaciones equivalentes,
22		nos referimos a si tienen la misma solución.
23	Es:	Si.
24	Emi:	Tienen la misma solución, ¿no?
25		Si despejamos de aquí la x [de la primera ecuación]
26		y la despejamos de aquí [de la segunda ecuación],
27		los valores que vamos a obtener van a ser los mismos.
28		Entonces multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de 0,
29		no cambia las soluciones de la ecuación,
30		pues con esas transformaciones el sistema es equivalente,
31		es decir, que da la misma solución.
32		¿Qué otra transformación podemos hacer?
33		Pues también se pueden sumar las ecuaciones unas con otras eh,
34		cuando sumamos unas ecuaciones con otras,
35		normalmente nosotros no lo hemos hecho antes,
36		pues también las ecuaciones que resultan son equivalentes,
37		es decir, tienen la misma solución.
38		Entonces estas transformaciones que les estoy diciendo que se pueden
39		efectuar sobre las ecuaciones, ¿os recuerdan algo de las transformaciones
40		que ya hemos visto sobre las matrices?

41		¿Cuáles son las transformaciones elementales que se pueden realizar
42		en la matriz?
43		Llamamos transformaciones elementales a tres tipos de
44		transformaciones, ¿qué eran?
45		Cambiar una fila por otra, intercambiar filas habíamos dicho; la otra,
46		era multiplicar una fila o dividir por un número distinto de 0 y la otra,
47		a una fila sumarle otra por un número, esas transformaciones que
48		llamamos transformaciones elementales en matrices son el mismo tipo
49		de transformaciones que cuando las apliquemos a las matrices del
50		sistema, las soluciones no varían.
51		Entonces, ¿por qué vamos a aplicar esas transformaciones?
52		Porque como os he dicho, tenemos que encontrar el valor de x, y, z,
53		que debo despejar, y una forma muy fácil de despejar es haciendo
54		un sistema escalonado.
55		¿Qué pasaría si yo tengo sólo la z en la tercer ecuación y en la
56		segunda solamente y y z?
57		[Emi escribe un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,
58		$50x+30y+40z=230000$, $50x+50y+40z=250000$, $50x+30y+30z=200000$].
59		Pensad que en un sistema en la segunda ecuación ya no tengo x [sólo
60		y y z] y en la tercera ecuación ya no tengo x ni y, sólo z.
61		¿Cómo resolveríais ese sistema?
62	E2:	Pues despejo z y luego la sustituyo.
63	Emi:	Exactamente, si sólo tengo la z en la tercera ecuación,
64		podría despejar z de la última ecuación y luego ¿qué haríamos?
65	E7:	Sustituiríamos eso en la segunda ecuación.
66	Emi:	Sustituiríamos en la segunda ecuación y obtendríamos el valor de y.
67		Y con el valor de y y z, los sustituiríamos en la primera ecuación
68		y despejaríamos la x.
69		Entonces este método que consiste en escalar el sistema,
70		si lo aplicamos a las matrices,
71		¿qué es lo que debemos hacer?, ¿qué queremos conseguir?
72		Que desaparezca la x de la segunda ecuación,
73		y de la tercera ecuación desaparecer la x y la y,
74		es decir, hacer 0 la x y la y en la tercera ecuación.
75		Bueno vamos a escribir el sistema matricial, con estas ecuaciones.
76		¿Cómo podemos ponerlo en forma matricial?
77		¿Qué quedaría?, ¿podéis intentadlo vosotros, la forma matricial?
78		[Emi pasa a supervisar el trabajo de los estudiantes].
79		[Emi regresa a la pizarra].
80		¿Qué pasa si ponemos una matriz en la que ponemos
81		sólo los coeficientes y en otra sólo las incógnitas?
82		La primera matriz sería, la primera columna 50,50,50;
83		la segunda columna sería 30,50,30 y la tercera columna 40,40,30.
84		Entonces si escribimos una matriz en la que ponemos
85		sólo los coeficientes y en otra sólo las incógnitas.
86		¿Qué pondríamos en éstas dos matrices que he dejado yo en hueco?
87		[Emi escribe un paréntesis grande indicando una matriz al lado de la
88		matriz de coeficientes que acaba de escribir, luego el igual y enseguida

89		otros paréntesis grandes indicando que ahí irá otra matriz].
90		En la matriz que multiplica a esta de los coeficientes pondríamos...
91	E2:	x, y, z.
92	Emi:	Las incógnitas.
93		x, y, z.
94		Y en la otra matriz que está al lado de la igualdad los términos
95		independientes 230000; 250000 y 200000 [en forma de columna].
96		Si aplicáramos el producto de matrices,
97		¿qué nos quedaría, al multiplicar esta matriz por esta otra? [Emi señala el
98		producto de las dos matrices].
99		Nos quedaría cada uno de los miembros de la izquierda de las ecuaciones
100		y al igualar los elementos de una matriz por otra,
101		nos quedarían estas tres ecuaciones [Emi señala las tres ecuaciones].
102		Entonces, ¿cómo se pasa un sistema de ecuaciones a forma matricial?
103		Pues como habéis visto, una matriz de coeficientes,
104		la matriz de las incógnitas y la matriz de términos independientes.
105		Entonces nos vamos a olvidar de las incógnitas y vamos a aplicar el
106		método, el método se llama el método de reducción de Gauss.
107		Vamos a ver de forma práctica como utilizar este método para resolver
108		sistemas de ecuaciones lineales,
109		el método de reducción de Gauss es muy sencillo,
110		consiste en hacer ceros por debajo de la diagonal principal.
111		Volvemos a escribir la matriz de los coeficientes 50,50,50 [primera
112		columna]; 30,50,30 [segunda columna]; 40,40,30 [en la tercera columna]
113		y a su lado separando una línea discontinua y enseguida los términos
114		independientes [en forma de columna], como si fuera una matriz
115		ampliada, entonces anotamos 230000; 250000 y 200000.
116		Entonces en un sistema de ecuaciones lineales tenemos en realidad
117		cuatro matrices de las que podemos hablar,
118		la matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas, la matriz de los
119		términos independientes y esta matriz que se llama matriz ampliada,
120		a la que hemos unido a la matriz de coeficientes los términos
121		independientes.
122		[Emi va señalando cada una].
123		Entonces en el método de Gauss se trabaja con la matriz ampliada,
124		lo que debemos conseguir es hacer ceros por debajo de la diagonal
125		principal.
126		Podemos hacer una cosa, como queráis, porque sino os gustan los
127		números tan grandes, podríamos dividir todas las filas, ¿por cuánto?
128	E3:	Por 10 [en voz baja].
129	Emi:	Por 10, ¿cómo queráis?
130	E3:	No.
131	Emi:	Bueno o lo dejáis así.
132	E3:	Si.
133	Emi:	Entonces vamos a señalar la diagonal principal y vamos a hacer ceros
134		por debajo de la diagonal principal,
135		fijaros que en este caso el primer número que está
136		en la diagonal principal no es el uno,

137		pero como los que están por debajo, donde queremos hacer 0,
138		son iguales a él [Emi señala los dos 50 que aparecen por debajo de ese
139		primer elemento].
140		Pues cómo conseguimos los ceros, pues a la fila 2 le restamos la fila 1 y
141		¿a la fila 3?
142	E2:	Le restamos la fila 1.
143	Emi:	Pues si a la fila 3 también le restamos la fila 1.
144		Entonces en la primera columna, el primer elemento es 50 y por debajo
145		tenemos 50 y 50 y tenemos que hacer ceros justo por debajo,
146		pues como son iguales, lo más fácil es a cada fila restarle la primera,
147		a la fila 2 le restamos la fila 1 y a la fila 3 también le restamos la fila 1.
148		Entonces, ¿cómo queda la matriz ampliada con respecto
149		a estas transformaciones elementales?
150		[Emi empieza a escribir en la pizarra la primera fila tal y como estaba 50,
151		30, 40 luego la línea discontinua y enseguida el 230000].
152	E3:	0 [E3 empieza a decir el elemento que iría en la segunda fila primera
153		columna, ya con la transformación elemental].
154	Emi:	0, 20, 0 y 20000.
155		Entonces la primera fila quedó como estaba y la segunda fila
156		quedó 0, 20, 0 y 20000.
157		Entonces, ¿la tercera fila cómo queda?
158		0 (de 50-50), ahora 30 menos 30, 0; luego -10 [de 30-40] y -30000 [de
159		200000 menos 230000], vale.
160		[La tercera fila queda 0,0,-10 y -30000].
161		En un solo paso hemos conseguido hacer lo que pretendíamos,
162		hemos conseguido hacer ceros en la primera columna por debajo de la
163		diagonal principal,
164		pero también tenemos el 0 de la segunda columna por debajo de la
165		diagonal principal, ya hemos conseguido lo que pretendíamos.
166		Entonces, ¿qué hacemos ahora?
167		Pues si antes pasábamos de las ecuaciones a la forma matricial,
168		pues ahora de la forma matricial pasaremos al sistema.
169		Entonces, ¿qué transformaciones elementales hemos efectuado?
170		Estas transformaciones como os he dicho antes,
171		no cambian la solución del sistema,
172		es decir, transforma las ecuaciones en otras equivalentes,
173		con la misma solución.
174		Entonces podéis escribir, ¿cuál es el sistema equivalente a esta matriz?
175		[Emi señala la última matriz obtenida].
176		¿Cuáles serían las nuevas ecuaciones del sistema?
177		Como en la primera fila tenemos 50, 30, 40 y 230000.
178		Entonces tenemos $50x+30y+40z=230000$.
179		¿Cómo quedaría la segunda ecuación del sistema?
180	E2:	$20y$.
181	Emi:	$20y=20000$.
182		¿Y la tercera?
183		$-10z=-30000$.
184		Fijaros que he escrito el sistema equivalente poniendo siempre las

185		incógnitas por columnas, las equis debajo de las equis [x's],
186		las y's debajo de las y's y las z's debajo de las z's.
187		¿Cómo resolveríamos el sistema?, ¿qué es lo que hay que hacer?
188		Empezamos por abajo, tenemos $-10z = -30000$,
189		entonces despejando z en esta última ecuación, ¿qué nos quedaría?
190		Pues menos 30000 entre menos 10,
191		menos entre menos más y como dividimos entre 10 pues...
192		¿qué nos queda?
193		3000 [Emi anota $z = 3000$].
194		Fijaros qué ha pasado con las ecuaciones [en el último sistema].
195		Pues nos queda un sistema más cómodo porque no sólo ha desaparecido
196		la x de la segunda ecuación, sino también la z,
197		con lo cual sólo tenemos la y,
198		entonces podemos despejar la y directamente de aquí [Emi señala la
199		segunda ecuación del último sistema].
200		$20y = 20000$, entonces y es igual a 20000 entre 20,
201		¿qué es lo que nos queda?
202	E2:	1000.
203	Emi:	1000 [$y = 1000$].
204		¿Qué nos falta por determinar?
205	E2:	La x.
206	Emi:	La x, ¿cómo podemos encontrar el valor de la x?
207	E3:	Sustituyendo arriba [E3 se refiere a la primera ecuación].
208	Emi:	Pues sustituyendo aquí [Emi señala la primera ecuación
209		$50x + 30y + 40z = 230000$].
210		Entonces $50x$ sería igual a 230000 menos 30 por y,
211		pero si y vale 1000 pues entonces es menos 30000,
212		menos 40 por z, pero 40 por z es 4 por 3, 12 entonces nos queda 120000.
213		Si hacemos cuentas, sería 230000 menos 30000 son 200000
214		y 200000 menos 120000 nos queda $50x = 80000$.
215		Despejamos la x, entonces x es igual a 80000 entre 50,
216		nos queda que x es 1600 [$x = 1,600$].
217		¿Se fijaron cómo salen las cuentas?
218		¿Coincide con las soluciones del libro? Si.
219		¿Cuál es la solución entonces?
220		La solución es x vale 1600, y vale 1000 y z vale 3000.
221		Es así como se escribe la solución a un sistema [Emi se refiere a la
222		notación, "solución ($x = 1600$, $y = 1000$, $z = 3000$)"].
223		Si yo lo escribo en otro orden, no es que esté incorrecto,
224		pero siempre se ordenan las incógnitas en el orden en que aparecen
225		dadas.
226		¿Entonces qué os parece este método?
227	E5:	Yo no me entero cómo salió la x.
228	Emi:	¿Qué cómo salió la x?
229		Fue despejada de aquí [Emi señala la primera ecuación del último
230		sistema escrito $50x + 30y + 40z = 230000$].
231		Es decir, $50x = 230000 - 30y - 40z$, lo he despejado de la primera ecuación,
232		y ahora como conozco el valor de la y y el valor de la z,

233		y vale 1000 y la z vale 3000, pues sustituimos, 30 por y, 30000 eso se
234		convierte en 30000 y 40 por z, z es 3000 pues 40 por 3000 son 120000,
235		se hace esta operación [Emi señala $50x = 230000 - 30000 - 120000$],
236		y entonces $230000 - 30000 - 120000$ nos da 80000.
237		Entonces $50x = 80000$, el 50 pasa dividiendo y x queda igual a 80000
238		entre 50 que es 1600.
239		Tú puedes sustituir aquí directamente [en la primera ecuación
240		$50x + 30y + 40z = 230000$] o despejar la x, es lo mismo.
241		¿Alguna duda más?
242	Es:	[Nadie contesta].
243	Emi:	Entonces veis que es un método más,
244		es el método de reducción de Gauss,
245		muy simple y cómodo que nos facilita encontrar los valores
246		de las incógnitas de una forma, la verdad que muy rápida.
247		Hoy nos vamos a centrar solamente en la aplicación de este método
248		para resolver sistemas de ecuaciones.
249		Entonces me gustaría que fuerais a la página 45 y plantearais el
250		problema número 31.
251		Os lo voy a leer en voz alta, lo voy a leer dos veces.
252		Una cadena comercial tiene tres establecimientos, que llamaremos A, B
253		y C, en los que vende diversos dispositivos de aprovechamiento de la
254		energía solar.
255		Entonces nos están hablando de una cadena con tres tiendas,
256		una se llama A, otra B y otra C, y ahora nos dicen...
257		El establecimiento A vendió el año pasado 15 paneles fotovoltaicos,
258		10 termosifones y 15 colectores, por los que ingresó en total 1010000
259		euros. El establecimiento B vendió 12 paneles fotovoltaicos, 10
260		termosifones y 5 colectores, por los que ingresó en total 590000 euros.
261		Y el establecimiento C vendió 8 paneles fotovoltaicos, 20 termosifones y
262		10 colectores, por los que ingresó en total 780000 euros.
263		Si el precio de venta de cada producto es el mismo en los tres
264		establecimientos, calcula el precio de cada uno de los tres dispositivos
265		solares, los paneles fotovoltaicos, los termosifones y los colectores.
266		Entonces cómo recogemos los datos de forma sencilla sin escribir
267		mucho.
268	E7:	Con una tabla.
269	Emi:	Muy bien con una tabla, ¿qué pondremos?
270		Tenemos establecimiento A, B y C.
271		Entonces podemos poner.
272		Establecimiento A en una línea, establecimiento B en otra línea y
273		establecimiento C en otra.
274		¿De acuerdo?
275		¿Y por columna qué ponemos?
276	E7:	Los dispositivos solares.
277	Emi:	Los dispositivos solares, entonces ponemos por filas los establecimientos
278		A, B y C y en las columnas los dispositivos solares.
279		Bueno pues entonces primero los paneles fotovoltaicos (P.F.),
280		después los termosifones (T) y luego los colectores (C).

281		Entonces ponemos una tabla en la que los encabezados son los
282		dispositivos solares, los paneles fotovoltaicos, los termosifones
283		y los colectores.
284		Y por filas tienen los establecimientos A, B y C.
285		¿Qué otros datos nos dan además de la cantidad de aparatos que vende?
286	E2:	El ingreso.
287	Emi:	Pues entonces los ingresos, en la última columna ponemos los ingresos
288		de cada establecimiento por la venta de sus productos.
289		Entonces si volvemos a leer tendríamos que el establecimiento A vendió
290		el año pasado 15 paneles fotovoltaicos.
291		¿Podéis llenar la tabla? [Mientras Emi se acerca a E9 para ayudarle a
292		localizar en su libro en Braille el problema que están resolviendo].
293	E3:	Emi, ¿luego qué hay que hacer? [Una vez que terminen de completar la
294		tabla].
295	Emi:	Plantear quiénes son las incógnitas y plantear las ecuaciones que hay que
296		resolver.
297		[Emi continua ayudando a E9].
298		Bueno vamos a llenar la tabla.
299		Para el establecimiento A tenemos que son 15 paneles fotovoltaicos,
300		10 termosifones y 15 colectores, por los que ingresó en total 1010000
301		euros.
302		Para el establecimiento B son 12 paneles fotovoltaicos, 10 termosifones
303		y 5 colectores, por los que ingresó en total 590000 euros.
304		Y después en el establecimiento C vendió 8 paneles fotovoltaicos,
305		20 termosifones y 10 colectores, por los que ingresó en total 780000
306		euros.
307		Éstos son los datos iniciales del problema.
308		Y la pregunta que nos hacen es la siguiente: Si el precio de venta de
309		cada producto es el mismo en los tres establecimientos, calcula el precio
310		de cada uno de los tres dispositivos solares.
311		Luego las incógnitas aquí, ¿qué son?
312	E2:	El número de dispositivos.
313	Emi:	No, el número de dispositivos ya lo tenemos, entonces nos preguntan...
314	E3:	El precio.
315	Emi:	El precio, no siempre las incógnitas van a ser el mismo valor,
316		entonces cuando ponemos las incógnitas x, y, z que ponemos en todos
317		los problemas, no tenéis que poner siempre x para los paneles
318		fotovoltaicos, y termosifones y z colectores, eso no tiene sentido.
319		x es el precio de paneles fotovoltaicos [x=precio de P.F.],
320		y el precio de los termosifones [y=precio de los T]
321		y z el precio de los colectores [z=precio de los C],
322		se supone que todos en euros [Emi anota después de cada incógnita,
323		entre paréntesis euros].
324		Es muy importante precisar las incógnitas, de hecho,
325		no hay que pensar mucho porque regularmente las incógnitas
326		se suelen corresponder con lo que nos preguntan.
327		Y aquí nos dicen, calcula el precio de cada uno de los tres dispositivos
328		solares, x,y,z.

329		¿Podéis plantear las ecuaciones?
330	E3:	15x.
331	Emi:	A ver en orden.
332	E3:	$15x+10y+15z=1010000$.
333	Emi:	$15x+10y+15z=1010000$, la primera ecuación para el establecimiento A.
334		[Suena el timbre que indica que la clase ha terminado].
335		¿Ahora para el establecimiento B?
336	E3:	$12x+10y+5z=590000$.
337	Emi:	$12x+10y+5z=590000$, muy bien ¿y la tercera?
338	E3:	$8x+20y+10z=780000$.
339	Emi:	Muy bien, es un sistema, vamos a ponerle que es un sistema lineal de 3
340		ecuaciones con 3 incógnitas.
341		Vamos a escribirla en forma matricial, la matriz de coeficientes,
342		la matriz de coeficientes [Emi va indicando sólo con paréntesis grandes].
343	E3:	Emi ya es la hora.
344	Emi:	¡Ah! ¿ya es nuestro timbre?
345	Es:	Si.
346	Emi:	Bueno es que no me había dado cuenta.
347		Bueno pues entonces os dejo para casa nada más que está tarea,
348		tenéis que poner en forma de matrices el sistema,
349		aplicar el método de Gauss y resolverlo.
350	E2:	Como el otro [El que resolvieron al inicio de esta clase].
351	Emi:	Como el otro, vale [afirmando].

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la octava clase grabada de la profesora Emi del martes 21/10/08.

Resumen: Un estudiante hace el ejercicio que había dejado de tarea la clase anterior (lunes 20/10/08) con el método de Gauss. Luego Emi introduce y presenta la clasificación de los sistemas (Sistema Compatible Determinado (S.C.D.), Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I) y Sistema Incompatible (S.I.)) y posteriormente define el rango de una matriz y lo relaciona con la clasificación de los sistemas.

L		Transcripción
1	Emi:	¿Quién sale a la pizarra a resolverlo?
2	E10:	Bueno yo.
3	Emi:	Bien.
4	E10:	[E10 comienza a escribir el sistema de ecuaciones al que se logró llegar
5		la clase anterior, pero ahora lo anota en forma matricial].
6		[E10 anota en la matriz de coeficientes 15, 10, 15 en la primera fila,
7		12, 10, 5 en la segunda fila y 8, 20, 10 en la tercera fila.
8		En la matriz de las incógnitas x, y, z en forma de columna y finalmente
9		en la matriz de términos independientes 1010000, 590000 y 780000 en
10		forma de columna].
11		[Luego E10 anota la matriz ampliada, en la primera fila 15, 10, 15 línea
12		discontinua 1010000, en la segunda fila 12, 10, 5 y 590000;
13		en la tercera fila 8, 20, 10 y 780000].
14		[E10 enseguida escribe las transformaciones elementales que va a
15		realizar 15 por la fila 2 menos 12 por la fila 1, esa es una, y la otra 15 por
16		la fila 3 menos 8 por la fila 1].
17		[E10 posteriormente escribe los resultados de estas transformaciones
18		en otra matriz ampliada, anotando 15, 10, 15 y 1010000 en la primera
19		fila; 0, 30, -105 y -3270000 en la segunda fila y 0, 220, 30 y 362000 en
20		la última fila].
21		[Respecto a 362000 nadie dice nada y debe ser 3620000].
22		[E10 escribe ahora la nueva transformación elemental que va a hacer, 30
23		por la fila 3 menos 220 por la fila 2].
24		[E10 Escribe ahora los nuevos resultados de la matriz ampliada,
25		15, 10, 15 y 1010000 en la primera fila, 0, 30, -105 y -3270000 en la
26		segunda fila y 0, 0, -32100 y -610800000].
27		[Respecto a -32100 y -610800000 nadie dice nada y debe ser 24000 y
28		828000000 respectivamente] [E10 indica hasta ahí y regresa a su butaca]
29	Emi:	Bueno, ¿qué es lo que hemos conseguido con estas transformaciones
30		elementales?
31		Conseguir ceros por debajo de la diagonal principal,
32		¿qué hacemos después de haber conseguido los ceros por debajo de la
33		diagonal?
34	E3:	Escribir las equis y eso, ¿cómo se llama?
35	Emi:	El sistema, escribir el sistema $15x+10y+15z=1010000$ [primera
36		ecuación], después $30y-105z=-3270000$ [segunda ecuación]
37		y $-32100z=-610800000$ [tercera ecuación].
38		[Nuevamente respecto a -32100 y -610800000 nadie dice nada y debe ser
39		24000 y 828000000, respectivamente].
40		Es un sistema que se llama sistema escalonado,

41		despejamos la z y nos da 34500, sustituimos la z aquí [en la segunda
42		ecuación] y despejamos la y y nos tiene que dar 11750 y sustituimos aquí
43		[en la primera ecuación] el valor de y y de la z y encontramos x, y.
44		¿Qué nos da x?
45		Nos da 25000, las soluciones las tened en el libro.
46		Bueno tanto el problema de ayer como en el de hoy hemos visto que al
47		final tenemos unas soluciones, la pregunta es la siguiente.
48		Cuando nos den un problema, nos den una serie de datos
49		y a partir de esos datos nos hagan preguntas,
50		nosotros usamos ya lo que sabemos para escribir
51		las matrices correspondientes a las ecuaciones del problema,
52		la pregunta es, ¿siempre tendrá solución el problema?,
53		¿el sistema que planteemos tendrá solución?
54		¿Todos los problemas tienen solución?
55		[Alguien dijo que no y Emi voltea a ver al grupo y pregunta].
56		¿Quién dijo que no?
57	E3:	Que no.
58	Emi:	Pues si, hay problemas que no tienen solución.
59		Vamos a hacer una clasificación de los sistemas,
60		pero vamos a ver otra cosa que dijimos ayer.
61		A partir de un problema hacemos un planteamiento en el que usamos
62		ecuaciones lineales, otra pregunta,
63		¿todos los problemas que nos planteen se podrán resolver a través de
64		ecuaciones lineales?, ¿ecuaciones de primer grado?, ¿siempre?
65		¿Todos los problemas van a ser del mismo tipo?
66	E3:	No.
67	Emi:	No todos, estamos resolviendo problemas de un tipo determinado,
68		problemas que se resuelven a través de planteamientos con ecuaciones
69		lineales, pero no todos los problemas que hay se resuelven
70		con ecuaciones lineales, ¿de acuerdo?
71		Entonces algunos problemas, en sus planteamientos,
72		en ellos aparecen ecuaciones lineales,
73		entonces cuando tenemos un conjunto de ecuaciones lineales,
74		a eso le llamamos sistema y ¿qué es lo que pretendemos?
75		Hallar la solución.
76		¿Cuál es el método que hemos utilizado para obtener la solución?
77		[Emi escribe unos paréntesis grandes indicando el producto de matrices
78		igual a otra matriz $()()=()$].
79		Primero escribimos el sistema en forma matricial,
80		vamos a llamar a la matriz de coeficientes C,
81		X a la matriz de incógnitas y
82		B a la matriz de términos independientes.
83		Nuestro método para obtener la solución, ¿en qué consiste?
84		Bueno hemos dicho que se llama método de reducción de Gauss.
85		Nosotros hasta ahora, para resolver el sistema hemos usado el método de
86		reducción de Gauss, ¿qué hemos hecho?
87		Nosotros ponemos, ¿qué matrices?
88		Ponemos la matriz C, la línea discontinua y la matriz B,

89		esto ¿cómo se llama?
90		Matriz ampliada, entonces está matriz la podemos llamar,
91		cuando tenemos la matriz de coeficientes
92		y la matriz de términos independientes a la vez,
93		le llamamos matriz ampliada, la vamos a llamar A.
94		¿Qué hacíamos con esta matriz A?
95		¿Qué es lo que ha hecho E10 hace un momento?
96	E2:	Pues poner ceros por debajo de la diagonal.
97	Emi:	Muy bien, pues poner ceros por debajo de la diagonal principal,
98		¿usando qué?
99		¿Cómo llamamos a estas transformaciones? Transformaciones...
100	E7:	Elementales.
101	Emi:	¿Cómo?
102	Es:	Elementales.
103	Emi:	Transformaciones elementales,
104		usamos las transformaciones para hacer ceros por debajo,
105		una vez que hemos escrito el problema en forma matricial y que
106		hacemos ceros por debajo de la diagonal principal en la matriz ampliada,
107		¿qué hacemos a continuación?
108	E2:	El sistema.
109	Emi:	Escribimos el sistema equivalente, ¿por qué le llamamos equivalente?
110		No tiene las mismas ecuaciones que las iniciales de las que partíamos
111		pero tenemos otras, le llamamos equivalente, ¿por qué?
112	E10:	Porque me va a dar lo mismo ¿no?
113	Emi:	Si pero sobre todo la importancia radica en que estos dos sistemas tienen
114		las mismas soluciones, por eso lo llamamos equivalente,
115		es como lo de las fracciones,
116		¿cuándo decimos que dos fracciones son equivalentes?
117	E10:	Se hace el producto cruzado.
118	Emi:	Multiplicando en cruz, si yo tengo dos fracciones, a partido por b
119		y c partido por d, esas dos fracciones decimos que son equivalentes
120		si al multiplicar el numerador de una por el denominador de otra nos
121		aparece el mismo valor.
122		[Emi escribe en la pizarra las dos fracciones que ha dicho y entre ellas
123		queda una cruz, al indicar el producto del numerador de una por el
124		denominador de la otra].
125		¿Pero qué significa que son equivalentes?
126		Que el valor de las fracciones es el mismo,
127		si dividimos a entre b me da lo mismo que si divido c entre d,
128		que dos fracciones dan el mismo número.
129		Pues con el sistema ocurre algo parecido, no tienen el mismo aspecto las
130		ecuaciones, pero si tienen las mismas soluciones,
131		por eso les llamamos equivalentes.
132		Y luego que tenemos el sistema equivalente, ¿cómo nos sale?
133		Escalonado.
134		Entonces ya lo resolvemos y encontramos la solución, ¿de acuerdo?
135		Entonces hemos planteado dos problemas, en los dos hemos hallado la
136		solución aplicando el método de Gauss.

137		¿Cuántas soluciones nos han salido en el problema?
138	E10:	Tres.
139	Emi:	Cuando ponemos $x=$, $y=$, $z=$, ¿cuántas soluciones estamos dando?
140	E10:	Tres.
141	Emi:	Por ejemplo $x=10$, $y= 50$ y $z=30$, ¿cuántas soluciones?
142	E3:	Una.
143	Emi:	Es una solución, es decir, son tres incógnitas, pero es una solución.
144		Porque el sistema está formado por varias ecuaciones y en este caso
145		tenemos nosotros tres incógnitas,
146		hallar la solución es hallar el valor para cada una de las incógnitas,
147		si tenemos un valor para cada una de las incógnitas,
148		pues tenemos sólo una solución, ¿de acuerdo?
149		Entonces, la pregunta que os he hecho, ¿existe siempre solución?
150		Me han dicho que no, y es cierto.
151		No siempre va a tener solución, en caso de que exista, si existe,
152		¿cuántas soluciones puede tener?
153		Los que nosotros hemos visto, tienen una solución, ¿no?
154		En este caso teníamos que calcular el precio de, ¿de qué era?
155		De los termosifones y bueno de las placas solares,
156		teníamos que encontrar un precio para cada objeto
157		y entonces hallamos una solución,
158		¿Puede salir más de una solución en el sistema?
159		¿Podría haber más de una solución?
160	E7:	Pues en las ecuaciones de segundo grado ¿no?
161	Emi:	Bueno cuando hablamos de ecuaciones de segundo grado,
162		sabemos que puede haber dos soluciones, muy bien.
163		Cuando hablamos de sistemas de ecuaciones lineales,
164		puede darse el caso y que hasta ahora no os ha salido,
165		de que haya más de una solución,
166		en realidad puede ser que haya infinitas soluciones,
167		entonces se hace una clasificación de los sistemas,
168		esa clasificación de sistemas atienden a este hecho,
169		al hecho de que si existe solución y si existe una única solución
170		o más soluciones.
171		Entonces podemos poner el siguiente esquema.
172		Entonces los sistemas los diferenciamos de tres tipos,
173		a unos sistemas les vamos a llamar Sistemas Compatibles Determinados,
174		escribimos las iniciales S.C.D.
175		¿A qué sistema lo vamos a llamar S.C.D?
176		a los sistemas con solución y además es única,
177		es decir, existe una única solución.
178		Tenemos también a los Sistemas Compatibles Indeterminados, S.C.I.,
179		que son aquellos sistemas en los que existen infinitas soluciones.
180		Entonces Sistemas Compatibles Determinados, S.C.D. y
181		Sistemas Compatibles Indeterminados S.C.I.
182		¿Qué es lo que tienen en común estos dos sistemas?
183	E3:	Que existe solución.
184	Emi:	Que existe solución, por eso la palabra compatible,

185		es decir, que a los dos les llamamos compatibles,
186		¿por qué determinado al primero?
187	Es:	Porque sólo es uno.
188	Emi:	¿Y al indeterminado? Porque hay infinitas.
189		¿Cómo llamo a aquellos que no tienen solución?
190		Un Sistema Incompatible S. I. es cuando no existe solución.
191		Entonces si el sistema tiene una solución S.C.D.,
192		si tiene infinitas soluciones el sistema es S.C.I.
193		y si el sistema no tiene solución entonces es S.I.
194		Pues vamos a ver cómo es el sistema antes de encontrar la solución.
195		Existe una forma, es decir, no tenemos necesidad de resolver el sistema
196		para conocer de qué tipo es.
197		En qué se basa el método este para saber si es de un sistema o de otro.
198		Imaginaos que tenéis un sistema escalonado y que nos queda, ya después
199		de aplicar el método de Gauss, el siguiente sistema escalonado.
200		$x+y+z=3$ [Emi había escrito 1 en lugar de 3, borra y corrige],
201		$y+z=2$, $5z=5$.
202		Bien, suponed que nos ha quedado este sistema, ¿es escalonado?
203	Es:	Si.
204	Emi:	Si, es decir, en la primera ecuación tenemos las tres incógnitas,
205		en la segunda dos y en la última nada más que una.
206		Empezaríamos resolviendo, despejando la z en la última ecuación,
207		¿qué nos saldría?
208	E2:	Uno.
209	Emi:	$z=1$.
210		$y+z=2$, nos saldría, ¿si z vale 1?, la y...
211	E2:	Uno.
212	Emi:	Uno [$y=1$].
213		Y si tenemos que y y z valen uno,
214		¿cuánto nos queda en la primera ecuación $x+y+z=3$?
215	Emi:	Pues x también me va a salir...
216	E2:	Uno.
217	Emi:	Uno [$x=1$].
218		Entonces en este sistema nos sale la solución ($x=1$, $y=1$, $z=1$).
219		¿Qué tipo de sistema es?, ¿cuántas soluciones tiene?
220	E2:	Una.
221	Emi:	Una, tiene y es una, entonces es un S.C.D., vale.
222		Voy a poner otro ejemplo, imaginaos que nos queda este sistema
223		$x+y+z=3$, $y+z=2$ y $0=0$.
224		Después de escribir la matriz ampliada, de aplicar transformaciones
225		elementales para conseguir los ceros por debajo de la diagonal,
226		el sistema equivalente que nos ha quedado es este sistema $x+y+z=3$,
227		$y+z=2$ y $0=0$.
228		Entonces, ¿qué ocurre?
229		¿ $0=0$?
230	E3:	Si.
231	Emi:	Si, ¿no?
232		$y+z=2$, ¿cuál es el valor de la z?

233	Es:	0.
234	Emi:	$y+z=2$, ¿si z vale 0 la y valdría?
235	Es:	2.
236	Emi:	¿Si z vale 1 la y valdría?
237		Uno.
238		¿Si z vale 5 la y valdría?
239	Es:	Menos tres.
240	Emi:	Es decir, ¿cuántos valores le podemos dar a z ?
241	E10:	Muchos.
242	Emi:	Los que queramos, ¿cuántos valores le podemos dar a la y ?
243		Otros tantos y para x lo mismo.
244		¿cuántas soluciones tiene este sistema?
245		Infinitas.
246		¿Cómo se representan las infinitas soluciones de este sistema?
247		Pues vamos a darle a la z el valor λ , si z vale λ y despejamos y de la
248		segunda ecuación, ¿y cuánto vale?
249		$y+z=2$.
250	Es:	[Nadie contesta].
251	Emi:	A ver hemos dicho que z puede tener cualquier valor ¿no?,
252		le podemos dar cualquier valor que queramos a z ,
253		ya que en la última ecuación no me sale un valor determinado para la z ,
254		entonces si despejamos y de la segunda ecuación y vale λ ,
255		¿qué nos queda?
256	E3:	$2-\lambda$.
257	Emi:	Muy bien $2-\lambda$.
258		¿Cómo despejar de aquí la y ? [Emi señala la segunda ecuación].
259		Si tienes que $y+z=2$, entonces $y=2-z$ y si z vale λ ,
260		pues entonces y vale $2-\lambda$.
261		¿Cómo despejamos la x de la primera ecuación?
262		$x=3-y-z$, si sustituimos los valores que tenemos sería $x=3-(2-\lambda)-\lambda$,
263		es decir, que de la primera ecuación $x+y+z=3$ despejamos la x
264		y nos queda $x=3-y-z$ luego sustituimos los valores de y y de z y
265		nos queda $x=3-(2-\lambda)-\lambda$,
266		al hacer cuentas ¿qué valor nos queda para la x ?
267		Sería $x=3-2+\lambda-\lambda$.
268		¿Qué nos queda?
269		Ved aquí, λ desaparece [Emi señala $+\lambda-\lambda$] y x vale...
270	E2:	Uno.
271	Emi:	Uno, entonces ¿cuál es la solución que tiene este sistema?
272		$(x=1, y=2-\lambda, z=\lambda)$.
273		Como λ no tiene un valor determinado y puede ser cualquiera,
274		este sistema tiene infinitas soluciones y este es por lo tanto, ¿de qué tipo?
275	E2:	Un Sistema Compatible Indeterminado.
276	Emi:	¿Y cómo sería un Sistema Incompatible?
277		Imaginad que nos queda $x+y+z=3$, $y+z=1$,
278		esas dos ecuaciones nos han quedado del sistema y la última $0=1$.
279		¿Qué ocurre en ese sistema?
280		¿Con la última igualdad qué pasa?

281		Nos queda $0=1$.
282		¿Qué pasa si después de hacer ceros por debajo de la diagonal principal
283		pasa eso?
284		Que la última ecuación del sistema equivalente es de este tipo,
285		que nos queda $0=1$.
286		¿ $0=1$?
287	E2:	No.
288	Emi:	¿Esta igualdad se puede cumplir? [Emi señala $0=1$].
289	Es:	No.
290	Emi:	Entonces si esta igualdad no se cumple,
291		las otras igualdades del sistema tampoco,
292		Entonces, ¿qué quiere decir?, ¿que el sistema tiene solución?
293	Es:	No.
294	Emi:	El sistema no tiene solución.
295		Entonces, ¿cómo lo llamamos?
296		Sistema Incompatible [S.I.].
297		Entonces, si observáis hemos hecho tres ejemplos de tres sistemas en los
298		que las dos primeras ecuaciones son iguales para todos y varía la última,
299		entonces [Emi va subrayando en cada sistema la última ecuación].
300		¿Qué es lo que ocurre con la última ecuación cuando escalonamos el
301		sistema?
302		Que la última fila nos va diciendo qué es [qué tipo de sistema es].
303		Porque claro, cuando escalonamos el sistema,
304		las últimas ecuaciones son las que nos dan idea de cómo es el sistema,
305		de decir si tiene solución o sino tiene solución,
306		si tiene una o tiene muchas y esto si lo ponemos en relación con las
307		matrices, ¿qué nos quedaría?
308		Si partimos de una matriz ampliada con transformaciones elementales
309		y llegamos al escalonado.
310		¿Cómo es la escalonada para que el sistema sea S.C.D.?
311		[La matriz ya escalonada].
312		Voy a diferenciar la parte de los coeficientes de la parte de los términos
313		independientes.
314		Tenemos aquí un elemento en la primera fila [Emi representa a esos
315		elementos con un circulito y dentro de él una x].
316		Vamos a poner tres elementos en la primera fila,
317		luego la línea discontinua y en el término independiente,
318		he puesto un círculo para los coeficientes y un cuadro para los términos
319		independientes [Emi representa a los términos independientes con un
320		cuadro y una x dentro].
321		Entonces que tenemos, los tres coeficientes de la primera ecuación
322		y el término independiente de la primera ecuación.
323		Si los escalonamos, ¿cómo es la siguiente fila?
324		Al escalonarlo ya por debajo de la diagonal el primer elemento [de la
325		segunda fila] se hace...
326	Es:	0.
327	Emi:	Entonces tenemos un cero y luego dos coeficientes y el término
328		independiente [en la segunda fila].

329		¿De acuerdo?
330		Y la tercera fila, ¿cuántos ceros tendrá?
331	E3:	Dos.
332	Emi:	Dos, entonces sería 0,0, un coeficiente y luego el término independiente.
333		¿Qué es lo que ocurre en este otro sistema? [En el S.C.I.].
334		Cuando pasamos de la matriz ampliada con transformaciones
335		elementales a la matriz escalonada,
336		para que nos quede en la última ecuación $0=0$.
337		¿Cómo será la última fila?
338		[Emi escribe las dos primeras filas como las escribió en el sistema
339		anterior, pues las dos primeras filas serán iguales en los tres ejemplos].
340		¿Cómo nos va a quedar?
341	E2:	Toda ceros.
342	Emi:	Muy bien.
343		Para que nos quede la última ecuación 0 igual a 0 ,
344		significa que los elementos de la última fila son todos 0 ,
345		tanto para los coeficientes como para el término independiente.
346		¿Y qué pasa con el último caso? [S.I.].
347		Cuando pasamos de la matriz ampliada con transformaciones
348		elementales a la matriz escalonada para conseguir los ceros por debajo
349		de la diagonal.
350		[Emi escribe las dos primeras filas como las escribió en el sistema
351		anterior, pues las dos primeras filas serán iguales en los tres ejemplos].
352		Los coeficientes, ¿cómo van a ser en la última fila?
353	E2:	Todos 0 .
354	Emi:	Todos 0 , ¿pero el término independiente?
355	E2:	Un número.
356	Emi:	Distinto de 0 .
357		Entonces si comparamos esas matrices [Cada una de las tres matrices
358		representa la característica de cada sistema].
359		¿De qué depende el hecho de que sea de un tipo o de otro? [de un tipo de
360		sistema o de otro].
361		A ver vamos a fijarnos nada más en la matriz de coeficientes,
362		en el primer caso, ¿la última fila es 0 ?, ¿es una fila nula la última?
363	E3:	No.
364	Emi:	No.
365		En el segundo caso, ¿la última fila, la de coeficientes, es 0 ?
366		Si.
367		Y en la del sistema incompatible, ¿la última fila de la matriz de
368		coeficientes es 0 ?
369		Si, ¿no?
370		¿Y cómo se distingue el caso de S.C.I del caso de S.I.?
371		La matriz ampliada en el S.C.I. si miramos los coeficientes y el término
372		independiente [en la última fila], ¿la última fila es nula?
373	E3:	Si.
374	Emi:	Si.
375	Emi:	Y sin embargo, si miramos la matriz ampliada en el caso del S.I.,
376		¿la última fila es nula?, ¿la última fila de toda la matriz ampliada?

377		No.
378		Entonces de estos ceros depende que el sistema salga de una forma o de
379		otra.
380		Según los ceros que salgan en estas matrices [en particular en la última
381		fila], dependerá que el sistema sea de un tipo o de otro.
382		Entonces si recordáis cuando vimos las matrices hablamos de rango,
383		de rango de una matriz.
384		Dijimos el rango es el número de filas linealmente independientes.
385		Fila linealmente independiente significa que ninguna fila puede
386		escribirse como combinación lineal de las otras.
387		Y os dije cómo obtener el rango de una matriz,
388		pero sólo hicimos un ejemplo, entonces seguro no se acuerdan.
389		Pero dijimos que para encontrar el rango de una matriz hay que hacer
390		ceros por debajo de la diagonal principal.
391		Si por ejemplo en el caso de la matriz de orden 3 [matriz cuadrada de
392		orden 3], al hacer ceros por debajo de la diagonal,
393		no se nos hace ninguna fila nula, el rango es 3 [$Rg(C)=3$].
394		Si al hacer ceros por debajo de la diagonal principal una fila se nos hace
395		nula y las otras dos no, el rango es 2 [$Rg(C)=2$].
396		Aquí pasaría lo mismo en el sistema incompatible,
397		si una fila de los coeficientes es 0, el rango es 2 [$Rg(C)=2$].
398		Y ahora si nos fijamos en la matriz ampliada,
399		¿cuál es el rango de la matriz ampliada?,
400		en el sistema compatible determinado,
401		¿cuántas filas nulas tiene la matriz ampliada?
402	E3:	Ninguna.
403	Emi:	Ninguna, el rango de la matriz ampliada es también 3 [$Rg(A)=3$].
404		¿Cuál es el rango de la matriz ampliada en el caso de un sistema
405		compatible indeterminado?
406		El de la ampliada también es 2 porque la última fila es 0 [$Rg(A)=2$].
407		Y en el caso del sistema incompatible,
408		¿Cuál sería el rango de la matriz ampliada?
409	E2:	2.
410	Emi:	¿Tiene alguna fila nula la ampliada?
411		En la ampliada el termino independiente en la última fila no es nulo,
412		entonces si contamos filas no nulas,
413		el rango lo podemos obtener contando el número de filas no nulas,
414		el rango es 3 [$Rg(A)=3$].
415		Entonces, ¿qué pasa siempre en los sistemas compatibles determinados,
416		en los compatibles indeterminados y en los incompatibles respecto a los
417		rangos?
418		Pues tenemos las siguientes propiedades de sistemas.
419		Si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz
420		ampliada [$Rg(C)=Rg(A)$] igual al número de incógnitas entonces...
421		[Emi sigue escribiendo] Si el rango de la matriz de coeficientes es igual
422		al rango de la matriz ampliada [$Rg(C)=Rg(A)$] y esto menor que el
423		número de incógnitas entonces...
424		Si el rango de la matriz de coeficientes es distinto del rango de la matriz

425		ampliada [$\text{Rg}(C) \neq \text{Rg}(A)$] entonces...
426		[Emi termina de escribir eso y dice] Bueno a ver, tenemos estos tres
427		casos posibles en cuanto hablamos del rango de las dos matrices,
428		si comparamos el rango de una matriz de coeficientes con el rango de la
429		matriz ampliada, puede ocurrir que los dos rangos sean iguales o que
430		sean distintos [Emi lo señala en lo que escribió en la pizarra].
431		Y cuando son iguales tenemos dos situaciones diferentes,
432		puede ocurrir que el número, que el valor del rango coincida con el
433		número de incógnitas o que sea menor.
434		Entonces atendiendo a los tres casos que hemos visto,
435		en la primera situación, en el primer sistema que hemos planteado se
436		corresponde con qué caso de los tres.
437		Hemos escrito en los tres casos un sistema con tres ecuaciones y tres
438		incógnitas, el primer ejemplo que hemos puesto,
439		el rango de la matriz de coeficientes es tres, el rango de la matriz
440		ampliada es tres y el número de incógnitas es tres.
441		Entonces siempre que tengamos rango de la matriz de coeficientes igual
442		al rango de la matriz ampliada igual al número de incógnitas.
443		El sistema ¿cómo nos saldrá?
444	E10:	Sistema Compatible Determinado.
445	Emi:	Es un S.C.D.
446		¿Qué significa eso?
447		Que el sistema tiene...
448	E2:	Una solución.
449	Emi:	¿Qué pasa cuando el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango
450		de la matriz ampliada, pero el número es menor que el número de
451		incógnitas?, como en este otro caso [Emi señala el segundo ejemplo],
452		el $\text{Rg}(C) = \text{Rg}(A)$ [igual a 2] pero es menor que el número de incógnitas
453		[tres], entonces nos sale siempre un S.C.I.
454		Eso significa que hay...
455	E2:	Muchas soluciones.
456	Emi:	Infinitas.
457	E2:	Por eso muchas.
458	Emi:	Muchas, infinitas soluciones.
459	Es:	[Risas].
460	Emi:	Y ¿Qué pasa como en este caso cuando el $\text{Rg}(C) \neq \text{Rg}(A)$?
461		Es decir, cuando el $\text{Rg}(C) = 2$ y el $\text{Rg}(A) = 3$,
462		es decir, los dos son distintos, el sistema es...
463	E2:	Sistema Incompatible.
464	Emi:	Si es S.I., es decir, que no tiene solución.
465	E7:	¿Ninguna?
466	Emi:	Ninguna, es irresoluble el problema.
467		Entonces nosotros no hemos demostrado esto, simplemente lo hemos
468		ejemplificado, pusimos un ejemplo de cada caso y hemos comprobado
469		que se cumple la situación, pero aunque no lo hayamos demostrado,
470		este enunciado se cumple siempre.
471		¿Nosotros nos vamos a preocupar de esto?
472		Pues no, porque vamos a seguir aplicando el mismo método,

473		sólo que cuando veamos al hacer ceros cómo nos quedan las matrices,
474		ya sabremos en qué situación estamos y podemos decir de antemano,
475		cuántas soluciones tiene el sistema.
476		Pero el método va a ser el mismo, plantearemos las ecuaciones del
477		problema, pondremos el sistema en forma matricial,
478		aplicaremos las transformaciones elementales sobre la matriz ampliada,
479		para conseguir un sistema escalonado y sobre el sistema escalonado
480		hallamos las soluciones y ya vemos de qué tipo es, ¿de acuerdo?
481		Entonces vamos a clasificar.
482		[Emi ve su libro de texto] En la página 44, el número 25.
483		Por ejemplo este sistema $5x-2y+z=-1$, $-2x+y-3z=4$ y la última ecuación
484		$3x-y-2z=0$.
485		Entonces vamos a ver de qué tipo es este sistema y si podemos hallar la
486		solución.
487		Entonces primero vamos a escribir el sistema cómo es, es un sistema,
488		¿cuántas incógnitas tiene?
489		Es un sistema lineal con tres ecuaciones.
490		¿Y cuántas incógnitas?
491		Con tres incógnitas.
492		Entonces cuando nos den un sistema y tengamos que estudiarlo,
493		lo clasificamos, decir de qué tipo es y contamos siempre el número de
494		ecuaciones y el número de incógnitas y ¿a continuación qué hacemos?
495		Poner el sistema en forma matricial.
496		Entonces, ¿cómo nos quedaría este sistema?
497		[Emi escribe la forma que tendrán las matrices $()()=()$].
498		La matriz de coeficientes sería, en la primera fila 5,-2,1.
499		La segunda fila.
500	E3:	-2, 1,-3.
501	Emi:	-2, 1,-3 y en la tercera 3,-1,-2.
502		Las incógnitas x,y,z [Emi escribe estas incógnitas en la segunda matriz,
503		en forma de columna].
504		Y los términos independientes -1,4,0.
505		Llamamos a la matriz de coeficientes C, a la de las incógnitas X y a la de
506		los términos independientes B.
507		Entonces, ¿cuál es nuestra matriz ampliada?
508		Para este sistema la matriz ampliada sería por filas 5,-2,1 línea
509		indeterminada y luego -1, luego la segunda fila -2,1,-3 y 4;
510		y en la última fila 3,-1,-2 y 0.
511		Esta sería la matriz ampliada.
512		Hay que anotar a cada matriz su nombre [Emi escribe debajo de cada
513		matriz su nombre, a la matriz de coeficientes, a la matriz de las
514		incógnitas, a la matriz de los términos independientes y finalmente a la
515		matriz ampliada].
516		Vale, entonces tenemos esa matriz ampliada.
517		Pues ahora sólo vamos a aplicar transformaciones elementales para
518		conseguir ceros por debajo de la diagonal y decir qué tipo de sistema es
519		y si es posible hallar la solución [en el caso en el que el sistema tenga
520		solución, hay que encontrarla].

521		[Suenan los timbres indicando que la clase ha terminado].
522		Bueno, localizamos la diagonal principal y luego ¿dónde tenemos que
523		hacer ceros?
524		Pues aquí [en los dos elementos que están por debajo del primer número
525		de la diagonal principal en la primera columna].
526		Ya es nuestro timbre.
527	Es:	Si.
528	Emi:	[Emi mira su reloj].
529		Bueno pues entonces hacemos como ayer, para casa [Emi mientras va
530		subrayando los elementos que hay que hacer 0 en la matriz ampliada].
531		Se hacen los ceros por debajo de la diagonal principal y ponéis cuánto es
532		el rango de C y el rango de A, según el valor que obtengamos decid
533		cómo es el sistema y si se puede hallar la solución.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la novena clase grabada de la profesora Emi del jueves 30/10/08.

Resumen: Emi inicia repasando el planteamiento de un problema, luego resuelve un sistema de 2×2 con el método de reducción, en seguida hace un breve comentario histórico sobre la resolución de sistemas y después empieza a ver la Regla de Cramer y hace un ejemplo (Emi hace una parte y luego pasa al lugar de los estudiantes a supervisar).

L		Transcripción
1	Emi:	[Emi está diciendo algunos aspectos generales sobre el planteamiento del
2		problema] Hay que leer varias veces hasta entender cuál es la situación y
3		nos interesa casi siempre indicar desde el principio lo que significa cada
4		una de las incógnitas, entonces si escribimos qué representa cada
5		incógnita, a continuación, ¿qué haremos?
6		Pues lo que estuvimos haciendo ayer, ¿lo recordáis?
7		Después de escribir el significado de cada incógnita, lo que representa, si
8		hay muchos datos, los datos los debemos escribir en...
9	E7:	En tablas.
10	Emi:	En tablas, muy bien.
11		Hay veces que no hay datos para usar tablas, esos dependerá del
12		enunciado, ¿y después?
13		¿Qué es lo que vamos haciendo?
14	E5:	Escribiendo la ecuación.
15	Emi:	Vamos escribiendo las ecuaciones, normalmente cada frase del
16		enunciado nos va a dar información suficiente para escribir una
17		ecuación, ¿de acuerdo?
18		Entonces hay que leerlo, entenderlo, escribir lo que representan las
19		incógnitas, escribir los datos si son muchos en las tablas, sino no y
20		escribir las ecuaciones pues leyendo el enunciado frase a frase y
21		trasladando la información de la frase a una ecuación matemática, vale.
22		Como ya hemos corregido todos los del libro, los hemos planteado todos,
23		os he hecho una copia de ejercicios de selectividad, para casa, entonces
24		son en total 18 problemas.
25	Es:	¡Eh!
26	Emi:	No los tenéis que hacer los 18 seguidos, los vais haciendo, para este fin
27		de semana si queréis pues haced los 5 primeros vale, y el lunes los
28		corregimos, luego les daré también una hoja donde les daré la solución,
29		más adelante a lo largo de la semana que viene os daré las soluciones de
30		los problemas, como hago siempre, con todo el planteamiento completo
31		para que podéis corregir los ejercicios que no nos de tiempo a corregir en
32		clase.
33		No os los doy ahora porque quiero que penséis vosotros y si os interesan,
34		yo creo que con lo que hemos trabajado ya podéis afrontar la tarea sin
35		demasiada dificultad, no son complicados eh.
36		Bueno y siguiendo con los problemas, ayer repasamos el método de
37		reducción de Gauss, para encontrar la solución de un sistema, hoy vamos
38		a conocer un nuevo método para resolver los sistemas de ecuaciones,
39		pero para entender un poco el método, porque este año no estamos
40		fundamentando la teoría, pero si quiero que ya que no estamos

41		fundamentando la teoría si relacionéis el método con algo que ya
42		conocéis.
43		Y en secundaria vosotros habéis resulto muchos sistemas de dos
44		ecuaciones con dos incógnitas, sistemas lineales ¿no?
45		¿Cuáles son los métodos que vieron en secundaria?
46	E3:	Reducción, sustitución.
47	Emi:	Reducción, sustitución e igualación.
48		¿A cuál de estos tres métodos creéis que yo voy a hacer referencia?
49	E7:	Reducción.
50	Emi:	¿A cuál?
51	E7:	Reducción.
52	Emi:	Muy bien al de reducción.
53		Si el método que hemos aplicado en este curso, el método de reducción
54		de Gauss, seguimos en el método de reducción.
55		Sólo que la forma de aplicar el método de reducción que hemos visto
56		este año es un poco diferente al que vosotros conocéis, ¿de acuerdo?
57		Os voy a poner un ejemplo muy sencillo.
58		Un estudiante de Arquitectura vende todos los libros y las revistas que
59		tiene y vende todos los libros de Arquitectura que tiene al mismo precio
60		y todas las revistas también y dos amigos suyos, un amigo A por ejemplo
61		le compra mmhhh vamos a ver [Emi está pensado pues va inventando el
62		problema] 3 libros y 4 revistas y paga en total 11 euros y otro amigo
63		compra 2 libros y 8 revistas y paga en total 6 euros.
64		¿A qué precio ha vendido los libros de Arquitectura y las revistas que
65		tiene?
66		¿Cómo ponemos los datos?
67		Hemos dicho que en algunas ocasiones los recogemos en forma de tabla.
68		[Emi empieza a escribir la tabla en la pizarra].
69		Tenemos un amigo A y un amigo B [Emi escribe A, B como
70		encabezado de las filas].
71		Tenemos los libros (L) y las revistas (R) y el coste [Emi escribe L, R,
72		Coste como encabezados de las columnas].
73		Del primer amigo hemos dicho que ¿cómo era?
74		3 libros y 4 revistas y paga por ello 11€ [Emi va escribiendo los datos
75		correspondientes en la tabla: 3, 4, 11€].
76		Prácticamente regalados, qué conste.
77		[Emi se acerca a E9 y le explica que en fila se escribe a los amigos y por
78		columna los artículos y el coste].
79		Y el segundo amigo compra 2 libros de Arquitectura y 8 revistas y paga
80		por ello 6 €.
81		No se lo que dije antes pero voy a anotar 10 €.
82	E2:	6€.
83	Emi:	Voy a anotar 10 €.
84		¿Cuáles son las incógnitas?
85	E2:	x es el precio de los libros.
86	Emi:	x es el precio de los libros.
87	E2:	y es el de las revistas.
88	Emi:	y es el precio de las revistas, muy bien.

89		Entonces plantear el sistema y resolverlo aplicando el método de
90		reducción, pero no con la notación matricial sino como lo hacéis en
91		secundaria, exactamente igual.
92		[Emi va pasando al lugar de los estudiantes para supervisar su trabajo].
93		[Después de varios minutos] ¿Lo tenéis ya?
94		Ya todos habéis escrito las ecuaciones del sistema, me lo podéis decir
95		por favor.
96	E5:	$3x+4y=11$.
97	Emi:	$3x+4y=11$ esa es la primera ¿y la segunda?
98	E5:	$2x+8y=10$.
99	Emi:	$2x+8y=10$, vale.
100		¿Recordáis en qué consistía el método de reducción?
101		En eliminar las incógnitas multiplicando las ecuaciones por los números
102		adecuados de tal forma que al sumar o restar dichas ecuaciones se
103		eliminara una incógnita y pudiéramos despejar.
104		Vamos a eliminar la y, por ejemplo, ¿recordáis?
105		Método de reducción, para la x vamos a utilizar.
106	E3:	Habías dicho la y [Emi había dicho que eliminaría la y].
107	Emi:	Bueno primero eliminamos x, eliminamos x y eliminamos y.
108		Lo vamos a hacer por separado, ¿cómo eliminamos la x? ¿cuáles son los
109		coeficientes de la x en cada ecuación?
110		3 y 2.
111		¿Por qué números hay que multiplicar?
112	E2:	Arriba por 2 y abajo por 3.
113	Emi:	Si nos quedan del mismo signo restaríamos las ecuaciones si nos
114		quedan con signos opuestos sumamos, vale.
115		Vamos a multiplicar la primera ecuación por 2 a ver qué nos quedaría.
116		Nos quedaría.
117	Es:	$6x+8y=22$.
118	Emi:	$6x+8y=22$ muy bien, ¿y la de abajo?
119		Sería, dijimos arriba por 2 y abajo por 3, sería...
120	Es:	$6x+24y=30$.
121	Emi:	$6x+24y=30$.
122		Y si restamos ¿qué nos queda?
123		Nos queda $6x$ menos $6x$, entonces ya no hay x, y $8y$ menos $24y$ nos
124		queda menos $16y$ igual a 22 menos 30 , son menos 8 .
125		Si despejamos la y, ¿qué nos queda?
126		Menos 8 entre menos 16 , es decir la y vale $1/2$ [$y=1/2$].
127		¿Cómo haríamos para eliminar la y?
128		¿Cuáles son los coeficientes que tenemos?
129		En la primera 4 y en la segunda 8 .
130		Multiplicamos arriba por 2 , tenemos $6x+8y=22$.
131		Y abajo tenemos $2x+8y=10$.
132		Si restamos, ¿qué nos queda? $4x=12$.
133		Da igual restarle a la de arriba la de abajo o a la de abajo la de arriba,
134		cambiarán los signos, pero luego el valor de y será el mismo.
135		$x=3$ ¿no? pues 12 entre 4 es 3 [$x=3$].
136		Entonces ya hemos encontrado la solución, tenemos $x=3$, $y=1/2$.

137		Ese es el método de reducción puro.
138		Con el método de sustitución ¿qué se hacía una vez que teníamos una de
139		las incógnitas?
140	E1:	Sustituir.
141	Emi:	Sustituir exactamente.
142		Bueno pues este método que hemos hecho es el método de reducción
143		puro para estas ecuaciones lineales.
144		Bueno vamos a ver si encontramos un algoritmo, es decir, una regla que
145		nos sirva para todos los sistemas de este tipo y que sea fácil de aplicar.
146		Este método que nosotros escribimos de esta forma ya lo usaban los
147		chinos en el siglo III, los chinos sabían de sobra sistemas de ecuaciones
148		lineales, ¿qué es lo que hacían?
149		En un tablero.
150		Por ejemplo para este sistema que acabamos de resolver, diseñarían un
151		tablero con dos columnas y tres filas, en cada columna aparecerían los
152		coeficientes de cada ecuación, la primera columna para la primera
153		ecuación y la segunda columna para la segunda ecuación, entonces ¿qué?
154		Claro los números chinos no son como los nuestros, tenían un sistema de
155		numeración pues como el de los romanos, posicional con palitos, una vez
156		que tenían los palitos arriba, abajo en medio y así, iban representando los
157		números, ellos cuando resolvían estos problemas utilizaban junquillos,
158		juncos pequeños como palitos, y como sus números se representan
159		todos mediante palos pues con los juncos iban escribiendo los números,
160		vale.
161		Y era muy curioso porque aquí por ejemplo todos los números son
162		positivos [en el problema que acaba de resolver].
163		Pero, ¿cómo distinguirías vosotros los números positivos de los
164		negativos con juncos, con palillos?
165	E10:	Doblados.
166	Emi:	¿Cómo?
167	E10:	Doblándolos.
168	Emi:	No, había unos números puestos en una posición determinada para
169		representar un número determinado, es decir, que eso no lo podemos
170		cambiar, el 3 se sitúa de una manera determinada y hay que respetar esa
171		posición.
172		Pues fijaos que lo hacían por colores, los juncos de un color por ejemplo
173		el negro, los números positivos y el rojo los números negativos, entonces
174		el color distinguía la naturaleza de los números, positivos para un color,
175		negativos para otro, eso en el siglo III.
176		Entonces aquí que hubieran puesto ellos [En la tabla que acaba de
177		dibujar vacía en la pizarra].
178		Pues con palitos, yo no me sé el sistema de numeración de los chinos
179		pero ellos hubieran escrito en chino en la primera columna el número 3,
180		el 4 y el 11.
181		Y en la segunda columna los coeficientes de la segunda ecuación 2, 8, 10
182		¿De acuerdo?
183		¿Y ahora qué es lo que hacían?
184		Pues algo muy parecido a lo que hacemos nosotros, mediante algoritmos

185		se van manipulando estos números [los de la tabla] y multiplicamos y
186		quitamos unos y ponemos otros de forma que al final hallaban la
187		solución, igual que nosotros, sólo que nosotros con esta notación
188		matemática y ellos manipulando los junquillos.
189		Y los chinos lo sabían eh, esto fue en el siglo III.
190		En el siglo XVII un japonés ideó un algoritmo que es en el que nos
191		basamos hoy con los determinantes y con el método actual que
192		aplicamos.
193		Pero ese método también se aplicó, se usó un siglo más tarde en el siglo
194		XVIII eh.
195		Entonces de forma separada matemáticos de un lugar y de otro, mucho
196		más posterior que los chinos, idearon un algoritmo en el que a través de
197		los determinantes se hallan las soluciones.
198		¿Qué tiene que ver esto con los determinantes?
199		Pues la forma de relacionarlo es la siguiente, hemos visto un ejemplo con
200		números, vamos a utilizar ahora letras porque realmente ¿las
201		matemáticas cómo han avanzado?
202		Pues si los chinos al usar su método hubieran tendido una notación
203		matemática adecuada, hubieran avanzado mucho más rápidamente y les
204		hubieran dado 20 mil vueltas a los números, pero ¿qué pasa?
205		Que se quedaron ahí, lo que pasa es que entre oriente y occidente nunca
206		han tenido tanta relación como se tiene ahora con la comunicación, es
207		decir, ahora los científicos trabajan casi de manera conjunta y los
208		conocimientos se ponen a disposición de todos, antes era todo lo
209		contrario, en Europa por lo menos, durante muchos siglos los
210		matemáticos descubrían cosas y no explicaban a los demás cómo lo
211		habían inventado, para que no se los copiaran, entonces ahora es un poco
212		difícil de imaginar eh.
213		Entonces vamos a plantear el sistema siguiente con letras $ax+by=p$ y
214		$cx+dy=q$.
215		Vamos a resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, un
216		sistema lineal, entonces gracias a que se encontraron con determinantes,
217		porque los determinantes se encontraron gracias a alguien que se le
218		ocurrió utilizar letras en lugar de números, porque si que conocían los
219		métodos, los algoritmos para resolver estos sistemas, pero a alguien se le
220		ocurrió, bueno pues en lugar de números voy a usar letras y voy a ver si
221		encuentro una regla que me sirva para todos los casos y se encontró,
222		¿Cuál es?
223		Vamos a ver si vosotros la encontráis.
224		Vamos a eliminar la y, ¿cómo eliminaríamos la y?
225		Para eliminar la y, si hacemos lo mismo que antes, la primera ecuación la
226		multiplicamos por...
227		No sabemos el valor de b y d porque son letras, pero ¿de qué forma
228		podríamos eliminar la y?
229		Multiplicando arriba por d y abajo...
230	E12:	Por b.
231	Emi:	¿Y luego?
232	E3:	Restarlas.

233	Emi:	Muy bien, pues entonces hacemos eso, multiplicamos la primera
234		ecuación por a, perdón por d y la segunda la multiplicamos por b,
235		entonces al multiplicar por d tenemos $adx+bdy=dp$ y la segunda
236		$bcx+bdy=bq$.
237		Ya tenemos los mismos coeficientes para la y, entonces si restamos las
238		ecuaciones, ¿qué nos quedaría?
239		¿Cómo restamos adx menos bcx ? ¿Cómo haríamos esa operación?
240	E7:	Pues $adx - bcx$.
241	Emi:	$adx - bcx$, si sacamos factor común será $(ad-bc)x$, ¿de acuerdo?
242		Y las y se eliminan porque los coeficientes son iguales y si los restamos
243		pues desaparecen.
244		Entonces es $(ad-bc)x$ igual a... ¿y en el otro lado [de la igualdad] si
245		restamos los términos independientes nos queda $dp-bq$.
246		Y ¿qué hacemos para dejar sola la x?
247		Despejamos sería x igual a dp menos bq , entre $ad-bc$.
248		Entonces vamos a ver si encontramos una manera que nos diga de dónde
249		salen estos números, para no tenernos que aprender nunca la fórmula con
250		las letras sino con una regla sencilla.
251		Vamos a volver al tema de las matrices y de los determinantes, vamos a
252		escribir la matriz ampliada del sistema, ¿cuál sería?
253		La matriz de coeficientes.
254		Los coeficientes de la x.
255	E3:	a luego b.
256	Emi:	Bueno de la primera columna sería a y c, de la segunda columna.
257	E3:	b y d.
258	Emi:	b y d, y la tercera [la de los términos independientes] p y q.
259		Entonces esta es la matriz ampliada del sistema, que conviene anotar si
260		lo manejamos por columnas, pues la primera columna es la de los
261		coeficientes de la x, la segunda columna es la columna de los
262		coeficientes de y, y la última la columna de los términos independientes,
263		vale.
264		Entonces vamos a fijarnos en el denominador de esta fracción $x=(dp-$
265		$bq)/(ad-bc)$ $ad-bc$ y vamos a mirar las matrices que tenemos, la matriz
266		ampliada está formada por la matriz de coeficiente junto con los
267		términos independientes, la matriz de coeficientes es la matriz C con las
268		dos primeras columnas y la ampliada la de coeficientes con la de los
269		términos independientes, entonces fijaos nada más en la matriz de
270		coeficientes, sus columnas a, c y b, d.
271		¿Qué será $ad-bc$?
272	E3:	Multiplicado cruzado.
273	Emi:	Claro multiplicamos ad menos bc , ¿eso qué es?
274	E7:	Es el determinante.
275	Emi:	¿Qué?
276	E7:	El determinante.
277	Emi:	Muy bien, es el determinante de la matriz de coeficientes, es decir, que
278		aquí abajo en el denominador [de $x=(dp-bq)/(ad-bc)$].
279		¿Cómo hemos obtenido x?
280		La solución queda en forma de fracción, en el denominador si nos

281		fijamos lo que tenemos es el determinante de la matriz de coeficientes
282		$[C]$.
283		Claro y ahora lo de arriba [el numerador], ¿qué es?
284	E15:	d por p menos b por q [E15 indica con su dedo en el viento el producto
285		cruzado, es decir, desde su lugar está tratando de indicar ese producto de
286		acuerdo a como Emi lo tiene escrito en la matriz ampliada en la pizarra].
287	Emi:	¿Pero qué cambio hay que hacer?
288		Pues si yo sustituyo la primera columna de la matriz de coeficientes por
289		la columna de los términos independientes, ¿qué determinante me sale?
290		Pues ese $[dp-bq]$.
291		A esa matriz la vamos a llamar Cx .
292		Vamos a ver, tenemos la matriz de coeficientes, en la primera columna a,
293		c y en la segunda b, d.
294		Pero cómo queda si sustituimos [en la primera columna los términos
295		independientes], pues sería la matriz Cx , en la primera columna p, q y la
296		segunda la dejamos igual b, d.
297		Con lo cual que tenemos en el numerador [de $x=(dp-bq)/(ad-bc)$], ¿qué
298		es $dp-bq$?
299		¿Si multiplicamos en cruz y restamos?
300		Pues es justo el determinante de esta matriz Cx .
301		Entonces tenemos que x es igual al determinante de Cx entre el
302		determinante de C [$x= Cx / C $], ¿de acuerdo?
303		Pues exactamente igual que esto, aplicamos el mismo método para
304		eliminar la x y hallamos la solución de la y y lo comparamos con los
305		determinantes, pues la y nos sale que es igual a un cociente que es igual,
306		con el mismo denominador, el determinante de la matriz de coeficientes
307		y en el numerador nos sale, ¿el qué? ...
308		Pues la matriz de coeficientes alterada $[Cy]$, cambiamos los coeficientes
309		de la y por los términos independientes.
310		Entonces fijaos que al encontrar un algoritmo que sirviera para resolver
311		los sistemas de ecuaciones de forma sencilla y tener un método que se
312		pudiera memorizar fácilmente y ver gráficamente la forma en que se
313		obtiene, pues empezaron a trabajar con los determinantes y de ahí
314		salieron los determinantes eh, la palabra determinante aunque estuvieron
315		trabajando desde el siglo XVIII con ellos, pero no se acuñó la palabra
316		hasta el siglo XIX que fue en 1801 que fue, ¿adivina quién dio el
317		nombre a los determinantes?
318	E7:	Alguien que se atravesó por ahí.
319	Es:	[Risas].
320	Emi:	No, Gauss, os he repetido que Gauss había sido el matemático que se
321		considera príncipe de las matemáticas, uno de los príncipes de las
322		matemáticas y estamos en este tema de las matrices y de los
323		determinantes mencionándolo muchas veces.
324	E3:	Gauss.
325	Emi:	Pues fue él el que les dio el nombre, ¿de acuerdo?
326		Bueno entonces como podéis ver este método es mucho más sencillo y
327		mucho más cómodo, pues no es necesario hacer ceros, nos sale
328		directamente la solución.

329		Pero ¿cuál es la pega del método? [¿cuál es el inconveniente de este
330		método?].
331		¿Qué pega tiene este método?
332	E7:	Que sólo es para matrices de orden 2.
333	Emi:	No, esto se puede generalizar, yo lo he puesto en el caso más simple con
334		dos ecuaciones y dos incógnitas, pero si ampliamos a tres ecuaciones y
335		tres incógnitas el método es el mismo, sólo que con una incógnita más
336		Entonces ¿cómo se puede aplicar?
337		Tiene que ser un sistema de este tipo, que el número de ecuaciones
338		coincida con el número de incógnitas, no siempre vamos a tener sistemas
339		de ese tipo.
340		Este método sólo se aplicará en esta situación, el número de ecuaciones
341		igual al número de incógnitas, es decir, ¿cómo es la matriz de
342		coeficientes?
343		Cuadrada ¿no?
344		Si no fuera cuadrada no podríamos calcular su determinante, es decir,
345		que para poder aplicar este método tiene que existir el determinante y
346		para que exista el determinante la matriz tiene que ser cuadrada,
347		entonces en los sistemas en los que nos salga la matriz cuadrada, de
348		coeficientes lo podremos aplicar, ¿pero siempre? O ¿hay algún caso en el
349		que aunque la matriz sea cuadrada no se pueda obtener la solución con
350		este método?
351	E7:	Cuando el denominador sea 0.
352	Emi:	Exactamente porque tenemos un cociente, el cociente va a salir siempre
353		excepto cuando el denominador sea 0, pues no se puede dividir por 0, no
354		podemos utilizar la Regla de Cramer si el determinante de C [la matriz
355		de coeficientes] vale 0.
356		Para generalizar y para concluir, este método nos dice que se puede dar
357		la solución de esta manera cuando el determinante de la matriz de
358		coeficientes sea distinto de 0, si tenemos un sistema con el mismo
359		número de ecuaciones que de incógnitas, si la matriz de coeficientes, si
360		su determinante es diferente de 0, existe solución, la podemos hallar
361		mediante esta regla que se conoce como Regla de Cramer, ¿de acuerdo?
362		Lo hemos visto para sistemas pequeños vamos a verlo con un ejemplo
363		para un sistema más grande, ¿recordáis el sistema que resolvimos ayer
364		con el método de reducción de Gauss, haciendo ceros por debajo de la
365		diagonal?
366		Pues ahora veréis de que forma tan rápida se resuelve.
367		Tenemos $2x-y+z=1$, $x-2y+3z=4$ y la última ecuación $x+y+3z=0$, vamos a
368		resolver el sistema, ¿qué tipo de sistema es?
369		Ya lo resolvimos ayer [con el método de Gauss].
370		Es un sistema lineal con tres ecuaciones y tres incógnitas.
371		¿Podemos intentar la regla de Cramer o no?
372	E3:	Si.
373	Emi:	En principio si, tenemos tres ecuaciones y tres incógnitas, vamos a ver la
374		matriz ampliada, la primera columna 2,1,1; la segunda -1,-2,1; 1,3,3 en
375		la tercera columna y 1,4,0 en los términos independientes.
376		La matriz con las primeras tres columnas es la matriz de coeficientes C.

377		La matriz ampliada la vamos a llamar A.
378		La matriz de coeficientes es ampliada, luego hemos dicho que podemos
379		calcular el determinante y queremos probar con la regla de Cramer.
380		Entonces vamos a ver cuánto vale el determinante de C.
381		Vamos a calcular el determinante, $ C $ igual [Emi anota el símbolo de
382		determinante y empieza a completarlo] a 2,1,1 [en la primera columna];
383		-1,-2,1 [en la segunda columna] y 1,3,3 [en la tercera columna].
384		Calculadlo.
385		Método para encontrar determinantes de orden tres, regla de Sarrus.
386		[Emi pasa a supervisar el trabajo de sus estudiantes].
387		¿Recordáis?
388	E3:	Se multiplican de tres en tres.
389	Emi:	Si todos los productos de tres en una orientación menos los otros
390		productos de tres en la orientación contraria.
391		Eso os habéis hecho en el examen, aunque algunos cambiaron los más
392		por los menos.
393	E15:	Yo no lo recuerdo.
394	Emi:	¿Quieres que lo repase?
395	E15:	Si.
396	Emi:	Bien.
397		Entonces será, empezamos con la orientación hacia abajo, identificamos
398		la diagonal principal y sería 2 por -2 por 3 son -4 por 3 son -12, [Emi va
399		señalando los números que va multiplicando].
400		Luego -1 por 3 por 1 es -3. Y 1 por 1 por 1 es 1
401		Esos son en una orientación.
402		Ahora menos.
403		1 por -2 por 1 es -2; después 1 por 3 por 2 es 6; y 3 por 1 por -1 es -3.
404		Entonces ahora -3-12+1 es -14. Luego -2-3+6 es 1 pero con el menos de
405		afuera [de la orientación contraria] queda -1.
406		Entonces tenemos -14-1 son -15.
407	E12:	No entiendo de dónde salió el -2.
408	Emi:	[Emi vuelve a repasar cada producto señalando los números que va
409		multiplicando y los resultados que fueron saliendo].
410		Es distinto de 0 [el resultado], entonces si el determinante es distinto
411		de 0 podemos aplicar la regla de Cramer, sabemos que tiene solución, es
412		un sistema compatible determinado.
413		La solución sería la que se calcula de la siguiente manera, empezamos
414		por el valor de la x, ¿recordáis?
415	E10:	Maestra qué dice ahí [en la pizarra, E10 no entendía unas palabras que
416		Emi escribió en la pizarra].
417	Emi:	Cramer.
418		Es uno de los matemáticos que en el siglo XVIII estuvo trabajando con
419		los determinantes, así que propuso este método para resolver sistemas de
420		este tipo por eso lleva su nombre.
421		Entonces cómo encontramos los valores de la x, ¿qué hemos dicho?
422		Arriba el determinante de Cx [en el numerador] y abajo el determinante
423		de C [en el denominador].
424		Para la y ¿qué será?

425		El determinante de C_y partido por el determinante de C .
426		Y para la z , determinante de C_z partido por el determinante de C .
427		Sabemos que el determinante de C vale -15 .
428		Veis que todos los denominadores van a ser iguales [Emi señala el cada
429		cociente el denominador].
430		Abajo en los denominadores tendremos -15 .
431		¿Qué es lo que hay que cambiar para la solución?
432		Pues los numeradores, vamos a calcular.
433		¿Cómo sería la x ?
434		¿Cuál es el determinante que tenemos que calcular?
435		¿Cuál es la matriz?
436		Nos vamos a la matriz ampliada y la vamos marcando por columnas,
437		primera columna coeficientes de x , segunda columna coeficientes de y ,
438		tercera columna coeficientes de z .
439		¿Qué debemos hacer?
440	E2:	Sustituir la columna como si fuera x .
441	Emi:	Cambiar la columna de la x por los términos independientes, entonces
442		tengo que escribir el determinante con la primera columna $1,4,0$ y la
443		segunda columna la columna de las y , $-1,-2,1$ y la columna de la z , $1,3,3$.
444		Y abajo [en el denominador] el determinante de C y este valor ya lo
445		tenemos.
446	E3:	Y luego sustituiríamos la columna de las y .
447	Emi:	¿Cómo sería para la y ? Dime el determinante [Emi voltea a ver a E3].
448	E3:	Pues ya no se anota el $-1, -2, 1$ [columna de la y].
449	Emi:	Pero dime la primera columna, sería $2, 1, 1$ y ahora si la segunda
450		columna.
451	E3:	$1,4,0$.
452	Emi:	$1,4,0$.
453	E3:	Después $1,3,3$.
454	Emi:	Muy bien y $1,3,3$.
455		¿Y cómo sería para z ?
456	E3:	Para z sería $2,1,1$.
457	Emi:	$2,1,1$.
458	E3:	$-1,-2,1$.
459	Emi:	$-1,-2,1$.
460		Muy bien y luego $1,4,0$.
461		Y abajo [en el denominador] el determinante de C .
462		Entonces ¿Cuántos determinantes tenemos que calcular?
463	E3:	Tres.
464	Emi:	Ya hemos calculado uno [El determinante de C] y otros tres más.
465		En total tenemos que calcular cuatro determinantes.
466		Ya veréis que con cuatro determinantes resolvemos de forma directa el
467		sistema, hallamos directamente la solución.
468		Entonces ahora hacemos los cálculos para cada determinante.
469		Sería [Emi empieza a resolver el determinante C_x].
470		Sería $-6+0+4$ menos $0+3-12$.
471		Y abajo [en el denominador] ya lo habíamos calculado y es -15 .
472		Entonces nos queda 7 partido por -15 , nos queda menos 7 quinceavos.

473	E15:	¿Por qué no queda 7 partido por -15?
474	Emi:	Porque no se acostumbra poner el signo abajo, se acostumbra ponerlo en
475		medio, ni arriba ni abajo, es por cuestiones de estética.
476		Vamos a hacer lo mismo para la y tenemos $24+3+0$ menos $4+0+3$.
477		Y abajo [en el denominador] ya lo habíamos calculado y es -15.
478		Entonces nos queda 20 partido por -15, si dividimos todo entre 5 nos
479		queda menos 4 tercios.
480		[Pasa a supervisar el trabajo de los estudiantes].
481	E5:	Ya lo he terminado.
482	Emi:	Ya, ¿cuánto te da?
483	E5:	3 quintos.
484	Emi:	Muy bien, es el valor que nos había dado [Ayer cuando lo resolvieron
485		con el método de reducción de Gauss].
486		Muy bien entonces z nos da 3 quintos.
487		Muy bien, entonces la solución del sistema es x igual a menos 7
488		quinceavos, e igual a menos 4 tercios y z igual a 3 quintos.
489		¿Qué tipo de sistema habíamos dicho que era?
490		S.C.D.
491		Entonces para concluir, Regla de Cramer, nos dice que un sistema que
492		tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, si su
493		determinante es distinto de 0, entonces el sistema es un S.C.D. y
494		podemos hallar la solución mediante cocientes de determinantes
495		directamente.
496		¿Qué método os gusta más, el de reducción de Gauss o el de
497		determinantes?
498		Hay veces que sólo se podrá aplicar uno, pero ¿cuando se puedan aplicar
499		los dos?
500	E3:	Es más fácil el de Gauss, es más rápido.
501	Emi:	Pues este es más directo [Regla de Cramer].
502		Pero a mi personalmente me gusta más hacer ceros, el método de Gauss,
503		ir haciendo ceros por debajo de la diagonal principal, ¿de acuerdo?
504		Para mañana un ejercicio nada más.
505	E5:	Pero mañana no hay clase [por ser 1 de noviembre, día festivo].
506	Emi:	Bueno pues para el fin de semana 5 ejercicios que os había de dejado y
507		del libro, el 27a de la página 44, ese ejercicio hay que hacerlo por los dos
508		métodos, por Gauss y Cramer.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la décima clase grabada de la profesora Emi del viernes 7/11/08.

Resumen: Emi introduce el tema de Programación Lineal con una breve reseña histórica sobre la segunda guerra mundial, algo sobre aplicaciones (el caso Mercadona) y finalmente habla un poco acerca del ejemplo 4 de la página 83 del libro de texto.

L		Transcripción
1	Emi:	[Los estudiantes entran haciendo desorden].
2		Bueno, ¿podemos empezar ya la clase?
3		Hoy comenzamos un tema nuevo que se llama Programación lineal, que
4		está en su libro [de texto] en la página 70, pero todavía no usaremos el
5		libro.
6		Nuestra asignatura se llama Matemáticas Aplicadas a las Ciencias
7		Sociales, este nombre de la asignatura determina los contenidos, porque
8		no tiene los mismos contenidos la asignatura de Matemáticas que la de
9		Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.
10		Pero, ¿qué son las Matemáticas?
11		¿Qué me dirían? ¿Qué serían para ustedes las Matemáticas?
12	E4:	Son una pesadilla.
13	Es:	[Risas].
14	Emi:	[Emi Sonríe].
15		Las Matemáticas están estructuradas como un conjunto de modelos y
16		teorías matemáticas.
17	E12:	¿Eso dónde está? [E12 pregunta qué dónde está ese contenido en el libro
18		de texto].
19	Emi:	Estamos viendo la introducción al tema.
20		Todo este conjunto de modelos y teorías matemáticas fundamentan los
21		contenidos teóricos de las matemáticas, ¿y qué ocurre?
22		Que aparte de la teoría está la práctica, no solamente se desarrollan
23		modelos matemáticos y teorías matemáticas sino que también se estudia
24		cuáles son sus aplicaciones, entonces precisamente como nuestra
25		asignatura se llama Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales [Emi
26		subraya en la pizarra donde había escrito Matemáticas Aplicadas a las
27		Ciencias Sociales], nosotros donde realmente hacemos hincapié es en las
28		aplicaciones y no nos preocupamos de la teoría, utilizamos la teoría, en
29		las Matemáticas clásicas es todo lo contrario, hay que fundamentar la
30		teoría y las distintas teorías y modelos matemáticos.
31		Nosotros nos fijamos sólo en las aplicaciones, hemos visto, porque lo
32		comentamos en los primeros temas con matrices y los sistemas de
33		ecuaciones lineales que hay muchas aplicaciones, entonces pues en otras
34		ciencias Física, Química, Ingeniería y Economía se aplican las
35		Matemáticas, a la Sociología y hoy en día, sobre todo en la sociedad
36		moderna nadie pone en duda la importancia que han tenido dentro del
37		desarrollo de la tecnología las aplicaciones de las Matemáticas.
38		Sin embargo hoy quería afrontar el tema desde otro punto de vista,
39		¿cuándo las Matemáticas cambian la historia?
40		Porque es cierto que nos afectan a nuestra vida y que el mundo moderno
41		y el mundo tecnológico se sustenta en el avance de las teorías
42		Matemáticas, en las aplicaciones a otros campos, pero ahora os hago esta

43		pregunta, ¿cuándo las Matemáticas cambian la historia?
44		La aplicación, más concretamente, la aplicación de alguna técnica
45		matemática que ha influido en algún acontecimiento social.
46		Vosotros habéis estudiado historia.
47		Y vieron algo el año pasado, en primero de bachillerato, vamos a hablar
48		de lo que pasó en Europa en el siglo XX.
49		Esta vez no vamos a hablar de civilizaciones antiguas que se ocupaban
50		de resolver ecuaciones como pasó en el tema de Sistemas de Ecuaciones
51		Lineales.
52		Vamos a hablar de Europa, del siglo XX, más concretamente sobre
53		mediados del siglo XX, ¿de qué acontecimientos habla la historia a
54		mediados del siglo XX?
55		Pues depende qué aspectos queramos observar, me voy a centrar en los
56		conflictos bélicos en Europa.
57		¿Qué tendrá que ver eso con las Matemáticas? ¿no?
58		¿Cuáles son las dos grandes guerras que ha habido en Europa en el siglo
59		XX?
60	Es:	La primera guerra mundial y la segunda.
61	Emi:	La primera guerra mundial y la segunda guerra mundial.
62		Vamos a hablar de la segunda guerra mundial y de lo que ocurrió
63		después de la segunda guerra mundial.
64		¿En qué año fue la segunda guerra mundial?
65	Es:	En 1938.
66	Emi:	De 1939 a 1945.
67		¿Qué pasó con aquella guerra mundial?
68		¿Quiénes fueron los vencedores?
69		Bueno si es que se puede hablar de vencedores en una guerra, pero las
70		potencias, fueron las más importantes Francia, Gran Bretaña y la Unión
71		Soviética.
72		La Unión Soviética, la URSS que ahora mismo no existe como tal
73		porque ha cambiado la historia.
74		¿Y qué más potencias de Europa ganan la guerra?
75	E7:	Estados Unidos.
76	Emi:	Estados Unidos.
77		Entonces teníamos los vencedores, Estados Unidos, Francia, Gran
78		Bretaña y la URSS.
79		¿Y cuál era el país vencido?
80	E7:	Alemania.
81	Emi:	¿Qué pasó con Alemania?
82		¿Cómo estaba Alemania cuando acabó la guerra en 1945?
83	E13:	No tenían dinero, no tenían nada.
84	Emi:	Era un país devastado.
85		Pero claro, siempre que ha habido conflictos bélicos siempre han estado
86		relacionados con invasiones, con modificaciones de fronteras ¿no?
87		¿Qué le pasó a Alemania cuando terminó la guerra?
88		Pues Alemania queda destruida porque el país estaba completamente
89		devastado como consecuencia de todos los bombardeos que sufrieron al
90		final de la guerra.

91		El país, voy a dibujarlo más o menos se dividió en dos, bueno mejor
92		dicho en cuatro zonas, los alemanes cuando perdieron la guerra no tenían
93		realmente ninguna independencia, estaban dominados por los
94		vencedores, entonces era un país dividido en 4 zonas, una zona, la más
95		oriental estaba dominada y controlada por la Unión Soviética (URSS),
96		y las otras 3 zonas en la parte más occidental estaban controladas por
97		Estados Unidos, Francia y Gran Bretaña, cada uno de estos países tenía
98		una zona que controlaba.
99		¿Y la capital de Alemania en qué zona caía? Pues caía en la zona más
100		oriental en la zona controlada por la URSS y la ciudad estaba dividida en
101		4 sectores, se repartían las 4 potencias vencedoras los 4 sectores de la
102		ciudad Alemana, se había dividido el país entero en 4 zonas, entonces en
103		una zona controlaba la URSS y en las otras controlaban Estados Unidos,
104		Francia y Gran Bretaña, ¿de acuerdo?
105		¿Nunca habéis visto películas de esta época?
106		Al poco tiempo de acabar la guerra en el año 1948, Estados Unidos
107		Francia y Gran Bretaña deciden o quieren unificar sus zonas, las 3 zonas
108		en una y quieren formar un estado democrático occidental alemán, un
109		nuevo estado.
110		¿Qué es lo que ocurre? Que la Unión Soviética no ve eso con buenos
111		ojos, no le pareció muy buena idea.
112		Y mientras el 3 de junio del año 1948 en Londres, cada uno de estos tres
113		países firman un acuerdo en el que deciden unificar las zonas y crear un
114		estado, a los pocos días, en junio de 1948 la URSS como medida
115		depresiva decide comenzar un bloqueo, ¿de qué tipo?
116		Pues corta las comunicaciones por carretera porque claro, para pasar de
117		la zona occidente a la de oriente había una serie de carreteras, entonces
118		qué es lo que hace la URSS, corta las comunicaciones terrestres de la
119		zona occidental a la ciudad de Berlín, ¿con qué idea?
120		Pues con la de que no pudieran abastecer a la ciudad de Berlín, pues al
121		cortar las comunicaciones no podían llegar a Berlín ni alimentos, ni
122		medicinas a sus zonas de Berlín a esto se le dice “El bloqueo de Berlín”.
123		¿Ustedes saben algo sobre el bloqueo de Berlín?
124	E5:	No había nacido.
125	Emi:	Es cierto no habían nacido aún.
126		Pero, ¿quién era el presidente de Estados Unidos en aquél tiempo?
127		El presidente de Estados Unidos era Truman.
128		¿Y quién gobernaba la Unión Soviética?
129		Stalin, en esa época era Stalin.
130		¿Qué diferencia había en términos políticos en un país y en otro?
131		Pues Estados Unidos, un país con democracia y la URSS un país con una
132		dictadura tremenda.
133		Pues entonces tenían unas ideologías totalmente diferentes, Estados
134		Unidos tenía mucho comercio y la economía de la URSS estaba
135		totalmente controlada desde el estado, ¿de acuerdo?
136		Entonces eran mundos totalmente diferentes, y era un período que se
137		llamó “La guerra fría”.
138		No había enfrentamientos bélicos pero sí había dos grandes bloques, dos

139		grandes potencias que competían entre sí, entre Estados Unidos y la
140		URSS.
141		Como la URSS no quería esta influencia tan enorme ni que se formara
142		ese nuevo estado, por eso decidió el bloqueo, pero ¿qué le dijo el
143		presidente americano a Stalin?
144		Le dijo que ni se le ocurriera evitar las comunicaciones aéreas ni invadir
145		las zonas que les correspondían a ellos porque de lo contrario, si ejercían
146		alguna de estas medidas se declararía una nueva guerra en Europa.
147		Evidentemente la URSS no evitó las comunicaciones aéreas ni invadió
148		los sectores que no eran de la URSS.
149		Pero no entraban alimentos a sus sectores, entonces ¿cuánto tiempo
150		puede durar una ciudad sin alimentos?
151		¿Recordáis lo que nos pasó el año pasado con el transporte no?
152		Que los supermercados quedaron vacíos, no pasó nada porque había
153		existencias de más en los supermercados y en las casas y duró poco, pero
154		imaginaos en el siglo XX, ¿qué pasa cuando no llega el suministro
155		necesario?
156		Pero ¿qué hicieron los americanos con sus aliados, los franceses e
157		ingleses?
158		Pues les llevaron alimentos para abastecer por vía aérea.
159		Entonces durante un año que fue el tiempo que duró el bloqueo, con
160		aviones estuvieron llevando alimentos, pero claro en una ciudad tan
161		grande con tantas necesidades, ¿qué cantidad de mercancía se
162		transportó?
163		Por ejemplo, para que os hagáis una idea, se realizaron más de 800
164		vuelos diarios en avión para abastecer, transportaron 2 millones y medio
165		de toneladas de víveres, ya en marzo de 1949 llegaron a transportar 8 mil
166		toneladas de alimentos por día a la ciudad de Berlín, que era la misma
167		cantidad, que antes del bloqueo lograba llevar a la ciudad mediante vía
168		terrestre.
169		¿Qué es lo que pasó?
170		Cuando Stalin se da cuenta de que el bloque no servía para nada, pues
171		en mayo se levantó.
172		Y no pasó nada, nada en el sentido de que no se declaró ninguna guerra y
173		de que los aliados occidentales consiguieron su propósito, crearon un
174		nuevo estado que se llamó La República Federal Alemana y a su vez la
175		URSS decidió crear La República Democrática Alemana, que es un dato
176		muy curioso pues los de la URSS que era un estado con dictadura le
177		pusieron República Democrática.
178		¿Qué pasó con la ciudad de Berlín?
179		Pues la ciudad de Berlín quedó dividida en dos, una parte oriental
180		dominada por el régimen soviético y otra occidental dominada por la
181		República Federal, era una pequeña isla en medio de la zona de
182		Alemania oriental con dos nombres totalmente distintos, claro muchos
183		de los alemanes que vivían en la parte oriental no querían vivir de esa
184		manera y se pasaban a la parte occidental.
185		Al cabo de los años, pues lo que se decidió fue levantar un muro de
186		cemento o de hormigón que separase de norte a sur toda la ciudad, para

187		que no hubiera paso de la Alemania del este a la Alemania del oeste,
188		¿cuánto tiempo duró eso? ¿cuándo fue la caída del muro de Berlín?
189		Pues esa situación duró hasta, en 1961 es cuando se construye y en 1991
190		es la caída del muro de Berlín.
191	E3:	Yo todavía no nacía.
192	Emi:	Entonces fijaros eso cambió totalmente la historia, bueno ese muro
193		recibió el nombre de “Telón de Acero”.
194		Tras la caída del muro de Berlín ¿qué pasó?
195		Desaparecieron las dos Alemanias y se unificaron en una nueva
196		Alemania, lo que conocemos ahora con el nombre de Alemania, pero
197		fijaros el tiempo, hasta la década de los años 90’s existían las 2
198		Alemanias con 2 regimenes políticos y económicos totalmente opuestos,
199		con el problema del telón de acero y de la falta de libertad para pasar de
200		un estado al otro de la ciudad.
201		Bueno y ¿qué tiene que ver esto con las Matemáticas?
202	E13:	No sé.
203	E3:	Esa es la pregunta.
204	Emi:	Esa es la pregunta.
205		¿De qué manera influyeron las Matemáticas en todo este asunto del
206		bloqueo de Berlín?
207	E7:	En calcular la gasolina para el avión.
208	Emi:	Vamos a ver, en conseguir aplicar técnicas matemáticas para conseguir
209		que los costes del transporte fueran los mínimos posibles y ahí es donde
210		interviene la Programación Lineal.
211		La importancia de la Programación Lineal, entonces sino queremos
212		entrar en grandes profundidades, que es la forma más sencilla.
213		Vamos a hacer una primera pregunta, ¿qué es?
214	E13:	¿Esa pregunta vendrá en el examen?
215	Emi:	Vamos a ver, cuando preguntamos cosas en la clase no significa que
216		siempre vengán en el examen, pero si quiero que esto os ayude a
217		comprender la importancia que ha tenido esto, esta parte de las
218		matemáticas en la segunda mitad del siglo XX, ¿de qué manera?
219		Pues la programación lineal es un conjunto de técnicas de modelos
220		matemáticos con el objetivo de ayudar a tomar decisiones en aquellos
221		problemas en los que aparecen muchísimas variables.
222		¿Y el nombre de dónde viene?
223		El nombre de Programación Lineal no tiene nada que ver con los
224		ordenadores eh, porque ya sabéis que hay una parte de informática que
225		es la programación, referida al que se dedica a diseñar programas para el
226		ordenador.
227		Aquí la programación lineal viene de un término militar, es todo lo
228		referido a la planeación de los entrenamientos de la logística, de los
229		militares.
230		¿Y por qué recibió ese nombre?
231		Por los orígenes.
232		Porque la programación lineal se desarrolló precisamente en la segunda
233		guerra mundial, en el ámbito militar, los americanos contrataron a
234		matemáticos norteamericanos pero también podían ser de origen

235		europeo, para aplicar estas técnicas matemáticas, de forma que los
236		desplazamientos, los costes de este desplazamiento, la distribución y
237		todo lo demás se hiciera de la mejor manera posible y ahí es donde
238		comenzó realmente.
239		¿Cuáles son los fundamentos y la evolución?
240		Bueno nos tenemos que remontar a años anteriores a la segunda guerra
241		mundial.
242		Fueron varios matemáticos los que intervinieron, en 1928 un
243		matemático americano Neuman, desarrolló una teoría que se llama
244		“Teoría de juegos”, con las técnicas que escribió en esta teoría, después
245		en el año 1939 un matemático ruso que se llamaba Kantorovich publicó
246		un libro que se llamaba “Métodos matemáticos de organización y
247		planificación de la producción”.
248	E13:	Kanto ¿qué? [E13 pregunta por el nombre del matemático ruso].
249	Emi:	Todos estos nombres los tienen en su libro [de texto].
250	E3:	¿No hay algún matemático que sea español?
251	Emi:	Bueno de eso hablaremos otro día.
252		Pero en esta parte no, la mayoría de los matemáticos que aparecen en los
253		libros de matemáticas son todos extranjeros.
254	E3:	¿Pero no ha habido mujeres tampoco?
255	Emi:	Si ha habido mujeres matemáticas.
256	E2:	Tú.
257	Emi:	[Sonríe].
258	Es:	[Risas].
259	Emi:	No, me hubiera gustado pero no.
260		Hay pocas [mujeres matemáticas] pero sí que las hay, hay muy pocas
261		comparadas con los hombres eh.
262		Bueno en estos métodos [Métodos matemáticos de organización y
263		planificación de la producción] ya se utilizan las técnicas que
264		desarrollarían posteriormente en la programación lineal, estos métodos
265		eh, para organizar y planificar la producción en las empresas.
266		Después en los años 1941 y 1942 se habla del problema de transporte y
267		se define de forma precisa el problema de transporte, el problema de
268		transporte del que voy a hablarles después, que está relacionado con el
269		bloqueo de Berlín, pues es un problema de transporte el que tenían que
270		solucionar los americanos.
271		En 1947 Neuman publica la “Teoría de la dualidad”, esta es la teoría que
272		permitió un avance en la programación lineal y también en el mismo
273		año, en 1947 otro americano Dantzing descubre un algoritmo que se
274		llama “Algoritmo Simplex”.
275		Y para acabar ya el gran impulso que se le dio a estas técnicas, fue en
276		1984 un matemático inglés Karmarkar.
277	Es:	¿Karmarkar?
278	Emi:	Que desarrolló el “Método del punto interior”.
279		Fijaos una cosa, la programación lineal es muy compleja, en el sentido
280		de que los problemas que trata de resolver, son problemas en los que hay
281		muchísimas variables, entonces las técnicas empleadas y los cálculos que
282		realizaron son bastantes complejos y nosotros no nos vamos a centrar en

283		problemas tan complicados con tantas variables.
284		Nos vamos a centrar en problemas más sencillos, solamente con dos
285		variables pero quiero que sepáis que el campo de aplicación de la
286		programación lineal es realmente muy extenso y puede solucionar
287		problemas muy complejos, entonces claro por qué pudo haber avanzado
288		demasiado la programación lineal, pues gracias a que se ha desarrollado
289		la informática, entonces gracias a los grandes ordenadores, como hay
290		que hacer muchísimos cálculos, los ordenadores ayudan a hacer estos
291		cálculos en muy poco tiempo, porque si los tuviéramos que hacer
292		nosotros, sería prácticamente una tarea imposible tendríamos que llenar
293		varias páginas seguidas para realizar esos cálculos, por lo cual gracias al
294		avance de la informática, la programación lineal también se ha
295		desarrollado, ¿de acuerdo?
296		Bueno y para continuar mencionarles de este matemático Dantzing fue
297		contratado por las fuerzas aéreas norteamericanas y se creó un grupo de
298		investigación, todos los trabajos relacionados con la programación lineal
299		y gracias a Dantzing que ya se había resuelto el problema de transporte,
300		el bloqueo de Berlín fue un fracaso para los rusos y un éxito para los
301		países aliados, ¿de acuerdo?
302		Vamos a ver un caso muy curioso en el que se aplicó la programación
303		lineal, en el año de 1958, la ciudad de Moscú estaba recuperándose de la
304		guerra también y en plena construcción había que planificar el transporte
305		de la arena, ya sabéis que la arena se utiliza para hacer la mezcla con el
306		cemento en la construcción, entonces resolvieron un problema con la
307		programación lineal de cómo realizar un transporte en el cual, a ver por
308		aquí tenía las cifras exactas [Emi busca una hojas donde tiene anotado
309		eso].
310	Es:	[Los estudiantes mientras aprovechan para conversar].
311	Emi:	Si ya lo tengo, en el año 1958 se hizo el cálculo del plano de un grupo de
312		transporte, de arena para la construcción para edificación de la ciudad de
313		Moscú, había 10 puntos de partida, 10 puntos de donde salía la arena y
314		230 puntos de destino.
315		Sin la programación lineal hubieran tardado más tiempo y les hubiera
316		costado más dinero, de hecho, se ha estimado que si los países
317		subdesarrollados aplicaran técnicas de programación lineal en sus
318		sistemas de producción y de transporte, pues el país crecería a un ritmo
319		del 10 al 15 por ciento en el primer año solamente, es decir, que no es
320		ninguna tontería esto, las grandes aplicaciones de la programación lineal.
321	Es:	[Hablando continuamente entre ellos].
322	Emi:	Voy a empezar a sacar gente a la calle eh, sino dejáis de hablar.
323		[Todos se quedan callados].
324		No podéis estar todo el tiempo hablando eh, una clase de matemáticas no
325		tiene por que ser sólo una clase de números.
326		Las aplicaciones de la programación lineal, son sobre todo en las
327		estrategias militares, en la industria y en la economía, estos son los 3
328		grandes campos de aplicación.
329		¿Cuáles son los objetivos de la programación lineal?
330		Los objetivos principales de la programación lineal pues son aumentar al

331		máximo los beneficios, la producción, ¿pero eso qué significa?
332		Pues que consigamos el máximo beneficio posible y esto de aumentar al
333		máximo es lo mismo que decir maximizar la producción, cuando
334		hablamos de la palabra maximizar es aumentar al máximo.
335		Pero también otro objetivo es reducir al mínimo los costes de
336		producción, podemos decir que cuando hablamos de reducir al mínimo
337		nos referimos a minimizar.
338		Y tanto maximizar como minimizar es lo que en matemáticas se conoce
339		como optimizar.
340		Los problemas de optimización son los problemas en los que se buscan
341		los máximos y los mínimos, como nosotros estamos en matemáticas
342		aplicadas los problemas de optimización serán problemas en los que
343		busquemos el máximo posible o el mínimo posible.
344		¿Cuáles son otros objetivos?
345		Pues el de gestionar recursos humanos y materiales de la mejor manera
346		posible, de hecho el primer problema de programación lineal era de
347		cómo asignar a 70 personas 70 puestos de trabajo de forma a optimizar el
348		rendimiento de la empresa.
349		Bueno y si nos vamos ahora a la actualidad, dejamos eso de los
350		conflictos bélicos y nos pasamos, nos centramos en lo que nos rodea
351		como hemos dicho antes, la economía, la industria utilizan estas técnicas.
352		Vamos a buscar un ejemplo concreto de algo que tengamos aquí muy
353		cercano.
354		¿Vosotros sabéis lo que es el Mercadona?
355	Es:	Si, un supermercado.
356	Emi:	Bueno pues el otro día estuve consultando la página del Mercadona y se
357		lee lo siguiente en su página web.
358		[Emi saca una hoja y lee].
359		¿Qué es el Mercadona?
360		Es una compañía de distribución, integrada dentro del segmento de
361		supermercados, de capital 100% español. Su presidente ejecutivo es Juan
362		Roig. A nivel nacional está presente en 46 provincias de 15 comunidades
363		autónomas con una red de 1,188 supermercados hasta el 28 de octubre de
364		este año (2008).
365		Es una empresa que todavía está en expansión eh, y que en muy poco
366		tiempo a crecido mucho, se ha estado desarrollando de una forma
367		extraordinaria hasta el punto de que el año pasado, en el 2007, alcanzó
368		una facturación de 13.986 millones de euros, un 15% más que en el año
369		2006. Sus instalaciones y clientes son atendidos por más de 62.000
370		personas en toda la cadena, es decir, que tienen más de 62.000
371		trabajadores, luego ya habla sobre...
372	E4:	¿Es de lo de pequeñas y medianas empresas?
373	Emi:	No, no es de pequeñas y medianas empresas, de hecho Mercadona está
374		pensando en expandirse al extranjero porque está en un punto de
375		expansión económica tal que puede tomar esa decisión, no sabemos lo
376		que hará pero por ejemplo, ¿por qué ha tenido tanto éxito?
377		Porque tienen una política de precios siempre bajos, ¿qué es lo que dice?
378		¿Por qué Mercadona puede ofrecer esos precios tan bajos?

379		Y lo que dice es lo siguiente, porque compramos los productos
380		directamente de origen, sin intermediarios, porque establecemos
381		acuerdos al comprar con los fabricantes y así podemos ofrecer a
382		nuestros clientes productos de alta calidad a unos precios más bajos.
383		Y ahora habla de que lo que garantiza es la alta calidad de sus productos
384		Y habla de producción, dice planificamos nuestra compra, acortamos el
385		tiempo de almacenaje y transporte y mantenemos los productos en su
386		temperatura óptima, así seleccionamos la mejor calidad y nos
387		aseguramos de que los productos lleguen a sus manos en el mínimo
388		plazo de tiempo posible y con la máxima frescura, luego habla de los
389		controles de calidad.
390		Entonces de todos estos datos relativos a la empresa, ¿dónde creéis
391		que aparece la programación lineal?
392		¿O creéis que no utilizan las técnicas de la programación lineal?
393		¿Vosotros habéis ido en coche desde Huelva a Sevilla?
394	Es:	Si.
395	Emi:	¿Habéis visto un trancentro que hay?
396	E7:	Es un supermercado.
397	Emi:	No es un supermercado, es un gran almacén que tienen, un almacén
398		logístico que tienen de supermercados Mercadona, entonces en lo
399		referido a la planificación de la compra, del tiempo de almacenaje y de
400		transporte es donde esta empresa aplica las técnicas de la programación
401		lineal, sino lo hiciera no tendría esos costes tan bajos ni esos precios tan
402		bajos que puede ofrecer a los clientes, entonces hoy en día las grandes
403		empresas, incluso para publicidad también se aplican todas estas
404		técnicas.
405		Todo esto que ya se que a vosotros os parece aburrido, que no os gusta
406		porque no son números y que pesáis que no tiene que ver, sí tiene que
407		ver porque es todo lo que ha potenciado esta parte de las matemáticas y
408		de hecho influye constantemente en el mundo actual, nosotros ya para
409		centrarnos, no vamos a tratar como hemos dicho antes, esos problemas
410		tan complejos en los que intervienen tantas variables, vamos a analizar
411		problemas mucho más sencillos y aplicar técnicas de programación
412		lineal sencillas eh, existen técnicas que son mucho más complejas y que
413		no están a nuestro nivel, en el libro [de texto], vamos a hablar del
414		problema de transporte que lo tenéis en la página 83, que me gustaría
415		que lo vieráis.
416		Entonces, ¿en qué consiste el problema de transporte?
417		Vamos a suponer que se elabora un producto nada más que uno.
418		Podemos pensar en una empresa que elabora un producto, pues podemos
419		poner los centros de producción, vamos a suponer que tenemos n centros
420		de producción, vamos a suponer que la empresa tiene fábricas, que
421		produce ropa, ¿dónde tiene todas las fábricas? Pues las tiene por todo
422		mundo y muchas de ellas en países subdesarrollados, las grandes
423		empresas europeas para reducir costes de producción, muchas veces se
424		van a los países donde la mano de obra es más barata, es decir, eso lo
425		hacen casi todas las empresas, esta producción la tienen que enviar a los
426		centros de destino, vamos a suponer que tenemos m centros de destino,

427		no son estos los datos de la empresa Zara, pero imaginad que Zara
428		podría tener, y lo estoy diciendo totalmente inventado, 150 fábricas y
429		centros de destino, como Zara si se ha expandido por medio mundo ya,
430		pues imaginad que tenga 7,800 tiendas, entonces hay que distribuir esa
431		producción por todos esos centros de destino, pero claro en cada una de
432		las tiendas solicitarán el artículo en una serie de cantidades, entonces
433		vamos a suponer que son p cantidades solicitadas en cada uno de los
434		centros, cada centro le pedirá una cantidad determinada de ese artículo y
435		ahora, ¿en qué consiste? ¿cómo se resuelve este problema?
436		Lo que se pretende conseguir resolviendo el problema es decidir desde
437		cada centro de producción, ¿qué cantidades enviar a cada uno de los
438		centros de destino, de forma que se satisfaga la demanda solicitada por
439		cada uno de estos centro de destino y de forma que los costes de
440		transporte sean mínimos?
441		Esto es un problema de Programación Lineal, este es un problema de
442		transporte, básico, entonces vamos a leerlo el que nos ponen como
443		ejemplo, simplificar y se trabaja sólo con 2 variables, voy a leerlo en esta
444		misma página (83), el ejemplo 4, dice dos factorías de refrescos A y B
445		producen respectivamente, 6000 y 4500 cajas diarias. Los puntos de
446		distribución de dichos refrescos son tres grandes superficies, S1, S2 y
447		S3, cuya demanda es de 2250, 4500 y 3750 cajas respectivamente.
448		El coste de transporte por caja, en euros, desde cada una de las factorías
449		a los centros de venta, aparece en la tabla 1. Entonces en esta tabla 1 en
450		filas está la factoría A y la factoría B y en columna las tres grandes
451		superficies y los costes por ejemplo de transportar una caja de la fábrica
452		A hasta el supermercado 1 son 2 euros y de transportarla hasta el
453		supermercado 2 son 1'5 euros y de transportarla hasta el supermercado 3
454		son 3 euros. Si nos fijamos en los precios de costes desde la fábrica B
455		hasta el supermercado 1 es 1 euro, desde la fábrica B hasta el
456		supermercado 2 son 2 euros y desde la fábrica B hasta el supermercado 3
457		el coste de caja es de 2,5 euros, ¿de acuerdo?
458		Entonces la pregunta es, o lo que nos plantea el problema es ¿cuántas
459		cajas deben enviarse desde cada factoría a cada superficie para que el
460		transporte sea lo más económico posible?
461		¿Cómo debemos resolver estos problemas? Pues primero tenemos que
462		decidir las variables que manejamos que en este caso ¿la x qué va a ser?
463		El número de cajas que salen de las factorías a los centros y por otro lado
464		vamos a tener los costes de ese transporte, ¿de acuerdo?
465		Todo este problema además de otros dos, tenemos que aplicar una serie
466		de restricciones, porque por ejemplo si veis cómo están definidas las
467		variables, como está ahí planteado, se llama x a las cajas que salen de la
468		factoría A a la superficie S1, y a las cajas que salen de la factoría A a los
469		centros S2.
470		[Suena el timbre que indica que la clase ha terminado].
471		Bueno como nos hemos quedado a medias de este problema y este
472		problema lo quiero explicar con detenimiento, lo veremos el próximo
473		día, pero si me gustaría que lo leyerais para la clase del jueves próximo,
474		¿de acuerdo?, porque como tenemos el examen el martes, entonces el

475		lunes repasaremos para el examen de sistemas de ecuaciones lineales,
476		entonces para el jueves la única tarea que os dejo es que lean este
477		problema.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la onceava clase grabada de la profesora Emi del jueves 13/11/08.

Resumen: Emi introduce lo que será la estructura de solución de un problema de programación lineal a través de un ejemplo. Muestra las etapas que lleva la resolución de un problema: 1. Escribir los datos que además incluye definir las variables, definir la función objetivo y cuando sea necesario hacer la tabla de distribución. 2. Plantear las restricciones, transformar las desigualdades y encontrar la región factible y 3. Encontrar el mínimo o máximo de la función objetivo. Emi en la clase de hoy profundiza en el desarrollo de las etapas 1 y 2. Finalmente Emi pide a los estudiantes hacer un ejemplo que ya viene resuelto en el libro para que practiquen las primeras 2 etapas de la resolución del problema, es decir, que traten de reproducir lo que se hizo hoy en clase pero aplicado a un nuevo problema.

L		Transcripción
1	Emi:	[Inicia pasando lista, como regularmente lo hace].
2		Bueno pues este tema que vamos a dar en PL, los problemas luego ya no
3		son tan difíciles, en cuanto hayamos visto algunos ejemplos de cómo se
4		plantean los problemas veréis que son todos iguales, lo único que ocurre
5		es que son problemas amplios, en el sentido de que hay que tratar
6		muchos aspectos y la resolución pues no se hace en 5 minutos, vamos a
7		ver diversos métodos, pero tanto unos como otros de los que veamos,
8		veréis que requieren un tiempo, es decir, que son problemas bastante
9		importantes en sí mismos, pero difíciles no lo son y qué es lo que ocurre,
10		pues ahora todos los problemas que vamos a ver, van a ser de diversos,
11		porque además existe una variedad interesante.
12		En este libro de texto, debido a la representación gráfica, E9 que hoy no
13		está en clase, precisamente hasta ahora yo le había dado las matemáticas
14		como a vosotros ¿no?, con un tamaño de letra adecuado para que ella
15		más o menos captase las cosas, luego ya con la memoria que tiene y con
16		su capacidad pues es capaz de reproducirlo y de resolverlo pero todos
17		estos dibujos, todas estas gráficas que hay que realizar, necesito el apoyo
18		del papel para que ella entienda lo que estoy explicando porque todo lo
19		que se pone en la pizarra ella no lo ve, entonces como ella tiene el libro
20		de texto de la ONCE [La ONCE es una asociación de discapacitados,
21		incluyendo los que tienen deficiencia visual, que ofrece a los estudiantes
22		el libro de texto que llevan en el instituto pero en código Baille], si
23		utilizo el libro de texto ella puede seguir lo que yo voy escribiendo en la
24		pizarra y estos dibujos hacérselos en papel como lo hacéis vosotros, hay
25		tantas líneas, y son para ella tan confusas que no, realmente no percibe
26		las cosas, entonces necesita material especial para dibujar en relieve,
27		entonces con eso sí, entonces de momento me voy a guiar en el libro de
28		texto para que ella tenga el apoyo de los gráficos del libro.
29		Nos habíamos quedado en el inicio del ejemplo 4 de la página 83 del
30		libro de texto, recordáis que en un problema de transporte hay un
31		producto que se elabora en unas fábricas y luego ese producto se
32		distribuye de estas fábricas a diversos puntos, por ejemplo a varios
33		supermercados y hay un precio de transporte desde cada una de las
34		fábricas a cada uno de los supermercados, entonces hay que elegir qué
35		cantidad de producto hay que enviar desde cada fábrica a cada punto de

36		destino a cada supermercado de forma que se satisfaga la demanda de los
37		supermercados, es decir, que los supermercados estén abastecidos, que a
38		los supermercados llegue la cantidad de productos que necesitan pero de
39		tal forma que el coste de transporte desde cada una de las fábricas a los
40		supermercados, el total, el coste sea mínimo ¿de acuerdo?
41		Entonces nosotros trabajaremos con pocas variables y veremos los
42		métodos para resolver estos problemas, eh no me acuerdo pero creo que
43		sólo habíamos leído el enunciado ¿no?, no habíamos hecho nada más.
44		Voy a volver a leer el enunciado, dice dos factorías de refrescos A y B
45		producen respectivamente 6000 y 4500 cajas diarias.
46		Los puntos de distribución de dichos refrescos son tres grandes
47		superficies, S1, S2 y S3, cuya demanda es de 2250, 4500 y 3750 cajas,
48		respectivamente. El coste de transporte por caja en euros, desde cada una
49		de las factorías a los centros de venta, aparece en la tabla 1. Averigua
50		cuántas cajas deben enviarse desde cada factoría a cada superficie para
51		que el transporte sea lo más económico posible.
52		¿Qué ocurre? Que en estos problemas hay muchos datos, entonces la
53		parte fundamental del comienzo del planteamiento es la recogida de los
54		datos, vamos a estructurar esos datos en tablas, aunque lo tenemos ahí
55		resuelto en el libro [de texto], voy a escribir en la pizarra, cuando
56		nosotros nos enfrentamos a un problema de este tipo, ¿cómo recogemos
57		los datos? Pues hay que tener claros los datos que nos dan.
58		Nos hablan de dos fábricas de refresco, entonces tenemos dos fábricas de
59		refrescos una se llama A y la otra se llama B, ¿qué datos nos dan
60		relativos a estas dos fábricas? Pues nos dicen que de la primera se
61		producen 6000 cajas por día y en la segunda 4500, se fabrican 4500 cajas
62		al día, estos son datos de producción, eso hay que tenerlo claro [Emi
63		escribió estos datos en una tabla].
64		Y ahora lo que se produce en esta fábrica se envía a los supermercados,
65		bueno a unos puntos de distribución que habla aquí.
66		Entonces los puntos de distribución normalmente son los supermercados,
67		hay 3 supermercados en el problema, nos hablan del supermercado 1, del
68		supermercado 2 y del supermercado 3, entonces del supermercado 1 nos
69		dicen que necesitan diariamente 2250 cajas por día, del supermercado 2,
70		4500 cajas por día y del supermercado 3, 3750 cajas por día [Emi escribe
71		una nueva tabla con estos datos]. Entonces estos datos se refieren a la
72		demanda.
73		Y el siguiente dato que nos dan es el del coste del transporte, el coste del
74		transporte está expresado en euros y por cada caja, entonces nos dan una
75		tabla en la que tenemos los tres supermercados, en cada columna un
76		supermercado y por filas las fábricas, la fábrica A y la fábrica B y estos
77		son los datos que aparecen en la tabla que nos dan, ¿qué reflejan estos
78		datos de esta tabla?
79		Lo que nos están diciendo es que desde la fábrica A llevar una caja de
80		refrescos al supermercado 1 cuesta 2 euros, llevar una caja de refrescos
81		de la fábrica A al supermercado 2 cuesta 1 euro y medio y llevar una
82		caja de la fábrica A al supermercado 3 cuesta 3 euros.
83	E2:	¿Pero qué es? ¿Son las variables?

84	Emi:	Todo esto que yo he puesto en la pizarra [tres tablas para los datos
85		anteriores] son sólo los datos del problema.
86		Por eso digo que la primera aproximación que debemos hacer para
87		resolver el problema es leer el enunciado del problema un par de veces y
88		entender de lo que nos están hablando, escribir los datos, sacar los datos
89		del enunciado.
90		Entonces todo esto [Emi señala todo lo que ha escrito en la pizarra] son
91		los datos de nuestro problema, en nuestro problema aparecen dos
92		fábricas, aparecen 3 supermercados, nos dan la producción diaria de cada
93		fábrica [primera tabla que Emi hizo en la pizarra], la demanda diaria de
94		cada supermercado [segunda tabla que Emi hizo en la pizarra] y los
95		costes de transporte desde cada una de las fábricas a cada uno de los
96		supermercados [tercera tabla que Emi hizo en la pizarra], por ejemplo
97		transportar una caja desde la fábrica B hasta el supermercado 1 cuesta 1
98		euro, mientras que transportar una caja desde la fábrica B hasta el
99		supermercado 2 cuesta 2 euros y 2 euros y medio desde la fábrica B
100		hasta el supermercado 3.
101		¿Por qué estás diferencias de precios?
102	E7:	Depende de qué tan lejos estén.
103	Emi:	Muy bien, dependerá de la distancia los costes de transporte pues las
104		cajas se introducen en camiones y los camiones tienen que recorrer una
105		distancia, entonces dependiendo de la distancia que cada uno recorra será
106		el coste, por ejemplo podemos ver que aunque no nos lo digan, el
107		supermercado más cercano desde la fábrica A es el supermercado 2
108		[pues es el menor coste que aparece en la tabla para la fábrica A] y para
109		la fábrica B el supermercado más cercano es el 1 [pues es el menor coste
110		que aparece en la tabla para la fábrica B], mientras que el supermercado
111		3 sería el más alejado para las dos de ellas.
112		Entonces si vosotros, sin utilizar ninguna técnica les preguntaran ¿Cómo
113		distribuir, cómo hacer frente a esta demanda con esta producción [Emi
114		señala la primera tabla en la pizarra] minimizando costes? ¿Cómo lo
115		podríamos hacer? Pues a lo mejor pensaríamos, pues como es mucho
116		más barato el transporte de la fábrica B al supermercado 1, pues que
117		todos los refrescos al supermercado 1 salgan nada más que de la fábrica
118		B, ¿no?
119		¿Para el supermercado 2 qué podríamos pensar? Pues que los refrescos
120		que se necesitan, como los costes son más baratos, es decir, el coste es
121		menor desde la fábrica A pues que se envíen desde la fábrica A, ¿y para
122		el supermercado 3? Podríamos pensar que, aunque no hay mucha
123		diferencia [desde la fábrica A, 3 euros y desde la fábrica B, 2 euros y
124		medio] pues pudiera salir alguna parte proporcional de la fábrica A y
125		otra de la fábrica B.
126		Les aseguro que esta idea intuitiva de comparar los precios y de elegir
127		siempre el transporte más barato y no dar otra alternativa pues a lo mejor
128		no nos cuadrarían las cuentas, es decir, con esta solución que podemos
129		dar así a simple vista sin reflexionar pues podríamos tener varios
130		problemas, o bien que la producción no fuera suficiente para abastecer
131		algunos de los supermercados o al contrario que no se satisficiese la

132		demanda, ¿de acuerdo?
133		Bueno, estos son los datos, ¿de acuerdo?, y es importante que cuando
134		nos acerquemos a un problema pues mostrarlos [los datos] y entenderlos.
135		Ahora el siguiente paso es definir qué variables utilizamos, entonces aquí
136		al resolver este problema tenemos las siguientes variables.
137		Todos los problemas que nosotros vamos a plantear van a ser problemas
138		en los que utilizando dos variables, podremos mediante técnicas
139		encontrar la solución.
140		Aquí las variables se han elegido como, la x representa el número de
141		cajas que salen de A al supermercado 1.
142		Y la y representa el número de cajas que salen de A al supermercado 2,
143		es decir, nosotros tenemos que determinar cuántas cajas salen de A para
144		cada uno de los supermercados y cuántas cajas salen de B a cada uno de
145		los supermercados.
146		Si utilizáramos una variable para cada caso, ¿cuántas necesitaríamos?
147	E5:	6.
148	Emi:	6, si queremos determinar cuántas cajas salen de cada una de las fábricas
149		a cada uno de los supermercados utilizaríamos 6 variables.
150		¿Por qué podemos reducir estas 6 variables a 2?
151		Porque vamos a poner unas condiciones de demanda y de producción
152		que hacen que con estas dos variables sea suficiente para el
153		planteamiento del problema, ya veráis porque.
154		Luego tenemos la tabla de distribución y vamos a ver lo que os acabo de
155		comentar, porque con estas dos variables podemos tratar el problema.
156		La tabla de distribución representa el número de cajas que salen de cada
157		fábrica a cada supermercado, ¿de acuerdo?
158		Volvemos a poner una tabla, ahora dejamos más espacio y anotamos en
159		las filas fábrica A y fábrica B y en las columnas supermercado 1 (S1),
160		supermercado 2 (S2) y supermercado 3 (S3).
161		Vamos a ver porque es suficiente el planteamiento con dos variables,
162		¿Cuántas salen de A hasta el S1? ¿Cuántas cajas?
163	E2:	2, ah no eso es en euros [E2 se da cuenta que no corresponde su
164		respuesta].
165	Emi:	No, la tabla que teníamos anteriormente es la de los costes de transporte
166		de cada una de las fábricas a los supermercados pero ahora estamos
167		haciendo la tabla de distribución de cada fábrica a cada punto de
168		distribución.
169	E10:	Serían 2250 [Emi se acerca a E10 y le dice que 2250 es la cantidad que
170		demanda S1 y 6000 es la producción de la fábrica A].
171	Emi:	[Emi le indica a E10 lo que representan las cifras que pudieran dar como
172		respuesta a la pregunta que les hizo].
173		Es decir, de la fábrica A deben de salir ¿A lo más cuántas [al día]?
174	E2:	6000.
175	Emi:	Es más vamos a poner otra columna [Emi agrega una columna más en la
176		fila de la fábrica A y de la B].
177		Entonces la producción de la fábrica A el total que tiene que salir al día
178		son 6000 y de la fábrica B al día tienen que salir 4500 [Emi anota estos
179		datos en la nueva columna, respectivamente].

180		Pero vamos a ver, vamos anotar también en nuestra tabla el total de cajas
181		que demanda cada supermercado [Emi agrega una fila por debajo de las
182		que había y va anotando la cantidad de cajas demandada por cada
183		supermercado].
184		Bueno, ¿el S1 cuántas cajas pide?
185	E2:	2250.
186	Emi:	Muy bien ¿y S2?
187	E2:	4500 y luego 3750 [el supermercado 3].
188	Emi:	Vamos a ir llenando nuestra tabla.
189	E2:	Entonces ¿En el S1 lo que salga de sumar lo de la fábrica A y lo de la
190		fábrica B me tiene que dar 2250?
191	Emi:	Exactamente, y las que salgan de la fábrica A y de la fábrica B a S2
192		tienen que ser en total 4500 y lo mismo aquí [en S3 el total será 3750].
193		Y también si lo miramos en horizontal, de A tienen que salir en total
194		6000 y de B tienen que salir 4500.
195		¿De acuerdo? Entonces, ¿Cuántas cajas salen de la fábrica A al S1?
196	E2:	mmmm [pensando].
197	Emi:	¿Para qué hemos puesto esto de las variables? [Emi señala en la pizarra
198		donde había definido las 2 variables].
199		¿Qué nos dice la variable x? ¿Qué es la x?
200	E2:	El número de cajas que salen de la fábrica A al S1.
201	Emi:	¿Entonces cuántas cajas salen de A a S1?
202	Es:	x.
203	Emi:	x .
204		¿Y cuántas salen de A al S2?
205		y ¿no?
206		¿Cuántas saldrán de A al S3?
207	E2:	Pues lo que quede de x más y hasta 6000.
208	Emi:	Muy bien, efectivamente, si el total que se fabrica son 6000, entonces la
209		diferencia que haya entre 6000 y la suma de estas 2 [Emi señala x, y].
210	E3:	Sería 6000 menos x más y [6000 – (x+y)]
211	Emi:	¿De acuerdo?
212		¿Cuántas salen de B al S1?
213		¿Si de la fábrica A salen x y en total de manda 2250? [Emi señala con su
214		dedo cada uno de estos datos en la pizarra].
215	Es:	2250 – x.
216	Emi:	Muy bien 2250 – x.
217	E2:	Y en el otro [la cantidad de cajas que sale de B al S2] serían 4500 – y,
218		luego.
219	E10:	3750 – (6000- (x+y)).
220	Emi:	Muy bien, serían 3750 – (6000- (x+y)) si quito el paréntesis, bueno
221		mejor ya lo dejo así.
222		Bueno pues entonces ya escribimos la tabla de distribución, teniendo en
223		cuenta cuál es la producción diaria de cada fábrica y cuál es la demanda
224		diaria de cada supermercado y veis que nada más con dos variables
225		hemos conseguido obtener toda la tabla, no hemos necesitado poner 6
226		variables porque si no nuestro problema se complicaría muchísimo.
227	E2:	¿Y así ya se resolvería?

228	Emi:	Todavía no hemos planteado realmente el problema, ahora tenemos que
229		plantear lo que se llama la función objetivo.
230		¿Cuál es nuestro objetivo en este problema en concreto?
231		Encontrar...
232	E2:	El número de cajas que deben enviarse.
233	Emi:	Sí, el número de cajas que deben enviarse pero al menor coste posible.
234		Entonces vamos a llamar z al coste del transporte.
235		Entonces z va a ser el coste del transporte.
236		Voy a volver a copiar en la pizarra la tabla de los costes para tenerla aquí
237		junto con la tabla de distribución.
238		Entonces ¿cuánto cuesta transportar todas estas cajas [Emi señala toda la
239		tabla de distribución] que están indicadas en esta tabla con estos precios
240		de transporte?
241	E2:	Hay que multiplicar el número de cajas por el precio.
242	Emi:	Claro, aquí [en la tabla de costes] nos dan el coste de transporte de cada
243		caja y aquí tenemos el número de cajas que sale de cada sitio [en la tabla
244		de distribución], entonces como ha dicho E2 tenemos que multiplicar el
245		número de cajas que salen de cada punto por el precio del transporte.
246		Entonces, ¿me podéis ir diciendo cómo va a quedar la z, a qué será
247		igual?
248	Es:	$2x$ más...
249	Emi:	$2x$ más, vamos a hacerlo en línea vale, vamos a empezar por la fábrica A
250		Entonces $2x$ más $1'5y$ más 3 por 6000 menos x más y [$3(6000-(x+y))$]
251		vamos a dejarlo así y luego quitamos los paréntesis.
252		Entonces hemos multiplicado lo que sale de la fábrica A a cada
253		supermercado por el coste del transporte, pero aún no terminamos.
254		Sería más... pues ya tenemos la fábrica A pero también tenemos la
255		fábrica B ¿no?
256		¿Entonces cómo será lo de la fábrica B?
257		Pues sería más 1 por $2250-x$ más.
258	E3:	2 por 4500 menos y [$2(4500-y)$].
259	Emi:	2 por 4500 menos y
260	E3:	Más $2'5$ por 3750 menos 6000 menos x más y [$2'5(3750- (6000 -$
261		$(x+y))$].
262	Emi:	Entonces esta z es la que debe ser mínimo [$z=2x+1'5y+3(6000-$
263		$(x+y))+1(2250-x)+ 2(4500-y)+ 2'5(3750- (6000-(x+y)))$].
264		¿Qué tenemos que hacer ahora? Pues simplificar esa expresión, quitar
265		paréntesis y hacer las cuentas, para no entretenernos mucho, yo las
266		estuve haciendo, aunque ya estaban hechas en el libro, pero sale al final
267		que z es igual a $0'5x$ menos y más 23625, esto hacedlo en casa.
268		x , y son nuestras variables.
269		La z como veis es función de la x y la y.
270		Entonces a esta z le llamamos función objetivo.
271		¿Por qué le llamamos función? Porque la z es la función coste del
272		transporte, función que depende de las variables x, y.
273		¿Y por qué objetivo?
274		Porque lo que queremos en el problema es conseguir que este valor de la
275		z sea mínimo, ¿de acuerdo?

276		Bueno, ¿y ahora cómo sabemos cuándo la z toma un valor mínimo?
277		¿Qué valor debe tener la x y la y?
278		Pues esto se resuelve de la siguiente forma, imponiendo unas
279		condiciones que se llaman restricciones, entonces a partir de la función z
280		tenemos que escribir las restricciones, en realidad para entender a qué se
281		refieren las restricciones, se refiere a las condiciones especiales que se
282		dan en un problema, entonces ¿qué condiciones podemos imponer?
283		El número de cajas que sale de cada fábrica, de cada supermercado
284		¿cómo tiene que ser siempre?
285	E3:	Un número positivo.
286	Emi:	Un número positivo y luego veremos que además sea entero eh, porque
287		no me pueden salir medias cajas eh, o decimales, pero de momento
288		vamos a imponer la condición más básica, que todos estos números que
289		aparecen aquí en esta tabla [tabla de distribución] tienen que ser números
290		positivos entonces vamos a anotar el conjunto de restricciones del
291		problema.
292		Entonces la primera será $x \geq 0$.
293		La segunda $y \geq 0$.
294		La tercera $6000 - (x+y) \geq 0$.
295	E3:	Hay que hacerlo con todos.
296	Emi:	Hay que hacerlo con todos, claro.
297		Ahora sería $2250 - x \geq 0$, luego $4500 - y \geq 0$.
298		Ya sólo nos faltaría $3750 - (6000 - (x+y)) \geq 0$.
299		Entonces efectivamente, tenemos 6 restricciones, 6 condiciones perdón,
300		todas estas condiciones forman el conjunto de restricciones del problema
301		eh, claro esto va a ocurrir en los problemas de transporte, porque en otro
302		tipo de problemas las restricciones las indica el mismo enunciado eh.
303		¿Y qué tenemos que hacer con esas desigualdades?
304		Pues el siguiente paso es transformar las desigualdades, ¿cómo?
305		Vamos a hacer también algunas operaciones y las vamos a poner de
306		manera..., ¿recordáis cuando escribíamos las ecuaciones de un problema
307		de sistema de ecuaciones lineales?
308		Los problemas que hemos visto hasta ahora, en los que resolvían las
309		ecuaciones lineales, algunas ecuaciones que salían de los datos del
310		enunciado, luego para resolver el problema teníamos que transformarlas,
311		¿cómo era? ¿cuándo los términos de la x y la y no estaban en el lugar
312		adecuado?
313		Pues aquí vamos a hacer lo mismo, vamos a dejar la x y la y siempre a la
314		izquierda y los términos independientes a la derecha, entonces dejamos
315		la primera desigualdad tal y como está.
316		Tendríamos $x \geq 0$.
317		La segunda también tal y como está $y \geq 0$.
318		Vamos a trabajar con esta [con la tercera $6000 - (x+y) \geq 0$].
319		Con las desigualdades, y ya trabajaremos más adelante porque esto lo
320		visteis el año pasado hay que tener cuidado porque no son lo mismo que
321		las igualdades, no son lo mismo en el sentido de que hay ciertas
322		operaciones que transforman la desigualdad y cambian el sentido de la
323		desigualdad, ¿recordáis cuáles son?

324	E3:	Cuando cambia de signo si multiplicamos por menos.
325	Emi:	Cuando multiplicamos o dividimos por un número negativo, es eso a lo
326		que te refieres E3?
327	E3:	[Mueve su cabeza indicando que si].
328	Emi:	Cuando multiplicamos o dividimos por un número negativo cambio de
329		signo, cuando se trata de sumar o restar no importa pero a la hora de
330		multiplicar o dividir si, entonces ¿cuál es la forma más sencilla de
331		trabajar con esta desigualdad? [Emi señala la tercera desigualdad 6000
332		$-(x+y) \geq 0$].
333		Pues por ejemplo vamos a dejar el 6000 así y esto que está restando
334		pasaría al otro lado sumando entonces quedaría de esta manera
335		$6000 \geq x+y$, pero como hemos dicho que queremos las variables a la
336		izquierda y los términos independientes a la derecha ¿cómo puedo...?
337		[Llego una persona del instituto a interrumpir a Emi].
338		Disculpadme, bueno vamos a continuar, ¿cómo podemos escribir esto
339		dejando la x , y en la izquierda?
340	E5:	Poniéndolo volteado.
341	Emi:	Leyéndolo al revés, ¿esto cómo se puede leer? Diríamos:
342	Es:	6000 mayor igual a $x+y$.
343	Emi:	Pero si leo de derecha a izquierda, ¿cómo lo leo?
344		x más y menor o igual que 6000 [$x+y \leq 6000$].
345		¿De acuerdo?
346		Si cambiamos los miembros le damos la vuelta a la desigualdad,
347		entonces vamos a seguir con las demás [desigualdades].
348		¿Cómo quedaría la otra [$2250-x \geq 0$]? Si pasamos la x del otro lado sería
349		$2250 \geq x$, entonces ¿cómo nos queda?
350	Es:	Sería $x \leq 2250$.
351	Emi:	¿Y la siguiente [$4500 - y \geq 0$]?
352	E3:	$4500 \geq y$.
353	Emi:	Sería...
354	E2:	$y \leq 4500$.
355	Emi:	¿Y la última [$3750 - (6000 - (x+y)) \geq 0$]?
356	E3:	Sería... [E3 se queda pensando].
357	Emi:	Primero hay que quitar paréntesis sería $3750 - 6000 + x + y \geq 0$.
358		Si hacemos las cuentas nos quedaría $-2250 + x + y \geq 0$.
359	E3:	Pero lo pasamos para allá [pasar x , y del otro lado de la desigualdad].
360	Emi:	Claro nos quedaría $x + y \geq 2250$, esta es nuestra última desigualdad.
361		Este conjunto de desigualdades [$x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6000$, $x \leq 2250$, $y \leq 4500$,
362		$x + y \geq 2250$] forman el conjunto de restricciones para la función objetivo.
363		Entonces esta es la segunda parte del problema, la primera hemos dicho
364		que eran los datos, escribir los datos, después, bueno vamos a anotar qué
365		es lo que hemos hecho hasta ahora, vamos a reflexionar un poco.
366	E3:	En el examen de esto pondrán uno solo [un solo problema].
367	Es:	[Risas].
368	Emi:	Pues en este bloque es donde aparecerá un problema de programación
369		lineal, uno de sistemas de ecuaciones lineales y otro de matrices.
370		Entonces vamos a ver, ¿qué es lo que hemos hecho?
371		Pues hemos recogido los datos del problema, hemos definido las

372		variables, hemos escrito la tabla de distribución y a partir de la tabla de
373		distribución hemos definido la función objetivo.
374		Luego en la segunda parte ha sido plantear las restricciones basadas en la
375		tabla de distribución.
376		¿Qué es lo que nos queda para resolver el problema?
377		Pues primero trabajar con estas desigualdades, con las restricciones,
378		encontrar la solución del sistema, entonces tenemos que resolver el
379		sistema de inecuaciones gráficamente, entonces volvemos a anotar las
380		inecuaciones, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 6000$, $x \leq 2250$, $y \leq 4500$, $x+y \geq 2250$, ¿de
381		acuerdo? Resolvemos este sistema vale, pero ahora no es lo que quiero
382		mostrarles, lo que quiero es que veáis cuál es el aspecto de un problema
383		de PL, vamos a suponer que nosotros ya hemos resuelto las
384		desigualdades, ¿de acuerdo?, en este caso queda un recinto de este tipo
385		[Emi dibuja la región factible para esas inecuaciones].
386		La resolución de estos sistemas la veremos dentro de dos días, porque
387		mañana me gustaría continuar con el planteamiento, la resolución de este
388		sistema es este recinto sombreado, nosotros resolvemos el sistema de
389		inecuaciones, lo resolvemos gráficamente ¿de acuerdo?
390		Entonces, ¿qué solución nos ha salido en este caso para este sistema de
391		inecuaciones? Pues nos sale un polígono, como veis un recinto cerrado,
392		para más señas convexo en el plano, ya hablaremos de estas
393		características luego, pero podéis decir que es una región del plano que
394		está cerrada, tiene vértices y tiene unos lados que llamamos la frontera
395		de esta región, ¿de acuerdo?
396		Esta región, esta solución tiene un nombre se llama región factible, la
397		región factible es la solución del sistema que es lo que nosotros
398		llamamos región factible y ahora a partir de aquí es donde tendríamos
399		que elegir entre una técnica u otra para encontrar la solución del
400		problema, hay dos formas de hacerlo.
401		Entonces la tercera parte del problema sería encontrar el mínimo de la
402		función objetivo ¿de acuerdo?
403		Encontrar el mínimo de la función objetivo es ya resolver el problema
404		del transporte que nos habían planteado, entonces hay dos métodos, un
405		método analítico, podemos encontrar el mínimo analíticamente o
406		gráficamente.
407		¿Cómo lo hacemos analíticamente? Pues una vez que tengamos dibujada
408		la región factible le damos nombre a los vértices, esta región factible
409		tiene 5 vértices, A, B, C, D y E, ¿de acuerdo?
410		Hay una propiedad que nos dice que la solución de un problema de este
411		tipo se encuentra siempre en la frontera de la región factible.
412		¿Qué es la frontera?
413		La frontera de la región factible está formada por los vértices y por los
414		lados, claro que esta región factible es una región que nosotros llamamos
415		acotada, cuando la región factible no está acotada entonces está abierta,
416		entonces no tiene porque tener siempre solución el problema, podría no
417		existir la solución, pero en este caso si va existir, como el recinto es
418		convexo, ya os explicaré eso que quiere decir, y está acotado pues va a
419		tener solución, esta teoría que nosotros no la fundamentamos ni mucho

420		menos, porque sobrepasa el nivel del curso, pero si la vamos a aplicar en
421		el sentido de que para encontrar la solución nos vamos a limitar a
422		calcular los valores de la z en cada uno de los vértices.
423		[Suena el timbre que indica que la clase a terminado].
424		¿De acuerdo?
425		Entonces calculando el valor de z en cada uno de los vértices y
426		comparando sus valores, podemos determinar en qué punto la función
427		alcanza el mínimo y eso será el método analítico y el método gráfico
428		pues ya lo veremos luego también.
429		Bueno para mañana lo que sí que me gustaría es que leyerais otro
430		problema e intentarais plantearlo vosotros, ¿de acuerdo?
431		Por ejemplo, el problema de la dieta de la página 84 del libro [de texto].
432	E3:	¿Hasta aquí verdad?
433	Emi:	Exactamente, hasta aquí, tal y como hemos hecho hoy, de la misma
434		manera, hay que sacar los datos, las variables, en este caso no es un
435		problema de transporte con lo cual no habrá tabla de distribución, pero
436		habrá otro tipo de tabla que necesitaréis.
437	E2:	¿Hasta llegar a las restricciones?
438	Emi:	Hasta llegar a las restricciones, exactamente determinar la función
439		objetivo y encontrar las restricciones, ¿de acuerdo?

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la doceava clase grabada de la profesora Emi del viernes 14/11/08.

Resumen: Emi aborda dos ejemplos de programación lineal con la intención de que les quede claro a los estudiantes el planteamiento de esos problemas, luego deja algunos ejercicios de tarea en los que sólo deben hacer el planteamiento del problema.

L	Transcripción
1	Emi: Vamos a ver página 83, estuvimos haciendo el planteamiento del
2	problema del transporte, el ejemplo 4 entonces los que no habéis venido
3	a clase tenéis que pedir los apuntes y para casa, propuse el problema de
4	la dieta, lo voy a leer, tenemos que ir rapidito porque la semana que
5	viene os vais a poner vosotros con la resolución de los problemas,
6	planteamiento y resolución,
7	entonces todos los problemas de programación lineal tienen muchos
8	datos, lo primero que hay que hacer cuando tengamos un problema es
9	sacar todos los datos, toda la información y presentarla de una forma que
10	nos facilite luego el planteamiento del problema, entonces página 84,
11	ejemplo 5, leo el enunciado: “Para suplir la falta de minerales de una
12	dieta hipocalórica, una persona debe ingerir tres clases diferentes de
13	minerales: calcio, magnesio y yodo. Cada día debe tomar al menos 437
14	mg de calcio, 270 mg de magnesio y 199 mg de yodo. Los mencionados
15	minerales se encuentran en dos preparados farmacológicos diferentes: el
16	Nervo, que cuesta 5 euros, y cuya composición es de 16 mg de calcio, 32
17	mg de magnesio y 32 mg de yodo; y el Mieli, que cuesta 6 euros y cuya
18	composición es de 27 mg de calcio, 54 mg de magnesio y 9 mg de yodo.
19	Determina el número de preparados de cada tipo que permitirá un
20	tratamiento más económico”.
21	¿En qué consiste el problema de la dieta? En que es necesaria la toma de
22	estos minerales en una cantidad determinada, pero que en el mercado no
23	existe ningún preparado con esas cantidades exactas, entonces nos
24	hablan de 2 preparados y nos dan la composición de esos preparados y el
25	coste, el precio de esos preparados y la pregunta que nos hacen es ¿de
26	qué manera debemos formar, qué cantidad de cada preparado, de forma
27	que las necesidades que tengamos, en este caso de minerales, las
28	cubramos y que además el precio sea lo más barato posible, ¿de acuerdo?
29	Entonces por un lado tenemos los datos relativos a la cantidad que
30	necesitamos tomar y otros datos relativos a las cantidades que contiene
31	cada uno de los preparados y su coste, ¿cómo acomodamos todos esos
32	datos?
33	En el problema de transporte si recordáis hicimos una tabla de
34	distribución con la oferta y la demanda, la oferta de fabricación, la
35	producción diaria de cajas en cada fábrica y también la demanda en cada
36	supermercado, ahora no se refiere a eso, sino que, vamos a ver,
37	¿cuáles son los datos que nos dan?, a ver, la ingesta que debemos tener
38	se refiere a tres minerales, nos hablan de calcio, magnesio y yodo, nos
39	dicen que debemos tomar 437 mg de calcio, 270 mg de magnesio y 199
40	mg de yodo [Emi anota eso en forma de tabla], en una ingesta de mg por
41	día, esa es una parte de los datos, lo que necesitamos tomar.
42	La segunda son los preparados que tenemos, entonces tenemos dos

43		preparados uno se llama Nervo y el otro Mieli y nos dan las cantidades
44		que contiene de cada mineral, de calcio, magnesio y yodo, entonces
45		podemos escribir una tabla en la que tengamos la información [Emi
46		escribe una tabla y va anotando los datos], nos dice que de calcio 16, de
47		magnesio 32 y de yodo 32, y en el otro preparado tenemos 27 mg de
48		calcio, 54 mg de magnesio y 9 de yodo, nos dan la composición, las
49		cantidades que tienen en miligramos, cada preparado y su composición,
50		¿nos dan alguna información más aparte de las cantidades que contiene
51		cada preparado? ¿alguna noticia importante para el problema?
52	E3:	Precio.
53	Emi:	¿Cómo has dicho E3?
54	E3:	El precio.
55	Emi:	Muy bien nos están dando el coste de los preparados, porque nos están
56		diciendo que el preparado de Nervo cuesta 5 euros y el de Mieli 6 euros
57		[Emi coloca todos estos datos en la tabla], ¿de acuerdo?
58		Aquí cuando nos dicen preparados ¿qué entendemos? ¿es una caja? ¿una
59		cápsula?
60		Aquí por preparado tenemos que entender una cápsula, es decir, alguna
61		cápsula que la pueden preparar en la farmacia, no se si han ido alguna
62		vez a pedir algún tratamiento en específico a la farmacia, sino hay un
63		producto en el mercado que satisfaga esas cantidades o ciertos productos
64		que se piden en la farmacia, el farmacéutico puede realizar el preparado,
65		entonces en este caso estaríamos hablando, cuando hablamos de un
66		preparado sabemos que es una cápsula que contiene esas cantidades de
67		estos minerales, por supuesto ya sabéis que cuando se hace un preparado
68		para un producto farmacéutico.
69		Entonces vamos a suponer que cuando hablamos de preparados se refiere
70		a una cápsula, el farmacéutico lo prepara y nos lo da con estas cantidades
71		a este precio.
72		Entonces esto es la parte de los datos, ahora, para plantear el problema
73		¿qué necesitamos? ¿en qué tenemos que pensar? ¿cuál es el objetivo del
74		problema? ¿cuál es la pregunta que nos hacen?
75		El número de preparados de cada tipo, es decir, para que nos resulte más
76		fácil el problema, es el número de cápsulas de cada tipo que debemos
77		tomar de forma que nos resulte más económico, una cápsula de Nervo
78		cuesta 5 euros y una de Mieli 6, entonces ¿cuáles son las variables que
79		vamos a definir y cuántas necesitamos?
80	E7:	Dos, una cápsula de Nervo y una de Mieli.
81	Emi:	Dos, muy bien, entonces las variables que definimos son la x y la y, la x
82		representa el número de cápsulas de Nervo y la y el número de cápsulas
83		de Mieli.
84		Como os dije el otro día, los problemas que vamos a plantear nosotros,
85		van a ser problemas que se puedan resolver definiendo nada más que dos
86		variables, en el problema del transporte, si recordáis ayer, había que
87		definir cuáles eran las variables, había que pensar un poquito más, pero
88		aquí en este problema, leyéndolo llegamos a esta conclusión, ¿de
89		acuerdo?, entonces a partir de estos datos que yo tengo de estas
90		variables, ¿qué tabla podemos construir en la que aparezcan todos los

91		datos necesarios para encontrar el coste?
92		Porque nos dicen que sea mínimo el coste ¿no?, aquí lo que tenemos son
93		las cantidades que aparecen en cada cápsula, con el coste de cada
94		cápsula, entonces por un lado tenemos que tener en cuenta las cantidades
95		necesarias que hay que tomar diarias y el coste, si hemos decidido llamar
96		x al número de cápsulas de un preparado y y el número de cápsulas del
97		otro, vamos a poner todos los datos juntos en una sola tabla.
98		Vamos a ver [Emi empieza a anotar la tabla e irla completando], si
99		tomamos x cápsulas del primer preparado, el Nervo y y cápsulas del
100		segundo preparado, el Mieli ¿qué cantidad de calcio, magnesio y yodo se
101		tomará en cada caso? nos dan la cantidad que hay de cada uno de esos
102		minerales en cada una de las cápsulas.
103		Si tomamos x, las cantidades irán multiplicadas por x, es decir, 16x, 32x
104		y 32x y abajo, si tenemos las cantidades que aparecen en cada cápsula
105		del segundo preparado si tomamos y, pues esas cantidades van
106		multiplicadas por y, sería 27y, 54y y 9y, ¿de acuerdo?
107		Pero hemos dicho que vamos a atender a dos cuestiones al mismo
108		tiempo, las cantidades que necesitamos diarias, de calcio hemos dicho
109		437, de magnesio 270 y de yodo 199, pero además de considerar las
110		cantidades que necesitamos diariamente, también tenemos que fijarnos
111		en el coste, entonces si se toman x cápsulas del primer preparado y cada
112		cápsula cuesta 5 euros, el coste total de estas cápsulas ¿cuál será?
113	E3:	5x.
114	Emi:	5x y si el segundo preparado cuesta 6 euros y tomamos y entonces el
115		total será 6y ¿de acuerdo? Esta es la tabla que llamamos tabla de
116		distribución y es la que aparece en el libro [de texto].
117		Entonces a partir de aquí, el siguiente paso, una vez que ya tenemos la
118		tabla de distribución, que la construimos a partir de los datos que nos
119		dan y de las variables que hemos definido nosotros, aquí en la tabla de
120		distribución tomamos en cuenta por un lado los datos y las variables.
121		¿Cuál es el objetivo del problema?
122		Encontrar los valores de x y y para que el coste sea el mínimo.
123		El coste, ¿cómo lo calculamos?, vamos a llamar z al coste del
124		tratamiento, ¿cuánto se gasta una persona que toma x cápsulas de un
125		preparado y y cápsulas del otro?, ¿cuál es el coste?
126	E3:	Se suman el de uno con el del otro, $5x+6y$.
127	Emi:	Exactamente, si del primer preparado el coste es 5x y del otro es 6y,
128		entonces el coste total es la suma de ambos $5x+6y$, ¿recordáis cómo se
129		llama esta función?
130		Porque el coste va en función del número de cápsulas que se tome de
131		cada preparado ¿de acuerdo? son funciones que, en estos problemas nos
132		van a aparecer ecuaciones con dos variables,
133		¿cómo se llamaba esta función?
134	E8:	Objetivo.
135	Emi:	Sí, función objetivo, ¿porqué le llamamos función objetivo?
136		Porque nuestro objetivo es encontrar en este caso el mínimo de la
137		función, y ahora ¿para encontrar el mínimo de la función qué tenemos
138		que plantear?

139		Una serie de condiciones que impone el problema, ese conjunto de
140		condiciones se les llama...
141	E2:	Restricciones.
142	Emi:	Exacto, muy bien.
143		[Interrupción: Se escucha mucho ruido provocado por varios estudiantes
144		de otro grupo que se encuentran fuera del aula, Emi sale del aula para
145		pedirles que guarden silencio o se alejen del aula]
146		Entonces para todo problema vamos a tener una serie de restricciones del
147		problema y en este caso ¿cuáles van a ser esas restricciones?
148		Por un lado hemos dicho que hay una necesidad de ingesta diaria ¿no?,
149		¿cuántos mg de calcio se deben tomar al día? 437, luego...
150	E7:	Son $16x+27y = 437$.
151	Emi:	¿Tiene que ser exactamente igual?
152	E7:	No, mayor igual a 437.
153	Emi:	Entonces es $16x+27y$ y me dicen que tengo que tomar una cantidad
154		mínima de esos minerales entonces el aporte de calcio entre estas dos
155		cápsulas tiene que ser mayor o igual que 437, es decir, no podemos decir
156		que sea exactamente 437, porque lo que nos dicen es que al menos
157		necesitamos 437 por eso en este caso es mayor o igual,
158		¿qué otra condición más añadimos?
159	E3:	Pues la de $32x+54y$.
160	Emi:	Exactamente el aporte de magnesio de cada cápsula tiene que llegar a
161		270, es decir, $32x+54y$ mayor o igual a 270.
162		Bueno y lo mismo con el yodo, el aporte del yodo $32x+9y$ ambos nos
163		tiene que dar una cantidad mínima de 199 entonces por eso es mayor o
164		igual a 199, ¿alguna otra restricción que se les ocurra? ¿qué pasa con la x
165		y con la y?
166	E7:	Tienen que ser mayor o igual que 0 porque no pueden ser números
167		negativos.
168	Emi:	Muy bien porque la x y la y nos indican el número de las cápsulas ¿no?,
169		entonces tiene que ser siempre una cantidad positiva, es decir, x tiene
170		que ser mayor o igual a 0 y y también tiene que ser mayor o igual a 0,
171		pues ya tenemos todas las restricciones, es un conjunto de inecuaciones,
172		¿cómo resolvemos ese conjunto de inecuaciones?
173		Bueno pues el siguiente paso sería resolver el sistema de inecuaciones,
174		¿cuál es el método que conocéis para resolver un sistema de
175		inecuaciones con dos incógnitas?
176	E7:	De forma gráfica.
177	Emi:	Se hace siempre de forma gráfica, ¿de acuerdo?, para esto se necesita el
178		plano, veremos cómo se resuelve [Emi da un vistazo a la gráfica de esas
179		inecuaciones, que aparece en el libro de texto] y lo haremos, entonces
180		nos va a quedar una región que es la siguiente [Emi hace la gráfica que
181		corresponde al conjunto de inecuaciones].
182		[Emi copia el dibujo que viene en el libro, sólo en apariencia, es decir sin
183		utilizar una escala precisa], esto no lo vamos a hacer [Emi se refiere a
184		hacer la gráfica con precisión y rigor analítico], porque comenzaremos a
185		resolver otros más sencillos y recordaremos cuál es el método más
186		sencillo para resolver las inecuaciones de forma gráfica pero por ahora

187		en este caso, va a quedar un recinto de este tipo [Emi señala la región
188		factible en el dibujo que ha hecho], sería esta región en el plano [Emi
189		señala y sombrea la región factible].
190	E12:	¿Y ya con eso está resuelto?
191	Emi:	No.
192		Esta es la solución del sistema no del problema, bueno ¿cómo se llama a
193		esto?
194	E5:	Región factible.
195	Emi:	Si muy bien, región factible.
196		Entonces vamos a ver el siguiente paso, que no hemos dicho cómo se
197		hace pero bueno, tenemos un sistema de inecuaciones y de forma gráfica
198		encontramos la región factible, ¿cuál es el siguiente paso último que nos
199		queda?
200	E12:	Encontrar en qué punto está solución.
201	Emi:	Si encontrar en qué punto de la región factible está el mínimo,
202		efectivamente ese es el último paso y en esto consisten los problemas de
203		programación lineal, entonces tienen una parte primera de
204		reconocimiento de la situación, nos dan mucha información, muchos
205		datos, esos datos los pasamos a tablas, escribimos cuáles son las
206		variables adecuadas para el problema y después colocamos las variables
207		en la tabla de distribución, a partir de la tabla de distribución, podemos
208		poner la función objetivo que en este caso es el coste y después de esa
209		tabla anotamos el sistema, cuando resolvemos ese sistema de forma
210		gráfica, encontramos la región factible y el último paso consiste en
211		encontrar en esta región dónde alcanza la función objetivo el mínimo,
212		porque nos están pidiendo el coste mínimo, ¿de acuerdo?
213		Bueno pues vamos a hacer un problemita, ahí tenéis otros ejemplos
214		[en el libro de texto], mi intención es que ahora sepáis simplemente
215		plantear el problema, es decir, llegar hasta las restricciones ¿de acuerdo?
216		y ya el próximo día vemos cómo se encuentra la región factible y cómo
217		se encuentra la solución.
218		Entonces vamos a hacer de la página 77, el problema número 8 apartado
219		a, lo voy a leer, “Una empresa tiene B autocares de 40 plazas y 10
220		autocares de 50 plazas para trasladar cada día a 400 trabajadores hasta el
221		lugar donde se ubica la fábrica, pero únicamente dispone de 9
222		conductores. Si el coste por viaje de un autocar grande es de 48 euros y
223		el de un autocar pequeño es de 36 euros, ¿cuántos autocares de cada tipo
224		utilizará la empresa para trasladar a sus trabajadores de manera que el
225		coste sea el mínimo posible? ¿cuál será el coste?”
226		No tenemos que responder a estas preguntas sino llegar a la función
227		objetivo y plantear las restricciones, ¿de acuerdo?
228		¿Se ha entendido cuál es la situación?
229		Se trata de una empresa que pone autocares para trasladar a sus
230		trabajadores a la fábrica, ¿de acuerdo?, y nos hablan de los autocares
231		que tienen, que son de dos tipos, unos más grandes y otros más pequeños
232		y nos dan el número total de trabajadores y a su vez nos da el coste de
233		viaje de un autocar grande y de uno pequeño y la pregunta que nos hacen
234		es ¿cuántos autocares de cada tipo utilizará la empresa para trasladar

235		a sus trabajadores de manera que el coste sea el mínimo posible?
236		¿Alguien quiere pasar a la pizarra e ir x
237		coste sea el mínimo posible?, ¿alguien quiere pasar a la pizarra e ir
238		poniendo los datos? [Nadie contesta y entonces empieza a hacerlo Emi]
239		Vamos a ver, ¿cómo empezamos el problema?
240	E2:	Por las variables.
241	Emi:	Podemos empezar por las variables o poner primero los datos y luego las
242		variables y luego la tabla de distribución [Emi guía su representación].
243		Yo prefiero primero poner los datos que nos dan, toda la información,
244		después decir cuáles son las variables que vamos a utilizar y ya después
245		escribir la tabla de distribución, pero no directamente [sino siguiendo el
246		proceso que ha dicho].
247		Entonces vamos a poner los datos primero.
248		Bueno pues aquí lo que tenemos son autocares grandes y autocares
249		pequeños, vale.
250		¿Cuántos grandes tenemos?
251	Es:	10.
252	Emi:	De los grandes tenemos 10 y de los pequeños 8, los grandes tienen 50
253		plazas y los pequeños 40 plazas, ¿cuál es el otro dato que nos dan?
254	E3:	El número de trabajadores.
255	Emi:	El número de trabajadores, tenemos 400 trabajadores, ¿qué otro dato
256		importante?
257	Es:	Los conductores.
258	Emi:	¿Cuántos conductores?
259	E3:	9.
260	Emi:	9, ¿es importante? ¿qué significa que sólo haya 9 conductores?
261	E2:	Que sólo serán 9 autobuses.
262	Emi:	Efectivamente, si sólo tenemos 9 conductores, como máximo podrán
263		llevarse 9 autocares y no los 18 que se tienen,
264		¿qué otro dato nos dan?
265	E7:	El precio.
266	Emi:	El coste, entonces el coste en uno grande es de 48 euros y del pequeño
267		36 euros, es el coste por viaje en un autocar eh.
268		¿Cuáles son las variables? Porque en el problema nos piden encontrar
269		¿Cuántos autocares necesitará esa empresa para trasladar a sus
270		trabajadores de manera que el coste sea el mínimo posible, ¿cuáles son
271		las variables que tenemos que utilizar?
272		Hemos dicho que estos problemas se resuelven siempre con dos,
273		entonces ya tenemos los datos y las variables, pues vamos a poner x y y,
274		¿qué va a ser en este caso la x? ¿y la y? ¿qué os parece?
275	E2:	La x los autocares grandes.
276	Emi:	Si la x el número de autocares grandes y la y el número de autocares
277		pequeños que vamos a utilizar, ¿de acuerdo?,
278		entonces a partir de aquí es donde nosotros tenemos que encontrar
279		nuestra tabla de distribución,
280		¿qué pondremos en la tabla de distribución? ¿de los autocares qué nos
281		importa?
282	Es:	El número de plazas.

283	Emi:	El número de plazas y el coste, entonces ¿cómo ponemos, qué vamos a
284		poner en las filas de nuestra tabla?
285	E2:	x número de autocares grandes.
286	Emi:	Sí.
287	E2:	Y en la otra fila y número de autocares pequeños
288	Emi:	Muy bien eso es lo que va en las dos filas de nuestra tabla, bueno y ¿qué
289		podemos poner en una columna?
290	E15:	Las plazas.
291	Emi:	Sí, las plazas, si el autocar grande tiene 50 plazas y x representa el
292		número de autocares grandes, entonces ¿cómo ponemos eso?
293	E2:	$50x$ y $40y$.
294	Emi:	Muy bien $50x$ en los autocares grandes y $40y$ en los autocares pequeños,
295		bien pero cuántas plazas necesitamos cubrir, no tienen porque estar
296		totalmente llenos, pero si necesitamos cubrir ¿cuántas plazas?
297	E3:	400.
298	Emi:	400.
299		¿Y en otra columna además de las plazas qué podemos poner?
300	E2:	El coste.
301	Emi:	Si el coste de un autocar grande es de 48 euros entonces ¿cómo
302		anotamos eso con x autocares?
303	E2:	$48x$.
304	Emi:	Muy bien $48x$ y en los autocares pequeños ponemos $36y$, entonces ¿nos
305		serviría esto como tabla de distribución? ¿cuál sería la función objetivo?
306		¿qué es lo que debe ser el mínimo?
307	E15:	El coste.
308	Emi:	Lo que nos piden que sea mínimo es el coste, pues z va a ser el coste, en
309		este caso del transporte y en función de qué expresamos el coste, aquí la
310		z ¿a qué será igual?
311	E2:	$A 48x+36y$.
312	Emi:	Si el precio de los autocares grandes es $48x$ y el de los pequeños es
313		$36y$ entonces el coste total es la suma de ambos, entonces $z=48x+36y$
314		¿De acuerdo todos en eso? vamos a poner ahora las restricciones, vamos
315		a empezar con las más sencillas y que aparecen casi siempre en todos, la
316		x y la y representa el número de autocares ¿luego tienen que ser?
317	E2:	Positivos.
318	Emi:	Números positivos, x mayor o igual a 0, y mayor o igual a 0, ¿de
319		acuerdo? ¿qué pasa con las plazas que se cubren con los autobuses?
320		Con los grandes se cubren $50x$ y en los pequeños $40y$, entonces...
321	E2:	$50x+40y=400$.
322	Emi:	¿Exactamente igual?
323	E2:	Mayor o igual.
324	Emi:	Exactamente mayor o igual que 400, es decir, el número de plazas
325		cubiertas con los dos tipos de autocares tiene que superar, puede ser
326		igual pero lo que no puede ser es inferior porque entonces ya no
327		transportaríamos a todos los trabajadores,
328		¿hay alguna restricción más que debamos escribir?
329	E7:	Que sólo hay 9 conductores.
330	Emi:	Muy bien, hay un dato que no hemos puesto en la tabla y es que tenemos

331		sólo 9 conductores, entonces si por cada autobús hay un conductor,
332		entonces ¿ $x+y$ cuánto debe de ser?
333	E2:	$x+y \leq 9$.
334	Emi:	No puede superar el 9.
335		Ya tenemos la función objetivo y tenemos las restricciones, el siguiente
336		paso sería resolver este sistema, hallar la región factible y por último,
337		encontrar el mínimo sobre la región factible, vale.
338		Entonces como veis no son difíciles, lo que ocurre es que hay que ser un
339		poco ordenados cuando escribimos, a la hora de estructurar el
340		pensamiento.
341		Bueno entonces para casa, página 77 ejercicio 8b y es que me interesa
342		que plantéis el problema.
343	E13:	Pero sólo plantear ¿no?
344	Emi:	Sí, y de la página 85 el 13 y el 14, sólo el planteamiento.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la treceava clase grabada de la profesora Emi del lunes 17/11/08.

Resumen: Emi aborda dos ejercicios de programación lineal indicando en cada uno de ellos el planteamiento del problema, para el primero E1 pasa a la pizarra y luego Emi termina de hacer el planteamiento, en el segundo Emi invita a los estudiantes a pasar a la pizarra, nadie pasa y minutos después Emi hace el planteamiento, no da tiempo de acabarlo en clase y les deja de tarea que terminen de simplificar la función objetivo y que además hagan el planteamiento de otro problema.

L		Transcripción
1	Emi:	Bien pues ahora lo que me preocupa es que sepan hacer el
2		planteamiento ya luego veremos la resolución.
3		Bien, pues les propuse para casa tres o cuatro, entonces ¿lo habéis
4		intentado?
5	E1:	Sí, pero uno no me salió.
6	Emi:	¿Y los demás sí?
7	E1:	Sí.
8	Emi:	¿Y al resto del grupo?
9	Es:	[Nadie contesta].
10	Emi:	Bueno ¿quién pasa a la pizarra?
11	E3:	¿En qué página están [los ejercicios] Emi?
12	Emi:	En la página 77, primero el 8b.
13	E1:	[Pasa a la pizarra].
14	Emi:	Yo voy a leerlo y tú [E1] vas anotando los datos.
15		Voy a leer el problema para todos, página 77 [del libro de texto]
16		ejercicio 8 apartado b “Un trabajador autónomo coloca cierres de
17		collares y de pulseras. Por cada cierre de collar gana 42 céntimos de euro
18		y por cada cierre de pulsera, 30 céntimos de euro. Cada día va a buscar el
19		material a la fábrica con dos estuches de joyería, en uno caben 100
20		collares y en el otro, 120 pulseras. Si cada día es capaz de colocar 150
21		cierres como máximo, determina el número de cierres de cada tipo que
22		debe colocar para que su beneficio sea máximo”
23		Entonces nos hablan de un señor que se dedica a colocar cierres de
24		collares y de pulseras, nos dan el beneficio que obtiene por cada cierre
25		que coloque ya sea de collar o de pulsera y luego sabemos que tiene dos
26		estuches, también vamos a anotarlo, ¿de acuerdo?
27		Entonces cada día en dos estuches a lo más caben 100 collares y 120
28		pulseras, pero dice que al día puede colocar máximo 150 cierres, entre
29		collares y pulseras eso sí, estos son los datos, la pregunta es: determina el
30		número de cierres de cada tipo que debe colocar para que su beneficio
31		sea máximo.
32	E3:	Eso es la parte de los datos.
33	Emi:	Sí, lo único que hemos hecho es escribir la parte de los datos [Emi señala
34		los datos que ha escrito E1], lo que gana por cada cierre que coloca, los
35		dos estuches con los que trabaja, cuántos collares y pulseras contiene
36		cada estuche y el máximo de cierres que puede colocar al día.
37		Entonces vamos a anotar ahora cuáles son las variables,
38		no tenemos que pensar mucho porque ya habíamos dicho que todos los
39		problemas que vamos a plantear son con dos variables, entonces aquí

40		tenemos que definir dos,
41		E1 ha escrito en la pizarra que las variables que va a utilizar, la x y la y,
42		la x representa cierres de collares y la y cierres de pulseras ¿qué opináis
43		de esta definición de variables?
44	E2:	Que es el número de collares y el número de pulseras.
45	Emi:	E1 yo creo que tú estabas pensando en el número pero no sólo hay que
46		pensarlo también hay que escribirlo,
47		x representa el número de cierres de collares y y el número de pulseras,
48		entonces cuando tú hablas del cierre de collares y del cierre de pulseras,
49		te refieres al número de cada uno que coloca por día,
50		entonces es muy importante que cuando definamos las variables lo
51		hagamos correctamente, el significado exacto que van a tener porque
52		nunca podemos identificar la variable con el objeto.
53		Y una pregunta, ¿cuál es la función objetivo en este problema?
54		Les repito lo que nos piden, “determina el número de cierres de cada tipo
55		que debe colocar para que su beneficio sea máximo”, ¿cuál es la
56		diferencia de este problema con los que hemos tratado en los días
57		anteriores?
58	E2:	Que en los otros nos preguntaban cuánto costaban pero ahora es otro tipo
59	Emi:	Hasta ahora todos los problemas que hemos planteado, eran problemas
60		en los que buscábamos el mínimo, aquí por primera vez nos sale un
61		problema de máximo, pero es lo mismo porque buscar el máximo o
62		buscar el mínimo se refiere al mismo procedimiento, pero es muy fácil
63		conocer cuál es la función objetivo, porque al hablar del máximo o del
64		mínimo es ahí donde aparece la función que es o bien encontrar el
65		máximo o bien encontrar el mínimo, en este caso el máximo,
66		en este caso ¿qué es lo que tiene que ser máximo?
67		el beneficio, entonces nuestra función objetivo será el beneficio,
68		entonces, anota que z es el beneficio [Emi pide a E1 que anote eso que
69		ha dicho], no vamos a escribir todavía la expresión, qué es lo que
70		necesitamos una vez que tenemos los datos, las variables,...
71	E10:	La tabla de distribución.
72	Emi:	Muy bien, ahora vamos a escribir la tabla de distribución.
73	E3:	¿Se tiene que hacer siempre en ese orden?
74	Emi:	Sí.
75	E3:	Primero los datos, luego las variables y después la tabla.
76	Emi:	Sí, así primero los datos, luego las variables y después la tabla de
77		distribución, entonces en la tabla de distribución, escribimos los datos
78		que nos dan de forma que luego a partir de esa tabla podamos escribir
79		cuál es la expresión de la función objetivo y podamos escribir también
80		las restricciones del problema.
81		E1 está escribiendo una tabla en la que por filas está poniendo, x cierres
82		de collares y en la segunda fila, y cierres de pulseras, en la primera
83		columna, los beneficios y en otra columna capacidad diaria, hemos dicho
84		que x es el número de cierres de collares y y el número de cierres de
85		pulseras entonces en un día trabaja con x cierres de collares y y cierres
86		de pulseras, aquí ya no es necesario poner número porque x y y
87		representan el número, entonces x cierres de collares y y cierres de

88		pulseras, si nos dicen que el beneficio por colocar cada cierre de collar es
89		de 42 céntimos y de cierre de pulsera 30 céntimos, para saber los
90		beneficios que tiene por colocar los cierres de collares y de pulseras
91		tendríamos que multiplicar el número por el beneficio de cada uno de
92		ellos, ¿no?
93		Y ¿eso de capacidad al día qué?
94		Se refiere a la capacidad de trabajo porque está limitado también por los
95		estuches que utiliza, entonces si tiene un estuche con 100 collares, como
96		máximo podrá hacer 100 collares al día, pero este 100x y 120y no lo
97		entiendo yo [E1 había escrito una segunda columna con esos dos datos].
98	E1:	Porque en el problema dice que tiene que tener 100 collares al día y 120
99		pulseras al día.
100	Emi:	Sí, pero fíjate, a lo mejor tú te estás confundiendo pues si escribes 100x
101		es 100 por el número de cierres de collares, o eso ¿cómo lo interpretas
102		tú? ¿qué significado tiene para ti?
103	E1:	Porque lo que dice aquí es que produce 100 collares al día y por eso lo
104		puse así pero ahora no sé.
105	Emi:	¿Qué opináis vosotros?
106		Le hemos llamado a x el número de cierres de collares y a y el número
107		de cierres de pulseras, entonces sabemos que al día hará x cierres de
108		collares y y cierres de pulseras, lo del 100 y 120 es una limitación que
109		tiene porque no puede transportar más de 100 collares y de 120 pulseras,
110		pero no tiene sentido multiplicar 100 por x, ni 120 por y.
111		¿Quién más ha planteado la tabla de distribución en este problema?
112		Las tablas no tienen porque ser tan grandes, habrá problemas con tablas
113		grandes pero también otros con tablas más pequeñas.
114	E1:	[Se va y se sienta en su lugar].
115	Emi:	Esta columna que E1 ha añadido [la segunda columna] no es necesaria
116		porque en la tabla de distribución, de momento, lo único que
117		necesitamos poner es el número de cierres de collares y de pulseras que
118		hace al día y los beneficios que obtiene por cada uno de ellos.
119		E1 ¿tú qué función haz puesto de beneficio? ¿cómo escribiste la z?
120	E1:	Yo escribí $z=100x+120y$.
121	Emi:	Anotaste la z en términos de su capacidad, pero no, bueno entonces
122		vamos a escribirla, ¿cuál es el beneficio que obtiene?
123		Si hace x cierres de collares y y cierres de pulseras y por cada collar gana
124		42 céntimos y cada pulsera 30 céntimos, entonces ¿el beneficio que
125		obtendría cuál sería?
126	E2:	$0.42x+0.3y$.
127	Emi:	Sí, es decir, $z=0.42x+0.3y$, ésta es nuestra función objetivo. Entonces en
128		este caso la tabla de distribución es pequeña porque sólo tenemos dos
129		filas y una columna.
130		¿Cuáles son las restricciones del problema?
131		¿E1 qué has puesto cómo restricciones?
132	E1:	Yo he puesto x mayor o igual a 1.
133	Emi:	¿Por qué 1?
134	E1:	Porque x es el número de cierres de collares.
135	Emi:	Vamos a ver, siempre hay un dato que se pone, si x representa el número

136		de collares y y el número de cierres de pulseras pues tienen que ser
137		números...
138	E3:	Positivos.
139	Emi:	Positivos, no tiene sentido hablar de números negativos, entonces la x
140		sería mayor o igual a 0 y la y también mayor o igual a 0,
141		porque mira E1 puede ser que a lo mejor a él no le interese hacer ningún
142		cierre de collar y le resulta más rentable trabajar sólo con cierres de
143		pulseras, entonces alguno de ellos podría ser 0, no tienes porque suponer
144		que tiene que hacer al menos uno, podría ser 0,
145		entonces ¿qué otra restricción podemos poner?
146	E3:	El número de cierres que puede hacer al día.
147	Emi:	Claro, sabemos que sólo puede hacer como máximo 100 cierres de
148		collares al día, ¿cómo será la x?
149	Es:	La x menor o igual a 100.
150	Emi:	Sí x menor o igual a 100 es otra de las restricciones y si en el estuche
151		caben a lo más 120 pulseras pues la y será menor o igual a 120,
152		¿éstas las haz hecho así E1?
153	E1:	Sí.
154	E3:	¿Y no podemos juntar la primera restricción [x mayor o igual a 0] con
155		esta?
156	Emi:	¿Que si podemos poner $0 \leq x \leq 100$?
157	Es:	Si.
158	Emi:	Pues sí y también podemos poner $0 \leq y \leq 120$, pero no nos interesa poner
159		las restricciones todas juntas, aunque esto es posible matemáticamente,
160		es mejor...
161	E3:	Ponerlo separado.
162	Emi:	Exacto, ponerlo separado.
163		¿Qué otras restricciones? ¿qué nos dice el problema?
164		Que al día puede hacer como máximo 150 cierres en total, si hace x
165		cierres de collares y y cierres de pulseras, el total tiene que ser menor o
166		igual a 150, es decir, $x+y \leq 150$ y ahora sí ya están todas las restricciones
167		del problema.
168		E1 ¿sabes lo que te había pasado a ti? ¿por qué crees tú que has tenido
169		ese planteamiento incorrecto?
170		Porque unas cosas las tenías bien pero otras no.
171	E1:	[Silencio].
172	Emi:	Porque en estos problemas aparecen muchos datos, pero algunos datos
173		aparecen solamente ¿dónde?
174		A la hora de escribir las restricciones, es decir, que no siempre todos los
175		datos que nos dan los vamos a incluir en la tabla de distribución y es lo
176		que yo creo que a ti te había pasado, tratar de incluir la mayor cantidad
177		de datos posibles en la tabla de distribución así que claro al imponer
178		unas condiciones que no se ajustaban a la realidad, ya te habías
179		equivocado con la función objetivo,
180		entonces hay datos que van en la tabla de distribución y hay datos que
181		van para un lado y hay datos que van para otro y hay que saber distinguir
182		cuándo unos afectarán en la tabla y cuando sólo en las restricciones,
183		¿de acuerdo?

184		Entonces tenemos la función objetivo y ya tenemos las restricciones a
185		partir de aquí esto es el planteamiento y luego hay que hacer la
186		resolución del problema ¿de acuerdo? ¿dudas? [nadie contesta].
187		Vamos a continuar con otros planteamientos, ¿qué página habíamos
188		dicho? Vamos a hacer el de la página 85 [del libro de texto], ¿quién
189		quiere pasar a la pizarra?, ¿lo habéis hecho? ¿nadie lo tiene hecho?
190	Es:	[Nadie contesta].
191	Emi:	Pues entonces lo voy a leer y les voy a dar unos minutos para que lo
192		reflexionen [para que comprendan el problema] y lo hagáis vosotros,
193		dice: “Una ONG europea dedicada a la asistencia sanitaria recibe de la
194		UE, cada mes, 8000 lotes sanitarios de mantenimiento y 15000 de
195		choque. En esta ocasión los lotes deben llegar a tres localidades
196		diferentes del África ecuatorial, A, B, y C. Los lotes de mantenimiento
197		salen de Brujas y los de choque de Munich, siendo el coste de envío
198		desde Brujas a A, B y C de 2 euros, 13 euros y 6 euros, respectivamente.
199		Y desde Munich, de 12 euros, 4 euros y 4 euros. Si las tres poblaciones
200		necesitan, respectivamente, 6000, 7000 y 10000 lotes, determina cómo
201		debe organizarse el transporte para que su gasto sea mínimo.”
202		¿Este problema de qué tipo es?
203	E2:	De los primeros [de los primeros problemas que hicieron en clase].
204	Emi:	Sí de los primeros, es el típico problema de transporte, entonces les voy a
205		dar unos minutos para que escribáis los datos, defináis las variables y las
206		restricciones, a ver E1 ¿qué es lo que haz hecho tú? [Emi va al lugar de
207		E1 para ver qué fue lo que hizo mientras los demás estudiantes tratan de
208		hacer lo que les ha pedido].
209		[Emi pasa por el lugar de los estudiantes para inspeccionar lo que van
210		haciendo].
211		Ahora los datos referidos al coste de transporte ¿cómo los pondremos?,
212		aquí nos dan muchísimos datos en este problema,
213		¿cómo podemos escribir los datos relativos al coste del transporte?
214		Bueno vamos a ver, [Emi pasa a la pizarra y empieza a hacerlo, Emi se
215		da por vencida y se pone a hacerlo ella] ¿de qué nos habla el problema?,
216		de tener que transportar dos lotes distintos desde dos ciudades distintas
217		europeas ¿a dónde? A tres ciudades africanas diferentes que no nos dicen
218		cómo se llaman, las europeas y las africanas, las africanas se llaman A, B
219		y C, entonces las ciudades europeas ¿cuáles son?
220	Es:	Brujas y Munich.
221	Emi:	Vamos a poner los costes de transportes en una tabla, ¿cómo lo
222		podríamos poner?, ¿cómo pondríamos la tabla de los costes del
223		transporte?, tenemos las dos ciudades que son Brujas y Munich, como
224		nos dan el coste desde cada una de esas ciudades europeas a cada una de
225		las ciudades africanas, en las filas anotamos en una Brujas y en otra
226		Munich y en las columnas ¿qué ponemos?
227	Es:	A, B y C.
228	Emi:	Exacto A, B y C, ¿cuáles son esos costes? Nos dicen que desde Brujas
229		respectivamente son 2, 13 y 6 y desde Munich 12, 4 y 4, ¿Qué más nos
230		dan?
231	Es:	Los dos lotes.

232	Emi:	Tenemos de dos lotes, 8000 lotes de mantenimiento y 15000 lotes de
233		choque, esos son los lotes de los que dispone la ONG y los envía todos y
234		¿cuáles son los lotes demandados por las tres ciudades?
235	E9:	6000, 7000 y 10000.
236	Emi:	Entonces si anotamos el número de lotes que necesitan, vamos a ponerle
237		número de lotes demandados, dice que tiene que ser 6000, 7000 y 10000,
238		¿tenemos ya todos los datos del problema?
239		Tenemos el coste de transporte desde cada ciudad europea a cada una de
240		las africanas, luego los lotes de que disponen y los lotes que necesitan
241		cada una de las poblaciones, entonces ¿qué es lo que hay que
242		determinar?
243		¿Cuántos lotes de cada tipo desde cada una de las ciudades europeas a
244		cada una de las africanas? y tenemos que saber cuántos lotes de
245		mantenimiento y de choque salen de la ciudad A, de la ciudad B y de la
246		ciudad C y lo mismo para Munich.
247	E2:	x es el número de lotes que salen de brujas y y el número de lotes que
248		salen de Munich.
249	Emi:	Sí pero ¿de dónde a dónde?, ¿no les recuerda este problema a uno que
250		ya habíamos planteado? El de la fábrica de refrescos y los
251		supermercados, ¿cuántas fábricas de refrescos teníamos?
252		Dos fábricas y supermercados a donde se distribuían tres, ¿no? y ¿qué
253		nos daban?
254		La producción de las fábricas y la demanda de los supermercados, ¿qué
255		hay de parecido entre un problema y otro?, aquí los refrescos se
256		sustituyen por los lotes, la producción por los lotes que tiene y la
257		demanda por los lotes que necesitan, pero ¿cuántas fábricas teníamos en
258		el problema anterior?
259	E15:	Dos.
260	Emi:	Qué equivaldría a las ciudades europeas y ¿cuántos supermercados eran?
261	E3:	Tres.
262	Emi:	Y aquí ¿cuántas ciudades tenemos?, tres A, B y C, es decir en el otro
263		problema teníamos dos fábricas y tres supermercados ¿no?, entonces
264		ponen un enunciado diferente pero es el mismo problema, entonces
265		volvéis al problema de transporte de los refrescos que ya está hecho
266		haber si sois capaces [de hacerlo, comparándolo con el que tienen
267		hecho], comparando uno con otro, primero ¿cuántas variables vamos a
268		utilizar?
269	Es:	2.
270	Emi:	2.
271		Aquí hay una pequeña diferencia, ¿cuál es esa pequeña diferencia entre
272		estos dos problemas? Son casi iguales pero hay una pequeña diferencia,
273		¿de la fábrica que salía siempre? Salía el mismo producto siempre, cajas
274		de refrescos ¿y aquí? ¿hay que diferenciar entre lotes de mantenimiento
275		y lotes de choque?, vamos a leer nuevamente el problema “Una ONG
276		europea dedicada a la asistencia sanitaria recibe de la UE, cada mes,
277		8000 lotes sanitarios de mantenimiento y 15000 de choque. En esta
278		ocasión los lotes deben llegar a tres localidades diferentes del África
279		ecuatorial, A, B, y C. Los lotes de mantenimiento salen de Brujas y los

280		de choque de Munich, ...”
281		Esto es algo en lo que no habíamos reparado ¿no?, es decir, de Brujas
282		nada más que salen lotes de mantenimiento y de Munich lotes de choque,
283		luego nos dan los costes de envío desde cada ciudad europea a las
284		africanas y el número de lotes global que necesitan todas las ciudades,
285		entonces es muy similar al problema de transporte que hicimos el otro
286		día con las cajas de refresco con las dos fábricas y los tres
287		supermercados, sólo que aquí no sale el mismo producto, un tipo de
288		producto sale de una ciudad y el otro sale de otra, pero salvando esa
289		diferencia ¿cómo lo podemos plantear? ¿qué tabla de distribución?
290		Bueno, ¿qué variables primero?
291	E2:	x el número de lotes de mantenimiento que salen de Brujas.
292	Emi:	¿Hacia dónde?
293	E7:	Hacia A.
294	Emi:	Pues por ejemplo hacia A ¿no?
295	E3:	Pero da igual.
296	Emi:	Darí­a igual que escoja una ciudad a que escoja otra pues las demás
297		quedarían en relación a eso, y ¿cuál es la otra variable?
298	E2:	y el número de lotes de choque.
299	Emi:	y sería el número de lotes de choque que salen de Munich hacia A,
300		vamos a ver si es posible resolver el problema con esas dos variables,
301		vamos a escribir la tabla de distribución, ¿qué debemos poner?
302		¿recordáis qué poníamos en el problema de los refrescos?
303		Pues ponemos por filas Brujas y Munich y en las columnas las ciudades
304		A, B y C. Ahora vamos a rellenar la tabla, primero qué ponemos, en esta
305		tabla debemos reflejar el transporte, cómo se va a llevar a cabo, entonces
306		el total de A entre una ciudad y otra ¿cuánto tiene que dar?
307	E2:	6000.
308	Emi:	¿Y el total de B?
309	Es:	7000.
310	Emi:	¿Y el total de C?
311	E2:	10000.
312	Emi:	Y también ¿de Brujas cuánto sale el total?
313	E3:	8000.
314	Emi:	¿Y de Munich?
315	E2:	15000.
316	Emi:	15000.
317		De Brujas hacia A ¿cuánto sale?
318		[Emi se acerca a E9 para ayudarle a identificar los datos del problema
319		en su libro de Braille].
320		¿Cuánto sale de Brujas hacia A?
321	E7:	2x.
322	Emi:	Ahora todavía no estamos con el coste de transporte, en esta tabla de
323		distribución vamos a poner nada más que el transporte, el movimiento
324		que hay de lotes de unos sitios a otros.
325		Muy bien, de Brujas a A ¿cuántos salen?
326	E1:	x.
327	Emi:	x porque ¿cómo hemos definido la variable x? pues como el número de

328		lotes que salen de Brujas a A, ¿y de Munich a la ciudad A?
329	E2:	1000.
330	Emi:	1000.
331		¿Cuántos salen de Brujas a la ciudad B?
332	E1:	Pero x vale B.
333	E2:	¿Pero x vale B? ¿por qué?
334	Emi:	¿Qué?
335	E1:	Porque 7000.
336	E3:	8000 menos x.
337	Emi:	¿Cómo?
338	E2:	No pero si es 8000 ya no da en el total de lotes que necesita A.
339	Emi:	¿De qué nos estamos dando cuenta? ¿nos sirven estas definiciones de
340		variables?
341		No.
342	Es:	[Todos sonríen].
343	Emi:	¿Qué hacemos?
344	E3:	Cambiarlas y ya está.
345	E2:	No, ¿cómo dices eso?
346	Emi:	¿A alguien se le ocurre una solución?
347	E15:	Si llamamos x al número de lotes que salen de Brujas.
348	Emi:	¿A dónde?
349	E15:	Así nada más.
350	Emi:	Pero si tú llamas a x el número de lotes que salen de Brujas y a y el
351		número de lotes que salen de Munich sin escribir la ciudad ¿qué pasa?
352	E15:	Bueno por eso digo que no.
353	Emi:	Volvéis al problema anterior de transporte [ese de los refrescos que se ha
354		estado mencionando] y veis cómo está escrita la tabla de distribución eso
355		de las fábricas y de los supermercados.
356	E2:	x sería los que salen de Brujas a A y y los que salen de Brujas a B.
357	Emi:	Exactamente, ahí está la clave, x es el número de lotes de mantenimiento
358		que salen de Brujas hacia A y y el número de lotes, ahora sería de
359		mantenimiento que salen de Brujas hacia B.
360	E15:	Pero ¿por qué quitas los lotes de choque? [al anotar Emi en la definición
361		de la variable y lotes de mantenimiento].
362	Emi:	A ver así ya podemos plantear el problema, es decir, llamamos x al
363		número de lotes de mantenimiento que salen de Brujas hacia A y y el
364		número de lotes que salen de Brujas hacia B.
365		Bueno pues si sabemos que salen 6000 en total, bueno más bien que
366		6000 es el total que llega a la ciudad A, si salen x de Brujas ¿de Munich
367		cuántas saldrán?
368	E3:	$6000 - x$.
369	Emi:	Si $6000 - x$.
370		Y si a la ciudad B llegan 7000 y han llegado ya y, ¿cuántas faltarían por
371		llegar?
372	E3:	$7000 - y$.
373	Emi:	Muy bien $7000 - y$.
374		Entonces si de Brujas a A salen x, para B salen y, ¿cuántos llegan a C?
375		Si van a salir 8000.

376	E3:	x más y menos 8000.
377	Emi:	No.
378	E8:	8000 menos x más y.
379	Emi:	Muy bien, como ha dicho E8, $8000-(x+y)$, no es lo mismo que decir
380		$(x+y) - 8000$, el total es 8000 y si ya han salido x más y, entonces los que
381		quedan son los 8000 menos los que han salido para A y para B.
382		¿Y de Munich a C?
383	E3:	10000 menos...
384	Emi:	Si hacemos cuentas de que a A llegan 6000 a B 7000 y a C llegan 10000.
385		[Suena el timbre que indica que la clase ha terminado].
386		Pues serán $10000 - (8000 - (x+y))$.
387		Y ¿ven lo importante que es la definición de las variables?
388		Todos los problemas de transporte son iguales, por eso yo los estaba
389		remitiendo al problema anterior, porque en el problema anterior las
390		variables se habían definido de esta manera, entonces si las definimos así
391		si nos va a salir, si ponemos otra definición pues seguramente no.
392		Entonces ¿qué es lo que tenemos que conseguir en este problema?, que
393		el coste del transporte sea el mínimo, ¿cuál es la función objetivo?
394		z es el coste total del transporte ¿no?, esta es nuestra función objetivo, la
395		que tenemos que conseguir que sea mínima.
396	E2:	Pero tendremos que multiplicar lo que tenemos en la tabla de
397		distribución.
398	Emi:	Sí porque claro en una tabla tenemos el coste de transporte de cada lote y
399		en la tabla de distribución tenemos los lotes que salen, entonces ¿el
400		coste total que es z a qué sería igual?
401		Pues si transportar un lote de la ciudad de Brujas a la ciudad A cuesta 2
402		euros y de Brujas a A salen x lotes, ¿cuánto cuesta?
403	E2:	$2x$.
404	Emi:	Entonces z es igual a $2x$ más, si salen y lotes a la ciudad B y cuestan 3
405		euros, ¿sería?
406	Es:	$13y$.
407	Emi:	$13y$, y si transportar de Brujas a C son 6 euros entonces sería $6(8000 -$
408		$(x+y))$, hemos puesto el coste total de transporte de la ciudad de Brujas a
409		cada una de las ciudades africanas, bueno pues sería más, y ahora por
410		Munich.
411	E2:	Sería $12(6000 - x)$.
412	Emi:	Sí $12(6000 - x)$ más $4(7000 - y)$ más $4(10000 - (8000 - (x+y)))$.
413		$[z=2x+13y+6(8000 - (x+y))+12(6000 - x)+4(7000 - y)+4(10000 - (8000$
414		$- (x+y))]$,
415		¿Qué tenemos que hacer con esta expresión?
416		Simplificar, hacer las cuentas quitar paréntesis y nos quedara la x y la y,
417		esa será la función objetivo.
418		¿Ha tocado el timbre?
419	Es:	Sí.
420	Emi:	A bueno pues hay que darnos prisa, las restricciones, ¿qué restricciones
421		pondremos? ¿la x y la y cómo tienen que ser?
422		En este caso la x y la y tienen que ser mayor o igual a 0, ¿qué otra
423		restricción?

424		Bueno pues ya no podéis hacer mucho [Emi ve que básicamente ya va
425		sola escribiendo las restricciones] os lo dejo y mañana lo completamos,
426		tenéis que hacer las cuentas y obtener la expresión simplificada de la
427		función objetivo y hacer el ejercicio número 14 de la página 85 [del libro
428		de texto] ya luego terminaremos los otros en clase, ¿de acuerdo?

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la catorceava clase grabada de la profesora Emi del viernes 21/11/08.

Resumen: Emi empieza hablando del ejercicio 17 de la página 86 que había quedado pendiente la clase pasada y aclara porque no corresponde a un problema de programación lineal, luego retoma el ejercicio 8a de la página 77 que es un problema que ya se había hecho en clase pero sólo hasta el planteamiento, ahora lo retoma para llegar a la solución. Después resuelve el ejercicio 8 apartado b de la página 77, que es otro que ya tenían planteado y termina de resolverlo, es decir, continúa con el planteamiento que ya habían hecho y llega a la solución.

L	Transcripción
1	Emi: Este es el problema que se quedó pendiente la clase pasada y yo iba
2	poniendo caras muy raras cuando lo estábamos planteando, porque el
3	enunciado no se corresponde realmente a un problema de programación
4	lineal, el enunciado qué es lo que nos dice, que tenemos dos minerales,
5	el mineral uno y el mineral dos y queremos hacer una aleación, había
6	que mezclar esos dos minerales y nos dan la composición.
7	E3: [E3 interrumpe la clase, llega tarde y pide permiso para entrar].
8	[Emi continua pero E3 llega tarde y se pone a hablar con su compañera].
9	E3 si entras no es para hablar.
10	E3: Perdón.
11	Emi: Y el mineral tenía una composición del metal A y una composición del
12	metal B, que contenía un 10% de un metal y un 90% del otro y otra
13	composición que tenía 40% de A y 60% de B, ¿de acuerdo? y nos decían
14	que la aleación tenía que tener exactamente un 40% del metal A y un
15	60% del metal B, eso no puede ser un problema de programación lineal,
16	es un problema de aleaciones en los que tenemos dos minerales con un
17	porcentaje determinado de metales y que al mezclarlos darán un
18	porcentaje determinado ¿de acuerdo?, entonces no es que nos pidan que
19	en la aleación haya un mínimo de metal A por ejemplo, porque entonces
20	sí podría ser un problema de programación lineal, pero en este caso nos
21	piden que sea exactamente el 40% del metal A y el 60% del metal B y si
22	os dais cuenta, el mineral dos cumple esa condición, es decir, que si yo
23	cojo un trozo del mineral dos, un 40% es del metal A y entonces tiene el
24	60% del metal B, con lo cual la única solución a este problema, la
25	solución posible es que la x sea 0, es decir, que no se coja ninguna
26	cantidad de metal uno y solamente se trabaje con el metal dos, ¿de
27	acuerdo? pero ya no es una aleación, es simplemente que de dos
28	minerales sólo voy a emplear uno, entonces realmente está mal planteado
29	y si no queremos decir que está mal planteado pues por lo menos decir
30	que no tiene solución pero con todo esto [con justificación] ¿de acuerdo?
31	Entonces os lo quería comentar porque luego hay una parte del
32	enunciado en la que sí que parecía de programación lineal, era con
33	relación a esta frase “Si para fabricar la aleación la empresa quiere
34	utilizar como mucho un 50% del mineral dos”, esto lo leímos mal en
35	clase o por lo menos yo lo entendí mal el último día, ¿qué significa esta
36	frase? Que “para fabricar la aleación la empresa quiere utilizar cómo
37	mucho un 50% del mineral dos”, yo entendí cuando lo leí el otro día que
38	en la aleación tenía que haber como mucho un 50% del mineral dos, pero

39		eso no es lo que dice la frase, lo que dice la frase es que de los
40		yacimientos de mineral que tiene no quiere utilizar más de la mitad de su
41		yacimiento, entonces pues os quería decir, os propuse que lo acabarais en
42		casa pero realmente ibais a perder mucho tiempo porque no ibais a
43		encontrar la solución porque no la tiene, ¿de acuerdo? porque la solución
44		es esta en realidad $x=0$, pero entonces si esta es la solución tampoco
45		tiene sentido el planteamiento, bueno pero ya no quiero seguir perdiendo
46		tiempo con este problema, entonces quería haceros ver que hay que tener
47		cuidado con los problemas, sobre todo cuando tratamos de aplicar un
48		método cuando ese método no se corresponde a ese tipo de problema y
49		es que el problema yo creo que está equivocado y también para deciros
50		que en algún caso algunos de los problemas de programación lineal que
51		les pueden salir, puede ser que no tengan solución, es decir, que no hay
52		que empeñarse en que os salga una solución porque puede ser que el
53		problema no tenga solución, lo que ocurre es que este problema ni
54		siquiera tenía bien un planteamiento con el cual poner el conjunto de
55		restricciones.
56		Os propuse para casa hallar la región factible de dos problemas que ya
57		teníamos planteados, de la página 77 el ejercicio 8a y 8b, ¿lo habéis
58		hecho?
59		[Emi empieza a escribir un esquema] Hasta ahora ¿qué hemos estado
60		haciendo?
61	E2:	El planteamiento.
62	Emi:	El planteamiento del problema, en el planteamiento lo que ponemos
63		siempre es la función objetivo ¿y qué más?
64	E2:	Y las restricciones.
65	Emi:	Si y las restricciones, ¿de acuerdo?,
66		¿cómo llegamos a conseguir la función objetivo y las restricciones?
67		Pues para este caso necesitamos poner los datos del problema,
68		¿y qué más?
69		Definir las variables, ¿y después?
70	E2:	La tabla de distribución.
71	Emi:	Muy bien, utilizar la tabla de distribución y a partir de los datos del
72		enunciado, de la definición de las variables y de la tabla de distribución
73		planteamos el problema, es decir, señalamos cuál es la función objetivo y
74		cuáles son las restricciones.
75		Y ahora estamos en otra fase, ahora estamos con la región factible,
76		¿y qué es la región factible?
77	E7:	La gráfica.
78	Emi:	La región factible es la solución gráfica, ¿de qué?
79	E2:	Del problema.
80	Emi:	No del problema, del conjunto de inecuaciones que forman las
81		restricciones, es decir, es la solución del sistema de inecuaciones que
82		forman las restricciones.
83	E12:	Entonces después de la gráfica hay que resolverlo.
84	Emi:	Exactamente, después de esto tenemos que poner ya cuál es la solución,
85		a partir de aquí encontramos la solución al problema, la solución la
86		podemos encontrar con el método analítico o con el método gráfico, ¿de

87		acuerdo?
88		Entonces hoy vamos a encontrar la región factible de estos problemas
89		que ya tenemos planteados y ya después con el método analítico
90		hallaremos la solución, ¿alguna duda?
91		Entonces no hay que confundir la fase de la región factible con la final
92		que es encontrar la solución en sí, entonces ya tenemos planteado uno de
93		los problemas, el 8 de la página 77 que dice: “Una empresa tiene 8
94		autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas para trabajar cada día
95		a 400 trabajadores hasta el lugar donde se ubica la fábrica, pero
96		únicamente dispone de 9 conductores. Si el coste por viaje de un autocar
97		grande es de 48 euros y el de un autocar pequeño es de 36 euros,
98		¿cuántos autocares de cada tipo utilizará la empresa para trasladar a sus
99		trabajadores de manera que el coste sea el mínimo posible? ¿Cuál será
100		ese coste?”
101		Entonces como ya lo hemos hecho, vamos a poner cual era la función
102		objetivo, ¿me la podéis dictar por favor?
103	E9:	$z=48x+36y$.
104	Emi:	Bien $z=48x+36y$, ¿y las restricciones que teníamos?
105	E8:	$x \geq 0, y \geq 0, 50x+40y \geq 400, x+y \leq 9$.
106	Emi:	Bien $x \geq 0, y \geq 0, 50x+40y \geq 400, x+y \leq 9$.
107		Bueno pues la función objetivo y las restricciones las habíamos
108		conseguido escribir a partir de los datos del problema, de la definición de
109		las variables y de la tabla de distribución, esa parte ya está hecha, vamos
110		a encontrar la región factible del problema, es decir, la solución de este
111		sistema, ¿recordáis cómo resolvíamos el sistema?
112		Porque se resuelve de forma gráfica.
113	E12:	Se escribe la recta $x=0$.
114	Emi:	Sí, es decir, transformamos vamos a escribir la resolución del sistema de
115		inecuaciones, por comodidad despejábamos las variables, la x, cuando
116		solamente existe la x y de los demás casos la y, entonces tenemos que
117		despejar de los demás casos la y.
118		Nos quedaría...
119	E3:	$x \geq 0, y \geq 0, y \geq (400-50x)/40$.
120	Emi:	¿Y de la última inecuación?
121	Es:	$y \leq 9-x$.
122	Emi:	Sí, entonces reescribimos las inecuaciones de esta manera, entonces
123		después de reescribir el sistema de inecuaciones, como sabemos que las
124		soluciones de cada una de las inecuaciones forman una región, que se
125		corresponden con una región del plano, y la región del plano
126		correspondiente depende de la recta que limita esas dos regiones, pues
127		tenemos que escribir las rectas asociadas, entonces ¿cuáles son las rectas
128		asociadas?
129	E3:	$x=0$.
130	Emi:	$x=0$.
131	E3:	$y=0$.
132	Emi:	$y=0$.
133	E3:	$y=(400-50x)/40$.
134	Emi:	$y=(400-50x)/40$, simplificamos y nos queda $y=10-(5/4)x$, ¿y la otra

135		ecuación?
136	E3:	$y=9-x$.
137	Emi:	$y=9-x$.
138	Emi:	Entonces tenemos 4 rectas que van a dividir cada una de ellas en dos
139		semiplanos, tenemos que encontrar la región común a las soluciones de
140		cada una, entonces $x=0$ ¿quién es?
141	E3:	El eje y.
142	Emi:	El eje y que es vertical ¿y quién es $y=0$?
143	E3:	El eje x.
144	Emi:	El eje x que es el horizontal.
145		¿Y las dos rectas que faltan cómo son?
146	E9:	Inclinadas.
147	Emi:	Si, $y=10-(5/4)x$ es una recta inclinada y también la recta $y=9-x$ es
148		inclinada, entonces ¿qué puntos vamos a utilizar para graficar las rectas?
149	E3:	El valor 0.
150	Emi:	Damos el valor 0 por comodidad y en la primera queda el punto (0,10)
151		[Emi hace las operaciones en la pizarra para obtener ese resultado],
152		¿qué otro valor le damos a esa recta? ¿cuando tenemos números
153		fraccionarios cuál nos conviene dar?
154	E2:	El del denominador.
155	Emi:	El del denominador, entonces le damos a $x=4$ y nos queda el punto (4, 5)
156		Bien y para la otra recta ¿qué valores nos interesan?
157	E2:	Pero antes de buscar los puntos para la última recta, ¿no le vais a dar más
158		puntos a la que estábamos buscando?
159	Emi:	¿Cuántos puntos necesitas para dibujar una recta? Dos.
160	E2:	Sí pero le podemos dar más puntos.
161	Emi:	Si le podemos dar más puntos pero por comodidad nos interesa siempre
162		poner el valor de la $x=0$ y luego otro más.
163		En este caso el consejo que yo os doy es que si aparece en los
164		coeficientes un número fraccionario, es mejor darle el valor del
165		denominador para eliminar las fracciones y que nos salga un número
166		entero, ese es mi consejo.
167		Aquí por ejemplo, en esta otra recta $y=9-x$, no tenemos números
168		fraccionarios, ¿cuál es el consejo, pues como he dicho antes $x=0$ y al
169		sustituir nos queda el punto (0,9).
170		¿Y qué otro? pues al contrario, ¿qué valor le tengo que dar a la x para
171		que la y sea 0?
172	E2:	$x=9$.
173	Emi:	Pues $x=9$ y nos queda el punto (9,0).
174		No es que sólo tengan que ser estos dos puntos, tú puedes elegir los que
175		quieras pues la recta tiene infinitos puntos, pero por comodidad.
176		Ahora ya pasamos a la representación gráfica ¿de acuerdo?
177		¿Nos ha salido algún número negativo en los puntos que hemos
178		encontrado?
179	Es:	No.
180	Emi:	Como no nos ha salido ningún número negativo y aquí estamos con estas
181		dos restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, entonces de los 4 cuadrantes en los que los
182		ejes dividen al plano, ¿qué cuadrante es éste?

183	E3:	El primero.
184	Emi:	El primer cuadrante, la solución de estas dos inecuaciones son todos los
185		puntos que pertenecen al primer cuadrante, entonces como estamos
186		buscando la solución común a todas y ya sabemos que la solución de
187		éstas es el primer cuadrante pues no vamos a buscar afuera y como en
188		los puntos de las otras rectas no nos han salido números negativos pues
189		no los vamos a necesitar, entonces representamos los ejes x y y con los
190		semiejes positivos solamente [Emi comienza a hacer la gráfica en la
191		pizarra],
192		entonces sabemos que la región factible estará en el primer cuadrante,
193		ahora una de las rectas que usamos, la de $y=10-(5/4)x$,
194		localizamos los puntos en el plano aquí [Emi señala en el plano los
195		puntos y los une para formar esa recta], ¿de acuerdo?
196		Entonces si yo os pregunto ¿cuál es la región del plano que cumple con
197		esta tercera desigualdad $y \geq 10-(5/4)x$,
198		¿Cuáles son los puntos del plano que cumplen esta desigualdad, que el
199		valor de la y está por encima de $10-(5/4)x$, pues justo los que están sobre
200		la recta, ¿los que están por debajo de la recta qué cumplen?
201	E2:	Menor o igual.
202	Emi:	Sí, es decir, los que están por encima de la recta son los que cumplen
203		$y \geq 10-(5/4)x$, entonces si solamente tuviésemos que encontrar la solución
204		de esta inecuación, gráficamente se correspondería con este semiplano
205		[Emi señala con su mano el semiplano formado] con la región que está
206		sobre la recta ¿de acuerdo? pero no es la única recta que tenemos,
207		también tenemos que tomar en cuenta esta región $y \geq 9-x$, vamos a
208		representar la recta asociada $y=9-x$, entonces localizamos los puntos
209		(0,9) y (9,0) [Emi localiza los puntos en la pizarra y les comenta que si
210		sustituyen $x=8$ en la recta anterior obtienen en punto (8,0) que le sirve de
211		guía en la pizarra al dibujar la segunda recta, y que para ellos no es
212		problema porque tienen cuadrícula en su cuaderno pero en la pizarra
213		sirve para saber por donde pasan las rectas con mayor exactitud],
214		pero también quiero ver dónde se cortan esas dos rectas, es en el punto
215		(4,5), ¿de acuerdo?
216		Entonces si sólo nos fijamos en la última inecuación $y \leq 9-x$ ¿cuál sería la
217		solución?
218		La región del plano que está por debajo de la recta, entonces cuando
219		buscamos la solución común a todas ¿cuál va a ser?,
220		primero tiene que estar en el primer cuadrante y tiene que ir por encima
221		de $y=10-(5/4)x$ y por debajo de $y=9-x$ ¿entonces cuál es la solución?
222		Este triángulo pequeñito [Emi señala y sombrea esa región] entonces
223		esta es la región factible, es la solución gráfica de este sistema de
224		inecuaciones.
225		Bueno pues ahora he de decir que la mayoría de las veces la teoría de
226		programación lineal nos asegura que en un problema de programación
227		lineal con una región factible como ésta, acotada y convexa, ya les
228		explicare eso más despacio, tiene solución y no solamente tiene el
229		problema solución sino que se encuentra en la frontera del recinto y
230		¿qué es la frontera del recinto?

231		Pues son todos los vértices que forman el recinto y los lados que forman
232		el recinto, en este caso el recinto es cerrado, es un triángulo tiene tres
233		lados y tres vértices, ¿de acuerdo?
234		Entonces la solución estará o bien en alguno de los vértices o bien serán
235		todos los puntos que están sobre algún lado.
236		¿Y cómo lo encontramos?
237		Bueno vamos a buscar la solución, vamos a poner nombre a los vértices
238		A, B y C.
239		Vamos a pasar a la última etapa, a encontrar la solución, vamos a
240		aprovechar aquí que la resolución es muy sencilla, vamos a buscar los
241		vértices de la región factible, vamos a poner las coordenadas de A, B y
242		C.
243		¿Cuál es el punto A? ya nos hemos dado cuenta de que ese punto
244		donde se cortan las rectas es el (4,5),
245		¿qué hubiera pasado si no nos damos cuenta así de fácil [gráficamente]?,
246		¿cómo hallamos los puntos de intersección de las rectas?
247	E3:	Resolviendo el sistema de las ecuaciones.
248	Emi:	Muy bien, si tengo dos rectas y quiero determinar el punto de
249		intersección, escribimos las ecuaciones de cada una de las rectas y
250		resolvemos el sistema de ecuaciones, encontramos los valores de x y de
251		y que son justamente las coordenadas del vértice, del punto donde se
252		intersectan.
253		¿Cuál es el punto B?
254	E3:	(9,0).
255	Emi:	Si lo podemos ver fácilmente en la gráfica que es (9,0).
256		¿Y el punto C?
257	E3:	El (8,0).
258	Emi:	El (8,0) lo podemos ver en la gráfica, ¿de acuerdo?
259		Entonces vamos a aplicar el método analítico para encontrar la solución
260		del sistema, ya he encontrado la función objetivo, me la podéis dictar por
261		favor.
262	E8:	$z=48x+36y$.
263	Emi:	Muy bien, ¿qué estábamos buscando, lo recordáis?
264		El enunciado a este problema se corresponde con un enunciado típico de
265		un problema de transporte,
266		entonces se busca que el coste de transporte sea mínimo,
267		entonces como según esa teoría que os he explicado, el mínimo lo vamos
268		a encontrar en alguno de los vértices o en alguno de los lados de la
269		región factible, pues lo único que tenemos que hacer ahora, para saber
270		dónde alcanza el mínimo es ver qué valores da z en cada uno de estos
271		puntos [los vértices], entonces para el punto A, para $x=4$, $y=5$, ¿cuál es el
272		coste? ¿z qué sería?
273	E3:	Sustituimos.
274	Emi:	Sustituimos, $z=48(4)+36(5)=192+180=372$, nos da 372,
275		¿qué es lo que estamos buscando con esto? ¿recordáis lo que
276		representaban estas variables?,
277		en este problema se disponía de dos autobuses, autobuses grandes y
278		autobuses pequeños, ¿x qué representaba?

279	E7:	Autobuses grandes.
280	Emi:	Habíamos definido la x que representaba el número de autobuses
281		grandes y la y el número de autobuses pequeños y z era el coste de
282		transporte, entonces hay que tener en cuenta que todo esto tiene
283		significado, que no son como otros problemas en matemáticas en donde
284		nos ponemos a resolver ecuaciones, sistemas de inecuaciones o lo que
285		sea pero luego no le damos ningún significado a esas variables, ninguna
286		interpretación, aquí sí la tiene.
287		Entonces x era el número de autobuses grandes y la y el número de
288		autobuses pequeños y z era el coste del transporte, entonces con esta
289		operación que estamos realizando, ¿qué estamos haciendo? ¿qué
290		significado tiene estos números?
291		Pues que cuando cogemos 4 autobuses grandes y 5 autobuses pequeños
292		el transporte nos cuesta 372 euros.
293		Vamos a ver qué pasa en los otros puntos.
294		Para $x=9$, $y=0$, ¿cuál es el coste? $z=48(9)+36(0)=432$, entonces ¿qué
295		significa?, que si tomamos 9 autobuses grandes y ninguno pequeño, el
296		coste de transporte es 432 euros, de momento, ¿dónde es mínimo?
297		Recordáis que estamos buscando el coste mínimo.
298	E3:	¿Y por qué no tomamos el punto C?
299	Emi:	Pues ahora vamos a tomarlo, como dice E3 ahora tenemos que
300		comprobar lo que pasa con el punto C, para $x=8$, $y=0$,
301		$z=48(8)+36(0)=384$, ¿en qué caso el coste es menor?
302	E3:	En el punto A.
303	Emi:	Significa que hemos encontrado el mínimo, no tenemos que buscar en
304		más puntos sólo tenemos que ver lo que pasa en esos puntos, en los
305		vértices de la región factible.
306	E3:	¿Y lo podemos buscar en otro punto fuera de la región sombreada?
307	Emi:	No, lo que si puede pasar es que se tenga una región factible que no sea
308		cerrada o que tenga 8 lados, es decir, que la región se puede complicar
309		un poco más, depende de lo sencilla o complicada que sea la región
310		factible.
311		Entonces ahora el valor mínimo se alcanza en el punto A, entonces ¿cuál
312		es la solución del problema? Escribimos SOLUCIÓN con mayúscula,
313		“El coste del transporte es mínimo, si se utilizan 4 autobuses grandes y 5
314		pequeños.
315	E12:	¿Tenemos que escribir todo eso?
316	Emi:	Sí todo eso, cuando demos la solución al problema de programación
317		lineal tenemos que darla con palabras, ¿y cuál es ese coste mínimo?
318		Pues 372 euros, es decir, que con las condiciones que nos dan en el
319		problema no podemos organizarlo de forma que nos cueste menos de
320		372 euros, podemos hacerlo de muchas otras formas pero siempre el
321		coste sería superior y como nos preguntan de qué forma podemos
322		organizarlo para que el coste sea el mínimo pues esta es la solución, ¿lo
323		veis?, entonces este problema es muy sencillo porque, primero hemos
324		encontrado los vértices sin tener que resolver el sistema, la región es
325		muy sencilla, sólo tiene tres vértices, pero en todos podemos usar el
326		mismo método, ¿de acuerdo?

327		Bueno pues ahora vamos al problema del apartado b, el de un
328		trabajador autónomo que coloca cierres de collares y de pulseras y por
329		cada cierre de collar gana 42 céntimos de euro y por cada cierre de
330		pulsera, 30 céntimos de euro, cada día va a buscar el material a la fábrica
331		con dos estuches de joyería, en uno caben 100 collares y en el otro 120
332		pulseras, si cada día es capaz de colocar 150 cierres como máximo,
333		determina el número de cierres de cada tipo que debe colocar para que su
334		beneficio sea máximo.
335		Entonces este no es un problema de transporte, el que vamos a resolver
336		ahora y que ya tenemos planteado, esta parte ya la tenemos hecha,
337		¿a qué tipo de problema diréis que corresponde?
338	E12:	De optimización.
339	Emi:	Bueno estos son todos problemas de optimización, de encontrar mínimos
340		o máximos, hemos visto que el transporte sea mínimo y ahora queremos
341		que el beneficio sea el máximo y las condiciones que nos dan en este
342		problema corresponden a la organización del trabajo, es decir, es un
343		problema en el que nos piden que organicemos el trabajo para que el
344		beneficio sea máximo ¿de acuerdo?
345		Bueno, ¿me podéis dictar la función objetivo de este problema? ¿qué
346		teníamos?
347	E3:	$z=0.42x+0.3y$.
348	Emi:	Esta es la función objetivo ¿y las restricciones?
349	E3:	$x \geq 0, y \geq 0, x \leq 100, y \leq 120, x+y \leq 150$.
350	Emi:	La x era el número de cierres de collares y la y era el número de cierres
351		de pulseras y z el beneficio que obtiene por ese trabajo, esas son las
352		restricciones que impone el problema.
353	E3:	El número de cierres diario.
354	Emi:	Exactamente, estamos hablando de la organización de un trabajo diario,
355		de un trabajo que se hace en un día, bueno ¿qué hacemos?
356		Vamos a hacer la resolución del sistema de inecuaciones, ¿dejamos todas
357		las desigualdades como están o cambiamos alguna?
358	E3:	La última nada más.
359	Emi:	Sería $x \geq 0, y \geq 0, x \leq 100, y \leq 120, y \leq 150-x$, bueno pues ya sabemos que las
360		resolvemos gráficamente y que por cada inecuación tenemos un
361		semiplano, tenemos que buscar la región común a todos los semiplanos y
362		para eso tenemos que buscar las rectas que dividen al plano en dos,
363		entonces las rectas asociadas son $x=0, y=0, x=100, y=120, y=150-x$,
364		como tenemos que representar estas rectas entonces siempre nos va a
365		servir averiguar de qué tipo son,
366		la primera es el eje y, la segunda el eje x, en la tercera $x=100$,
367		¿qué tipo de recta es?
368	E3:	Vertical.
369	Emi:	Vertical, luego la recta $y=120$, ¿qué recta es?
370	Es:	Horizontal.
371	Emi:	Horizontal, entonces cuando la recta es vertical u horizontal, no
372		necesitamos poner una tabla de valores, pero la última recta donde
373		tenemos x y y ¿qué tipo de recta es?
374	Es:	Inclinada.

375	Emi:	Inclinada y en las rectas inclinadas escribimos la tabla de valores, ¿qué
376		valores nos interesa poner en la tabla?
377	E3:	$x=0$.
378	Emi:	$x=0$ entonces $y=150$ ¿y otro?
379	E3:	$x=150$.
380	Emi:	$x=150$ entonces $y=0$, son los valores más cómodos, muy bien y ahora
381		¿nos han salido números negativos?
382		No y como sabemos que las dos primeras ecuaciones corresponden al
383		primer cuadrante, pues todo lo dibujamos en el primer cuadrante, la recta
384		$x=100$ ¿qué valores tenemos 50, 100, 120, 150 entonces cómo ponemos
385		la separación en los ejes para que nos quede bien el dibujo?
386	Es:	De 50 en 50 o de 100 en 100.
387	Emi:	Bueno de 50 en 50, vamos a ir poniendo 50, 100, 150 [en el eje x], ahora
388		acá 50, 100, 150 [en el eje y], pregunto ¿la separación que hago en el eje
389		x tiene que ser la misma que hago en el eje y?
390		Pues sí, es decir, las distancias tienen que coincidir, tenemos que usar la
391		misma escala en un eje que en otro.
392		Bueno ya tenemos los ejes, ahora la recta $x=100$, pues dibujamos la recta
393		vertical en $x=100$, si nos vamos a la desigualdad $x \leq 100$ ¿cuáles son los
394		puntos?
395	E2:	Pues los de la izquierda.
396	Emi:	Sí los que están a la izquierda de la recta, los menores están a la
397		izquierda de la recta ¿de acuerdo? y ahora, tenemos la recta $y=120$,
398		dibujamos la recta horizontal y entonces en la desigualdad $y \leq 120$ ¿cuáles
399		son los puntos?
400	E7:	Los que están debajo.
401	Emi:	Sí, los que están por debajo de la recta, si el sistema sólo tuviera las
402		primeras 4 inecuaciones, la solución estaría en este rectángulo [Emi
403		señala la región en su dibujo] porque es por arriba del eje x, a la derecha
404		del eje y, por debajo de la recta $y=120$ y a la izquierda de la recta $x=100$,
405		pero todavía nos falta una restricción más por incluir, la recta $y=150-x$
406		¿qué valores tenemos? (0,150) y (150,0), entonces unimos y tenemos la
407		recta $y=150-x$, en la desigualdad ¿qué tenemos? $y \leq 150-x$ entonces los
408		puntos son los que quedan por debajo de la recta, entonces ¿cuál es la
409		región factible?
410	Es:	Esa [Los estudiantes señalan desde su lugar con la mano la región
411		factible].
412	Emi:	Sí, la que está dentro del rectángulo y por debajo de la última recta
413		¿entonces qué significa eso? ¿cuántos lados tiene?
414	E7:	5.
415	Emi:	Muy bien, por aquí [Emi va sombreando la región], voy a poner con un
416		trazo más grueso los lados de la región, entonces esta es la región
417		factible.
418	E12:	¿Y los vértices ahora?
419	Emi:	Exactamente, si tenemos la región factible tenemos que encontrar todos
420		los vértices, tenemos el origen le llamamos O, y el resto pues por
421		ejemplo A, B, C y D, entonces vamos a escribir los vértices de la región
422		factible, O es el origen (0,0) y ¿el A qué punto es?

423	E2:	(100,0).
424	Emi:	Si, A es el (100,0) ¿y el punto B?
425	E2:	100.
426	Emi:	No sabemos la coordenada lo vamos a dejar así y ahora la
427		calculamos, pero vamos a poner los que tenemos de la gráfica
428		directamente,
429		luego el C, no sabemos cuánto vale x pero si sabemos que y vale 120,
430		¿esto lo veis todos? Las coordenadas que si vemos del dibujo, ¿y el D?
431	E2:	(30, 120).
432	Emi:	Exactamente, entonces directamente de la gráfica tenemos esos vértices
433		pero nos falta encontrar algunas coordenadas,
434		¿cómo le hacemos para encontrar las del punto B? ¿el punto B entre
435		cuáles restas están?
436	E2:	Pues la $x=100$.
437	Emi:	A ver lo voy a escribir aquí, el punto B pertenece a la recta $x=100$ y la
438		recta $y=150-x$, ¿cómo encuentro la y en este punto?
439	E3:	50.
440	Emi:	50, sustituimos $x=100$ en $y=150-x$ y nos queda $y=50$, entonces el punto
441		B es (100,50), y para el punto C haremos lo mismo, ¿cuáles son las
442		rectas en las que está el punto C? La recta $y=120$ y la recta $y=150-x$,
443		¿cómo hallamos la x?
444	E2:	Sustituyendo $y=120$.
445	Emi:	Sustituyendo $y=120$, es decir, $120=150-x$, ¿entonces cuánto vale x?
446	E2:	30.
447	Emi:	30, entonces la x del punto C es 30, el punto C es (30,120).
448		Entonces sabemos que la solución se encuentra en alguno de estos
449		vértices, tenemos que hallar el valor de la función objetivo en cada uno
450		de ellos, entonces empezamos, con $x=0$, $y=0$, ¿cuánto vale z?
451	E3:	0.
452	Emi:	$z=0.42(0)+0.3(0)=0$, ¿qué significa esto? que si coloca 0 cierres de
453		collares y 0 cierres de pulseras, que si no trabaja pues evidentemente el
454		beneficio es 0.
455		Para $x=100$, $y=0$, ¿z cuánto vale? $0.42(100)+0.3(0)=42$.
456		¿Qué significa? Que si coloca 100 cierres de collares y ninguno de
457		pulsera ¿qué beneficio obtiene? 42 euros.
458		Vamos a ver si hace 100 collares y 50 pulseras, ¿cuánto gana con 100
459		collares y 50 pulseras? $z=0.42(100)+0.3(50)=57$ euros.
460		Ahora con $x=30$, $y=120$, es decir si hace nada más 30 de collares pero
461		120 de pulseras, ¿qué beneficio obtendría?
462		$z=0.42(30)+0.3(120)=48.6$ euros,
463		¿de momento con qué está ganando más collares?
464	E2:	Con 100 collares y 50 pulseras.
465	Emi:	Haciendo 100 collares y 50 pulseras.
466		Porque tenemos que encontrar aquí los mayores beneficios,
467		entonces aquí lo que tenemos que buscar es el máximo.
468		Falta nada más el último con $x=0$, $y=120$, ¿z cuánto sería?
469	E2:	36.
470	Emi:	$z=0.42(0)+0.3(120)=36$ euros.

471	E2:	Gana más haciendo 100 collares y 50 pulseras.
472	Emi:	Exactamente, comparamos los valores que toma la función objetivo en
473		cada uno de los vértices y encontramos el máximo en el punto $x=100$,
474		$y=50$, ¿cuál es la solución del problema? ¿qué escribiremos?
475	E2:	Pues el beneficio máximo es de 57 euros se obtiene.
476	Emi:	El beneficio máximo que es de 57 euros por día se obtiene.
477	E2:	Si hace 100 broches pulseras.
478	Emi:	Si hace 100 de collares.
479	E2:	Si es 100 de collares y 50 de pulseras.
480	Emi:	Sí 100 cierres de collares y 50 cierres de pulseras,
481		es decir, que con todas las limitaciones del trabajo que tiene,
482		los beneficios que obtiene, esta es la forma de organizar el trabajo
483		consiguiendo el mayor beneficio,
484		entonces por eso los métodos de programación lineal se aplican en las
485		empresas, eh, para organizar el sistema de producción en función de las
486		restricciones que se tienen en una empresa, de trabajadores, de
487		materiales, de costes, se organizan para obtener el beneficio máximo y
488		ya veis que con un planteamiento matemático relativamente sencillo se
489		consigue, claro que aquí es sencillo por lo que hemos dicho siempre,
490		¿cuántas variables van a haber en este problema?
491	E2:	3.
492	Emi:	¿Variables?
493	E2:	2.
494	Emi:	Digamos, la función objetivo es otra variable pero depende de x y y
495		entonces variables independientes nada más que 2.
496	E2:	x , y .
497	Emi:	Efectivamente y si el problema tuviera muchas más variables, ¿qué
498		ocurriría?
499	E2:	Sería más difícil.
500	Emi:	Sería más complicado, en la resolución habría que aplicar unos métodos
501		y se necesitaría el ordenador para hacer los cálculos rápido, por eso
502		tenemos a nuestra disposición la tecnología.
503		¿Alguna duda?
504		Entonces ¿qué es importante en estos problemas?
505	E12:	Todo.
506	Emi:	Todo, efectivamente pero primero tener una comprensión clara del
507		enunciado, de qué tipo de problema se trata, si es un problema de
508		transporte, de dieta, de organización de trabajo, hay muchos tipos de
509		problema, entonces hay que averiguar a qué tipo pertenece, en segundo
510		lugar, ¿qué hemos dicho antes? Para hacer el planteamiento del problema
511		¿qué necesitamos?
512	E2:	Definir correctamente las variables.
513	Emi:	Definir correctamente las variables y escribir una tabla de distribución
514		que nos ayude a escribir la función objetivo y las restricciones del
515		problema, después ya a partir de aquí todo lo demás es... ya no hay que
516		pensar apenas ¿no?, a partir de aquí ¿qué hacemos?
517		En el planteamiento tenemos que leer bien y pensar bien, [suena el
518		timbre que indica que la clase ha terminado] luego a partir de ahí todo es

519		muy mecánico porque ya que tenemos el sistema de inecuaciones, la
520		solución se obtiene de manera mecánica y entonces para encontrar la
521		solución del problema pues también veis que todo es muy mecánico, hay
522		que hacer cálculos nada más, ¿de acuerdo?
523		Entonces para casa, me gustaría que resolvierais y encontrarais la
524		solución de todos los problemas que ya hemos planteado eh, que
525		tenemos ya la función objetivo y las restricciones, entonces los
526		problemas 13 y 14 de la página 85 y el 18 de la página 87, ¿de acuerdo?
527		Encontrar la solución del problema, vale.
528		Completar el 13 y 14 que están a medias y el 18 hacedlo completito
529		desde el planteamiento.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la quinceava clase grabada de la profesora Emi del jueves 27/11/08.

Resumen: Emi empieza discutiendo un problema que les había dejado para que lo intentaran en casa y lo resuelve todo completo: Datos, Variables, Tabla de distribución, Función objetivo, Restricciones, Resolver el sistema de inecuaciones y Solución. Cuando lo terminan les pregunta si tienen dudas y finalmente les deja dos ejercicios para casa.

L		Transcripción
1	Emi:	Primero voy a leer una primera vez el problema para que os enteréis de
2		qué va el problema, luego la segunda vez, será para ir anotando los
3		datos, vale. El problema es el de la página 87 el 19 dice:
4		“Una sociedad limitada decide invertir un millón de euros en bolsa.
5		Compra acciones de la compañía Aurea, que rinden un 7% anual, y de la
6		compañía Argentina, que rinde un 4% anual. Los criterios de inversión de
7		la compañía impiden invertir más de 600000 euros en Aurea y menos de
8		40000 euros en Argentina. Además, los socios deciden que la inversión en
9		Aurea, aunque el interés sea mayor, no debe ser superior al doble de la
10		inversión en Argentina. Determina cómo debe repartir la sociedad el
11		millón de euros para obtener el máximo beneficio.”
12		Bueno ahora lo voy a leer nuevamente y vamos a escribir los datos, [Emi
13		lee nuevamente el ejercicio] ¿qué datos tenemos?
14		Pues tenemos las dos compañías, las vamos a anotar en filas, la
15		compañía Aurea y la compañía Argentina, luego los beneficios de cada
16		una en la primera columna, nos dicen que en la primera dan un 7% y en
17		la otra un 4%, en la segunda columna vamos a anotar las limitaciones, en
18		la primera a lo más 600000 euros y en la otra 40000 euros.
19		Bueno ahora ¿cuáles son las variables? ¿qué representa la x y qué
20		representa la y?
21		Bueno primero, ¿de qué trata el problema?
22	E10:	De obtener el beneficio de la inversión.
23	Emi:	Vamos a contextualizar el problema, ¿de qué se está hablando?
24	E3:	De una sociedad.
25	Emi:	De una sociedad, de un grupo de personas porque una sociedad es un
26		grupo de personas que quiere invertir en bolsa, ¿en cuántas compañías?
27	E3:	En dos.
28	Emi:	En dos compañías y nos hablan de los beneficios que aportan las
29		acciones de esas compañías, ¿de acuerdo?
30		Pero nos dan una cantidad exacta del dinero que se quiere invertir,
31		entonces este problema es diferente a los otros porque nos ponen el
32		límite pero nunca cantidad exacta, el millón no es un límite, sino que
33		tenemos que repartir ese millón de euros entre las dos inversiones,
34		entonces ¿qué es lo que se pretende conseguir? Que el beneficio sea...
35	E3:	Máximo.
36	Emi:	Que sea máximo, entonces ¿cuáles son las variables? ¿qué es lo que nos
37		preguntan? ¿cómo debe repartir la sociedad ese millón de euros? ¿cuánto
38		tienen que invertir en cada empresa?, entonces las variables que vamos a
39		utilizar ¿cuáles son la x y la y?
40	E10:	El beneficio de Aurea.

41	Emi:	¿x el beneficio?
42	E7:	La inversión.
43	Emi:	¿O la inversión?
44	E10:	Pero el problema dice el beneficio.
45	Emi:	Sí eso es lo que nos preguntan pero eso ¿en qué parte del problema
46		tenemos que tomarlo en cuenta?
47	E7:	En la función objetivo.
48	Emi:	Efectivamente, tenemos que tomarlo en cuenta en la función objetivo,
49		ahora para las variables, si nos preguntan ¿cómo repartir lo que se
50		invierte?
51		En realidad las variables tienen que ver con la inversión, entonces la x va
52		a ser la inversión ¿en qué compañía?
53	E10:	En Aurea.
54	Emi:	Sí en Aurea ¿y la y? En Argentina.
55		Estamos hablando de un grupo de personas que quiere invertir en bolsa
56		en estas dos compañías y en total tiene un millón de euros para invertir y
57		quieren saber cómo repartir ese dinero, ¿cuánto invertir en una y cuánto
58		invertir en otra? Entonces está claro que las variables tienen que ser esto
59		[Emi señala las dos variables que acaba de definir], ¿qué cantidad se
60		invierte en una compañía y en la otra?, entonces en los problemas
61		anteriores normalmente escribíamos una tabla de distribución, aquí no
62		sería necesario porque está claro el problema, es decir, no siempre
63		necesitamos la tabla de distribución para escribir la función objetivo,
64		entonces aquí el tercer paso referente a la tabla de distribución, pues en
65		este caso nos lo vamos a saltar, en problemas más complejos si hay que
66		escribirla, pero éste por la sencillez del enunciado, es más fácil escribir
67		directamente la función objetivo y directamente las restricciones,
68		¿ustedes tampoco han escrito ninguna tabla de distribución verdad? [Emi
69		empieza a pasar por los lugares de los estudiantes para ver si habían
70		escrito o no la tabla de distribución], veo que tampoco la han escrito
71		porque piensan igual que yo [hasta llegar al lugar de E8, ella si escribió
72		la tabla de distribución], bueno E8 si escribió la tabla de distribución que
73		a mi forma de ver es la única forma de escribirla y es la siguiente, que si
74		invierte x en Aurea y y en Argentina, en otra columna anotamos el
75		beneficio, si invierte x en Aurea ¿qué beneficio obtiene?
76	E4:	0.07.
77	Emi:	0.07x y si invierte y en Argentina ¿qué beneficio obtiene?
78	E10:	0.04y.
79	Emi:	Entonces se puede escribir pero también se puede obviar y
80		directamente podemos poner la función objetivo.
81		Como había dicho E10 queremos que el beneficio sea el máximo,
82		entonces la función objetivo es el beneficio, ¿y cuál es la expresión de la
83		función objetivo?
84	E10:	$z=0.07x+0.04y$.
85	Emi:	Muy bien, ¿necesitamos escribir la tabla de distribución para escribir esta
86		función?
87		Pues no, ya desde la información que tenemos antes podemos escribirla,
88		entonces lo que queremos conseguir es que nuestra función objetivo que

89		es el beneficio, sea el máximo.
90		Después de la función objetivo ¿qué escribimos?
91	E8:	Las restricciones.
92	Emi:	Las restricciones, ¿cuál es el conjunto de restricciones? Por ejemplo, con
93		la primera frase “Una sociedad limitada decide invertir un millón de
94		euros en bolsa”
95	E10:	$x+y \leq 1000000$, bueno pondríamos primero $x \geq 0$, $y \geq 0$
96	Emi:	Sí también es verdad primero anotaríamos $x \geq 0$, $y \geq 0$, la x y la y son
97		cantidades positivas, tienen que ser positivas y luego ¿con esa primera
98		frase?
99	E3:	$x+y \leq 1000000$.
100	Emi:	Si $x+y \leq 1000000$ ¿estáis de acuerdo todos en esta restricción?
101	E7:	Pero es que dice un millón exacto.
102	Emi:	¿E8 tú cómo lo has puesto?
103	E8:	Así con el $\leq$.
104	Emi:	Fijaros que lo que pregunta es “determina cómo debe repartir la sociedad
105		el millón de euros para obtener el máximo beneficio”, entonces ¿no os he
106		dicho al principio la diferencia de este problema con otros?
107		Pues la diferencia está aquí en lo que dice E7, aquí es exactamente, es
108		decir, $x+y=1000000$.
109	E8:	Pero ¿eso cambia mucho el valor de aquí?
110	Emi:	¿Eso cambiará mucho?
111	Es:	No.
112	Emi:	En realidad eso no cambia mucho, pero si $x+y=1000000$ en realidad,
113		¿cuántas variables tenemos una o dos?
114	Es:	Dos.
115	Emi:	En realidad una porque si sabemos el valor de una podemos saber el
116		valor de la otra, aquí este problema de programación lineal es un poco
117		diferente por eso porque no nos dan un límite sino que nos dan una
118		cantidad exacta.
119		Vamos a continuar, esto de que en Aurea no se puede invertir más de
120		600000 euros ¿cómo lo escribimos en forma de restricción? ¿qué
121		cantidad invertimos en Aurea? [Emi señala la variable x] x, entonces si
122		decimos que no debe superar los 600000 entonces es que debe ser menor
123		o igual, entonces escribiríamos x...
124	E4:	$x \leq 600000$.
125	Emi:	$x \leq 600000$, ¿E8 y otros más tenían esta restricción verdad?
126	Es:	Si.
127	Emi:	¿Cómo debo escribir la otra restricción que nos falta, que no se puede
128		invertir menos de 40000 en Argelia?
129	E7:	$y \geq 40000$.
130	Emi:	Exactamente $y \geq 40000$.
131		Y luego el otro dato que no lo hemos escrito que dice que “los socios
132		deciden que la inversión en Aurea, aunque el interés sea mayor, no debe
133		ser superior al doble de la inversión en Argelia, ¿qué significa eso?
134		¿cómo se traduce?
135	E3:	x.
136	Emi:	x es la inversión en Aurea, entonces $x \leq 2y$, ¿habéis escrito eso E8?

137	E8:	Si.
138	Emi:	¿Y los demás?
139	Es:	[Nadie contesta].
140	Emi:	¿Estáis de acuerdo?
141	E3:	Más o menos.
142	Emi:	A ver x es la inversión en Aurea, y la inversión en Argentina, x no debe
143		superar el doble de la inversión en Argentina, es decir, x debe ser menor o
144		igual a 2y, si no debe superar entonces es menor o igual, entonces esas
145		son todas las restricciones.
146		¿Cuál es el siguiente paso del problema?
147	E10:	Despejar la y.
148	Emi:	No te estoy preguntando ¿cómo lo haces? sino ¿qué haces en el siguiente
149		paso? o ¿cuál es el siguiente paso?
150		¿Esto qué es? [Emi señala el conjunto de restricciones].
151	E10:	Las restricciones.
152	Emi:	Las restricciones es un conjunto de inecuaciones.
153	E10:	Resolver eso.
154	Emi:	Exacto, hay que resolver eso, tú me estabas diciendo cómo resolverlo,
155		una cosa es qué hacer y otra cosa es cómo hacerlo, normalmente que
156		pregunto ¿qué hay que hacer? decíis cómo hacerlo y no es lo mismo.
157		Entonces, el siguiente paso, resolver el sistema de inecuaciones, pero
158		resolver el sistema de inecuaciones es lo mismo que encontrar...
159	E3:	La región factible.
160	Emi:	Si es lo mismo que encontrar la región factible y ahora sí, ¿cómo se
161		encuentra? ¿qué tenemos que hacer? Primero transformamos las
162		desigualdades que tenemos $x \geq 0$, $y \geq 0$, ¿la siguiente cómo la ponemos?
163	E10:	$y = 1000000 - x$.
164	Emi:	Sí, ¿y la siguiente?
165	E10:	$x \leq 600000$.
166	Emi:	Si, ¿la siguiente?
167	E10:	$y \geq 40000$.
168	Emi:	Se queda como está ¿y la última?
169	E3:	$y \geq (x/2)$.
170	Emi:	Sí muy bien E3.
171	Es:	[Observan en silencio por qué pudo haber quedado eso].
172	Emi:	Vamos a ver de donde quedó eso, tenemos $x \leq 2y$, luego $2y \geq x$ y de ahí
173		$y \geq (x/2)$.
174	E15:	¿Qué paso con el 2?
175	Emi:	El 2 que estaba multiplicando a la y pasa del otro lado dividiendo.
176		Bueno y después de transformar ¿qué escribimos?
177	E3:	Las rectas asociadas.
178	Emi:	¿Cuáles son?
179	E3:	$x=0$, $y=0$, $y=1000000-x$.
180	Emi:	Si, $x=0$, $y=0$, $y=1000000-x$, $x=600000$, $y=40000$, $y=(x/2)$.
181		Muy bien, ¿siguiente paso?
182	E10:	Ver cómo son esas rectas.
183	Emi:	Exacto, vamos a ver cómo son cada una de esas rectas, la primera $x=0$.
184	E3:	La vertical.

185	Emi:	Si, la vertical [Emi señala con su mano la forma del eje vertical] el eje...
186	E10:	El eje x.
187	Emi:	¿Cuál es el eje vertical?
188	E3:	El eje y.
189	Emi:	¿Y la siguiente $[y=0]$?
190	E3:	El eje x.
191	Emi:	Muy bien y ¿la siguiente recta cómo es $[y=1000000-x]$?
192	E3:	Inclinada.
193	Emi:	Inclinada, entonces ahí tenemos que darle valores.
194	E3:	Ponemos $x=0$.
195	Emi:	Sí ponemos $x=0$ y entonces ¿y cuánto vale?
196	E10:	1000000.
197	Emi:	¿Qué otro valor le damos?
198	E3:	$y=0$.
199	Emi:	$y=0$ entonces la x vale 1000000, bueno en la siguiente no necesitamos
200		darle ningún valor $[x=600000]$.
201	E3:	Es una recta vertical, si muy bien.
202	Emi:	¿Y la siguiente? Cuando sólo hay x es vertical, cuando sólo hay y es
203		horizontal y cuando hay x, y y es inclinada, bueno ¿y la última
204		$[y=(x/2)]$?
205	Es:	Inclinada.
206	Emi:	También es inclinada, ¿qué valores le ponemos?
207	E10:	1000000.
208	Emi:	¿Qué valor siempre le damos a la x primero?
209	Es:	0.
210	Emi:	Exacto, entonces si $x=0$ ¿cuánto vale la y?
211	Es:	0.
212	Emi:	¿Qué otro valor le damos a x?
213	E7:	1 millón.
214	Emi:	Sí, por ejemplo 1 millón.
215	E3:	y vale 500000.
216	Emi:	Sí muy bien, ¿y después?
217	E3:	Ya hay que representarla.
218	Emi:	Bien vamos a representarlas, ¿qué tenemos que definir? Hablando de
219		representar, ¿el qué?
220	E3:	El cuadrante.
221	Emi:	¿Cómo son esos números?
222	E3:	Todos positivos.
223	Emi:	Son todos positivos y están en el primer cuadrante eso sí, pero además de
224		eso ¿qué más tenemos que definir?
225	E3:	Los números del eje.
226	Emi:	Si la escala.
227	E3:	De 500 en 500.
228	Emi:	¿Cómo elegimos la escala?
229	E10:	Pero se ocupan números más grandes.
230	Emi:	¿Cómo definimos la escala? Pues es algo que hay que pensar porque es
231		útil, ¿qué números aparecen?, ¿de qué orden?
232		Tenemos 1000000, 500000, 600000 y 40000.

233	E10:	De 50000 en 50000.
234	Emi:	De 50000 en 50000 ¿cuántas?
235	E10:	De 100000 en 100000.
236	Emi:	Si yo iría de 100000 en 100000, ¿por qué de 100000 en 100000?
237		¿cuántas veces cabe el 100000 en 1000000?
238	Es:	10.
239	Emi:	10 entonces el valor más grande que nos sale es 1000000 y si este es el
240		mayor valor que nos sale pues de 100000 en 100000 ¿cuántos segmentos
241		necesitamos?
242	Es:	10.
243	Emi:	Entonces 10 es el número que necesitamos y ya es considerable, si
244		pusiéramos de 50000 en 50000, ¿cuántos necesitaríamos?
245	Es:	20.
246	Emi:	Y si escribimos 20 ¿qué pasa? Que el dibujo saldría muy pequeño,
247		entonces es preferible cuando hay números muy grandes, conseguir que
248		a veces no haya demasiados segmentos.
249		Entonces vamos a hacerlo [Emi empieza a hacer la gráfica].
250		Entonces como sabemos que las inecuaciones son semiplanos, hemos
251		dicho que las dos primeras son el primer cuadrante entonces vamos a
252		representar la siguiente recta, localizamos los puntos y trazamos las
253		rectas [Emi va graficando cada recta], tenemos que escribir la ecuación
254		sobre la recta en cada una.
255		En la recta $y=(x/2)$ yo prefiero poner otro valor, porque yo no tengo
256		regla en la pizarra ni cuadrícula como ustedes, yo estoy haciendo aquí
257		con poca precisión entonces le voy a dar a la x el valor de 600000 y
258		entonces la y vale 300000 ¿por qué le doy ese valor?
259	E10:	Para el vértice.
260	Emi:	No, porque quiero saber en qué punto corta exactamente a la recta
261		$x=600000$, eso para saber los vértices, la frontera de la región factible,
262		entonces ya tengo eso, lo voy a graficar [Emi continúa graficando las
263		rectas], bueno ¿cuál sería la región factible?
264	E10:	La que está por debajo de la recta $y=(x/2)$.
265	Emi:	¿Cuál es la restricción? $y \geq (x/2)$, entonces si y es mayor o igual que x
266		partido por 2, ¿a qué región se corresponde?
267	E7:	A la que está por encima ¿no?
268	Emi:	¿Qué región corresponde a esa inecuación, si solo vemos la última
269		inecuación cuál es la región la que está por arriba o la que está por
270		debajo?
271		La que está por encima de la recta.
272	E10:	Es que yo cambié el signo entonces ¿sabes lo que te quiero decir?
273	Emi:	Sí pero entonces no tienes la restricción correcta ¿no?, a ver ¿tú qué has
274		puesto?
275	E10:	Yo he puesto $x \leq 2y$ y después.
276	Emi:	¿Qué pusiste? $x/2 \leq y$.
277	E10:	Sí.
278	Emi:	Bueno pero $x/2 \leq y$ y $y \geq (x/2)$ son la equivalentes.
279	E10:	No pero yo tengo menor o igual.
280	Emi:	Sí pero fíjate sólo en la y, en la y [Emi le repite con mucho énfasis], ¿tú

281		que pones en la y?
282	E10:	Menor o igual.
283	Emi:	En la y sólo en la y, no la x, sólo en la y, ¿ves dónde te haz equivocado?
284	E10:	No.
285	Es:	[Sonríen].
286	Emi:	Vamos a ver, yo puedo escribir $x/2 \leq y$ y puedo escribir esto $y \geq (x/2)$.
287	E10:	Y son equivalentes.
288	Emi:	Sí y son equivalentes, entonces si tú has dejado esta $x/2 \leq y$ está bien.
289	E10:	Si.
290	Emi:	Pero para saber a qué parte del semiplano corresponde tienes que fijarte
291		en el valor de la y, entonces fíjate en la y, léeme la y, sería y, ¿cómo se
292		lee la y en esa desigualdad que está de esa manera $[x/2 \leq y]$?
293	E10:	Igual ¿no?
294	Emi:	Ah, ya se dónde está tu problema, mira a esta desigualdad " $\leq$ " la
295		llamamos menor o igual a ¿de acuerdo?
296	E10:	Si.
297	Emi:	Bien pues aunque esa desigualdad se lea menor o igual, si yo pongo
298		$A \leq B$, esto se lee A menor o igual a B, vale, pero las desigualdades tienen
299		una doble lectura, puedo leer de izquierda a derecha [Emi usa una flecha
300		para indicarlo $\rightarrow$] pero también puedo leer de derecha a izquierda [Emi
301		usa una flecha para indicarlo $\leftarrow$] entonces si leo desde la derecha sería B
302		mayor o igual a A, ese es el problema de las desigualdades que la lectura
303		cambia, no es la misma de izquierda a derecha que de derecha a
304		izquierda, en la igualdad no pasa esto, tú dices en $A=B$, A es igual a B y
305		dices B es igual a A, en los dos sentidos es lo mismo.
306		Entonces fíjate, tú lo que tienes ahí es $x/2 \leq y$ entonces se lee también y
307		es mayor o igual que x/2, entonces no tienes que considerar la región que
308		está por debajo sino la que está por encima, entonces es la que está por
309		encima.
310		Entonces ¿cuál va a ser la región factible? Vamos a ir dibujando los
311		límites de la región factible [Emi señala la región factible].
312	E15:	Pero ¿tiene que ser esa región?
313	Emi:	Sí porque hay que considerar todas las desigualdades.
314	E15:	A mí me da otra región.
315	Emi:	[Emi se acerca a ver la región que E15 dibujó en su cuaderno] Si es que
316		no consideraste bien 2 desigualdades, fíjate que $x \leq 600000$ entonces es
317		lo que está a la izquierda de esa recta y en la otra $y \geq 40000$ es sólo un
318		trozito [Emi se refiere al trozo de recta que queda al localizar la región
319		factible del ejercicio] Bueno pues ya tenemos la región factible.
320		[Emi se acerca a E8 y le pregunta] ¿qué hubiera pasado si te hubieses
321		quedado con la región que decías? Pues sería otra.
322		Bueno ¿cuál es el siguiente paso? Tenemos que encontrar la solución del
323		problema, ¿en qué puntos de la región factible alcanza el máximo?
324		Como sabemos que lo va a alcanzar en la frontera, tenemos que
325		determinar cuáles son los vértices de la región factible.
326		Bueno pues entonces vamos a encontrar la solución, que quiere decir, en
327		qué puntos de la región factible z alcanza el máximo, vale.
328		Luego sabemos que lo alcanza en la frontera, bien sea en los vértices o

329		bien sobre los lados, pues vamos a determinar cuáles son los vértices.
330		¿Cómo empezamos? Primero ponemos nombre a los vértices, A, B, C, D
331		y E. ¿Tú E10 habías llegado hasta aquí?
332	E10:	Si pero tenía otros vértices [Pues la región factible que E10 había
333		encontrado no es la misma que la de la pizarra].
334	Emi:	¿Y tú E8 has llegado hasta aquí?
335	E8:	Si pero las rectas no estaban bien representadas.
336	Emi:	[Emi les pregunta a E10 y E8 porque son las que hicieron su tarea para
337		casa de manera más completa].
338		Bueno ¿cuáles son las coordenadas del punto A?
339	Es:	A es (0, 40000).
340	Emi:	Bien ¿y las del punto B?
341	Es:	B...
342	Emi:	Para el punto B sólo conocemos la ordenada, vamos a ver qué rectas lo
343		forman, es $y=40000$ y también $y=x/2$, entonces igualamos y tenemos
344		que $40000=x/2$ entonces $x=80000$, el vértice B es (80000, 40000).
345		Para el punto C sabemos que x vale 600000 para encontrar y tenemos la
346		recta $y=x/2$ y la recta $x=600000$ entonces la $y= 600000/2=300000$, el
347		punto C es (600000, 300000).
348		Para el punto D también tenemos que x vale 600000 y tenemos la recta
349		$y= 1000000-x$, entonces $y=400000$.
350		¿Y para el punto E?
351	Es:	(0, 1000000).
352	Emi:	Bien ¿alguien tiene algún problema para calcular las coordenadas?
353	Es:	[Nadie contesta].
354	Emi:	Sólo hay que fijarse cuáles rectas forman ese punto y resolver la
355		igualdad.
356		Bien ahora vamos a hallar el valor de z de cada uno de los vértices de la
357		región factible, ¿y cómo lo hacemos? Pues sustituimos entonces para
358		$x=0$, $y=40000$, $z=1600$; para $x= 80000$, $y= 40000$, $z= 5600+1600= 7200$;
359		para $x=600000$, $y=300000$, $z= 42000+12000=54000$; para $x=600000$, $y=$
360		400000 , $z=42000+ 1600=58000$; para $x=0$, $y= 1000000$, $z= 40000$.
361		Entonces ¿cuál es la solución del problema? ¿dónde se alcanza el
362		beneficio máximo?
363	Es:	En $x= 600000$, $y=400000$.
364	Emi:	Sí, entonces la solución del problema es, el beneficio es máximo si se
365		invierten 600000 euros en Aurea y 400000 euros en Argentina.
366		¿Por qué creéis que tienen ese nombre las empresas?
367	E10:	Para hacerlo más pesado [para hacer más complejo el problema].
368	Emi:	¿Aurea de qué y Argentina de qué?
369		Esto tiene que ver con el dinero, cuando no había bolsa ni acciones ni
370		empresas ni todo esto, las monedas que tenían más valor ¿de qué eran?
371	E3:	De oro y plata.
372	Emi:	Exacto de oro y plata, Aurea es oro y Argentia es plata es por eso, no es
373		para hacerlo más pesado.
374		Bien, ¿en qué tienen dificultades?
375	E10:	Yo al hacer la tabla de distribución.
376	Emi:	Claro porque los problemas que requieren tabla de distribución son más

377		complejos, tienen muchos más datos.
378		Bueno les voy a pedir que resuelvan el ejercicio 20 y 21 de la página 88
379		y de la página 90 el 29 es uno muy cortito que no parece problema de
380		programación.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E15. Es significa varios estudiantes.

ANEXO II. Transcripción de las clases de Aly

Transcripción de la primera clase grabada de la profesora Aly del lunes 6/10/08.

Resumen: Álgebra de matrices: Definición de matrices, orden de una matriz, matriz cuadrada, igualdad de matrices, elementos de la diagonal principal, matriz traspuesta, matriz simétrica y matriz triangular. Además suma de matrices.

L		Transcripción
1	Aly:	Primero que nada,
2		¿Qué son las matrices?
3		Ya hemos visto en el primer tema qué son las matrices
4		¿Qué sabemos de las matrices?
5	E1:	Las que están entre paréntesis.
6	Aly:	¿Las qué?
7	E1:	Las cosas que esas entre paréntesis.
8	Aly:	Las matrices son cajas numéricas.
9	E1:	Con números dentro.
10	Aly:	Bueno digamos que están estructuradas por filas y por columnas.
11		Son cajas numéricas distribuidas por filas y por columnas.
12		Eso ya lo hemos visto, que tienen ese orden, vale.
13		[Aly indica con su mano al aire una línea horizontal y una vertical]
14		¿Para qué se utilizan las matrices?
15		¿Y en qué ejemplos de nuestra vida cotidiana podemos compartirlas?
16		Porque sí las tenemos,
17		aunque penséis que no mucho.
18		Por ejemplo, tenéis un horario vuestro,
19		un horario de clases.
20	E2:	Si.
21	Aly:	Si, ¿no?
22		¿Ahí que encontramos?
23		Primera hora, segunda hora, tercera hora.
24		[Aly va escribiendo esto en la pizarra en forma de columna]
25		Aquí lunes, martes, miércoles, jueves y viernes.
26		[Aly va escribiendo esto en forma de fila]
27		Lo que ponemos aquí dentro en cada una de las posiciones
28		son elementos que van ordenados.
29		La diferencia es que aquí no estamos poniendo números,
30		pero ponemos matemáticas, filosofía, etc.,
31		pero para que nos hagamos una idea vale,
32		de que es una caja y que tiene cierto orden por filas y por columnas,
33		eso son las matrices.
34		Otro ejemplo,
35		¿No habéis visto los mapas de carreteras?
36		Al principio o al final suele haber una hojita desplegable,
37		donde aparecen las distancias kilométricas entre varias ciudades,
38		por ejemplo de Huelva
39		[Aly lo escribe como columna]
40		y Sevilla

41		[Aly lo escribe como fila]
42		¿Qué aparece en esta posición?
43		Entre Huelva y Sevilla, pues aparecerá 100 [km].
44		[Aly escribe el 100 en la casilla correspondiente entre Huelva y Sevilla]
45		Y si me ponen Cádiz,
46		[Aly lo escribe a continuación de Sevilla en forma de fila]
47		¿Qué aparecerá?
48		Pues más o menos 200 [km]
49		[Aly escribe el 200 en la casilla correspondiente entre Huelva y Cádiz]
50		y así Madrid...
51		[Aly lo escribe a continuación de Cádiz en forma de fila]
52	E1:	500.
53	Aly:	Vale, 500.
54		Ahora a continuación, ¿qué me encuentro?
55		[Aly se refiere al elemento de la siguiente columna,
56		es decir, el elemento que irá enseguida de Huelva en forma de columna]
57		luego otra vez Cádiz, Madrid
58		[Son los siguientes elementos en forma de columna]
59		Y lo que sea.
60		De Sevilla a Sevilla cero.
61		[Aly lo anota en la casilla correspondiente entre Sevilla como fila
62		y Sevilla como columna]
63		Es decir, entre cada elemento que coinciden la fila y la columna
64		me está dando determinada información,
65		en este caso,
66		utilizamos una matriz numérica para eso
67		y eso aunque yo no tenga idea de matrices
68		yo veo el mapa de carreteras y sé interpretar eso ¿no?,
69		entonces tengo que seguir el orden que me están diciendo ahí.
70		Bueno pues esto, ahí si se va pareciendo más a una matriz numérica
71		de las nuestras que vamos a hacer.
72		Las matrices no existen en matemáticas desde hace mucho tiempo eh,
73		será a partir del siglo XIX.
74		Entonces aparte de utilizar las matrices
75		para determinar una situación real de la distancia,
76		pues aparte de eso también se pueden operar,
77		se pueden sumar, multiplicar, multiplicar matrices, etc., vale.
78		Bueno pues vamos ya a la página 50.
79		[Del libro de texto]
80		Página 50.
81		Nomenclatura y definiciones,
82		si tenéis el libro por delante mejor.
83		Ahí tenéis ejemplos de matrices,
84		¿De acuerdo?
85		Yo voy a copiar alguno.
86		Ejemplo de una matriz: Tres, menos uno, cuatro.
87		[En la primera fila]
88		Cinco, diez, seis.

89		[En la segunda]
90		Y cuatro, menos uno, cinco.
91		[En la tercera]
92		Vale, ahí tenéis una matriz.
93	Es:	[voces]
94	Aly:	¿Qué os pasa?
95		Bueno ya hemos dicho que están distribuidas por filas y por columnas
96		¿Cuál sería la primera fila aquí?
97		Ésta sería la fila 1,
98		[Aly la señala y escribe F1]
99		esta sería la fila 2,
100		[Aly la señala y escribe F2]
101		y ésta la fila 3.
102		[Aly la señala y escribe F3]
103		Además en ese orden siempre, claro.
104		Y ¿cuáles serían las columnas?
105		Pues ésta sería la columna 1,
106		[Aly la señala y escribe C1]
107		Ésta sería la columna 2,
108		[Aly la señala y escribe C2]
109		y ésta la columna 3,
110		[Aly la señala y escribe C3]
111		¿De acuerdo?
112		Bien, otra cosa es la dimensión de las matrices,
113		digamos el tamaño,
114		digamos más bien que se parece al área.
115		Esta matriz se dice que es de orden 3x3,
116		¿Y qué significa eso de 3x3?
117	E2:	Que son tres filas y tres columnas.
118	Aly:	Bien, eso indica que son tres filas y tres columnas,
119		bueno por eso se llama el orden de la matriz.
120	E2:	¿A qué número corresponde la fila?
121	Aly:	El primero a la fila y luego a la columna, vale.
122		A ver, a ver si me escribís una matriz de orden 2x3
123		¿Cómo va a ser esa matriz de 2x3?
124	E2:	Dos filas y tres columnas.
125	Aly:	Dos filas y tres columnas.
126		Pues ponéis lo que queráis uno, cero, menos tres.
127		[En la primera fila]
128		Cuatro, siete, dos.
129		[En la segunda]
130		Vale, esta matriz decimos que tiene orden 2x3.
131		Entonces en el primer lugar va el número de filas
132		y luego el número de columnas.
133		Ésta sería una matriz rectangular.
134		Fijaros en la forma,
135		es un rectángulo.
136		¿Y ésta cómo será?

137		[Aly señala la matriz que había escrito de 3x3]
138		Matriz qué...
139	Es:	Cuadrada.
140	Aly:	Si, las que tienen el mismo número de filas
141		que de columnas se llaman cuadradas.
142		Bueno como dato,
143		se llaman matrices cuadradas
144		las que tienen el mismo número de filas que de columnas.
145		En general se dirá o se pone que son de orden $n \times n$
146		o también cuadrada de orden n .
147		Cuadrada de orden n también ya sabemos a lo que se refiere
148		si me dicen que es cuadrada de orden n ,
149		ya sé que es una matriz de orden $n \times n$.
150		Bueno ya sabemos lo que son matrices cuadradas.
151		También hay que saber los vectores fila
152		y los vectores columna, vale.
153		Los vectores fila,
154		¿A qué se le llama?
155		Pues se llama vector fila
156		a cada una de las filas de la matriz,
157		bueno vector fila porque en realidad más adelante veremos
158		que es el mismo tratamiento como si fueran vectores.
159		[Las filas]
160		Por ejemplo ahí en esa matriz
161		[La de 2x3]
162		rectangular que no es cuadrada,
163		el primer vector fila
164		que nos encontramos ahí.
165		¿Qué vector sería con tres coordenadas?
166		Los vectores en tres dimensiones,
167		el primer vector fila
168		que nos encontramos sería el uno, cero, menos tres.
169		Y los vectores columna
170		serían uno, cuatro;
171		otro sería cero, siete
172		y otro menos tres, dos, vale.
173		Bueno, vamos a lo interesante,
174		ya voy a poner la que está en el cuadrado en el libro.
175		Voy a poner una matriz genérica
176		eso es muy importante,
177		el nombre que se les da a las matrices
178		y a cada uno de sus elementos.
179		Bueno pues una matriz en general de orden $n \times n$
180		se va a escribir así:
181		En general una matriz de orden $m \times n$
182		la escribimos,
183		bueno las letras que generalmente se utilizan
184		para designar las matrices,

185		son las letras mayúsculas A, B, C
186		también la X, Y, Z, eh.
187		Bueno ahí tenéis la matriz A
188		Sería, a sub uno uno,
189		fijaros, a sub uno uno
190		y esto es importante en la notación,
191		significa que estamos en la primera fila y primera columna.
192		El siguiente elemento [de la fila]
193		a sub uno dos,
194		es decir,
195		primera fila y en la segunda columna.
196		Luego a sub uno tres
197		a sub uno cuatro
198		puntos suspensivos
199		¿Hasta cuál?
200		¿Hasta dónde?
201		Si estoy diciendo que esa matriz es de orden $m \times n$
202		va a ver m filas
203		y n columnas entonces,
204		¿Hasta dónde?
205		¿Cuántas columnas va a tener?
206	E2:	n.
207	Aly:	Si, va a tener m filas y n columnas,
208		entonces será hasta a sub uno ene.
209		Segunda fila,
210		¿Cómo quedaría?
211		Si escribiremos en forma general
212		cada elemento de la segunda fila
213		sería a sub dos uno
214		a sub dos dos, a sub dos tres, a sub dos cuatro hasta a sub dos ene, vale.
215		Tercera fila
216		lo mismo, a sub tres uno
217		el primer elemento del subíndice nos indica que estamos en la tercera fila
218		luego a sub tres dos,
219		a sub tres tres, a sub tres cuatro hasta a sub tres ene
220		y ahora no nos vamos a poner a escribir cada una
221		de las filas y vamos a poner puntos suspensivos también, hasta...
222		¿Qué fila será la última?
223	E2:	Ene.
224	Aly:	Eeeme. [Aly hace énfasis]
225		eme de matriz vale
226		entonces a sub eme uno
227		a sub eme dos, a sub eme tres, a sub eme cuatro
228		hasta a sub eme ene.
229		¿Se entiende bien?
230	E2:	Si.
231	Aly:	Bueno, los dos subíndices del último elemento
232		de la última fila y de la última columna

233		son justamente,
234		¿Con qué tienen que coincidir?
235		Con el tamaño de la matriz, como esta que es de orden $m \times n$.
236		[Aly lo anota fuera de la matriz en la parte inferior del paréntesis]
237		Eso lo tenéis en el libro.
238		Es lo que llamamos una matriz genérica
239		que tiene m filas y n columnas.
240		¿Qué tiene que pasar para que esta matriz sea cuadrada?
241		¿A qué se llama matriz cuadrada?
242		Cuando el número de filas es igual al número de columnas
243		entonces m tiene que ser igual a n para que sea cuadrada,
244		bueno fijaros si m es igual a n entonces la matriz es cuadrada
245		sino coinciden esos dos subíndices pues no es cuadrada.
246		¿Cuándo se dice que dos matrices son iguales?
247		Dos matrices son iguales cuando cada uno
248		pero todos los elementos son iguales,
249		entonces dos matrices A y B son iguales cuando...
250		¿Cuándo qué?...
251		Pues cuando a_{ij} es igual a b_{ij} para todo elemento i, j
252		cada elemento de la primera matriz a_{ij} ,
253		cualquier elemento de la matriz,
254		entonces cuando cada elemento de la matriz
255		sea igual al mismo elemento
256		[al elemento que está en la misma posición]
257		de la matriz de al lado,
258		entonces se dice que son iguales.
259		Ya hemos dicho pero no está de más repetirlo.
260		¿A qué se llama diagonal principal?
261		Estamos hablando de matrices cuadradas eh,
262		¿Y diagonal secundaria?
263		Ahí la matriz es cuadrada de orden n ,
264		se llaman elementos de la diagonal principal.
265		Eso sólo en matrices cuadradas eh,
266		a los elementos a_{ii}
267		¿Qué significa esto, a_{ii} ?
268		¿Qué elementos serían esos?
269		Estos serían a_{11}
270		¿Qué otro elemento?
271	E1:	a_{22}
272	Aly:	a_{22} , a_{33}
273		y así hasta a_{nn} .
274		Es decir, si escribo la matriz grande
275		A esto es a lo que le llamamos diagonal principal.
276		[Aly señala la diagonal constituida por a_{11} ,
277		a_{22} , hasta a_{nn}]
278		Y la diagonal secundaria
279		¿A qué se le llama?
280		Pues a ésta.

281		[Aly señala la otra diagonal]
282		Lo mismo que en un cuadrado
283		o en un rectángulo,
284		lo referente a la diagonal
285		que es unir los vértices que no son consecutivos,
286		entonces eso sería lo que sería la idea, vale.
287		Diagonal principal y diagonal secundaria
288		Bueno vamos a ver ahora la matriz traspuesta
289		y matriz simétrica.
290		¿Puedo borrar la pizarra?
291	Es:	[Nadie contesta]
292	Aly:	Si.
293		[Aly borra la pizarra]
294		Dada una matriz cualquiera,
295		esto es para matrices cualesquiera eh,
296		no sólo para matrices cuadradas.
297		Dada una matriz cualquiera A
298		con sus elementos a sub ij de orden,
299		cuando digo cualquiera
300		me refiero a que no tiene que ser cuadrada
301		sino que de un orden mxn del que sea, vale.
302		Bueno pues tenemos un ejemplo de matriz traspuesta,
303		traspuesta eh,
304		bueno se llama matriz traspuesta y se representa con una A y una t arriba
305		$[A']$
306		al resultado de cambiar todas las filas por columnas vale.
307		A ver vamos a hacerlo,
308		a la siguiente matriz
309		Vais copiando esto ¿no?
310	E2:	Si.
311	Aly:	Venga ¿cómo va a ser la matriz traspuesta de A?
312		Vamos a cambiar las filas a las columnas
313		entonces ahora los elementos van a ser a sub j i,
314		ésta saldrá de orden nxm.
315		¿Y eso qué quiere decir?
316		Quiere decir de entrada
317		que por ejemplo la que era de 2x3
318		pues la traspuesta será de orden 3x2.
319		Vamos a ver con elementos,
320		ponemos un ejemplo,
321		es decir,
322		el resultado será cambiar las filas por columnas.
323		Ejemplo, una matriz A que va a ser de orden 2x3.
324	E2:	Cada dos por tres.
325		[En forma de broma]
326	Aly:	Si cada dos por tres, venga,
327		dos filas y tres columnas,
328		E3 dime una fila cualquiera.

329	E3:	Cero, cuatro, ocho.
330	Aly:	Muy bien [Aly lo anota]
331		Dime otra fila E4.
332	E4:	Pues, dos, cero, siete
333	Aly:	Muy bien [Aly lo anota]
334		¿Cuál es el elemento a sub uno uno,
335		a sub uno dos, a sub uno tres?
336		Pues estos
337		[Aly señala cada uno de éstos en la primera fila]
338		Bueno lo que yo estoy diciendo
339		para conseguir la matriz traspuesta
340		es que se intercambien el orden de esos elementos,
341		con lo cual fijaros en el elemento a sub uno uno,
342		si yo le intercambio los subíndices el a sub uno uno,
343		¿Cuál va a ser?
344	E2:	El mismo.
345	Aly:	El mismo,
346		ese no va a variar,
347		entonces me va a quedar el cero
348		ese va a ser el mismo,
349		ahora el elemento a sub uno dos,
350		en vez de estar situado en el uno dos
351		pues ahora va a estar en el dos uno
352		¿el dos uno cuál es?
353	E2:	Abajo.
354	Aly:	Muy bien.
355		El elemento a sub uno tres,
356		es decir, primera fila y tercera columna
357		debe ser ahora tres uno
358		le he dado vuelta a los subíndices,
359		entonces este elemento el ocho
360		¿A dónde va a quedar?
361		pues abajo,
362		o más fácil,
363		Ésta primera fila [Aly la señala]
364		¿En qué se va a convertir?
365		En la primera columna.
366		Ahora segunda fila la del 2, 0 ,7
367		¿En qué se va a convertir?
368	E3:	En la segunda columna
369	Aly:	Bien
370		¿En qué se ha transformado ahora la matriz traspuesta de la inicial?
371		En qué, ¿de qué orden es?
372		En vez de ser de orden 2x3
373		ahora cómo es la matriz traspuesta, es...
374	E2:	3x2
375	Aly:	3x2, vale
376		¿De acuerdo?

377		Por eso así funciona el proceso de trasponer.
378		Bueno siguiente cosa
379		¿A qué llamamos matriz simétrica?
380		Definición de matriz simétrica,
381		se llama matriz simétrica cuando
382		¿Qué se ocurre?
383	E1:	Cuando...
384	Aly:	¿Qué le pasa a una matriz simétrica?
385	E1:	Cuando sean igual entre ellos.
386	Aly:	Vamos a ver,
387		se llama matriz simétrica
388		a aquella que coincide con su matriz traspuesta.
389		Es decir, A es simétrica
390		si y sólo si la matriz A es igual a A traspuesta.
391		Es decir, una matriz es traspuesta
392		cuando se cumple esta condición que acabo de decir.
393		Es muy fácil ver cuando una matriz es simétrica,
394		de entrada una matriz que no es cuadrada [la de 2x3],
395		la primera condición es que sea cuadrada
396		y aparte de ser cuadrada,
397		vamos a ver un ejemplo.
398		Imaginemos que yo pongo aquí la diagonal
399		1, 2, 3,
400		lo que me da la gana
401		y ahora claro si yo en la primera fila
402		tengo que darle la vuelta,
403		¿Qué tengo que poner en la segunda columna?
404		Si yo quiero que al trasponerla sean iguales,
405		¿Qué elemento debo poner aquí y aquí?
406		[Aly señala las posiciones correspondientes
407		a la posición primera fila segunda columna
408		y segunda fila primera columna]
409	Es:	Tienen que ser iguales.
410	Aly:	Tienen que ser iguales
411		y yo puedo poner el número que quiera,
412		pongo menos tres y menos tres,
413		sigo con la primera fila,
414		vamos a completar aquí con un número
415		[para completar la primera fila]
416		Voy a poner el que sea,
417		el cero,
418		¿Qué elemento tendrá que ir aquí?
419		[Aly señala la posición correspondiente a la tercera fila primera columna]
420		Si la condición es que
421		la primera fila tendrá que ser la primera columna,
422		entonces para que sea simétrica
423		no queda otro remedio que ser así,
424		[Aly anota el 0 en la posición correspondiente a

425		la tercera fila primera columna].
426		¿Y qué pasa con el elemento que queda?
427		El elemento tres dos y dos tres,
428		¿Tendrá que ser el mismo, no?,
429		¿Lo vemos eso o no?
430		Si pongo aquí 14
431		[En el elemento de posición dos tres]
432		y aquí también
433		[En el elemento de posición tres dos]
434		De manera que si la diagonal principal es el eje de simetría
435		al doblar la matriz por su eje de simetría,
436		el cero coincide con el cero,
437		el menos tres con el menos tres
438		y el 14 con el 14.
439		[Aly va señalando uno a uno]
440		Ese sería un ejemplo de la matriz simétrica,
441		por supuesto cuadrada eh,
442		si no es cuadrada ni siquiera podría ser simétrica.
443	E1:	Entonces es como la matriz identidad.
444	Aly:	Claro,
445		me está diciendo E1 de la matriz identidad,
446		ya llegaremos luego a la matriz identidad.
447		Ahora vamos a ver lo que es una matriz triangular
448		ya más o menos la hemos visto pero
449		vamos a ver su definición.
450		Se llama matriz triangular a aquella matriz cuadrada
451		cuyos elementos por debajo de la diagonal principal
452		son todos nulos,
453		todo esto que estoy diciendo lo tenéis en el libro recogido eh
454		Ejemplo,
455		en la primera fila uno, dos, tres,
456		luego en la segunda cero, cuatro, cinco
457		y por último cero, cero, seis.
458		[En la tercera fila]
459		Fijaros como todos por debajo de la diagonal son cero.
460		Bueno pues eso es lo que tenéis aquí
461		en la primera parte del tema
462		¿De acuerdo?
463		Vamos a hacer un ejercicio.
464		A ver en la página 51
465		Vamos a hacer el ejercicio 1
466		que me pide escribir las matrices traspuestas
467		página 51, ejercicio 1,
468		vamos a ver esto ya un poquito más rápido.
469	E3:	Yo del libro no me fío.
470		[se inicia un poco de desorden,
471		Aly acude a su lugar y algunos estudiantes continúan hablando,
472		E3 comenta que el libro no es suyo y cosas por el estilo]

473	Aly:	Bueno como estamos perdiendo mucho tiempo en tonterías,
474		ese ejercicio lo hacen en casa
475		y vamos a pasar a la página 52,
476		con operaciones con matrices.
477		Fijaros que el tema no se llama matrices
478		Sssshhh.
479		[Callando nuevamente a esos estudiantes que siguen hablando]
480		Venga.
481		[Invitándolos a guardar silencio]
482		Se llama álgebra de matrices
483		en lugar de ver cómo son los elementos de la matriz, etc.,
484		vamos a hacer operaciones con matrices, vale.
485		La primera operación que tenemos es la suma,
486		entonces sea la matriz A con elementos a_{ij}
487		y sea B la matriz con elementos b_{ij}
488		¿Qué os parece que será la suma de esas dos matrices?
489		¿Cómo se va a construir la suma de esas dos matrices?
490	E1:	Numerito por numerito.
491	Aly:	Así es, numerito por numerito.
492		¿ Y eso qué requiere?
493		Que tengan el mismo orden,
494		porque si en la primera me encuentro nueve numeritos
495		y en la otra siete,
496		bueno seis numeritos
497		[Pues no habría matriz con siete numeritos]
498		ya no podríamos sumar numerito por numerito eh.
499		Entonces cada elemento de la primera matriz
500		lo tendré que sumar con el mismo,
501		con el que ocupa el mismo lugar en la segunda,
502		entonces se obtiene la suma $A+B$.
503		Bueno primero sea A la matriz con elementos a_{ij}
504		y B la matriz con elementos b_{ij} ,
505		las dos matrices del mismo orden,
506		no deben ser cuadradas
507		pero sí que tengan el mismo orden,
508		por ejemplo si A es de orden 3×2
509		la suma requiere que ésta [B]
510		también sea de orden 3×2
511		porque sino no puedo hacerla, vale.
512		Bueno pues se define la suma de matrices como
513		¿Qué elemento va ir en cada fila y cada columna?
514		Pues $A+B$ sería la matriz con los elementos a_{ij} más b_{ij}
515		¿Eso qué significa?
516		Pues vamos a poner A con 1, 0, 7
517		[En la primera fila]
518		3, -1, 2
519		[En la segunda fila]
520		y la matriz B

521		dos filas también
522		y tres columnas
523		14, 1, -3
524		[En la primera fila]
525		2, -4, 1
526		[En la segunda fila]
527		¿Cuánto no da la matriz A+B?
528		[Suena el timbre indicando que la clase terminó]
529		Un momentito que ahora la terminamos, vale.
530		A+B ¿qué sería?
531		Por supuesto va a ser del mismo orden 2x3.
532		¿Cuál será el elemento de la primera fila y primera columna?
533	E2:	Pues 15, 1, 4.
534	Aly:	El elemento uno uno será el resultado de sumar 1
535		[De posición primera fila y primera columna de la matriz A]
536		más 14
537		[De posición primera fila y primera columna de la matriz B]
538		entonces será 15.
539		Luego cero más uno, uno y siete menos tres, cuatro
540		[Aly anota esos resultados en la primera fila de la matriz suma]
541		Y ahora la segunda fila será, cinco, menos cinco y tres
542		Es decir, me sale del mismo orden
543		[La matriz suma]
544		Y lo único que hemos hecho
545		es ir sumando en cada elemento de la matriz.
546		Sumar el elemento de la misma posición de la otra matriz
547		¿De acuerdo?
548		Hacer en casa el ejercicio uno de la página 52
549		que viene en el libro, vale.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la segunda clase grabada de la profesora Aly del martes 7/10/08.

Resumen: Álgebra de matrices: ejercicios sobre la matriz traspuesta, producto de un escalar por una matriz, producto de una fila por una columna, suma y resta de matrices y producto de matrices.

L		Transcripción
1	Aly:	Ayer nos quedamos en la página 52 en las operaciones con matrices
2		[Aly ve el libro],
3		ah pero les deje un ejercicio de la página 51,
4		¿lo han hecho, no?
5		es sobre matriz traspuesta.
6		Bueno pues vamos a hacer esto y luego seguimos con lo demás vale,
7		hay que escribir la matriz traspuesta de estas matrices
8		¿de acuerdo?
9		Bueno, primera matriz ¿de qué orden es?,
10		a ver E5, dime, ¿de qué orden es la matriz?
11	E5:	De 2x3.
12	Aly:	De 2x3, ¿estás seguro?
13	E5:	No, de 3x2.
14	Aly:	Eso, muy importante eh,
15		no es lo mismo un orden 2x3 que 3x2
16		¿de acuerdo?
17	E1:	¿Era fila por columna?
18	Aly:	Claro.
19	E1:	Entonces son tres filas y dos columnas.
20	Aly:	Claro, primera fila, segunda y tercera
21		[Aly señala en el cuaderno de E1 cada fila de la matriz]
22		Página 51, ejercicio 1,
23		la matriz A, primera fila, tres uno, segunda fila dos cinco
24		y tercera fila siete seis,
25		son tres filas por dos columnas
26		[Aly anota el orden de la matriz fuera del paréntesis
27		en la parte inferior derecha],
28		ese es el orden de la matriz,
29		eso hay que saber distinguirlo bien y no decirlo al revés,
30		filas por columnas
31		[Aly señala el 3 que representa el número de filas
32		y el 2 que representa el número de columnas en esta matriz]
33		y ¿quién sería la matriz traspuesta?
34		Primero ¿de qué orden me va a quedar?
35		Al contrario de 2x3,
36		de dos filas y tres columnas
37		E6 dime la primera fila ¿cómo va a quedar?
38	E6:	3, 2, 7.
39	Aly:	3, 2, 7 es decir lo que era la primera columna y la otra fila 1, 5, 6.
40		Ahora apartado b, 2, 5, 7
41		[una nueva matriz, la primera fila]
42		y la segunda fila sería 4, 1, 0

43		¿qué orden tiene esto?
44		E7 dime cuál es el orden de la matriz.
45	E7:	2.
46	Aly:	2.
47	E7:	4.
48	Aly:	No yo digo el orden, el orden de la matriz.
49	E7:	Ah, 3x2.
50	Aly:	No, ¿número de filas?
51	E7:	2x3.
52	Aly:	Eso sí, dos filas y tres columnas, vale,
53		no es lo mismo aquí 2x3 que 3x2 el orden de las matrices
54		y ahora la matriz traspuesta va a ser de orden contrario vale,
55		es decir, 2x3 y
56		¿cómo nos va a quedar?
57		dime [E7],
58		primera fila o primera columna.
59	E7:	2, 5, 7.
60	Aly:	Eso es primera columna ¿verdad?,
61		pues la primera fila hay que convertirla en primera columna.
62	E7:	Y 4, 1, 0.
63	Aly:	Muy bien y el orden hemos dicho que sería 3x2,
64		¿le han hecho caso a esto?
65	Es:	No, un poco.
66	Aly:	Más por menos en matemáticas es menos
67		[por analogía, si y no entonces quiere decir que no]
68	Es:	[Risas].
69	Aly:	Venga la siguiente matriz [C].
70	E7:	Ya no tengo esa.
71	Aly:	¿Sólo has hecho las primeras?
72	E7:	Si.
73	Aly:	Bueno venga E5 dime de qué orden es la matriz.
74	E1:	De orden.
75	Aly:	He dicho E5
76		[E1 y E5 tienen nombres casi iguales],
77		venga.
78	E5:	3x4.
79	Aly:	Tres filas por cuatro columnas,
80		venga primera fila es 1, 3, 5, -1
81		¿cuál es la segunda fila?
82	E5:	0, 2, 4, 1.
83	Aly:	¿Qué más?
84	E5:	6, 1, 0, 3.
85	Aly:	Vale, pues venga, el orden de la matriz,
86		3x4 son tres filas y cuatro columnas,
87		la traspuesta ¿cómo queda? ¿cuál será el orden?
88	E6:	1, 3, 5, -1.
89	Aly:	¿Sería qué? la primera columna ¿no?,
90		segunda columna.

91	E6:	0, 2, 4, 1.
92	Aly:	Y la tercera columna 6, 1, 0, 3, el orden de la matriz traspuesta.
93	E6:	4x3.
94	Aly:	Muy bien eso de invertir las filas por columnas.
95		Bueno la siguiente, la D,
96		ya no la copio y escribo directamente la traspuesta
97		si no nos vamos a tardar mucho, vale.
98		La matriz traspuesta
99		¿quién me dice la primera columna?,
100		la primera fila es ahora la primera columna.
101	E1:	Eh, la primera columna es 7, 4, 1.
102	Aly:	La matriz está en el libro eh, la siguiente.
103	E1:	2, 1, 0.
104	Aly:	2, 1, 0.
105	E1:	0, 1, 7.
106	Aly:	0, 1, 7.
107	E1:	6, 3, 2.
108	Aly:	6, 3, 2, ya está, orden de esta matriz traspuesta.
109	E3:	3x2 [tratando de llamar la atención].
110	Aly:	No 3x2 no.
111	Es:	3x4.
112	Aly:	Eso sí, 3x4, tres filas por cuatro columnas, vale.
113		Bien, la siguiente, la E traspuesta,
114		vamos a escribir sólo la traspuesta,
115		E4 dime la primera columna cómo quedaría
116	E4:	1, 7, 4.
117	Aly:	1, 7, 4.
118	E4:	Luego 7, -1, 0
119		[La segunda columna].
120	Aly:	7, -1, 0.
121	E4:	4, 0, 3.
122	Aly:	Muy bien y
123		¿qué observáis de esta matriz?
124		¿qué propiedades tiene?
125	E1:	Que es simétrica.
126	Aly:	Esta matriz y la que aparece en el libro son la misma
127		[la matriz es igual a su traspuesta],
128		luego esta matriz, la matriz E, es qué...
129	E4:	Cuadrada.
130	Aly:	No, tiene un nombre.
131	E1:	Simétrica.
132	Aly:	Simétrica, la matriz E es simétrica,
133		¿cuándo decimos que un elemento es simétrico?
134		Cuando la parte derecha e izquierda son iguales
135		si se reflejan respecto a un eje de simetría ¿no?,
136		pues aquí digamos que la diagonal es el eje de simetría y esto
137		[el resto de los elementos]
138		se reflejan y son iguales,

139		es decir, los elementos fuera de la diagonal son simétricos,
140		éste igual que éste, éste igual que éste y así
141		[Aly va señalando los que son iguales, 7, 4 y 0 respectivamente]
142		y la matriz E es simétrica
143		¿de qué orden era?
144		Una matriz simétrica también es cuadrada,
145		es lo que estaba diciendo E4.
146		La matriz E es cuadrada,
147		claro es que para ser simétrica primero tiene que ser cuadrada ,
148		porque sino
149		¿cómo va a coincidir una matriz con su traspuesta
150		sino es una matriz cuadrada?
151		es que si no es cuadrada ni el orden es el mismo
152		[no coincidirían ni en el orden],
153		pues ni siquiera coinciden en el orden,
154		¿de acuerdo?
155		Bueno la última, voy a escribirla aquí, 5, 4, 6, 1
156		[Aly escribe esta matriz fila]
157		A ver ¿cómo se llama esto?,
158		¿un qué?,
159		un vector fila,
160		eso sería, eso se llamaría un vector fila o una matriz fila,
161		¿de acuerdo?,
162		¿qué orden tiene esto?
163		¿cuántas filas tiene y cuántas columnas tiene?
164	E2:	Tiene una fila.
165	Aly:	Tiene una sola fila y cuatro columnas
166		¿de acuerdo?,
167		1x4,
168		ese sería el orden,
169		entonces su traspuesta
170		¿cómo va a ser?
171		A ver E8 dímela tú.
172	E8:	5, 4, 6, 1.
173	Aly:	Mmhhh...
174	E8:	En una sola columna.
175	Aly:	Eso, eso sí, en una sola columna, y
176		¿de qué orden sería?
177	E8:	De 4x1.
178	Aly:	4x1 y ya está.
179		Si en esto que es tan facilito no nos paramos a intentarlo,
180		pues esto ya se va complicando más cada vez.
181		[comentario hecho para los estudiantes que ni siquiera
182		intentaron hacer estos ejercicios que había dejado como deberes]
183		Bueno habíamos dicho ayer poquito sobre las matrices,
184		bueno “poquito”,
185		algunas definiciones,
186		cuándo una matriz se llama simétrica, vale,

187		lo que son las matrices cuadradas, etc.,
188		y bueno más que nada la nomenclatura de cada uno de los elementos
189		de la matriz y lo del orden es importante también saber
190		si la matriz es 2×3 o 3×2 que no es lo mismo
191		y nos habíamos quedado en la suma de matrices,
192		la suma de matrices quedó claro cómo se hacía ¿no?,
193		elemento a elemento,
194		elemento a uno uno, de la primera matriz,
195		con el elemento uno uno de la segunda matriz
196		y eso me da el elemento uno uno de la matriz suma, vale.
197		Bueno a parte de esa relación,
198		dentro de las operaciones,
199		primera operación que vimos era la suma,
200		ya lo vimos ayer, segunda operación que tenemos que ver,
201		producto de un número por una matriz,
202		eso es muy fácil también
203		entonces producto de un número por una matriz
204		¿cómo se opera?
205		¿qué es lo que hay que hacer para hacer esa operación?
206		multiplicar un número por una matriz cualquiera,
207		no importa si la matriz es cuadrada o la que sea,
208		¿cómo se opera eso?
209		Se define para un número k por la matriz A ,
210		siendo la matriz A con elementos a sub ij ,
211		bueno es decir,
212		cuando digo esto me refiero a todos los elementos de la matriz,
213		a la matriz grande con todos los elementos que escribí ayer
214		donde está a sub uno uno, a sub uno dos, a sub uno tres
215		hasta a sub uno ene, etc.,
216		entonces siendo la matriz A con elementos a sub ij
217		una matriz cualquiera,
218		sin alguna característica particular,
219		no tiene que ser cuadrada,
220		no tiene que ser simétrica,
221		puede ser cualquiera vale.
222		Bueno pues se define k por A de esta manera,
223		¿cómo se multiplicará un número por toda la matriz entera?
224	Es:	[Voces].
225	Aly:	Pues ese número multiplicado por cada elemento de la matriz,
226		es decir, toda la matriz es multiplicada por esa constante k ,
227		entonces queda así,
228		k por a sub ij , vale
229		pues un ejemplo así facilito.
230		Ejemplo, sea A una matriz con elementos 1, 2, 3 en la primera fila
231		y -1, 4, 6 en la segunda,
232		¿de acuerdo?
233		Tenemos esta matriz A y tenemos que encontrar ahora -2 por A
234		¿qué se tiene que hacer para multiplicar por -2 a la matriz A ?

235		Pues simplemente coger los elementos de la matriz A
236		y multiplicarlos por el numerito que está fuera,
237		entonces ¿el orden de la matriz va a sufrir un cambio?
238		Si yo parto ahí de una matriz de 2×3 ,
239		está claro que la matriz resultante de multiplicar la matriz
240		por un número va a ser del mismo orden 2×3 y
241		¿qué es lo que me va a quedar dentro de la matriz resultante?
242		A ver E9 ¿qué va a quedar aquí?
243	E9:	[Nadie contesta].
244	Aly:	No tienes ni idea, pues por lo menos ve copiando.
245		[E9 estaba distraído]
246		Es muy temprano para venir
247		[es la primera clase, empieza a las 7:50 am]
248		a no hacer nada ¿no?
249		bueno -2 por A ¿cuánto queda?
250		¿cómo me va a quedar esto?
251	E3:	-2, -4, -6.
252		[En la primera fila]
253	Aly:	-2, -4, -6 y
254		¿en la segunda fila qué nos va a quedar?
255	E3:	2, -8, -12.
256	Aly:	2, -8, -12, vale.
257	E3:	¿En la matriz no se puede simplificar y sacar un dos?
258	Aly:	Hay que tener cuidado con eso eh,
259		pues en matrices con término independiente.
260		Por ejemplo 0, 2, 2 y luego un 2
261		como término independiente
262		[Aly escribe el último 2 en forma de fila en una matriz]
263		¿a qué equivale?
264		Pues a $2y+2z=2$,
265		entonces si yo simplifico aquí
266		¿puedo?
267		claro de toda la vida lo hemos hecho,
268		hemos dicho dividimos el primer término entre dos
269		[de un lado de la igualdad, donde están la y y la z]
270		y divido el segundo miembro
271		[de la igualdad, donde está el término independiente]
272		entre dos y no hay problema porque es una igualdad y
273		estoy haciendo lo mismo en los dos miembros de la igualdad
274		¿de acuerdo?,
275		entonces nos quedaría $y+z=1$ por eso aquí sí puedo simplificar
276		pero aquí [matriz] no estoy hablando de lo mismo,
277		estoy hablando de un elemento de la matriz,
278		imagínate cuando yo decía ayer en la lista kilométrica de las distancias,
279		imagínate que de Huelva a Madrid van 500 [km] o
280		de Huelva a Sevilla van 100 [km] y de Huelva a Cádiz van 200 [km]
281		¿tú puedes simplificar todo entre 100?
282	E3:	No.

283	Aly:	Pues no verdad, vale.
284		Aquí [ecuación] si se podía porque esto digamos
285		que es una forma más sencilla para simplificar una ecuación
286		¿de acuerdo?,
287		podemos dividir el primer y segundo miembro,
288		todo por el mismo número,
289		cuando hay término independiente si puedo dividir toda la fila
290		entre un número, pero aquí
291		[matriz sin término independiente]
292		no,
293		en los elementos de las matrices no podemos multiplicar.
294		Bueno a parte de multiplicar por un numerito k,
295		por un numerito k, el que sea.
296		Vamos a hacer un ejemplo donde se combinen la multiplicación
297		de un numerito por una matriz con sumas y restas, vale.
298		Vamos a hacer el ejercicio1 de la página 52.
299		Tenemos cuatro matrices y nos piden calcular lo que tenemos ahí
300		$[E=2A-3B+C-2D]$,
301		la matriz A va a ser 1, 0 -2
302		[en la primera fila],
303		segunda fila 4, 1, -3.
304		Matriz B, -1, 0, 1
305		[en la primera fila]
306		y segunda fila -4, 1, 3,
307		ahora la primera fila de la siguiente matriz [C] 7, 1, -1
308		y segunda fila 8, -10, 0,
309		la cuarta matriz [D] sería -3, 1, 5 [primera fila]
310		y abajo [segunda fila] 6, 2, 4.
311		A ver entonces ahora lo que hay que calcular es $2A-3B+C-2D$,
312		eso no es distinto de lo que hemos dicho antes,
313		hay que calcular algunas matrices,
314		multiplicándolas por un escalar y luego sumas y restas,
315		la suma y la resta funcionan de la misma manera eh
316		Bueno si nos piden calcular $2A-3B+C-2D$
317		¿cómo se hace eso?
318		si nos piden $2A$ ¿qué se hace?,
319		es decir, nos piden el doble de la matriz A
320		que es 2 por la matriz A,
321		menos $3B$ ¿qué será?,
322		pues multiplicar por 3 a la matriz B,
323		la matriz C tal cual la sumo ahí
324		y a la matriz D la multiplicamos por 2,
325		luego se suman todos
326		¿me explico?
327	E10:	¿Entonces se va a multiplicar y luego se va a restar?
328		O ¿multiplicar por -3 y sumar?
329	Aly:	Si, por ejemplo $2A-3B$ es $2A+(-3B)$,
330		les puede resultar más cómodo multiplicar por -3 y sumar,

331		puede ser más cómodo de multiplicar por 3 y luego restar,
332		si ya tienen el signo colocado dentro de la matriz
333		[multiplicando por -3]
334		creo que es más sencillo.
335		Bueno un detalle antes de empezar,
336		para poder sumar y restar matrices
337		¿cómo son todas, de qué orden son?,
338		del mismo orden, del que sea pero todas del mismo orden,
339		lo que yo no puedo es sumar una matriz de orden 2×3
340		con una de 3×15 ,
341		eso no tendría sentido,
342		eso lo vimos en la sesión anterior cuando vimos suma,
343		la suma de dos matrices,
344		lo primero es que todas deben ser del mismo orden,
345		bueno venga,
346		¿quién sería la matriz $2A$?
347		haber por fila.
348	Es:	[Nadie contesta].
349	Aly:	La primera fila ¿qué me va a quedar?
350	E2:	2, 0, -4.
351	Aly:	2, 0, -4 y en la segunda fila...
352	Es:	8, 2, -6.
353	Aly:	Ahora más, le sumo $-3B$ y en -3 ya va ir incluido el signo, bueno $-3B$.
354	E1:	3, 0, -3 [en la primera fila].
355	Aly:	Si, 3, 0, -3.
356	E1:	12, -3, -9.
357	Aly:	12, -3, -9.
358		Más la matriz C tal y como está 7, 1, -1 [en la primera fila]
359		y 8, -10, 0 [en la segunda fila]
360		[Aly va escribiendo en forma de cadena los resultados]
361		más y en la última $-2D$,
362		-2 ya con su signo dentro de la matriz,
363		con lo cual esto nos da
364		[Aly remarca que es más fácil incluir de una vez el -2
365		y no multiplicar 2 y tener que restar luego]
366		Venga ¿cuánto nos da $-2D$?
367	E1:	6, -2, -10.
368	Aly:	6, -2, -10 y la segunda.
369	E1:	-12, -4, -8.
370	Aly:	-12, -4, -8.
371		Muy bien entonces ahora que ya tenemos todas hay que sumarlas,
372		¿de qué orden nos va a dar la matriz resultante?
373	Es:	De 2×3 .
374	Aly:	Claro nos va a dar del mismo orden de 2×3 .
375		En la matriz resultante el elemento uno uno
376		[primera fila y primera columna] sería,
377		2 [de la matriz $2A$] más 3 [de la matriz $-3B$]
378		son 5 más 7 [de la matriz C] son 12 más 6 [de la matriz $-2D$] son 18

379		[resultado de la suma de los elementos correspondientes
380		a la primera fila y primera columna de cada una de las matrices],
381		muy facilito,
382		en multiplicar es multiplicar por todos
383		[producto de un escalar por una matriz]
384		y sumar es sumar elemento a elemento
385		[Aly repite el proceso y va anotando los resultados de la matriz suma]
386		Entonces la matriz resultante de todo es 18, -1, -18 [en la primera fila]
387		y 16, -15, -23 en la segunda fila
388		entonces esto no tiene más historia,
389		multiplicar es por toda la matriz y sumar es elemento a elemento,
390		eso sí es mejor incluir el signo [menos] en la matriz
391		cuando multipliquemos, que multiplicar y luego restar, vale,
392		pues ya está.
393		Ahora vamos a ver como se multiplica una matriz por otra matriz vale
394		bueno las operaciones que hemos visto son,
395		la suma, el producto de un escalar por una matriz y ahora
396		el producto de una matriz fila por una matriz columna.
397		Bueno para el producto de una matriz fila por una matriz columna,
398		vamos a tener la matriz fila con elementos a sub uno, a sub dos,
399		a sub tres hasta a sub n [lo escribe en forma de fila]
400		multiplicada por la matriz columna b sub uno, b sub dos,
401		b sub tres hasta b sub n [lo escribe en forma de columna],
402		[nótese que en dichas matrices sólo escribe un subíndice],
403		fijaros de qué orden es la matriz fila y la matriz columna,
404		fijaros en la matriz fila
405		¿cuántas filas tenemos?
406		una y
407		¿cuántas columnas tenemos?
408		una, dos, tres hasta n
409		[Aly va señalando cada elemento que corresponde a cada columna],
410		entonces el orden sería una fila por n columnas entonces es de $1 \times n$
411		y en la otra [B] pasa lo contrario es de orden $n \times 1$,
412		siempre que el orden del número de columnas de la primera
413		sea igual al número de filas de la segunda puedo multiplicar sino no,
414		¿por qué eso?
415		Fijaros primer elemento por primer elemento
416		[a sub uno por b sub uno],
417		entonces es a sub uno por b sub uno más a sub dos por b sub dos
418		más a sub tres por b sub tres así ¿hasta cuál?
419		hasta a sub n por b sub n ¿de acuerdo?
420		es decir, primero por primero,
421		segundo por segundo más tercero por tercero hasta llegar al último.
422		¿Qué pasaría si la primera fuera de orden $1 \times n$
423		y la otra no fuera de n filas?
424		pues no podría ir multiplicando elemento a elemento
425		y llegar hasta el último,
426		entonces si tengo una matriz fila como esta de $1 \times n$

427		solamente va estar bien definida esta multiplicación
428		si el número de filas de la siguiente es n,
429		sino es que ni siquiera tiene sentido hacer el producto
430		¿de acuerdo?
431		Bueno pero fijaros todo esto ¿qué es?
432		[Aly señala los sumandos del producto, a sub uno por b sub uno más ...
433		hasta a sub n por b sub n]
434		pues esto al final es un número,
435		fijaros cómo finalmente sólo nos da un número.
436		Venga ahora el ejemplo, la matriz fila 5, 1, 4, 2
437		[suena el timbre de que se termino la clase]
438		bueno rápidamente, ahora la matriz columna -1, 3, 2, 0
439		¿qué tendríamos hacer?
440		primero identificamos el orden de las matrices, esta es de 1x4
441		[la matriz fila] y esta otra de 4x1 [la matriz columna],
442		el primero sería 5 por menos 1 [5(-1)]
443		más 1 por 3 más 4 por 2 más 2 por 0
444		y ya digo que todo esto nos da un número,
445		no nos da una matriz
446		entonces son -5 más 3 más 8 más 0,
447		entonces son -5 más 3 son -2 más 8 son 6 más 0 son 6,
448		el resultado es 6.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la tercera clase grabada de la profesora Aly del viernes 10/10/08.

Resumen: Álgebra de matrices: producto de matrices.

L		Transcripción
1	Aly:	Vamos a ver lo de la página 54, el tema es producto de matrices,
2		vamos a ver,
3		¿dos matrices sean del orden que sean se van a poder multiplicar
4		siempre?, ¿qué creéis?
5	Es:	Que no.
6	Aly:	Que no.
7		En general dos matrices cualesquiera no se pueden multiplicar,
8		entonces vamos a poner cuando podemos hacer el producto de matrices
9		y cuando no ¿de acuerdo? vale, venga.
10		Para que dos matrices A y B se puedan multiplicar
11		es necesario que el número de columnas de A coincidan
12		con el número de filas de B, vale.
13		Dicho más fácil tenemos una matriz A por ejemplo de orden $m \times n$,
14		recordar que en el orden de las matrices m es el número de filas
15		y n el de columnas, vale,
16		pues yo al multiplicar por una matriz B,
17		siempre que el orden de esta segunda matriz sea $n \times p$,
18		entonces esto tiene significado, ¿de acuerdo?
19		porque yo lo que necesito es que la n de A coincida con la n de B
20		[Aly señala la n en cada matriz]
21		si eso no sucede, el producto no está definido,
22		lo cual quiere decir que no se puede hacer,
23		ahora cuando coinciden,
24		entonces si se puede decir que puedo multiplicar
25		las matrices y el resultado va a ser otra matriz C,
26		¿de qué orden?
27		de lo que queda,
28		es decir, de orden $m \times p$, de m filas y p columnas,
29		entonces C va a ser de orden $m \times p$.
30		Veis que esto que es un poquito largo de escribir,
31		en símbolos es más facilito de escribir y se entiende un poquito más
32		$[A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}]$,
33		entonces es necesario que el número de columnas de la primera matriz
34		coincida con el número de filas de la segunda,
35		si esa condición se da entonces puedo multiplicar matrices,
36		ahora veremos la mecánica,
37		pero ya os digo que en la matriz resultante C
38		cada elemento c_{ij} se obtiene multiplicando
39		¿qué fila será de la primera matriz, por qué columna?
40		Pues la fila i de la primera matriz [A]
41		por la columna j de la segunda matriz [B].
42		Entonces el c_{ij} se obtiene multiplicando la fila i de la matriz A
43		por la columna j de B.
44		Entonces c_{ij} es igual a,

45		¿cómo sería la fila i de la matriz A ?
46		Ya saben que el primer subíndice me dice en qué fila está
47		y el segundo la columna,
48		en la primera matriz la fila i siempre será
49		a sub i uno, a sub i dos, a sub i tres y así...
50		¿hasta qué elemento, cuál será el último?
51		¿cuántas columnas tenemos ahí?
52		[en el orden de la matriz A $m \times n$] n ,
53		entonces el último elemento será hasta a sub i n
54		y tenemos primera columna, segunda columna, tercera columna y así ...
55		[Aly señala cada a sub ij de la matriz fila],
56		es decir,
57		en este caso estoy en una sola fila y ahora la columna j de la matriz B
58		¿cuál sería?,
59		el segundo subíndice es el que hemos fijado que es la columna,
60		entonces serían b sub uno j , b sub dos j , b sub tres j ¿hasta qué elemento?
61		hasta b sub n j , vale.
62		Bueno ya dijimos cómo se multiplicaba una matriz fila
63		por una matriz columna.
64		Primer elemento por primer elemento, más segundo por segundo,
65		más tercero por tercero y así, vale.
66		Entonces sería a sub i uno por b sub uno j más a sub i dos por b sub dos j ,
67		más a sub i tres por b sub tres j más...
68		hasta el último elemento que es a sub i n por b sub n j .
69	E2:	Pero ahí no te da una matriz, te da un elemento.
70	Aly:	Claro, estamos hablando de un elemento solamente,
71		el c sub ij es un elemento de la matriz C ,
72		así hay que hacerlo para calcular todos los elementos, vale.
73		Vamos a practicar con un ejemplo,
74		vamos a poner la matriz con 2, 3, 5 [como primera fila]
75		y 7, 2, 4 [como segunda fila],
76		esto multiplicado por la matriz 1,6 [primera fila], 7, 2 [segunda fila]
77		y 0, -5 [tercera fila].
78		Pues con esas dos matrices, primero vamos a asegurarnos del orden
79		a ver si esas matrices las puedo multiplicar,
80		¿de qué orden es la primera matriz?
81		¿cuántas filas tengo y cuántas columnas?
82		dos filas y tres columnas entonces es de orden 2×3 ¿y la otra?
83	E2:	3×2 .
84	Aly:	Ésta es de orden tres filas y dos columnas
85		¿coincide este tres con este tres? [el 3 respectivo a cada matriz],
86		que es la condición que tengo que ver desde el principio,
87		si coinciden,
88		entonces ¿se puede hacer la multiplicación de estas dos matrices?
89		Pues claro que se puede hacer, esa condición se da,
90		¿y de qué orden nos va a salir la que resulta?
91	E1:	De 2×2 .
92	Aly:	De 2×2 , entonces esta matriz C que resulte del producto,

93		si llamamos A a la primera y B a la segunda.
94		¿Cómo obtengo el primer elemento de la matriz C, el elemento uno uno?
95		Pues multiplicando la primera fila de la primera
96		por la primera columna de la segunda y eso me va a dar un elemento,
97		vale.
98		c sub uno uno, el primero sería,
99		nos centramos en la primera fila y la primera columna
100		sería entonces 2 por 1 más 3 por 7 más 5 por 0,
101		¿lo vemos eso?
102	Es:	Si.
103	Aly:	Bueno pues hemos multiplicado una fila completa
104		por una columna completa y obtengo un solo elemento
105		y así lo tenemos que hacer para cada elemento,
106		entonces aquí sería [haciendo operaciones],
107		2 por 1, dos más 3 por 7, 21 y 5 por 0 cero,
108		entonces son 23
109		[lo anota en la posición de la primera fila primera columna
110		de la matriz C],
111		¡Ven! ese cálculo que yo hice me da un solo número, el c uno uno
112		y ese elemento es sólo uno de la matriz, vale.
113		Segundo elemento, sería c sub uno dos
114		c sub uno dos ¿qué significa?
115		¿en qué fila está y en qué columna estamos?
116		Esta es la primera fila de A por la segunda columna de B,
117		¿cómo obtengo ese elemento?
118		pues multiplicando lo que me dice el subíndice,
119		la primera fila de A por la segunda columna de B,
120		entonces ¿cómo sería?
121	E1:	2 por 6.
122	Aly:	Si, sería 2 por 6 más...
123	E2:	3 por 2.
124	Aly:	Eso es, 3 por 2 más 5 por -5
125		[Aly indica todos los números que van en la suma de los productos],
126		es que quiero que se vea de dónde salen,
127		es de la primera fila por la segunda columna,
128		entonces son 6 por 2 doce, más 3 por 2 seis, más 5 por -5, menos 25,
129		entonces 12 más 6, 18 menos 25 son menos 7
130		[Aly lo anota en la posición de la primera fila
131		segunda columna de la matriz C].
132		Ahora el elemento c sub dos uno,
133		¿cómo obtengo ese elemento? ¿de qué fila viene?
134	E2:	De la segunda [fila] y primera columna.
135	Aly:	Si, es decir, de la segunda fila [Aly señala la segunda fila de la matriz A]
136		por la primera columna [Aly señala la primera fila de la matriz B]
137		y el c sub dos dos,
138		será la segunda fila [de A] por la segunda columna [de B],
139		es que no hay más,
140		y por eso es una condición en el producto

141		[Aly se dirige a E3] ¿tú estás copiando eso? [las notas de la clase].
142	E3:	Si [E3 sigue hablando pero Aly continúa con la clase].
143	Aly:	Bueno venga entonces ¿cómo sería el c sub dos uno?
144	E1:	7 por 1.
145	Aly:	Bien 7 por 1 más 2 por 7 más ¿qué más?
146	E1:	Más 0.
147	Aly:	Más 4 por 0 que es cero, entonces sería 7 por 1 siete más 2 por 7 catorce,
148		entonces 7 más 14 son 21
149		[Aly lo anota en la posición de la segunda fila primera columna de la
150		matriz C].
151		El último elemento, el c sub dos dos ¿a qué va a ser igual?
152		pues a la segunda fila [de A] por la segunda columna [de B].
153		Entonces serán 7 por 6, esto ya lógicamente no vamos a pararnos tanto
154		[en indicar el producto]
155		sino que ya iremos haciendo directamente las operaciones eh,
156		bueno entonces aquí tenemos 7 por 6 más 2 por 2 más 4 por -5,
157		total que tenemos que 7 por 6 son 42 más 4 [de multiplicar 2 por 2]
158		menos 20 [de multiplicar 4 por -5] estos son 42 más 4 son 46
159		menos 20 son 26
160		[Aly lo anota en la posición de la segunda fila segunda columna de la
161		matriz C], ¿de acuerdo?
162		Pues ahí tenéis la matriz C
163		¿cuándo se complicará esto mucho?
164		pues cuando las matrices son más grandes,
165		tenemos que calcular más elementos.
166		No olvidaros que primero hay que fijarse en el orden de las matrices
167		que vamos a multiplicar,
168		que el número de columnas de la primera
169		coincida con el número de filas de la segunda,
170		el orden de la matriz ya lo tenemos aquí escrito
171		y cómo se calcula cada elemento
172		[Aly señala el ejemplo que acaba de desarrollar].
173		Entonces es multiplicar cada fila por cada columna,
174		primera fila por primera columna pues me da el uno uno,
175		primera fila por segunda columna pues me da el uno dos,
176		segunda por primera me da el dos uno
177		y segunda por segunda me da el dos dos
178		[repaso para calcular la matriz resultado],
179		bueno pues así se hace el producto de matrices.
180		El otro día E5 me preguntó que por qué se hacía el producto así,
181		si acomodo así la fila y la columna
182		[Aly se refiere al ejemplo de la multiplicación de la matriz fila
183		por la matriz columna],
184		pero si la acomodo al revés no da lo mismo.
185		Entonces vamos a ver un ejemplo para que se vea mejor eso,
186		entonces vamos a ver que el producto de las matrices no es conmutativo,
187		luego vamos a ver las propiedades.
188		A ver el otro día hicimos el ejemplo del producto de esta matriz fila

189		por una matriz columna,
190		era 5, 1, 4, 2 [fila] por -1, 3, 2, 0 [columna], vale
191		y al final nos daba 6, nos daba un número,
192		si os fijaos lo que hemos dicho hoy,
193		¿cuántas filas tenemos y cuántas columnas en la primera?
194		Cuatro filas por una columna, 1x4 y en la segunda sería entonces 4x1
195		¿coincide este 4 con este 4?
196		[Aly señala el 4 del orden de cada una de las matrices],
197		sí, ¿las puedo multiplicar?
198		sí, y ¿de qué orden nos va a dar la resultante?
199		de 1x1 de un elemento [6],
200		de una fila por una columna,
201		ahora el ejemplo de hoy,
202		esas dos mismas matrices,
203		la matriz fila y la matriz columna
204		pero vamos a cambiar ahora el orden de las matrices
205		¿creen que va a salir lo mismo?
206	E1:	No.
207	Aly:	Ni mucho menos, me sale una matriz de 4x4.
208		Entonces vamos a tener la primera matriz -1, 3, 2, 0 [matriz columna] por
209		la matriz 5,1,4,2 [matriz fila],
210		¿de qué orden es la primera matriz?
211		¿cuántas filas tengo y cuántas columnas?
212	Es:	De 4x1.
213	Aly:	Si muy bien sería de 4x1
214		y ¿la segunda? de 1x4
215		¿coincide el 1 con el 1?
216		[Aly señala el 1 del orden de cada una de las matrices],
217		Sí y ¿de qué orden nos saldrá la matriz resultante?
218		la matriz producto va a ser de 4x4.
219		Bueno ahora de 4x4 significa, una, dos, tres, cuatro filas
220		y una, dos, tres, cuatro columnas,
221		veis, nada que ver con el resultado anterior,
222		[Aly se refiere al 6 que daba de resultado anteriormente]
223		¿y el primer elemento de la matriz producto, de dónde lo saco?
224		De la primera fila por la primera columna,
225		lo que pasa es que va a ser de un elemento por uno sólo,
226		-1 por 5, -5,
227		segundo elemento
228		[el correspondiente a la primera fila segunda columna],
229		sería -1 por 1, que es -1,
230		luego -1 por 4 es -4
231		y el último elemento [de la matriz producto]
232		-1 por 2 que son -2.
233		Siguiente fila ¿qué hago?
234		3 por 5, 15;
235		luego 3 por 1, 3;
236		3 por 4, 12 y 3 por 2, 6

237		[los resultados son los elementos correspondientes a la segunda fila
238		de la matriz producto],
239		ven cómo va ¿verdad?
240		La tercera fila sería 2 por 5, 10;
241		2 por 1, 2;
242		2 por 4, 8 y 2 por 2, 4 y la última [fila] es todo cero
243		¿por qué?
244		porque sería 0 por 5, 0 por 1, 0 por 4 y 0 por 2.
245		Es como una propiedad distributiva grande, vale.
246		Entonces esta matriz sale de orden 4x4,
247		esto E5 es lo que me preguntaba,
248		y ésto así se hace de una manera
249		y ésto así se hace de otra
250		[Aly señala el caso en el que da una matriz producto de orden 1x1
251		y ésta, que cambiando el orden de las matrices da la matriz producto
252		de orden 4x4],
253		pero hasta que no viéramos cómo se hace el producto de matrices, pues...
254		pues no podíamos ver este segundo ejemplo vale.
255		Entonces cuidado que no es lo mismo multiplicar en un orden
256		que en el otro [el producto no es conmutativo],
257		ya lo vimos a más detalle que no es conmutativo el producto
258		de las matrices.
259		Pues venga nos vamos ya directamente con las propiedades,
260		propiedades de las operaciones con matrices,
261		esto ya es de la página 56.
262		Vamos a ver las propiedades de la suma y las propiedades del producto
263		y dentro de las propiedades del producto,
264		para aquellos casos en los que sean matrices
265		cuadradas hay una propiedad más.
266		Bueno propiedades de la suma de matrices y propiedades del producto
267		de matrices,
268		la suma de matrices la vimos el otro día,
269		¿recordáis cómo iba, no?
270		Numerito por numerito, elemento a elemento eh,
271		el elemento uno uno de la primera matriz más el elemento uno uno de la
272		segunda matriz y así...
273		¿pensáis que eso va a ser conmutativo por ejemplo?
274		¿la suma de dos matrices será conmutativa o no?
275	E1:	Si.
276	Aly:	Claro, que más me da sumar 5 más 1 que 1 más 5 ¿de acuerdo?
277		y ¿se dará la propiedad asociativa por ejemplo?
278	E1:	Si.
279	Aly:	También, pues eso vamos a escribirlo,
280		qué propiedades cumple la suma de matrices
281		y qué propiedades cumple o no el producto.
282		Bueno pues venga, propiedades de la suma, en principio.
283		Propiedades de las operaciones con matrices
284		¿qué operaciones con matrices hemos visto hasta ahora?

285		Hemos visto tres, la suma que fue la primera,
286		después el producto por un número,
287		cuando teníamos que hacer el doble de una matriz ¿en qué consistía eso?
288		en multiplicar toda la matriz,
289		cada elemento por 2,
290		esa también es otra operación y ahora acabamos de ver el producto,
291		eso sí cuando esté bien definido,
292		al igual que la suma claro (que sea del mismo orden).
293		Bueno pues vamos a las propiedades de la suma,
294		primera propiedad que tenemos aquí con la suma de matrices,
295		propiedad primera, pues tenemos a la propiedad asociativa.
296		La propiedad asociativa la sabemos ya desde hace años
297		para los números reales,
298		bueno pues la propiedad asociativa para la suma de matrices,
299		¿cómo funciona?
300		Pues de la misma manera,
301		es decir, si yo tengo la suma de dos matrices
302		y luego tengo que sumarle otra,
303		una tercera $[(A+B)+C]$
304		y eso ¿a qué es igual?
305		a la primera más la suma de las otras dos $[A+(B+C)]$,
306		no me voy a detener mucho en eso,
307		tenéis que pensar que en la suma es sumar término a término
308		los elementos de estas matrices,
309		entonces si me ponen $(A+B)+C$
310		entonces vamos a sumar el primer elemento de A
311		con el primer elemento de B
312		y luego a todo eso le añado el primer elemento de la matriz C,
313		el uno de C,
314		que más da sumar así que sumar el elemento que me den de A
315		y agruparlo de esta forma $[A+(B+C)]$,
316		en realidad estoy haciendo la misma suma.
317		Bueno pues ya que se tiene esa propiedad para números reales
318		pues también se tiene para matrices, vale.
319		Bien, segunda propiedad
320		¿qué propiedad se cumple aquí? la conmutativa para la suma.
321		La propiedad conmutativa que como ya
322		sabemos A más B es igual a B más A.
323		Siguiente, elemento neutro, el elemento neutro
324		de la operación en la que estamos que es en la suma,
325		¿cuál será el elemento neutro de la suma de los números reales?,
326		¿qué número al sumarlo con otro da el mismo número?
327		$3+$ ¿qué número va aquí? y lo deja invariante,
328		me sigue dando 3.
329	E1:	Cero.
330	Aly:	Pues en las matrices será una matriz que se llame ¿cómo?
331		Matriz nula, se llama y se escribe así,
332		cualquier matriz $[A]$ tiene matriz nula y ésta es la que me hace

333		que esa matriz $[A]$ quede invariante,
334		la matriz nula se representa por un cero,
335		en el libro lo tenéis como un cero en negritas,
336		la matriz nula existe para el orden que yo quiera,
337		para la matriz que necesite
338		y bueno vamos a poner por ejemplo la matriz nula de orden 2×2
339		¿cuál sería?
340		0, 0 [primera fila] y 0,0 [en la segunda],
341		la matriz nula de orden 2×3 ,
342		no tiene porque ser cuadrada la matriz,
343		de orden 2×3 ¿cuál sería?
344		dos filas y tres columnas.
345	E1:	0,0,0.
346	Aly:	Pues dos filas y tres columnas,
347		0,0,0 [en la primera fila], 0,0,0 [en la segunda fila]
348		ésta está definida siempre rellena de ceros,
349		del orden que yo necesite,
350		se le llama matriz nula y ya no tiene más historia, vale,
351		y existe como elemento neutro de las matrices, vale.
352		Cuarta propiedad de la suma de matrices, elemento simétrico,
353		¿qué era el elemento simétrico?,
354		bueno en este caso,
355		bueno a ver el elemento simétrico en general digamos para la suma tiene
356		un nombre propio,
357		en este caso le decimos el opuesto
358		y para el caso de la multiplicación,
359		este elemento simétrico, ¿cómo se llama?
360	Es:	[Nadie contesta].
361	Aly:	Inverso eh.
362		Bueno pues el elemento simétrico,
363		en este caso el elemento opuesto a una matriz cualquiera $[A]$,
364		¿qué le tengo que sumar para obtener el elemento neutro?
365		[Aly escribe $A + _ = 0$].
366	E2:	Su matriz opuesta.
367	Aly:	Y ¿cómo se define la matriz opuesta de una dada?
368	E2:	Cambiando los signos.
369	Aly:	Cambiando todos los signos sería $A + (-A) = 0$.
370		Entonces la opuesta ¿cómo la hago?
371		pues multiplicando todo por -1.
372		Entonces $-A$ es la matriz opuesta y se obtiene cambiando de signo
373		a cada elemento de A ,
374		¿nos imaginamos bien cómo va, verdad?
375		No hace falta ni escribir los elementos porque eso es fácil
376		y por eso no me voy a parar mucho, vale.
377		Bueno pues con eso ya tenemos las cuatro propiedades
378		de la suma de matrices ¿de acuerdo?
379		[Interrupción de un administrativo que llega a preguntar a los estudiantes
380		algunos aspectos sobre el servicio de autobús escolar].

381		Bueno pues vamos a continuar,
382		entonces en la suma de matrices tenemos esas cuatro propiedades,
383		¿puedo borrar? luego vienen las del producto de un número
384		por una matriz.
385		Eso también viene en el libro, venga.
386		Las propiedades del producto de un número por una matriz, vale.
387		La definición de esa operación la vimos el otro día,
388		que ¿en qué consistía?
389		no era nada raro ¿verdad?
390		porque es sólo multiplicar cada elemento de la matriz
391		por el número que esté fuera,
392		entonces veremos las propiedades que se dan aquí.
393		Si a y b pertenecen a los reales,
394		son números,
395		a y b son números reales
396		y A y B mayúsculas dos matrices,
397		igual que tenemos una letra para el conjunto de los números reales,
398		también para las matrices,
399		una matriz como una M grande, de orden $m \times n$,
400		una M un poco gótica,
401		es la letra que se asigna al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$.
402		Pues entonces tenemos dos números cualquiera
403		y dos matrices de orden $m \times n$
404		¿qué propiedades tenemos?
405		pues las propiedades que se cumplen son...
406	E2:	Propiedad asociativa.
407	Aly:	Sí la propiedad asociativa, a ver a por b por A ,
408		¿de qué manera puedo asociarlos yo, al multiplicar esa matriz A por otro
409		número b por otro número a ?
410		Como viene ahí,
411		lo puedo asociar haciendo primero el producto b por A
412		y luego multiplicar todo por el número a ,
413		o primero multiplicar a por b y luego multiplicar por A ,
414		pensar que esta multiplicación no es como el producto de matrices,
415		en cadena,
416		esta operación es elemento a elemento,
417		entonces ¿qué significa esto para el elemento uno uno de la matriz A ?
418		Significa que lo he multiplicado primero por el número b
419		y luego por el número a [$a(bA)$],
420		¿de acuerdo?
421		y si hago la multiplicación en este otro orden $[(ab)A]$,
422		¿qué ocurrirá? pues no ocurrirá nada,
423		se dará la igualdad,
424		bueno es por eso, porque esa igualdad está definida elemento a elemento.
425	E3:	¿Y esa cómo se llama?
426	Aly:	Esta se llama asociativa del producto de matrices por número real, vale,
427		bueno esta sería la propiedad asociativa.
428		Bueno otra propiedad que tenemos aquí es la distributiva,

429		en esta propiedad tenemos que podemos agrupar primero
430		$(a + b)$ por A , $[(a+b)A]$
431		¿a qué será igual ésta? ¿a qué sería igual esto?
432	Es:	[Nadie contesta].
433	Aly:	[Aly truenos los dedos como queriendo despertarlos con ese sonido].
434		Pues de acuerdo a la propiedad distributiva a por A más...
435	E4:	b por A
436		$[aA + bA]$
437	Aly:	b por A , bien lo mismo tenemos que pensar que esto
438		se opera término a término,
439		elemento a elemento de la matriz,
440		entonces si éstos son números $[aA$ ó $bA]$
441		tengo que multiplicar elemento a elemento,
442		esta propiedad que se cumple en los números reales
443		también se cumple aquí, vale,
444		ésta se llama propiedad distributiva.
445		Otra propiedad distributiva de matrices que tenemos,
446		es a por A más B $[a(A+B)]$,
447		esta es distinta,
448		¿cómo se llama la primera distributiva y cómo se llama esta distributiva?
449		La veis porque son diferentes ¿no?,
450		porque ésta es la propiedad distributiva de suma de dos números
451		por el producto de una matriz $[(a+b)A]$
452		y ésta es distributiva del producto de un número por la suma
453		de matrices $[a(A+B)]$ vale,
454		pero hemos dicho que esta propiedad también se cumple aquí $[a(A+B)]$
455		entonces tenemos que es igual a a por A más a por B $[aA + aB]$
456		y la última propiedad que tenemos aquí
457		es el elemento neutro para este producto con números y matrices
458		¿cuál será, qué número será el elemento neutro?
459	E2:	El 1.
460	Aly:	¿Qué elemento deja a la matriz invariante?
461		El 1 pero el 1 como número real, si yo multiplico aquí por 1,
462		es decir, si yo a cada elemento de la matriz lo multiplico por 1,
463		la matriz se queda igual ¿verdad?
464		entonces el 1 es el elemento neutro,
465		es un escalar que deja a la matriz igual.
466		Bueno pues ahí tenéis todas las propiedades
467		y vamos a ver las propiedades del producto,
468		aquí ya no se cumple todo,
469		hay cosas que si se dan y otras que no, vale.
470		Bueno propiedades del producto de matrices,
471		bueno pues en el producto de matrices tenemos A , B y C
472		dentro del conjunto de matrices.
473		Primera propiedad que tenemos es la asociativa,
474		ésta es importante,
475		ésta si se cumple eh, la asociativa si se da,
476		aquí tenéis que tener cuidado con el orden de las matrices,

477		tenemos una matriz A de orden $m \times n$ por una matriz B de orden...,
478		cuidado para que el producto se pueda hacer
479		¿qué número tengo que imponer al orden de la segunda matriz?
480	E2:	De n por algo.
481	Aly:	Para comenzar tiene que empezar por n,
482		porque sino empieza por n ese producto no está bien definido,
483		entonces B de orden $n \times p$,
484		si agrupo primero esas dos
485		y ahora lo multiplico por una matriz C de orden p por lo que queráis,
486		en este caso vamos a ponerle de orden $p \times q$
487		¿pues eso a qué será igual?
488		Si yo agrupo de esa manera,
489		es decir,
490		yo agrupo primero la primera por la segunda
491		y luego por la tercera $[(AB)C]$
492		¿a qué va a ser igual el producto?
493		Va a ser igual a la matriz A de $m \times n$ fuera
494		y agrupo primero las dos últimas [B por la C], vale,
495		le pongo aquí los órdenes pues para hacer más hincapié
496		en que los órdenes tienen que cuadrar
497		[que para efectuar el producto de dos matrices
498		el número de columnas de la primera coincida
499		con el número de filas de la segunda],
500		eh porque sino imposible de hacer eso vale.
501		Entonces esta propiedad se puede comprobar,
502		lo que pasa es que es demasiado largo,
503		y comprobar con ejemplos y tal,
504		esta propiedad si se cumple siempre eh,
505		siempre que los órdenes de las matrices sean los apropiados,
506		pues esa propiedad asociativa si se cumple.
507		Ahora una segunda propiedad que más bien es una no propiedad,
508		el producto de matrices es no conmutativo
509		y esto lo voy a poner bien grande [con letra más grande],
510		porque es lo más importante de aquí,
511		que el producto de matrices es no conmutativo,
512		lo hemos visto antes con una matriz fila y una matriz columna,
513		el producto de matrices no es conmutativo
514		[Aly escribe: El producto de matrices no es conmutativo!!!],
515		es decir, yo multiplico dos matrices y les cambio el orden
516		y no da lo mismo.
517		No sólo es que no me de lo mismo sino que hay veces
518		que ni siquiera está definido,
519		es decir, imaginaros, una matriz A de orden 2×3
520		y la multiplico por una matriz B de orden 3×4 ,
521		esto está bien definido verdad ¿por qué?
522		Porque el número de las columnas [de la primera]
523		coincide con el de filas [de la segunda]
524		y qué matriz resultado voy a tener ahí,

525		pues una matriz C de orden 2×4 ,
526		ahora ¿qué ocurre si yo intercambio el orden?
527		Esta primera matriz es de orden 3×4 [B] y la...
528	E2:	No está bien definida.
529	Aly:	Y la segunda es de orden 2×3 ,
530		no es que no me de lo mismo es que en este caso
531		ni siquiera podría hacer la operación, vale,
532		eso es imposible vamos.
533		Entonces ni siquiera estaría definido el producto como operación,
534		entonces si no tenemos la operación bien definida
535		pues entonces sabré que no me va a dar igual ¿de acuerdo?
536		y aquí vimos un ejemplo pero hay muchos más,
537		vamos a hacer un ejemplo para practicar,
538		bueno primero voy a terminar las propiedades del producto,
539		la propiedad distributiva vale,
540		entonces tercera propiedad distributiva, aquí ¿cuál sería? venga,
541		pues A por B más C $[A(B+C)]$,
542		esta distributiva si que se cumple,
543		¿a qué es igual, A por la suma de matrices?
544		Siempre que los órdenes lo permitan eh, A por B más C,
545		¿a qué será igual?
546	Es:	A por B más A por C.
547	Aly:	Eso sí A por B más A por C eso si está bien definido y otra distributiva,
548		mucho cuidado eh, ésta se llama distributiva por la izquierda eh,
549		luego hay otra distributiva que sería D más E por F $[(D+E)F]$,
550		le pongo otro nombre [Aly se refiere a las letras que ha utilizado],
551		¿a qué sería igual eso?
552	E1:	A D por F más E por F.
553	Aly:	En realidad casi siempre estás dos distributivas,
554		¡Casi nunca se menciona a las dos eh!,
555		en este caso porque si hay una razón eh,
556		por un lado o por otro,
557		ésta se llama distributiva por la izquierda $[A(B+C)]$
558		y la otra distributiva por la derecha $[(D+E)F]$
559		aquí ¿por qué tiene importancia esto?
560		pues porque no es lo mismo multiplicar por un lado que por el otro,
561		entonces en este caso hay que especificar que se dan las dos distributivas
562		¿de acuerdo? pues bueno esas son las propiedades,
563		nos queda ya poquito de lo que son matrices,
564		y ahora veremos los casos particulares de matrices cuadradas,
565		la matriz identidad y la matriz inversa,
566		vamos a ver ahora que no siempre hay inversa
567		y que la matriz identidad también se cumple sólo para el caso de matrices
568		cuadradas,
569		pero antes de eso vamos a ver una cosita a ver por ejemplo
570		comprobar que no es conmutativa, por ejemplo este, a ver.
571		Comprobar que no es conmutativa,
572		un ejercicio de ver que el producto no es conmutativo

573		y lo vamos a hacer con estas dos matrices,
574		la matriz A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ [primera fila] $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ [segunda fila],
575		del mismo orden para que las podamos multiplicar,
576		B, $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ [primera fila] y $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ [segunda fila].
577		Bueno y ¿qué me están pidiendo ahí?,
578		pues que multiplique de un lado y multiplique del otro,
579		pues irlo haciendo,
580		venga [Aly inicia a pasar a donde están los estudiantes para
581		supervisar lo que ellos hacen].
582		Bueno vamos a comprobar esto,
583		bueno de todas las propiedades que hemos visto hoy vienen
584		en el libro, muchos ejemplos,
585		pero cuando me haga falta alguna propiedad
586		en concreto para hacer algún ejercicio,
587		la recordamos y ya está.
588	E3:	Y ¿aquí qué vamos a hacer con esto?
589	Aly:	¿No entiendes el ejercicio?
590		Comprobar que no es conmutativo ese producto de matrices,
591		con esas dos matrices A y B,
592		eso es lo que te piden,
593		ahora ¿tú te enteras de eso?
594		[Aly le pregunta si comprende lo que se le pide hacer].
595	E3:	No.
596	Aly:	Bueno ya, pero tienes que multiplicar A por B y ...
597	E3:	B por A.
598	Aly:	Comprobar que algo no se cumple,
599		a ver si se cumple la propiedad conmutativa
600		es que se cumple la igualdad ¿verdad?
601		A por B igual a B por A,
602		esto significa que se está cumpliendo,
603		ahora comprobar que no se cumple ¿qué es?
604		pues probar que eso es diferente,
605		que no se cumple, A por B no es lo mismo que B por A, ¿vale?
606	E3:	Vale.
607	Aly:	Es decir, que A por B y B por A cambiando el orden de las matrices,
608		tienen que ver que no da lo mismo,
609		que no da el mismo resultado, vale.
610		Ya he dicho antes que no es que no den el mismo resultado,
611		es que puede ser que ni siquiera esté bien definido ese producto,
612		en este caso es el producto de dos matrices que sí va a estar definido
613		el orden de las matrices pero que no da el mismo resultado
614		[Aly mira el reloj, observa algunas páginas de su libro
615		y da tiempo para que los estudiantes lo intenten].
616		Venga hay que hacerlo rapidito,
617		un resumen de todo lo que hemos visto lo tenéis en la página 59,
618		en la página 59 hay dos cuadritos donde les resumen todas
619		las propiedades,
620		están todas las que hemos estado diciendo,

621		la propiedad conmutativa, asociativa, elemento neutro y simétrico
622		de la suma, en fin
623		[Aly se acerca a la pizarra para resolver el ejercicio].
624		Bueno ¿cómo sería el producto de A por B?
625		A ver E3, tú no te has enterado de esto bien.
626	E3:	¿Qué?
627	Aly:	¿Qué tenemos que hacer para multiplicar A por B?
628		¿te has enterado cómo se multiplican matrices?
629	E3:	No.
630	Aly:	Sería el primer elemento de aquí [de la matriz A].
631	E3:	La fila por la columna ¿no?
632	Aly:	La fila por la columna,
633		si vamos multiplicando cada fila por el elemento correspondiente,
634		entonces para el elemento uno uno [de la matriz C]
635		¿qué fila y qué columna me interesan?
636		Pues fila uno [de la primera] por la columna [de la segunda].
637		Entonces el primero por el primero más el segundo por el segundo
638		[las matrices son cuadradas de 2x2],
639		vale sería 1 por -1 más 0 por 4, pero 0 por 4 ese no pinta nada
640		[porque da 0],
641		entonces es -1.
642		Segundo elemento [correspondiente a la primera fila segunda columna],
643		¿cómo se busca ese elemento?
644	E2:	Fila uno.
645	Aly:	Fila uno columna dos,
646		entonces 1 por 5 más 0 por -1, total que me queda 5,
647		siguiente elemento dos uno, segunda fila primera columna,
648		sería 2 por -1 más 7 por 4, 2 por -1 es -2 y 7 por 4 son 28,
649		entonces 28 menos 2 son 26 ¿no?
650		y ahora 2 por 5, 10
651		[para calcular el último elemento de la matriz producto],
652		es decir, la segunda fila por la segunda columna,
653		entonces 2 por 5, 10 y 7 por -1, -7 entonces 10 menos 7 son 3,
654		eso es multiplicar A por B en ese orden.
655		Ahora vamos a hacer la otra B por A,
656		B por A como los órdenes coinciden [2x2]
657		entonces la matriz producto me va a dar otra de 2x2,
658		el primer elemento ahora será primera fila [de la matriz B]
659		por primera columna [de la matriz A],
660		entonces sería -1 por 1 más 5 por 2, vale,
661		cuánto es -1 por 1, -1 y 5 por 2, 10 entonces -1 más 10 son 9,
662		ya veis que el primer elemento ya no da
663		[comparando el elemento de la primera fila primera columna
664		de A por B y de B por A],
665		entonces ¿irán a ser iguales las matrices?
666	E1:	No.
667	Aly:	No, porque para que fueran iguales tendrían que ser iguales
668		elemento a elemento, pero todos los elementos de la matriz,

669		bueno pero de todas formas vamos a seguir.
670		Ahora segundo elemento -1 por 0 más 5 por 7
671		[al considerar la primera fila de B por segunda columna de A],
672		-1 por 0 no es nada y 5 por 7 son 35, entonces son 35,
673		tampoco coincide
674		[comparando el elemento de la primera fila segunda columna
675		de A por B y de B por A].
676		Ahora elemento dos uno [en la matriz producto B por A],
677		entonces sería la segunda fila [de la matriz B] primera columna [de la
678		matriz A],
679		entonces sería 4 por 1 más -1 por 2,
680		entonces 4 por 1, 4 menos 2 son 2.
681		Ahora el último elemento sería 4, -1 [segunda fila de B] por 0, 7
682		[segunda columna de A] 4 por 0 es 0 y más -1 por 7, -7 entonces es -7.
683		¿Son iguales las dos matrices?
684		No.
685		Luego E3, hemos comprobado esto [A por B distinto de B por A] mira,
686		si A por B no es igual que B por A,
687		entonces esto es distinto, bien.
688	E4:	Podemos hacer el 9 [E4 quiere saber nuevamente de dónde salio el 9 que
689		está en la posición de la primera fila primera columna de la matriz
690		producto B por A],
691		[Aly se da cuenta que E4 no ve de donde salió el 9]
692		algunas veces para hacer el producto de B por A
693		es necesario escribir las matrices,
694		primero la B y luego la A,
695		Vale.
696		[Pues Aly sólo había anotado en la pizarra la matriz A con sus elementos
697		y luego la matriz B con los propios].
698		Entonces sería la primera fila [de la matriz B] por la primera columna [de
699		la matriz A],
700		¿vale?
701	E4:	Si.
702	Aly:	Entonces sería -1 por 1 esto te da -1 más y como 5 por 2 son 10,
703		10 -1 son 9, vale.
704	E4:	[E4 indica que sí moviendo su cabeza de arriba hacia abajo].
705	Aly:	Para verlo mejor entonces hay que escribir nuevamente las matrices
706		en el orden que se van a multiplicar, vale,
707		¿hemos visto verdad?
708		para este elemento [el 9] primera fila primera columna,
709		y así para los demás,
710		primera [fila de B] por segunda [columna de A],
711		segunda [fila de B] por primera [columna de A]
712		y segunda [fila de B] por segunda [columna de A],
713		¿vale?
714		Bueno ya os digo que las propiedades genéricas del producto
715		[de matrices] ya las tenéis, eh,
716		la primera que era la asociativa,

717		la que no es conmutativo y las dos distributivas que me dan
718		Y ahora hay dos cositas que se cumplen en algunos casos,
719		en otros no, entonces vamos a ver eso y ya acabamos
720		y son la matriz identidad y la matriz inversa.
721		Bueno fijaros que para la suma hemos definido antes el elemento neutro
722		¿verdad?,
723		no copiéis esto [lo referente al elemento neutro en la suma],
724		el elemento neutro de la suma ¿cuál era? la matriz nula,
725		es decir, aquella matriz con todos los elementos cero que al sumarle
726		la matriz de partida pues nos va a dar igual,
727		nos la va a dejar invariante, vale.
728		¿Cuál sería el elemento neutro ahora de la multiplicación?,
729		es decir, una matriz que al multiplicarla por cualquier otra matriz
730		me deje esa matriz de partida A invariante,
731		A por una matriz que me la deje igual.
732	E2:	Uno.
733	Aly:	¿Uno? pero uno es un número, yo necesito una matriz .
734	E1:	La matriz identidad.
735	Aly:	Eso se llama, tiene un nombre particular y se denota con I mayúscula
736		y se llama matriz unidad o matriz identidad,
737		lo que ocurre es que esta no es una propiedad general
738		porque no existe siempre,
739		solamente existe para matrices cuadradas,
740		si la matriz no es cuadrada,
741		si es de orden 2×3 o 3×4 , eso no existe [la matriz identidad de ese orden],
742		por eso, eso no viene en el libro en las propiedades generales,
743		sino que ahora como caso particular de matrices cuadradas
744		podemos escribir matriz identidad o matriz unidad
745		y podemos hablar del elemento simétrico y en la suma
746		¿cuál era el elemento simétrico?
747		Para una matriz A de tal forma que al sumarle por algo
748		me de la matriz nula [en el caso de la suma]
749		y ¿cuál era? pues la matriz opuesta,
750		y ¿en este caso? [producto],
751		hemos dicho que en la suma tiene un nombre
752		y se llama simétrico que es la matriz...
753		la matriz ¿cómo se llama?
754		que se me ha ido en este momento.
755	E1:	La opuesta.
756	Aly:	Eso la opuesta, pues aquí [en el producto], el simétrico se llama...
757	E1:	Se llama inversa.
758	Aly:	Si, se llama inversa, en este caso se llama la matriz inversa.
759	E1:	Pero el producto de...
760	Aly:	La matriz inversa es aquella que al multiplicar la matriz
761		por su inversa nos va a dar...
762	Es:	La identidad.
763	Aly:	Eso, entonces esta inversa se representa así [A elevada a la -1],
764		entonces esta es la matriz inversa.

765		Pero ¿por qué no están incluidas en las otras propiedades?
766		Porque no siempre existe la matriz identidad,
767		sólo en los casos de matrices cuadradas
768		y no siempre existe la matriz inversa,
769		ni siquiera para todas las matrices cuadradas hay inversa,
770		solamente en algunos casos, vale.
771		Entonces ahora vamos con el segundo apartado que es,
772		dentro de matrices cuadradas,
773		cuándo existe y cuándo no las matrices,
774		o bueno cuándo se calculan en todo caso, las matrices.
775		Entonces matrices cuadradas: matriz identidad y matriz inversa
776		¿de acuerdo?
777		Digo que ya estamos dentro de matrices cuadradas
778		entonces eso ya es en general [de las matrices cuadradas]
779		Entonces se define matriz identidad
780		(pero tiene que ser cuadrada del orden que sea) de orden $n \times n$ como sigue.
781		La matriz identidad de orden $n \times n$,
782		ya saben la matriz cuadrada de n filas y n columnas,
783		bueno pues la matriz tiene toda la diagonal principal unos,
784		es decir, uno, uno, uno
785		[va escribiendo 1 en cada posición de la diagonal principal]
786		toda la diagonal principal, uno.
787	E2:	Y todo lo demás cero.
788	Aly:	Y todo el resto cero, es muy fácil eh
789		[anota ceros en los espacios libres de la matriz], ¿de acuerdo?,
790		entonces toda la superior, toda la inferior son cero,
791		lo único que no es cero es la diagonal principal
792		que está llenita de unos y nada más,
793		bueno ese elemento es,
794		el elemento neutro de las matrices pero no existe siempre
795		solamente para el caso de las matrices cuadradas,
796		en este caso de orden $n \times n$.
797		¿cómo sería la matriz identidad de orden 2×2 ?
798		Hay veces que se puede denotar sólo con I sub 2
799		pues ya se sabe que si es la identidad es una matriz cuadrada,
800		entonces da igual que escriba 2×2 o simplemente 2
801		[al anotar el orden de la matriz I].
802		Una matriz de orden 2×2 que tenga sólo 2 elementos,
803		en la diagonal dos unos y en el resto ceros, vale,
804		bueno pues esa matriz es,
805		repito sólo para matrices cuadradas, no en general,
806		esta matriz es el elemento neutro de la multiplicación de matrices.
807		Es decir, yo tengo una matriz A y la multiplico por la identidad
808		¿y qué me da?
809		Pongo una matriz la que sea,
810		una matriz cualquiera la multiplico por su matriz identidad
811		correspondiente y me queda A ,
812		pero no solamente eso sino que también al revés,

813	que si la multiplico tanto por la derecha como por la izquierda
814	eso se queda igual, vale.
815	Bueno pues vamos a hacer un pequeño ejercicio
816	para comprobar que efectivamente al multiplicar cualquier matriz
817	por la identidad me va a dar igual, venga.
818	Ejercicio, sea A la matriz de 3×3 , 3, 7, 9 [primera fila],
819	0, 1, -4 [segunda fila], 10, -1, 5 [en la tercera fila],
820	comprobar primero que A por I me da lo mismo que I por A
821	y en este caso ¿qué estoy diciendo?
822	que aquí si me da lo mismo multiplicar A por I que I por A,
823	en este caso si es conmutativo eh,
824	el producto de matrices cuando estoy trabajando con esta matriz
825	que es la identidad,
826	y que me deja la matriz invariante,
827	es decir que me da igual a A y por lo tanto esto
828	[I, la matriz identidad]
829	es el elemento neutro de la multiplicación, vale.
830	Venga pues vamos a hacer las cuentecitas,
831	en este caso la matriz es de orden 3×3 ,
832	luego ¿qué matriz identidad tengo que poner ahí?
833	Anoto la matriz A [va a realizar A por I]
834	con todos sus elementos y luego
835	¿qué matriz identidad tengo que anotar ahí?
836	pues la matriz identidad ¿de qué orden?,
837	no cualquiera claro,
838	de orden apropiado,
839	de orden 3×3 ,
840	entonces 1, 0, 0 [en la primera fila], 0, 1, 0 [en la segunda fila]
841	y 0,0,1 [en la tercera fila],
842	bueno vamos a empezar con el producto [A por I],
843	el producto este
844	¿en qué consistía, cómo encuentro el primer elemento de
845	la matriz producto?
846	Primera fila [de la matriz A] por primera columna [de la matriz I],
847	entonces 3 por 1.
848	¿Qué ocurre con el 7 y con el 9 [de la primera fila de A]?
849	que se anulan que son cero [al multiplicarlos por cero] ¿no?
850	[se escucha el timbre indicando que la clase ha terminado],
851	pues me va a quedar 3,
852	segundo elemento [de la matriz producto],
853	primera fila [de la matriz A] por segunda columna [de la matriz I],
854	sería 3 por 0 se anula más 7 por 1 más 9 por 0
855	que también se anula pues me queda 7 por 1 nada más, entonces son 7
856	siguiente cosa,
857	siguiente multiplicación [primera fila de A por tercera columna de I] es,
858	3 por 0 más 7 por 0 más 9 por 1, me queda 9,
859	ven cómo va saliendo ya la primera fila igual,
860	bueno lo termináis vosotros y hacer también I por A, vale.

861		Un momentito voy a dejar algo de aquí [del libro de texto]
862		de ejercicios porque sino... de la página 60 ejercicio 7, vale,
863		que el lunes no hay instituto.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la cuarta clase grabada de la profesora Aly del miércoles 15/10/08.

Resumen: Corrección de ejercicios anteriores, dos métodos para calcular la matriz inversa y el caso de dos propiedades que no se cumplen en matrices.

L		Transcripción
1	Aly:	Bueno vamos a corregir primero el ejercicio que había dejado vale.
2		Ah E4 tenías un fallo en un 8 por ahí
3		[en un ejercicio que le dio a Aly para que se lo revisara en casa]
4		Bueno era un ejercicio que dejé de la página ¿cuál?
5	Es:	De la 60.
6	Aly:	Era el ejercicio 5 verdad, porque el 4 lo hicimos ayer,
7		bueno E2 venga
8		[E2 pasa a la pizarra a resolver el ejercicio]
9		para que no siempre sea yo [la que hace todo].
10		¿Cuál vas a hacer el 3 ó el 5?
11	E2:	Da igual.
12	Aly:	Bueno muy bien haz el 3.
13		Venga pues nos dan A la matriz esa 3, 0 [primera fila]
14		y 5, -1 [en la segunda fila],
15	E2:	[E2 escribe también la matriz B, 0 y 6 en la primera fila
16		y 1 y -3 en la segunda fila].
17	Aly:	Bueno nos piden encontrar dos matrices que son las incógnitas
18		[Aly se da cuenta que no lo ha dicho bien],
19		no perdón aquí sólo piden la matriz X
20		[Aly se confundió con el ejercicio 5 en donde
21		piden calcular dos incógnitas],
22		es una ecuación con una sola incógnita nos piden encontrar X
23		que cumpla $3.X - 2.A = 5.B$
24		[Aly mientras se acerca a E4 para entregarle los ejercicios que
25		le revisó ella en casa]
26		E4 mira aquí tienes los ejercicios que me diste para revisarlos
27		aquí está el 8 que te digo que habías escrito mal.
28		[Aly le explica a E4 sus fallos en esos deberes].
29	E2:	[E2 sigue anotando la solución al ejercicio en la pizarra].
30	Aly:	Bueno vamos a ver, el ejercicio era 3X, tú has anotado 3X,
31		3 por a,b,c,d [a y b primera fila, c y d segunda fila,
32		son los elementos de la matriz incógnita X]
33		menos 2 por A y anotas los valores de la matriz A,
34		Luego igual a 5 por B y anotas todos los elementos de la matriz B.
35		Ven lo que él está haciendo ¿no?
36		Multipliqué 2 por A y 5 por B
37		y a la matriz incógnita la denota con los elementos a, b, c y d
38		y los multiplicó por 3,
39		hay otra forma más fácil eh, pero bueno ya hazla así.
40	E3:	Pero...
41	Aly:	Dime.
42	E3:	Pero las incógnitas se ponen después ¿no?
43		[primero haciendo el despeje de la matriz incógnita

44		sin hacer las operaciones].
45	Aly:	¿Sabes cómo lo he hecho yo?
46		a te da 2 ¿no? [Aly pregunta a E2].
47	E2:	Si, [y E2 continúa haciendo las operaciones y obteniendo
48		los valores correspondientes a los elementos de la matriz incógnita].
49	Aly:	[E2 ha terminado y Aly sigue buscando su hoja donde había
50		hecho ese ejercicio para contarles cómo lo había hecho ella],
51		A ver la solución es [de acuerdo a lo que hizo E2]
52		2, 10 [en la primera fila] y 5 y menos 17 tercios,
53		está bien el resultado eh.
54		Otra forma y quizás sea más fácil es,
55		aquí nos plantean una ecuación con una incógnita
56		que es el caso de una matriz, ¿verdad?
57		Que es $3X-2A=5B$,
58		La A y la B son conocidas, la única que no conocemos es la matriz X,
59		entonces despejo igual que despejaría de una ecuación,
60		pues es una ecuación, $3X=5B+2A$,
61		¿hay algún problema en sumar 2 veces la matriz A de un lado
62		y sumar la matriz 2A del otro lado [de la igualdad]?
63		Ninguno, entonces si yo sumo 2A aquí [de un lado de la igualdad]
64		y 2A acá [otro lado de la igualdad],
65		lo único que pasa es que esto se va $[-2A+2A]$ se anula,
66		entonces igual que hacemos en una ecuación eh,
67		entonces sería $3X=5B+2A$,
68		entonces a continuación calculo 5 veces la matriz B más 2 veces
69		la matriz A,
70		la dificultad es la misma que la forma en la que la hizo E2 eh,
71		entonces vamos a calcular, vamos a hacerlo en un momentito,
72		5 veces la matriz B sería multiplicar todo [la matriz B] por 5,
73		entonces obtengo 0, 30 [en la primera fila]
74		y 5, -15 [en la segunda fila] más 2 veces la matriz A
75		¿qué sería?
76		sería 6,0 [en la primera fila] y 10 y -2 [en la segunda fila],
77		bueno y cuando acabe de sumar ¿qué tengo que hacer?
78		pues partir [dividir] por tres el primer miembro
79		y segundo miembro [de la igualdad].
80		Entonces vamos sumando estas dos matrices
81		[la matriz suma de $5B+2A$]
82		y nos queda 6 y 30 [en la primera fila]
83		y 15 y -17 [en la segunda fila].
84		Y tenemos que 3 veces X es esto [la matriz suma].
85		Entonces X sería igual a un tercio de esa misma matriz [la matriz suma],
86		entonces al dividir todo [la matriz suma] entre 3 nos queda,
87		2, 10 [en la primera fila] y 5 y menos 17 tercios.
88		Veis como sale lo mismo,
89		la dificultad es la misma sólo depende de cómo se hagan las operaciones,
90		lo importante es saber hacerlo,
91		ese era el 3 [ejercicio], el 5 [ejercicio],

92		¿alguien quiere salir a hacerlo [pasar a la pizarra]?
93		[Aly va preguntando a algunos estudiantes si lo hicieron
94		y después de preguntar a dos estudiantes y ver que no tenían intenciones
95		de pasar a la pizarra, Aly invita a E11 a que lo haga],
96		E11 pasa a la pizarra, ese ejercicio es facilito.
97	E2:	[E3 hace preguntas sobre el ejercicio a E2 y E2 le dice
98		que en este ejercicio dan puros números exactos].
99	E11:	[E11 inicia a escribir la solución del ejercicio 5].
100	Aly:	Bueno voy a irles pasando esto,
101		[Aly les va repartiendo una fotocopia en sus lugares],
102		esto es un método para calcular la inversa con lo que conocemos,
103		no es el método definitivo de cálculo de una matriz inversa,
104		que es el tema siguiente,
105		pero con lo que sabemos ahora mismo esto es lo que podemos hacer.
106		[Aly termina de entregar la fotocopia].
107		Vamos a ver, practicamos el método de reducción
108		El ejercicio 11 que está haciendo E11 es un ejercicio
109		donde hay que encontrar dos matrices incógnitas,
110		$2X$ menos $3Y$ igual a la matriz,
111		1, 5 en la primera fila y 4, 2 en la segunda,
112		la otra ecuación es X menos Y igual a la matriz $-1, 0$ en la primera fila
113		y 3, 6 en la segunda].
114		Cuando ya encontramos una de las incógnitas en este caso la X
115		$[-4, -5]$ en la primera fila y $5, 16$ en la segunda]
116		entonces ya sólo falta encontrar la otra incógnita que es la Y ,
117		en este tipo de ejercicios que está haciendo E11
118		no hay ningún problema en pasar un término que esté sumando,
119		pasarlo del otro lado restando y otra matriz que está restando
120		pasarla sumando también,
121		en lo único que hay que tener mucho cuidado
122		es con la conmutatividad eso sí,
123		en el orden en el producto
124		sería entonces [viendo los resultados de E11]
125		la matriz Y igual a $-3, -5$ [en la primera fila]
126		y $2, 10$ [en la segunda fila] vale.
127		Muy bien, está bien [después de comparar en sus resultados].
128		Bueno pues ahí tenéis otro ejercicio de un sistema matricial.
129		Os dije que en la misma página 60,
130		arriba tenéis también un ejemplo resuelto, eh,
131		pero es del mismo estilo del que hice ayer y de éste
132		[del que acaba de hacer E11],
133		se entiende bien ese ¿no?
134	E4:	[E4 corrige un signo que había escrito mal en la pizarra E11,
135		pero no afectó el resultado].
136	Aly:	Si muy bien, bueno terminen ya de copiar
137		y seguimos ya con la matriz inversa,
138		¿puedo borrar ya?
139		Bueno recopilando un poquito lo de días anteriores,

140		de la semana pasada,
141		nos habíamos quedado en las propiedades de matrices,
142		en las propiedades de matrices ¿verdad?
143		habíamos visto las propiedades de la suma,
144		la conmutativa, la distributiva, etc.,
145		las propiedades del producto por un número
146		y en las propiedades del producto habíamos visto
147		que se daba la asociativa,
148		que no se daba la conmutativa,
149		que algunas matrices,
150		solamente algunas tenían elemento unidad,
151		matriz identidad que es el elemento neutro de la multiplicación
152		y nos quedaba la inversa eh,
153		entonces lo de la inversa es lo que acabo de distribuirles [fotocopia]
154		y vamos viendo eso,
155		porque la verdad es que el libro no se para [detiene] nada eh
156		para ver cómo se puede calcular la inversa así
157		[como ella se los propone en esa fotocopia].
158	E2:	Pero si viene en el libro.
159	Aly:	Sí, sí pero te pone muy poquito,
160		sólo te dice esta es la inversa y te la da ya calculada.
161	E2:	Pero el método, yo por el método la puedo calcular.
162	Aly:	El método lo tienes ahí [en el libro] es el método.
163	E2:	Es más rápido.
164	Aly:	Yo os voy a dar este otro método también,
165		te voy a explicar las dos formas ¿no?,
166		pero te voy a decir que ninguna de las dos formas
167		que vamos a usar ahora,
168		es la que al final del curso hay que usar para calcular la inversa,
169		no lo vamos a hacer con estos dos métodos
170		sino con otro método eficiente,
171		más rápido para hacerlo eh,
172		pero ninguna de estas dos maneras,
173		pero hay que verlo, por lo menos que lo sepáis.
174		Bueno entonces digo eso que en las propiedades de la multiplicación
175		que vimos el otro día,
176		habíamos visto ya la asociativa, que esa siempre se cumplía,
177		la conmutativa ¿qué ocurre con la propiedad conmutativa?
178		Aquí va el producto de matrices,
179		no es lo mismo A por B que B por A,
180		vimos que eso es muy interesante,
181		un poco teórico pero interesante,
182		luego vimos lo del elemento neutro de la multiplicación.
183		El elemento neutro habíamos dicho que era la matriz identidad eh,
184		del orden que sea, bien esta matriz existe siempre o ¿no?,
185		es decir, ¿para cualquier matriz que me den del orden que sea?
186	E2:	No, sólo las cuadradas.
187	Aly:	Sólo las cuadradas, entonces con el elemento neutro cuidado,

188		sólo para matrices cuadradas, vale,
189		ahí si sabemos que existe un elemento que es esta matriz identidad
190		o unidad de manera que A por I es lo mismo que I por A y esto igual a A ,
191		deja a la primera matriz invariante vale, por la multiplicación.
192		Y lo que nos queda por ver es, esta última cosa que es la inversa,
193		la matriz inversa, bueno pues la matriz inversa, primera cuestión,
194		¿existe siempre la matriz inversa?
195		¿existe siempre un elemento en las matrices que siempre que
196		al multiplicar una matriz, la que sea,
197		la que me den por una matriz inversa, me de la identidad?
198	E6:	Si.
199	Aly:	¿Existe siempre?
200	Es:	No.
201	Aly:	No, ni mucho menos, ni siquiera en todas las matrices cuadradas
202		tampoco eh,
203		esto hay que tenerlo muy claro eh,
204		no siempre existe la matriz inversa, vale.
205		Entonces solamente en algunos momentos,
206		entonces ahora nos interesa saber cuándo si y cuándo no se da,
207		pero hay una condición que es esta [A por A inversa es igual a I],
208		entonces eso nos da un primer método que es ese que tenéis en el libro
209		un poquito,
210		el que yo les traigo es otro,
211		el método de Gauss-Jordán, que si os suena a ti por ejemplo E2
212		[E2 es repetidor del curso].
213	E2:	No.
214	Aly:	No te suena del año pasado pero hay que darlo también,
215		que no digo que lo vayamos a utilizar luego
216		porque en verdad no es el método más rápido pero hay que verlo.
217		Bueno a lo que vamos es al cálculo de la matriz inversa, pues venga,
218		ésta [la matriz inversa] ya os he dicho que no siempre existe,
219		sólo en algunos casos y esto tiene que ver con el tema siguiente,
220		solamente en algunos casos si podremos calcular la inversa,
221		es decir, si tenemos la matriz A encontrar otra,
222		A a la menos uno,
223		que al multiplicarla por A nos de la identidad [I],
224		bueno pero también A a la menos uno por A es la identidad,
225		es decir, con la matriz inversa si es conmutativo el producto,
226		A por A a la menos uno,
227		sí que me da lo mismo que A a la menos uno por A ,
228		en ese caso si existe la conmutatividad.
229		Bueno pues vamos a, digamos el primer método de cálculo de inversa,
230		nos vamos a ir al ejercicio que tenéis en el libro,
231		está resuelto, es muy parecido a lo que acaba de hacer E2
232		en el ejercicio anterior [$3X-2A=5B$],
233		lo tenéis en la página 58, dice así.
234		Hallar la inversa de la matriz A igual a 3, 7 [en la primera fila]
235		y 2,5 [en la segunda fila],

236		fijaros que la que vamos a encontrar a lo mucho va a ser de orden 2×2 ,
237		bueno tres por tres también es fácil aunque
238		luego se complica un poquito más.
239		Entonces lo que os dicho antes es empezar a la brava,
240		¿en qué consiste? pues en poner esta condición
241		[A por A a la menos uno igual a A a la menos uno por A igual a I],
242		entonces tiene que ser una matriz de 2×2
243		de manera que la condición que tiene que verificar es ésta
244		[A por A a la menos uno igual a la identidad]
245		si lo multiplico en el otro orden me da lo mismo.
246		Entonces empezamos, anotamos la matriz A, 3,7 [en la primera fila],
247		2,5 [en la segunda fila] por la matriz A a la menos uno,
248		como no tengo ni idea de quién es pues empiezo a llenar
249		sus elementos con x, y [en la primera fila],
250		z, t [en la segunda fila] y eso me tiene que dar igual a la matriz identidad,
251		¿de qué orden en este caso?
252		pues de 2×2 pues esta matriz es de 2×2 [la matriz A],
253		esta es de 2×2 [la matriz inversa],
254		entonces ésta [I] también es de orden 2×2 ,
255		entonces tiene sentido el producto y la matriz resultante
256		[E3 y su compañero están haciendo desorden],
257		a ver E3 y el otro ¡callaros E8!
258	E8:	Si.
259	Aly:	Eso pues vamos a callarnos.
260		[Aly los invita a que guarden silencio y pongan atención].
261		Bueno pues la matriz identidad sería 1, 0 [en la primera fila]
262		y 0, 1 [en la segunda fila] ¿de acuerdo?
263		y ¿qué empezamos a hacer?
264		pues empezamos a hacer la primera multiplicación
265		[de A por A la menos uno].
266		¿Cómo se multiplican? pues primera fila [de la matriz A]
267		por primera columna [de la matriz inversa], es decir,
268		el primer elemento [de la matriz producto]
269		¿cuál va a ser? ¿cuánto?
270	Es:	$3x+7z$.
271	Aly:	Segundo elemento, vamos a ver cuál sería, primera fila [de la matriz A]
272		por segunda columna [de la matriz inversa] verdad,
273		serían $3y+7t$.
274		Siguiente elemento el dos uno
275		[correspondiente a la segunda fila primera columna
276		de la matriz producto],
277		vamos a multiplicar segunda fila [de la matriz A]
278		por primera columna [de la matriz inversa] sería $2x+5z$.
279		Y el último elemento [de la matriz producto],
280		pues esta fila [segunda fila de la matriz A]
281		por la segunda columna [de la matriz inversa], sería $2x+5t$,
282		bueno y eso [la matriz producto],
283		tengo la condición de que es igual a la matriz identidad.

284	E2:	[E2 comenta que en el último elemento no es $2x+5t$]
285		Pero debe ser $2y+5t$.
286	Aly:	Tienes razón son $2y+5t$.
287		Bueno y como tenemos esta igualdad
288		[la matriz producto igual a la matriz identidad],
289		entonces al igualar elemento a elemento voy a tener cuatro ecuaciones
290		con cuatro incógnitas,
291		cómo no son muy complicadas pues más o menos se resuelven fácil,
292		vamos a verlo, entonces pues nada,
293		ese sistema que sale es el que hay que resolver y es el que hay que hacer.
294		$3x+7z=1$, $3y+7t=0$, $2x+5z=0$ y la otra $2y+5t=1$,
295		si os fijáis en las cuatro ecuaciones no están todas mezcladas,
296		¿qué observáis aquí?
297	E4:	Que hay dos y dos.
298	Aly:	La primera con la tercera son solamente con x y z ,
299		luego son solamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,
300		fácil de hacer y la segunda y la cuarta sólo tienen la y con la t ,
301		entonces también es fácil de hacer, no me voy a parar a calcular eso,
302		entonces nos da que la x vale 5, la otra -7 [en la primera fila],
303		la otra -2 y 3 [en la segunda fila],
304		por lo tanto la matriz inversa,
305		que es la que buscábamos es ésta,
306		fijaros en acomodar bien el orden de los valores
307		tal como pusimos la x y la y en la primera fila
308		y luego la z y t [en la segunda fila].
309		Bueno pues no está demás que al final del cálculo de
310		esta matriz inversa se haga la comprobación,
311		es decir, ¿yo qué estaba buscando?
312		pues una matriz que cumpla esta condición de aquí eh
313		[A por A inversa igual a I],
314		que A por A a la menos uno me de la identidad,
315		pues es una cuenta tonta,
316		facilita [motivándolos a hacerla],
317		esto comprobar a qué es igual A por A a la menos uno eh,
318		si les da tiempo en un examen yo lo haría eh.
319		Bueno pues sería 3, 7, 2, 5 [Aly anota la matriz A en la pizarra]
320		por esta que acabamos de encontrar 5, -7, -2, 3
321		[Aly escribe la matriz A inversa],
322		pues venga vamos a multiplicar,
323		vamos a ver, primera fila [de la matriz A]
324		por primera columna [de la matriz A inversa],
325		sería 3 por 5, 15 y -2 por 7 son -14, entonces 15-14 es 1
326		[Aly anota el 1 en el elemento correspondiente a la primera fila
327		primera columna de la matriz producto],
328		luego sería segundo elemento, primera fila por segunda columna
329		sería 3 por -7 más 7 por 3 pero eso sería 0
330		[Aly anota el 0 en el elemento correspondiente a la primera fila
331		segunda columna], se anula.

332	Ahora sería 2 por 5 más 5 por -2
333	[para el elemento correspondiente a la segunda fila primera columna
334	de la matriz producto],
335	pero esto también se anula es 0
336	[Aly anota el 0 en el elemento correspondiente
337	a la segunda fila primera columna].
338	Ahora el último elemento sería 2 por -7 y 5 por 3,
339	entonces son -14+15 es 1
340	[Aly anota el 1 en el elemento correspondiente a la segunda fila
341	segunda columna].
342	Y ven que es la matriz identidad,
343	entonces bueno es una matriz facilita
344	y pueden comprobar si lo hicieron bien.
345	Imponiendo siempre esta condición que A por A inversa
346	es la matriz identidad y ya está.
347	Segunda forma es el método que acabo de repartirles en la fotocopia, eh.
348	Bueno vamos a empezar para ver que simplemente
349	eso que hemos hecho de hacer cero en las matrices
350	pues también tiene una aplicación en el caso,
351	para calcular la matriz inversa vale.
352	Ese que vimos ahora es el primer método
353	y el que veremos ahora se llama método de Gauss-Jordán
354	y se conoce simplemente como el método de Gauss.
355	Entonces segundo método de cálculo de la matriz inversa,
356	esto ponen en Internet método de Gauss-Jordán
357	y ahí lo tenéis eh, facilito.
358	Nos queda todavía y eso ya lo veremos en el siguiente tema,
359	el tercer método de cálculo de la matriz inversa
360	que es usando el determinante,
361	cuando sea el siguiente tema pues ya lo vemos eh,
362	y bueno pues ya os lo explicaré.
363	Bueno venga vamos a leerlo [de la fotocopia que les proporcionó]
364	y luego hacemos el ejemplo.
365	Este método consiste en colocar junto a la matriz de partida,
366	la matriz identidad, eso de junto ¿qué significa?
367	Pues lo voy haciendo en el ejemplo que vienen ahí [en la fotocopia],
368	nos dan la matriz siguiente 2, 1, -2 [en la primera fila],
369	luego 1, 1, -2 [en la segunda fila] y -1, 0, 1 [en la tercera fila]
370	y me piden calcular la inversa.
371	En este caso ya es una matriz de 3x3, de orden 3x3,
372	ya es un poquito más complicada que la de antes,
373	bueno el método ¿en qué consiste?
374	Pues se coloca la matriz A tal y como me la dan
375	[Aly anota los elementos de la matriz A]
376	y separado con una línea vertical ponemos la matriz identidad
377	del orden que corresponde en este caso de orden 3x3, vale,
378	entonces sería 1, 0, 0 [primera fila] luego 0, 1, 0 [en la segunda fila]
379	y 0, 0, 1 [en la tercera fila]

380		y lo único que ya sabemos de ir haciendo son
381		transformaciones elementales para ir haciendo ceros en esa matriz,
382		pues tengo que ir haciendo transformaciones elementales
383		para hacer ceros en los elementos por debajo
384		y por encima de la diagonal de la matriz A
385		y toda la diagonal me tienen que quedar unos,
386		es decir, vamos a ir haciendo transformaciones elementales
387		del tipo del que ya sabemos,
388		entonces tenemos que hacer esas transformaciones elementales
389		para conseguir eso,
390		que los elementos por debajo y por encima de la diagonal de la matriz A
391		sean ceros y toda la diagonal me tienen que quedar unos,
392		al mismo tiempo que hacemos todas las transformaciones a la matriz A
393		también hay que hacérselas a la matriz identidad que tenemos al lado.
394		[Aly voltea a ver a E2 y por la cara que tiene le dice]
395		ya se que no te gusta este método pero esto es lo que hay.
396	E2:	No, no [negando que no le gusta].
397	Aly:	Bueno pues entonces está matriz de aquí [la matriz identidad],
398		también va a sufrir esas transformaciones por lo cual voy a llegar
399		a que aquí [donde está colocada la matriz A]
400		me va a quedar la matriz identidad y aquí
401		[donde está colocada la matriz identidad] la matriz inversa, vale,
402		entonces eso es lo que haremos,
403		y estoy en la obligación de contarlo eh.
404		Bueno pues ahí [en la fotocopia] tenéis las transformaciones
405		que se han hecho.
406		[La matriz A es 2,1,-2 en la primera fila; 1,1,-2 en la segunda fila
407		y -1,0,1 en la tercera fila y aparecen las transformaciones elementales
408		para llegar a que la matriz inversa de A es 1,-1,0 en la primera fila;
409		1,0,2 en la segunda fila y 1,-1,1 en la tercera fila].
410		Ahí explica un poquito de las transformaciones,
411		sustituir una fila por ella multiplicada por una constante
412		como lo que hacemos para triangular una matriz
413		o sustituir una fila como combinación de ella y otras,
414		es decir, fila dos más 2 veces la fila tres, por ejemplo, vale.
415		Bueno tal como aparece ahí en la fotocopia,
416		lo primero que se ha hecho ahí es hacer 0 aquí
417		[el elemento de la primera fila segunda columna
418		y primera fila tercera columna de la matriz A],
419		fijaros en la transformación primera a ver si se lee bien [en la fotocopia]
420		o sino hay que ponerlo un poquito más grande,
421		Es fila 1 menos fila 2, vale.
422		En la primera transformación que hay ahí,
423		es a la fila 1 le resto la fila 2, ¿por qué?
424		pues porque si os fijáis este elemento es el mismo que éste
425		y éste también es el mismo [Aly señala el 1 y el -2 que aparecen
426		tanto en la primera como en la segunda fila de la matriz A],
427		con lo cual si aquí a la fila 1 le resto ésta [la fila 2]

428		ya quedan esos dos ceros [el elemento de la primera fila
429		segunda columna y primera fila tercera columna
430		de la matriz A transformada],
431		entonces a ver nos queda como,
432		venga vamos a ir haciendo,
433		la fila 1 es la que sufre los cambios en este caso, en este cambio.
434		[Aly empieza a hacer la transformación elemental].
435		La fila 1 ¿cómo nos va a quedar?
436		si a 2 le quito 1 me queda 1,
437		a continuación 1 menos 1, 0, luego -2 menos -2 es 0
438		y la matriz identidad que está aquí al lado también
439		hay que hacerle esos mismos cambios,
440		entonces 1 menos 0 es 1, 0 menos 1 es -1 y 0 menos 0 que es 0, vale,
441		[con esto termina la transformación a la primera fila].
442		La fila 2 y la fila 3 las anotamos como están, sería 1,1,-2,0,1,0
443		[los cuales constituyen toda la segunda fila],
444		luego la tercera fila -1,0,1,0,0,1 [los cuales constituyen
445		toda la tercera fila], vale,
446		¿qué hemos hecho con este cambio?
447		pues hemos hecho dos ceros en la fila 1.
448		Ahora el segundo cambio que se hace ahí,
449		bueno está vez son dos cambios, para anular este 1
450		[el de la segunda fila primera columna]
451		y este -1 [de la tercera fila primera columna],
452		¿qué haríamos para eliminar el 1?
453		Pues a la fila 2 restarle la fila 1, sino se ve bien en la fotocopia
454		por favor anotarle bien eso,
455		bueno y ¿qué otra transformación haríamos?,
456		a la fila 3 ¿qué cambios le haríamos?
457		[Y para anular el -1 de la tercera fila primera columna].
458	E2:	Fila 3 más fila 1.
459	Aly:	Si muy bien fila 3 más fila 1,
460		veis que no es nada distinto a lo que ya sabemos eh.
461		[Aly va a hacer las dos transformaciones elementales]
462		venga pues la primera fila en este caso no se toca
463		entonces la anotamos igual 1,0,0,1,-1,0, venga
464		¿cómo queda la fila 2?
465		1 menos 1, 0; luego 1 menos 0, 1; enseguida -2 menos 0
466		pues nada, queda igual, -2.
467		Cuidado con esto 0 menos 1, -1
468		es que muchas de las veces vemos un 0 y decimos eso no varía,
469		pero si varía porque arriba
470		[en la primera fila] hay un 1,
471		bueno ahora 1 menos -1 sería 2 y luego 0 menos 0, 0
472		[con esto termina la transformación a la segunda fila].
473		La fila 3 es sumarle la fila 1, -1 más 1 es 0; 0 más 0 es 0; 1 más 0, 1;
474		0 más 1, 1; 0 más -1, -1 y 1 más 0 es 1,
475		así nos va a quedar la tercera fila

476		[con esto termina la transformación a la tercera fila].
477		¿Qué otra transformación haríamos ahora?
478		Fijaros que ya esto nos va quedando bastante bien,
479		[Ya se ve la diagonal de unos y por debajo los ceros,
480		sólo falta hacer ceros por encima de la diagonal
481		en particular el -2 que está en la segunda fila tercera columna],
482		recordar que yo quiero que me quede la matriz identidad,
483		entonces ya sólo me falta convertir en 0 ese -2
484		[que está en la segunda fila tercera columna].
485		¿Cómo podemos hacer mediante una transformación de filas
486		que ese -2 se convierta en 0?
487	E11:	Sumándole dos veces la fila 3.
488	Aly:	Si muy bien sumándole dos veces la fila 3,
489		que no es nada nuevo, es lo que ya sabéis.
490		Bueno pues venga, entonces ahí el último cambio que hay que hacer
491		es fila 2 más 2 veces la fila 3,
492		¿importa trabajar ahora con la fila 1?
493		¿se os ocurriría trabajar aquí con la fila 1 [para convertir el -2]?
494	E2:	No.
495	Aly:	No porque sino el 0 que ya teníamos
496		[en la primera fila tercera columna] me lo cargo,
497		la desbarataríamos otra vez eh,
498		entonces no me serviría ese cambio.
499		Me serviría éste [fila 2 más 2 veces la fila 3].
500		Entonces venga, esto sólo afectará la fila 2.
501		A la fila 1 y la fila 3 las puedo anotar tal cual.
502		Pues venga anotamos la fila 1 como estaba 1,0,0,1,-1,0,
503		también vamos a escribir la fila 3 como estaba
504		y dejamos el espacio para la fila 2, la fila 3 es 0,0,1,1,-1,1.
505		Pues venga vamos a hacer ese cambio en la fila 2,
506		a la fila 2 le sumo 2 veces la tercera,
507		entonces fijaros que el 0 y el 1 tampoco cambian
508		[pues al sumarles 0 no les afecta],
509		ahora el -2 si le sumo 2 veces este 1 [de la tercera fila tercera columna]
510		pues me queda 0, que es justamente lo que quiero,
511		y los siguientes términos me quedan -1 más 2 veces 1 es 1,
512		el siguiente elemento 2 menos 2 ¿no?, 0 y el último 0 más 2 es 2.
513		Entonces hemos conseguido obtener la matriz identidad
514		y la de la derecha es la matriz inversa,
515		es la que buscábamos,
516		pues ahí está,
517		entonces es otro método que no es nada nuevo
518		y son solamente transformaciones a filas para lograr ceros
519		excepto en la diagonal [y poder obtener la matriz identidad].
520		Pero vamos a ver, que sucedería si ya hubiéramos obtenido los ceros
521		y en la diagonal en lugar de tener 1,1,1, tuviéramos 1,3,1
522		¿qué hacemos para quitar de aquí ese 3?
523		¿qué se os ocurriría? ¿nada?

524		si yo quiero conseguir un 1 y tengo un 3
525		¿qué hago para quitar de ahí eso? ¿qué haría?
526	E11:	Dividir entre 3.
527	Aly:	Dividir toda la fila [en la que se encuentra el 3] entre tres
528		o multiplicar por un tercio que es lo mismo,
529		bueno ya digo que este no es el caso pero cuando pase eso
530		pues ya sabéis lo que hay que hacer,
531		dividir toda la fila entera por un número
532		o multiplicar toda la fila entera por un número,
533		eso está perfectamente definido, vale.
534		Bueno en realidad la teoría en la fotocopia está al inicio
535		y ya lo demás son los ejemplos, vale.
536		El segundo ejemplo que viene ahí está muy clarito y está resuelto
537		y están muy bien indicadas las transformaciones elementales.
538		A ver en el ejemplo dos, ya al final tenemos en la diagonal 1,-1,1
539		y por encima y por debajo de la diagonal 0,
540		esa ya se parece a la matriz identidad pero en la diagonal,
541		donde está el -1 debe ser 1,
542		entonces ¿qué se debe hacer para que me quede 1?
543	E2:	Multiplicar la fila [donde está el -1] por -1.
544	Aly:	Muy bien se multiplica toda la fila por -1 y ya me queda el 1 que quiero,
545		y ahí lo tienen en la fotocopia eh,
546		llegamos a la identidad [matriz],
547		bueno como veis esto no es nada del otro mundo ni nada raro.
548		Bueno fijaros en el libro en la página 58,
549		vamos a leer el texto que viene ahí muy chiquito,
550		donde dice:
551		“Matriz inversa de otra.
552		Puesto que en el conjunto de las matrices de orden $n \times n$,
553		-claro deben ser matrices cuadradas-
554		está definida la multiplicación, (es decir, el producto de dos matrices
555		cuadradas de orden n es otra matriz cuadrada de orden n), y además
556		existe matriz unidad, parece obligado hacerse la siguiente pregunta:
557		¿toda matriz cuadrada tiene inversa?”
558		¿Cuál es la respuesta?
559	Es:	No.
560	Aly:	En general todas no eh, en algunos casos, algunas veces.
561		“Es decir, dada una matriz cuadrada, A ,
562		¿existe otra, A a la menos 1, tal que A por A a la menos uno
563		es igual a A a la menos uno por A igual a la matriz unidad?”
564		Es lo que yo les decía antes, ¿lo veis?
565		E2, veis cómo sólo viene indicada la condición que debe cumplir
566		una matriz inversa.
567	E2:	No pero ahí viene una [matriz inversa].
568	Aly:	Si, pero ya te la dan y sólo te piden que compruebes la condición,
569		no que calcules la inversa.
570		El ejemplo que viene ahí en el libro está bien para hacerla
571		por el método de Gauss eh, luego la vamos a hacer,

572		vamos a hacer primero una cosita.
573		Vamos a hacer un ejercicio teórico de la página 72 ejercicio 41,
574		es muy importante porque algunas veces presuponemos
575		estas propiedades y la verdad es que en matrices fallan un poco.
576	E3:	¿41?
577	Aly:	Si ejercicio 41, pone cuestiones teóricas,
578		luego vamos a calcular esa inversa eh
579		[la que dijo anteriormente que resolvería con el método de Gauss]
580		es que estamos viendo el producto de matrices,
581		por eso hemos visto la matriz unidad, la inversa, etc.
582		Entonces ejercicio 41 dice:
583		“Justifica por qué no es cierta la igualdad:
584		$(A+B).(A-B)=A$ al cuadrado + B al cuadrado cuando A y B
585		son dos matrices cualesquiera”
586		Es una igualdad que todo mundo se sabe muy bien en los números reales,
587		¿verdad?, es la de A más B por A menos B igual a A al cuadrado
588		menos B al cuadrado,
589		pero aquí en matrices es diferente, el igual no se cumple,
590		de la misma manera tampoco se cumple la propiedad de A más B todo
591		eso al cuadrado, esto recordáis a qué es igual, ¿no?,
592		al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo
593		más el segundo al cuadrado,
594		esto en números reales es cierto pero esto en matrices no se cumple eh.
595		¿Qué pasa por ahí?
596		[Algunos estudiantes están hablando indisciplinadamente].
597	E3:	Nada.
598	Aly:	Vale, bueno pues sigamos A menos B todo eso al cuadrado
599		¿a qué sería igual? pues al cuadrado del primero
600		menos el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo,
601		pues en las matrices tampoco es verdad.
602		Es decir, si alguien tiene la tentación alguna vez de aplicar esto
603		en matrices, que sepan que eso no va a ser verdad eh.
604		¿Y por qué no es verdad?
605		¿qué creéis que es lo que falla en las matrices,
606		que no corresponde a lo que se tenía siempre?,
607		¿qué propiedad puede ser la que molesta?
608	E3:	La que no se cumple.
609	Aly:	Si, pero cuál es el nombre.
610	E2:	La conmutativa.
611	Aly:	La conmutativa pues A por B no es lo mismo que B por A ,
612		en las matrices no funciona,
613		entonces fijaros en el ejercicio 41,
614		¿cómo se hace A más B y eso por B menos A ?
615		si tenemos la propiedad distributiva podemos empezar
616		a multiplicar A por A , ¿qué más?
617		menos A por B , más B por A , menos B por B , vale,
618		con los números ¿qué haríamos?
619		Pues diríamos menos A por B y más B por A se anulan,

620		pero es que aquí estos no son números, son matrices,
621		¿cuál es el problema aquí que hay?
622		Pues que el producto de A por B no es el mismo que el de B por A,
623		al no coincidir, esos dos términos no se me van,
624		no se anulan y al no irse pues la igualdad que se daba con los números
625		en matrices no se da.
626		Entonces lo más que podemos reducir el resultado del ejercicio 41
627		es A al cuadrado menos A por B, más B por A, más B al cuadrado,
628		pero no se reduce mucho, pues parece más larga.
629		Entonces que sepáis que esas propiedades en general no se cumplen
630		en matrices y la culpable de que no se cumplan es que el producto
631		de matrices no es conmutativo, eso es lo que hay.
632		Mucho cuidado cuando hagáis esto con matrices eh,
633		pues luego corren mucho y no lo ven.
634		Entonces por eso quería hacer este ejercicio para que veáis
635		que estas propiedades no se cumplen, eso es muy importante.
636		Bueno ahora sí, vamos a hacer la inversa que está ahí en el libro,
637		es en la página 58, hay que encontrar la inversa de esa matriz
638		con el método de Gauss, la matriz es de 3x3, 1,-1,-1 [en la primera fila],
639		-1,0,3 [en la segunda fila], -2,5,-3 [en la tercera fila].
640	Es:	Pero ya está hecho.
641	Aly:	Pero ahí sólo les piden comprobar que la matriz inversa
642		que también se las dan,
643		cumple con que A por A inversa es igual a A inversa por A
644		y eso igual a la matriz identidad.
645		Aquí lo que quiero es que encuentren esa matriz inversa que viene ahí,
646		pero que la calculen, con el método de Gauss,
647		que vean los pasos para llegar a eso
648		¿tú cres que en un examen de selectividad te van
649		a poner la matriz inversa al lado como aparece en el libro?
650		Pues no, te dirán calcula la inversa,
651		entonces calcular la inversa con el método que queráis,
652		no importa,
653		lo que si importa es calcular bien los elementos.
654		Hay que empezar a hacer ceros por debajo de la diagonal
655		y luego hacer unos en la diagonal
656		y posteriormente hacer ceros por encima de la diagonal.
657		Bueno pues venga, intentar hacerlo que aún quedan 10 minutitos
658		[faltan 10 minutos para que termine la clase].
659		Voy a anotar en la pizarra los deberes, de la página 60,
660		el 9 hay que calcular la inversa de matrices de 2x2,
661		luego en la página 71 el 18 es de calcular A al cuadrado,
662		A al cubo y así.
663		[Aly se acerca a E2 para hablar sobre un fallo de un ejercicio
664		que ella le había revisado en casa, mientras los demás estudiantes
665		siguen intentando calcular la matriz inversa].
666		Tienen que tener mucho cuidado en hacer bien las cuentas,
667		los signos y todo.

668		En la fotocopia que les dí vienen otros ejemplos más
669		que podéis hacer en casa.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la quinta clase grabada de la profesora Aly del viernes 17/10/08.

Resumen: Espacios vectoriales. Propiedades, Combinación lineal de vectores, linealmente dependientes/independientes. Ejemplos para probar la dependencia e independencia lineal. Notas sobre este tema.

L		Transcripción
1	Aly:	Ya os digo que si hoy no da tiempo de revisar los tres ejercicios
2		que dejé para casa, lo revisaremos luego.
3		Venga, les voy a contar un poquito,
4		lo primero va a ser un poco rollo pero hay que verlo eh,
5		un poquito de teoría de Espacios Vectoriales,
6		sobre las propiedades y a continuación ya el rango de la matriz,
7		¿de acuerdo?
8		Así que venga, lo tenéis también en el libro a partir de la página 61.
9		Bueno Espacios Vectoriales,
10		bueno esta parte cuando lleguemos a los vectores,
11		lo volveremos a retomar,
12		pero ahora mismo para ver el rango de las matrices,
13		pues es necesario dar una pinceladita de las propiedades de los vectores,
14		así que hay que ir copiando eso.
15		[Aly invita a los estudiantes a que copien esos apuntes en sus cuadernos].
16		Bueno esto a ¿qué suena?,
17		¿A qué les suena eso de Espacios Vectoriales?
18	E1:	Al estudio de vectores.
19	Aly:	Hombre, claro lo de vectorial suena a vector ¿no?
20		Bueno pues a partir de ahí, a partir de la idea de vector
21		que todos tenemos en la mente,
22		los vectores directores en el plano, los vectores en el espacio.
23		Bueno pues a partir de la idea de vector y de dos operaciones,
24		se define lo que es la idea de Espacio Vectorial.
25		¿Qué es un Espacio Vectorial?
26		Bueno pues digamos que es un conjunto,
27		en este caso vamos a hablar de vectores,
28		pero no tienen que ser sólo vectores pues esto es ampliable,
29		por ejemplo a un conjunto de matrices, vale.
30		Entonces ya os digo que se definen dos operaciones en un conjunto
31		de vectores,
32		además una operación interna y una operación externa,
33		la operación interna que se define sería la suma,
34		suma de vectores, a algunos os suena ya, ¿no?,
35		la suma de dos vectores.
36		Y la operación externa, la operación externa que se define ahí,
37		sería el producto de un número real $[a]$ por un vector.
38		Aquí si quieren ponemos $u+v$
39		[Aly anota las letras con sus respectivas flechas para indicar
40		que son vectores].
41		Ya os digo que tanto la operación interna como la externa
42		cumplen una serie de propiedades, por ejemplo así rapidito.

43		Propiedades de la operación interna,
44		pues la primer propiedad que se cumple es la asociativa,
45		es decir, si yo tengo tres vectores sumando
46		y asocio los dos primeros es lo mismo que si asocio los dos últimos,
47		resulta que el resultado me da igual entonces
48		esa es la propiedad asociativa.
49		Tenemos también la propiedad conmutativa para la suma,
50		da lo mismo que sume los vectores u más v que v más u .
51		También tenemos el elemento nulo que se le suma a cualquier vector,
52		es el elemento neutro,
53		el vector nulo,
54		que en este caso actúa de esta manera,
55		el vector u más el vector cero da el mismo vector u .
56		Y por último el elemento opuesto,
57		si tengo un vector u más su vector opuesto $[-u]$ me da el vector nulo.
58		Y en la operación externa el número real a multiplicado
59		por el vector u es una operación definida para los vectores,
60		pero en esta operación externa también se cumplen otras propiedades.
61		Las propiedades de la operación interna ya les suenan
62		porque las vimos para matrices, para la suma de matrices,
63		la propiedad asociativa, la conmutativa, el inverso y el opuesto,
64		pues eso mismo se cumple para las matrices.
65	E11:	Pero en el elemento opuesto, porque en el libro dice:
66		“Todo vector v tiene un opuesto, $-v$: $v+(-v)=0$ ”
67		$[v, -v]$ y 0 vectores].
68	Aly:	Si es lo mismo,
69		lo único que dice es que todo vector tiene un opuesto,
70		que es el mismo pero cambiado de signo.
71		E11 dice que por qué en el libro dice eso,
72		esos dos puntos que aparecen ahí después del $-v$ es para indicar
73		lo que sigue que $v+(-v)=0$ y no que $-v$ sea todo eso,
74		así que bueno, de acuerdo, cuidadito con los dos puntos eh.
75		Bueno pues las propiedades que tenemos definidas
76		en la operación externa,
77		que es el producto con números
78		que también se les llama escalares,
79		bueno la primera que tenemos ahí es la de a por b entre paréntesis,
80		que son escalares, por el vector v ,
81		sería igual a a por entre paréntesis b por el vector v ,
82		eso es una asociativa, lo que pasa es asociando un poquito los números.
83		Luego también tenemos esta que es una distributiva
84		que tenemos a más b entre paréntesis por el vector v ,
85		¿A qué puede ser igual esto?
86		Si es una propiedad distributiva respecto a la suma
87		pues sería a por el vector v , más b por el vector v .
88		También tenemos otra propiedad distributiva,
89		esta que tenemos aquí a por,
90		entre paréntesis los dos vectores u más v ,

91		¿A qué es igual eso?
92		Vean que hay un solo número fuera multiplicando la suma de vectores.
93	E2:	A a por u [u vector] más a por v [v vector].
94	Aly:	Muy bien, me da a por u más a por v.
95		Y tenemos por último el número 1 como escalar
96		que al multiplicarlo por el vector v me da el mismo vector v,
97		esta también la vimos para las matrices,
98		Que una matriz cualquiera al multiplicarla por otra matriz
99		me daba la misma matriz,
100		bueno no una matriz cualquiera,
101		tiene que ser una matriz cuadrada,
102		y cuál es esa matriz, pues la matriz identidad, vale.
103		Entonces hay una serie de propiedades que ya ven
104		que en realidad parecen las mismas eh.
105		Bueno pues en este caso para vectores
106		aunque también se cumplen para matrices,
107		hay que ver que hay dos operaciones una operación interna
108		y otra operación externa y que cumplen estas propiedades,
109		se dice que tienen una estructura de Espacio Vectorial, vale,
110		eso para que lo tengáis ahí [para que lo tomen en cuenta].
111		Bueno lo siguiente que tenemos que ver es a qué se le llama
112		una n-upla de los números reales.
113		¿A qué llamamos una n-upla?
114		Que suena raro eso de n-upla de los números reales.
115		Bueno pues una n-upla no es más que la generalización
116		de lo que ya conocemos de un par ordenado o de una terna,
117		por ejemplo para $n=2$, ¿la n-upla cuál sería?
118		Pues sería un par ordenado por ejemplo (3,4),
119		ya saben que esto significa un punto o un vector en el plano,
120		en $\mathbb{R}^2$, ¿de acuerdo?
121		Fijaros que es un par pero esta ordenado,
122		no es lo mismo que (4,3),
123		entonces se debe seguir cierto orden.
124		Si n vale 3, ¿qué es lo que me sale?
125		Pues una terna ¿qué sería cuál terna?
126		Pues por ejemplo (3, -7, 1),
127		en el sistema ya de tres dimensiones
128		que corresponden a la coordenada x,
129		la coordenada y y la coordenada z, vale.
130		[Aly señala cada uno de los números en ese orden, 3, -7, 1
131		al momento que va diciendo x, y, y z respectivamente].
132		Y en el par ordenado pues el primer número representa x
133		y el segundo y.
134		Esto tiene relación con lo que vamos a ver más adelante
135		Y si n es cuatro [$n=4$] se llama cuaterna.
136	E1:	¿Y cuál es su dimensión?
137	Aly:	Pues en realidad no hay pues nosotros conocemos sólo hasta $\mathbb{R}^3$
138		[el espacio].

139		Pero en la mente matemática,
140		en la imaginación puede haber cualquiera,
141		no solo cuatro, puede haber 10, o quince mil, vale.
142		Entonces una cuaterna, por ejemplo (3, 0, -1, 10), ¿de acuerdo?
143		Y ¿por qué no puede haber con 5 ó con 6?
144		Pues igual [Aly se refiere a que no hay una dimensión en la realidad,
145		sino sólo en la imaginación].
146		Entonces una n-upla, ¿qué es lo que es?
147		Pues n números,
148		en este caso dos [Aly señala el par ordenado],
149		en este caso tres [Aly señala la terna]
150		y en este caso cuatro [Aly señala la cuaterna].
151		Entonces son n números dados en un cierto orden,
152		es importante eso eh, el orden.
153		Entonces una n-upla son n números reales ordenados,
154		pues estos representan un sistema de referencia,
155		igual que en el plano,
156		es más cómodo poner en R dos, en el plano,
157		si ponemos un punto por ejemplo el 2 en x y 3 en y
158		[Aly dibuja el plano cartesiano y marca esas coordenadas
159		sobre los ejes x y y],
160		ya sabemos perfectamente en ese sistema de referencia,
161		en el plano qué coordenadas le corresponden a ese punto,
162		¿cuáles serían?
163		Pues es el punto (2,3)
164		[Aly anota estas coordenadas sobre este punto en el plano],
165		bueno pues a esto se le llama par,
166		generalizando se le llamaría terna, cuaterna
167		o una n-upla en el caso que sean n.
168		Bueno pues vamos a la combinación lineal de vectores,
169		vamos a ver qué es una combinación lineal de vectores
170		y ahora nos vamos a meter un poquito más en lo que importa más.
171		¿Puedo borrar la pizarra?
172		Bueno si no contesta nadie yo borro eh.
173	E3:	No, lo que acabas de poner no.
174	Aly:	Ok.
175		Bueno ¿A qué llamaremos combinación lineal de vectores?
176		Eso lo tenéis en el libro, vale.
177		Pero bueno yo les anotaré aquí algo [en la pizarra].
178		Venga, ¿A qué llamamos combinación lineal de vectores?
179		Lo mismo que para Espacio Vectorial (E.V.),
180		lo voy a simplificar como c.l. [combinación lineal].
181		¿A qué se le llama combinación lineal de vectores?
182		Pues es muy fácil,
183		dados un conjunto de vectores v uno, v dos, v tres ... hasta v ene,
184		es decir, los que sean,
185		un conjunto de vectores,
186		y también n números reales,

187		a sub uno, a sub dos, a sub tres... hasta a sub n
188		pertenecientes a $\mathbb{R}$ [los números Reales],
189		se llama combinación lineal ¿a qué?
190		Pues a una expresión del siguiente tipo,
191		[Aly Anota en la pizarra].
192		Se llama combinación lineal de dichos vectores
193		a cualquier expresión de tipo a sub uno por v uno,
194		(es decir, un número por un vector)
195		más a sub dos por v dos
196		(que es el segundo número por el segundo vector)
197		más a sub tres por v tres más... así hasta más a sub n v ene, vale.
198		Bueno pues hay que copiarlo.
199		Por ejemplo, si yo digo el vector (3,2,7),
200		en función de estos tres vectores (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1),
201		que me imagino que les sonarán,
202		pues estos tres vectores son muy famosos.
203		¿Les suenan esos vectores? [Los últimos tres].
204		¿De algo?
205	E1:	Vectores unitarios.
206	Aly:	Bueno vectores unitarios son,
207		claro digamos la base canónica en el espacio digamos en el eje x,
208		en el eje y y en el eje z.
209		[Aly dibuja los tres ejes haciendo alusión al espacio].
210		Y el primero [1,0,0] va a ser el elemento unidad
211		que me marca aquí en la x,
212		el que marca la dirección positiva,
213		el segundo [0,1,0] el que marca la dirección positiva en el eje y
214		y el otro [0,0,1] el que marca la dirección positiva en el eje z,
215		eso se llama la base canónica.
216		No es necesario tanto nombre, pero bueno yo lo digo.
217		Esta es la base canónica, igualmente en el plano
218		¿qué va a ser la base canónica?
219		Pues igualmente el vector (1,0) y el (0,1)
220		[Aly dibuja el cada vector sobre cada eje, x y y respectivamente],
221		y cualquier vector que yo ponga
222		[Aly dibuja un vector, aproximadamente a 45 grados,
223		entre el eje x y y],
224		pues lo puedo expresar en función de esos dos,
225		¿cómo?
226		Pues mediante una combinación lineal.
227		Entonces la pregunta es, dado este vector
228		[Aly señala el vector (3,2,7)],
229		¿Lo podemos expresar en función de estos tres
230		[(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)]
231		como combinación lineal de esos tres vectores?
232		Pues tengo que encontrar unos números de tal forma
233		que al vector [(3,2,7)] lo pueda escribir como un número
234		por el primer vector

235		[Aly señala la fórmula que había escrito: a sub uno por v uno,
236		más a sub dos por v dos, más a sub tres por v tres más...
237		así hasta más a sub n por v ene]
238		más un numerito por el segundo vector que es este
239		[Aly señala el vector (0,1,0)],
240		más un numerito por el tercer vector que es este
241		[Aly señala el vector (0,1,0)]
242		Bueno pues vamos a escribirlo.
243		Sería el vector (3,2,7) sería igual a un número
244		[Aly pone una raya, indicando que ahí irá un número]
245		por el vector (1,0,0);
246		más otro número [Aly pone una raya, indicando que ahí irá un número]
247		por el vector (0,1,0)
248		más otro número [Aly pone una raya, indicando que ahí irá un número]
249		por el vector (0,0,1).
250	E2:	Entonces ahí irían los números del vector.
251	Aly:	Exactamente, qué número multiplicado por (1,0,0)
252		me va a dar este 3
253		[Aly señala el 3 que corresponde a la primera coordenada
254		del vector (3,2,7)].
255	Es:	3.
256	Aly:	Eso es el 3 [Aly lo anota en la primera raya que había dejado
257		para indicar que iría el primer numero],
258		Ahora ¿cuál es el segundo escalar que ocupo en esa combinación lineal?,
259		¿cuál va a ser?
260		El 2 [Aly lo anota en la segunda raya que había dejado para el número].
261		Y por último el 7 [Aly lo anota en la tercera raya que había dejado
262		para el número].
263		A esto de aquí [Aly señala todos los sumandos] es a lo que se le llama
264		combinación lineal, vale,
265		es un número por un vector;
266		más otro número por el segundo vector;
267		más otro número por el tercer vector.
268		¿De acuerdo?
269		Esto es a lo que llamamos combinación lineal (c.l.) ¿de acuerdo?
270		Bueno vamos a ver a qué se le llama conjunto de vectores
271		linealmente dependiente.
272		Bueno pues tenemos que un conjunto de vectores
273		desde v uno, v dos,..., hasta v ene
274		se dice que son linealmente dependientes (l.d.),
275		linealmente dependientes ¿cómo lo pondremos más cortito?
276		Pues l.d. vale, entre ellos,
277		cuando alguno de ellos se puede expresar,
278		digamos en función de los otros como c.l. de los demás.
279		En el ejemplo anterior hemos visto tres vectores
280		que son la base canónica que entre ellos son independientes,
281		es decir, que yo no puedo expresar de ninguna forma alguno de ellos
282		en función de los otros dos,

283	pero con el otro con el $(3,2,7)$, ese,
284	si lo incluyo además con la base canónica,
285	es decir, estos cuatro juntos
286	[Aly señala al vector $(3,2,7)$ junto con los otros tres de la base canónica]
287	sería linealmente dependiente ¿por qué?
288	Pues porque este $[(3,2,7)]$ se puede expresar como combinación lineal
289	de los otros tres, de los demás, ¿de acuerdo?
290	Entonces ya tenemos un ejemplo,
291	este conjunto de vectores,
292	ponemos como conjunto de vectores
293	a los vectores $(3,2,7)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y
294	¿cómo van a ser esos vectores?
295	Acabamos de ver que este vector $[(3,2,7)]$
296	se puede escribir como combinación lineal de los otros,
297	luego ese conjunto de vectores,
298	se dice que es un conjunto linealmente dependiente,
299	es decir, hay uno que no es independiente de los demás,
300	que es depende linealmente,
301	que lo podemos expresar,
302	como habíamos visto este $[(3,2,7)]$ ¿de acuerdo?
303	Bueno pues a esto se le llama ser linealmente dependiente,
304	ahora lo otro es ser linealmente independiente.
305	Bueno ¿cuándo decimos que un conjunto de vectores
306	es linealmente independiente?
307	Bueno pues un conjunto de vectores
308	u sub uno, u sub dos, u sub tres...hasta u sub ene,
309	se dice que son linealmente independiente si ninguno de ellos
310	(y esto es importante para lo que viene después,
311	para el rango de matrices)
312	se puede expresar como combinación lineal de los demás,
313	es decir, por mucho que lo intente,
314	ahí ninguno de ellos depende de los otros,
315	porque cada uno de ellos es independiente,
316	el ejemplo más sencillo que tenemos,
317	pues yo había puesto antes,
318	el de la base canónica en $\mathbb{R}^2$, en el plano
319	[Aly dibuja a los dos ejes x y y y un vector sobre cada eje],
320	este es el vector $(1,0)$ [Aly lo señala en el plano que dibujó]
321	y el otro es el $(0,1)$ [Aly también lo señala y anota las coordenadas
322	de cada uno sobre el plano]
323	Bueno pues como ejemplo el conjunto del $(1,0)$ y $(0,1)$.
324	¿Yo podré expresar el $(1,0)$ de alguna manera como combinación lineal
325	del otro vector, alguna vez?
326	Es decir, ¿de alguna manera puedo poner que $(1,0)$
327	es igual a un número a por $(0,1)$? $[(1,0)=a(0,1)]$.
328	¿Esto cómo se hace? ¿Cómo se opera esto?
329	¿Qué es lo que hay que intentar hacer aquí para resolver esto?,
330	es decir tengo al $(1,0)$ que deber ser igual a esto $[a(0,1)]$,

331	¿cómo se multiplica esto? [Aly señala la operación $a(0,1)$],
332	¿cómo multiplico un escalar por un vector?
333	Hemos visto que es coordenada a coordenada,
334	entonces a por 0 [Aly empieza a hacer el producto de $a(0,1)$]
335	sería 0 y a por 1 sería a, entonces tengo que $(1,0)$ es igual a $(0,a)$.
336	Entonces fijaros en la primera coordenada de este vector $[(1,0)]$
337	y la primera coordenada de este $[(0,a)]$.
338	¿Es posible que el 1 sea 0 alguna vez?
339	Pues para que esos dos vectores sean iguales,
340	la primera coordenada de uno debe ser igual a la primera coordenada
341	del otro y así también para la segunda coordenada.
342	Pero claro, ¿a qué llego aquí al igualar la primera coordenada
343	con la primera coordenada?
344	Que el 1 tendría que ser igual al 0 y esto no es posible
345	[Aly anota el símbolo matemático $!!!$,
346	para indicar que eso es una contradicción]
347	Eso es una contradicción, vale.
348	Luego, ¿eso qué me está diciendo?
349	Pues me está diciendo que eso es imposible,
350	que yo no puedo expresar este vector $[(1,0)]$,
351	como una combinación lineal de este otro $[(0,1)]$.
352	Por lo tanto eso es un conjunto de vectores linealmente independiente
353	$[\{(1,0), (0,1)\}]$.
354	Lo mismo pasaría con la base en $\mathbb{R}$ tres,
355	que son los conjuntos más fáciles de vectores
356	linealmente independientes.
357	Bueno pues a eso decimos que es ser linealmente independientes.
358	Vamos a ver otra cosa importante.
359	¿Y el vector cero, el vector nulo?
360	En el momento en que el vector nulo esté incluido
361	en un conjunto de vectores,
362	ese conjunto va a ser
363	¿linealmente independiente o será linealmente dependiente?
364	Fijaros que es el vector nulo eh.
365	A ver la terna, el vector nulo $(0,0,0)$,
366	vamos a trabajar en $\mathbb{R}$ tres,
367	es linealmente dependiente de cualquier conjunto de vectores
368	que yo tenga.
369	Imaginaros que tengo tres vectores,
370	vamos a ver, el $(1,0,0)$, el $(0,1,0)$ y el $(0,0,1)$, vale.
371	Yo estoy diciendo en este ejemplo que este vector,
372	el vector nulo,
373	es linealmente dependiente de cualquier conjunto de vectores,
374	en este caso de este conjunto de vectores
375	[el $(1,0,0)$, el $(0,1,0)$ y el $(0,0,1)$]
376	¿Es verdad? ¿Eso es verdad si o no?
377	Vamos a ver por qué.
378	El vector nulo $(0,0,0)$ es igual a un número [pone una raya]

379		por $(1,0,0)$ más otro número [pone otra raya]
380		por el segundo vector $(0,1,0)$ más otro número [pone otra raya]
381		por el tercer vector $(0,0,1)$.
382		¿Puedo hacer eso?
383	E4:	Si.
384	Aly:	¿Qué números pondríamos?
385	E4:	0.
386	Aly:	Claro 0 en cada caso.
387		[Aly se refiere a anotar 0 en cada raya que había dejado].
388		Y eso se puede hacer siempre.
389		Independientemente de quienes sean los vectores
390		[no tendrían que ser siempre $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$],
391		al poner por delante, $0,0,0$
392		[como escalares que multiplican a cada uno de los tres vectores],
393		se anula todo y me queda el vector nulo $(0,0,0)$.
394		El vector nulo es el que me va a ser que sea linealmente dependiente
395		¿De acuerdo?
396		Porque siempre lo puedo expresar como combinación lineal.
397		Esto también es importante para lo que viene luego en las matrices.
398		Bueno lo último que nos queda por ver de aquí,
399		es una propiedad que es ¿cuándo?,
400		¿cómo se averigua si un conjunto de vectores
401		es linealmente independiente?,
402		la condición necesaria y suficiente para comprobar
403		si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o no,
404		entonces, venga.
405		Propiedades, un conjunto de vectores u sub uno, u sub dos, u sub tres,
406		hasta u sub ene es linealmente independiente si y sólo si,
407		es decir, solamente si se cumple esto que voy a poner,
408		entonces si se cumple que ese conjunto de vectores es linealmente
409		independiente y al revés también,
410		si el conjunto de vectores es linealmente independiente
411		entonces se cumple lo que voy a escribir, que es una condición.
412		Bueno se dice que ese conjunto de vectores es linealmente independiente
413		si y sólo si para una combinación lineal como esta que voy a poner,
414		a sub uno por u sub uno más a sub dos por u sub dos,
415		más ... hasta a sub ene por u sub ene, todo eso igualado al vector nulo,
416		se cumple sólo si a sub uno es igual a a sub dos igual a a sub tres...
417		hasta igual a a sub ene y todos valen cero.
418		Esa es la condición en la que hay que fijarnos en un conjunto
419		de vectores para que sean linealmente independientes.
420		Lo vamos a ver con un ejemplo y todo.
421	E1:	Y si...
422	Aly:	¿Qué? Dime.
423	E1:	Si por ejemplo si a sub uno, a sub dos y así hasta a sub n,
424		no se parecen nada a lo de arriba.
425	Aly:	a sub uno es un número eh, a sub uno, a sub dos, así...
426		y los vectores son de tres [tres coordenadas en $\mathbb{R}$ tres]

427		o de cuatro de las que te den [coordenadas].
428	E1:	Pero a ver cómo te digo,
429		a ver por ejemplo en la matriz, tiene 1, 2, 3, en el otro 4,5,6.
430	Aly:	Y tú vez ahí una combinación lineal ¿verdad?
431	E1:	Si.
432	Aly:	Pues a eso voy yo,
433		espera un poco en cuanto ya estemos otra vez en matrices.
434		Bueno como dice E1, todo esto ¿por qué?
435		Porque es verdad, porque en una matriz,
436		la fila de una matriz si yo tengo aquí 1,2,3 [en la primera fila],
437		luego 4,5,6 [en la segunda fila]
438		y luego 2,1,0 [en la tercera fila],
439		esto es una terna [refiriéndose a cada fila],
440		luego lo puedo tratar como un vector, de hecho,
441		eso es lo que se hace, este sería el vector (1,2,3)
442		[Aly señala la primera fila],
443		este el (4,5,6) [Aly señala la segunda fila]
444		y este es el vector (2,1,0) [Aly señala la tercera fila].
445		¿Qué es lo que queda?
446		Hacer el rango, que es ver
447		¿Cuántas de estas filas son linealmente independientes?
448		Entonces necesito saber lo mínimo de vectores,
449		hay un procedimiento práctico que ahora no lo voy a poner
450		que es triangular la matriz para ver cuáles de estas filas salen cero
451		y cuáles no,
452		bueno pues ya está.
453		Venga, vamos a ver un ejemplo, un conjunto de vectores,
454		sea el primer vector (1,6,4), (2,0,-1), (5,6,3),
455		y el ejercicio dice comprobar,
456		dados esos tres vectores, comprobar que son linealmente independientes.
457		Entonces tengo que comprobar que ese conjunto de tres vectores
458		es linealmente independiente,
459		¿qué es lo que tengo que hacer?
460		Pues hacer una combinación lineal de esos vectores,
461		igualada al vector nulo y a partir de ahí empezar a hacer cuentas,
462		la solución es ver que esos escalares,
463		esos numeritos de la combinación lineal son cero,
464		¿de acuerdo?
465		eso es lo que hay que ver.
466		Combinación lineal de estos tres vectores,
467		¿Cómo sería?
468		Pues sería a por el primer vector (1,6,4)
469		más b por el segundo vector (2,0,-1)
470		más c por el tercer vector (5,6,3).
471		Entonces según la condición dada en la propiedad,
472		la condición necesaria y suficiente,
473		tengo que igualar esta combinación lineal al vector nulo (0,0,0).
474		¿Cómo se opera esta combinación lineal?

475		¿cómo se multiplica un número por un vector?
476		Pues coordenada a coordenada.
477		Entonces del primer producto de a por el primer vector es $(a, 6a, 4a)$ más,
478		¿Cómo se multiplica el segundo vector por b?
479	Es:	$(2b, 0, -b)$.
480	Aly:	$(2b, 0, -b)$ más el tercer vector por c,
481		sería $(5c, 6c, 3c)$.
482		Todo esto [la suma de los tres vectores que han resultado]
483		igualado al vector cero $[(0, 0, 0)]$.
484		¿Cómo se suman tres vectores?
485		¿Cómo sumamos estos tres vectores que tenemos ahí?
486		Pues sumando igual, coordenada a coordenada,
487		de manera que el primer elemento ¿Cómo queda?
488		a más $2b$ más $5c$
489		[la suma de la primer coordenada de cada uno de los tres vectores]
490		Ven, estoy sumando las primeras coordenadas de los vectores.
491		Bueno pues entonces $a+2b+5c$ todo eso es la primer coordenada
492		[del vector resultado de la suma de los tres vectores].
493		Es un poquito largo pero es una coordenada.
494		Segunda coordenada queda $6a$ más $6c$ pues el del segundo elemento
495		no lo pongo porque es 0
496		[al sumar 0 a una cantidad da lo mismo que no se anote,
497		propiedad del elemento neutro en la suma].
498		Tercera coordenada que nos queda $4a-b+3c$.
499		Bueno todo eso igualado al vector nulo $[(0, 0, 0)]$.
500		De ahí para que este vector de la izquierda
501		[vector resultado de la suma de los tres vectores]
502		sea el mismo que el de la derecha [el vector $(0, 0, 0)$],
503		¿Qué condiciones se tienen que dar?
504		Pues que la primera coordenada valga 0,
505		que la segunda coordenada valga 0
506		y la tercera también sea igual a 0,
507		entonces tenemos un sistema de ecuaciones.
508		Bueno pues nos queda $a+2b+5c=0$
509		[de igualar la primera coordenada del vector resultado
510		de la suma de los tres vectores con la primera coordenada
511		del vector 0].
512		Por otro lado $6a+6c=0$
513		[de igualar segunda coordenada a segunda coordenada].
514		Y también $4a-b+3c=0$, vale.
515		Entonces al final a lo que llegamos es a un sistema
516		de tres ecuaciones con tres incógnitas,
517		entonces si lo veis facilito pues no es necesario
518		que usen los métodos que hemos visto en este curso,
519		sino que pueden usar métodos de cursos anteriores.
520		Entonces de la segunda ecuación $6a+6c=0$,
521		se tiene que $a+c=0$, entonces $a=-c$.
522		Entonces con este cambio, si yo lo sustituyo en la primera ecuación

523		y en la tercera ecuación,
524		pues igual que en el método de reducción, vale,
525		es decir, si ven que el sistema es facilito,
526		lo pueden resolver con el método del curso pasado.
527		Bueno pues en la primera ecuación sustituyendo $a=-c$,
528		nos queda $-c+2b+5c=0$,
529		es decir $5c-c$ son $4c$,
530		entonces queda $4c+2b=0$
531		y también todo eso lo puedo dividir entre dos, eh,
532		entonces queda $2c+b=0$,
533		con lo cual también me sale b ,
534		despejado, $b=-2c$.
535		Bueno pues ahora con esta información [$a=-c$ y $b=-2c$]
536		la sustituimos en la tercera ecuación $4a-b+3c$,
537		vamos a poner en lugar de a ,
538		lo que vale a , en lugar de b , lo que vale b ,
539		tenemos $-4c+2c+3c=0$,
540		total aquí me queda $c=0$,
541		es decir, que c vale cero.
542		Es la única solución para este sistema.
543		Si c vale cero, entonces en $b=-2c$, ¿Cuánto vale b ?
544	Es:	0.
545	Aly:	Y entonces en $a=-c$ ¿cuánto vale a ?
546	Es:	0.
547	Aly:	$a=0$.
548		Entonces la única solución es que los tres escalares [a, b y c] sean 0.
549		Entonces la única forma de que se cumpla esta igualdad
550		[la combinación lineal igualada al vector nulo].
551		Es que los tres escalares sean 0.
552		¿De acuerdo?
553		Venga, ¿hacemos otro ejemplo?
554	Es:	[Silencio].
555	Aly:	Venga, uno cortito también en el que es todo lo contrario,
556		en el caso que acabamos de hacer era comprobar que los vectores
557		eran linealmente independientes y vamos a ver otro que es al revés.
558		Comprobar que unos vectores son linealmente dependientes.
559		Hay casos en los que al resolver el sistema
560		[para probar la independencia lineal]
561		no siempre me salen 0 los escalares,
562		me sale algún valor distinto de 0,
563		entonces si me sale algún valor distinto de 0 ¿qué ocurre?
564		Que ésta condición no se cumple
565		[la propiedad para que los vectores sean linealmente independientes]
566		y si no se cumple, entonces,
567		¿cómo deben ser esos vectores?
568		Pues linealmente dependientes, vale.
569		Bueno sino lo terminamos del todo pues por lo menos lo planteo.
570		Bueno ejemplo dos.

571		Comprobar que estos tres vectores (18,28,29), (3,5,7), y el último (4,6,5),
572		comprobar que son linealmente dependientes.
573		La condición que debo probar es la misma, vale.
574		[La propiedad para probar la independencia lineal].
575		Pues hacer una combinación lineal de ellos e igualarla al vector nulo
576		y a partir de ellos pues hacer las cuentas y resolver un sistema, vale.
577		Bueno pues vamos a hacerlo más rapidito ya.
578		Entonces hay que multiplicar los escalares a, b y c,
579		cada escalar por un vector.
580		Entonces que tengo, ya voy a escribir la primera ecuación $18a$ más,
581		el segundo [vector] va multiplicado por b,
582		entonces más $3b$ y el tercer vector va multiplicado por c,
583		entonces más $4c$ igual a 0.
584		Luego [la segunda ecuación] $28a+5b+6c=0$.
585		Y la última $29a+6b+5c=0$.
586	E2:	Es $7b$ [en lugar de $6b$ en la tercera ecuación].
587	Aly:	A si vale, es $7b$,
588		entonces la tercera ecuación queda $29a+7b+5c=0$.
589		Entonces este es el sistema que hay que resolver,
590		de eso ya os digo cuánto sale,
591		a vale 1, b vale 2 y c vale 3.
592		¿Y eso qué quiere decir?
593		Pues que el conjunto inicial de los tres vectores
594		es linealmente dependiente,
595		eso quiere decir que hay relación entre ellos,
596		quiere decir que al primer vector lo puedo expresar
597		en función de los otros dos, ¿de acuerdo?
598		Además no está demás nunca,
599		antes de ponerme a hacer cuentas,
600		echarle un ojito,
601		es decir antes de aplicar la condición,
602		pues darle un vistazo y a lo mejor sale así a simple vista.
603		Fijaros que b salió un 2 en la segunda componente [$b=2$]
604		y en c salió un 3 [$c=3$],
605		entonces 2 [que está en b] por 3 [que es la primera coordenada del
606		segundo vector] son 6
607		y 3 [que está en c] por 4 [que es la primera coordenada del tercer vector]
608		son 12 y 12 y 6 son 18 [que es la primera coordenada del primer vector].
609		¿Veis lo que les digo o no?
610		Entonces cuando yo lo hago en matrices,
611		se ve casi mejor,
612		pues tendríamos 3,5,7 [en la primera fila],
613		4,6,5 [en la segunda fila] y 18,28,29 [en la tercera fila].
614		Ver aquí la dependencia lineal es más sencillo
615		pues la fila tres es dos veces la fila uno más tres veces la fila dos
616		y eso se cumple para cualquier coordenada de la fila entera,
617		cumple esa condición,
618		que la tercera fila se puede expresar en función de las otras dos

619		[de la primera fila y segunda fila].
620		Entonces ese tercer vector [la tercera fila] depende linealmente
621		de los otros dos,
622		por lo tanto los vectores linealmente independientes
623		son sólo los primeros dos [la primera y segunda fila],
624		el tercero no [tercera fila].
625		Es que es una cosa resolverla con vectores,
626		y con las matrices es más fácil de verlo, vale.
627		Bueno pues eso por ahí,
628		ahora dos cositas importantes antes de ver el rango.
629		Venga, vamos a escribir unas notas.
630		Nota 1 y Nota 2, son cosas importantes.
631		Nota 1: Un vector no nulo siempre es linealmente independiente,
632		un conjunto formado por un vector.
633		¿Eso por qué?
634		Imaginad un vector que sea por ejemplo (3,2,1),
635		un vector que no sea nulo, claro,
636		¿por qué decimos que siempre es linealmente independiente?
637		Cualquier combinación lineal de este vector $[a(3,2,1)]$
638		igualado al vector nulo $[a(3,2,1)=0]$.
639		¿Cuál es la única solución posible para ese numerito a que
640		yo estoy teniendo fuera?
641		Pues sería $(3a,2a,a)=(0,0,0)$ y ¿eso qué significa?
642		Pues que la única condición para que se cumpla esa igualdad
643		es que a sea 0,
644		la única posibilidad es que a sea 0.
645		Entonces este vector (3,2,1) cumple la condición necesaria y suficiente
646		[la propiedad para probar la independencia lineal],
647		me da como única posibilidad que el escalar sea 0.
648		¿Si os enteráis de eso? [¿Entienden eso?]
649	Es:	[Nadie contesta].
650	Aly:	Bueno Nota 2:
651		Un conjunto de vectores v sub uno, v sub dos, v sub tres, ...,
652		así hasta el vector 0,
653		ese conjunto de vectores es linealmente dependiente.
654		Es decir, si en un conjunto de vectores está incluido el vector 0
655		ese conjunto es siempre linealmente dependiente,
656		porque el 0 [vector] es el que estropea esa independencia lineal.
657		Bueno pues ahora sí, rango de una matriz.
658		¿Cuál es la definición de rango de una matriz?
659		¿Por qué todo esto?
660		[Lo de combinación lineal y dependencia e independencia lineal].
661		Pues porque todo va encaminado a esto que vamos a ver,
662		un concepto nuevo de matrices.
663		Rango de una matriz.
664		¿A qué se le llama rango de una matriz?
665		Pues consideramos las filas de una matriz como vectores,
666		también puede ser estudiado [el rango] por columnas

667		pero normalmente se hace por filas,
668		siempre hemos hecho transformaciones por filas,
669		bueno entonces consideramos las filas de una matriz como vectores.
670		Entonces vamos a ver, definición,
671		se llama rango de una matriz A y se representa así ($\text{rang}(A)$),
672		al número de filas linealmente independiente de la matriz.
673		¿De acuerdo?
674		Bueno pues si yo tengo una matriz con tres filas o cuatro,
675		tengo que ver cuáles de ellas son linealmente independientes,
676		no lo vamos a hacer así [como se hizo en el ejemplo de hoy]
677		pues tenemos el método alternativo de Gauss.
678		Bueno [regresando a la definición de rango de una matriz]
679		además coincide con el número de columnas linealmente independientes.
680		Lo digo por si en un libro o en Internet lo ven así,
681		que también es válido pero ya os digo que nosotros lo vamos a hacer
682		con las filas.
683		Bueno una cosita, si tengo una matriz A de orden 3×4 ,
684		¿cuál será su rango máximo?
685		Pues puede tener rango 1, rango 2, rango 3,
686		pero ¿puede tener rango 4?
687		No.
688		¿Por qué cuántas filas tengo aquí? [Aly señala el orden 3×4]
689	E2:	Tres.
690	Aly:	Tres.
691		Si, pero alguien puede decir, pero tengo 4 columnas.
692		Pero acabamos de decir que el rango por filas o por columnas coincide.
693		Entonces el rango máximo que puede haber de una matriz
694		es el mínimo de los elementos del orden,
695		no me puedo exceder del mínimo de estos dos números
696		[Aly señala el orden 3×4].
697		Entonces el rango máximo en esta matriz es 3.
698		Y si la matriz es de orden 4×8 ,
699		por ejemplo una matriz de orden 4×8
700		¿Cuál será el rango máximo?
701		Como mucho ¿cuál puede ser ese rango?
702	E1:	4.
703	Aly:	Pues 4, porque es el mínimo de esos dos números
704		[Aly señala el orden 4×8].
705		Bueno pues vamos a ver el método práctico.
706		Eso es lo que me importa ahora.
707		Bueno método práctico para encontrar el rango de una matriz,
708		tenemos que hacer ceros en la matriz de partida,
709		convertirla en una matriz triangular,
710		puede ser una matriz de cualquier orden,
711		no tiene porque ser cuadrada, vale.
712		Y al final tenemos que ver cuántas filas son linealmente independientes.
713		[Regresando a la definición]
714		Entonces tenemos que hacer ceros en la matriz por el método de Gauss

715		y al final el rango de A va a ser el número de filas no nulas.
716		Entonces va a ser muy fácil ver el rango de una matriz
717		pues si veo que al final tengo dos filas con ceros,
718		pues eso me dirá cuántas filas linealmente independientes tengo.
719		A ver bueno, ejemplos.
720		No está demás, como hemos dicho dar un vistazo a la matriz,
721		porque si se ve claramente que una es la suma de otras.
722		Los ejemplos los tienen en el libro en la página 64.
723		Bueno pues la matriz A que es 2,3,-1,4 [en la primera fila],
724		1, 0, 4,5 [en la segunda fila].
725		Esta matriz es de orden 2 por ¿cuánto?
726	E2:	2x4.
727	Aly:	2x4, bueno entonces a lo mucho tendrá rango dos.
728		Bueno entonces primero un vistazo a la matriz,
729		¿se ve que una sea algo de la otra?
730		No se ve nada verdad
731		[Aly y algunos estudiantes observan la matriz tratando de ver
732		alguna relación entre esas dos filas].
733		Bueno entonces vamos a hacer operaciones
734		pues no se ve que la primera fila sea 2 veces la segunda, ni nada de eso.
735		Aquí no se ve que esas dos filas sean proporcionales,
736		aquí ni siquiera hay que hacer Gauss,
737		entonces aquí ¿Cuántas filas son linealmente independientes?
738		Pues dos, entonces el rango de la matriz A es dos.
739		Ejemplo [dos]. Otra, la matriz B.
740	E1:	[E1 vio una relación en las filas de la matriz B].
741	Aly:	Si se ve a simple vista mejor eh.
742		Bueno voy a escribir los elementos de la matriz B,
743		es 2,3,-5 [en la primera fila],
744		1,-2,1 [en la segunda fila],
745		1, 5,-6 [tercera fila].
746	E2:	Pero esa no es la B es la C
747		[Pues en el libro aparece esa que escribió como C].
748	Aly:	Bueno da igual, vamos a hacer esta y la vamos a llamar B.
749		E1 ya había encontrado una relación.
750	E1:	Que la tercera [fila] es la primera menos la segunda [filas].
751		[Suenan el timbre que indica que ya se ha terminado la clase].
752	Aly:	Pero entonces ¿cuántas filas hay linealmente independientes?
753		O sea que en este caso ni siquiera hace falta aplicar Gauss,
754		pues se ve fácilmente que el rango de la matriz es dos.
755		Un momentito, [Aly le pide que esperen un momento mientras ve
756		en el libro los ejercicios que dejará de deberes].
757		En la página 65 tienen un ejemplo resuelto
758		y ahí si aplica el método de Gauss,
759		pues en el que nosotros acabamos de hacer es fácil de ver,
760		pero otras veces no se ve tan fácilmente
761		[cuántas filas son linealmente independientes]
762		y entonces hay que aplicar el método de Gauss.

763		Bueno pues este ejercicio resuelto lo miráis y el ejercicio 1 de abajo,
764		lo hacéis ustedes vale.
765		[Son cuatro matrices en las que hay que calcular
766		el rango de las matrices].

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la sexta clase grabada de la profesora Aly del viernes 24/10/08.

Resumen: Definición de determinante y 9 propiedades de los determinantes de orden 2 y ejemplos.

L		Transcripción
1	Aly:	Bueno voy a entregar los exámenes y una hoja con las soluciones.
2	Es:	¿Cuánto sacamos?
3	Aly:	Pues hubo desde 1 y medio [de calificación].
4		[Aly comienza a darles sus exámenes acudiendo al lugar
5		de cada estudiante].
6		[Aly termina de entregarles los exámenes].
7		Bueno hay cosas en el examen que también son muy llamativas,
8		a ver en el ejercicio 1,
9		hay alguien que nada más copiarlo se ha equivocado de signo
10		al copiarlo y te he puesto algo de puntuación porque
11		el procedimiento está bien hecho,
12		pero que eso en selectividad [examen de selectividad para ingresar
13		a la universidad] te lo cancelan [cero puntuación en ese problema].
14		O sea que ahí hay que esforzarnos para no equivocarnos al copiar.
15		Tú E5 cometiste un fallo en una línea, en una línea aparece -16
16		y ya en la siguiente línea aparece 16, entonces bueno...
17		En el sistema, aparece hecho en la hoja que os he dado
18		con las soluciones,
19		ahí aparece de manera más sencilla que como lo habéis hecho,
20		poniendo arriba la tercera ecuación y pasando abajo la del parámetro
21		y así no salen las cuentas tan grandes,
22		bueno digo un poquito menos grande, bueno ahí lo veis en la hoja, vale.
23		Bueno en el último problema les pedía encontrar la dependencia
24		o independencia lineal de esos 4 vectores,
25		los 4 vectores que había ahí y además os lo dije en el examen,
26		mirad bien la matriz y mirad bien los 4 vectores pues resulta que
27		eran las columnas de la matriz y ¿qué es el rango de una matriz?
28		Pues es el número de filas o columnas linealmente independientes.
29		Si acabamos de hacer el rango de esa matriz y me sale rango 2,
30		¿qué significa eso, que son linealmente dependientes o independientes?
31	E2:	Independientes.
32	Aly:	Que son linealmente dependientes, independientes sería si me hubiera
33		salido el rango 4.
34		Luego el sistema matricial casi todo mundo la ha tenido bien menos E1,
35		que no soy capaz de descifrar lo que ha hecho,
36		a ver si me explica qué es lo que ha hecho ahí,
37		luego me lo explicas vale.
38		El último era fácil, fácil eh, era calcular la n-ésima potencia de una
39		matriz, había que hacer A al cuadrado, pero luego en A al cubo
40		ya sale la matriz nula, ¿entonces?...
41		De todas formas como os he dado las soluciones, le echáis ahí un ojito,
42		que esto mismo vuelve a entrar en el examen siguiente,
43		en el examen de bloque.

44		Y luego hay que hacer un examen de recuperación de bloque
45		que luego hay que ponernos de acuerdo,
46		puede ser en enero cuando regresemos de vacaciones
47		o antes de irnos o bien pasarlo hasta mayo [a finales del curso].
48		Bueno ya en eso nos pondremos de acuerdo, ¿alguna cosa más?
49		Bueno pues vamos a empezar con los Determinantes.
50		Los determinantes es un tema muy asequible,
51		la verdad es que todo el tema de álgebra es muy mecánico,
52		en la parte de sistemas eso sí, si se complica,
53		si hay muchas operaciones algebraicas pues hay que pensar muy bien
54		las operaciones, los cambios de signos, lo que sea vale.
55		Pues bueno empezamos, venga,
56		Tema 3 Determinantes.
57		Bueno ustedes lo tenéis en el libro a partir de la página 74.
58		Eso sí los que no estéis muy acostumbrados a hacer las tareas pues ahora
59		hay que hacerlas por lo menos para enterarse de qué va esto eh,
60		a andar se aprende andando y aquí igual, así que...
61		Bueno pues venga, vamos a ver qué es eso de los determinantes.
62		Bueno el determinante de una matriz es un número que resulta
63		de esa matriz, tiene que ser una matriz cuadrada eh.
64		Bueno vamos a ver una pequeña definición, como viene en el libro.
65		Dice: “Como veremos en el desarrollo de la unidad, el determinante de
66		una matriz de orden 2 es un número...”
67		Es un número eh, entonces a manera de introducción si tenemos esta
68		matriz de orden 2 [a, b en la primera fila y c, d en la segunda].
69		¿Qué va a ser el determinante?,
70		¿Cómo se va a calcular el determinante de esto?,
71		bueno pues su determinante va a ser un número,
72		es decir, a las matrices cuadradas se les asigna un número,
73		luego vemos cómo, y ese número es lo que se llama determinante,
74		en este caso se obtiene, en este caso es el producto de esta diagonal
75		a por d menos el producto de la diagonal secundaria b por c,
76		con lo cual si hablamos de diagonal principal y de diagonal secundaria
77		pues tienen que ser matrices cuadradas.
78		Bueno en este caso el determinante de esa matriz va a ser un número
79		y ese número ¿cómo se obtiene aquí en esta matriz?,
80		bueno pues como hemos dicho este producto [ad]
81		menos este producto [bc].
82		Bueno y por qué es importante los determinantes,
83		¿para qué nos van a servir?
84		Bueno pues tenemos que hacer un ejemplo,
85		fijaros en este sistema primero que ponen ahí, es $2x+y=7$ y $x-4y=-10$.
86		Vale, ahí tenéis un sistema, ahora vamos a hacer ese y según como dice
87		en el libro, sale un sistema compatible determinado,
88		es decir, que tiene solución única, es decir, que existe una única solución.
89		Bueno pues fijaros, el hecho de que este sistema sea compatible
90		determinado, tiene bastante que ver con la matriz de los coeficientes
91		[Aly subraya los coeficientes de las ecuaciones],

92		el 2,1,1,-4 y con su determinante, en cambio, en el otro sistema que
93		pone en el libro es $3x-2y=-1$ y $x-(2/3)y=0$
94		resulta que ese sistema es incompatible,
95		¿por qué va a ser ese incompatible?
96		Pues vais a ver lo que pasa.
97		O sea lo importante en la clasificación que veremos más delante
98		de los sistemas va a ser en función de los elementos que hay en la matriz
99		de sus coeficientes.
100		Esta matriz de coeficientes [del primer sistema],
101		su matriz de coeficientes A sería 2,1 [en la primera fila]
102		y 1,-4 [en la segunda fila].
103		Si yo calculo el determinante de esto ¿qué es lo que me da?
104		Lo denoto así entre dos barras al determinante de A [$ A $],
105		hemos dicho arriba para ese caso concreto cómo se calcula sería 2 por -4,
106		sería el producto de la primera diagonal [diagonal principal] sería -8
107		y luego sería el producto de la segunda diagonal que sería -1.
108		Entonces -8 y -1 es -9,
109		lo importante es que es distinto de 0, vale.
110	E2:	Y para el rango también.
111	Aly:	Y para el rango también, esto tiene muchas aplicaciones.
112		Entonces esa matriz de coeficientes,
113		el número que le vamos a asignar es llamado determinante,
114		lo importante es saber que este número [que resulta de calcular el
115		determinante] es distinto de 0.
116		En cambio con el otro sistema, si hacemos el determinante sería 3,-2 [en
117		la primera fila] y 1,-(2/3) [en la segunda fila],
118		¿Cuánto queda eso al calcularlo?
119		Sería 3 multiplicado por -(2/3),
120		¿cuánto da eso? pues el 3 se anula y me queda -2,
121		luego menos el producto de la diagonal secundaria -2 por 1
122		y -2 por 1 es -2.
123		Entonces eso es -2-(-2) y claramente eso es 0.
124		Pues ahí tenéis el hecho importante que hace que un sistema
125		sea de un estilo o sea de otro,
126		lo primero que vamos a estudiar cuando tengamos un sistema
127		es el determinante, ¿cuánto vale?, es decir, si es nulo el determinante.
128		Todo eso con el número que se asigna del determinante
129		de la matriz de coeficientes.
130		Bueno en general no hemos dicho aún qué es el determinante.
131		Entonces tenemos que tener una matriz cuadrada,
132		en general el determinante de cualquier matriz cuadrada,
133		importante esto, tiene que ser una matriz cuadrada de 2x2, 3x3, etc.,
134		sino es entonces no tiene sentido esto del determinante eh.
135		Bueno pues para la definición de determinante,
136		el determinante de cualquier matriz cuadrada se obtiene a partir de
137		todos los productos posibles de los elementos de la matriz,
138		de manera que en cada uno de los productos encontremos
139		un solo elemento de cada fila y de cada columna,

140		uno y nada más que uno eh.
141		Bueno fijaros en estos de 2×2 que hemos hecho antes,
142		el determinante de esta matriz A que es 2,1 [en la primera fila],
143		1,-4 [en la segunda fila],
144		¿Cómo se calcula ese determinante?, ¿qué hacemos?
145		Pues el elemento a sub uno uno,
146		es decir, el que está en la primera fila primera columna
147		por el elemento a sub dos dos,
148		entonces sería 2 por -4 [Emi escribe $2(-4)$],
149		lo estoy indicando para que veáis que es un elemento de la primera fila
150		y de la primera columna, por un elemento de la segunda fila y segunda
151		columna.
152		Y ahora este elemento [1] que está en la primera fila segunda columna
153		por este otro [1] que está al revés [en la segunda fila primera columna]
154		que sería 1 [de hacer la operación $1(1)$].
155		Por eso se cumple lo que habíamos dicho [...de manera que en cada uno
156		de los productos encontremos un solo elemento de cada fila
157		y de cada columna, uno y nada más que uno].
158		Entonces así un poco ambiguo hemos visto lo de determinantes.
159		A continuación ahí en el libro tenéis una matriz ahí ya más grande,
160		lo que pasa es que claro en una matriz de orden 2 es muy sencillo.
161		Pero imaginad una matriz como la que ponen ahí [en el libro de texto]
162		de orden 6×6 .
163		¿Cuántos elementos hay en una matriz de 6×6 ?
164		6 filas por 6 columnas.
165	E1:	36.
166	Aly:	Pues tiene 36 elementos, si esos 36 elementos,
167		yo resulta que puedo buscar todas las combinaciones posibles
168		de ahí para que en cada producto haya un elemento de cada fila
169		y uno de cada columna, nos podemos morir, ahí salen... bastantes.
170		Entonces claro, eso es como para volverse locos los demás,
171		entonces hay métodos, sobre todo las propiedades de los determinantes,
172		sobre todo que nos van a decir cosas muy importantes
173		acerca de los determinantes y que es lo que vamos a explicar,
174		así que vamos con la primera propiedad de los determinantes de A.
175		Bueno pues entonces,
176		determinantes de orden dos y sus propiedades.
177		Bueno vamos a tener reglas prácticas para estos de orden dos
178		y para los de orden 3.
179		A partir ya de los de orden 3, lo más conveniente es aplicar las
180		propiedades que tenemos aquí [en el libro de texto].
181		Bueno entonces propiedades para los determinantes de orden 2,
182		esas propiedades hay que aprendérselas.
183		Pues venga, determinantes de orden 2,
184		a ver ya habíamos dicho cómo se calcula el determinante de las matrices
185		de orden 2.
186		Vamos a poner que en general si A es la matriz
187		a sub uno uno, a sub uno dos [en la primera fila],

188		a sub dos uno, a sub dos dos [en la segunda fila],
189		es una matriz cuadrada, su determinante se calcula así,
190		en este caso el cálculo ¿cuál sería?
191		Pues sería a sub uno uno por a sub dos dos
192		menos a sub uno dos por a sub dos uno ¿de acuerdo?
193		¿Lo veis no?
194		El primer subíndice qué nos dice, el primer subíndice de cada elemento
195		[Aly subraya el primer subíndice de cada elemento].
196		Pues me indica en la fila en que está,
197		este elemento, ¿en qué fila está [a sub uno uno]?
198		Pues en la primera fila y este [a sub dos dos] en la segunda.
199		Y este en la primera fila [a sub uno dos], segunda fila [a sub dos uno],
200		vale.
201		También el otro subíndice [el segundo] qué nos dice,
202		pues primera columna [a sub uno uno],
203		segunda columna [a sub dos dos],
204		luego segunda columna [a sub uno dos]
205		y primera columna [a sub dos uno].
206		Entonces en cada uno de los factores que estoy escribiendo aparece
207		lo que tiene que aparecer, ¿de acuerdo?
208		Bueno entonces se denota así.
209		Vamos a ir escribiendo las propiedades.
210		Una cosa, voy a escribir las propiedades pasándolas a
211		matrices de orden 2.
212		Bueno propiedades para los determinantes de orden 2.
213		Ya os digo las propiedades son muy importantes,
214		vamos a ir viendo las propiedades de los determinantes de orden 2,
215		un poquito más adelante algunas propiedades más,
216		pero vamos, casi todas están dadas aquí [en las de los determinantes de
217		orden 2].
218		Bueno primera propiedad.
219		El determinante de una matriz A coincide con el determinante
220		de su matriz traspuesta.
221		Se entiende bien lo que dice ahí, verdad,
222		que el determinante de A coincide con el de su traspuesta.
223		¿Y por qué es eso?
224		Ejemplo, vamos a ver, 7, 4 [en la primera fila]
225		y -5, 11 [en la segunda fila].
226		¿Cómo se calcula el determinante de esa matriz A?
227		Pues venga E5, dímelo.
228	E5:	No me acuerdo.
229	Aly:	¿Que no te acuerdas?
230		¿De verdad?
231		Si lo acabo de decir ahí [Aly señala el lugar donde acaba de anotar eso
232		en la pizarra].
233	E5:	Ah de eso, a vale, vale.
234		Pues primero hay que calcular A traspuesta.
235	Aly:	A vale, pero primero hay que calcular el determinante de A.

236		7 por 11.
237	E5:	Más 20.
238	Aly:	Bueno si es que es menos -5 por 4 entonces es más 20.
239		Entonces sería 77 más 20.
240	E1:	97.
241	Aly:	Vale muy bien.
242		Y ahora de lo que no te acuerdas [E5] es de la matriz traspuesta,
243		pero bueno si no te acuerdas,
244		mala señal pues no hace mucho que la vimos.
245	Es:	[Risas].
246	Aly:	Bueno vamos a calcular la matriz traspuesta, ¿cuál sería?,
247		pues en lugar de 7, 4 en la primera fila.
248	Es:	7,-5.
249	Aly:	Claro pues 7, 4 ahora es la primera columna.
250		Y entonces -5,11 va a ir así [Aly lo escribe en la segunda columna].
251		Esa era la matriz traspuesta [Aly ve a E5],
252		en la que la primera fila se convierte en primera columna
253		y la segunda fila en segunda columna, vale.
254		¿Qué ocurre si calculamos este determinante?,
255		¿Qué pasa?
256		¿Pasa algo con la diagonal principal?
257		¿En qué cambia esto para el determinante?
258		7 por 11, nos queda lo mismo, en realidad no ha variado,
259		¿veis que es la misma?
260		Y luego, ¿qué pasa con la diagonal secundaria?
261		Si ha cambiado pero ha cambiado de orden,
262		entonces a efectos de calcular el determinante no,
263		pues sigue dando más 20 pues en vez de 4 por -5 me queda -5 por 4.
264		No varía nada, entonces me da como resultado 97.
265		Se puede con las letras [usar letras en lugar de números] pero bueno...
266		Bueno ahora la segunda propiedad.
267		Si yo tengo una fila, bueno aquí en el libro [de texto] ya empiezan
268		a poner una línea,
269		lo de línea significa una fila o una columna,
270		se los digo para que en adelante cuando lo veáis ahí eso de línea,
271		yo porque casi prefiero decir fila o columna.
272		Bueno segunda propiedad, imaginaros que tengo que calcular
273		un determinante de una matriz así,
274		la primera fila 0 y la segunda fila es la que sea,
275		¿cuánto va a salir este determinante?
276	E1:	0.
277	Aly:	0, vale, lo voy a escribir.
278		Si un determinante tiene una fila o columna nula,
279		el resultado de dicho determinante es 0, ¿de acuerdo?
280		Pero también puede ser que una de las columnas sea 0
281		y la otra lo que sea, también va a dar 0.
282		Entonces si en un determinante una fila o columna es 0
283		entonces el determinante es 0.

284	Ejemplo 0,0 [en la primera fila], 7,6 [en la segunda fila].
285	Esto ¿cuánto da?
286	Pues claro por definición en cada uno de los factores tiene que haber
287	un elemento de cada fila y de cada columna, ¿de acuerdo?
288	Entonces al multiplicar 0 por 6 ¿qué me queda?
289	0.
290	¿Y el otro?
291	7 por 0 pues es 0.
292	Entonces 0 más 0 es 0.
293	Entonces fila o columna 0 hacen que el determinante también sea 0.
294	Tercera propiedad,
295	¿qué pasa si cambiamos el orden de una fila o de una columna?
296	¡Cuidado con esto!
297	Pues hasta ahora hemos trabajado únicamente cambiar dos filas entre sí
298	en una matriz, a través de transformaciones elementales eso no afectaba
299	eh.
300	Ahora si hay un pequeño cambio.
301	Tercera propiedad, si cambiamos el orden de dos filas o dos columnas
302	de la matriz, el determinante cambia de signo,
303	o sea que aquí sí hay un cambio, ¿de acuerdo?
304	¿Y cómo vamos a escribir esto?
305	Pues si tengo fila uno [F1] arriba y fila dos [F2] abajo,
306	esto que relación guarda con este otro [F2 arriba y F1 abajo].
307	¿Qué efecto produce el cambiar de orden las filas?
308	Pues que el signo cambia, vale.
309	[El determinante de una matriz es menos el determinante
310	de la otra matriz], ¿de acuerdo?
311	Venga vamos a ver el ejemplito.
312	¡Lo mismo ocurriría con columnas eh!
313	[La propiedad anterior del cambio de filas].
314	Bueno entonces ya digo que hasta ahora habíamos cambiado las filas
315	sin ningún problema, cuando calculábamos el rango o para resolver
316	sistemas, hemos intercambiado muy bien dos filas entre sí, ¿de acuerdo?
317	Ahora sí si intercambio [en el determinante], ¿qué pasa?
318	Pues que el signo va a cambiar eh.
319	Venga pues vemos el ejemplo que viene ahí [en el libro de texto].
320	Es 5,3 [en la primera fila] y 2,7 [en la segunda fila].
321	Y el otro determinante sería 3,5 [en la primera fila]
322	y 7,2 [en la segunda fila].
323	A ver el primero, ¿cuánto sería?
324	5 por 7 son 35 menos 2 por 3 son 6, y eso da 29, vale.
325	En el otro determinante ¿qué ocurre?,
326	¿qué observáis antes de hacer nada?
327	Que antes en la primera fila era 5,3 y ahora es 3,5,
328	es decir, que hemos intercambiado primera columna por segunda,
329	hemos hecho un cambio entre las dos columnas.
330	Antes de empezar a hacer cuentas,
331	sobre todo en determinantes más grandes,

332		primero hay que echar un ojo lo mismo que en el examen [que les dio
333		hoy], antes de hacer nada, hay que mirar.
334		Bueno pues aquí está claro que hemos intercambiado columnas,
335		si yo calculo este determinante sería 3 por 2 son 6
336		¿ven qué es lo que ocurre no? menos 5 por 7 que son 35,
337		entonces nos queda -29, luego aquí el signo está cambiado.
338		Bueno cuarta propiedad,
339		¿qué ocurre si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales?,
340		¿cómo va a salir el determinante?
341		Cuarta propiedad, si un determinante tiene dos filas o dos columnas
342		iguales, el determinante vale 0.
343		Ejemplo, tenemos en un determinante con la fila 1 [F1] y la fila 2 [F2]
344		iguales, ¿cuánto nos queda eso?
345	E2:	0.
346	Aly:	0, muy bien, y también serviría eso para las columnas.
347		Bueno pues venga, el ejemplo a ver 1,10 [en la primera fila]
348		y 1,10 [en la segunda fila].
349		¿Por qué sale 0?
350		Pues porque claro justamente los productos son los mismos,
351		sería 1 por 10, 10 y lo mismo exactamente lo tengo restando, vale,
352		sería 10 menos 10, luego de ahí sale 0, ¿de acuerdo?
353		Además es fácil, muy fácil comprobarlo,
354		todas las propiedades con determinantes de orden 2.
355		Quinta propiedad, si multiplicamos cada elemento de una fila
356		o columna por un número, el determinante también sale multiplicado
357		por el número,
358		bueno me explico,
359		imaginaros que tengo dentro del determinante a por F1 y abajo F2, vale.
360		Es decir, yo me encuentro una fila o columna donde veo que en la F1
361		aparece todo un múltiplo, un número, ¿de acuerdo?
362		¿Puedo extraer de alguna manera ese número?
363		Pues sí, es como si sacásemos factor común,
364		lo sacamos fuera y el determinante ya queda más sencillo,
365		quedaría a por el determinante de F1 arriba y F2 abajo.
366		Venga vamos a ver el ejemplo [de determinante],
367		20,45 [en la primera fila] y 3, 11 [en la segunda fila].
368		Bueno eso sí, ya os digo que no se puede empezar siempre
369		a hacer operaciones, sino que hay que mirar un poquito.
370		¿Veis aquí que hay una fila que sea múltiplo de un número dado?
371		La primera fila, los dos números que aparecen en la primera fila,
372		son múltiplos los dos ¿de quién?
373	E2:	De 5.
374	Aly:	De 5, verdad, 20 y 45 son múltiplos de 5, pues 20 es 5 por 4,
375		¿y el otro cómo? 5 por 9 [45],
376		[Aly escribe en la primera fila 5 por 4 en lugar de 20
377		y 5 por 9 en lugar de 45].
378	E1:	Entonces quedaría el 5 por 9.
379	Aly:	Espera.

380		Y la fila de abajo queda igual [3, 11].
381		Si yo escribo el desarrollo completo de eso,
382		del cálculo de ese determinante,
383		me quedaría 5 por 4 por 11 menos 5 por 9 por 3 [5.4.11-5.9.3],
384		esto no se hace normalmente pero lo voy a hacer,
385		entonces este 5 que está aquí [Aly señala el 5 del minuendo y del
386		sustraendo] ¿lo puedo sacar de factor común?
387	E1:	Si.
388	Aly:	Así si lo veis, estamos en una suma y resta,
389		eso ya lo han visto desde hace tiempo,
390		entonces saco el factor común y lo que nos quedaría ahí, ¿qué sería?
391		Sería 5 por 4 por 11 menos 9 por 3 [5(4.11-9.3)].
392		Y, ¿esto qué determinante es?
393		Pues es 5 por el determinante ¿de qué?,
394		pues de 4,9 [en la primera fila] y abajo 3,11 [en la segunda fila]
395		¿de acuerdo?
396		Entonces el 5 ese que teníamos aquí [de factor común]
397		digamos agrandando esos valores,
398		lo podemos sacar de factor común,
399		entonces lo puedo extraer fuera y me quedo con el determinante
400		ya más ligerito, cuánto más vayamos aligerando los numeritos
401		del determinante mejor.
402		Bueno entonces esta es una propiedad de que si en una fila o columna
403		yo veo que todos son múltiplos de un número dado,
404		ese número lo puedo sacar fuera y el motivo es que
405		cuando hago el desarrollo lo saco como factor común.
406		Hombre en la práctica no hacemos todo eso, decimos venga,
407		si tengo el determinante de 20,45 [en la primera fila],
408		3,11 [en la segunda fila].
409		Diríamos saco el 5 de aquí y de aquí [del 20 y del 45]
410		y entonces en el determinante digo bueno y aquí [en la primera fila]
411		¿qué me quedaría ya?
412		Pues 4 y 9 y abajo 3 y 11.
413		Esto es lo que se hace en la práctica, ¿de acuerdo?
414		¿Se ha entendido bien? [Aly voltea a ver al grupo]
415		¿Si?
416		Ahora mismo no me interesa hacer el cálculo del determinante
417		sólo quiero que vean eso.
418		Además en los ejercicios ya los veréis en plan teórico pues os dirán si
419		este determinante vale esto, ¿cuánto vale este otro?,
420		multiplicando fila o cambiando fila de orden.
421		Bueno venga sexta propiedad.
422		Si un determinante tiene sus dos filas o columnas proporcionales,
423		su determinante es 0.
424		Cuando se ve que hay una proporcionalidad entre dos filas
425		o dos columnas, el determinante va a ser 0, ¿de acuerdo?
426		A ver, entonces si yo tengo en el determinante F1 y abajo a por F1,
427		fijaros aquí fila 1 [F1] y fila 2 no tienen nada que ver,

428		se trata de una proporcionalidad pero con la fila que está por debajo
429		[con la misma F1],
430		en este caso el determinante es 0.
431		Estamos diciendo el caso en el que una fila es proporcional a la otra.
432		Bueno el ejemplo, va a ser el que viene ahí [en el libro de texto].
433		60, 6 [en la primera fila] y 70,7 [en la segunda fila], ¿qué se ve ahí?
434		La columna uno ¿qué es?
435		Es multiplicar por 10 la otra ¿no?
436	E2:	¿Pero no es a por F2?
437	Aly:	Pero esta no es la propiedad en la que se puede extraer término común,
438		claro aquí por la propiedad anterior y tal vez es en la que está pensando
439		un poquito E2,
440		esa a [en este caso 10 como múltiplo de 60 y de 70] la puedo sacar
441		y entonces ¿qué pasa con el determinante?
442	E1:	Se anula.
443	Aly:	Se cancela.
444		Da 0.
445		Bueno ved que aquí la columna 1 es 10 veces la columna 2,
446		mirad también por columna, no solamente por fila eh, ¿de acuerdo?
447		Entonces directamente podemos decir que el determinante completo
448		va a ser 0.
449		¿Por qué sale 0 ahí?
450		Pues hay varias cosas para decirlo.
451		Podemos poner en lugar de 60, 6 por 10 y en lugar de 70, 7 por 10
452		y entonces ¿qué hacemos con ese factor que está repetido en toda
453		la columna 1?
454		Por la propiedad anterior lo podemos extraer,
455		es decir, poner el 10 fuera y dejar dentro el 6,6 [en la primera fila]
456		y el 7,7 [en la segunda fila].
457		Y ahora esto [lo que queda dentro del determinante],
458		tenemos dos columnas que son iguales, luego entonces esto da 0.
459		Y esta propiedad ya se deduce de las dos anteriores.
460	E4:	Pero ese 10 también lo puedo meter ¿no?
461	Aly:	Si también se puede meter pero sólo afectaría a una de las columnas
462		no a las dos.
463		¿Entendéis lo que quiere decir E4?
464		Que en la propiedad anterior [la quinta] yo puedo extraer el factor común
465		pero también puedo verla del otro lado,
466		es decir, también puedo meter ese numerito
467		pero sólo afecta a una fila o a una columna.
468		Bueno venga propiedad 7, nos quedan 3 eh, 7, 8 y 9, por ahora.
469		Bueno propiedad 7 dice, si una fila o columna es suma de dos,
470		su determinante puede descomponerse en suma de los determinantes
471		de dos matrices,
472		bueno pues resulta que si yo tengo en el determinante $a+a'$ y $b+b'$ en la
473		primera columna y c y d en la segunda.
474		Es decir, yo tengo una columna y esa columna es suma de dos números,
475		hay veces que me puede interesar separar la suma,

476		¿cómo separaríamos eso en dos?
477		Pues en el primer determinante sería a, c [en la primera fila]
478		y b, d [en la segunda fila]
479		y eso iría sumado ¿con qué otro determinante?
480	E11:	Con la a', c [en la primera fila] y b', d [en la segunda fila].
481	Aly:	Bueno pues venga el ejemplo,
482		[este ejemplo, a diferencia de los anteriores que venían en el libro,
483		lo propone Aly].
484		Supongamos que tenemos en un determinante
485		7+3 y 4+2 [en la primera columna] y 3, 2 [en la segunda columna].
486		¿Por qué me puede interesar a veces hacer esa separación?
487		Venga, ¿qué tengo que poner en la primera columna?,
488		hay una suma tanto en el primer elemento como en el segundo elemento.
489	E1:	7, 3 [en la primera fila], 4, 2 [en la segunda fila] más
490		¿y en el segundo [determinante] qué quedaría?
491	Aly:	3,3 [en la primera fila] y 2, 2 [en la segunda fila].
492		¿Ven por qué me interesa separar? [en la suma de dos determinantes].
493	E2:	Porque el segundo se anula.
494	Aly:	Claro, porque hay veces que al separar,
495		resulta que hay uno [determinante] que se anula, vale.
496		Entonces es mejor primero hacer esto y aplicar la propiedad
497		y no hacer todo el cálculo, sino separar en dos, porque claro,
498		en nuestro ejemplo el segundo determinante tiene dos columnas iguales
499		entonces su determinante es 0, ¿de acuerdo?
500		Bueno ahí en el libro trae un desarrollo teórico,
501		es facilito sólo hay que aplicar las propiedades distributivas bien
502		y no tiene más historia [en el libro se desarrolla el primer determinante,
503		luego se aplica la propiedad distributiva y se asocia de tal forma
504		que se llegue a la suma de los determinantes].
505		Bueno la propiedad 8, si a una fila o columna de una matriz se le suma
506		la otra columna o fila multiplicando por un número,
507		el determinante de la nueva matriz es igual al de la primera.
508		Bueno resulta que tenemos un determinante formado por dos filas,
509		F1 y F2 y ahora esta propiedad me dice que eso es lo mismo
510		que si a la F2 le sumo una combinación lineal de la primera fila,
511		es decir, ahora tengo a la F1 y en donde tenía la F2, tendré $F2+kF1$,
512		k es un número, una constante.
513		Es decir, si yo tengo una fila o también sirve para una columna,
514		a una fila del determinante le sumo algún número multiplicado por
515		la otra fila [Aly señala eso en la pizarra] y el determinante no varía, vale.
516		¿Por qué es eso?
517		Bueno pues porque... a ver vamos a ver, un ejemplo así en general sería,
518		el determinante a, b [en la primera fila],
519		c, d [en la segunda fila], tenemos ese determinante,
520		ahora a la segunda columna le vamos a...,
521		bueno mejor vamos a verlo por filas,
522		a la segunda fila le vamos a sumar una constante por la fila de arriba,
523		bueno pues venga, a la fila de arriba la dejo igual [a, b]

524		y en la fila de abajo, es a la que le voy a sumar una constante por la fila
525		de arriba, sería [en la segunda fila] $c+ka$ y
526		¿cuál sería el segundo elemento? [en la segunda fila].
527	E2:	$d+ka$.
528	Aly:	$d+ka$.
529		Vamos a ir haciendo cuentas en el segundo miembro [en la segunda fila],
530		¿qué cambios podemos hacer ahí?,
531		¿qué propiedad se puede aplicar ya ahí?,
532		¿qué pasa con esta segunda fila? [Aly señala la segunda fila del
533		determinante ampliado].
534		Pues lo tengo como suma.
535	E11:	Aly.
536	Aly:	¿Qué?
537	E11:	Ahí no sería b .
538	Aly:	¿Dónde?
539	E11:	Ahí, no sería $d+kb$ [en el segundo elemento de la segunda fila].
540	Aly:	Si [Aly borra $d+ka$] $d+kb$, vale.
541		Venga pues aquí [en la segunda fila del determinante ampliado]
542		tenemos a la segunda fila como suma de dos miembros,
543		este elemento $[c+ka]$ es suma de dos y este elemento $[d+kb]$
544		también es suma de dos, luego por la propiedad anterior
545		¿qué nos queda ahí?
546		Pues que ese determinante [el ampliado],
547		lo podemos separar en dos determinantes.
548		Es decir, primera fila a , b en los dos casos
549		[en la primera fila de los determinantes en los que se separa].
550		¿Y en la segunda fila qué me va a quedar?
551	E1:	En el primer determinante sería c , d [en la segunda fila].
552	Aly:	Si sería c , d .
553	E1:	Y en el segundo [determinante] ka y kb [en la segunda fila].
554	Aly:	Bueno este claramente se cumple [pues se tiene que el primer
555		determinante es el mismo que el de partida].
556		¿Qué pasa con el otro?
557		[Con el segundo determinante].
558	E2:	Que es nulo.
559	Aly:	Si es que este es 0, ¿pero por qué es 0?
560	E1:	Porque la k sale para fuera.
561	Aly:	Porque la k sale para fuera si quieren y directamente tienen dos filas
562		iguales $[a, b]$.
563		O también porque la fila 2 es proporcional a la fila 1,
564		es más fácil todavía, ¿no? Si es proporcional, ya no necesitan sacar la k .
565		Entonces el segundo determinante es 0 porque las dos filas
566		son proporcionales.
567		Con lo cual podemos ver que los determinantes son iguales
568		[El de partida y el que quedó].
569		Es que claro al sumarle aquí [en la segunda fila] una multiplicación
570		de la primera fila en este caso por una constante $[kF1]$,
571		eso al final se me va a anular,

572		se separan en la suma de dos determinantes y el segundo es nulo,
573		ahí en el libro lo tenéis con columnas,
574		pero vamos que da lo mismo eh.
575		Bueno la última propiedad, por el momento.
576		Vamos a ver a qué es igual el producto,
577		digo perdón el determinante de un producto de matrices.
578	E4:	¿Y el ejemplo con números de la propiedad 8?
579	Aly:	¿Cómo?
580	E4:	El ejemplo con números, de la 8.
581	Aly:	A vale el ejemplo con números de la propiedad 8, venga.
582		Ejemplo, a ver, dice ahí que tu tienes un determinante,
583		el que tú quieras.
584		Vamos a poner 1,4 [en la primera fila], 3,7 [en la segunda fila].
585		Vale, y lo que dice esa propiedad es que si tú coges la fila de abajo y le
586		sumas, si a la segunda fila le sumamos un numerito multiplicando los
587		elementos de la primera pues el determinante no varía.
588		A ver toma el 3 y súmale yo qué se,
589		lo mismo que cuando hacíamos las transformaciones de sumarle a la F2
590		cuatro veces la fila 1 [F2+4F1],
591		esas cosas que hemos hecho hasta ahora.
592		A 3 le sumo 4 veces lo que está arriba sería 7 [3+1.4]
593		y al 7 le sumo 4 veces lo que está arriba, es 23 [7+4.4], entonces
594		dice [la propiedad] que este determinante y el nuevo son iguales.
595		Y luego se hace y se comprueba que son iguales,
596		¿pero por qué son iguales?
597		Pues porque este nuevo determinante [1,4 en la primera fila y 3+4.1,
598		7+4.4 en la segunda fila] se separa en la suma de dos determinantes.
599		Por un lado tendríamos el determinante 1,4 [en la primera fila]
600		y 3,7 [en la segunda fila] y ¿el otro qué me queda?
601		1,4 [en la primera fila] y abajo [en la segunda fila] 4 por 1 y 4 por 4
602		¿Esta fila [la segunda] no es proporcional a la primera?
603		Si.
604		Luego ese determinante [el segundo de la suma] es 0,
605		entonces ¿qué me queda?
606		Pues del mismo del que partimos.
607	E1:	Una pregunta, ¿pero qué pasa si tenemos a, b [en la primera fila]
608		y c, c [en la segunda fila]?
609	Aly:	Dos elementos iguales en la segunda fila.
610		A ver, ¿tú lo que dices es qué pasa si yo tengo el determinante a, b [en la
611		primera fila] y c, c [en la segunda fila]?
612	E1:	Si.
613	Aly:	Pues aquí lo que puedes hacer es sacar la c y te quedaría c por el
614		determinante a, b [en la primera fila] y 1, 1 [en la segunda fila].
615		Eso si se puede hacer, es como sacar factor común.
616	E1:	Sería...
617	Aly:	Vamos a ver.
618	E1:	Y saldría a-b multiplicado eso por c [al hacer el determinante].
619	Aly:	Si exactamente.

620		Bueno pues venga, la última propiedad es la del determinante
621		de un producto.
622		Una cosa, esto de aquí [la propiedad 8].
623		La última propiedad lo que dice es que el determinante de una matriz
624		en la cual yo he hecho una transformación elemental,
625		me da lo mismo que el determinante de la matriz de partida,
626		es decir, que el determinante no varía aunque yo haga por en medio
627		transformaciones elementales.
628		Bueno y la última, venga, la propiedad 9, ¿qué sería?,
629		esta es muy importante también.
630		El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los
631		determinantes, quiere decir que yo tengo un determinante y dentro el
632		producto de dos matrices, entonces yo puedo separar eso en el producto
633		de los determinantes de cada matriz.
634		¿De acuerdo?
635		[Suenan los timbres que indican que la clase ha terminado].
636		Bueno ahí lo tienen en la página 77, hacéis ese ejemplo que tenéis en el
637		libro en casa, les dan dos matrices A y B, las multiplicáis y calculad esos
638		determinantes y veréis que se comprueba esa igualdad y haber si podéis
639		hacer, bueno yo propongo, sugiero lo que hay que hacer pero ya depende
640		de cada uno.
641		Los ejercicios que están por detrás son interesantes,
642		están en la página 78, mirad un poquito los que ya están resueltos
643		y luego eso les sirve para poder hacer el 1 y el 2 [de los ejercicios
644		propuestos].

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la séptima clase grabada de la profesora Aly del lunes 27/10/08.

Resumen: Aly y algunos estudiantes resuelven ejercicios sobre las propiedades de los determinantes de orden 2, luego les presenta la regla de Sarrus y algunos ejemplos. Posteriormente les da una nueva propiedad para los determinantes, en particular generaliza una propiedad de determinantes de orden 2 para determinantes de orden 3 y finalmente resuelve 4 ejemplos sobre las propiedades de los determinantes de orden 3.

L		Transcripción
1	Aly:	[Empieza a resolver el ejercicio 2 que viene en el libro en la página 78,
2		en la sección de ejercicios resueltos].
3		Si nos dan el dato de que la matriz A es p, q [en la primera fila],
4		r, s [en la segunda fila] y que el determinante de esa matriz A vale 4,
5		nos piden calcular el determinante 7p, 7q [en la primera fila],
6		r, s [en la segunda fila].
7		¿Cómo lo hacemos?
8		Bueno pues primero sacamos el 7 que es común en la primera fila
9		¿Y qué queda?
10		Pues saco el 7 por el determinante p, q [en la primera fila],
11		r, s [en la segunda fila],
12		¿Y ese determinante a qué es igual?
13	E1:	7 por 4.
14	Aly:	7 por el valor del determinante que ya nos lo dan, que es 4,
15		entonces es 7 por 4 y eso es 28, vale.
16	E2:	¿Se puede resolver el determinante a partir de lo que está?
17		[Sin usar el dato de que el determinante vale 4].
18	Aly:	No, porque tendríamos $ps - qr = 4$ tienes una ecuación con 4 incógnitas.
19		Cuidado con el que sigue ahora,
20		[el siguiente apartado del mismo ejercicio].
21		Vamos a ver, me dicen que calcule el valor del determinante
22		de 11A [11A], ¿de acuerdo?
23		Entonces 11A, el valor de ese determinante, ¿a qué sería igual eso?
24		11A ¿qué significa?, ¿11 por A?
25		Entonces, ¿puedo decir que $ 11A $ es igual a $11 A $?
26	E1:	Si.
27	Aly:	¿Si?
28	E2:	No, tendría que ser 2 veces [el 11].
29	Aly:	Tendría que ser 2 veces, por eso digo que cuidado con este,
30		porque este es un error muy común que tenemos a veces que pensamos
31		que el 11 se sale del determinante y que queda $11 A $.
32	E1:	Eso es 11 por 11 por A.
33	Aly:	Claro, si nos detenemos un poquito en escribir,
34		sería calcular el determinante de la matriz 11 por A,
35		sería 11p, 11q [en la primera fila]; 11r, 11s [en la segunda fila].
36		Nosotros hemos dicho que podemos sacar un término común de una fila
37		o de una columna, un número que esté multiplicando todos los elementos
38		de esa fila o de esa columna,
39		entonces saco el 11 de aquí arriba [de la primera fila]
40		pero sale otro 11 de la segunda fila.

41		Por lo tanto no es 11 multiplicado por el determinante de A,
42		¿de acuerdo?
43		Es 11 por 11, luego saldría 121 [de 11 por 11]
44		por 4 [que es lo que vale el determinante de A de acuerdo al dato
45		que dan en el ejercicio].
46		Entonces es 484.
47		Entonces mucho cuidado, aquí sólo tenéis dos filas pero
48		cuando tengáis más filas o columnas,
49		por ejemplo si fuera una matriz de orden 3, ¿qué pasaría?
50		Pues sacaría el 11 tres veces, uno de cada fila.
51		Bueno cuidado con eso.
52		Venga apartado c es q, p [en la primera fila], s, r [en la segunda fila].
53		Si yo quiero poner este determinante en el que ya tengo [A].
54		¿Cómo lo hago?
55		¿Qué observamos de este determinante respecto al original?
56	E2:	Se cambian.
57	Aly:	Se cambian las columnas verdad.
58		Pero ¿qué pasaba si cambiaba el orden de las columnas?
59		Pues el determinante cambia de signo.
60		Entonces hay que tener cuidado pues esto difiere de lo que hacíamos
61		normalmente con las matrices cuadradas.
62		Entonces el determinante sería igual a menos el determinante de
63		p, q [en la primera fila] y r, s [en la segunda fila].
64		Y como sabemos que el $ A =4$.
65		Entonces el resultado es -4.
66		Tened cuidado con eso.
67		Bueno ahora el apartado d [del mismo ejercicio].
68		¿Cómo calculamos el determinante de A inversa?
69		Pues si sabemos que el determinante de A por A inversa es igual
70		al determinante de A por el determinante de A inversa,
71		por la propiedad del producto,
72		y ese producto es igual al determinante de la identidad que es 1
73		y además nos dan el dato de que $ A =4$,
74		entonces el determinante de A inversa es 1 cuarto.
75		Bueno ahora vamos a pasar a los ejercicios propuestos.
76		¿Alguien quiere pasar a la pizarra a hacer el primero?
77		E12, bien.
78	E12:	[Pasa a la pizarra].
79	Aly:	Venga por fila sería 13, 6 [en la primera] y 4,2 [en la segunda].
80		Vamos a calcular el determinante.
81	E12:	[E12 escribe $26-24=2$, ese es el valor del determinante].
82		[E12 continúa resolviendo ahora el apartado b del mismo ejercicio].
83		[Determinante de 13,6 en la primera fila y 4, -2 en la segunda,
84		$-26-24=-50$].
85		[E12 continúa resolviendo ahora el apartado c del mismo ejercicio].
86		[Determinante de 1,0 en la primera fila y 11,0 en la segunda,
87		ese determinante es igual a 0].
88	E1:	Ese da 0.

89	Aly:	¿Qué?, ¿cuál vale 0?
90	Es:	El c.
91	Aly:	El apartado c, el d, el e y el f dan 0.
92	E2:	Pero te piden por qué [En el ejercicio piden decir por qué son 0 en
93		el caso de que ese sea el valor del determinante].
94	Aly:	Casi siempre que de 0 hay que decir por qué,
95		a menos que sea muy evidente.
96		E12 ¿por qué en el apartado c da 0?
97	E12:	Porque hay una columna de ceros.
98	Aly:	¿En el d por qué da 0?
99		[En el d hay que calcular el determinante de 7,7 en la primera columna
100		y -2,-2 en la segunda].
101	E12:	Porque dos columnas son iguales.
102	Aly:	¿En el e por qué da 0? [En el e hay que calcular el determinante de 3, 11
103		en la primera fila y 21,77 en la segunda].
104	E12:	[E12 hace el determinante de manera normal y escribe $231-231=0$].
105	Aly:	En el e tú lo has hecho, pero antes de hacer las cuentas, ¿por qué da 0?
106		¿Tú no lo has visto?
107		Fíjate en la primera fila y la segunda fila.
108		¿Hay un número que multiplicado por 3 te de 21 y que ese mismo
109		número multiplicado por 11 te de 77?
110	E12:	Si, el 7.
111	Aly:	Pues la segunda fila es 7 veces la primera,
112		luego son dos filas proporcionales por lo tanto el determinante vale 0,
113		por lo tanto no habría necesidad de hacerlo [desarrollarlo],
114		pero que no lo veis, pues entonces se hace y ya está.
115		¿Y en el último [apartado f] por qué es 0?
116		[En el f hay que calcular el determinante de -140, 7 en la primera fila
117		y 60, -3 en la segunda].
118	E12:	Pues porque la columna 1 es menos 20 veces la columna 2.
119	Aly:	Bien, pues anótalo, ponlo ahí al lado,
120		pues imagínate que esto es un ejercicio de selectividad,
121		que no lo es pero bueno,
122		y el que te lo tiene que corregir tiene que saber si tu sabes o no sabes,
123		si tú te quedas así sin anotar nada pues cabe la duda de que
124		se lo hayas copiado al de al lado.
125		Bueno y en el apartado e también hay que anotar que la fila 2 es
126		7 veces la fila 1.
127		Bueno pues ahora el ejercicio 2 [de los propuestos].
128		Aquí nos dan los datos de que la matriz A es l, m en la primera fila
129		y n, p en la segunda, además se sabe que el $ A =-13$.
130		¿Quién lo hace?
131	E9:	[E9 pasa a la pizarra].
132	E9:	[E9 escribe el apartado a, piden calcular el determinante de
133		n, p en la primera fila y l, m en la segunda].
134		[E9 escribe que ese determinante es el mismo que el de partida pero
135		con signo menos y eso igual a 13].
136	Aly:	Bien, nos piden calcular ese determinante que es el mismo que

137		el de partida sólo que con las filas cambiadas,
138		entonces cambia de signo y el resultado es 13, muy bien.
139		Y en el apartado b nos piden calcular el determinante de 6A,
140		entonces es como la del 11 [el ejemplo al inicio de esta clase donde
141		había que sacar el 11],
142		hay que tener cuidado porque el 6 sale dos veces,
143		entonces nos queda 36 por el determinante de A que son 36 por -13.
144	E9:	[E9 había escrito 36.-13].
145	Aly:	E9 cuando escribas 36 por -13, usa paréntesis, escribe ahí el paréntesis.
146		[En la pizarra].
147	E9:	[E9 pone el paréntesis y escribe el resultado, 468].
148		[E9 Continúa resolviendo ahora el apartado c del mismo ejercicio].
149		[Determinante de l, 4m en la primera fila y n, 4p en la segunda].
150		[E9 saca el 4 de la segunda columna por el determinante que queda,
151		que es el de partida, entonces es 4 por -13, -52].
152	Aly:	[Aly mientras se acerca al lugar de los estudiantes que levantan su mano,
153		para aclararles dudas].
154	E9:	E9 continúa resolviendo ahora el apartado d del mismo ejercicio].
155		[Determinante de A inversa, E9 escribe que el determinante de A inversa
156		es igual a 1 sobre el determinante de A y entonces eso es igual a menos 1
157		treceavo].
158	Aly:	Muy bien, fijaros que E9 ha escrito una propiedad que se cumple en
159		general y que se deduce de la definición de matriz inversa y
160		de la propiedad de que el determinante de un producto es el producto
161		de los determinantes,
162		entonces de aquí en adelante cuando nos piden calcular el determinante
163		de una inversa pues podemos usar esta propiedad claro.
164		Bueno pues vamos a ver una cosita de los determinantes de orden tres,
165		cómo se hacen, una regla práctica, que es la regla de Sarrus.
166	E1:	¿Regla de qué?
167	Aly:	Regla de Sarrus.
168		Vamos, es teoría pero es bonita, que no es nueva propiedad.
169		¿Si quedo claro lo del 6 ese verdad? [Se refiere al ejercicio anterior en el
170		que había que sacar el 6 del determinante dos veces].
171		Si hubiese más filas, pues por cada fila sale siempre [el número que esté
172		multiplicando la matriz A dentro del determinante].
173		Si hubiera 5 filas pues te quedaría el 6 cinco veces fuera.
174		Bueno pues venga, vamos a ver la regla práctica para calcular los
175		determinantes de orden 3, vale.
176		Venga, pues se llama regla de Sarrus,
177		lo tenéis ahí en el libro [de texto] página 79, lo tienen ahí,
178		bueno pues resulta que cuando tenemos un determinante de manera
179		general, a sub uno uno, a sub uno dos, a sub uno tres [en la primera fila];
180		a sub dos uno, a sub dos dos, a sub dos tres [en la segunda fila];
181		a sub tres uno, a sub tres dos, a sub tres tres [en la tercera fila].
182		Bueno vamos a ver cómo se calcula siempre un determinante con estas
183		características, se obtiene haciendo todos los productos posibles
184		dentro de estos nueve elementos, de manera que en estos productos

185		aparezca siempre un elemento por cada fila y por cada columna,
186		aparte ahí hay que tener en cuenta los signos,
187		¿cómo se calculan en este caso?
188		Pues se escribe primero el producto de los tres elementos de la diagonal
189		principal, es decir, a sub uno uno por a sub dos dos por a sub tres tres,
190		es decir, esto de aquí [Aly señala los elementos de la diagonal principal
191		a través de flechas].
192		Luego iría más, fijaros en esta paralela a la diagonal principal,
193		a sub uno dos por a a sub dos tres,
194		claro aquí estoy multiplicando un elemento de la primera fila y uno de la
195		segunda entonces esos dos elementos van multiplicados por el a tres uno
196		[Aly indica el producto de estos tres elementos relacionándolos
197		con flechas, de tal manera que forma un triángulo en el cual cada
198		elemento sería un vértice].
199		Entonces [siguiendo con la fórmula para el cálculo del determinante] de
200		estos tres productos los escribimos como a sub uno dos por a sub dos tres
201		por a sub tres uno, más...
202		La otra paralela a la diagonal principal,
203		ahora la otra paralela a la diagonal principal [la paralela por debajo
204		de la diagonal principal] y lo multiplicamos por el elemento que está
205		enfrente [el a sub uno tres], vale.
206		[Aly indica el producto de estos tres elementos relacionándolos
207		con flechas, de tal manera que forma un triángulo en el cual cada
208		elemento sería un vértice].
209		Sería entonces a sub dos uno por a sub tres dos por a sub uno tres.
210		Bueno ahora lo que sigue de ahí todo con signo menos.
211		Sería el producto de la diagonal secundaria [Aly borra cada una de las
212		líneas con flechas que había indicado antes]
213		que sería a sub uno tres por a sub dos dos por a sub tres uno
214		[Aly señala los elementos de la diagonal secundaria a través de flechas].
215		Luego irían con signo menos las dos paralelas a la diagonal secundaria,
216		es decir, ésta [la línea de a sub dos tres a a sub tres dos]
217		luego por a sub uno uno [Aly indica el producto de estos tres elementos
218		relacionándolos con flechas, de tal manera que forma un triángulo en el
219		cual cada elemento sería un vértice].
220		Después sería el producto de a sub dos uno por a sub uno dos por
221		a sub tres tres, vale, [Aly indica el producto de estos tres elementos
222		relacionándolos con flechas, de tal manera que forma un triángulo en el
223		cual cada elemento sería un vértice].
224		Entonces vamos a escribirlas [lo referente a las dos paralelas a la
225		diagonal secundaria], eso va con signo negativo,
226		da igual en el orden que las escribamos.
227		Sería menos a sub dos tres por a sub tres dos por a sub uno uno menos
228		a sub tres tres por a sub uno dos por a dos uno.
229		Ese sería el desarrollo por la regla de Sarrus,
230		que es para determinantes de orden 3, es muy útil,
231		se utiliza muchísimo esa regla, ya la vamos a usar
232		y bueno ahí tenéis en el libro digamos una regla con un dibujito,

233		yo antes hablaba de la diagonal principal y de la diagonal secundaria
234		aquí en cambio es con un dibujo [en el libro se indica mediante un
235		dibujo sólo la trayectoria que hay que seguir para hacer la multiplicación
236		de los elementos].
237		Bueno vamos a hacer el ejercicio que viene ahí en el libro [el 1],
238		calcular el determinante de 5,1,4 [en la primera fila];
239		0,3,6 [en la segunda fila]; 9,6,8 [en la tercera fila].
240		De todas formas, antes de ponerse a resolverlo y hacer cuentas,
241		echadle un ojito al determinante,
242		porque si se ve alguna proporcionalidad,
243		alguna fila que sea igual,
244		alguna fila que sea toda nula o cualquier cosa de estas,
245		pues las propiedades están ahí para utilizarlas,
246		por lo tanto antes de empezar, echarle un ojito, vale.
247		Este ejercicio es el apartado a pero vamos a hacer el b también
248		y luego el a y b del ejercicio 2.
249		El determinante de 9,0,3 [en la primera fila],
250		-1,1,0 [en la segunda fila], 0,2,1 [en la tercera fila].
251		Está claro ya, que en cuanto haya más ceros dentro del determinante
252		será mejor eh, ¿de acuerdo?
253	E1:	En el b [del ejercicio 1] es muy fácil porque los sumandos con signo
254		negativo dan 0 todas.
255	Aly:	Claro exactamente en el b, fijaros es muy importante lo que ha dicho E1,
256		los sumandos, todos que van en el sentido de la diagonal secundaria
257		se anulan, pues cuando yo multiplique la diagonal secundaria
258		[3 por 1 por 0] eso me dará 0,
259		y luego la otra sería 2 por 0 por 9 pero también me da 0
260		y la última sería 1 por 0 por -1 que también me da 0,
261		entonces todas esas se anulan,
262		entonces ahí hay tres sumandos que se nos van.
263	E1:	Sin embargo, luego en los sumandos [Aly lo interrumpe].
264	Aly:	Bueno pero venga, venga, hay que hacerlo.
265	E1:	Yo ya lo tengo hecho, por eso lo digo.
266	Aly:	Ya.
267		[Todos se quedan en silencio intentando resolverlo, E1 observa lo que ha
268		hecho y mientras Aly sigue supervisando a todo el grupo].
269	E1:	¿Calcular el determinante es lo mismo que halle el valor?
270	Aly:	Es lo mismo, eso lo hacen en el libro para no poner siempre lo mismo.
271	E11:	[E11 levanta su mano para indicar que quiere que Aly se acerque
272		a su lugar].
273	Aly:	Dime.
274	E11:	¿Cuáles son los que van con el signo negativo?
275	Aly:	Los que van en dirección de la diagonal secundaria,
276		es decir en el apartado a, sería menos 9 por 3 por 4,
277		menos 6 por 6 por 5 menos 8 por 1 por 0.
278		[Aly continúa supervisando que los estudiantes hagan los ejercicios].
279		[Aly se acerca a E7].
280		Venga E7, ¿te has enterado?

281	E7:	[Observa a Aly como esperando que le explique lo que debe hacer].
282	Aly:	En el a [primer apartado], primero sería 5 por 3 por 8, luego 1 por 6 por 9
283		y luego sería 0 por 6 por 4, vale.
284	E7:	Si.
285	E10:	[E10 pasa a la pizarra a resolver el apartado a del ejercicio 1].
286	Aly:	Habéis hecho el a [apartado], ¿cuánto da?
287	E1:	Menos 114.
288	Aly:	Si.
289		Y el b es mucho más fácil, claro, mientras más ceros haya,
290		más fácil les resultará.
291		A ver el primer producto ahí [en el apartado a del ejercicio 1 que está
292		haciendo E10] ¿cuál sería?
293		¿Tenéis claro lo que hay que multiplicar?
294		Pues 5 por 3 por 8.
295		[Aly se acerca a su escritorio y pregunta].
296		¿Qué ha pasado con E3? ¿Alguien sabe algo de él?
297	Es:	No.
298	E10:	[E10 termina de hacer el apartado a del ejercicio 1 en la pizarra].
299		[E10 escribió $120+54+0-108-180-0=-114$].
300	Aly:	Muy bien, bueno si alguien no se entera de alguno, que me llame.
301	Es:	[Los estudiantes (Es) siguen trabajando].
302	Aly:	¿Este [el apartado a que ha hecho E10 en la pizarra] les salió bien?
303		¿a todos?
304		A ver a ti E7, [Aly se acerca al lugar de E7 y le revisa lo que hizo],
305		vamos a ver qué hiciste, [Aly revisa], muy bien E7.
306		Venga E2 sal a hacer los otros [el apartado b del ejercicio 1 y el a y b
307		del ejercicio 2].
308	E2:	[Pasa a la pizarra].
309	Aly:	¿E5 cómo vas?
310		[Revisa lo que ha hecho E5] Muy bien.
311	E2:	[Termina de hacer los ejercicios en la pizarra].
312	Aly:	Bueno vamos a ver, en el b [del ejercicio 1] queda 9 más -6 son 3, bien.
313		Bueno fijaros que aquí [en el apartado b del ejercicio 2,
314		en el determinante que los elementos son 10,47,59 en la primera fila,
315		0,10,91 en la segunda fila y 0,0,10 en la tercera fila],
316		tenemos otra propiedad en general,
317		¿Qué observáis en este determinante?, ¿en esta matriz?
318	E2:	Que es triangular.
319	Aly:	Que es triangular superior, es decir, que por debajo de la diagonal todos
320		sus elementos son nulos, entonces a la hora de hacer el cálculo,
321		al aplicar la regla de Sarrus resulta que la diagonal principal queda 1000
322		[el producto de los tres elementos de la diagonal principal],
323		pero luego ya todos los productos dan 0.
324	E6:	A mi no me daba 1000.
325	Aly:	Si, pues precisamente lo que quiero que vean es que en determinantes
326		como este, si yo tengo 10,47,59 en la primera fila;
327		0,10,91 en la segunda fila y 0,0,10 en la tercera fila.
328		Bueno pues a la hora de hacer los cálculos nos va a quedar 10 por 10 por

329		10, ¿verdad? [Aly voltea a ver a E6].
330		Pero ahora esta paralela a la diagonal principal [47,91]
331		por 0 [el elemento a sub tres uno] pues se anula
332		y luego sería la otra diagonal paralela que sería 0 por 0 por 59
333		que también se anula.
334		Bueno luego la diagonal secundaria sería 0 por 10 por 59 también da 0,
335		después la otra 91 por 0 por 10 da 0 y la última 10 por 47 por 0 es 0.
336		Entonces todos se anulan excepto uno, que es la diagonal principal.
337		Luego ya de aquí en adelante cualquier diagonal,
338		perdón cualquier matriz que sea triangular superior,
339		es decir, que por debajo de la diagonal principal nos de todo 0,
340		cualquier matriz de este estilo [Aly escribe un determinante y dentro de
341		él dibuja triángulo de la diagonal principal hacia arriba,
342		luego debajo del triángulo escribe un 0 grande].
343		Pues su determinante, ¿a qué va a ser igual?
344	Es:	A la diagonal.
345	Aly:	Pues a los elementos a sub uno uno por a sub dos dos por a sub tres tres.
346		Y eso va a ser en general, es decir, no sólo en este caso,
347		como el desarrollo de Sarrus siempre es el mismo,
348		pues entonces eso va a pasar siempre,
349		va a dar el producto de los elementos de la diagonal principal
350		a sub uno uno por a sub dos dos por a sub tres tres.
351		¿Y si fuese una matriz del otro tipo?
352		Es decir, ¿si fuera una matriz en la que todos los elementos por debajo
353		de la diagonal secundaria sean 0?
354		Es decir, yo tendría la diagonal secundaria que sería a sub uno tres,
355		a sub dos dos, a sub tres uno, luego todo por debajo 0
356		[Aly escribe un 0 grande por debajo de la diagonal secundaria]
357		y por arriba lo que sea, números cualesquiera [deja vacío ese espacio
358		en el determinante], vale.
359		¿Cuánto me va a dar ese determinante?
360	E1:	Pues menos.
361	Aly:	Menos.
362	E1:	a sub uno tres por a sub dos dos por a sub tres uno.
363	Aly:	Exactamente, el único producto de la regla de Sarrus que no me sale 0 va
364		a ser ese de la diagonal secundaria pero cuidado que en este caso va a
365		cambiar de signo, será menos a sub uno tres por a sub dos dos
366		por a sub tres uno, ¿de acuerdo?
367		Luego eso, ya de aquí en adelante cada vez que veáis una matriz como
368		ésta [Aly señala la matriz triangular superior] directamente va a dar el
369		producto de los elementos de la diagonal principal,
370		en este caso 10 por 10 por 10 en este caso 1000, vale.
371		Y si es el contrario, si es esto así [Aly señala el determinante donde por
372		debajo de la diagonal secundaria son 0] pues dará esa diagonal
373		secundaria [el producto de sus elementos] precedida por el signo menos.
374		Cuando digo que sale negativo [Aly señala el menos que precede al
375		resultado del determinante donde por debajo de la diagonal secundaria
376		son 0], quiere decir que cambia de signo, he, pues puede ser que si el

377		producto me sale negativo con el menos por delante, saldría al final
378		el resultado positivo, ¿de acuerdo?
379		Bueno pues vamos a pasar a otro tipo de ejemplo que está en la página
380		81 [del libro de texto].
381		El ejercicio 3, “Justifica, sin desarrollar estas igualdades:”
382		Una cosa, antes de hacer el ejercicio.
383		Vamos a ver, el otro día les di una propiedad que decía,
384		aunque el otro día estaba centrada en determinantes [propiedades]
385		de orden dos, vale, pero hoy ya tenemos determinantes de orden tres,
386		entonces a ver, el otro día os dije que en un determinante de orden 2×2 si
387		la segunda fila era proporcional a la primera, ¿cuánto valía el
388		determinante?
389	Es:	0.
390	Aly:	0, verdad, esa es una propiedad que vimos el otro día.
391		Ahora como ya vamos a tener tres filas y tres columnas,
392		esta propiedad digamos que se generaliza de la siguiente forma,
393		digamos que tenemos F_1 [fila 1], F_2 [fila 2] y en la tercera fila ya no
394		puedo decir que sea proporcional, sino que si hay una combinación lineal
395		que sería k por F_1 más h por F_2 .
396		¿Cuánto dará ese determinante?
397	E1:	0.
398	Aly:	Que también es 0, vale.
399		Pero, ¿por qué dará eso?
400		Esto digamos que es una nueva propiedad o una generalización de esta
401		que vimos el otro día, vale.
402		Bueno, ¿por qué ocurre esto? [que en la de orden 3 también da 0].
403		Acordáis también que os dije que si una fila era suma de varios
404		elementos, eso lo podíamos separar como una suma de dos
405		determinantes, si, ¿nos acordamos?
406		Entonces ese determinante lo podemos separar como,
407		en un determinante sería F_1 , F_2 y en la tercera fila k por F_1 .
408		Más...
409		El otro determinante que sería F_1 , F_2 y en la tercera fila h por F_2 .
410		Y ahora, ¿qué ocurre?
411		Primer determinante, ¿qué se ve ahí para que ese determinante valga 0,
412		pues que hay una fila proporcional a otra [Aly señala la primera y la
413		tercera, F_1 y k por F_1], luego eso es 0, por ese motivo.
414		Segundo determinante, hay otra fila proporcional a otra [Aly señala la
415		segunda y la tercera, F_2 y h por F_2], por lo tanto eso es 0.
416		Por lo tanto el valor total del determinante es 0, ¿de acuerdo?
417		Entonces claro, el otro día hablar de combinación lineal con dos filas,
418		no tenía sentido porque sólo teníamos dos [filas],
419		podríamos hablar de proporcional no de combinación lineal,
420		pero ahora sí podemos hablar de combinación lineal de otras,
421		[Aly señala la tercera fila, k por F_1 más h por F_2],
422		de las anteriores, vale, entonces esta propiedad es generalización de ésta
423		[de la de proporcionalidad para determinantes de matrices de orden 2].
424		Ahí en esa página [en la página 81 del libro de texto] la tienen como

425		propiedad 9.
426		Bueno pues vamos a anotarla, ¿la clase pasada nos quedamos en la
427		propiedad 9?
428		Le voy a poner propiedad “nueva”, bueno vamos a ponerle propiedad 10,
429		“Si una matriz tiene una línea que es combinación lineal de otras,
430		entonces el determinante de esa matriz es 0, y recíprocamente si un
431		determinante es 0, tiene una fila (o una columna) combinación lineal
432		de las demás”.
433		Bueno lo digo por si hace falta, bueno entonces ahora sí vamos a hacer el
434		ejercicio 3, “justifica sin desarrollar, estas igualdades”,
435		hay que ver que esos cuatro determinantes dan 0.
436		Entonces se trata de ver qué propiedades o ver qué fila es de alguna
437		manera combinación lineal, si dice sin desarrollar, no me puedo poner
438		a hacerlos, vale, tengo que buscar esto, alguna fila que sea combinación
439		lineal de las otras.
440		El primer determinante, ¿por qué vale 0?
441		[En el primer determinante los elementos son 3,-1,7 en la primera fila,
442		0,0,0 en la segunda fila, 1,11,4 en la tercera fila].
443		¿Por qué vale 0?
444		Pues porque la segunda fila es nula, es decir la F2 es igual a 0.
445		Bueno ahora el segundo determinante que es 4,1,7 [en la primera fila];
446		2,9,1 [en la segunda fila]; -8,-2,-14 [en la tercera fila],
447		¿por qué es 0?
448		Pues porque la fila 3 es menos dos veces la fila 1,
449		es decir, F3 es igual a -2F1, y se pone eh,
450		la propiedad que se vea se anota.
451		Bien ahora en el tercer determinante que es 7,4,1 [en la primera fila];
452		2,9,7 [en la segunda fila]; 27,94,71 [en la tercera fila],
453		¿por qué es 0?
454		Pues porque la fila 3 es 10 veces la fila 2 más la fila 1,
455		es decir, F3 es igual a 10F2 más F1.
456		¿Y el apartado d?
457		Tenemos que calcular el determinante de 45,11,10 [en la primera fila];
458		4,1,1 [en la segunda fila]; 5,1,0 [en la tercera fila],
459		¿por qué vale 0?
460	E2:	Porque la fila 1 es 10 veces la fila 2 más la fila 3.
461	Aly:	Es decir, F1 es igual a 10F2 más F3, con lo cual el determinante también
462		vale 0.
463		Bueno pues muy bien, mañana seguimos vale, hacer en casa
464		el ejercicio 4 [que es el ejercicio que sigue].

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la octava clase grabada de la profesora Aly del martes 28/10/08.

Resumen: Aly resuelve un ejercicio de tres apartados que les había dejado para casa, luego hace otro ejercicio en el que hay que calcular determinantes de orden mayor que tres con las propiedades de los determinantes. Después aborda lo del menor complementario y adjunto de un elemento, primero ve un ejemplo y luego la definición, también aborda otra propiedad de los determinantes y enseguida trata de ver la demostración de dicha propiedad a través del cálculo de varios adjuntos pero no le da tiempo de terminarla.

L		Transcripción
1	Aly:	Bueno vamos a ver, ¿hicieron el ejercicio 4, los 3 apartados?
2		[Aly va preguntando a algunos estudiantes si lo hicieron o no,
3		algunos dicen que lo intentaron pero un estudiante dice que no sabe
4		como hacerlo].
5		Bueno vamos a ver nos dan ese determinante x, y, z [en la primera fila],
6		$5, 0, 3$ [en la segunda fila], $1, 1, 1$ [en la tercera fila].
7		Y tiene que este determinante vale 1.
8		Vale, entonces tenemos que este determinante vale 1 y ahora me piden
9		calcular en el apartado a el determinante de $3x, 3y, 3z$ [en la primera
10		fila], y los demás igual $5, 0, 3$ [en la segunda fila] y $1, 1, 1$ [en la tercera
11		fila].
12		Este es muy fácil ¿no?, ¿qué hay que hacer ahí?
13	E2:	Sacar el 3.
14	Aly:	El 3 que vemos que está multiplicando a todos en la primera fila,
15		lo extraemos fuera y por las propiedades de los determinantes nos queda
16		3 por el determinante x, y, z [en la primera fila], $5, 0, 3$ [en la segunda
17		fila], $1, 1, 1$ [en la tercera fila], con lo cual, si sabemos que el valor de
18		este determinante es 1, pues el resultado es 3 [de multiplicar 3 por 1],
19		vale, ¿de acuerdo?
20		En el apartado b,
21	E1:	Ese yo lo hice.
22	Aly:	¿Y cuánto te da?
23	E1:	1.
24	Aly:	En el apartado b, tenemos $5x, 5y, 5z$ [en la primera fila], $1, 0, 3/5$ [en la
25		segunda fila], $1, 1, 1$ [en la tercera fila].
26		Bueno vamos a ver por qué es 1.
27		A ver, de la primera fila está claro que extraemos el 5 fuera del
28		determinante entonces nos queda el 5 fuera y lo que nos queda es el
29		determinante x, y, z [en la primera fila], $1, 0, 3/5$ [en la segunda fila],
30		$1, 1, 1$ [en la tercera fila] y claro lo que nos despista ahí son esos $3/5$
31		¿verdad?
32		Bueno de la misma manera que la propiedad dice que un número se
33		puede sacar fuera de un determinante, la misma propiedad me dice que
34		un número que está fuera multiplicando el determinante ¿cómo lo puedo
35		expresar? [Aly señala la primera fila $5x, 5y, 5z$], multiplicando a la fila
36		que a mi me da la gana, a una fila [Aly pronuncia más fuerte la palabra
37		una] o a una columna ¿de acuerdo?

38		Bueno pues eso lo dice la misma propiedad esa, la propiedad que decía,
39		si tengo el determinante de a por F1 [en la primera fila] y abajo tengo F2
40		[en la segunda fila], puedo extraer a y me queda a por el determinante de
41		F1 [primera fila] y abajo F2 [segunda fila], ¿verdad?
42		Por la propiedad que vimos el otro día, si esto lo leemos, digamos de
43		derecha a izquierda, ¿qué es lo que estamos diciendo?, pues que un
44		número que está multiplicando a un determinante, ¿a qué es igual?,
45		pues al determinante formado por ese número multiplicando a la fila que
46		se quiera, o a la columna que se quiera.
47		Entonces este 5 [regresando al apartado b que se estaba resolviendo]
48		sería bueno volver a ponerlo dentro del determinante ¿en qué fila?
49	Es:	En la segunda.
50	Aly:	En la segunda claro, por la misma propiedad ese 5 lo multiplico por toda
51		la segunda fila, y entonces ya desaparece la fracción $[3/5]$ y además
52		volvemos al determinante que nos dicen que vale 1, es decir, nos queda
53		el determinante x, y, z [en la primera fila], 5, 0, 3 [en la segunda fila],
54		1, 1, 1 [en la tercera fila].
55		Y sabemos que este determinante vale 1.
56	E2:	Pero también se puede sacar el 5 y luego de la segunda fila sacar factor
57		común $1/5$ extraerlo y fuera del determinante queda 1, por el 1 que vale
58		el determinante pues es 1.
59	Aly:	Vale, hay otras formas de hacerlo, la idea de E2 es sacar factor común de
60		la segunda fila.
61		Que es parecida vamos, es volver a aplicar la propiedad, pero que sepáis
62		que eso también se puede hacer eh, la misma propiedad me dice que
63		puedo sacar factor común o meterlo en el determinante, no en todos los
64		elementos de la matriz solamente en una fila o columna, a ver ya que
65		estamos en esto sería determinante de $5x, 5y, 5z$ [en la primera fila],
66		$1, 0, 3/5$ [en la segunda fila], $1, 1, 1$ [en la tercera fila].
67		Bueno pues sacamos el 5 de la primera [fila] y de la segunda fila sacas
68		factor común $1/5$ pero algunos dirán, de dónde sacar factor común de la
69		segunda fila si el primer elemento es 1, pero ese 1 yo lo puedo escribir
70		como $5/5$ entonces ya está ahí $1/5$, si extraemos $1/5$ pues queda el 5.
71		Entonces nos va a quedar 5 por $1/5$ y todo eso por el determinante x, y, z
72		[en la primera fila], y en la segunda fila ¿cómo quedaría?
73	E2:	$5, 0, 3$.
74	Aly:	Bien si extraigo $1/5$ [de la segunda fila], me quedaría $5, 0, 3$.
75		Y luego $1, 1, 1$ [en la tercera fila].
76		Y como sabemos que todo ese determinante vale 1 y 5 por $1/5$ también
77		es 1, con lo cual todo vale 1.
78		Ven, pues esta es otra forma, se puede extraer dos veces, de dos filas un
79		numerito o extraer el 5 y volver a ponerlo dentro del determinante, vale.
80	E2:	El c [apartado] da 1.
81	Aly:	El c me parece que también da 1.
82		Ahora lo hacemos, ¿puedo borrar? [la pizarra].
83	Es:	[Algunos estudiantes mueven la cabeza indicando que si].
84	Aly:	A ver en el c hay que recordar una propiedad que nos dice que si en un
85		determinante nos aparece $a+b$, e [en la primera fila] y $c+d$, f [en la

86		segunda columna] y es decir, que si nos aparece dentro del determinante
87		una suma en los elementos, pues entonces podemos separar en dos
88		determinantes.
89		Entonces el primer determinante ¿estaría formado por quién?
90		Pues por los primeros cuatro a, e [en la primera fila], c, f [en la segunda
91		fila] más, y en el segundo determinante estaría b, e [en la primera fila] y
92		d, f [en la segunda fila].
93		Esa es la propiedad que vamos a usar aquí [en el apartado c] está claro,
94		al ponernos esa fila en la que hay suma en los elementos, bueno pero
95		mucho cuidado porque ahí aparecen dos filas en las que hay suma en los
96		elementos, no puedo aplicar la propiedad dos veces al mismo tiempo,
97		pues la primera vez debo dejar una quieta, ¿de acuerdo?
98		Entonces en ese determinante que tenemos en ese ejercicio hay que
99		hacerlo con cuidado [Aly alerta a sus estudiantes para que tengan
100		cuidado].
101		Bueno pues vamos a hacerlo, sería x, y, z [en la primera fila], luego en la
102		segunda [fila] sería $2x+5$, $2y$, $2z+3$ y en la tercera [fila] $x+1$, $y+1$, $z+1$.
103		Entonces ya os digo, que aquí tengo dos filas en las que aparece la suma
104		en los elementos, entonces no puedo descomponer al mismo
105		tiempo la segunda y la tercera fila, sino que primero una y luego la otra.
106		Bueno me centro pues en la segunda fila, vamos a separar esos dos
107		determinantes [Aly encierra en un círculo la segunda fila].
108		Como en la segunda fila tengo la suma, en el primer elemento tengo
109		$2x+5$, luego $2y$ que es $2y+0$ y luego $2z+3$.
110		¿Esto se descompone en la suma de qué dos determinantes?
111		En el primero, en la primera fila sería x, y, z y en la tercera fila sería $x+1$,
112		$y+1$, $z+1$, ven a lo que me refiero, que sólo puedo aplicar la propiedad
113		una sola vez.
114	E2:	Pero se puede hacer de una vez las dos.
115	Aly:	Hacer los dos a la vez es un fallo muy común porque no hay alguna
116		propiedad que te diga que no hagas eso pero hay que hacer una a la vez.
117		Bueno entonces ¿qué anoto en esta segunda fila del primer determinante?
118		Pues $2x$, $2y$, $2z$, ahora diremos que pasa con ese determinante.
119		Y luego con el segundo sumando [en la fila dos] 5, 0, 3, pues ahora
120		los escribo en la segunda fila del segundo determinante y la primera y
121		tercera fila permanecen iguales, cambia sólo la segunda, entonces en la
122		primera es x, y, z y en la tercera fila $x+1$, $y+1$, $z+1$.
123		Vale, ¿qué ocurre con el primer determinante? ¿qué veis ahí? ¿qué pasa?
124	E2:	Que la segunda fila es doble.
125	Aly:	Que podemos usar otra propiedad porque la segunda fila es el doble de la
126		primera [en la primera fila es x, y, z y en la segunda $2x$, $2y$, $2z$] entonces
127		ese determinante se hace cero.
128		Bueno entonces por el hecho de que la fila 2 es proporcional a la primera
129		el determinante vale cero y ahora con el último determinante,
130		puedo separar en dos determinantes por tener suma en la tercera fila
131		$[x+1, y+1, z+1]$, vale.
132		Entonces primer determinante queda x, y, z [en la primera fila], 5, 0, 3
133		[en la segunda fila], ¿y ahora qué sumando tenemos que poner?

134		Pues x, y, z el primer sumando [en la tercera fila] más el segundo
135		determinante que nos queda es x, y, z [en la primera fila]; $5, 0, 3$ [en la
136		segunda fila] y ¿qué otro sumando?
137	E2:	$1, 1, 1$.
138	Aly:	$1, 1, 1$ [en la tercera fila].
139		Bueno pues de esos ya los tenemos, uno es 0 y otro es 1 , ¿cuál es
140		0 ?
141	E2:	El primero.
142	Aly:	El primero pues la primera fila y la tercera son idénticas, son iguales
143		entonces ese determinante vale 0 y el segundo determinante vale 1
144		pues eso nos lo dan de dato.
145		Luego todo el determinante [el apartado c del ejercicio 2] vale 1 .
146		Bueno pero mucho cuidado aquí [Aly señala el determinante donde hay
147		dos filas que tienen suma, la $2x+5, 2y, 2z+3$ y la tercera $x+1, y+1, z+1$]
148		pues se pueden pensar que eso se separa en dos determinantes [usar la
149		propiedad de la suma dos veces simultáneamente] y no, primero hay que
150		separar una [una fila en dos determinantes] y luego la otra [fila].
151		Separamos una y luego cuando ya tengamos esa pues luego se separa la
152		otra.
153		Bueno pues vamos a seguir con más ejercicios de la página 82, en el que
154		ya hay que empezar a hacer determinantes un poquito más grandes, ahí
155		aparecen dos de orden 4 y uno de orden 5 , vale.
156		¿Qué hacemos para calcular un determinante más grande que este? [Aly
157		señala el determinante de orden 3].
158		[Pues hasta ahora los más grandes que han salido son de orden 3×3],
159		fue como el que hicimos ayer con la regla de Sarrus,
160		bueno pues para hacer determinantes mayores,
161		de momento la única herramienta que tenemos son las propiedades de los
162		determinantes, enseguida ya vamos a ver otra cosita para poder hacer
163		determinantes mayores.
164		Venga, vamos a ver determinantes de orden ya mayor que 3 ,
165		los de orden 3 ya sabéis que podemos aplicar las propiedades y también
166		sabéis que tenemos la regla de Sarrus.
167		Pues venga, eso está en la página 82 [del libro de texto].
168		Bueno pues entonces en esa página ya tenéis determinantes de orden
169		mayor que 3 , de cualquier forma ya sabéis que las mismas propiedades
170		que hemos aplicado para determinantes de orden 2 y determinantes de
171		orden 3 , las mismas propiedades son aplicables con el determinante que
172		sea.
173		Bueno pues vamos a hacer el ejercicio, vamos a calcular el valor de este
174		determinante $1, 4, -1, 6$ [en la primera fila], $2, 5, 11, 4$ [en la segunda
175		fila], $1, 4, -1, 6$ [en la tercera fila], $3, 12, 4, 2$ [en la cuarta fila].
176		¿Cómo podemos calcular ese determinante si no tenemos ninguna regla
177		práctica?
178		Pues tenemos la regla de Sarrus pero es para determinantes de orden 3 ,
179		pero de orden 4 no tenemos.
180		Pues hasta este momento lo único que podemos aplicar son las
181		propiedades, o sea que hay que buscar ahí entre las filas y las columnas

182		alguna relación, alguna proporcionalidad, combinación lineal, algo.
183	E2:	¿O que sean iguales?
184	Aly:	O que sean iguales.
185		Bueno pues podemos ver que la fila 1 es la misma que la fila 3, es decir,
186		antes de hacer nada, lo primero que debemos hacer antes de hacer el
187		determinante es echar un vistacito eh, entonces si hay dos filas iguales,
188		no necesito ninguna propiedad más, eso es cero por las propiedades,
189		la $F1=F3$ por lo tanto ahí no se puede hacer ya nada, vale.
190		Bueno pues ya os digo, las propiedades son válidas para cualquier
191		determinante.
192		E3 por qué no atiendes hoy mejor, y copias en casa, porque aquí si
193		vienen a copiar es perder tiempo.
194		Apartado b, 4, 7, 0, 2 en la primera fila; segunda fila -1, 3, 0, 6; tercera
195		fila 3, 0, 0, 1 y última fila 2, 1, 0, 3.
196		¿Qué se ve ahí? facilito,
197	Es:	Que hay una columna de ceros.
198	Aly:	Que hay una columna que es nula y también teníamos una propiedad que
199		decía que si teníamos una fila o columna que es 0, el determinante
200		completo vale 0, vale, y la columna completa es 0.
201		Venga y apartado c, sería [en la primera fila] 3, 2, 7, 8, y en la última
202		columna 3278, ya se ve ahí un poco lo que va a pasar ¿no?,
203		bueno segunda fila 7, 4, 5, 6, 7456; en la tercera fila 6, 1, 3, 9, 6139; en
204		la cuarta fila 1, 5, 0, 4, 1504; en la última fila 0, 0, 0, 1, 1, vale.
205		Bueno, ¿qué podemos decir de ese determinante también?
206	E11:	Que la última columna.
207	Aly:	¿Qué ocurre con la última columna?
208		E1, ¿qué ocurre con la última columna?
209	E1:	La última columna eh [E1 contesta nervioso], que es la primera
210		multiplicada por mil más la segunda por 100 y la tercera por 10.
211	Aly:	Exacto, es una propiedad, la columna 5 sería 1000 veces la columna 1
212		más 100 veces la columna 2, más 10 veces la columna 3 más la columna
213		4, por lo tanto es combinación lineal de todas las anteriores, al ser
214		combinación lineal de las anteriores, ¿cuánto vale ese determinante?
215	Es:	0.
216	Aly:	0, cuando una fila o columna es combinación lineal de otras, no tiene que
217		ser de todas eh, pues entonces el determinante es 0.
218		Vamos a ver, es decir, que todas las propiedades que ya hemos visto para
219		determinantes de orden 2 y 3, también se pueden aplicar en general a
220		cualquier determinante, es decir, de cualquier orden.
221		Venga, el siguiente, el d, que sería 4, 3, 1, 27 [en la primera fila], luego
222		tenemos 1, 1, 4, 9 [en la segunda fila], 2, 4, -1, 36 [en la tercera fila] y
223		0, 6, 2, 54 [en la cuarta fila].
224		Venga a ver quién me dice alguna relación.
225	E12:	La última columna es combinación lineal de la segunda.
226	Aly:	Es proporcional a la segunda, vale, y ¿qué hay que hacer para ver esa
227		proporción?
228	E12:	Multiplicar por 9.
229	Aly:	Si entonces la columna 4 es 9 veces la columna 2, vale.

230		3 por 9, 27; 1 por 9, 9; 4 por 9, 36 y 6 por 9, 54, vale.
231		Y da 0.
232		Luego el valor del determinante, sin tener que hacer cuentas, ninguna,
233		vale 0.
234		Por eso son tan importantes las propiedades porque a la hora de manejar
235		determinantes tan grandes como este y más, pues son importantes, ¿de
236		acuerdo?
237		Venga y otro más el e, el último que vamos a ver ahora.
238		Claro esto siempre vamos a hacerlo cuando haya una combinación lineal
239		ahí, cuando hallamos una relación de proporcionalidad o que son iguales,
240		si alguna columna o fila es cero, sino pasa nada de esto ¿qué ocurre?
241		Pues es lo que vamos a ver a continuación.
242		Bueno pues les estoy diciendo todo esto para que no empeséis a hacer el
243		determinante a la brava, digamos, a hacer cuentas a hacer números, no
244		primero hay que mirar y si hallamos una relación mejor eh.
245		Pues tenemos que hallar el determinante de 1, 0, 1, 0 [en la primera fila],
246		luego 2, 4, 0, 3 [en la segunda fila], a continuación 612, 704, 410, 103
247		[en la tercera fila] y la última [fila] que es 6, 7, 4, 1.
248		¿Qué ocurre con ese determinante?
249	E12:	Que la 3 es 100 veces la 4 más 10 veces la 1 más la 2.
250	Aly:	Si exacto, la fila 3 sería 100 veces la fila 4 más 10 veces la fila 1 más la
251		fila 2.
252		Por lo tanto el valor del determinante también vale 0.
253		¿De acuerdo?
254		Bueno entonces lo que les decía antes, cuando hay relaciones ahí, vale,
255		muy bien aplicamos las propiedades y en muchos casos el determinante
256		vale 0, sin tener que hacer nada eh, solamente sabiendo las propiedades
257		Claro, ¿y cuándo no?
258		Cuando yo no vea ninguna relación, ninguna propiedad, ninguna cosa
259		¿qué se hace? Pues ahora lo vamos a ver.
260		Vamos a ver el menor complementario y adjunto de un elemento, eso ya
261		viene en la página 83.
262		Bueno antes de ver al menor complementario vamos a ver un menor.
263		Bueno vamos a ver lo digo mediante un ejemplo y luego ya la propiedad,
264		lo que dice, vale.
265		Imaginad una matriz de orden 4x4, 1, 3, 5, 2 [en la primera fila];
266		14, 0, 1, -1 [en la segunda fila]; 3, 7, 1, 10 [en la tercera fila];
267		1, 0, 1, 0 [en la cuarta fila], vale.
268		Tenemos una matriz de orden 4x4.
269		Yo llamo, o se llama menor de una matriz a cualquier submatriz más
270		pequeña que ésta, tiene que ser cuadrada también formado por,
271		imaginaros tres filas y tres columnas o dos filas y dos columnas, en
272		donde se cruzan, es decir, imaginaros que yo tengo columna 4 y columna
273		2 y la fila 1 y la fila 3, ¿en qué lugares se están cruzando estas filas y
274		estas columnas?
275		En el 3 y en el 2 [la fila 1 columna 2 y la fila 1 columna 4,
276		respectivamente].
277		Y con ésta [la fila 3 columna 2] en el 7 y en ésta [fila 3 columna 4] en el

278		10.
279		Bueno pues un menor de orden 2 de esa matriz sería 3, 2 [en la primera
280		fila] y 7, 10 [en la segunda fila].
281		Es decir, cualquier submatriz, submatriz es una matriz más pequeña,
282		dentro de la matriz de partida, de manera que se forma por el cruce de
283		algunas columnas con alguna fila ¿de acuerdo?
284		Entonces un menor de orden 2 puede ser o es por ejemplo esta
285		matriz 3, 2 [en la primera fila] y 7, 10 [en la segunda fila], vale.
286		Formado por el cruce de la fila 1 y fila 3 con la columna 2 y la columna
287		4, ¿de acuerdo?
288		Otro menor de esta matriz, ¿quién me lo dice?, un menor de orden 3,
289		¿cómo podríamos hacer o encontrar un menor de orden 3 de ahí?
290	E6:	Cogiendo tres filas y tres columnas de ahí.
291	Aly:	Si, cogiendo tres filas y tres columnas de ahí.
292		¿Podríamos establecer un menor de orden 4?
293		Pues sería toda la matriz completa de 4 filas y 4 columnas, vale.
294		Matrices de orden 3 pues cualquier submatriz de orden 3, por ejemplo
295		ésta [Aly señala la submatriz compuesta por los últimos tres números de
296		las primeras 3 filas].
297		Bueno pues entonces un menor de orden 3 puede ser este, 3,5,2 [en la
298		primera fila]; 0,1,-1 [en la segunda fila] y 7,1,10 [en la tercera fila],
299		vale.
300		Entonces tenemos los menores que son los de orden 2 y los de orden 3,
301		cruzando filas y columnas, las que me digan o las que necesite, vale.
302		Bueno pero si he dicho menor, debo ponerle que es determinante [Aly
303		había puesto los menores como matrices y no como determinante].
304		También este menor de orden 3 debe ser determinante [Aly pone las
305		barras de determinante a cada uno de los menores que había escrito].
306		Bueno pues se llama menor al valor del menor de esa submatriz,
307		¿de acuerdo?
308		Bueno pues a eso se le llama menor de una matriz.
309		Ahí [en el libro de texto] tenéis la definición y dice que si tenéis una
310		matriz de orden $n \times n$ y si yo cojo r filas y r columnas y se cruzan,
311		pues los elementos donde se cruzan, todo eso, el valor de ese
312		determinante, es al que llamamos menor.
313		¿Y a qué llamamos menor complementario de un elemento de una
314		matriz?
315		Bueno menor complementario de un elemento en una matriz,
316		bueno pues el menor complementario, funciona igual sólo que hay que
317		centrarse en un elemento, el menor complementario de un elemento
318		cualquiera dentro de una matriz, a ver ahí lo tenéis [en el libro de texto],
319		vamos a escribirlo así:
320		Sea la matriz de orden 3×3 , vamos a tener la matriz en general A igual a
321		a sub uno uno, a sub uno dos, a sub uno tres [en la primera fila];
322		¿y en la segunda fila cómo sería? ¿recordáis cómo se denotan los
323		subíndices?
324		Pues el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna entonces
325		a sub dos uno, a sub dos dos, a sub dos tres; y por último a sub tres uno,

326		a sub tres dos, a sub tres tres [en la tercera fila].
327		Bueno pues dada una matriz se llama menor complementario del
328		elemento que se quiera, por ejemplo del elemento a sub dos uno,
329		se llama menor complementario del elemento a sub dos uno al
330		determinante siguiente, y vais a ver por quién está formado este
331		determinante, pues por los elementos a sub uno dos, a sub uno tres [en la
332		primera fila], a sub tres dos, a sub tres tres [en la segunda fila].
333		¿Y ese determinante qué tiene que ver con el elemento a sub dos uno?
334		Pues el elemento a sub dos uno, fijaros ¿en qué fila y en qué columna
335		está situado?
336		Está en la segunda fila y primera columna, luego para construir el menor
337		complementario de este elemento lo que tengo es que suprimir esa fila y
338		esa columna [Aly pone una línea que atraviesa la fila y la columna donde
339		está el elemento a sub dos uno indicando que por el momento quedan
340		canceladas], los elementos que quedan, su determinante es lo que se
341		llama menor complementario, bueno pues se designa por alfa sub ij, ¿de
342		acuerdo?, ese sería el menor complementario.
343		Entonces para encontrar el menor complementario de un elemento
344		suprimo la fila y la columna donde está el elemento y el determinante de
345		lo que queda es el menor complementario de ese elemento, vale.
346		En este caso [elemento a sub dos dos] la segunda fila y la segunda
347		columna, porque ¿dónde se encuentra ese elemento?, ¿cuál sería el
348		menor complementario ahí con esa matriz del elemento a sub dos dos, es
349		decir, cuál sería alfa dos dos?
350	E2:	a sub uno uno.
351	Aly:	a sub uno uno.
352	E2:	a sub uno tres.
353	Aly:	a sub uno tres.
354	E2:	a sub tres uno y a sub tres tres.
355	Aly:	a sub tres uno y a sub tres tres
356		¿Cómo se obtiene eso?
357		Estamos ahora hablando del elemento a sub dos dos pues entonces lo
358		que tenemos que suprimir es la segunda fila y la segunda columna y
359		entonces los elementos que quedan, no en si los elementos sino el
360		determinante de esos elementos se llama menor complementario que se
361		designa por la letra alfa, vale.
362		Bueno pues ya que hemos visto el menor complementario pues vamos a
363		ver el adjunto, vale.
364		¿A qué llamamos adjunto?
365		Se llama adjunto de un elemento de una matriz cuadrada A, se designa al
366		adjunto por A sub ij, la A la usamos para designar el adjunto del
367		elemento a sub ij, bueno pues el adjunto va a ser igual a: -1 a la $i+j$,
368		es decir, la suma de los subíndices, si el elemento es a sub dos dos pues
369		me va a quedar -1 elevado a la 4, con lo cual me saldrá algunas veces
370		positivo y algunas veces negativo, todo esto lo que nos dice es,
371		que algunas veces nos queda positivo y algunas negativo, bueno pues
372		esto [el -1 elevado a la $i+j$] por el menor complementario, es decir, por
373		alfa sub ij.

374		Bueno eso es así, entonces no confundir el menor complementario con el
375		adjunto del menor complementario, ¿de acuerdo?
376		Dependiendo de eso, de que el elemento de la matriz, aquí por ejemplo si
377		tuviéramos el adjunto del elemento a sub dos dos al elevar el -1 a la 4
378		pues nos queda positivo, pero cuando sea el elemento a sub dos tres, me
379		va a quedar la suma impar [pues sería $2+3=5$] entonces -1 elevado a la 5
380		pues ya queda negativo, de forma que habrá elementos con los que sale
381		positivo y algunos con los que sale negativo.
382		Venga pues vamos a ver cuáles serían algunos adjuntos y algunos
383		menores complementarios, esto la aplicación que tiene es para
384		desarrollar determinantes mayores eh, determinantes de orden superior.
385		Bueno pues venga, vamos a hacer el siguiente ejemplo, el ejercicio
386		resuelto del libro, en la página 83 [del libro de texto].
387		Tenemos sea la matriz, 3, 7, -3, 11 [en la primera fila];
388		segunda fila 4, 2, 0, 7; luego sería 4, 6, 2, 2 [en la tercera fila],
389		y última fila 0, 4, 6, 5. ¿De acuerdo?, vale.
390		Y me piden hallar en el apartado a, un menor cualquiera de orden 2, el
391		que queramos.
392		En el apartado b, hallar el menor complementario del elemento a sub tres
393		dos.
394		Y en el apartado c, el adjunto del elemento a sub tres dos, vale.
395		Bueno vamos a ver si nos enteramos.
396		Un menor de orden dos de la matriz, luego el menor complementario y
397		luego el adjunto.
398		A ver un menor de orden 2 de esa matriz ¿cuál es?
399	E2:	Pues 3, 11 [en la primera fila], 0, 5 [en la segunda fila].
400	Aly:	3, 11 [en la primera fila], 0, 5 [en la segunda fila].
401		Vale muy bien, cruzamos la primera y cuarta fila con la primera y cuarta
402		columna.
403		Vale ese es uno pero si alguien quiere poner otro por ejemplo 3, 7 [en la
404		primera fila] y 4, 2 [en la segunda fila] pues también es un menor, bueno
405		su determinante, vale.
406		¿De acuerdo?
407		Cualquier submatriz de orden 2×2 , su determinante eso sería un menor.
408		¿Cuál sería el menor complementario del elemento sub tres dos?
409		Alfa sub tres dos ¿quién sería?, primero tengo que irme al elemento tres
410		dos en la matriz ¿tres dos qué significa?
411		Pues, ¿que estamos en qué fila y en qué columna?
412	E2:	Fila 3 columna 2.
413	Aly:	Fila 3 columna 2, me voy a la fila 3 columna 2, es este elemento de aquí,
414		el 6 [Aly localiza el 6 en la matriz].
415		Bueno, ¿qué tengo que hacer entonces para ver cuál es el menor
416		complementario de ese elemento? Pues suprimimos por ende esa
417		columna y esa fila [donde se encuentra el elemento 6].
418		Si queréis tachar un poquito por encima, bueno pues sería el
419		determinante de 3, -3, 11 [en la primera fila], 4, 0, 7 [en la segunda fila]
420		y por último 0, 6, 5 [en la tercera fila].
421		Bueno pues hay que hacerlo, a ver cuánto nos da, ese si se puede hacer

422		porque es de orden 3 y entonces tenemos la reglita de Sarrus vale,
423		entonces hay que hacerlo.
424	Es:	[Los estudiantes están intentando calcularlo en sus apuntes].
425	Aly:	[Mientras Aly va anotando los resultados en la pizarra] $0+0+4.6.11-0-$
426		$7.6.3+4.3.5=198$.
427		Bueno si hacemos el desarrollo de Sarrus sería la diagonal principal que
428		da 0 [3 por 0 por 5], vale, luego tendríamos -3 por 7 por 0 entonces eso
429		va a ser 0 también [Aly va señalando cada elemento del determinante
430		cuando lo va mencionando], luego tendríamos el 4 por 6 por 11,
431		esos serían los tres [sumandos] que irían con signo positivo.
432		Luego hay que restar la diagonal secundaria que también sale 0 pues
433		sería 0 por 0 por 11, luego tendríamos que restar también 7 por 6 por 3 y
434		tendríamos que restar también 4 por -3 y por 5, cuidado con los signos eh
435		[Aly señala el elemento -3] pues este último producto sale más por el
436		menos que había por delante, vale, queda positivo porque hay dos
437		menos.
438		Bueno pues eso da 198, ¿de acuerdo?
439		¿Y el adjunto, el adjunto del elemento sub tres dos?
440		¿Qué es? ¿qué es lo que hay de diferencia entre el menor
441		complementario y el adjunto?
442		El signo, o sea lo único que yo tengo que añadir aquí sería -1 elevado al
443		$3+2$ y ahora multiplicar eso por el valor del menor complementario,
444		que ya lo he calculado, entonces -1 elevado al 5, en este caso como la
445		potencia es impar entonces ¿qué signo me queda?
446	Es:	Menos.
447	Aly:	Entonces el adjunto me queda -198 y el menor complementario 198,
448		vale.
449		Se entiende ¿no?
450		Bueno seguimos, de ahí mismo podéis hacer el ejercicio 2 de la página
451		83 [del libro de texto].
452		Bueno ¿y esto para qué nos sirve?
453		Pues nos sirve para desarrollar determinantes mayores que no sean de
454		orden 3, que sean de orden 4, de orden 5.
455		Bueno pues ahora en la página 84 [del libro de texto], siguiente
456		propiedad de determinantes.
457		A ver venga, otras propiedad de los determinantes, pues esta sería la
458		propiedad número 11, una nueva propiedad de los determinantes,
459		lo que nos dice es que el valor del determinante del orden que sea,
460		consiste en multiplicar los elementos de una fila o columna por sus
461		correspondientes adjuntos, eso lo vamos a escribir,
462		lo podemos escribir así, suponed que estamos escribiendo la primera fila,
463		bueno vamos a escribirlo así:
464		Sea A la matriz esta a sub uno uno, a sub uno dos, a sub uno tres [en la
465		primera fila], para que veáis esa propiedad.
466		a sub dos uno, a sub dos dos, a sub dos tres [en la segunda fila], la voy a
467		escribir de orden 3 porque sino va a salir más grande,
468		pero que sepáis que esta propiedad se puede aplicar para los de orden 4 y
469		más eh.

470		Bueno pues luego sería a sub tres uno, a sub tres dos, a sub tres tres [en
471		la tercera fila].
472		Bueno pues esta es la matriz de orden 3x3 vale.
473		Bueno pues el valor del determinante es ir multiplicando los elementos
474		de una fila o columna por sus correspondientes adjuntos,
475		si cojo la primera fila sería a sub uno uno por el adjunto A sub uno uno,
476		más el siguiente elemento de la primera fila también, a sub uno dos por
477		el adjunto A sub uno dos más el último a sub uno tres por el adjunto A
478		sub uno tres.
479		Eso si me decido desarrollar por los elementos de la fila uno,
480		iría poniendo cada elemento de la fila por su adjunto, vale.
481		Pero claro también lo podéis hacer con los elementos de la segunda fila o
482		con los de la tercera.
483		Bueno esto en general se puede escribir así, un determinante se puede
484		desarrollar, el desarrollo por los adjuntos eh, multiplicando los elementos
485		de cualquier fila o columna por sus correspondientes adjuntos y
486		sumándolo todo, ¿de acuerdo?
487		O sea yo puedo poner la primera, la segunda o puedo poner la tercera
488		[fila] por sus correspondientes adjuntos.
489		Aquí [en el libro de texto] viene el desarrollo de la demostración y
490		vamos a verlo.
491		También podríamos poner esto así, el determinante de A sería igual a la
492		suma [Aly pone el símbolo de sumatoria],
493		¿si conocían el símbolo ese de sumatorio?
494		Bueno pues la suma desde $j=1$ hasta n de a_{ij} por A_{ij} ,
495		con un i fijo, con j que está entre 1 y n , ¿eso qué significa?
496		Ese símbolo ahí significa sumatorio, sumatorio significa esto la suma de
497		todos [Aly señala en la pizarra el sitio donde había escrito la suma de
498		a_{ij} por el adjunto A_{ij} , más a_{ij} por el
499		adjunto A_{ij} más el último a_{ij} por el adjunto A_{ij}
500		uno tres].
501		Y los elementos que voy sumando ¿quiénes son?
502		Pues los elementos a_{ij} por sus correspondientes adjuntos A_{ij} ,
503		pero el portador que tiene eso es el subíndice j , es decir, la i va fijo,
504		la primera letrita es fija, es lo que he hecho aquí [Aly remarca el primer
505		subíndice de a_{ij} , a_{ij} , a_{ij}],
506		lo que va variando ¿qué es? el segundo subíndice,
507		esto se indica así, en el sumatorio desde $j=1$ hasta n , vale,
508		en este caso si empezamos a contar, pues j vale uno, dos y tres [Aly
509		remarca el segundo subíndice de a_{ij} , a_{ij} , a_{ij}]
510		tres], vale, entonces el último valor que toma la j es 3 ¿de acuerdo?
511		Bueno si os quedáis con eso [con la fórmula que sería la forma
512		compacta] pues bueno, que no, pues os quedáis con esto [con la forma
513		desarrollada de la suma].
514		Bueno pues digo que vamos a ver la demostración, ahí lo han hecho con
515		la segunda fila, en el libro [de texto].
516		Bueno pues venga, vamos a empezar a ver la demostración, ¿por qué es
517		esto?

518		Si en esto [Aly señala los adjuntos que había escrito para calcular el
519		determinante de A con la primera fila] nos ponemos a escribir quién es el
520		adjunto A sub uno uno, el adjunto A sub uno dos y el adjunto A sub uno
521		tres, van a ver que lo que nos va a quedar es el desarrollo por la regla de
522		Sarrus, es decir, que vais a ver que es verdad que el valor del
523		determinante es este [el que se dijo anteriormente].
524		Bueno pues vamos a encontrar eso,
525		¿quién sería el adjunto de A sub uno uno?
526		Vamos a ir anotando eso aquí abajo [en la parte inferior de la pizarra],
527		A sub uno uno ¿quién sería? Primero, esto sería -1 a la 1+1,
528		como la potencia es par [2] pues de esto ya no nos queda nada [sería -1 al
529		cuadrado queda 1 positivo], luego ¿qué nos queda?
530		Pues el menor que es el determinante de a sub dos dos, a sub dos tres [en
531		la primera fila], a sub tres dos, a sub tres tres [en la segunda fila].
532		¿Y eso qué es?
533		Pues si yo lo desarrollo [calcula el determinante] sería a sub dos dos por
534		a sub tres tres menos, a sub dos tres por a sub tres dos.
535		Bueno primero voy a ir haciendo cada uno de los adjuntos y luego ya los
536		anotamos todos juntos, nos va a salir una fórmula muy grande.
537		El adjunto de A sub uno dos, ¿quién sería? Primero sería ¿-1 a la qué?
538	E2:	A la 3.
539	Aly:	Si -1 a la 3, y me va a quedar ¿qué? Pues me queda un signo menos,
540		Ahora el elemento a sub uno dos es este [Aly señala ese elemento en la
541		matriz A] luego el adjunto me quedaría, si yo tapo aquí y aquí [Aly trata
542		de tapar con su mano la fila y la columna donde se encuentra el elemento
543		a sub uno dos], entonces me queda el determinante de a sub dos uno,
544		a sub dos tres [en la primera fila] y a sub tres uno, a sub tres tres [en la
545		segunda fila] y de ese determinante nos queda a sub dos uno por
546		a sub tres tres menos, a sub dos tres por a sub tres uno, ¿ven esta parte?,
547		se tapa la fila 1, segunda columna y queda este determinante,
548		bueno aquí me queda -1 [de -1 al cubo] y de esto [del determinante].
549		¿Qué me queda de todo esto? Pues menos (a sub dos uno por a sub tres
550		tres menos, a sub dos tres por a sub tres uno).
551		Bueno pues ya sólo nos falta calcular uno el A sub uno tres,
552		¿esto cómo quedaría? Pues -1 elevado a la 4 ¿verdad? Pues se suman los
553		subíndices [2+2=4], pero en este caso no nos queda nada pues -1 a la 4
554		no nos queda nada [daría 1],
555		[Suenan el timbre que indica que la clase ha terminado]
556		Un momentito vamos a terminar esto.
557		El elemento a sub uno tres ¿qué sería? Pues tapamos esta fila y esta
558		columna [Aly trata de tapar con su mano la fila y la columna donde se
559		encuentra el elemento a sub uno tres] y nos quedaría calcular el
560		determinante de a sub dos uno, a sub dos dos [en la primera fila],
561		a sub tres uno, a sub tres dos [en la segunda fila],
562		bueno pues hay que ver ¿cuánto da de este adjunto?
563		Luego tenemos que sustituir los adjuntos aquí [en a sub uno uno por el
564		adjunto A sub uno uno, más a sub uno dos por el adjunto A sub uno dos
565		más a sub uno tres por el adjunto A sub uno tres] y ver si sale lo mismo

566		que da por la regla de Sarrus,
567		¿Sabéis lo que quiero hacer? Pues ver que al sustituir los adjuntos y
568		desarrollar eso, ver que da lo mismo que lo que ya sabemos con la regla
569		de Sarrus, ¿de acuerdo?,
570		Entonces lo terminamos mañana o si alguno se atreve a terminarlo en
571		casa pues mejor eh.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la novena clase grabada de la profesora Aly del martes 4/11/08.

Resumen: Aly para introducir la definición del rango de una matriz a partir de sus menores primero a un mini-repaso de lo que habían visto en clases anteriores a cerca del rango de una matriz. Luego hace 3 ejemplos en los que hay que calcular el rango a partir de sus menores.

L		Transcripción
1	Aly:	Bueno os digo que el rango de una matriz ya lo hemos estudiado,
2		ya lo hemos hecho en el tema anterior pero vamos a ver su definición.
3		Entonces sería: Rango de una matriz a partir de sus menores.
4		Nosotros ya hemos visto el Rango de una matriz, lo que pasa es que lo
5		vimos, ¿cómo lo vimos? ¿cómo vimos el Rango de una matriz? ¿qué
6		hacíamos para ver que el rango de cualquier matriz?
7	E2:	Hacíamos cero.
8	Aly:	Íbamos haciendo ceros y al final teníamos que ver cuántas filas o
9		columnas había distintas de 0, había alguna que se hacía totalmente 0 y
10		esa nos sobraba para el Rango, el Rango os recuerdo antes de empezar
11		que el Rango de una matriz, ¿cuál es la definición de Rango de una
12		matriz? Es el número de filas o columnas...
13	E1:	Linealmente depe no independientes.
14	Aly:	Eso, es el número de filas o columnas linealmente independientes, ¿de
15		acuerdo?, ¿ya lo saben, no?
16	Es:	Si.
17	Aly:	Bueno tenemos que pensar lo siguiente, esto no se anota he, si el
18		determinante de una matriz es igual a 0, ¿qué podemos pensar acerca
19		de la fila o de la columna?
20	E9:	Son iguales.
21	Aly:	¿Son qué?
22	Es:	Iguales.
23	Aly:	Iguales no, hay determinantes que son 0, que vimos todos estos días
24		[durante varias clases anteriores].
25	E9:	Pero si hay dos filas iguales es 0[si dos filas son iguales dentro de un
26		determinante, el determinante vale 0].
27	Aly:	Vamos a ver, pero digo acerca de la dependencia e independencia lineal
28		de filas o columnas, entonces si un determinante me da 0, lo que
29		significa eso ¿qué es? Pues que el conjunto formado por todas las filas o
30		todas las columnas, por todos los vectores que forman sus filas o forman
31		sus columnas ¿cómo va a ser? ¿linealmente dependiente o linealmente
32		independiente?
33	E4:	Dependiente.
34	Aly:	Dependiente claro, ¿por qué? Pues porque el determinante vale 0,
35		entonces el conjunto formado por todas sus filas o columnas será
36		linealmente dependiente, pero eso es cogiendo digamos la matriz
37		completa, ¿de acuerdo? Eso no quiere decir que dentro pueda haber una
38		submatriz, algún trocito de filas o de columnas menor, que pueda tener
39		determinante distinto de 0.
40		No obstante, podremos encontrar y siempre se va a encontrar a menos

41		que sea la matriz nula, alguna submatriz (o menor) cuyo determinante
42		sea distinto de 0.
43		Imaginaros que yo encuentro que la fila 1, la fila 2 y la fila 3 todo eso
44		como una submatriz, calculo su determinante y me sale distinto de 0,
45		¿qué ocurre si ese determinante es distinto de 0?
46		Pues que las filas involucradas ahí, esas si son linealmente
47		independientes eh, luego lo que me interesa ver es de estos determinantes
48		pequeños que podemos encontrar dentro de la matriz, ¿cuál es su orden?,
49		es decir, si es de orden 3x3, si es de orden 2x2, etc.
50		Vale, se ve de que va.
51		Bueno entonces continuando con lo que estaba escribiendo: “No
52		obstante, podremos encontrar alguna submatriz (o menor) cuyo
53		determinante sea distinto de 0. En este caso interesa ver cuál es el
54		orden de dicho menor (y siempre interesa ver si hay uno más grande
55		cuyo determinante sea distinto de 0). Las filas y las columnas
56		involucradas en dicho menor (al tener el determinante distinto de 0) si
57		serán linealmente independiente”.
58		Entonces al final qué es lo que estoy buscando, pues ¿cuántas filas o
59		columnas son linealmente independientes? Eso es el rango.
60		Si yo llego a la conclusión de que hay sólo dos filas linealmente
61		independientes entonces el rango es 2, vale.
62		Si yo llego a que hay 3 filas o columnas linealmente independientes,
63		es decir, que puedo fabricar una submatriz de ahí de orden 3 cuyo
64		determinante es distinto de 0, entonces estoy diciendo que hay 3 filas o 3
65		columnas linealmente independientes, por lo tanto ese es el rango, ¿de
66		acuerdo?
67		Entonces el rango, podemos decir también que el rango de una matriz
68		será entonces el mayor del orden (el orden me refiero al tamaño, vale)
69		del mayor menor no nulo, ¿eso de mayor menor se entiende?
70		O sea es decir, en el contexto de matrices, es la submatriz más grande
71		que pueda encontrar cuyo determinante sea distinto de 0, vale, que no sea
72		0.
73		Entonces de lo que se trata es de ir cogiendo elementos, por ejemplo
74		primero cogeremos uno de orden 1, luego ampliaremos a ver si hay una
75		submatriz de orden 2x2 cuyo determinante no sea 0 y así lo vamos
76		ampliando poco a poco, claro en una matriz.
77		Fijaros en esa que está en la página 87 [del libro de texto], ahí hay un par
78		de ejemplos de matrices, la primera es de orden 4x5 y la segunda es de
79		orden 5x6.
80		Bueno entonces ahí si tenemos la estrategia de ir cogiendo un elemento y
81		de ir ampliando una submatriz irla ampliando poco a poco,
82		ahí salen menores de orden 2, menores de orden 3, menores de orden 4.
83		Entonces en el segundo ejemplo de los que viene en el libro [página 87]
84		salen 200 menores de orden 3, entonces claro no tenemos ni tiempo ni es
85		necesario, lo que hay que hacer es a partir de uno de orden 2 que no sea
86		0, encontrar uno de orden 3, ¿de acuerdo?
87		Entonces el procedimiento eficaz, efectivo viene ahí en la página 88 [del
88		libro de texto]. Lo que vamos ir haciendo es ir ampliando, eh.

89		Vamos a hacer el ejemplo que viene ahí, el ejemplo 1 que dice calcular el
90		rango de esa matriz.
91		Tenemos la siguiente matriz que es -1,3,0,1,2 [en la primera fila] luego
92		tenemos 0,5,1,2,3 [en la segunda fila], la siguiente que es -3,-1,-2,-1,0
93		[en la tercera fila] y la última que es 3,11,4,5,6 [en la cuarta fila].
94		Bueno me dan esa matriz y me dicen que tengo que calcular el
95		rango, vale, el objetivo es encontrar, hallar el rango.
96		Bueno, ¿qué hacemos para calcular el rango según esto?
97		Pues primero tengo que encontrar un menor de orden 1 que sea distinto
98		de 0, un menor de orden 1 que sea distinto de 0 es muy fácil, ¿qué sería?
99		Pues normalmente se coge el primer elemento, este [Aly subraya el -1,
100		elemento correspondiente a la posición a sub uno uno].
101		Bueno y ese elemento, su determinante no hace falta ni escribirlo pero
102		bueno, ¿su determinante cuánto vale? Pues vale -1, el determinante
103		formado por una matriz de orden 1x1 es el propio número ¿de acuerdo?
104		Es distinto de 0 ¿verdad?
105		Si ¿no? Entonces podemos ir ampliando a uno de orden 2 a partir de ese,
106		que contenga ya a ese ¿de acuerdo?
107		El siguiente, como dicen en el libro [de texto] hay que verlo a ojo, ¿esto
108		qué quiere decir? Pues que si nos interesa un menor, si vemos uno que
109		pueda tener 0 pues es mejor, porque ese menor va a participar en muchos
110		determinantes a continuación, entonces lo voy a hacer como lo hacen ahí
111		[en el libro de texto].
112		Esto [el -1,0, los dos primeros elementos de la primera columna] y esto
113		[0,1, los dos primeros elementos de la tercera columna].
114		Si yo tomo esos 4 elementos qué determinante tenemos este de aquí [-1,0
115		en la primera fila, 0,1 en la segunda fila].
116		Pues este menor de orden 2 su determinante ¿cuánto vale? Pues vale -1 y
117		por tanto eso es distinto de cero, eso me garantiza que el rango de la
118		matriz A va a ser por lo menos 2, porque ya he encontrado uno, un
119		menor de orden 2, entonces el rango de la matriz por lo menos va a ser 2.
120		¿Ahora qué tenemos que ser capaces de encontrar?
121		Vamos a ver si somos capaces de encontrar uno de orden tres distinto de
122		0, es decir, que hay que ir ampliando, ¿cómo sería? Pues siempre
123		basándonos en los que ya tenemos.
124		Basándonos en el que ya tenemos y agregándole la siguiente fila y ahora
125		claro, necesito añadir columna, ¿qué columna puedo añadir yo a ese
126		conjunto de dos columnas que tengo?
127		Pues vamos a intentarlo con está, con la segunda columna, vale, entonces
128		lo que nos va a quedar es este vamos a escribirlo aquí, sería el
129		determinante de -1,3,0 [en la primera fila], 0,5,1 [en la segunda fila] y
130		-3,-1,-2 [en la tercera fila].
131		Vamos a ver cuánto da eso, sería menos por menos más 10 de la diagonal
132		principal, luego sería 3 por 1 por -3 que son -9, luego sería 0 por -1 por 0
133		que es 0, luego sería la diagonal secundaria sería menos 0 por 5 por -3
134		que es 0, en seguida -1 por 1 por -1 que es 1 pero por el menos que por
135		la regla de Sarrus sabemos que lo tiene nos queda -1, y por último sería
136		menos -2 por 3 por 0 que es 0.

137		¿Qué ocurre ahí?
138	E2:	Que sería 0.
139	Aly:	Si, que sería 0 eso puede pasar claro, de hecho pasa.
140		¿Qué ocurre con esa segunda columna?
141		Que no me sirve para ampliar con ella y construir así el menor de orden
142		3, vale.
143		¿Qué tengo que hacer sino me vale la segunda columna? Pues intentar
144		con la siguiente.
145		Bueno entonces hay que intentarlo con la siguiente columna, debemos
146		seguir intentando pero no con cualquiera columna sino teniendo como
147		base el que ya tenemos de orden 2.
148		Total que nos queda por probar ahora ¿cuál?
149		Siguiente sería el determinante -1,0,-3 [en la columna], 0,1,-2 [en la
150		segunda columna], ahí tenemos ya en los elementos de las columnas el
151		menor que teníamos de orden 2 [Aly señala esos cuatro elementos] y
152		1,2,-1 [en la tercera columna].
153		Bien pues venga, con eso vamos a calcular ese determinante, sería
154		diagonal principal 1, más 0 por 2 por -3 que es 0, más 1 por -2 por 0 que
155		es 0, a continuación tenemos la diagonal secundaria sería -3 pero con el
156		menos de la regla de Sarrus es más 3, luego el 2 por -2 por -1 que es 4
157		positivo pero con el menos de la regla de Sarrus es -4,
158		por último sólo queda -1 por 0 por 0 que es 0.
159		¿Qué pasa ahí también? Que eso da 0.
160		Luego este tampoco me vale.
161		¿Con cuál es la siguiente que debo probar entonces?
162		Con la quinta [columna].
163		Claro, la culpable entre comillas, de que no este funcionando a lo mejor
164		no es la columna a lo mejor es la fila.
165		Bueno ahora vamos a probarlo con la quinta columna, sería el
166		determinante de -1,0,-3 [en la primera columna], 0,1,-2 [en la segunda
167		columna] y ahora con la columna 2,3,0.
168		Venga pues vamos a calcular este determinante, esto es 0 [el resultado
169		del producto de los elementos de la diagonal] luego también sería 0 [0
170		por 3 por -3], enseguida 2 por -2 por 0 también es 0, ahora de la diagonal
171		secundaria sería -6 pero con el menos de la regla de Sarrus es 6 positivo,
172		luego sería -2 por 3 por -1 sería 6 pero...
173	E2:	Es -6.
174	Aly:	Claro con el menos de la regla de Sarrus eso cambia de signo y es -6.
175		Y el otro [el último] es 0.
176		Entonces de este determinante queda $6-6=0$, también da 0.
177		¿Y qué vamos a hacer en este caso entonces, si ya no tengo más
178		columnas?
179		¿Qué es lo que ocurre? Pues hemos llegado a lo que yo decía antes,
180		¿quién será la culpable de que todos los menores de orden tres a partir de
181		ese menor de orden 2 hayan dado 0, pues no son las columnas sino que
182		es la fila, diremos que la fila 3 es linealmente dependiente de las dos
183		anteriores, lo que pasa es que al ampliar con todas las columnas posibles
184		con esa fila nos dan 0.

185		Entonces anotamos que la fila 3 es linealmente dependiente de las otras,
186		¿por qué puedo decir eso?
187		Porque sino fuera linealmente dependiente ¿qué pasaría?
188		Pues que alguno de estos determinantes nos hubiera dado distinto de 0,
189		como no es así, entonces es linealmente dependiente, a veces esa
190		dependencia se ve clara, se ve que una es el doble de la de arriba, o dos
191		veces la primera o lo que sea.
192		A veces no se ve tan claro pero cuando no se ve claro pues hay que hacer
193		esto para ver si hay una dependencia ahí.
194		Bueno pues nos queda otra fila más para seguir probando, entonces ese
195		procedimiento que he hecho con la tercera fila ahora hay que hacerlo con
196		la cuarta fila e ir ampliando columna a columna.
197		Entonces a partir de aquí empezamos, primero ponemos el menor de
198		orden dos que es -1,0 [en la primera fila] y 0,1 [en la segunda fila].
199		Y ahora lo ampliamos pero en lugar de poner los elementos de la fila 3
200		ponemos 3 y 4 [por debajo de cada columna respectivamente].
201		Bueno y luego iría la columna 2.
202		Luego iría la columna 3,5,11, [quedaría el determinante de -1,0,3 en la
203		primera columna, luego 0,1,4, en la segunda columna y 3,5,11 en la
204		tercera columna].
205		Fijaros que escribimos como última columna la que aparece como
206		segunda, pero eso no importa pues nos daría el mismo resultado pero con
207		el signo cambiado, además lo que importa es ver si el determinante es 0 o
208		no.
209		¿Entendéis lo que les digo o no?
210		En realidad en la matriz sería así, el determinante de -1,0,3 [en la primera
211		columna], 3,5,11[en la segunda columna] y la tercera columna sería
212		0,1,4, vale.
213		¿Qué pasa si lo hago al revés? [Si pone primero la tercera columna y
214		luego la segunda columna].
215		¿Pasaría algo? ¿Importa mucho para el estudio del rango?
216		Pues no mucho porque lo único que pasa aquí es que si este determinante
217		da por ejemplo 13 pues el otro -13, es un cambio de columna, o sea que
218		si uno es distinto de 0 el otro también.
219		Entonces a partir de ese determinante, lo desarrollamos por la regla de
220		Sarrus y vamos ampliando con esa fila y la segunda columna a ver si es
221		0 o no.
222		Entonces sería -20 [de -1 por 5 por 4], luego 3 por 1 por 3 que son 9,
223		luego es 0 [de 0 por 11 por 0], esto sería 0 [de 0 por 5 por 3], luego sería
224		+11 [de 11 por 1 por -1 que es -11 pero por el menos de la regla de
225		Sarrus, da 11 positivo].
226		Pero entonces de ese determinante tenemos -20+9+11=0.
227		Tenemos que es 0 también, vale.
228		Bueno entonces para estar completamente seguros de que el rango es 2,
229		tengo que hacer algo más, faltan 2 más.
230	E11:	¿El 9 de dónde sale? [El 9 que salió al resolver el determinante].
231	Aly:	De multiplicar 3 por 1 por 3 [Aly le va señalando cada número en el
232		determinante conforme lo va diciendo].

233		Es decir, sale de la paralela de la diagonal principal.
234		Bueno pues seguimos, resulta que la columna 2 no me sirve, por tanto
235		ampliamos ahora con la columna 4.
236		Entonces escribimos determinante de -1,0,3 [en la primera columna],
237		0,1,4 [en la segunda columna] y 1,2,5 [en la tercera columna],
238		lo calculamos, fijaros que tenemos como base el menor de orden 2,
239		sino fuera ese imaginarnos todos los menores que tendríamos que calcular,
240		que son bastantes, entonces así estamos haciendo seis determinantes,
241		¿no?
242		Bueno hay que hacer este vamos, sería -1 por 1 por 5 sería -5,
243		luego al hacer 0 por 2 por 3 da 0, 1 por 0 por 4 también da 0, luego la
244		diagonal secundaria sería menos de la regla de Sarrus y 3 por 1 por 1,
245		nos queda -3, luego menos de la regla de Sarrus y 4 por 2 por -1 queda
246		+8 y todo esto nos da 0.
247	E12:	No entiendo por qué cambias la segunda columna [se refiere al
248		determinante donde Aly considera el menor de orden 2 que tiene de base
249		y la segunda columna].
250	Aly:	[Aly explica a E12 que debe poner de base el menor de orden 2 que se
251		encontró y ahora hay que ir ampliando con las otras columnas].
252	E12:	¿Entonces debo ir poniendo las otras columnas?
253	Aly:	Pues si ves que no te sirven si, hay que ir ampliando con las demás.
254		Bueno pues resulta que este determinante [el último que ha resuelto]
255		también da 0.
256		¿Cuál es el único que me queda por mirar?
257		Pues en vez de la columna 4, la última columna, siempre que salga ahí el
258		determinante 0, tengo que seguir probando con las otras columnas pero
259		siempre con la referencia esta del menor de orden 2 que ya habíamos
260		encontrado.
261		Bueno pues venga hay que calcular el determinante de -1,0,3 [en la
262		primera columna], 0,1,4 [en la segunda columna] y 2,3,6 [en la tercera
263		columna], bueno vamos a hacerlo ya para terminarlo sería -6 [de -1 por 1
264		por 6], luego da 0 [de 0 por 3 por 3], enseguida otra vez 0 de 2 por 4 por
265		0, de la diagonal secundaria sería menos 3 por 1 por 2 que son -6, luego
266		4 por 3 por -1 pero por el menos [de la regla de Sarrus] queda +12,
267		luego sale 0.
268		Bueno pero aquí ¿qué diríamos de la fila cuarta?
269		Que también es linealmente dependiente de las dos primeras que son de
270		las que tengo el menor de orden 2, entonces la fila cuatro es linealmente
271		dependiente de la fila uno y fila dos.
272		Conclusión, ¿hemos sido capaces de encontrar un menor de orden 3
273		distinto de 0?
274	Es:	No.
275	Aly:	Todos los menores de orden 3 que fabricaba a partir de ese menor de
276		orden 2 han salido 0, por lo tanto ¿cuál es el rango de esta matriz?
277	E2:	Dos.
278	Aly:	Bueno pues el rango de la matriz A es dos, vale.
279		Ese sería el procedimiento que hacemos siempre para calcular el rango.
280		Os recuerdo que tenéis otro método, el método de Gauss que es ir

281		haciendo ceros en la matriz y al final ver cuántas columnas salen
282		distintas de 0 eh, y los vectores fila que salgan distintos de cero pues eso
283		es lo que nos indica el rango, vale.
284		Bueno pues vamos a hacer el ejercicio de la página 88, el ejercicio 1, que
285		consiste en calcular el rango.
286		Página 88 ejercicio 1, la primera matriz que tenemos ahí sería esta
287		1,2,3,0,-1,4 [en la primera fila], siguiente 3,-1,0,1,1,2 [en la segunda
288		fila], 4,1,3,1,0,6 [en la tercera fila] y 7,0,3,2,1,8 [en la cuarta fila], vale
289		esa es la matriz.
290		Una cosita, ¿esta matriz de qué orden es?
291	Es:	De 4x6.
292	Aly:	De 4x6, ¿es una matriz cuadrada?
293	Es:	No.
294	Aly:	Ni falta que hace, en cualquier matriz podemos ver cuál es su rango, es
295		decir, cuál es el número de filas o columnas linealmente independientes,
296		lo que si sabemos es que el rango máximo de esta matriz, ¿el rango de
297		esta matriz cuánto sería en este caso?
298	E10:	4.
299	Aly:	4, es decir, más de 4 es imposible no puedo construir aquí un menor de
300		orden 5x5, vale porque ya no tengo suficientes filas con que partir, yo
301		antes empezaba diciendo que si el determinante de A [la matriz] es 0,
302		¿aquí tiene sentido hablar del determinante de A?
303		A ver pregunta de trivía.
304		¿Tiene sentido hablar del determinante de una matriz como esta? [Aly
305		señala la matriz A].
306	E4:	El determinante ahí no está definido.
307	Aly:	Exactamente, el determinante sólo está definido para matrices cuadradas,
308		entonces en estos casos, en lugar de hablar del determinante de A
309		deberíamos hablar del determinante de una submatriz, pero en definitiva
310		¿qué vamos haciendo?
311		Construir pequeñas submatrices cuadradas eso sí, de manera que su
312		correspondiente determinante tengo que ir viendo si son cero o no son 0,
313		vale, entonces en este caso el detalle es que no puedo hablar del
314		determinante de A, no está definido el determinante de esta matriz A, en
315		este tipo de matrices que no son cuadradas, pero en las submatrices que
316		vamos construyendo si porque si son cuadradas.
317		Bueno ¿por dónde empezamos?
318		Pues por lo sencillo ¿no?, siempre cogiendo el primer elemento, ahí [en
319		la matriz A] hay un menor de orden 1, pues el primer elemento es no
320		nulo [es 1] por lo tanto si no es nulo pues ya me dice que su determinante
321		es 1 [el mismo elemento] y entonces ya sabemos que al menos el rango
322		vale 1.
323		¿Qué matriz, cuál es la única matriz que no cumple esta condición?
324		¿En qué matriz no soy capaz de encontrar ningún elemento distinto de 0?
325		Pregunto otra vez, ¿hay alguna matriz del orden que sea, de manera que
326		yo me voy al primer elemento y no encuentro un elemento distinto de 0,
327		luego otro 0, luego otro 0, es decir, que todos los elementos son nulos?
328	E2:	La matriz nula.

329	Aly:	¿Qué matriz sería esa? ¿La que no tiene ni rango 1?
330		La única es la matriz nula, vale.
331		La matriz nula, esa no tiene ni siquiera rango 1, porque el rango 1 se ve
332		si por lo menos un elemento es distinto de 0, cualquier matriz que no sea
333		la matriz nula cumple eso, menos la matriz nula, claro.
334		Porque el rango de la matriz nula ¿qué sería?
335	Es:	0.
336	Aly:	Entonces claro, por la definición de rango hay que ver cuántas filas o
337		columnas hay linealmente independientes de la matriz nula, cero, no va a
338		ver ni filas ni columnas linealmente independientes, vale.
339		Bueno pues en el determinante de esta matriz A ya os digo que puede ser
340		mayor o igual a 1 [porque el determinante del primer elemento es el
341		mismo elemento, 1].
342		Cada uno puede empezar como quiera, es decir, yo empiezo ampliando y
343		construyendo este menor [Aly señala el menor de orden 2 formado por
344		los dos primeros elementos de las dos primeras filas].
345		Pero tal vez quiera empezar con el menor de orden dos de los primeros
346		dos elementos de la columna 1 y la columna 3, vale.
347		Cada uno ya va haciendo con las filas o columnas que consideren más
348		útil, entonces los voy a dejar que lo hagan un poquito [que intenten
349		calcular el rango cada uno].
350		[Después de varios minutos] Bueno vamos a hacer otro poquito,
351		[considerando los dos primeros elementos de la columna 1 y columna 4]
352		venga lo hacemos con el menor 1,3 [en la primera columna] y 0,1 [en la
353		segunda columna], ¿cuál es el determinante de esa submatriz? ¿cuánto
354		vale? Hay que calcularlo.
355	E2:	Es uno.
356	Aly:	Es uno, pues eso es distinto de 0, eso me garantiza ya que por lo menos
357		el rango de la matriz es mayor o igual a 2.
358		Ahora para el rango 3, lo mismo que he hecho antes, voy a estudiar ¿con
359		qué elementos de aquí?
360		Venga, ¿con qué elementos debo probar?
361		De ese menor [de orden 2] que tengo seleccionado, ahora debo ampliar a
362		una de orden 3, tengo que incluir cada elemento que está debajo de esas
363		columnas del menor, eso siempre eh, es decir, si en la primera columna
364		del menor tengo 1, 3 pues ahora agrego el 4 que está debajo y en la otra
365		columna [la 4] si tenía 0,1 pues agrego el 1 que está debajo de esos
366		elementos, eso es siempre, vale.
367		Bueno y a continuación, vamos esos serían los elementos de las dos
368		columnas del determinante que voy a construir y lo vamos a empezar con
369		la segunda columna de la matriz A [la columna que faltaba para
370		completar el primer determinante de orden 3], vale.
371		Entonces el determinante que nos queda sería 1,3,4 [en la primera
372		columna], 2,-1,1 [en la segunda columna] y 0,1,1 [en la tercera columna].
373		Claro por eso he dicho yo que si se ve un menor que sea un poco más
374		fácil, es decir, que tenga algún 0, que tenga algún 1, es más sencillo.
375		Pues venga, calculamos este determinante de aquí, venga hacedlo cada
376		uno.

377		[Después de varios minutos] ¿Cuánto da?
378	E2:	A mi me da 0.
379	E4:	A mi también me da 0.
380	Aly:	Vamos a ver, sería $-1+8-6-1=0$ [Aly va señalando con su dedo los
381		elementos que va multiplicando para obtener esos resultados].
382		Da 0, entonces esta columna no me sirve, al ampliar el menor de orden 2
383		con esa columna no me vale.
384		Por lo cual sigo entonces con la siguiente columna.
385	E8:	Sale rango 2.
386	Aly:	¿Sale rango 2? ¿Pero por qué? ¿Ya los haz hecho todos?
387	E8:	Si.
388	Aly:	No me lo puedo creer [en forma de sorpresa].
389	E8:	Si porque las dos filas últimas son dependientes.
390	Aly:	Claro, fijaros en lo que yo siempre os he dicho, yo me he callado no he
391		dicho nada, y muchas veces ¿qué os digo?
392		Que en vez de empezar a la brava hay que detenerse un minutito a mirar,
393		porque eso es lo que evita ponerse a hacer cálculos, si me tengo que
394		poner a hacer todos los determinantes, lo mismo que yo he hecho antes,
395		pues son unos cuantos.
396	Aly:	Ahora como dice E8, fijaros en esto [Aly señala el 4 que es el tercer
397		elemento de la primera columna].
398	E4:	Es la suma los dos anteriores [de los dos primeros elementos de esa
399		columna, del 1 y 3].
400	Aly:	[Aly va señalando uno a uno cada elemento de la tercera fila para que los
401		estudiantes vean que efectivamente la tercera fila es la suma de las dos
402		primeras].
403		Luego esta tercera fila [de la matriz A], me la puedo quitar de en medio
404		ya, para estudiar el rango de la matriz.
405	E8:	Y la cuarta [fila] es igual a la primera [fila] más 2 veces la segunda [fila].
406	Aly:	[Aly le indica con la mano a E8 que espere].
407		Entonces podemos decir que la tercera fila es linealmente dependiente de
408		las dos anteriores, de la fila 1 y fila 2 y por lo tanto al hacer esto del
409		rango, la puedo eliminar para estudiar el rango, ¿de acuerdo?
410		Una cosa, cuando se pone la matriz A igual a todos sus elementos y
411		luego de pronto llego y la tacho, tacho una fila completa [Aly tachó la
412		tercera fila de la matriz A al decir que es linealmente dependiente de la
413		fila 1 y la fila 2].
414		Eso no lo hagáis en el examen [de selectividad].
415		A ver, lo que dije ahora mismo es que A es igual a la misma matriz pero
416		con una fila menos, eso no es cierto, pues A es la misma sea la fila
417		dependiente o independiente como sea, lo que pasa es que yo lo digo de
418		palabra, lo correcto sería poner ¿qué?
419		Que el rango de la matriz A coincide con el rango de la matriz A
420		suprimiendo esa fila, ¿me explico o no?
421		Pues con esto habría que poner rango de la matriz A, que es la matriz de
422		partida, es igual ¿a qué?, ¿al rango de qué matriz? Pues al rango de la
423		matriz formada por la fila 1, fila 2 y fila 3.
424		Lo que pasa es que yo lo digo de palabra y lo que no quiero que se

425		entienda es que la matriz A es la misma que la de ahora cuando elimino
426		una fila, pues no es la misma matriz, pero su rango si es el mismo, vale.
427		Entonces a efectos del rango, que siempre lo digo así, a efectos del
428		rango, esta fila me estorba, no hace falta que estudie cada uno de esos
429		determinantes que me salen ahí [con esa fila que tachó], pues porque sale
430		una dependencia con la primera [y la segunda fila].
431		¿Y con la fila 4?
432		¿Qué ocurre con la fila 4?
433		Esta fila sería, si se ve es mejor para evitar hacer tantos cálculos, que no
434		se ve pues nada, hay que hacerlo.
435		Veis que aquí hay un 7, luego un 0 [los dos primeros elementos de la fila
436		4, Aly señala los elementos de las primeras dos filas con su dedo].
437		A ver ¿qué se les ocurre que pasa ahí?
438		¿Qué hago? ¿Qué se ve?
439	E8:	Que es la fila 1 más 2 veces la fila 2.
440	Aly:	Claro, que la fila 4 es la fila 1 más 2 veces la fila 2.
441		Luego antes de empezar a la brava a calcular todos los determinantes del
442		mundo, es mejor pararse un minutito y ver, igual por columna, lo mismo
443		hay una relación por columna y se puede suprimir alguna, por lo tanto, a
444		efectos del rango puedo decir que el rango de la matriz A va a tener un
445		rango de qué matriz, pues de esta [Aly anota Rango de A es igual al
446		Rango de la matriz formada por la fila 1, fila 2] la formada por la fila 1,
447		fila 2. Entonces ¿qué rango va a tener esa matriz A?
448		Pues el rango formado por esas dos filas solamente.
449	Es:	Dos.
450	Aly:	El rango es 2 y ya seguro que no hay más por la dependencia que
451		acabamos de decir.
452		Entonces ya no es necesario hacer todos los determinantes de orden 3,
453		igual que hemos hecho antes.
454		Cuando no se vea nada pues hay que hacerlo.
455		Bueno en este caso el rango de la matriz es 2.
456	E8:	Y ya acabo.
457	Aly:	Exacto y ya acabo.
458		Venga el apartado siguiente el b [del ejercicio 1 de la página 88 del libro
459		de texto].
460		Venga esa si la hacéis vosotros y tened cuidado a ver si se ve una
461		relación por ahí, no decid los resultados, no decidlo, que cada uno vaya
462		viendo la matriz a ver qué encuentra.
463		[Mientras los estudiantes lo intentan Aly va anotando la matriz].
464		Venga la matriz sería 4,2,1,5,3 [en la primera fila], 2,3,2,6,5 en la
465		segunda fila, luego 6,5,3,12,8 [en la tercera fila] y por último
466		12,10,6,23,16 [en la cuarta fila].
467		Venga ¿se ve algo?, ¿algo que podamos quitar de antemano?
468	E2:	Las dos últimas filas.
469	Aly:	¿Las dos últimas filas por qué?
470	E2:	Porque son la suma de otras.
471	Aly:	Mucho cuidado eh, te digo porque.
472	E2:	Porque la fila 4 es la suma de las otras tres.

473	Aly:	Espera, espera, me has dicho que la fila 4 es...
474	E2:	Es la suma de la fila 1 de la fila 2 y de la fila 3.
475	Aly:	Si, ésta [Aly señala la fila 4 de A] es igual a la suma.
476	E2:	A la suma de las 3 primeras.
477	Aly:	Si a la suma de las 3 primeras.
478	E2:	Y la tercera la suma de las anteriores.
479	Aly:	¿La tercera la suma de las 2 anteriores?
480	E8:	No.
481	Aly:	No, ¿cuál es la suma de 5 más 6 [los dos elementos de las 2 primeras
482		filas en la columna 4], pues 6 y 5 son 11 y ahí aparece un 12 [en la
483		tercera fila, donde sería la suma del 5 y 6], entonces no.
484		Vale, eso sí la cuarta fila es la suma de las tres anteriores vale [Aly va
485		señalando cada número de las tres primeras filas y los va sumando,
486		comprobando que efectivamente la fila 4 es la suma de las 3 anteriores].
487		Luego, para efectos del rango puedo quitar la fila 4, y se dice por qué eh,
488		entonces anotamos fila 4 igual a fila 1 más fila 2 más fila 3 [$F4 = F1 + F2$
489		$+ F3$], esto en un examen no perdéis tanto tiempo en ponerlo pero si
490		mostráis que sabéis más, ¿me explico?
491		No lo digo sólo por mí, le tenéis que demostrar al que corrige [de los
492		exámenes de selectividad] siempre qué es lo que estáis pensando y es
493		mucho mejor si anotáis esto, que no es medio folio, vale.
494		Entonces se dice que la fila 4 es combinación lineal de las tres anteriores,
495		por lo tanto, a efectos del rango me sobra, como es linealmente
496		dependiente pues no la quiero poner, vale.
497		Ahora qué ocurre con las otras 2, fijaros ¿tenemos un menor de orden 1
498		para empezar?
499		Si este [Aly señala el 4 que es el primer elemento de la matriz A].
500	E8:	También puedo quitar la última columna.
501	Aly:	¿Cuál?
502	E8:	La última columna porque es la suma de la columna 2 más la columna 3.
503	Aly:	Es cierto, la columna 5 es igual a la columna 2 más la columna 3.
504		¿Lo ven? También está [la columna 5] sería igual ¿a qué?
505		A la segunda columna más la tercera columna.
506		Vale pues ahora si empezamos, un menor de orden 1, pues siempre
507		empezamos por el de la primera fila y primera columna [en este caso el
508		4, Aly remarca ese elemento en la matriz].
509		Bien, un menor de orden 2.
510		Bueno pues ampliamos y tomamos el determinante de los cuatro
511		primeros elementos sería 4,2 [en la primera columna] y 2,3 [en la
512		segunda columna] y vemos si ese es no nulo.
513		4 por 3 son 12 menos 2 por 2 que son 4 entonces me da 8, como es
514		distinto de 0 ya eso me está diciendo que el rango de la matriz es mayor
515		o igual a 2.
516		Bueno entonces con este menor de orden 2 que es no nulo, que es
517		distinto de 0, el rango de la matriz ya vale por lo menos 2.
518		A continuación a partir de aquí ¿cuál cogemos?
519		Pues lo lógico es poner cada elemento que está debajo de cada columna
520		del menor de orden 2 y ampliar con la siguiente columna.

521		En este caso sería el determinante de 4,2,1 [en la primera fila], 2,3,2 [en
522		la segunda fila] y 6,5,3 [en la tercera fila], claro fijaros una cosa, en esta
523		tercera fila de la matriz grande [la matriz completa de 4x5] hemos dicho
524		que no era la suma de las dos anteriores, pero casi, solamente fallaba en
525		este elemento [en el 12 de la tercera fila cuarta columna], pero el 12 no
526		participa ahora [en este de orden 3].
527		Entonces ahora si puedo decir que la tercera fila es suma de las dos
528		anteriores, por lo tanto sin tener que hacer Sarrus aquí, ¿qué sale el
529		determinante?
530	E1:	0.
531	Aly:	0, ¿lo veis? En la matriz grande, en la primera que nos daban, se veía que
532		la tercera fila era la suma de las anteriores pero el que no cumplía era
533		este [el 12] pues 5 más 6 son 11, entonces el 12 no lo cumplía, entonces
534		por culpa de este 12 no he podido quitar la tercera fila entera, pero aquí
535		[en el de orden 3], que el 12 no participa pues si puedo decir que la fila 3
536		de este determinante [de orden 3] es la suma de las 2 anteriores, por lo
537		tanto su determinante es 0.
538		¿De acuerdo?
539		Bueno pues esa fila no me sirvió, entonces vamos a ampliar con la otra.
540		Sería el determinante de 4,2,5 [en la primera fila], 2,3,6 [en la segunda
541		fila] y por último 6,5,12 [tercera fila].
542	E8:	Esa es de rango 3.
543	Aly:	Vamos a hacerlo sería 4 por 3 por 12 son 144 más 2 por 6 por 6 son 72
544		más 5 por 5 por 2 son 50, menos 5 por 3 por 6 que nos queda -90, menos
545		5 por 6 por 4 son -120 y sería menos 12 por 2 por 2 que son -48.
546		Venga ¿sale 0 o no sale 0? De eso depende que el rango sea 3 o no.
547	E10:	Sale 8.
548	Aly:	Sale 8.
549		Bueno pero fijaros lo importante que es mirar un momentito la matriz y
550		no empezar a la brava.
551		Bueno en este sale 8, pues si hemos encontrado un menor de orden 3 que
552		es distinto de 0, ¿qué podemos decir que es el rango de la matriz?
553	E2:	El rango de la matriz es 3.
554	Aly:	Pues que el rango de la matriz es 3, y ya no tengo que seguir buscando.
555		¿Sería posible el rango 4?
556	E4:	No.
557	Aly:	Ya no sería posible el rango 4, porque ya no tengo más filas y a la fila 4
558		ya la habíamos quitado por ser linealmente dependiente.
559		Entonces si ya tengo la de rango 3 ya no tengo que seguir calculando.
560		Bueno pues el apartado c y d [del mismo ejercicio 1 de la página 88 del
561		libro de texto] lo intentáis vosotros, es calcular el rango, así que ya con
562		lo que hemos visto lo podéis hacer.
563		Bueno y de la página 95 a ver si hacéis el 18 [ejercicio] ahí vienen las
564		soluciones, pero las soluciones no son lo importante, lo importante es
565		hacedlo, vale.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Resumen: Aly comienza el tema de “resolución de sistemas mediante determinantes”. Escribe la forma general de n -ecuaciones con n -incógnitas. Nuevamente habla de la clasificación de los sistemas, Sistema Compatible Determinado (S.C.D.), Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.) y Sistema Incompatible (S.I.). Finalmente aborda el teorema de Rouché-Frobenius y algunos ejemplos.

L		Transcripción
1	Aly:	Bueno vamos a empezar tema, el título es de resolución de sistemas
2		mediante determinantes.
3		Ya lo digo, en el mismo título dice que vamos a resolver sistemas de
4		ecuaciones pero con las herramientas que tenemos de determinantes.
5		Vais a ver que se simplifica bastante la discusión de un sistema que
6		depende de un parámetro, lo que es el cálculo de la matriz inversa.
7		Bueno pues venga, empezamos los sistemas de ecuaciones no es
8		necesario que les diga lo que son [el tema de sistemas de ecuaciones ya
9		lo habían abordado con matrices], sabemos lo que es un sistema de
10		n -ecuaciones con n -incógnitas pues eso ya lo habéis hecho en secundaria,
11		ya sabéis de qué va, lo que si que es verdad es que hasta cuarto de la
12		ESO [Educación Secundaria Obligatoria], lo más normal es que les
13		ponían un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y estabais
14		acostumbrados a que siempre daba una solución, vale, ya eso vemos que
15		no es así [puede haber Sistema Incompatibles].
16		¿Un sistema tiene que tener solución siempre?
17		No, hay muchos sistemas que son incompatibles eso significa, y ya lo
18		hemos visto en temas anteriores que no todos tienen solución o que un
19		sistema puede ser que sea compatible y que tenga muchas soluciones,
20		infinitas soluciones, no una única, entonces ¿los sistemas cómo pueden
21		ser?
22	E1:	Compatibles o incompatibles.
23	Aly:	Muy bien, pueden ser compatibles o incompatibles, esto en forma de
24		resumen, dentro de los compatibles tenemos a los determinados [S.C.D.]
25		y a los compatibles indeterminados [S.C.I.].
26		Por otro lado podemos tener a los incompatibles [S.I.].
27		Los compatibles es cuando existe solución, S.C.D. es que existe una
28		única solución y en el caso de sistemas compatibles indeterminados.
29		¿Cuántas existen? Infinitas soluciones y en el caso de los incompatibles
30		pues no existe solución, ¿de acuerdo?
31		Ya os digo que en la ESO se centraban únicamente de los compatibles
32		determinados, a lo mejor quizás alguna que otra vez salió algún
33		incompatible.
34		Entonces os recuerdo que tenemos aquí que cuando nos dan un sistema
35		en función de un parámetro, cabe la discusión del sistema y hacerlo por
36		separado, es decir, ¿qué valores del parámetro hacen que el sistema sea
37		incompatible?
38		¿Qué valores hacen que sea compatible? Y en ese caso resolverlo.
39		Cuando era compatible indeterminado, recordáis también que existen
40		parámetros.

41		Bueno pues venga, escribimos un sistema de ecuaciones lineales, pues lo
42		escribimos así en general y eso ya nos va a servir de notación para todo
43		el tema, eh nos vamos a centrar en la notación que vamos a escribir, yo
44		voy a usar la misma que viene en el libro [de texto].
45		a sub uno uno por x uno más a sub uno dos por x dos más ... hasta a sub
46		uno ene por x ene igual a C sub uno, primer término independiente, esa
47		sería la primera ecuación, ¿cuántas incógnitas tengo ahí?
48	E4:	Ene.
49	Aly:	Desde 1, 2, 3, ... hasta n.
50		La segunda ecuación a sub dos uno por x uno más a sub dos dos por x
51		dos más ... hasta a sub dos ene por x ene igual a C sub dos, segundo
52		término independiente.
53		Y así hasta las ecuaciones que tengamos, en el caso general que
54		pongamos van a ser eme ecuaciones, por lo tanto la última fila del
55		sistema que tengo que escribir ¿cuál sería?
56	E4:	a eme uno.
57	Aly:	a sub eme uno, claro esta notación ¿a qué les recuerda? ¿todos esos
58		coeficientes de las incógnitas a qué nos tiene que recordar?
59	E1:	A una matriz.
60	Aly:	A una matriz claro, pues lógicamente de ahí se extraen los coeficientes
61		de una matriz, vale.
62		Entonces la última fila es a sub eme uno por x uno más a sub eme dos
63		por x dos más ... hasta a sub eme ene por x ene igual a C sub eme, ¿de
64		acuerdo?
65		Bueno pues ahí tenemos eme ecuaciones ¿y cuántas incógnitas?
66		Pues aquí las tenemos, 1, 2, 3, ... hasta n, tenemos n incógnitas.
67		Bueno pues así es como vamos a escribir normalmente con todos los
68		coeficientes y las incógnitas un sistema general eh, un sistema de eme
69		ecuaciones con ene incógnitas.
70		El sistema no tiene porque ser cuadrado, cuadrado en el sentido de que m
71		no tiene porque ser igual a n, es decir, la matriz que resultará aquí no
72		tiene porque ser cuadrada, en muchos casos si lo es pero no tiene porque
73		serlo siempre, ¿de acuerdo?
74		Bueno ¿cómo se puede escribir esto de otra forma más corta?
75		Pues de otra manera se escribirá así, en forma matricial, ya sabemos
76		multiplicar una matriz por un vector [otra matriz], bueno pues lo
77		podemos escribir como sigue, si yo quiero sacar de ahí la matriz de
78		coeficientes, ¿cuál sería la matriz de coeficientes?
79		Sería a sub uno uno, a sub uno dos ... hasta a sub uno ene, segunda fila
80		¿cuál sería? a sub dos uno, a sub dos dos, ... hasta a sub dos ene, esto ya
81		no es nada nuevo, ¿esto qué es entonces?
82		Pues es una matriz, y la última fila sería a sub eme uno, a sub eme dos,
83		... hasta a sub eme ene, ¿de acuerdo?
84		¿De qué orden es esa matriz?
85	E4:	De eme.
86	Aly:	De eme por cuánto.
87	E1:	Por ene.
88	Aly:	Muy bien, de eme por ene, porque tenemos m filas y n columnas, ¿de

89		acuerdo? El orden siempre viene dado por este último subíndice [eme
90		ene], m filas y n columnas.
91		Bueno para yo poder multiplicar una matriz por un vector columna y me
92		dé esto [todos los términos de la primera parte de la igualdad de las m
93		ecuaciones con n incógnitas].
94	E4:	Por las equis.
95	Aly:	Muy bien las equis, sería x sub uno, luego x sub dos, ... hasta x sub ene
96		¿Y por qué? ¿Por qué sale eso?
97		Fijaros, pues al multiplicar esa matriz [la matriz de coeficientes] por este
98		vector columna que es lo que me sale, pues sería a sub uno uno por el
99		primer elemento, por x sub uno, así se multiplican matrices, más a sub
100		uno dos ¿por quién? Por x sub dos, ¿eso me va saliendo qué?
101		La primera ecuación del sistema, y así iríamos multiplicando hasta a sub
102		uno ene por x sub ene.
103		¿Y a qué es a lo que tengo que igual para obtener el sistema?
104		¿A qué quedaría igualado eso?
105	E1:	A C sub uno.
106	Aly:	A C sub uno, en el primer lugar, en la siguiente posición [siguiente fila
107		pues es un vector o matriz columna], ¿quién iría?
108		Si al multiplicar las dos matrices anteriores obtendríamos a sub dos uno,
109		a sub dos dos, ... hasta a sub dos ene, ¿a qué debemos igualar eso?
110	E4:	A C sub dos.
111	Aly:	Exacto a C sub dos [Aly anota C sub dos debajo de C sub uno que había
112		anotado].
113		Y así ¿hasta dónde?
114	E1:	Hasta C sub ene.
115	Aly:	Hasta C sub eme, ¡cuidado! Es eme, eme de matriz, ¿por qué? ¿Este
116		vector columna cuántas filas tiene [el vector columna de las equis] y
117		cuántas columnas? Tengo 1, 2, 3... tengo n filas y 1 columna, entonces al
118		multiplicar estas matrices [la de coeficientes por la de las equis],
119		pues os recuerdo que la multiplicación de matrices está definida sólo si el
120		segundo subíndice de la primera coincidía con el primer subíndice de la
121		segunda matriz [los subíndices del orden de cada matriz], la matriz de
122		coeficientes tiene orden mxn y la de las equis nx1, el orden de lo que
123		resulte lo tenemos aquí, sería de mx1.
124		Luego esto [la matriz de los términos independientes] sería de orden
125		mx1, por el hecho de que la matriz no es cuadrada, así sería la forma
126		digamos más corta.
127		Y en la práctica lo vamos a hacer, en la práctica claro todo esto son
128		números [Aly señala la matriz de coeficientes]. No hay tanto lío ni tanto
129		subíndice, igual que los términos independientes.
130		Bueno pues eso es la forma matricial del sistema, en vez de escribirlo
131		con todos los más y todas las multiplicaciones, es más rápido escribirlo
132		así y todavía más corto, podemos escribirlo todavía así $A.X=C$ ¿Quién
133		es A, quién es X y quién es C?
134	E4:	A es la matriz de los coeficientes.
135	Aly:	A es la matriz de los coeficientes del sistema que los saco directamente,
136		X sería el vector columna este que tenemos [Aly señala el vector

137		columna de las equis].
138	E1:	De las incógnitas.
139	Aly:	Exacto de las incógnitas y C sería el vector columna de los términos
140		independientes, vale, entonces eso representa la escritura en forma
141		matricial del sistema de ecuaciones lineales.
142		Bueno tenemos que la matriz A es la matriz de coeficientes, le llamamos
143		A a partir de ahora a la matriz de los coeficientes y vamos a llamarle A
144		ampliada, la vamos a escribir con una A con un asterisco arriba, esa va a
145		ser su notación, ¿y en qué consiste la matriz ampliada? Pues en la misma
146		matriz de coeficientes pero agregándole una columna más, ¿qué columna
147		creéis que vamos a agregar aquí?
148	E1:	La de las equis.
149	Aly:	No porque las equis son nuestras incógnitas.
150		Entonces será la de los coeficientes.
151		Entonces vamos a tener a sub uno uno, a sub uno dos y así hasta
152		a sub uno ene, luego en la siguiente fila a sub dos uno, a sub dos dos
153		hasta a sub dos ene y así hasta la última fila a sub eme uno, a sub eme
154		dos, hasta a sub eme ene.
155		Luego agregamos la columna de los coeficientes, c sub uno, c sub dos...
156		hasta a sub eme.
157		A esa matriz es a la que vamos a llamarle matriz ampliada del sistema.
158		Es importante la matriz ampliada al igual que la matriz de coeficientes
159		porque en función del rango de ellas, ver si coinciden o no, podemos
160		clasificar el tipo de sistema que tenemos, si es compatible o incompatible
161		Bueno, ¿cuándo decimos que un sistema tiene solución?
162		¿Qué condición se debe cumplir para decir que un sistema tiene
163		solución?, ¿qué tiene que ocurrir?
164		¿Qué es lo que hacemos siempre que tenemos que resolver un sistema?
165		Pues encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen la igualdad del
166		sistema.
167		Entonces decimos que un conjunto de valores s sub uno, s sub dos, ...,
168		hasta s sub ene, es solución del sistema si al sustituir dichos valores en x
169		sub uno, x sub dos, ..., hasta x sub ene, todas las ecuaciones se cumplen.
170		Es decir, las ecuaciones son igualdades, y tengo que ver que todas se
171		cumplan al sustituir los valores, pero todas eh, no una o dos sino todas
172		las ecuaciones.
173		Bueno pues eso es lo que buscamos, siempre que buscamos una solución.
174		Sistemas equivalentes, ¿qué son los sistemas equivalentes?
175		Pues los que tenían ¿qué solución?
176	E2:	Iguales.
177	Aly:	Iguales. Entonces, sistemas equivalentes os recuerdo solamente, son los
178		que tienen la misma solución.
179		En el primer tema, cuando hacíamos la triangulación de Gauss a partir de
180		un sistema que nos daban, lo que íbamos haciendo eran unas
181		transformaciones para hacer la matriz triangular, hacerlo en cascada y
182		entonces, cada paso que hacíamos en ese procedimiento era a partir del
183		primer sistema ir buscando otro sistema equivalente, lo mismo que
184		hacemos con el método de reducción, buscamos un sistema equivalente

185		por tanto va a tener la misma solución.
186		Bueno pues vamos ya con lo más importante, el primer teorema que
187		tenéis en el libro de texto en la página 100, es el teorema de Rouché-
188		Frobenius.
189		El sistema es el mismo que antes, no lo voy a volver a escribir, son eme
190		ecuaciones con ene incógnitas, no tiene que ser cuadrado, bueno de
191		manera cortita si lo voy a escribir, A por X igual a C.
192		Bueno pues vamos a ver que nos dice el teorema.
193		Bueno pues partimos del sistema anterior eh.
194		Dado el sistema anterior es compatible si y solamente si, esto es una
195		doble implicación, si y sólo si el rango de la matriz A es igual al rango de
196		la matriz A ampliada.
197		Fijaros que condición más sencillita tenemos para ver si un sistema va a
198		ser compatible o no, eso es lo que nos dice el teorema.
199		Bueno además tenemos que si el rango de A es igual al rango de la
200		matriz A ampliada y si además esto es igual al número de incógnitas (en
201		este caso n), entonces si los rangos coinciden y además eso coincide con
202		el número de incógnitas, entonces el sistema, se tiene que el sistema es
203		compatible determinado (S.C.D.), es decir, tiene solución única.
204		Y si los rangos coinciden, es decir, el rango de la matriz A coincide con
205		el rango de la matriz A ampliada y eso es menor que el número de
206		incógnitas ¿qué va a ocurrir entonces?
207	E2:	Incompatible.
208	Aly:	Incompatible no, por el hecho de que, el mismo teorema de Rouché ya
209		supone un sistema compatible.
210	E2:	A si sí.
211	Aly:	Lo que pasa es que va a ser un sistema compatible de otro tipo, vale.
212		Es decir, va a ser un sistema compatible indeterminado, pues me va a
213		salir un parámetro, dos parámetros, o lo que sea, pero tiene solución, vale
214		Bueno pues vamos a ver un poquito lo de arriba, lo que dice este teorema
215		es que cualquier sistema de eme ecuaciones con ene incógnitas es
216		compatible en el caso en que los rangos coincidan, vamos a ver un poco
217		la demostración de eso.
218		Bueno vamos a empezar la implicación hacia allá [$\rightarrow$] en ese sentido, es
219		decir, partimos de que el sistema es compatible, por lo tanto que hay
220		solución y tengo que demostrar que los rangos son el mismo.
221		Bueno si el sistema es compatible, que es la hipótesis que tenemos en
222		esta implicación, si el sistema es compatible pues habrá solución o
223		soluciones, habrá unos s sub uno, s sub dos y así..., que al sustituirlos
224		[en las ecuaciones] se cumple el sistema. Entonces existen s sub uno,
225		s sub dos, ... hasta s sub ene de forma que, y ahora fijaros que vamos a
226		escribir esto, a sub uno uno, a sub dos uno, a sub tres uno... hasta
227		a sub ene uno, es decir la primera columna de la matriz, por el primer
228		valor de la solución, es decir, por s sub uno.
229		Más a sub uno dos, a sub dos dos ... hasta a sub ene dos, es decir, la
230		segunda columna de la matriz, por s sub dos.
231		Más... así hasta a sub uno ene, a sub dos ene, hasta a sub eme ene, es
232		decir, la última columna, por s sub ene.

233		Bueno y todo eso será igual a c_{11} , c_{12} , ... así hasta
234		c_{1n} [es decir, la matriz de términos independientes].
235		Vamos a ver, si el sistema es compatible, hemos dicho que entonces
236		tiene solución, si tiene solución entonces existirá o bien una solución
237		única o bien una infinita pero aunque sea infinita pues es una solución, es
238		decir, hay unos valores s_1 , s_2 , etc. de manera que todo esto
239		que acabo de escribir se debe de cumplir, ¿y qué es lo que he puesto?
240		¿Qué hemos hecho hasta ahora?, pues he escrito el sistema en forma
241		matricial pero de modo que lo estoy poniendo ahora por las columnas, es
242		decir, primera columna por s_1 más la segunda columna por
243		s_2 más ... así hasta la última columna por s_n , y todo eso
244		debe ser igual a la columna de los términos independientes, es decir, si
245		desarrollamos esto lo que nos queda ¿qué es?
246		a_1 por s_1 más a_2 por s_2 más....
247		hasta a_n por s_n , todo eso igual a c_1 , y eso era la
248		primera ecuación del sistema.
249		Segunda ecuación que saco de aquí, sería a_{21} por s_1
250		más a_{22} por s_2 más ... hasta a_{2n} por
251		s_n , todo eso igual a c_2 .
252		Última ecuación que sacamos de aquí, sería a_{n1} por s_1
253		más a_{n2} por s_2 más ... hasta a_{nn} por
254		s_n , todo eso igual a c_n , vale.
255		Entonces, lo que estoy diciendo con esto ¿qué es?
256		Fijaros, ¿esto qué es de la matriz ampliada? [Aly señala la matriz
257		columna de los términos independientes].
258		¿Qué es eso en la matriz ampliada? La matriz ampliada es ésta [Aly
259		señala la matriz ampliada que había escrito antes en el pizarrón].
260		Pues es la última columna ¿no?
261		Esto de aquí [Aly señala la matriz de términos independientes que acaba
262		de escribir] es la última columna de la matriz ampliada [Aly señala la
263		última columna de la matriz ampliada] y lo que estoy poniendo ahora es
264		que lo puedo expresar como ¿una qué?
265	Es:	[Nadie contesta].
266	Aly:	Pues como una combinación lineal, estoy expresando la última columna
267		de la matriz ampliada [la matriz de términos independientes] en función
268		de todas las columnas anteriores ¿no? Es decir, la estoy escribiendo
269		como combinación lineal de la primera columna, de la segunda columna,
270		hasta la columna s_n [Aly señala cada una de estas columnas en la
271		combinación lineal] y ésta sería la última columna de la matriz ampliada.
272		[Aly señala la matriz de términos independientes].
273		Entonces ¿qué estamos poniendo?, ¿qué estamos escribiendo?
274		Pues estamos expresando la última columna de la matriz ampliada en
275		función de ¿qué? de todas las columnas de la matriz, del resto de las
276		columnas ¿no? Por lo tanto ¿qué podemos decir de los rangos?
277		¿Cómo será entonces en función de esto el rango de la matriz A y el
278		rango de la matriz ampliada?
279		¿Cómo va a ser el rango de la matriz ampliada?
280		Pues va a ser el mismo que el rango de A, puesto que la última columna,

281		a efectos del rango, digamos que la puedo suprimir porque es
282		combinación lineal del resto.
283		¿Me entendéis lo que digo o no?
284		Si, bueno es decir, la última columna de la matriz ampliada es
285		combinación lineal del resto de las columnas, luego ¿eso aporta algo
286		nuevo para el rango o no?
287		Pues a efectos del rango no aporta nada, luego la podría suprimir, por lo
288		tanto, ¿el rango de A a qué va a ser igual?
289		Al rango de la matriz ampliada vale.
290		¿Vuelvo a repetir algo de ahí? Es fácil la idea, no es complicada.
291	E8:	Ya, ¿pero s qué es?
292	Aly:	s son las soluciones, si el sistema es compatible es que hay solución,
293		imagínate que te digo que la x sub uno es uno, la x sub dos, tres, etc.
294		pues entonces las s sub uno, s sub dos,... serían uno, tres, etc.
295		Los s son los números que son soluciones.
296		Entonces si es compatible es que hay solución o bien hay una única o
297		bien hay muchas pero si hay muchas, al tomar la solución hay que tomar
298		uno concreto y de todas formas puedo escribir esto así [Aly señala donde
299		escribió el sistema como combinación lineal].
300		Y escribir eso así ¿qué significa?
301		Pues escribir a sub uno uno por s sub uno más a sub uno dos por s sub
302		dos más... hasta a sub uno ene por s sub ene, todo eso igual a c sub uno.
303		Entonces escribí c sub uno como combinación lineal de todos los otros
304		numeritos, vale.
305		Es decir, de manera más corta los escribo por columna, para que veáis
306		que esta última columna [la de los términos independientes] se puede
307		escribir como combinación lineal de las otras, por lo tanto, si esta
308		columna [la de los términos independientes] la puedo escribir como
309		combinación lineal de las anteriores, a efectos del rango, esta columna
310		me está sobrando, entonces eso no aporta nada, entonces el rango se
311		mantiene.
312		Luego, yo partía de que el sistema es compatible y ¿a qué hemos
313		llegado? A que los rangos son iguales.
314		Bueno ahora viendo hacía atrás, es muy parecido, [para la otra
315		implicación $\leftarrow$].
316		Si los rangos coinciden ¿qué pasa?
317		Si tenemos la matriz A y la matriz ampliada y los rangos coinciden ¿qué
318		ocurre?
319		Que puedo escribir una columna, por ejemplo la última [de los términos
320		independientes] como combinación lineal de las anteriores, bueno voy a
321		escribirlo.
322		Ya se que esto no es lo más divertido, pero bueno ¿qué le vamos a hacer?
323		[Aly dice esto al ver la cara de los estudiantes en ese momento].
324		Entonces la implicación hacía atrás [$\leftarrow$] sería, si los rangos coinciden, si
325		el rango de A coincide con el rango de la matriz ampliada, vale, ¿qué
326		ocurre en ese caso?
327		Pues que una columna será seguro, una combinación lineal de las demás,
328		vale.

329		Entonces si el rango de A es igual al rango de la matriz ampliada
330		entonces puedo poner seguro la última columna, la columna de los
331		$c_{sub\ i}$ [$c_{sub\ uno}$, $c_{sub\ dos}$, ..., $c_{sub\ eme}$] como combinación lineal de
332		las columnas anteriores, que es todo esto que tengo aquí [Aly señala
333		donde escribió el sistema como combinación lineal].
334		Vale, si lo puedo escribir como combinación lineal de las anteriores,
335		serán puros numeritos, imaginaros si $s_{sub\ uno}$ vale tres pues sería 3 por
336		la primera [columna] más siete por la segunda columna [suponiendo que
337		$s_{sub\ dos}$ vale siete] entonces esos numeritos, $s_{sub\ uno}$, $s_{sub\ dos}$, etc.
338		¿qué son? Pues la solución del sistema.
339		¿De acuerdo?, no me quiero extender demasiado pero la idea es similar a
340		la implicación anterior.
341		Si puedo escribir $c_{sub\ i}$ como combinación lineal de las anteriores
342		entonces existen $s_{sub\ uno}$, $s_{sub\ dos}$, ..., hasta $s_{sub\ n}$ que son solución
343		del sistema, bueno pues si son solución del sistema, entonces ¿cómo es el
344		sistema?
345		Compatible, compatible es que tiene solución.
346		Que sean únicos esos valores o que haya muchos más ya eso no lo dice el
347		teorema, vale, eso ya hay que verlo en cada caso.
348		Luego fijaros a partir de que el sistema es compatible hemos llegado a
349		que los rangos son iguales, luego si los rangos coinciden y podemos
350		escribir la última columna de la matriz ampliada como combinación
351		lineal de las anteriores, por lo tanto existen estos valores [Aly señala
352		donde escribió el sistema como combinación lineal] y entonces existen
353		estos numeritos $s_{sub\ uno}$, $s_{sub\ dos}$, ... hasta $s_{sub\ ene}$ que son solución
354		del sistema, entonces el sistema es compatible, vale.
355		Bueno eso es teoría pero vamos a ver un ejemplo.
356		Bueno, lógicamente si el sistema es compatible solamente si los rangos
357		coinciden ¿qué va a ocurrir si los rangos no coinciden?
358		A mi me van a dar un sistema numérico que luego lo haremos pero ¿qué
359		pasa si los rangos no coinciden, qué ocurre?
360	E4:	Es incompatible.
361	Aly:	Es incompatible, claro porque el sistema es compatible si y sólo si los
362		rangos coinciden, entonces si los rangos no coinciden el sistema es
363		incompatible.
364		Pues venga, un ejemplo con números, ahí tienen algunos en el libro [de
365		texto] en la página 101.
366		Vamos a resolver el siguientes sistema, bueno lo de traducir el sistema a
367		matriz ¿ya lo tenéis dominado verdad?
368		Hombre, lo que hemos visto hoy es más fácil en la práctica, pues sólo
369		hay que escribir la matriz de coeficientes y la matriz ampliada y estudiar
370		su rango.
371		El sistema es $2x+3y-z=4$, $x+2y=5$, $3y+z=1$.
372		Nos dan este sistema y nos piden que averigüe si el sistema tiene
373		solución, es decir, si el sistema es compatible o no.
374		¿Qué hacemos?
375		No me tengo que poner a resolver el sistema, ni siquiera usar el método
376		de Gauss, simplemente hay que escribir la matriz de coeficientes y la

377		matriz ampliada.
378		¿Cuál es la matriz de coeficientes en este caso?
379		Pues 2,3,-1 [en la primera fila]; 1,2,0 [en la segunda fila] y 0,3,1 [en la
380		tercera fila]. Esa es la matriz A, la matriz de coeficientes del sistema.
381		¿Y la matriz ampliada quién es?
382		La matriz ampliada va a ser 2,3,-1,4 [en la primera fila] simplemente
383		ampliando con el término independiente, luego tenemos 1,2,0,5 [en la
384		segunda fila] y 0,3,1,1 [en la tercera fila].
385		Bueno pues venga, con eso así tengo que empezar a estudiar el rango de
386		A.
387		Este menor de orden uno [el número que está en la primera fila primera
388		columna en la matriz A] ya me da rango uno, este otro menor de orden
389		dos [formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas de
390		A] ya me da un rango de orden dos pues el determinante me da distinto
391		de 0 $[4-3=1]$.
392		¿Tendrá rango 3 o no? Pues vamos a calcular el determinante, si el
393		determinante es distinto de 0 entonces sí.
394		Pues hacemos el determinante [formado por las tres primeras filas y las
395		tres primeras columnas] sería $4+0-3-0-0-3$ esto me da -2 y -2 es distinto
396		de 0, luego como el determinante es distinto de 0 ¿cuánto es el rango de
397		A? El rango de A sería 3.
398		¿Y qué pasa con el rango de la matriz ampliada? ¿Hay que hacerlo o ya
399		no hay que hacerlo?
400		Fijaros en el orden de la matriz ampliada, son tres filas con cuatro
401		columnas, el orden es de 3×4 .
402		Bueno pues lo bueno de esto también es que si el rango de la primera [de
403		la matriz de coeficientes] es el máximo posible, el rango de ésta [de la
404		matriz ampliada] ya está hecho, ¿por qué? ¿podríamos tener rango cuatro
405		aquí [en la matriz ampliada]?
406		No, porque si aquí [en la matriz ampliada] tengo un menor de orden tres,
407		ya no tengo que hacer nada nuevo, para poder tener rango cuatro me
408		faltaría una fila más [el orden de la matriz ampliada es 3×4].
409		Entonces en este caso el rango de la matriz A coincide con el rango de la
410		matriz ampliada y es 3.
411		Entonces ¿qué podemos decir?, ¿cómo es el sistema?
412		Por el teorema que acabamos de ver [de Rouché-Frobenius] si los rangos
413		coinciden entonces el sistema es compatible.
414		¿Es el rango máximo posible, sí o no?
415	Es:	Si.
416	Aly:	Entonces además de que el sistema es compatible, ¿qué más podemos
417		decir?
418	E4:	Determinado.
419	Aly:	Que es un sistema compatible determinado.
420		Por ejemplo puede ocurrir que aquí tengamos solamente rango 2 [en la
421		matriz de coeficientes] y que con la matriz ampliada nos sigamos
422		quedando con rango 2, si la matriz de coeficientes, la matriz A tiene
423		rango 2 y la matriz ampliada también, no es el máximo posible, ¿verdad?
424		Entonces sería compatible porque los rangos coinciden, pero sería

425		indeterminado, ¿de acuerdo?
426		Ven cómo es fácil ver si un sistema es compatible o incompatible a partir
427		de ese teorema [de Rouché-Frobenius], simplemente estudiando los
428		rangos de las matrices y se acabó, si además vemos si es el máximo
429		rango posible o no, pues ya vemos si es compatible determinado o
430		indeterminado.
431		Vamos a hacer otro, venga.
432		Sería $x-2y+z=0$, $x-y=-1$, $x-4y+3z=2$.
433		Bueno pues venga hacemos lo mismo, escribimos la matriz de
434		coeficientes y la matriz ampliada y estudiamos su rango.
435		La matriz de coeficientes sería en este caso 1,-2,1 [en la primera fila];
436		1,-1,0 [en la segunda fila]; 1,-4,3 [en la tercera fila], pues estudiamos el
437		rango y luego vamos a estudiar el rango de la ampliada.
438		La matriz ampliada sería 1,-2,1,0 [en la primera fila]; 1,-1,0,-1 [en la
439		segunda fila]; 1,-4,3,2 [en la tercera fila].
440		Venga, pues el rango de A, si vemos alguna relación en las filas o
441		columnas de manera que podamos eliminar algo, mejor. ¿Ven aquí algo
442		o no?
443		Algo sí se ve.
444	E2:	Sí, la última columna es la suma de las dos anteriores cambiada de signo
445		[en la matriz de coeficientes].
446	Aly:	Si muy bien la última columna es la suma de las dos anteriores cambiada
447		de signo [Aly va haciendo la suma de los elementos de las dos columnas
448		y cambiando el signo para comprobar que es cierta la afirmación de E2].
449		Si se ve, muy bien. Sino se ve ¿qué haría?
450		Bueno pues buscaríamos el primer menor de orden uno [en este caso el
451		número de la primera fila primera columna], luego el menor de orden dos
452		[en este caso, formado por las dos primeras columnas y las dos primeras
453		filas de la matriz de coeficientes] y si hago el determinante de orden 3,
454		¿qué me debe salir?
455	E1:	0.
456	Aly:	0.
457		Entonces si vemos una relación entre las filas o las columnas que me
458		permita eliminar algo, pues mejor, me ahorro por lo menos el cálculo que
459		de esto [del menor de orden uno y dos].
460		Bueno pues entonces el rango de A en este caso, ¿cuánto es?
461	E2:	2.
462	Aly:	2, vale.
463		Entonces siempre que haya que estudiar el rango hay que dedicarle
464		medio minuto para ver si existe alguna relación entre las filas o las
465		columnas.
466		Hombre, aquí eso es más o menos fácil, pero cuando son matrices más
467		grandes...
468		Bueno el rango de la matriz ampliada, pues de la misma forma aquí
469		tenemos que al igual que en la matriz de coeficientes el rango es 2,
470		ahora esta columna [la tercera] no me aporta nada nuevo a efectos del
471		rango, la puedo suprimir, a efectos del rango la puedo suprimir porque es
472		combinación lineal de las anteriores, pero ¿y la última columna [la de los

473		términos independientes]?
474		Pues esa no sé, ¿entonces qué tengo que hacer?
475		Pues tengo que ver si con esa columna [de los términos independientes]
476		la matriz ampliada tiene rango tres o no, ¿cómo hacemos eso?
477		Bueno pues colocamos en la tercera columna la de los términos
478		independientes y vemos a ver si hay alguna relación o no entre las filas y
479		las columnas.
480		Entonces tendríamos la matriz 1,-2,0 [en la primera fila]; 1,-1,-1 [en la
481		segunda fila]; 1,-4,2 [en la tercera fila].
482	E3:	La tercera columna es 2 veces la columna uno más la columna dos.
483	Aly:	Bueno sí, y luego cambiando de signo ¿verdad?
484	E3:	Si.
485	Aly:	Entonces la tercera columna es 2 veces la primera columna más la
486		columna dos y a todo eso cambiarle de signo [Aly va haciendo esta
487		operación con las dos primeras columnas para comprobar que es cierta la
488		afirmación de E3].
489		Entonces si ven una relación de esa pues bien, pero sino pues hay que ir
490		buscando los menores y hacer el determinante.
491		Entonces ¿cuánto vale el rango de la matriz ampliada?
492	E4:	2.
493	Aly:	2 también.
494		Bueno entonces el rango de la matriz ampliada coincide también con el
495		rango de la matriz de coeficientes.
496		¿Qué ocurre en este caso?
497		Por el hecho de que los rangos son el mismo, ¿qué ocurre? ¿el sistema
498		cómo es?
499	E6:	Compatible.
500	Aly:	Compatible, ¿pero es el rango máximo que puede tener?
501	Es:	No.
502	Aly:	No.
503		Luego en este caso el sistema es compatible pero indeterminado.
504		Cuando tengamos que resolverlo, que será ya mismo, tendremos que
505		pasar la z del otro lado, como parámetro y luego lo resolvemos.
506	E11:	[Pregunta a Aly sobre la conclusión al último ejemplo].
507	Aly:	[Vuelve a repetir que debido a que el rango de la matriz de coeficientes
508		y el de la matriz ampliada coincide entonces el sistema es compatible
509		pero como es 2 y no es el máximo posible, entonces es indeterminado,
510		por tanto el sistema es compatible indeterminado].
511		Un momentito, ahí tenéis en el libro [de texto] en la página 101 el
512		ejercicio 1 que es sobre esto, hay que clasificar, hay que ver si el sistema
513		es compatible o incompatible, vale.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la onceava clase grabada de la profesora Aly del viernes 14/11/08.

Resumen: Aly comienza haciendo el ejercicio 1 (3 apartados: a, b y c) que dejó de tarea la clase anterior (el miércoles 12/11/08), usando el teorema de Rouché-Frobenius. Enseguida aborda el tema de la regla de Cramer, hace la demostración para el caso de un sistema de 4×4 (existe inquietud, tipo aburrimiento por parte de los estudiantes cuando Aly intenta desarrollar la demostración) y finalmente hace un ejemplo para aplicar la regla de Cramer a un sistema de 3×3 (y comprueba las soluciones obtenidas).

L		Transcripción
1	Aly:	Venga vamos a hacer el ejercicio 1 de la página 101 del libro [de texto],
2		que nos piden aplicar el teorema de Rouché para averiguar si el sistema
3		es compatible o no.
4		Bueno el apartado a, el sistema que nos dan es $3x-2y=5$, $x+3y=-2$,
5		$2x-y=3$.
6		Bueno vamos a aplicar el teorema de Rouché-Frobenius, ¿qué tenemos
7		que hacer para ver si el sistema es compatible o no?
8		Pues escribimos la matriz de los coeficientes, ¿de qué orden es la matriz
9		de coeficientes?
10		E5, ¿de qué orden es esta matriz de coeficientes?
11		¿Cuántas filas y cuántas columnas vamos a tener?
12	E5:	¿La ampliada?
13	Aly:	No, la matriz de coeficientes.
14	E5:	Entonces sería 2 columnas y 3 filas.
15	Aly:	¿Y qué orden es ese?
16		3×2 , vale.
17		Tenemos tres ecuaciones y tenemos solamente dos incógnitas.
18		Bueno entonces primera fila es 3, -2; segunda fila 1, 3; y la última fila 2,
19		-1.
20		La matriz ampliada es la que sí sería de orden 3×3 sería en la primera fila
21		3, -2, 5; segunda fila 1, 3, -2; y la última fila 2, -1, 3.
22		Bueno entonces tenemos por un lado la matriz de coeficientes y por otro
23		la matriz ampliada, únicamente lo que tenemos que hacer es estudiar el
24		rango de ellas, si los rangos de ellas coinciden entonces el sistema es
25		compatible.
26		Entonces en la matriz de coeficientes, tenemos el primer menor que es
27		3[el número que está en la primera fila primera columna], luego el de
28		orden dos cuyo determinante es $9+2=11$ y eso es distinto de 0, entonces
29		el Rango de A es 2, ¿podemos tener más rango que 2 en esa matriz?
30	E6:	No.
31	Aly:	No, no tenemos más rango porque no tenemos más columnas.
32		Ahora vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada, ya tengo hasta el
33		rango de orden 2, y para ver si tiene rango de orden 3 pues vamos a
34		tomar la matriz ampliada en sí, entonces bastaría calcular su
35		determinante, bien pues vamos a hacer el determinante de la matriz
36		ampliada, ¿cuánto sería?
37	E1:	Sería 27 menos...
38	Aly:	Espera, les digo siempre lo mismo, detenerse y fijaros si hay alguna
39		relación entre las filas y las columnas, dedicarle un momentito y ver si

40		existe una relación.
41	E2:	La tercera columna es la primera columna menos la segunda.
42	Aly:	Es decir, la columna tres sería la columna uno menos la columna dos.
43		[Aly va haciendo la operación con cada elemento de las columnas
44		para verificar que la afirmación de E2 es verdadera].
45		Por lo tanto la última columna es combinación lineal de las otras.
46		Pero si no veo esa relación entre las columnas, ¿cuánto me daría el
47		determinante?
48	E1:	0.
49	Aly:	0, pero es mucho más rápido ver esto, la relación entre las columnas,
50		entonces es mejor detenerse un poquito para ver si hay alguna relación.
51		Bueno y si el determinante de la matriz ampliada es 0, entonces ¿cuál
52		es el rango de la matriz ampliada?
53	Es:	Dos.
54	Aly:	Dos.
55		¿Entonces es un sistema compatible o incompatible?
56	E6:	Compatible.
57	Aly:	Es un sistema compatible, pero dentro de los compatibles,
58		¿es determinado o indeterminado?
59	Es:	Indeterminado, determinado.
60	Aly:	Determinado, ¿por qué determinado?
61	E11:	Porque el número del rango coincide con el número de incógnitas
62	Aly:	Exactamente, mirad lo que estamos haciendo, hay una dependencia en la
63		última columna [de la matriz ampliada], en este caso de la columna
64		tercera.
65		Es que en realidad una de las filas en el sistema está sobrando, entonces
66		si resolvemos el sistema con las dos primeras me va a dar la solución,
67		eso lo vamos a ver un poquito más adelante cuando veamos la regla de
68		Cramer.
69		Bueno en estos apartados sólo nos piden ver eso, vamos a hacer el
70		siguiente, el apartado b, tenemos $4x+5y=7$, $2x-y=0$, $7x+11y=4$.
71		¿Cuánto sale el rango de A y cuánto sale el rango de la ampliada?
72		¿Lo habéis hecho alguno? Mira que en el examen... [Incitándolos para
73		que lo hagan y no tengan tanto problema cuando hagan el examen].
74		Bueno venga tenemos la matriz de los coeficientes, 4, 5 en la primera fila
75	E1:	Pero es 4, 5, 7.
76	Aly:	No eso va en la ampliada.
77		Luego tenemos 2, -1 en la segunda fila y 7, 11 en la última fila, hay otra
78		cosa que podemos hacer, escribir directamente la matriz ampliada para
79		escribir un poco menos, la ampliada directamente sería esta, 4, 5, 7 en la
80		primera fila; 2, -1, 0 en la segunda fila y 7, 11, 4 en la última fila, como
81		aquí [en la matriz ampliada] ya está la matriz A [de coeficientes],
82		podemos analizar ahí mismo el rango de la matriz A y el de la ampliada
83		también.
84		Bueno, el rango de la matriz primera, de la matriz A, tenemos el menor
85		de orden uno [el número que está en la primera fila primera columna],
86		luego ampliando al menor de orden dos, su determinante es distinto de 0
87		[el determinante de la matriz formada por las dos primeras filas y las dos

88		primeras columnas], luego el rango de la matriz A es dos.
89		Con la matriz ampliada, ya la tenemos ahí escrita y lo que tenemos que
90		hacer es calcular el determinante de toda la matriz [de orden 3×3],
91		antes de hacer el determinante, ¿se ve algo por ahí, alguna relación,
92		alguna combinación lineal?
93		Bueno pues sino se ve nada pues vamos a hacerlo directamente el
94		determinante completo, vale.
95		Bueno pues sino se ve nada, se empieza a resolver el determinante por
96		Sarrus, venga diagonal principal será -16 luego será más 0 más 154 más
97		49 menos 40.
98	E2:	Sale 149.
99	Aly:	Sale distinto de 0, aquí no me interesa tanto el valor, es decir, no me
100		interesa tanto llegar hasta el último numerito, sólo necesito ver si el valor
101		del determinante es 0 o no es 0, claro si te da tiempo es mejor resolverlo
102		[encontrar el valor exacto] pero aquí a simple vista se ve que tenemos
103		dos cantidades grandes [154 y 49] y que no va a dar 0, entonces eso va a
104		ser distinto de 0, entonces el rango de la matriz ampliada ¿cuánto será?
105		El rango de la matriz ampliada sería 3 y entonces el sistema ¿cómo es?
106	E4:	Incompatible.
107	Aly:	Los rangos no coinciden por lo tanto el sistema es incompatible.
108		Bueno y por último ya, el apartado c también sale incompatible, sale
109		rango 2 y rango 3.
110		Bueno vamos a hacerlo, nos dan $x+y+2z=7$, $3x-y+4t=1$, esto tiene cuatro
111		incógnitas, $x-3y-4z+4t=6$.
112		La matriz de coeficientes, o directamente la ampliada si queréis pues
113		vamos a hacer el estudio de los dos rangos.
114		Sería [la matriz ampliada] 1,1,2,0,7 [en la primera fila]; 3,-1,0,4,1
115		[en la segunda fila]; 1,-3,-4,4,6 [en la tercera fila].
116		Bueno rango de la primera matriz [de coeficientes], tenemos el rango
117		uno [con el primer elemento de la primera fila, primera columna],
118		ampliando [a la matriz de las dos primeras filas y las dos primeras
119		columnas] tenemos rango dos y vamos a ver si ampliamos con la
120		siguiente columna y la siguiente fila [para tener una matriz de 3×3],
121		aquí no puedo escribir determinante de A, mucho cuidado con la
122		notación, con lo que escribimos eh, esto aquí no está bien escrito
123		¿verdad? ¿aquí existe o no?
124	E2:	No.
125	Aly:	¿Por qué no? Porque la matriz A tiene tres filas y cuatro columnas, aquí
126		no está definido el determinante pues el determinante sólo está definido
127		para matrices cuadradas y cuidado con lo que escriben, lo digo porque
128		son detalles que se escapan eh,
129		lo que si puedo decir es el determinante de esta submatriz [de orden 3×3]
130		que forma parte de la matriz A, entonces lo escribimos y sería
131		determinante de 1,1,2 [en la primera fila]; 3,-1,0 [en la segunda fila];
132		1,- 3,-4 [en la última fila], tenemos que hacer ese determinante,
133		¿se ve alguna relación de dependencia ahí?
134		No.
135		Pues vamos a hacerlo, sería $4-18+2+12=0$, luego ¿qué pasa?

136		Que el menor de orden dos que teníamos, al ampliarlo con esta fila y esta
137		columna, resulta que no me da de orden 3,
138		¿qué tengo que hacer para asegurarme que tiene rango 3?
139		Ampliar con la otra columna, filas no tengo más pero columna si tengo
140		otra posible.
141		Partiendo del menor de orden dos ampliamos con la cuarta
142		columna, sería el determinante de 1,1,0 [en la primera fila]; 3,-1,4 [en la
143		segunda fila]; 1,-3,4 [en la última fila].
144		¿Sale ahí una combinación lineal o no?
145	E3:	Si.
146	E2:	La última columna es la columna uno menos la columna dos.
147	Aly:	Exactamente [Aly va haciendo las operaciones con esas columnas para
148		comprobar que la afirmación de E2 es verdadera].
149		Bueno pues entonces esta columna tres es la columna uno menos la
150		columna dos, por lo tanto el determinante ¿cuánto me da?
151	E1:	0.
152	Aly:	0, pues si una fila o columna es combinación lineal de las anteriores el
153		determinante vale 0.
154		Entonces el rango de A ¿cuánto es?
155	Es:	Dos.
156	Aly:	Tengo el rango de orden uno, luego de orden dos y cuando amplío a uno
157		de orden tres el determinante me da 0 con cada una de las columnas,
158		entonces el rango de A [la matriz de coeficientes] es dos.
159		Bueno ahora vamos a ver el rango de la matriz ampliada, para ver el
160		rango de la ampliada, lo mismo parto del menor de orden dos que es
161		distinto de 0 y la única posibilidad que tengo es con la columna de los
162		términos independientes, porque con las otras dos [con la tercera y cuarta
163		columna] ya lo he hecho y su determinante dio 0, entonces lo hacemos
164		con la columna de los términos independientes, sería calcular el
165		determinante de 1,1,7 [en la primera fila]; 3,-1,1 [en la segunda fila];
166		1,-3,6 [en la última fila], esto si podemos escribirlo aparte para ver si hay
167		alguna relación.
168		¿Vemos alguna relación?
169		Sino pues hay que hacerlo.
170		En un principio no se ve ninguna relación ¿verdad?
171		Venga pues vamos a hacerlo usando Sarrus sería $-6+1-63+7+3-18$, ¿eso
172		va a ser 0 o no?
173	E2:	No.
174	Aly:	Veis que no, pues aquí hay bastante negativo [-6, -63 y -18] y positivos
175		pues son más poquitos [1, 7 y 3], no me interesa tanto el valor sino que
176		sea 0 o no, entonces el rango de la ampliada en este caso ¿cuánto es?
177	E4:	Es tres.
178	Aly:	Como el rango de la primera [de la matriz de coeficientes] es dos y de la
179		ampliada es tres entonces es un sistema incompatible, vale.
180		Esa es la idea para estudiar si un sistema es compatible o incompatible
181		nada más tengo que aplicar el teorema de Rouché.
182		¿Cuánto decías E8 que daba ese último determinante?
183	E8:	-76.

184	Aly:	Por si alguien lo ha hecho que vea que da -76.
185		Pero lo importante es ver si es 0 o distinto de 0, vale.
186		Bueno pues vamos con lo nuevo que es la Regla de Cramer, ya lo he
187		dicho.
188	E2:	Aly, entonces es incompatible cuando el rango de A es distinto del rango
189		de la matriz ampliada.
190	Aly:	Claro cuando el rango de A no coincide con el de la ampliada, y ¿cuándo
191		no coinciden?
192	E8:	Cuando coinciden es compatible y cuando no coinciden es indeterminado
193		¿no?
194	Aly:	A ver te estás liando, si el rango de la matriz A es igual que el rango de
195		la matriz ampliada, el sistema es compatible, lo que pasa es que dentro
196		de los compatibles hay de dos tipos, compatible determinado cuando hay
197		una única solución y compatible indeterminado.
198		Entonces si los rangos coinciden y es lo máximo que puedes encontrar de
199		rango, entonces es un sistema compatible determinado, que coincida
200		además ese rango con el número de incógnitas que tenga, vale.
201		Si además esos rangos coinciden pero no coincide con el número de
202		incógnitas entonces el sistema es compatible indeterminado, porque te va
203		a salir un parámetro.
204		Y sistema incompatible ¿cuándo? Pues si los rangos no coinciden,
205		lógicamente sino coinciden es porque el rango de A tiene que ser menor
206		que el de la ampliada entonces el sistema es incompatible, vale.
207		Bueno pues eso es lo que dice el teorema de Rouché.
208		Bueno pues vamos a ver la regla de Cramer, un poquito más de teoría.
209		La regla de Cramer es lo que se usa realmente como método práctico,
210		método eficaz para resolver un sistema.
211		Bueno regla de Cramer, vamos a ver cuando decimos que un sistema es
212		de Cramer y cómo se resuelve, para eso tenemos que fabricarnos un
213		determinante.
214		Venga vamos a ver regla de Cramer, eso lo tenéis en el libro [de texto]
215		en la página 102.
216		Vamos a copiar, vale.
217		Un sistema se dice que es de Cramer cuando tiene el mismo número de
218		ecuaciones que de incógnitas y además ese número de ecuaciones igual
219		al número de incógnitas también tiene que ser igual al rango de A e igual
220		al rango de la matriz ampliada. Es decir, que todos coincidan, vale.
221		Estudio el rango de A y veo que es el mismo que el rango de la ampliada,
222		veo el número de ecuaciones y de incógnitas y veo que coinciden, es
223		decir, si todo eso coincide entonces estamos en un sistema de Cramer.
224		Por el hecho de que los rangos coincidan, ¿cómo es el sistema por el
225		teorema que hemos usado antes?
226	E6:	Es compatible.
227	Aly:	Es compatible, y ¿ahora qué va a ser compatible determinado o
228		compatible indeterminado?
229		Como los rangos son el máximo posible porque coincide con el número
230		de ecuaciones y de incógnitas que tenemos, entonces va a ser un sistema
231		compatible determinado, va a tener solución única.

232	Entonces es muy fácil resolver el sistema con la regla de Cramer.
233	Bueno un poco de formación teórica, vamos a ver un caso en el que $m=n$,
234	es decir el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, igual
235	al rango de A igual al rango de la matriz ampliada y en este caso vamos a
236	escribir todo eso igual a 4.
237	¿Cómo os quedaría el sistema numérico en plan teórico?
238	Pues el sistema nos quedaría a sub uno uno por x más a sub uno dos por
239	y más a sub uno tres por z más a sub uno cuatro por t igual a c sub uno;
240	es decir, que estamos diciendo que vamos a tener cuatro ecuaciones con
241	cuatro incógnitas.
242	Entonces la siguiente ecuación sería a sub dos uno por x más a sub dos
243	dos por y más a sub dos tres por z más a sub dos cuatro por t igual a c
244	sub dos.
245	La tercera ecuación sería a sub tres uno por x más a sub tres dos por y
246	más a sub tres tres por z más a sub tres cuatro por t igual a c sub tres.
247	Y la última ecuación sería a sub cuatro uno por x más a sub cuatro dos
248	por y más a sub cuatro tres por z más a sub cuatro cuatro por t igual a
249	c sub cuatro.
250	Bueno pues para un sistema como ese lo que me dice la regla de Cramer
251	es lo siguiente, la regla de Cramer nos va a dar la solución del sistema,
252	pero se tiene que cumplir todo eso [que el número de ecuaciones es igual
253	al número de incógnitas igual al rango de A igual al rango de la matriz
254	ampliada], pues la regla de Cramer nos da una forma eficaz de encontrar
255	las soluciones.
256	Entonces la regla de Cramer lo que nos dice, lo que nos da son las
257	soluciones del sistema y que sería el siguiente,
258	x va a consistir en resolver el determinante siguiente, sería x igual al
259	determinante de A sub x, ahora les diré que significa eso, partido por el
260	determinante de A.
261	Bueno pues lo que está en el denominador, el determinante de A está
262	claro quien es, es el determinante de la matriz A.
263	Y lo que está en el numerador, el determinante de A sub x consistiría en
264	escribir el determinante de c sub uno, c sub dos, c sub tres y c sub cuatro
265	en la primera columna, es decir, los valores de los términos
266	independientes en el sitio de los coeficientes de las equis, es decir en la
267	primera columna.
268	La segunda columna de la matriz, la dejo igual es decir, a sub uno dos, a
269	sub dos dos, a sub tres dos y a sub cuatro dos.
270	Tercera columna, la dejo igual, se queda todo igual, excepto la primera
271	columna que es donde sustituyo los valores de los coeficientes de los
272	términos independientes, bueno pues entonces la tercera columna sería a
273	sub uno tres, a sub dos tres, a sub tres tres y a sub cuatro tres.
274	Y la última columna sería a sub uno cuatro, a sub dos cuatro, a sub tres
275	cuatro y a sub cuatro cuatro.
276	Y en el denominador el determinante de A.
277	¿De acuerdo?
278	Y para calcular la y ¿qué dice la regla de Cramer?
279	Pues que y se va a calcular de la siguiente manera, en el denominador

280		siempre va el determinante de A, ¿y en el numerador que irá?
281		El determinante de A sub...
282	E8:	De A sub dos.
283	Aly:	De A sub y.
284		¿Qué será A sub y? Pues cambiando la segunda columna ¿por quién?
285		Pues por los de la columna de los términos independientes, si en el de las
286		equis sustituimos los términos independientes en la primera columna,
287		ahora para A sub y será en la segunda columna, en la segunda columna
288		colocaremos c sub uno, c sub dos, c sub tres y c sub cuatro.
289		¿Y para z, qué sería?
290		Pues en el denominador sería el determinante de A y en el numerador A
291		sub z, ¿y A sub z cómo sería?
292		Pues cambiando la tercera columna por los términos independientes.
293		Y t sería A sub t partido por el determinante de A.
294		Bueno pues eso es lo que nos dice la regla de Cramer, nos da las
295		soluciones directamente, vale.
296		Entonces vamos a ver cuál es la demostración de esto.
297		Vamos a ver quien es este determinante de A sub x, no está complicado
298		eh.
299		Venga vamos a ver cuál es la demostración de la regla de Cramer, de
300		donde sale eso.
301		Veamos el valor del determinante A sub x, quizás es un poco larga la
302		notación pero nada más.
303		¿Bueno quién era A sub x?
304		No lo voy a escribir nuevamente como lo habíamos hecho antes, pero si
305		lo vamos a escribir un poquito más largo.
306		En la primera columna, que habíamos dicho que era c sub uno, c sub dos,
307		c sub tres y c sub cuatro.
308		Pero c sub uno por el sistema es todo eso [Aly señala el lugar donde
309		escribió la primera ecuación en el sistema completo en la pizarra],
310		c sub uno según lo que me dice la primera igualdad, la primera ecuación
311		es igual a todo eso, entonces ahora en lugar de escribir c sub uno vamos
312		a escribir lo de la igualdad, sería a sub uno uno x más a sub uno dos y
313		más a sub uno tres z más a sub uno cuatro t.
314	E3:	¿Los numeritos no van ahí? [E3: se refiere a coeficientes con números
315		determinados].
316	Aly:	Si ponemos ahí los numeritos entonces ya no es demostración, sería un
317		ejemplo concreto, entonces vamos a usar notación general,
318		ya sé que no es lo más bonito pero hay que hacerlo.
319		Venga, la segunda columna, ¿cómo era? [Aly señala el lugar donde había
320		escrito anteriormente el determinante de A sub x].
321		Pues es a sub uno dos, fijaros que esto [Aly señala el lugar donde ha
322		escrito lo que vale c sub uno] es sólo lo que vale c sub uno, que en lugar
323		de escribir c sub uno escribimos esta combinación lineal que es lo que
324		vale c sub uno.
325		Bueno entonces en la segunda columna sería a sub uno dos, luego en la
326		siguiente columna a sub uno tres y en la última columna a sub uno
327		cuatro, vale, bueno pues eso es lo que nos va a quedar en la primera fila

328		de este determinante [el determinante de A sub x].
329		Vais a ver que esto es rapidito aunque en el primer elemento de la
330		primera columna tengamos varias sumas, pues ya sabemos varias
331		propiedades de determinantes.
332		¿Qué pasa E4? [E4 observa a Aly con cara de duda].
333	E4:	¿De dónde salió todo eso? [E4 señala la combinación lineal que aparece
334		como elemento de la primera fila primera columna del determinante de A
335		sub x].
336	Aly:	Pues todo eso ¿quién es? Pues es c sub uno de acuerdo a lo que dice la
337		primera ecuación, la primera igualdad del sistema, vale.
338	E4:	Ah, ok.
339	Aly:	Vale, por eso he estado utilizando esta notación con x, y, z, t porque si
340		encima aquí metemos x sub uno, x sub dos, etc, pues...
341		Entonces escribo c sub uno, no tal cual sino lo que vale ok.
342		Bueno entonces, ahora ¿quién sería c sub dos?
343		Lo que dice el sistema es que todo esto es c sub dos [Aly señala la
344		segunda ecuación del sistema], como es una igualdad, entonces tenemos
345		lo que vale c sub dos, bueno pues lo escribimos aquí [donde Aly está
346		escribiendo el determinante de A sub x], sería a sub dos uno x más
347		a sub dos dos y más a sub dos tres z más a sub dos cuatro t [en la
348		segunda fila primera columna del determinante de A sub x],
349		luego seguiría a sub dos dos, a sub dos tres y a sub dos cuatro.
350		Vale, siguiente elemento [para escribir la tercera fila del determinante de
351		A sub x].
352		Ahora tendríamos que escribir el c sub tres, pero no como tal sino lo que
353		vale según la tercera ecuación del sistema.
354		Sería a sub tres uno x.
355	E3:	¿Tenemos que apuntarlo? Es larguísimo.
356	Aly:	¿Y alguien dijo que fuera corto?
357		Dije que la idea es corta, bueno vamos a seguir.
358		[E4 continua hablando mientras Aly continúa escribiendo lo que sería la
359		tercera fila del determinante].
360		[Aly escribe a sub tres uno x más a sub tres dos y más a sub tres tres z
361		más a sub tres cuatro t, luego el siguiente elemento de la tercera fila
362		segunda columna a tres sub dos, el elemento de la tercera fila tercera
363		columna a sub tres tres y finalmente el elemento de la tercera fila cuarta
364		columna a sub tres cuatro].
365		Es mejor hacer las cosas así largas con cuidadito que las cortas, decía un
366		profesor mío de la carrera que “líbreme Dios de los enunciados cortos
367		que de los largos me libro yo”, ¿sabéis por qué, no?
368		Porque en un enunciado corto tiene tan poquitas cosas para agarrarte,
369		tan poquitos datos y no como los largos,
370		así que porque sea largo no hay que asustarse eh.
371		Venga vamos a continuar [con la última fila], sería a sub cuatro uno x
372		más a sub cuatro dos y más a sub cuatro tres z más a sub cuatro cuatro t,
373		el siguiente elemento sería a sub cuatro dos [en la cuarta fila segunda
374		columna], luego a sub cuatro tres [en la cuarta fila tercera columna] y
375		a sub cuatro cuatro [en la cuarta fila cuarta columna].

376		Bueno y ¿qué hacemos con ese determinante?
377	E2:	Ir separando en sumas.
378	Aly:	Ir separando, propiamente. Bien, si empezamos a separar lo de la primera
379		columna, pues en la primera columna tenemos suma de varios términos,
380		entonces me quedaría un primer determinante formado por a sub uno uno
381		x [que es el primer elemento de la suma de c sub uno], luego a sub uno
382		dos, a sub uno tres, a sub uno cuatro [en la primera fila],
383		bueno el primer determinante si lo voy a escribir, los demás no porque ya
384		os diré.
385		Bueno sería el primer determinante, en la primera fila a sub uno uno x
386		luego a sub uno dos, después a sub uno tres y por último a sub uno cuatro
387		Luego en la siguiente fila sería a sub dos uno x, a sub dos dos, a sub dos
388		tres y a sub dos cuatro.
389		En la siguiente fila sería a sub tres uno x, luego a sub tres dos, a sub tres
390		tres y a sub tres cuatro.
391		Y en la última fila sería a sub cuatro uno x, a sub cuatro dos, a sub cuatro
392		tres y a sub cuatro cuatro.
393		Luego sería más...
394		¿Qué pasa con los demás determinantes?
395	E2:	Son iguales.
396	Aly:	Iguales no, pero veamos, el siguiente determinante sería en la primera
397		columna a sub uno dos y, a sub dos dos y, a sub tres dos y y a sub cuatro
398		dos y.
399		Luego en la siguiente columna sería a sub uno dos, a sub dos dos,
400		a sub tres dos y a sub cuatro dos.
401		En la tercera columna sería a sub uno tres, a sub dos tres, a sub tres tres y
402		a sub cuatro tres.
403		En la última columna a sub uno cuatro, a sub dos cuatro, a sub tres cuatro
404		y a sub cuatro cuatro.
405		Fijaros ¿qué pasa con las dos primeras columnas?
406	Es:	El determinante da 0.
407	Aly:	Claro, me da 0 porque la primera columna es proporcional a la
408		segunda columna, luego ese determinante completo ¿cuánto vale?
409	Es:	0.
410	Aly:	0.
411		¿Y con el tercero qué va a pasar?
412	Es:	Lo mismo.
413	Aly:	Lo mismo que es 0 [pues la primera columna sería proporcional a la
414		tercera].
415		¿Y con el cuarto qué va a pasar?
416		Lo mismo, da 0.
417		Es decir, aquí hay tres determinantes que dan 0, lo bueno de esto es
418		que, bueno es un poquito largo de escribir al principio pero luego hay
419		tres determinantes que dan 0, entonces sólo nos queda el primero.
420		Fijaros que en el primero ¿qué veis que hay en la primera columna? [la
421		primera columna es a sub uno uno x, a sub dos uno x, a sub tres uno x y a
422		sub cuatro uno x].
423		Fijaros que la x se repite en todos los elementos.

424	E4:	Entonces sale la x.
425	Aly:	Sacamos la x y ahora ¿qué determinante nos queda?
426		a sub uno uno, a sub uno dos, a sub uno tres, a sub uno cuatro [en la
427		primera fila], luego a sub dos uno, a sub dos dos, a sub dos tres, a sub
428		dos cuatro [en la segunda fila].
429		Después a sub tres uno, a sub tres dos, a sub tres tres, a sub tres cuatro
430		[en la tercera fila] y en la última fila a sub cuatro uno, a sub cuatro dos,
431		a sub cuatro tres, a sub cuatro cuatro ¿y eso qué es?
432	E2:	El determinante de A.
433	Aly:	El determinante de A.
434		Luego ¿a qué hemos llegado?
435		A que el determinante de A sub x es igual a x por el determinante de A.
436		Podemos despejar de ahí la x, luego lo que nos queda es x igual al
437		determinante de A sub x partido por el determinante de A y es lo que
438		dice, eso es la regla de Cramer.
439		¿Veis la idea de la demostración cuál es?
440		¿Si?
441		Ya digo que tal vez no es lo más agradable pero bueno, con que veáis
442		esto no pasa nada, no.
443	E1:	Aly, esto no vendrá en el examen ¿verdad?
444	Aly:	No.
445		Solamente acostumbraros a mirar, acostumbraros a estudiar cosas de este
446		tipo, vale.
447		¿Cómo haríamos para encontrar el valor de la y?
448		Igual que yo he empezado por el determinante de A sub x, ¿con cuál
449		empezaría ahora?
450	E2:	Con el A sub y.
451	Aly:	Empezaríamos con el determinante de A sub y, empezaríamos a poner el
452		valor de c sub uno, c sub dos, c sub tres, c sub cuatro, no en la primera
453		columna sino en la segunda, ahora empezaríamos a romper eso en sumas
454		de cuatro determinantes, tres de ellos son 0 y del que queda se extrae
455		la y y queda el determinante de A, es decir, la idea es igual, vale.
456		Entonces todo sigue igual y llegamos a que el determinante de A sub y es
457		igual a y por el determinante de A y entonces la y es igual al
458		determinante de A sub y partido por el determinante de A.
459		Y con la z lo mismo, queda que z es igual al determinante de A sub z
460		partido por el determinante de A.
461		Eso es la regla de Cramer.
462		Bueno vamos a ver un ejemplo con numeritos, como quiere E3.
463		Una cosa es la demostración teórica, y eso que hicimos sólo el caso de 4
464		por 4 eh.
465		Bueno pues venga, ejemplo de la regla de Cramer, vamos a ver este
466		sistema sería $2x+3y-7z=-1$, $3x+4y-6z=5$, $5x-2y+4z=-7$.
467		Venga ahora si son numeritos, ahora si hay que hacerlo.
468		Primero tenemos que asegurarnos que estamos en un sistema que es de
469		Cramer.
470		¿Cómo hemos definido que un sistema es de Cramer?
471	E2:	Cuando los rangos coinciden.

472	Aly:	Cuando el Rango de la matriz A coincide con el de la ampliada y eso
473		coincide con el número de ecuaciones y el número de incógnitas, todo
474		coincide, luego es lo más fácil que nos podemos encontrar.
475		Aquí si me va a hacer falta calcular el determinante de A, porque veis la
476		regla de Cramer, lo que aparece en los denominadores ¿qué es? el valor
477		del determinante de A, entonces no puede valer 0.
478		Entonces la matriz A sería 2,3,-7 [en la primera fila], 3,4,-6 [en la
479		segunda fila], 5,-2,4 [en la tercera fila], vale.
480		¿Cuánto vale el determinante de A?
481		Vamos a ver directamente los rangos, el menor de orden uno es diferente
482		de 0 [el 2 que está en la primera fila primera columna], el de orden dos es
483		distinto de 0 [el determinante del menor de orden dos formado por las
484		dos primeras filas y las dos primeras columnas es -1 que es distinto de 0],
485		luego el determinante de la matriz A es $32-90+42+140-24-36=64$, lo cual
486		es distinto de 0, vale.
487		Entonces si el rango de A es 3.
488		¿Cuánto será el rango de la ampliada?
489		Por más que agregue yo una columna más va a seguir siendo rango 3, no
490		tengo otra fila más.
491		Luego el rango de A es tres y coincide con el rango de la ampliada,
492		coincide con m que es el número de ecuaciones y con n que es el número
493		de incógnitas, entonces es un sistema de Cramer, vale.
494		Bueno pues como es un sistema de Cramer pues hay que resolverlo.
495		El valor de x ¿cómo hemos dicho que se calcula?
496		Pues es el determinante de A sub x partido por el determinante de A.
497		Entonces vamos a calcular el determinante de A sub x, sería el
498		determinante de, ponemos los términos independientes en la primera
499		columna que es la columna de las equis sería -1,5,-7, luego la segunda
500		columna no varía sería 3,4,-2 y tercera columna sería -7,-6,4.
501		Todo ese determinante va partido por el valor del determinante de A
502		[64].
503		Bueno ese determinante hay que calcularlo [el determinante de A sub x]
504		ya voy a anotar lo que sale [de ese determinante] que es -64 y va partido
505		por 64 [el valor del determinante de A] que da -1 [entonces $x=-1$].
506		Y para la y, sería el determinante de A sub y partido por el determinante
507		de A, entonces tenemos que calcular el determinante de A sub y que
508		sería, en la primera columna se queda igual [que en la matriz A] 2,3,5 y
509		en la segunda columna ponemos los valores de los términos
510		independientes, es decir, -1,5,-7 y la tercera columna no varía sería
511		-7,-6,4, todo ese determinante va partido por el valor del determinante de
512		A [64].
513		Bueno pues hay que ver cuánto da eso, es 320 [el valor del determinante
514		de A sub y] partido por 64 [el valor del determinante de A], entonces y
515		vale 5.
516		La z sería, el determinante de A sub z partido por el determinante de A.
517		En el determinante de A sub z sería en la primera columna 2,3,5; en la
518		segunda columna 3,4,-2 y en la tercera columna se sustituyen los valores
519		de los términos independientes, es decir, -1,5,-7.

520		Bueno pues este determinante calculadlo vosotros a ver cuánto sale,
521		venga, con eso ya tendríamos lo que vale z y por tanto ya tendríamos la
522		solución, lo que vale x, y, z.
523		Venga a ver quién me lo dice.
524	E3:	Va a dar 0.
525	Aly:	¿Pero por qué va a dar 0?
526	E3:	Porque tú dijiste que 3 determinantes daban 0.
527	Aly:	Si pero eso era en la demostración de la regla de Cramer, al final te
528		quedas con uno, ¿no?, de la demostración esta que acabamos de hacer, al
529		final te quedas con uno ¿no? [Aly se acerca al lugar de E3].
530		[Aly explica nuevamente la demostración a E3 en su lugar y intentando
531		hacerle notar que en efecto tres determinantes dan 0 pero que siempre
532		queda uno que hay que calcular].
533		Venga ¿ya lo habéis calculado? [Aly dirige esta pregunta al grupo].
534	E2:	Vale 128.
535	Aly:	Entonces z es 128 partido por 64, y entonces $z=2$.
536		Bueno algo que se debe hacer aunque no acostumbro mucho hacerlo es
537		lo siguiente, si yo tengo que la solución a este sistema es -1, 5, 2 [$x=-1$,
538		$y=5$, $z=2$], que es un sistema compatible determinado, que tiene solución
539		única, bueno os digo que lo que no se suele hacer mucho pero que si en
540		un examen hay tiempo yo lo haría, sería comprobarlo, comprobar si está
541		bien la solución, ¿cómo se hace la comprobación?
542		Pues sustituyendo en el sistema lo que vale la x, y, z y ver que se cumple
543		la igualdad en cada una de las tres ecuaciones.
544		¿Qué haríamos para la comprobación del sistema?
545		Sería, en la primera ecuación 2 por -1 más 3 por 5 menos 7 por 2,
546		son $-2+15-14$ y eso me tiene que dar -1, y ¿es verdad que me da -1? Pues
547		sí.
548		Ven, la comprobación no es nada ya.
549		Entonces si hay tiempo en un examen yo lo haría.
550		Ahora con la segunda ecuación sería 3 por -1 más 4 por 5 menos 6 por 2,
551		son $-3+20-12$, eso me tiene que dar 5, y ¿es verdad que me da 5?
552		Pues sí.
553		En la última ecuación sería 5 por -1 menos 2 por 5 más 4 por 2, son -5-
554		$10+8$, eso me tiene que dar -7, y eso me da -7.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la doceava clase grabada de la profesora Aly del lunes 17/11/08.

Resumen: Aly comienza haciendo un ejercicio en la pizarra usando regla de Cramer para un sistema de 3×3 , luego resuelve otro para un sistema compatible indeterminado de 4×4 , finalmente propone un ejercicio para hacer pero no se termina en clase.

L		Transcripción
1	Aly:	A los niños de ESO les reviso al inicio los deberes (tareas), todos los
2		días, pero ustedes se supone que ya saben que deben hacer los deberes.
3		Bueno venga vamos a resolver este sistema $x-3y+5z=-24$, $2x-y+4z=-8$,
4		$x+y=9$, bueno pues nos dan este sistema en el libro [de texto] para
5		resolverlo usando la regla de Cramer.
6		Entonces lo primero que tenemos que ver es que efectivamente sea un
7		sistema de Cramer, para eso necesitamos saber si el rango de A coincide
8		con el rango de la matriz ampliada y que coinciden además con el
9		número de ecuaciones y con el número de incógnitas.
10		La matriz sería 1,2,1 [en la primera columna]; -3,-1,1 [en la segunda
11		columna]; 5,4,0 [en la tercera columna].
12		Aquí rango 1 y rango 2 se ven facilito [Aly señala el menor de orden 1,
13		al 1 que está en la primera fila y primera columna, también señala el
14		menor de orden dos formado por las dos primeras filas y las dos primeras
15		columnas cuyo determinante es distinto de 0].
16		Vamos a ver si hay rango 3, hay que hacer el determinante de la matriz
17		A, además necesitamos el valor del determinante para usar la regla de
18		Cramer, entonces usando Sarrus sería $-12+10+5-4=15-16=-1$.
19		Ese determinante es muy fácil.
20		Hay que coger habilidad para hacerlo en un tiempo corto porque
21		para resolver un sistema tenéis que haced cuatro determinantes de 3×3 .
22	E6:	Pero es que hoy no traigo mi calculadora.
23	Aly:	Pero si yo lo hago sin calculadora, esos números no son para calculadora
24	E1:	A mí me salió -2 porque me confundí.
25	E2:	Yo me equivoqué en los números negativos.
26	Aly:	Usar tanta calculadora es malo eh, porque para cuentas más grandes vale,
27		pero estos son numeritos muy sencillos, pero os enviáis tanto con la
28		calculadora que luego no está bien.
29		Bueno pues venga, entonces como el determinante de la matriz A nos
30		sale un valor distinto de 0, ¿qué significa respecto del rango? ¿qué rango
31		tiene la matriz A?
32		Rango de A sería entonces ¿cuánto?
33	Es:	Tres.
34	Aly:	El rango es el máximo posible, entonces el rango de la ampliada, ¿sabéis
35		hacedlo o no?
36	E4:	No.
37	Aly:	La ampliada es esto mismo [la matriz A] pero con una columna más por
38		tanto es imposible que pueda tener rango 4, entonces en este caso el
39		rango de la ampliada va a ser el mismo, va a ser 3.
40		Como además eso coincide con el número de ecuaciones y el número de
41		incógnitas, pues entonces estamos en un sistema que lo podemos hacer
42		por la regla de Cramer, vale.

43		Pues venga la regla de Cramer ¿qué decía la regla de Cramer E3,
44		recuerdas?
45	E3:	No.
46	Aly:	E3 nos dedicamos casi toda la clase pasada sólo con la regla de Cramer,
47		la teoría y un ejemplo, entonces llegas a casa y no haces los ejercicios
48		propuestos para hoy ni te miras la teoría, esto no es así.
49		Bueno pues x, ¿quién recuerda la regla de Cramer?
50	E2:	Que x era igual al determinante A sub x partido por el determinante de A
51	Aly:	De la misma forma y ¿a qué sería igual?
52	E1:	Al A sub y [el determinante] partido por A [el determinante].
53	Aly:	y sería igual al determinante de A sub y partido por el determinante de
54		A.
55		Y similarmente para z, sería igual al determinante de A sub z partido por
56		el determinante de A.
57		Ya veis que necesitamos el valor del determinante de A, así que como
58		ya lo tenemos aquí calculado pues estupendo.
59		¿Cuántos determinantes más tenemos que hacer?
60		Pues el de A sub x, A sub y, A sub z, vale.
61		Entonces en un sistema como este hay que calcular cuatro determinantes
62		de orden 3x3, y no permitiros el lujo de equivocarse.
63		Bueno pues venga, el determinante de A sub x sería, ¿en la primera
64		columna quién sería?
65		En lugar de 1, 2, 1 que son los coeficientes de la primera columna de A,
66		sería -24, -8 y 9, bien, ¿qué más?
67		Y en la segunda columna ¿qué iría? -3, -1, 1 y la última 5, 4, 0, bueno
68		pues entonces ese determinante hay que calcularlo, aplicamos la regla de
69		Sarrus y sólo voy a anotar lo que da, es -7.
70		Entonces la x ¿qué valor va a tener? Sería -7 que es este A sub x [el valor
71		del determinante A sub x] partido por -1 [que es el valor del
72		determinante de A], entonces la x es 7, la solución para la x es 7.
73		La y, hacemos lo mismo, vamos a calcular el determinante A sub y, os
74		digo lo mismo escribir el determinante completo, primera columna
75		¿quién sería? 1, 2, 1, nos queda igual que en la matriz de partida [A],
76		segunda columna, ahora si tenemos que poner en lugar de los
77		coeficientes que teníamos en la matriz de partida, los de los términos
78		independientes entonces son -24, -8, 9 y en la tercera columna igual [que
79		en la matriz A] 5, 4, 0. ¿Alguien ha hecho este? Da -2.
80		Bueno entonces la y ¿cuánto vale? Pues sería el valor del determinante
81		de A sub y partido por el determinante de A, entonces es -2 partido por
82		-1, la y vale 2.
83		¿Y la z?
84		Pues igual, calculamos el determinante A sub z, la primera columna sería
85		la misma que en la matriz de partida, 1, 2, 1; segunda columna -3, -1, 1 y
86		en la tercera columna en lugar de 5, 4, 0 pues -24, -8, 9.
87	E2:	Ese da 5.
88	Aly:	Y esto sale, vamos a ver [Aly se acerca al libro de texto (donde ella hace
89		sus anotaciones) para ver cuánto le dio a ella], sale -5, no, no perdón sale
90		5.

91		Bueno luego sería z igual ¿a qué? Sería al valor del determinante de
92		A sub z partido por el valor del determinante de A, entonces sería 5
93		partido por -1, z vale -5 ¿de acuerdo?
94		Bueno, pues venga ya tenemos la solución, os dije el otro día que si en el
95		examen tenéis tiempo pues hay que comprobarlo, haced la comprobación
96		y ved que efectivamente esa es la solución del sistema, bueno yo no lo
97		voy a hacer.
98		Vamos a ver cómo se usa la regla de Cramer en un sistema que no es de
99		Cramer, es decir, suena un poco extraño pero hay que arreglar un poco el
100		sistema para que se convierta en uno que si sea de Cramer, hemos dicho
101		que era de Cramer cuando se cumple que el rango de A coincide con el
102		rango de la ampliada y eso coincide con el número de ecuaciones y el
103		número de incógnitas y ser el máximo rango posible, bueno pues en ese
104		caso el sistema es compatible determinado, tiene solución única.
105		¿Y qué pasa con un sistema compatible indeterminado? ¿Se podrá usar la
106		regla de Cramer?
107		Pues si se va a poder hacer y eso es lo que vamos a hacer ahora.
108		Pues venga, “Aplicación de la regla de Cramer para sistemas compatibles
109		indeterminados”
110		Vamos a verlo con un ejemplo, para que sea más cómoda la escritura, la
111		notación, el mismo ejemplo que está en el libro, vamos a ver qué
112		hacemos cuando yo evalúo el rango de un sistema.
113		¿Qué pasa E5? Estás haciendo otras cosas [E5 estaba haciendo una tarea
114		de otra materia].
115	E5:	Estoy haciendo una cosa.
116	Aly:	Claro, estás haciendo una cosa.
117		Bueno pues tenemos $x-y+z-2t=2$, $2x+y-z-t=1$, $x-4y+4z-5t=5$,
118		$x+5y-5z+4t=-4$ es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.
119		Antes de empezar a resolver un sistema como este, lo primero que hay
120		que ver es qué tipo de sistema es, si va a ser compatible determinado, si
121		va a ser compatible indeterminado, es decir, lo primero que tenemos que
122		hacer es ver cómo es, escribir la matriz de coeficientes y comparar el
123		rango con el de la ampliada, vale.
124		Bueno vamos a ver la matriz de coeficientes, ¿cuál sería la primera fila?
125		¿E3 cuál sería la primera fila?
126		1, -1, 1, -2.
127		Segunda fila 2, 1, -1, -1.
128		Tercera fila 1, -4, 4, -5.
129		Y en la última fila 1, 5, -5, 4.
130		Bueno entonces rango uno tenemos [es el 1 que está en la primera fila y
131		primera columna como no es nulo, entonces tenemos rango 1],
132		luego vemos a ver si tiene rango dos, tomamos las primeras dos filas y las
133		primeras dos columnas y calculamos su determinante, sería el
134		determinante de 1, -1 en la primera fila y 2, 1 en la segunda fila y ese
135		determinante nos da $1+2=3$ que es distinto de 0, luego tenemos rango 2,
136		vale, entonces tenemos al menos rango 2.
137		Bueno seguimos con la siguiente fila y la siguiente columna, ampliamos
138		con la tercera fila y tercera columna, eso se llama orlar, no sé si ya os

139		había dicho o por si lo ven en otro libro, eso que yo os digo de ampliar se
140		llama orlar, bueno pues estamos orlando con la siguiente fila y la
141		siguiente columna y nos queda un determinante de orden 3 sería 1, -1, 1
142		en la primera fila; 2, 1, -1 en la segunda fila y 1, -4, 4 en la tercera fila,
143		vale, bueno pues tendríamos que ver si el valor de ese determinante es
144		distinto de 0 o no es distinto de 0 para ver si hay rango 3 o no hay,
145		pues venga empezar a hacedlo a ver cuánto les sale ese determinante.
146	E2:	Da 0.
147	Aly:	Da 0 ¿por qué?
148	E2:	No se, porque da 0.
149	Es:	Jejeje [risas].
150	Aly:	[Aly sonríe y luego hace las siguientes preguntas] ¿Ya haz hecho algo?
151		O ¿Haz visto algo?
152	E2:	Me da 0, me da 0.
153	Aly:	Pero ¿lo haz hecho por Sarrus?
154	E2:	Si por Sarrus por Sarrus.
155	Aly:	Hay veces que es más cómodo ver alguna relación, ¿veis alguna relación
156		entre alguna fila o columna ahí?
157	E1:	Yo si la veo.
158	Aly:	¿Cuál?
159	E1:	Que la columna dos es la inversa de la columna tres.
160	Aly:	La opuesta no la inversa, claro esta columna [la tercera] es la anterior
161		cambiada de signo, ¿no?
162		Es decir, la columna tres es la columna dos cambiada de signo, por lo
163		tanto esa columna en realidad me está estorbando para efectos del rango,
164		no me está sirviendo de nada orlar con esa columna y fijaros no
165		solamente en eso sino en la matriz grande, fijaros que es mejor perder un
166		poco de tiempo viendo un poco la matriz antes de empezar, porque toda
167		esta columna entera [la tercera],
168		¿qué le pasa en relación a la anterior, a la segunda columna?
169		Pues que es la misma nada más que cambiada de signo,
170		luego a efectos del rango esa columna me sobra, entonces el rango
171		de A se limitaría en estudiar el rango de esa matriz con esta columna
172		menos, ¿vemos alguna otra relación más con las columnas que quedan?
173	E1:	Si que la columna cuatro es la columna dos menos la columna uno.
174	Aly:	[Aly va haciendo las operaciones para verificar la afirmación de E1].
175		Si, en efecto la columna cuatro es igual a la columna dos menos la
176		columna uno [Aly nuevamente hace las operaciones para verificar la
177		afirmación de E1, tratando de explicárselas al grupo],
178		bien luego esa a efectos del rango también la eliminamos.
179		¿Y la fila última también?
180	E4:	La fila 4 es la fila 2 menos la fila 3.
181	Aly:	Sí la fila 4 es la fila 2 menos la fila 3, bueno pues todo lo que veamos así
182		es muy bueno porque nos evita hacer muchas operaciones del
183		determinante, vale, entonces lo que les decía la fila 4 es la fila 2 menos la
184		fila 3, [Aly va haciendo las operaciones para verificar la afirmación de
185		E4, tratando de explicárselas al grupo].
186	E1:	Bueno el sistema entonces no es compatible.

187	Aly:	Shhh no tan rápido.
188		Bueno pues como ya no tengo más [filas y columnas] pues entonces el
189		rango de A es dos.
190	E11:	Yo he visto otra relación, que la fila 3 es 3 veces la fila 1 menos la fila 2.
191	Aly:	[Aly va haciendo las operaciones para verificar la afirmación de E11].
192		Si es cierto, vamos a escribirlo también, la fila 3 es 3 veces la fila 1
193		menos la fila 2, entonces eso nos permitiría quitarnos también la fila 3 de
194		en medio, vale.
195		Luego el rango de A es dos.
196		¿Qué pasa con el rango de la ampliada?
197		¿Qué ocurre al estudiar el rango de la ampliada?
198	E4:	Podría ser tres.
199	Aly:	Podría ser tres, claro.
200		Puede que no pero puede que sí, entonces vamos a ver.
201	E1:	Ya digo yo que es el mismo [el rango de A y el rango de la ampliada].
202	Aly:	La matriz ampliada sería [interrupción de los estudiantes].
203	E2:	¿Por qué dices eso E1, ya lo hiciste?
204	E1:	No, es sólo porque la columna de los términos independientes es la
205		misma que la columna cuatro cambiada de signo.
206	Aly:	Es cierto [Aly va haciendo las operaciones para verificar la afirmación de
207		E1, tratando de explicárselas al grupo].
208		Bueno voy a escribir la matriz ampliada sería 1, -1, 1, -2, 2 [en la primera
209		fila]; 2, 1, -1, -1, 1 [en la segunda fila]; 1, -4, 4, -5, 5 [en la tercera fila]; y
210		en la última fila 1, 5, -5, 4, -4.
211		Bueno de aquí [de la matriz A] hemos eliminado dos filas y dos
212		columnas por ser combinación lineal de otras, bueno en las dos columnas
213		no hay problema pero ahora con las filas hay que ver, porque tienen un
214		nuevo elemento al final, los términos independientes.
215		Pero lo que acaba de decir E1 es cierto la última columna [la quinta] es la
216		anterior cambiada de signo, entonces también nos sobra para efectos del
217		rango, bueno para efectos de estudiar el rango ¿con cuál me tengo que
218		quedar? ¿con qué me quedo? ¿cuál es el menor de orden dos que no se
219		anulaba?
220		El mismo de antes que permanece ahora, ¿es posible que la ampliada
221		tenga orden tres?
222	E2:	No.
223	Aly:	No, puesto que ya no tenemos las últimas tres columnas y vimos que las
224		dos últimas filas también son combinación lineal, entonces tenemos que
225		el rango de la matriz ampliada es 2.
226		Entonces claro llegamos a esta situación yo encuentro el rango de esta
227		matriz [A] y es dos, luego encontramos el rango de la ampliada y
228		también es dos, eso ya sabemos que si el rango de A es igual al rango de
229		la ampliada, entonces ¿el sistema cómo va a ser?
230	E1:	Compatible.
231	Aly:	Claro compatible, pero como no es el máximo porque en este caso es dos
232		pero es menor que 4 que es el número de ecuaciones y el número de
233		incógnitas.
234	E1:	Entonces es indeterminado.

235	Aly:	Entonces ¿qué ocurre?, que tenemos un sistema compatible pero
236		indeterminado, vale.
237		Entonces este tipo de sistema también lo vamos a poder resolver por la
238		regla de Cramer, incluso puede resultar más fácil, si el rango es dos y el
239		número de ecuaciones y de incógnitas es cuatro.
240		¿Cuántos parámetros nos van a quedar?
241		Es un sistema compatible indeterminado de los que hemos resuelto antes,
242		cuando lo resolvíamos con el método de Gauss.
243		Bueno pues ahí nos quedan dos parámetros, de las cuatro incógnitas que
244		tenemos ¿cuántas van a ser realmente incógnitas y cuántas van a ser
245		parámetros?
246	E2:	Dos.
247	Aly:	Dos van a ser incógnitas y dos se van a quedar como parámetros, pues
248		justamente las dos variables que están en el menor de orden dos,
249		la x y la y serán las incógnitas y la z y la t serán parámetros y las últimas
250		dos filas no participan porque no están en el menor de orden dos,
251		digamos que nos estorban porque no aportan nada nuevo al sistema.
252		Bueno pues en ese caso decimos que es un sistema compatible
253		indeterminado con dos parámetros.
254		Bueno luego el sistema ¿cómo lo vamos a resolver?, ya digo que las
255		ecuaciones que realmente nos interesan son las ecuaciones que participan
256		en ese menor distinto de 0 [el menor de orden dos, con las dos
257		primeras filas y columnas], por lo tanto las últimas dos ecuaciones
258		directamente las quito [Aly raya en la pizarra las dos últimas ecuaciones
259		para indicar que quedan eliminadas].
260		¿Y ahora qué pasa con la z y con la t?
261		Pues de la primera ecuación sería $x-y=2-z+2t$ en eso se va a quedar la
262		primera ecuación.
263		¿Y la segunda? $2x+y=1+z+t$, lo normal es que para no liarnos como la z
264		y la t en este caso pasan a ser parámetros, es no seguir llamándoles z y t
265		sino ponerles nombre de parámetro λ y μ ¿les suenan no?, $z=\lambda$ y $t=\mu$,
266		para no liarnos porque las incógnitas van a ser la x y la y pero la z y la t
267		ya son parámetros,
268		entonces el sistema nos va a quedar, en la primera ecuación $x-y=2-\lambda+2\mu$
269		y en la segunda ecuación $2x+y=1+\lambda+\mu$, y ahora ¿qué pasa?,
270		¿cómo resolvemos eso con la regla de Cramer?
271		Fijaros que ahora ya tenemos el rango, tenemos una submatriz [de orden
272		2] que ya es de rango dos, del rango máximo posible, luego el rango de
273		la ampliada seguiría siendo dos ¿de acuerdo?
274		Entonces eso ya se puede resolver por Cramer y ¿en qué consistía que se
275		puede resolver por Cramer?
276		Pues Cramer me dice que x es igual al determinante de A sub x partido
277		por el determinante de A, luego eso lo hago y sale la solución para x.
278	E1:	Una pregunta, si por ejemplo se suma o yo lo quisiera resolver por Gauss
279		¿Se puede?
280	Aly:	Claro, lo hemos hecho ¿no?
281	E1:	Si pero me refiero por ejemplo a x-y, a la primera fila y la segunda
282		fila...

283	Aly:	Ah tú dices aplicar una reducción.
284	E1:	Sí, si.
285	Aly:	Si, es lo que iba a decir ahora, por la regla de Cramer sabemos que x se
286		puede obtener calculando el determinante de A sub x partido por el
287		determinante de A y para y sería el determinante de A sub y partido por
288		el determinante de A , pero pasa una cosa, que como aquí tenemos un
289		sistema “fácil” de resolver, ¿podríamos hacer una reducción facilita?
290		Como el método que vieron en secundaria, ¿cómo podemos hacer una
291		reducción sencillita?
292		Sumándolas [las dos ecuaciones] se nos van las y y nos quedan $3x$ igual
293		a la suma de todo lo que queda.
294	E1:	El λ también se nos va.
295	Aly:	Si también se nos van otras cosas.
296		Una cosa, siempre tenemos ese método [de reducción] ahí, para casos
297		útiles.
298		Aquí tenemos el sistema ya muy cortito porque son dos ecuaciones con
299		dos incógnitas.
300		Sino lo hacemos por reducción y lo hacemos por la regla de Cramer,
301		pues... yo lo voy a hacer por los dos métodos.
302		¿Cómo sería el determinante de A sub x ?
303		¿Aquí quién serían los términos independientes?
304		Pues en la primera ecuación es $2-\lambda+2\mu$, un poquito más largo pero ese es
305		el término independiente, ¿de acuerdo?
306		Bueno entonces el determinante de A sub x sería $2-\lambda+2\mu$, este iría en la
307		primera columna y también el otro término independiente [de la segunda
308		ecuación] $1+\lambda+\mu$; segunda columna quién iría pues el -1 que es el
309		coeficiente de la y en la primera ecuación y el 1 que es el coeficiente en
310		la segunda ecuación, ¿se entiende bien eso?
311		En la regla de Cramer siempre los términos independientes los coloco en
312		la primera columna, en la segunda o en la tercera dependiendo de la
313		incógnita que sea, en este caso va a ser en la primera columna.
314		Bueno pues todo el determinante de A sub x va partido por el
315		determinante de A .
316		El determinante de A ya lo habíamos calculado cuando hicimos el
317		determinante del menor de orden dos.
318	E2:	Si daba 3.
319	Aly:	Bueno pues lo anotamos.
320		¿Y cómo se terminaría de resolver esto?
321		Pues resolviendo el determinante de arriba [el determinante de A sub x]
322		y dividirlo entre 3.
323		¿Cómo queda el determinante de arriba?
324		Pues sería $2-\lambda+2\mu$ por uno, por lo tanto es igual; y ahora el -1
325		multiplicarlo por $1+\lambda+\mu$ y a eso cambiarle el signo, entonces se queda
326		igual, es decir $1+\lambda+\mu$.
327		Entonces de eso nos queda $3+3\mu$.
328		Entonces x nos queda igual a $3+3\mu$ partido por 3 ¿y eso a qué es igual?
329	E1:	Se saca factor común arriba y abajo.
330	Aly:	Se saca el 3 [en el numerador] y abajo ya está el 3, entonces nos queda x

331		igual a $1+\mu$.
332		¿Eso lo vemos bien o no?
333		Si, verdad sólo se simplifica.
334		Bueno pues con la y, ya para terminar ¿la y cómo queda?, ¿cuál sería el
335		determinante de A sub y? Sería en la primera columna los coeficientes de
336		la x, sería 1, 2 y donde tenemos que meter los términos independientes es
337		ahora en la segunda columna, sería $2-\lambda+2\mu$ y abajo $1+\lambda+\mu$.
338		Luego todo ese determinante partido por 3.
339		¿Cómo se acaba de resolver esto?
340		Pues vamos a resolver el determinante del numerador sería uno por
341		$1+\lambda+\mu$; y ahora 2 por $2-\lambda+2\mu$ pero hay que cambiarle los signos,
342		entonces haciendo operaciones [Aly va haciendo las operaciones en la
343		pizarra] nos queda $-3+3\lambda-3\mu$.
344		Luego todo ese determinante partido por 3, eso se puede simplificar
345		¿verdad?
346	E1:	Queda $-1+\lambda-\mu$.
347	Aly:	Si queda $-1+\lambda-\mu$.
348		Claro la solución queda en términos de los parámetros, ¿cuál sería la
349		solución?
350		La x ¿cuánto va a dar la x? $1+\mu$, la y ¿cómo quedará la y? $-1+\lambda-\mu$, ¿la z
351		cómo nos va a quedar? pues es el parámetro λ , ¿y la t? es el parámetro μ .
352		λ y μ son parámetros, son números reales cualesquiera.
353		¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Pues infinitas soluciones porque es
354		un sistema compatible indeterminado, de este tipo ya hicimos pero lo que
355		pasa es que este método es más eficaz.
356		Bueno pero si en vez de hacerlo por la regla de Cramer, lo hacemos por
357		reducción pues que es lo que queda aquí [Aly señala en la pizarra el
358		lugar donde están escritas las dos ecuaciones] sería $3x=3+3\mu$, entonces
359		ya hemos llegado a lo que nos da con Cramer pues nos queda que x es
360		igual $3+3\mu$ partido por 3 y eso es $1+\mu$, una vez que sabemos x ¿cómo
361		sabemos la y? pues se sustituye en la ecuación más sencilla en la primera
362		o en la segunda, lo voy a hacer en la primera ecuación, de ahí ¿cómo
363		queda la y? la y pasa a la derecha y queda positiva y es igual a $x-2+\lambda-2\mu$
364		y ahora en lugar de x anotamos su valor y nos queda y igual a
365		$1+\mu-2+\lambda-2\mu$, entonces la y sería ahora $-1+\lambda-\mu$ y eso es lo que nos había
366		dado por Cramer para y.
367		Veis que en este caso [con el método de reducción] la solución es más
368		corta, bueno cada uno que escoja el que quiera.
369		Lo importante de ahí es saber poner el sistema que es un sistema
370		compatible indeterminado, saber explicar cuáles ecuaciones no
371		participan en ese menor que nos ha dado distinto de 0, quitar las
372		ecuaciones que nos sobran y obtener las incógnitas, pasar las incógnitas
373		que van a ser parámetros, pasarlas a la derecha y terminar el sistema
374		como si fuera uno de orden 2, ¿de acuerdo?
375		Bueno pues eso ahora ya es para resolver sistemas compatibles
376		indeterminados, eso lo tenéis hecho en el la página 104 [en el libro de
377		texto], en la página 105 tenéis el ejercicio 1 y hay que empezar a hacedlo
378		aquí, tenéis todo para resolverlo, a ver si hay suerte y alguien termina

379		uno [el ejercicio 1 tiene dos apartados].
380		Bueno pues venga, empezar a hacer el 1, primero estudiar el rango es
381		muy importante saber con que menor distinto de 0 nos quedamos, ver
382		las incógnitas que participan en ese menor, pues son las que
383		verdaderamente nos van a quedar en el sistema.
384		[Interrupción: Llega una persona de administración a preguntar por el
385		uso del transporte].
386		[Luego continúan intentando resolver el primer apartado del ejercicio1].
387	Aly:	¿Sabéis lo que es un sistema homogéneo ¿no?
388		Eso ya lo habíamos visto antes en el primer tema, ¿lo recuerdan?
389	E2:	Si tenía que ver con la solución.
390	Aly:	¿Si pero qué?
391	E2:	Mmh hh [E2 empieza a ver sus notas].
392	Aly:	Si es un sistema en el que todas sus soluciones son 0.
393	Es:	Eso, eso.
394	Aly:	Bueno pero este que están haciendo no es homogéneo.
395		[Aly pasa al lugar de los estudiantes para supervisar lo que van haciendo]
396	E2:	Es un sistema compatible indeterminado.
397	Aly:	Si acaban de poner en el libro un ejemplo de un sistema compatible
398		indeterminado y luego ponen un ejercicio, lo más normal es que sea de
399		un sistema compatible indeterminado.
400	E1:	Pero es un sistema incompatible.
401	Aly:	Pero si es incompatible entonces no tiene solución y ya terminaste.
402	E1:	[E1 guarda silencio y continua resolviendo el ejercicio].
403		[Interrupción: Nuevamente llega la persona de administración a
404		preguntar por el uso del transporte].
405	Aly:	Venga vamos a ver, el sistema es $x-y+3z=1$, $3x-y+2z=3$, $-2y+7z=0$.
406		Luego hacemos el determinante de la matriz A y ¿cuánto da?
407	Es:	0.
408	Aly:	Eso quiere decir que el rango de la matriz no puede ser tres.
409		Tenemos rango 1 por el menor de orden 1 distinto de cero [el 1 que está
410		en la primera fila y primer columna] y también tenemos rango 2 por que
411		el determinante de la matriz de orden dos es distinto de 0 [la submatriz
412		formada por las dos primeras filas y las dos primeras columnas], luego
413		con esta submatriz es con la que nos tenemos que quedar para resolverla
414		por Cramer ¿de acuerdo?
415		Luego, fijaros en lo que os decía antes, en las incógnitas que van a
416		quedar, son las que están en esa submatriz, es decir, que la última
417		ecuación la eliminamos, entonces ¿ahora qué hacemos con la z [que
418		aparece en las dos ecuaciones donde está la submatriz de orden 2]?
419		Pues en este caso nuestras incógnitas van a ser x, y, y la z pasa a ser un
420		parámetro, la vamos a llamar λ .
421		Entonces es un sistema compatible indeterminado, entonces ¿cómo
422		quedaría el sistema con el parámetro?
423		Pues la primera ecuación sería $x-y=1-3\lambda$, segunda ecuación $3x-y=3-2\lambda$ y
424		ahora este es el sistema que puedo resolver por Cramer, si vemos de
425		todas formas una reducción sencillita pues la hacemos.
426	E11:	Si, si las restamos.

427	Aly:	Si restamos a la segunda la primera se nos va la y [suena el timbre que
428		indica que ya se ha terminado la clase].
429		Bueno pues hacer esa resta y terminadlo en casa, vale.
430	E2:	¿Y cuánto da eso?
431	Aly:	No sé cuánto da eso.
432		Bueno pues nos vemos mañana, vale.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la treceava clase grabada de la profesora Aly del martes 18/11/08.

Resumen: Aly comienza retomando el ejercicio que estaban haciendo la clase anterior (el 17/11/08, un sistema compatible indeterminado aplicando regla de Cramer, pero luego lo termina resolviendo por reducción) que les pidió terminarlo en casa. Luego define Sistemas Homogéneos y resuelve dos ejemplos (1 compatible determinado y 1 compatible indeterminado), por último hace un ejercicio sobre la discusión de sistemas mediante determinantes (no le da tiempo de acabarlo y les pide que terminen la parte que falta en casa).

L		Transcripción
1	Aly:	Venga vamos a empezar por el ejercicio que estábamos haciendo ayer,
2		vale, el ejercicio 1 de la página 105, ese os puse para que lo intentéis
3		resolver por Cramer, venga el sistema es $x-y+3z=1$, $3x-y+2z=3$,
4		$-2y+7z=0$, teníamos la matriz de coeficientes que era 1,-1,3 en la primera
5		fila, 3,-1,2 en la segunda fila y 0,-2,7 en la tercera fila, ese ya se quedó
6		hecho de ayer y daba 0.
7		Bueno veríamos ahora el rango de la matriz ampliada, tenemos rango
8		uno [porque el primer elemento que aparece en la primera fila primera
9		columna es distinto de 0], luego tenemos rango dos porque el
10		determinante de la submatriz [la submatriz formada por las dos primeras
11		filas y las dos primeras columnas] de orden dos es distinto de 0.
12		Bueno la matriz ampliada sería 1,-1,3,1 en la primera fila; 3,-1,2,3 en la
13		segunda fila; 0,-2,7,0 en la tercera fila, pero ya vimos que con la tercera
14		columna el determinante da 0, entonces ahora vamos a calcular el
15		determinante ampliando con la última columna (la de los términos
16		independientes).
17		Entonces haciendo eso tendríamos el determinante de 1,-1,1 en la
18		primera fila; 3,-1,3 en la segunda fila; 0,-2,0 en la tercera fila.
19	E4:	Pero la primera columna es la misma que la última.
20	Aly:	Exactamente, eso iba a decir, la primera columna es idéntica a la última,
21		por lo tanto ese determinante vale 0.
22		Entonces en la matriz ampliada como ya no nos quedan más filas ni más
23		columnas, pues tenemos que el rango es 2.
24		Entonces el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la
25		matriz ampliada y es dos pero dos es menor que el número de incógnitas,
26		entonces ¿qué ocurre? ¿cómo es el sistema?
27	E2:	Compatible indeterminado.
28	Aly:	Bien es compatible pero indeterminado ¿cuántos parámetros nos van a
29		quedar en ese sistema?
30		Un solo parámetro verdad, bueno entonces lo que se debe hacer, ¿qué es?
31		Eliminar una de las ecuaciones [la última ecuación] y me quedo con las
32		que participan, con las dos ecuaciones en las que está el menor de orden
33		dos y que su determinante es distinto de 0 ¿de acuerdo?
34		Entonces el sistema nos quedaría así, primera ecuación $x-y=1-3z$ y la
35		segunda ecuación $3x-y=3-2z$ ese sería ya el sistema que tenemos que
36		resolver.
37		Bueno ¿cómo lo habéis hecho a partir de aquí? ¿por Cramer o con una
38		reducción?

39	E2:	Por una reducción sencilla.
40	Aly:	Vale aquí sino quieren usar Cramer pues hacen una reducción sencilla.
41		Si se hace una reducción, ¿qué habéis hecho?
42		Si a la fila dos le restamos la fila uno nos queda $2x=2+z$, si de aquí
43		despejamos x nos quedaría x igual a $2+z$ y eso partido por 2 y ¿eso cómo
44		se simplifica?
45		Pues se puede separar en dos sumandos.
46	E10:	Es 1 más z partido por dos.
47	Aly:	Fijaros que aquí no he terminado con la z , ¿por qué?
48		Porque aquí queda fracción, entonces más cómodo que llamar λ a z , sería
49		llamar a z dos λ , ¿para qué? para que ese dos [de z partido por dos] se
50		vaya, vale.
51		Bueno vamos a seguir trabajando.
52		Entonces la x nos queda $1+\lambda$, ya tengo la x , ¿cómo saco la y ?
53		Pues de las dos ecuaciones del sistema.
54		De la primera ecuación sería y igual a $x-1+3z$ pero escribimos lo que
55		vale x y z , nos queda y igual a $1+\lambda-1+6\lambda$, entonces nos queda y igual a
56		7λ .
57		Entonces la solución en términos de λ es, x igual a $1+\lambda$, y igual a 7λ y z
58		igual a 2λ , con λ que es un número real.
59		Y en términos de x , y , z , la solución es x igual a uno más z partido por
60		dos, y igual a $7z$ partido por dos y z .
61		Cuando os pase eso, que queda un quebrado como aquí en z partido por
62		dos pues se hace z igual a 2λ o 3λ , según lo que queda.
63	E11:	¿Y es lo mismo que la solución x igual a uno más λ partido por dos, y
64		igual a 7λ partido por dos y λ ?
65	Aly:	Claro que sí porque tu λ no es el mismo que mi λ , esa es tu solución x
66		igual a uno más λ partido por dos, y igual a 7λ partido por dos y λ .
67		Ahora veamos mi solución, vamos a ponerle otra letra digamos α ,
68		entonces mi solución es x igual a $1+\alpha$, y igual a 7α y z igual a 2α .
69	E2:	Se multiplica en la solución de E11 por 2.
70	Aly:	Claro, a E11 le va a salir en x el valor de 2 ¿para qué valor de λ ?
71		Cuando λ vale dos te queda 1 más dos partido por dos, es uno más uno,
72		dos, vale.
73		¿Y conmigo será la solución para α igual a uno, es decir la mitad
74		[comparado con λ igual a dos] y también llego a la solución de x igual a
75		2.
76		El hecho es que el parámetro va recorriendo todos los números reales, tú
77		vas a alcanzar tu solución y yo también la misma pero tú con un valor del
78		parámetro y yo con otro, distintos pero la solución va a ser la misma, es
79		decir, los números reales están presentes tanto aquí [en la solución de
80		E11] como aquí [la solución de Aly], vale.
81		Entonces es más cómodo escribirla así [que no quede en forma de
82		quebrado].
83		Tal vez te choque un poco la primera vez que ves esto.
84		Esto [en la solución de E11] es igual que esto [la solución de Aly], pues
85		sí si son lo mismo.
86		Se entiende eso ¿no?

87		Digo que es más cómodo porque cuando se haga la comprobación es
88		mejor sustituir sin quebrados ¿de acuerdo?
89		Bueno vamos al apartado b, ¿alguien lo hizo?
90	E2:	Si es un sistema incompatible.
91	E11:	Pero los dos rangos me salen diferentes, el rango de la ampliada me sale
92		3 y el de la matriz de coeficientes me da 2.
93	Aly:	Claro por eso el sistema es incompatible y no hay que hacer nada porque
94		si el rango de la ampliada no coincide con el de la matriz de coeficientes
95		entonces ¿el sistema cómo es?
96		Incompatible y eso quiere decir que no tiene solución, ¿entonces qué hay
97		que hacer ahí? Pues nada, no hay que buscar solución porque no la hay,
98		vale.
99		Bueno vamos a escribirlo, si el rango de la matriz de coeficientes vale
100		dos y el rango de la matriz ampliada vale tres, entonces cuando pasa eso
101		por el teorema de Rouché, ¿recuerdan qué decía ese teorema?
102		Que un sistema es compatible si y sólo si los rangos coinciden, luego si
103		los rangos no coinciden pues el sistema no es compatible, y no ser
104		compatible, ¿cómo se llama?
105	E4:	Incompatible.
106	Aly:	Incompatible, y si es incompatible es que no tiene solución por lo tanto
107		es que no hay que hacer nada y ese es el sistema más fácil que se puede
108		dar porque no hay que buscar solución.
109		Bueno pues vamos a ver ahora los Sistemas Homogéneos y cuántas
110		soluciones pueden tener, ayer lo dije así un poco de pasada, que si os
111		recordáis lo que es un sistema homogéneo.
112		Ayer ya decíais que el que tiene la solución trivial, eso en cuanto a la
113		solución pero en cuanto a la definición ¿qué es un sistema homogéneo?
114	E1:	Los términos independientes son 0.
115	Aly:	Es aquél en el que los términos independientes son 0.
116		Son siempre fáciles de hacer y de estudiar.
117		Bueno pues se llama sistema homogéneo aquel cuyos términos
118		independientes son todos 0.
119		Lo tenéis eso en la página 106 donde habla de los sistemas homogéneos.
120		Bueno y ¿eso que consecuencias tiene? el que todos los términos
121		independientes sean 0, cuando yo estudio el rango de la matriz de
122		coeficientes me saldrá lo que sea, pero cuando estudio el rango de la
123		matriz ampliada, ¿qué ocurre aquí con la matriz ampliada?
124		Cuando estudio el rango de la matriz ampliada, daros cuenta que la
125		última columna van a ser todos 0, cuando yo eso lo pongo en la matriz
126		ampliada, ¿el rango cómo va a ser?
127	E2:	El mismo.
128	Aly:	El mismo, si toda la última columna van a ser 0.
129		Entonces siempre va a pasar esto, el rango de A igual al rango de la
130		ampliada, por lo tanto ¿qué es lo que ocurre siempre? ¿cómo va a ser el
131		sistema por el teorema que vimos el otro día (el teorema de Rouché)?
132		¿Compatible determinado, compatible indeterminado, incompatible o
133		cómo?
134	E2:	Compatible determinado.

135	Aly:	Bueno va a ser compatible pero no podemos decir que sea determinado o
136		indeterminado, ya eso dependerá de cada caso.
137		Lo que si podemos decir es que será compatible determinado cuando el
138		rango sea el rango máximo y coincida con el número de incógnitas,
139		cuando esos dos rangos además coincidan con el número de incógnitas
140		que tenemos, entonces vamos a tener una única solución y esa única
141		solución que vamos a tener,
142		¿cuál va a ser?
143		Si vamos a tener un sistema en el que todas sus ecuaciones van a ser
144		igualadas a 0, ¿qué solución tendrá siempre?
145		La trivial, es decir, x vale 0, y vale 0 y z vale 0 [en un sistema
146		homogéneo de orden 3], luego tendrá siempre la solución (0,0,0,...,0).
147		Entonces en el caso en que los rangos coincidan y coincidan con el
148		número de incógnitas habrá una única solución que es la solución trivial,
149		que sería (0,0,0,...,0).
150		Eso en caso de que sea compatible determinado ¿pero qué pasa si es
151		indeterminado?
152		Bueno pues puede ocurrir algo, que ese rango de A igual al rango de la
153		ampliada no sea igual al número de incógnitas en ese caso es un sistema
154		compatible indeterminado, compatible lo es porque los rangos coinciden,
155		si es indeterminado pues en ese caso habrá parámetros como el que
156		hicimos ayer, vale.
157		Bueno pues vamos a ver los dos ejemplitos que tenéis ahí, el 1 y el 2,
158		sale uno de cada, uno compatible determinado y uno indeterminado.
159		Vamos a ver el ejemplo $x+y+z=0$, $2x-y+z=0$, $x-2y-z=0$, venga pues hay
160		que resolverlo.
161		Sabemos que el sistema tiene la solución trivial pero hay que estudiar el
162		rango y ver si es compatible determinado o indeterminado, es decir, hay
163		que ver si sólo tiene la solución trivial o no.
164		Pues vamos a ver si el rango es el máximo posible, vamos a escribir la
165		matriz A, en este caso la matriz ampliada no tiene caso escribirla porque
166		la última columna son 0, pues venga, el determinante de la matriz A sería
167		1,1,1 [en la primera fila]; 2,-1,1 [en la segunda fila] y 1,-2,-1 [en la
168		tercera fila], para estudiar el rango de una matriz como esa vemos, tiene
169		rango uno [pues el primer elemento es distinto de 0, el elemento que esta
170		en la primera fila y primera columna], luego tiene rango dos [porque el
171		determinante de la submatriz de orden dos, formada por las dos primeras
172		filas y las dos primeras columnas es distinto de 0] y para ver si hay rango
173		tres ¿qué hacemos?
174		Pues calcular el determinante de la matriz A sería $1+1-4+1+2+2=3$,
175		entonces el valor es 3 y como es distinto de 0,
176		¿qué quiere decir aquí el rango de A, cuánto va a ser?
177		Pues el rango va a ser 3.
178		Y el de la ampliada pues directamente como es un sistema homogéneo,
179		es decir la columna con la que ampliaría es la columna de ceros, pues
180		entonces el rango es el mismo que la matriz A, es decir, el rango de la
181		ampliada también es 3,
182		entonces el sistema de entrada es compatible, como es el máximo rango

183		posible, es decir, coincide con el número de incógnitas que tenemos,
184		entonces ¿cómo es el sistema? ¿de qué tipo? ¿compatible qué?
185	Es:	Determinado.
186	Aly:	Determinado, con solución única y ¿cuál es esa solución única? Pues la
187		solución trivial (0,0,0).
188	E1:	Una pregunta.
189	Aly:	Dime.
190	E1:	Si en la matriz ampliada si yo lo intento resolver por Cramer, ¿me sale
191		esto?
192	Aly:	Claro.
193	E1:	Pero me refiero a que si la matriz sería distinta.
194	Aly:	Vamos a ver, estás diciendo la matriz ampliada, la matriz ampliada es la
195		misma matriz A y además agregando la columna 0,0,0; eso no afecta el
196		rango de la matriz ampliada, es decir, te queda el mismo rango que A,
197		por lo tanto podrías usar la regla de Cramer, ahora bien la regla de
198		Cramer lo que te intenta decir es que x es el determinante de A sub x
199		partido por el determinante de A, pero ¿quién sería A sub x?
200	Es:	0.
201	Aly:	Bueno sí, pero en la primera columna sería 0,0,0; en la segunda columna
202		sería 1,-1,-2 y en la tercera fila 1,1,-1, luego eso [el determinante de A
203		sub x] se hace 0, luego ese determinante de A sub x va partido por el
204		determinante de A que vale 3, entonces eso se hace 0, claro.
205		Entonces, lo que estábamos diciendo es que la x vale 0 sin hacer todo
206		esto, y que la y también va a valer 0 y la z también, porque estamos
207		diciendo que la solución es 0,0,0 y si la solución es única pues es esa, no
208		hay que hacer Cramer, al ser homogéneo [el sistema] es más fácil.
209		Venga pues vamos a hacer el otro que tenemos ahí [en el libro de texto],
210		sería ejemplo 2 y el sistema es $x-y-z=0$, $x+y-2z=0$, $2x-4y-z=0$, bueno,
211		¿qué pasa con eso?
212		Cuidado con los sistemas homogéneos, porque vamos a pensar siempre
213		en la solución 0,0,0 y no es sólo eso, hay que pararse poquito y estudiar a
214		ver si además de la solución trivial hay infinitas soluciones.
215		Estudiamos el rango de la primera matriz, la matriz de coeficientes, sería
216		1,-1,-1 en la primera fila; 1,1,-2 en la segunda fila y en la última fila
217		2,-4,-1, esa es la matriz de coeficientes.
218		Bueno pues rango 1 tenemos [porque el menor de orden 1 es distinto de
219		0, es el elemento que está en la primera fila, primera columna], también
220		tenemos rango 2 [porque el determinante de la submatriz de orden dos
221		formada por las dos primeras filas y las dos primeras columnas es
222		distinto de 0], bueno y ahora vamos a hacer el determinante de orden 3
223		para ver si el rango es tres, ¿lo habéis hecho?
224	E1:	A mi me sale que el determinante de orden dos vale 0 por que las dos
225		filas son iguales.
226	Aly:	¿Pero las dos filas no son iguales?
227		Una es 1,-1 [en la primera fila] y 1,1 [en la segunda fila].
228	E1:	¿Entonces cuándo me va a dar 0?
229	Aly:	Cuando las dos filas sean iguales, pero aquí no son iguales y el
230		determinante sería $1-(-1)$ y eso es 2 ¿no?

231	E1:	Vale.
232	Aly:	Vale, esa regla se puede usar cuando tengamos dos filas iguales, pero
233		estás dos filas [de la submatriz de orden 2] no son iguales.
234		Bueno hacemos el determinante de la matriz de coeficientes,
235		sería $-1+4+4+2-8-1=0$, como el determinante [de orden 3] da 0 entonces
236		el rango de la matriz es 2, ¿de acuerdo? no es rango 3 porque el
237		determinante de orden tres no me da distinto de 0, luego el rango de la
238		matriz de coeficientes es 2.
239		Y el rango de la ampliada ¿hay que hacerlo?
240	E4:	No.
241	Aly:	No, en este caso ya no hay que hacer nada porque sólo tendríamos una
242		columna de ceros más y eso no me va a aumentar el rango, luego el
243		rango de la matriz ampliada también es rango 2, pero ¿qué pasa?
244		Que como tenemos tres incógnitas, ese 2 [rango de la matriz de
245		coeficientes] es menor que el número de incógnitas, por lo tanto ¿cómo
246		es el sistema?
247		Es compatible puesto que los rangos coinciden pero esta vez sale
248		indeterminado, luego vamos a tener infinitas soluciones, está el caso de
249		la solución trivial pero también infinitas más, entonces hay que
250		resolverlo ¿cómo lo hacemos?
251		Pues como lo hemos hecho antes, nos quedamos sólo con las dos
252		ecuaciones que participan en el menor de orden 2 y eliminamos la última
253		ecuación, vale.
254		Y ahora en esas 2 ecuaciones empezamos a despejar sería $x-y=z$, la z la
255		pasamos a la derecha. Luego sería $x+y=2z$.
256		Bien, pues eso es lo que hay que resolver, ese sistema de dos ecuaciones
257		con dos incógnitas [la x , y], la z que hemos pasado a la derecha, va a
258		actuar como parámetro, vamos a dejarlo como z todavía para ver si nos
259		sale como antes que es mejor llamarle a z , 2λ que λ [en un ejercicio
260		anterior en el que la z quedaba partida por 2].
261		Bueno y ¿cómo hacemos esto? pues con una reducción sencillita,
262		sumamos las dos ecuaciones término a término y nos queda $2x=3z$,
263		entonces x sale $3z$ partido por 2, luego veis que aquí también pasa lo de
264		antes, también me queda un denominador.
265		Bueno vamos por partes, vamos a anotar aquí lo que encontramos, la x
266		nos queda $3z$ partido por 2.
267		La y ¿de dónde sacamos la y ? de la que más nos guste, de la segunda
268		[ecuación] mejor, sería $y=2z-x$, entonces la y sería $2z$ menos la x pero la
269		x vale $3z$ partido por 2, entonces la y me queda z partido por 2.
270		Luego me ha quedado la y también en z partido por 2.
271		Entonces esa sería la solución, ahora ¿qué nos conviene ponerle a la z
272		como parámetro, λ ó 2λ ?
273	E2:	2λ .
274	Aly:	Pues mejor ponerle 2λ porque así la solución nos queda más simple, más
275		sencillita.
276		Aquí la y ¿cómo me va a quedar?
277	E1:	λ .
278	Aly:	Nos queda y igual a λ , y ¿en x ?

279	E1:	3λ .
280	Aly:	x vale 3λ .
281		Luego la solución global, las infinitas soluciones que vamos a tener van a
282		quedar así 3λ que es x, λ para la y, 2λ para la z, con λ que pertenece a
283		los números reales, vale, hay infinitas soluciones.
284		¿Está presente ahí la solución trivial 0,0,0?
285	E2:	Si.
286	Aly:	Si, ¿cuándo? ¿cuándo se alcanza ahí la 0, 0,0?
287	E2:	Cuando λ vale 0.
288	Aly:	Cuando λ vale 0, pues nos quedaría 0,0,0. Esa solución tiene que estar
289		ahí y es fácil de verla.
290		Bueno pues el ejercicio 1 intentadlo para el próximo día, lo tenéis ahí en
291		la página 106 [del libro de texto], son cuatro sistemas algunos salen
292		incompatibles en esos no hay que hacer nada y algunos si hay que
293		resolver, son todos homogéneos, todos de este tipo.
294	E1:	Una pregunta, ¿en un sistema de estos te puede salir incompatible?
295	Aly:	Incompatible en un homogéneo no, eso lo he dicho yo antes he dicho que
296		el rango puede que sea uno, o dos o tres pero será el mismo de la matriz
297		ampliada porque eso no varía pues sólo se le agregaría una columna de
298		ceros a la ampliada y eso no afecta para efectos del rango, luego siempre
299		los sistemas homogéneos serán compatibles, lo que hay que ver es si te
300		va a quedar compatible determinado o indeterminado, vale.
301		Bueno pues vamos con lo siguiente que ya nos queda poco para terminar
302		[con el primer bloque], ya esta semana terminamos y la siguiente damos
303		un repaso de todo, voy a traer unos problemas de selectividad y lo que
304		nos de tiempo de hacer, ya eso dependerá de vosotros.
305		Bueno pues venga, página 107 [en el libro de texto], aquí es discutir
306		sistemas mediante determinantes, algo que ya hemos hecho con el
307		método de Gauss pero yo decía que no era el método más eficaz pero
308		ahora sí tenemos el método más eficaz para hacer eso.
309		Entonces ahí habrá sistemas con parámetro y habrá que ver para qué
310		valores del parámetro el sistema es compatible o cuándo no, etc.
311		Pues venga ejemplo 1, vamos a ver un sistema con un parámetro,
312		entonces tenemos que ver cuándo, para qué valores del parámetro ese
313		rango es máximo o cuándo no.
314		Bueno en el ejemplo 1 hay que discutir según los valores del parámetro
315		el siguiente sistema $ax+y+z=1$, $x+ay+z=1$, $x+y+az=1$.
316		De estos sistemas son los que caen mucho en los exámenes de
317		selectividad porque recopilan mucho, recopilan bastante todo lo que
318		hemos visto de sistemas.
319		Aquí la pega [el inconveniente] es que nos van a quedar expresiones
320		algebraicas y no numéricas, pues nos van a quedar polinomios para
321		trabajar.
322		Bueno pues venga empezamos, vamos a hacer lo que siempre hacemos
323		para resolver un sistema, para empezar a discutir un sistema, por el
324		teorema de Rouché vamos a empezar a estudiar el rango de la matriz de
325		coeficientes y de la matriz ampliada, así que venga.
326		Vamos a escribir la matriz de coeficientes A, sería una matriz con

327		parámetro a , entonces $a, 1, 1$ en la primera fila, luego ¿la segunda fila
328		cuál?
329	E4:	$1, a, 1$.
330	Aly:	$1, a, 1$ en la segunda fila ¿y en la tercera fila?
331	Es:	$1, 1, a$.
332	Aly:	$1, 1, a$.
333		Bueno pues esa es la matriz de coeficientes.
334		Rango 1 se ve que si hay porque hay elementos no nulos [en la primera
335		columna], rango 2 también vamos a tener, pero siempre lo más cómodo
336		va ser irnos al máximo rango posible, el rango máximo posible será 3 en
337		este caso, pero ¿cómo garantizamos que hay rango 3?
338		Pues sería viendo el determinante, es decir, aquí hay que hacer el
339		determinante y ver qué valores toma el parámetro, entonces lo más
340		inmediato es ir al valor del determinante y aquí es donde digo que hay
341		que andar con cuidado porque nos puede quedar aquí una expresión
342		algebraica.
343		Entonces venga, empezamos a hacer el determinante sería a al cubo más
344		uno más uno menos a menos a , esto nos da un polinomio de
345		grado tres que hay que factorizar para calcular las soluciones, entonces
346		esto es el valor del determinante y nos quedará a al cubo más 2 menos
347		$3a$, vamos a ordenar esto un poquito, sería a al cubo menos $3a$ más 2,
348		este es el polinomio que nos da en este caso el valor del determinante,
349		para yo saber cuándo el rango es 3 o no, tengo que ver cuándo eso es 0,
350		es decir, si este polinomio es igual a 0 entonces de ahí voy a encontrar
351		los distintos valores para los cuales ese polinomio vale 0.
352		¿Cómo se hace eso igual a 0 E8?
353	E8:	Cuando...
354	Aly:	Tenemos que factorizar este polinomio, tenemos que descomponer este
355		polinomio en dos más pequeños, como tenemos un polinomio de orden
356		mayor que dos podemos aplicar Ruffini [para resolver polinomios de
357		grado tres].
358		¿Sabéis cómo va verdad? Se anotan los coeficientes del polinomio de
359		forma ordenada de mayor a menor grado pero respetando siempre el sitio
360		que falte, en este caso falta el coeficiente de a al cuadrado entonces
361		ponemos 0, entonces acomodamos los coeficientes que serían $1, 0, -3, 2$.
362		¿Cuáles son los candidatos a ser soluciones aquí?
363		Pues serían los divisores del término independiente, en este caso los
364		divisores del término independiente son más y menos uno y más y menos
365		2, por suerte nada más que hay cuatro, entonces ¿con cuál debo
366		empezar?
367		Bueno vamos a empezar con el uno y aplicamos Ruffini, vemos que al
368		final el residuo nos queda 0, entonces ese uno si me vale, es un 0 del
369		polinomio.
370		Bueno ahora, podemos encontrar ceros del polinomio que nos faltan,
371		considerando el polinomio que nos queda, a al cuadrado más a menos 2,
372		resolviendo por fórmula general obtenemos a igual a uno y a igual a -2
373		[Aly aplica la fórmula general para obtener esos dos valores].
374		Por tanto los valores que hacen 0 el polinomio de grado 3 son a igual a

375		uno, nuevamente a igual a uno y a igual a -2.
376		Bueno vamos a empezar a estudiar si a es igual a uno, entonces la matriz
377		de coeficientes sería 1,1,1 [en la primera fila], luego 1,1,1 en la segunda
378		fila y finalmente en la tercera fila sería 1,1,1.
379		Tenemos rango 1 porque hay términos no nulos en la primera columna,
380		¿hay rango 2?
381	Es:	No.
382	Aly:	No, porque en cualquier submatriz de orden 2 el determinante vale 0
383		porque tendría dos filas o columnas iguales, ¿sería posible el rango 3?
384	Es:	No.
385	Aly:	No, porque las tres filas o tres columnas son iguales, entonces ¿qué pasa?
386		Que el rango de A es uno y en un sistema homogéneo el rango de A
387		coincide con el de la ampliada y en este caso el rango es menor que el
388		número de incógnitas entonces es un sistema compatible indeterminado.
389		Sólo tenemos una ecuación la x que es la variable que está en el menor
390		de orden uno actuará como variable y las otras dos como parámetros,
391		despejando x de la primera ecuación tenemos $x=1-y-z$, entonces
392		haciendo y igual a λ , z igual a μ , la solución será x igual a $1-\lambda-\mu$, y igual
393		a λ , z igual a μ , para λ y μ que pertenecen a los números reales.
394		[Suena el timbre que indica que la clase ha terminado].
395		Bueno intentad analizar para el otro valor del parámetro a, a igual a igual
396		a -2, vale.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la catorceava clase grabada de la profesora Aly del lunes 24/11/08.

Resumen: Aly pasa a inspeccionar que los estudiantes hayan hecho la tarea que dejó en la clase anterior, luego comienza a resolver los dos apartados de los ejercicios que había dejado de tarea (un ejercicio de selectividad en el que hay que discutir el sistema según los valores de a , clasificarlo y resolverlo para $a=2$). Enseguida resuelve un ejemplo de la página 111 del libro de texto, sobre el tema “Forma matricial de un sistema de ecuaciones”. Después resuelve el primer apartado del ejercicio 1 que es sobre un sistema homogéneo, de la página 106 del libro de texto.

L		Transcripción
1	Aly:	Quiero ver si hicieron el ejercicio que dejé sobre los problemas de
2		selectividad de años anteriores, quiero ver cómo lo hicieron, cuánto les
3		sale, etc., luego vamos a hacer algo sobre la matriz inversa y sobre los
4		sistemas de ecuaciones en forma de matrices, de resolver un sistema en
5		forma matricial.
6		Bueno será mejor que lo haga en la pizarra, es un ejercicio de
7		selectividad de este año (2008).
8		El sistema es, $x+y+z=a-1$, luego en la segunda ecuación $2x+y+az=a$, en
9		la última ecuación $x+ay+z=1$.
10		¿Lo habéis intentado?
11		[Aly se da un paseo por el lugar de los estudiantes para supervisar lo que
12		hizo cada estudiante].
13		Es un ejercicio del examen de selectividad de este año, por lo menos hay
14		que intentadlo eh.
15		En el apartado uno del ejercicio hay que discutir el sistema según los
16		valores de a y clasificarlo, ¿cómo se clasifica un sistema de este tipo?
17		¿Qué método utilizamos?
18	E3:	¿Clasificarlo qué quiere decir?
19	Aly:	Clasificarlo, si es compatible, compatible determinado, etc.
20	E3:	Vale, vale.
21	Aly:	¿Qué teorema usamos para clasificar un sistema?
22	E6:	El teorema.
23	Aly:	El teorema de Rouché.
24	E3:	¿Y ese cuál es?
25	Aly:	Estúdiatelo.
26		El teorema de Rouché es el que nos decía que si el rango de una matriz
27		de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada, solamente
28		en ese caso el sistema es compatible sino ocurre eso el sistema es
29		incompatible, si además ese rango es máximo posible entonces es
30		compatible determinado y sino es así pues es indeterminado.
31		Bueno hay que resolverlo, vamos a escribir la matriz de coeficientes
32		sería 1,1,1 en la primera fila, luego 2,1,a en la segunda fila y 1,a,1 en la
33		tercera fila, vale.
34	Aly:	¿E5, para hacer ese por dónde empezamos?
35	E5:	Es que este es muy diferente.
36	Aly:	Pero este ejercicio no es muy diferente al que hemos hecho en clase.
37		Tú tienes que empezar viendo el rango de esta matriz, hombre rango 1 y
38		rango 2 se ve que hay, entonces vamos a hacer el determinante de esta

39		matriz, para ver qué valores hacen 0 el determinante y qué valores no
40		¿de acuerdo?
41		Entonces venga, el valor del determinante, sería $1+a+2a-1-2-a$ al
42		cuadrado, total que si simplificamos un poco nos queda menos a al
43		cuadrado más $3a$ menos 2, ese es el valor del determinante.
44	E1:	Una pregunta, si el valor del determinante en particular fuera a igual a
45		0, tendríamos que igualar eso a 0, pero también se podría cambiar
46		de signo a la a al cuadrado.
47	Aly:	Si a eso iba.
48		Vamos a ver, el valor del determinante es ese con signo menos, pero si
49		yo quiero ver para qué valores el determinante vale 0, entonces si igualo
50		esto a 0, es una ecuación, a esto si le puedo cambiar de signo, pero aquí
51		no podéis hacerlo [en el valor del determinante].
52		¿Me estáis escuchando?
53		Porque esto es muy importante eh, en el valor del determinante no
54		podemos cambiar el signo, pero cuando eso está igualado a 0 ahí si
55		puedo cambiar el signo, sería a al cuadrado menos $3a$ más 2 igual a 0,
56		vale.
57		Ahora podemos encontrar los valores de a.
58		¿E2 por qué te sale -2 si aquí se ve el más?
59	E2:	Porque yo no cambié los signos.
60	Aly:	Ah entonces te liaste con los signos.
61	E1:	A mi me da 1 y 2.
62	Aly:	Si esos son los valores de a.
63		Bueno venga, en este caso en el que tenemos una ecuación de segundo
64		grado, hay que ver qué dos números sumados dan 3 y multiplicados dan
65		2, pues 2 y 1, no hay ni siquiera que usar la fórmula general para resolver
66		ecuaciones de segundo grado.
67		Que no me acuerdo de eso, pues entonces se usa la fórmula general y
68		sale lo mismo.
69		¿Recordáis este truco?, es para cuando el coeficiente de la variable que
70		está al cuadrado sea uno, se buscan dos números que sumados den el
71		coeficiente del término lineal y que multiplicados den el término
72		independiente.
73		Por ejemplo la ecuación x al cuadrado menos $9x$ más 20 igual a 0, ¿qué
74		dos soluciones hay ahí?
75	E2:	¿Y por Rufini cómo sale eso?
76	Aly:	¿Lo has hecho por Rufini, si es un polinomio de segundo grado?
77	E2:	Si bueno, he copiado mal eso [E2 sonríe].
78	Aly:	Bueno venga, ¿cuánto va a dar esto?, ¿cuál sería aquí la solución?
79	E4:	¿De dónde salió eso [la ecuación x al cuadrado menos $9x$ más 20 igual a
80		0]?
81	Aly:	Esa ecuación no tiene nada que ver con esto pero es un ejemplo.
82		Bueno pero, ¿cuáles son las soluciones ahí?
83	Es:	4 y 5.
84	Aly:	Bueno yo lo digo para quien le sirva, vale.
85		Pero E2 Rufini ahí no me hagas, es una ecuación de segundo grado, vale.
86	E2:	Pero da igual ¿no?

87	Aly:	No da igual porque hay veces que una de las soluciones te da un medio,
88		¿tú crees que por Ruffini te va a salir fácilmente esto?
89		Pues no.
90		Ruffini te da las soluciones enteras, pero cuando son fracciones o raíces
91		pues ya no.
92		Así que cuando lleguéis a una ecuación de segundo grado lo hacéis por la
93		fórmula general ponen a al cuadrado menos 3a más 2,
94		pues es a igual a menos b más menos la raíz de b al cuadrado menos 4
95		por a por c y todo eso partido por 2a, sustituyendo es a igual a 3
96		más menos raíz de 9 menos 4 por 2 por 1 y todo eso partido por 2.
97		Entonces nos queda a igual a 3 más menos raíz de uno todo partido por
98		dos, de ahí a igual a 1 y a igual a 2.
99		Bueno los valores que dan 0 el determinante son 1 y 2.
100		Entonces no perdáis el hilo, hay que discutir el sistema, la discusión del
101		sistema sería la siguiente.
102		¿Qué ocurre si a es distinto de 1 y distinto de 2? Hemos llegado a que
103		en ese caso el determinante ¿cuánto vale?
104	Es:	Distinto de 0.
105	Aly:	Distinto de 0, eso es lo importante, por lo tanto el rango de A ¿cuánto es?
106	E1:	Es tres.
107	Aly:	Es el valor de un determinante de orden 3, entonces es el rango máximo
108		posible, es rango tres.
109		Y si ahora estudiamos el rango de la matriz ampliada, que es la matriz en
110		la que hay que agregar una columna, sea cual sea la columna el rango
111		¿cuánto va a ser?
112	E1:	3.
113	Aly:	Y por el teorema de Rouché, ¿qué nos dice eso? Que si los rangos
114		coinciden el sistema es compatible y si además el rango es el máximo
115		posible en este caso es 3 igual al número de incógnitas, entonces el
116		sistema es compatible determinado, no piden resolverlo pero si yo lo
117		pongo en un examen entonces pido resolverlo, vale.
118		Bueno y si la a vale uno, ¿qué hacemos?
119	E1:	Pero si a vale uno entonces la primera y la tercera fila son linealmente
120		dependientes porque son iguales.
121	Aly:	Exactamente, si a vale uno fijaros lo que nos queda tenemos dos filas [la
122		primera y la tercera] que no es que sean linealmente dependientes sino
123		que son iguales, entonces digamos que nos sobra la tercera fila ¿de
124		acuerdo?
125		Nos quedaríamos sólo con el menor de orden 2, nos quedaríamos con
126		rango 2, entonces el rango de A es dos.
127		Y ¿qué pasa con el rango de la matriz ampliada?, pues ahora sí hay que
128		hacerlo, hay que pararse un poquito y haced la matriz ampliada y ver ese
129		rango, sería 1,1,1,0 en la primera fila; 2,1,1,1 en la segunda fila y 1,1,1,1
130		en la tercera fila.
131	E1:	Entonces quedaría rango 3.
132	Aly:	Bueno digamos que ya teníamos rango 1 y rango 2 [por el rango de la
133		matriz A], y ahora para buscar rango 3 tenemos que ampliar con la
134		siguiente columna [la última].

135	E4:	Pero en la primera fila tenemos 1,1,1 igual a 0 y luego en la tercera fila
136		1,1,1 igual a 1, no puede ser lo mismo igual a 0 e igual a 1.
137	Aly:	Exactamente ese determinante nos va a dar 0, si ampliamos con la tercera
138		columna, lo que dice E4 es cierto porque en la primera ecuación tenemos
139		que $x+y+z=0$ y en la tercera tenemos que $x+y+z=1$ y entonces el sistema
140		va a ser incompatible, si queremos estudiar el rango, tendríamos que
141		hacer el determinante de 1,1,0 en la primera fila; 2,1,1 en la segunda fila
142		y en la tercera fila 1,1,1; haciendo ese determinante me da un valor
143		distinto de 0, entonces el rango de la matriz ampliada ¿cuánto sale?
144	E1:	Sale 3.
145	Aly:	Sale rango 3.
146	E2:	Sale incompatible.
147	Aly:	Es incompatible porque los rangos no coinciden [El rango de la matriz A
148		es distinto que el rango de la matriz ampliada].
149	E1:	Una cosa, respecto al valor de a igual a dos.
150	Aly:	Si voy a anotarlo.
151		Hemos visto si a es distinto de uno y de dos que son los valores que
152		anulan el determinante, luego si a es igual a uno, y ahora, a continuación
153		si a es igual a 2.
154		Si a vale 2, sin hacer muchas cuentas ¿cuál es rango de la matriz de
155		coeficientes?
156	E1:	2.
157	Aly:	¿Por qué?
158	E2:	Porque la columna uno y la tercera sería la misma.
159	Aly:	Pero más aún, estudiamos el rango en general de la matriz A y vimos que
160		este valor [a igual a 2] anula el determinante grande, el determinante de
161		orden 3, por lo tanto rango 3 no tiene, y rango 2 si hay, entonces el rango
162		de la matriz de coeficientes no hay que volverlo a hacer, el rango de A
163		sería 2.
164		Lo que tendríamos que estudiar sería el rango de la matriz ampliada,
165		vamos a escribir la matriz ampliada pero cuando a vale 2, para ese caso
166		concreto, pues venga la matriz sería 1,1,1,1 en la primera fila; 2,1,2,2 en
167		la segunda y en la tercera fila 1,2,1,1.
168		Fijaros que la primera columna y la tercera es la misma y si ampliamos
169		con la última columna sigue siendo la misma que la primera, entonces
170		¿cuánto vale el determinante?
171	Es:	0.
172	Aly:	0, sale 0 vale, entonces si ya se que ese determinante vale 0, es decir, el
173		determinante de 1,1,1, en la primera fila; 2,1,2 en la segunda fila y 1,2,1
174		en la tercera fila, es 0. Entonces el rango de la matriz ampliada es 2.
175		Entonces tenemos que el rango de la matriz A es 2 y el rango de la
176		matriz ampliada es 2, conclusión ¿cómo es el sistema?
177	Es:	Compatible.
178	Aly:	Es compatible pero indeterminado, esto es lo que nos dice el teorema de
179		Rouché, si los rangos son iguales el sistema es compatible, si es el
180		máximo rango posible es compatible determinado sino indeterminado,
181		entonces con a igual a 2 sería un sistema compatible indeterminado.
182		Bueno muy bien, luego en el apartado b de este ejercicio piden resolverlo

183		para a igual a 2, así que hay que resolverlo.
184		Entonces en el apartado a nos piden discutir el sistema según los valores
185		de a, qué pasa en el caso a distinto de 1 y distinto de 2, qué pasa en a
186		igual a 1, no nos piden resolverlo.
187		Ahora en el apartado b este ejercicio ahí si nos piden resolverlo,
188		entonces lo primero que tenemos que hacer es escribir el sistema para ese
189		valor en concreto del parámetro a, ¿el sistema cómo quedaría? primera
190		ecuación $x+y+z=1$, segunda ecuación $2x+y+2z=2$, y tercera ecuación
191		$x+2y+z=1$, bueno hemos dicho que el rango es 2 tanto de la matriz A
192		como de la matriz ampliada, por lo tanto ahí hay una ecuación que
193		estorba, entonces la tercera ecuación nos sobra.
194		¿Cuál es la submatriz que me da rango 2? Esta de aquí [Aly señala la
195		submatriz de orden 2 formada por las dos primeras filas y las 2 primeras
196		columnas] es la que me garantiza el rango 2 y es el rango máximo que
197		tenemos, es decir, las participantes son las 2 incógnitas [x, y] que
198		aparecen en esa submatriz y ¿qué pasa con la z?
199	Es:	La pasamos como parámetro.
200	Aly:	Sí, la pasamos como parámetro vale.
201		Luego nos quedaría el sistema $x+y=1-z$, $2x+y=2-2z$, lo voy a mantener
202		como z todavía por si acaso conviene hacer z igual a 2λ en vez de λ , vale.
203	E2:	Yo también he mantenido la z.
204	Aly:	Bueno pues ese es el sistema que tenemos que resolver.
205		Hasta ahora conocemos dos métodos, ¿cuáles son?
206	Es:	La regla de Cramer.
207	Aly:	La regla de Cramer y también el de reducción, si vemos que podemos
208		hacer una reducción sencillita pues la hacemos, vale.
209		Si a la segunda fila le resto la primera, la y se anula y me quedo con una
210		sola x igual a $1-z$.
211	E4:	Pero la tercera ecuación ¿por qué la quitas?
212	Aly:	La tercera la quito porque aunque tú no veas directamente la dependencia
213		lineal, existe, ¿por qué existe? Porque el rango de la matriz no es 3,
214		entonces te quedas con las dos ecuaciones con las que te dio rango 2,
215		luego ese determinante es distinto de 0.
216	E4:	¿Pero se podría quitar otra [ecuación]?
217	Aly:	Se podría quitar siempre y cuando tú me garantices que con las
218		ecuaciones que te vas a quedar también existe el rango 2.
219	E4:	A vale.
220	Aly:	Pero tienes que garantizarme aquí que el menor es distinto de 0.
221		Aquí lo que pasa es que es más fácil trabajar con la primera submatriz
222		[con la formada por las dos primeras filas y las dos primeras columnas],
223		algunas veces es fácil de ver la dependencia lineal pero otras veces no, y
224		aquí lo que sucedió es que la última es combinación lineal de las dos
225		primeras filas o la segunda es combinación lineal de las otras dos, vale.
226		Bueno referente a esto, imagínate E4 que tienes 1,1,1 en la primera fila;
227		luego 2,1,1 en la segunda fila y 1,1,1 en la tercera fila;
228		¿podríamos quitar aquí la segunda fila?
229		No, porque la submatriz formada por 1,1 y 1,1 [la
230		submatriz formada por los dos primeros elementos de la primera fila y la

231		tercera] no te garantizan un rango 2 [pues el determinante de esa
232		submatriz es 0], es decir, necesitas una que sí sea de orden 2, vale.
233	E3:	Pero ¿por qué en la que estamos haciendo si cumple?
234	Aly:	Porque si yo calculo el determinante de esa submatriz me da distinto de
235		0, igualmente podía haberme quedado con la primera y la tercera [la
236		submatriz formada por los dos primeros elementos de la primera fila y la
237		tercera] siempre y cuando te asegures primero que el valor de su
238		determinante es distinto de 0.
239	E3:	Pero también puedo quedarme con la segunda fila y la tercera.
240	Aly:	Si con la que sea, siempre y cuando te asegures primero que el valor de
241		su determinante es distinto de 0, en ese caso eliminarías la primera
242		ecuación y te quedarían como verdaderas incógnitas la x, y y pasarías la
243		z para la derecha, y la solución debe ser la misma vale.
244		Pero estudiar el rango tiene su premio de estudio ¿no?, si nos queda
245		rango 1 pues tendríamos una incógnita y dos parámetros, si queda rango
246		2 entonces dos incógnitas y un parámetro.
247		Entonces yo me había quedado con esta submatriz [Aly señala la
248		submatriz de orden 2 formada por las dos primeras filas y las dos
249		primeras columnas].
250		Es que aquí claro, hay una y mil formas de hacerlo entonces cada quien
251		lo hace como quiere.
252		Entonces quedándome con eso el sistema que queda es el que había
253		anotado y nos queda x igual a 1 menos z, si alguien ha cogido otra
254		submatriz pues muy bien, pero la solución es la misma.
255	E3:	Pero a mí me da diferente.
256	Aly:	Tú hazlo en tu casa y verás, debe dar igual.
257	E2:	¿Debe de dar lo mismo?
258	Aly:	En el conjunto de las infinitas soluciones sí, lo que pasa es que para un
259		valor de mi parámetro me da un valor y para tu parámetro va a ser con
260		otro valor, pero al final las infinitas soluciones que te den a ti también me
261		dan a mí, no para el mismo valor del parámetro en un caso y en otro,
262		pero en conjunto global sí, vale.
263		Bueno ya, ¿seguimos?
264		Es que claro, empezar a decir y si esto y si lo otro y si cojo esto, lo que
265		hay que hacer es hacerlo, hasta que tú no lo hagas en casa no sabes
266		verdaderamente lo que hay, porque es muy fácil hablar, hablar y hablar,
267		qué pasaría y qué pasaría, es que hablar es fácil pero hacerlo no tanto.
268		Bueno aquí si restamos a la fila 2 la fila 1 [en el sistema que ella eligió]
269		habíamos dicho que tenemos x igual a 1 menos z, luego así nos sale
270		directamente despejada la x, nos quedaría por averiguar la y, ¿de dónde
271		la obtengo?
272		Pues de la primera ecuación sería y igual a 1 menos z menos x, sería
273		y igual a 1-z menos lo mismo [1-z], al sustituir la x, queda y igual a 0.
274		Entonces la solución global sería x igual a 1 menos λ , y igual a 0, z igual
275		a λ , para lambda que pertenece a los números reales.
276		Bueno pues esa es la solución que queda, ¿lo habéis hecho por Cramer o
277		cómo?
278	E2:	Yo lo he hecho así.

279	Aly:	Por reducción ¿no?
280	E2:	Si.
281	Aly:	Pues ahí se terminaría ese ejercicio, en realidad lo resolvimos sólo para
282		el caso en que a es igual a dos.
283		Bueno vamos a seguir con lo último que nos queda de teoría, venga
284		vámonos a la página 111 del libro [de texto].
285		A la forma matricial de un sistema de ecuaciones.
286		Ya esta semana vamos a hacer ejercicios para practicar para el examen,
287		claro que en el examen de los ejercicios que más caerán serán de los dos
288		últimos temas, de matrices, determinantes, lo del método de
289		triangulación ya no, ya tenemos un método más eficaz.
290	E6:	Aly, ¿vamos a hacer ejercicios de la página 106 y de la 108?
291	Aly:	Sí, vamos a ver si nos da tiempo, vale.
292		Pues venga “Forma matricial de un sistema de ecuaciones”
293		[Aly anota este tema en la pizarra].
294		Bueno ya el otro día, os adelanto de qué iba, vamos a ver el siguiente
295		ejemplo, tenemos este sistema $x-y-z=1$, segunda ecuación $-x+3z=18$, y
296		última $-2x+5y-3z=-52$.
297		Bueno vamos a ver cómo se puede escribir eso en forma matricial.
298		Recordáis que siempre hay que escribir primero la matriz de coeficientes,
299		vamos a estudiar el rango de esa matriz,
300		venga pues en este caso la matriz de coeficientes sería, 1,-1,-1 en la
301		primera fila; -1,0,3 en la segunda fila; -2,5,-3 en la tercera fila, bueno
302		pues con esa matriz de coeficientes vamos a escribir el sistema en forma
303		matricial, ¿cómo?
304		Pues este sistema admite esta otra escritura de la siguiente forma, si
305		escribimos la matriz A de coeficientes y luego las incógnitas como
306		vector columna, esto nos va a quedar así, matriz de coeficientes 1,-1,-1
307		en la primera fila; -1,0,3 en la segunda fila; -2,5,-3 en la tercera fila,
308		ahora en lugar de las tres incógnitas escritas como ecuación, las
309		escribimos como vector columna, entonces sería x, y, z [Aly escribe
310		estas incógnitas en forma de vector columna, indicando la matriz A por
311		este vector].
312		¿Y ahora esto a qué quedaría igualado?
313		A otro vector columna que sería ¿quién?
314		Pues los términos independientes, 1,18,-52 [Aly escribe esto como vector
315		columna].
316	E3:	¿Y cómo sabemos que tiene siempre esa escritura?
317	Aly:	Pero sólo estoy diciendo que el sistema admite esta otra escritura,
318		¿Por qué esto [el sistema escrito en forma de ecuaciones] es lo mismo
319		que esto [el sistema escrito en forma matricial]?
320	E2:	Porque sí.
321	Aly:	¿Cómo se multiplican las matrices? ¿cómo se multiplicaría esto [la
322		matriz de coeficientes por el vector columna de las incógnitas]?
323		Pues sería 1 por x menos 1 por y menos uno por z y ¿eso a qué es igual?
324		pues es la primera ecuación $x-y-z$, es la primera parte de la primera
325		ecuación, entonces esta multiplicación...
326	E2:	Se obtiene del producto de matrices.

327	Aly:	Eso es lo que estamos aplicando aquí, vale.
328		El segundo [continúa haciendo el producto de la matriz de coeficientes
329		por el vector columna de las incógnitas] nos quedaría menos uno por x
330		más 0 por y más tres por z, entonces eso nos queda así $-x+3z$.
331		Último elemento [continúa haciendo el producto de la matriz de
332		coeficientes por el vector columna de las incógnitas] sería menos dos por
333		x más 5 por y menos 3 por z y eso nos queda $-2x+5y-3z$.
334		Bueno y ahora ese producto [de la matriz de coeficientes por el vector
335		columna de las incógnitas] queda igualado al vector columna 1, 18, -52;
336		para que nos quede $x-y-z$ igual a 1, $-x+3z$ igual a 18 y $-2x+5y-3z=-52$,
337		luego siempre un sistema lo puedo escribir así [en forma matricial], ¿lo
338		ves E3?
339	E3:	Siempre que se pueda.
340	Aly:	Bueno pues vamos a poder escribir un sistema como $A.X=C$, A es la
341		matriz de coeficientes, X el vector columna de las incógnitas y C el
342		vector columna de los términos independientes ¿de acuerdo?
343		Bueno pues en el caso en que A tenga inversa ¿cómo se puede escribir
344		eso ayudándonos con la matriz inversa?
345		Es decir, el sistema generalmente lo escribimos así $A.X=C$, ¿verdad?
346		Entonces ayudándonos ahora de la matriz inversa, ¿cómo despejaríamos
347		la X (que verdaderamente son las incógnitas)?
348	E1:	Pues multiplicando por la inversa del lado donde no está la X.
349	Aly:	Si multiplicamos por la inversa, tenéis que tener cuidado, o multiplico
350		por la izquierda o multiplico por la derecha, no puedo multiplicar de
351		cualquier manera puesto que el producto no es conmutativo, en este caso
352		para que la A a la menos uno se quede al lado de la A y nos quede la
353		matriz identidad, ¿por qué parte tengo que multiplicar, por la derecha o
354		por la izquierda?
355	E1:	Por la izquierda.
356	Aly:	Por la izquierda, es decir, multiplicaríamos por A a la menos uno aquí,
357		[Aly anota A a la menos uno por A por X igual a A a la menos uno por
358		C], fijaros en la segunda parte de la igualdad, aquí es lo importante pues
359		si multiplicamos por la izquierda por A a la menos uno de un lado de la
360		igualdad, también lo tenemos que hacer por la izquierda en la segunda
361		parte de la igualdad, pues no es lo mismo A a la menos uno por C que C
362		por A a la menos uno, son dos operaciones distintas.
363		Bueno y ¿qué ocurre con A a la menos uno por A?, ¿a qué va a ser igual?
364		[Aly señala el producto de A a la menos uno por A].
365	E2:	A la identidad.
366	Aly:	La identidad, el elemento neutro en el producto de matrices que es la
367		matriz identidad, es como tener un uno multiplicado por un número, me
368		da el mismo número, es el elemento neutro.
369		Por lo tanto, esto que es la matriz identidad [Aly señala el producto de A
370		a la menos uno por A] por X, ¿qué nos va a quedar? X, y ¿a qué va a ser
371		igual la X? Pues a A a la menos uno por C, es decir, en caso de que la
372		matriz de coeficientes del sistema tenga inversa, las incógnitas también
373		se pueden encontrar así [Aly señala esta última ecuación que ha escrito],
374		claro para esto tiene que ser un sistema cuadrado.

375		Entonces, en los casos de sistemas cuadrados, es decir, igual número de
376		ecuaciones que de incógnitas, y cuando existe A a la menos uno (si y
377		sólo sí el determinante de la matriz A es distinto de 0) podemos aplicar
378		lo anterior y calcular X (que es el vector de las incógnitas) igual a A a la
379		menos uno por C, ¿de acuerdo? Y la X me da la x, y, z.
380		Claro, ¿qué hace falta para hacerlo de esta manera?
381		Pues que haya inversa [de la matriz A] y que el sistema sea cuadrado.
382		Venga pues vamos a hacerlo en nuestro ejemplo, ya tenemos la matriz de
383		coeficientes, vamos a calcular la inversa, A a la menos uno, vuelvo a
384		copiar la matriz de coeficientes es 1,-1,-1 [en la primera fila]; -1,0,3 [en
385		la segunda fila]; -2,5,-3 [en la tercera fila],
386		bueno pues venga vamos a ver si esa matriz tiene o no tiene determinante
387		distinto de 0, vamos a ver, valor del determinante ¿cuál es?
388	Aly:	Sería...
389	Es:	0+6+...
390	Aly:	0+6+5-0-15+3 esto nos da -1, como es distinto de 0, entonces ¿qué
391		sucede con la inversa?
392		Pues que existe la inversa.
393		Bueno pues eso es lo que vamos a calcular, la inversa para poder calcular
394		X igual a A a la menos uno por C.
395		Entonces os recuerdo cómo se calcula la inversa, lo os digo por los que
396		no vinieron el viernes [que fue la clase anterior a esta] eh, se calcula el
397		adjunto, el adjunto del primer elemento, tenemos que poner menos 1
398		elevado a la 1 más 1 que es 2 y eso va multiplicado por el determinante
399		[de orden 2] que queda de tapar la primera fila y la primera columna
400		vale, en este caso es el determinante de 0,3 [en la primera fila] y 5,-3 [en
401		la segunda fila], entonces haciendo la multiplicación de esto nos queda
402		menos 15, bueno pues este es el adjunto del primer elemento [del
403		elemento de la primera fila primera columna].
404		Ahora el adjunto del elemento uno dos [primera fila segunda columna],
405		sería menos uno elevado a la 3 por el determinante de -1,3 [en la primera
406		fila] y -2,-3 [en la segunda fila], ese determinante ¿de dónde sale? pues
407		de tapar la primera fila segunda columna, de todo ese producto nos
408		queda menos uno por el valor del determinante que es 3 más 6, 9,
409		entonces el adjunto del elemento uno dos nos queda -9.
410		Siguiente elemento el uno tres ¿cómo se haría el adjunto de ese
411		elemento? ¿qué sería? ¿el menos uno a qué va elevado?
412	E2:	Es menos uno elevado a la cuatro.
413		En el examen, ¿te podemos poner sólo el valor del adjunto o tenemos
414		que anotarte todo eso?
415	Aly:	El valor del adjunto lo puedes poner directamente pero tendrás que fijarte
416		bien si va positivo o negativo.
417		Bueno en este elemento [uno tres] sería -1 a la cuatro, eso me queda
418		positivo, ahora por el determinante, ¿qué fila y qué columna tapamos
419		ahora?
420	E2:	La primera fila y la tercera columna.
421	Aly:	Bien y ¿qué determinante queda?
422	Es:	-1,0 [en la primera fila] y -2,5 [en la segunda fila].

423	Aly:	Bueno y ahora el adjunto del elemento dos uno sería -1 al cubo, cuidado
424		que aquí si va a quedar negativo, por el determinante de -1,-1 [en la
425		primera fila] y 5,-3 [en la segunda fila], entonces de todo esto nos queda
426		que el adjunto del elemento dos uno es -8, así se seguiría con todos, vale.
427		Bueno venga vamos a hacerlos todos y así ya es otro ejemplo de calculo
428		de la matriz inversa, vale.
429		Pues venga el adjunto del elemento dos dos, sería -1 a la cuatro, eso me
430		queda positivo por el determinante de 1,-1 en la primera fila y -2,-3 en la
431		segunda, de todo eso nos queda -5.
432		El adjunto de dos tres, aquí si queda negativo por ser -1 a la 5, luego por
433		el determinante de 1,-1 [en la primera fila] y -2,5 [en la segunda fila] y
434		de todo eso nos queda -3.
435		El del tres uno, ¿quién es? sería -1 a la cuatro por el determinante
436		de -1,-1 en la primera fila y 0,3 en la segunda, de todo eso nos queda -3.
437		El de tres dos, sería -1 a la 5, ese si queda negativo, ahora por el
438		determinante de 1,-1 en la primera fila y -1,-3 en la segunda, de todo
439		eso nos queda -2.
440		Por último el del tres tres, sería -1 a la 6 por el determinante de 1,-1 [en
441		la primera fila] y -1,0 [en la segunda fila] y de todo eso nos queda -1.
442		Bueno con los adjuntos de los elementos, ¿ahora hacemos la matriz qué?
443	E1:	La matriz traspuesta.
444	Aly:	La matriz adjunta de A, primero escribo la matriz adjunta de A, ya la
445		tengo hecha para cada elemento y es -15,-9,-5 [en la primera fila];
446		-8,-5,-3 [en la segunda fila]; -3,-2,-1 [en la tercera fila]
447		¿Quién dijimos que es la matriz inversa?
448	E1:	La adjunta.
449	Aly:	Era la adjunta de A...
450	E1:	Transpuesta.
451	Aly:	La adjunta de A, traspuesta todo partido por el determinante de A.
452		Ahora qué tenemos que hacer con la adjunta de A.
453	Es:	La traspuesta.
454	Aly:	Hacer la traspuesta, la adjunta de A traspuesta ¿quién sería?
455		Primera fila pasa a ser primera columna, sería -15,-9,-5 [en la primera
456		columna]; -8,-5,-3 [en la segunda columna]; -3,-2,-1 [en la tercera
457		columna].
458		Y ahora, si eso mismo lo divido por el determinante de A, que es
459		dividirlo entre menos uno, ¿qué le pasa a todo eso [a la matriz adjunta de
460		A traspuesta]?
461	E2:	Se le cambia de signo.
462	Aly:	Se le cambia a todo de signo, entonces queda 15,9,5 [en la primera
463		columna]; 8,5,3 [en la segunda columna]; 3,2,1 [en la tercera columna],
464		luego esta es la matriz inversa.
465		Muy bien, ¿para qué hemos hecho eso?
466		Para resolver ¿qué sistema? El sistema era X igual a A inversa por C ,
467		vale.
468		Entonces ¿qué me queda para calcular X , es decir x , y , z ?
469		Pues multiplicar la matriz inversa por C que es el vector columna de los
470		términos independientes,

471		entonces sería la matriz 15,9,5 [en la primera columna]; 8,5,3 [en la
472		segunda columna]; 3,2,1 [en la tercera columna] multiplicada por el
473		vector columna 1,18,-52.
474		A ver una cosita, si multiplico esta matriz inversa que es de orden 3x3 la
475		multiplico por este vector columna que es de orden 3x1 ¿de qué orden
476		me tiene que dar la matriz que resulte?
477	Es:	3x1.
478	Aly:	3x1, recordad que para que el producto tenga sentido, esto tiene que ser
479		igual [el número de columnas de la primera matriz igual al número de las
480		filas de la segunda matriz a multiplicar] y el orden de lo que resulte de
481		ahí va a ser de 3x1, es decir, el número de filas de la primera matriz por
482		el número de columnas de la segunda.
483		Venga vamos a hacer este producto ya, el primer elemento sería 15 por 1,
484		más 8 por 18, más 3 por -52 y eso da 3, vale.
485		Segundo elemento sería 9 por 1 más 5 por 18 más 2 por -52, eso da -5.
486		Tercer elemento 5 por 1 más 3 por 18 más 1 por -52, eso sale 7.
487		Conclusión, ¿a qué hemos llegado? ¿cuánto vale la x?
488	E2:	3.
489	Aly:	3.
490		Entonces tengo que x vale 3, y vale -5 y z vale 7.
491		¿De acuerdo?
492		¿Qué me tienen que poner en un enunciado para que yo sepa si lo tengo
493		que hacer por Cramer o usando la inversa como aquí?
494		Pues la mayoría dice, resuelve este sistema de forma matricial, vale, si
495		me dicen que lo haga de forma matricial pues me piden que lo haga así,
496		con matrices, matriz de coeficientes, matriz de las incógnitas.
497	E2:	Pero ¿qué es mejor, por Cramer o por este? Es más rápido por Cramer
498		¿no?
499	Aly:	¿Para qué?
500		En la solución del sistema...
501	E2:	Si es un sistema compatible, ¿cuál es más rápido este o Cramer?
502	Aly:	Yo creo que por Cramer puede ser más rápido.
503		Pero depende también de la dificultad de la matriz, pues ved que aquí la
504		matriz no tiene muchos ceros, pero si tuviera algunos ceritos, si hay
505		ceros pues es mejor hacerlo por Cramer, ahora, hay casos en los que me
506		pide que lo haga en forma de matriz entonces habría que hacerlo por
507		aquí.
508		Si lo piden de forma matricial y lo hacéis de otra manera, eso puede que
509		no lo den por válido, vamos eso es seguro, vale.
510		Bueno, de la página 110 mandé uno el otro día ¿no?, bueno pues en el
511		ejercicio 1 es calcular la inversa de la matriz que acabamos de hacer, así
512		que ya no lo voy a hacer.
513		De la página 106 el ejercicio uno, es un sistema homogéneo.
514		¿Recordáis lo que es un sistema homogéneo verdad?
515	E2:	Sí.
516	Aly:	¿Si qué?
517	E2:	Que los términos independientes son 0.
518	Aly:	Que los términos independientes siempre son 0 y siempre el rango de la

519		matriz de coeficientes coincide con el de la matriz ampliada y si los
520		rangos coinciden, entonces siempre ¿cómo es el sistema?
521	Es:	Compatible.
522	Aly:	Compatible, ¿podría haber una forma de que siempre de un sistema
523		compatible determinado?
524	E2:	No.
525	Aly:	No, en el caso en los que estudiamos el rango, cuando el rango sea el
526		máximo ahí si va a ser un sistema compatible determinado y ¿cuál es la
527		solución única que tiene entonces? ¿la solución qué?
528	Es:	Trivial.
529	Aly:	La 0,0,0 claro en ese caso es muy fácil resolverlo.
530		Bueno pues venga el sistema es $3x-5y+z=0$, $x-2y+z=0$, $x+y=0$; la matriz
531		de coeficientes es 3,-5,1 en la primera fila; 1,-2,1 en la segunda fila; 1,1,0
532		en la tercera fila,
533		¿qué tendríamos que hacer para ver cómo es el sistema?
534		Compatible sé que va a ser, ahora si es compatible determinado o
535		indeterminado ¿cómo lo vemos?
536		Podría ser compatible indeterminado si el rango es 1 ó 2, vale, o sea que
537		hay que estudiar el rango.
538		Rango 1 tenemos aquí seguro [Aly señala el primer elemento, el 3 que
539		está en la primera fila primera columna],
540		a la hora de estudiar el rango lo más cómodo es empezar con el primer
541		elemento, si ese no me vale pues entonces sí tendría que buscar otro
542		elemento,
543		luego hay que ampliar, aquí voy a ampliar con la siguiente fila y
544		siguiente columna, es decir, tomo la submatriz de orden dos, formada
545		por los dos primeros elementos de las primeras dos filas y dos columnas,
546		el determinante de esta submatriz me da $-6+5$ que es -1 ,
547		como esto es distinto de 0 entonces me garantiza que hay rango 2.
548		Ahora para ver si hay rango 3, hay que calcular el valor del determinante
549		de la matriz A, sería $0-5+1+2-3-0=-5$, como es distinto de 0 entonces
550		¿qué rango tenemos aquí?
551	Es:	3.
552	Aly:	El rango de A es 3 y hemos dicho que coincide con el rango de la matriz
553		ampliada, aquí en los sistemas homogéneos los rangos de estas dos
554		matrices siempre coinciden, por lo tanto es un sistema compatible
555		determinado, ¿y cuál es la única solución?
556	E2:	0,0,0.
557	Aly:	Si, es la 0,0,0 que es la solución trivial así que es todo lo que hay que
558		hacer.
559		Bueno, siguiente apartado, [Aly mira su reloj] a bueno como ya se va a
560		terminar la hora, entonces voy a dejar tarea para mañana, de la página
561		108 el ejercicio 1 y de la página 106 el apartado b, c y d del ejercicio 1.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

Transcripción de la quinceava clase grabada de la profesora Aly del martes 25/11/08.

Resumen: Es sobre resolución de ejercicios, Aly se pone a discutir con los estudiantes los ejercicios que había encargado de deberes en la clase anterior (del lunes 24/11/08). Los ejercicios son: de la página 106 del ejercicio 1 el apartado b, c y d (acerca de los sistemas homogéneos, el apartado a) ya lo había hecho Aly la clase anterior); de la página 108 el ejercicio 1 apartado a (acerca de discutir un sistema según los valores de a , clasificarlo y resolverlo en los casos que fuese posible).

L		Transcripción
1	Aly:	Bueno vamos a resolver el apartado b del ejercicio 1 de la página 106
2		[del libro de texto], el sistema es $x-y-z=0$, $x+y+3z=0$, $x-5y-9z=0$.
3		La matriz de coeficientes es 1, -1, -1 [en la primera fila]; 1, 1, 3 [en la
4		segunda fila] y 1, -5, -9 [en la tercera fila].
5		Rango 1, si que hay [pues tenemos un menor de orden 1, pues el primer
6		elemento, de la primera fila y primera columna es distinto de 0], rango 2
7		también tenemos, si ampliamos con la segunda columna y la segunda fila
8		y tomamos la submatriz de orden 2, al encontrar el valor del
9		determinante de esa submatriz es distinto de 0,
10		ahora para ver si hay rango 3, calculamos el valor del determinante de A,
11		sería $-9-3+5+1+15-9=0$,
12		entonces el Rango de A es 2 y coincide con el rango de la matriz
13		ampliada porque es un sistema homogéneo.
14		Entonces el sistema es compatible indeterminado (SCI).
15		¿Qué hacemos cuando tenemos un SCI?
16	E2:	Anotamos las dos ecuaciones.
17	Aly:	Del sistema, ¿con qué dos ecuaciones me quedo?
18	Es:	Con las dos primeras [que me garantizan rango 2].
19	Aly:	Que son las que participan en el menor de orden 2 que hemos escogido,
20		es importante tomar el menor de rango 2, vale.
21		Entonces la tercera ecuación sobra porque habrá una dependencia lineal
22		entre dos filas, que sea fácil de ver o no, no me preocupa, el caso es que
23		tiene que existir dado que el determinante me ha dado 0, vale.
24		Entonces ¿el sistema cómo queda?
25		Sería, $x-y=z$, $x+y=-3z$, hacemos una reducción sumando las dos
26		ecuaciones y nos queda $2x=-2z$ entonces x es igual a $-z$, eso sería x en
27		función de z .
28		Ahora la y en función de z , pues de la primera ecuación paso la y a la
29		derecha, sería y igual a $x-z$, sustituyendo el valor de x , y es igual a $-2z$.
30		Total que la solución, si $z=\lambda$ nos queda $x=-\lambda$, $y=-2\lambda$, $z=\lambda$, para λ que
31		pertenece a los números reales, así es como terminamos siempre, esa es
32		la solución.
33		Venga, el apartado c sale fácil, sale la solución trivial, hay que fijarnos
34		que nos dan cuatro ecuaciones con tres incógnitas, el sistema
35		es $x+11y-4z=0$, $-2x+4y+z=0$, $x+y-2z=0$, $2x-16y+5z=0$ ese es el sistema
36		que nos dan, ¿aquí podemos hablar del determinante de A, del
37		determinante de la matriz de coeficientes de este sistema?
38		¿De qué orden será la matriz A? ¿de 4×4 ?

39	E2:	De 3×4 .
40	Aly:	De 4×3 porque tenemos cuatro filas y tres columnas, entonces la matriz
41		sería 1, 11, -4 [en la primera fila]; -2, 4, 1 [segunda fila]; 1, 1, -2 [tercera
42		fila]; 2, -16, 5 [en la cuarta fila]; es una matriz de orden 4×3 , vale.
43		Entonces no podemos hablar del determinante de A, porque los
44		determinantes son para matrices cuadradas, entonces no tiene sentido
45		hablar del determinante de A, pero vamos a estudiar el rango.
46		Hay rango 1 porque el primer elemento es distinto de 0 [el elemento de
47		la primera fila primera columna], también hay rango 2 pues el
48		determinante de la submatriz, formada por los dos elementos de las
49		primeras dos filas y dos columnas, de orden 2 es distinto de 0,
50		ahora para ver si hay rango 3, hay que ampliar con la tercera fila y
51		tercera columna, si hacemos este determinante nos da -18, ¿verdad?
52	E2:	Si.
53	Aly:	Fijaros que no estoy hablando del determinante de A, sino del
54		determinante ese [formado por las tres primeras filas y tres primeras
55		columnas], o sea es distinto de 0.
56		Por lo tanto el rango de A es 3 y que es el mismo de la ampliada, por más
57		que agreguemos filas el rango no va a variar, el rango de A es igual al
58		rango de la matriz ampliada y en este caso es tres, y ¿es el máximo rango
59		posible si o no?
60	Es:	Si.
61	Aly:	Luego el sistema ¿cómo es?
62	E2:	Compatible.
63	Aly:	¿Compatible qué?
64		Determinando, es decir, no hay ninguna variable que tengamos que pasar
65		a la derecha como parámetro, lo que pasa es que la última ecuación
66		estorba, si quitamos la última ecuación el sistema queda igual, pues esa
67		ecuación no participa en el menor de orden 3 que me garantiza el rango 3
68		Bueno es compatible determinado entonces tiene solución única, y si
69		existe una única solución en un sistema homogéneo, ¿qué solución es?
70	Es:	La trivial.
71	Aly:	La 0,0,0, así que ahí se termina.
72		El último es un poco más interesante, el apartado d, vamos a hacerlo.
73		La primera ecuación es $x+y+5z=0$, segunda ecuación es $3x-y-2t=0$, y
74		por último $x-y+z-t=0$, fijaros que ahí tenemos un sistema homogéneo,
75		¿de cuántas ecuaciones y de cuántas incógnitas estamos hablando ahora?
76		Ocurre lo contrario que en el apartado anterior [c].
77	E1:	Tres ecuaciones y 4 incógnitas.
78	Aly:	Sí, 3 ecuaciones y 4 incógnitas, luego la matriz de coeficientes ¿cómo
79		nos queda?
80		Nos quedan 3 filas y 4 columnas, pues venga, primera fila 1,1,5,0;
81		segunda fila 3,-1,0,-2; y última fila 1,-1,1,-1.
82	E1:	Una pregunta, ¿eso no es incompatible?
83	Aly:	No, no es incompatible, hay que hacerlo.
84	E1:	No pero, el rango va a ser menor que el número de incógnitas.
85	Aly:	Pero aunque sea rango 1 o rango 2, incompatible no va a serlo nunca.
86	E1:	Ah, vale, vale.

87	Aly:	Si es un sistema homogéneo, como ese, nunca te va a salir incompatible,
88		siempre va a ser compatible, lo que tienes que ver es si es compatible
89		determinado o indeterminado.
90		Aquí lo que tú estás intentando decir es que va a salir compatible
91		indeterminado, seguro.
92	E1:	Si.
93	Aly:	Claro, pero compatible, vale.
94		Bueno pues lo mismo de siempre, empezamos a estudiar el rango de la
95		matriz de coeficientes, rango 1 tenemos [Aly señala el primer elemento
96		que aparece en la primera fila y primera columna], rango 2 tenemos [Aly
97		señala la submatriz de orden dos formada por los primeros elementos de
98		las dos primeras filas y columnas],
99		para ver si hay rango 3 lo que tenemos que hacer es ampliar con la
100		tercera columna y ver cuánto nos da el determinante de esa matriz, venga
101		vamos a hacerlo, sería el determinante de 1, 1, 5 en la primera fila;
102		luego 3, -1, 0 en la segunda fila y por último 1, -1, 1 eso nos da...
103		¿Alguien ha hecho ese determinante para estudiar el rango?
104	E11:	A mí me da menos 14.
105	E2:	Sí da menos 14.
106	Aly:	[Aly va y ve en su libro cuánto da] Sí, da menos 14, que es distinto de 0,
107		por lo tanto el rango de la matriz ya sabemos que es 3 y el rango de la
108		ampliada no varía, entonces el rango de A es igual al rango de la
109		ampliada igual a 3, y en este caso, ¿qué ocurre?
110		Ese 3 es el máximo rango posible, pero, ¿coincide con el número de
111		incógnitas o no?
112	Es:	No.
113	Aly:	Este 3 en este caso es menor que el número de incógnitas, pues tenemos
114		4 incógnitas, entonces el sistema es compatible pero indeterminado.
115		¿Cuántos parámetros nos quedan?
116		Incógnitas tenemos 4 y rango 3 entonces tendremos un parámetro, nos va
117		a quedar el sistema con un parámetro, vale, pues eso es lo que tenemos
118		que resolver ahora.
119		Bueno pues como siempre hacemos, nos quedamos con la parte de las
120		ecuaciones que participan en ese menor que hemos encontrado ahí y que
121		nos garantiza rango 3,
122		pues ahora lo que hacemos es desplazar la t a la derecha,
123		sería $x+y+5z=0$ ahí no hay t ninguna entonces se queda igual, segunda
124		ecuación es $3x-y=2t$, y por último $x-y+z=t$, ese es el sistema que nos
125		queda para resolver, ¿cómo se resuelve esto ahora?, de estos no hemos
126		hecho ninguno.
127		¿E1 terminaste este?
128	E1:	No.
129	Aly:	Es que fijaros casi siempre eliminamos una ecuación o tratamos un
130		sistema cortito, es decir, 2 ecuaciones con 2 incógnitas y la z es la que
131		pasa a la derecha como parámetro ya sabemos qué hacer, pero en este
132		caso no me quedan 2 ecuaciones con 2 incógnitas, ahora tenemos 3
133		ecuaciones con 3 incógnitas y tenemos que el determinante de ese menor
134		de orden 3 es -14, entonces digo que, ¿cómo podemos resolver ese

135		sistema?
136		¿Por qué método?
137		¿Matricial?
138	E6:	Escalonado.
139	Aly:	Pero hay una forma más fácil.
140	E1:	Primero reducir en la primera fila la y.
141	Aly:	Eso se te puede complicar mucho, eh.
142		Son 3 ecuaciones y 3 incógnitas.
143		A ver, hay un método eficaz, clarito como el agua que ya hemos dado, es
144		el método de Cramer, que precisamente es para resolver estos sistemas,
145		cuando son compatibles determinados, en este caso no es un sistema
146		determinado, es un sistema compatible indeterminado, pero qué ocurre al
147		haber pasado aquí a la t como parámetro, ya este determinante [del
148		menor de orden 3], ya queda distinto de 0, luego ahí puedo aplicar
149		perfectamente, y es lo que hacemos, la regla de Cramer,
150		lo que ocurre es que en la práctica, en los sistemas que nos están
151		poniendo para resolver, casi nunca terminamos con Cramer, en este caso
152		de compatibles indeterminados, casi siempre lo hacemos para
153		compatibles determinados, pero para compatibles indeterminados y este
154		es un ejemplo de eso, se termina por Cramer, vale, por eso me quería
155		parar en esto.
156		¿Cómo me va a quedar la regla de Cramer?
157		¿A qué era igual la x?
158		En el denominador de la x, y, z ya saben que el que va siempre es el
159		determinante de A.
160		Bueno pues para x, en el numerador nos queda el determinante de la
161		matriz de coeficientes pero cambiando la primera columna por los
162		términos independientes, en este caso, ¿qué hay que poner en la primera
163		columna?
164		Pues sería 0, 2t y t, la segunda columna se queda igual 1, -1, -1 y tercera
165		columna 5, 0, 1.
166		¿Veis cómo no hay dos ejercicios iguales? Bueno quiero decir, que
167		hacemos muchos y van saliendo de diferentes tipos y hay que pararse un
168		poco ¿no?
169		Bueno ahí tenéis ese determinante que hay que resolver y eso va partido
170		por el determinante de A que es -14.
171		¿Cómo se termina esto? Pues hay que calcular el determinante de arriba
172		[del numerador], nos daría -10t+5t-2t y eso partido por -14, eso sería -7t
173		partido por -14 y eso nos queda t partido por 2.
174		Fijaros que en ejercicios anteriores nos quedaban sistemas más cortos
175		para resolver y los podíamos hacer con una reducción cortita pero aquí es
176		más cómodo usar otro método.
177		Bueno ahora la y, ¿a qué es igual?
178		Pues lo haríamos igual, con la regla de Cramer,
179		esta regla lo que tiene es que es un método muy práctico para aplicar,
180		para este caso o cuando el sistema es compatible determinado.
181		Bueno pues la y sería igual al determinante A sub y partido por el
182		determinante de A, es decir, ahora en el numerador nos va a quedar la

183		matriz de coeficientes pero cambiando la segunda columna, entonces
184		sería la primera columna 1, 3, 1 y en la segunda sustituimos los términos
185		independientes entonces es 0, 2t, t; y por último la tercera columna
186		5, 0, 1; si hacemos el determinante nos queda $2t+15t-10t$ pero todo eso
187		va partido por el determinante de A que vale -14, entonces nos queda 7t
188		partido por -14, entonces y vale -t partido por 2.
189		¿Este ejercicio nadie lo ha terminado verdad?
190	Es:	No.
191	Aly:	Pues este es interesante ¿eh!
192		Bueno pues ya para terminar, ponemos la z igual a el determinante de
193		1, 3, 1 [en la primera columna], 1, -1, -1 [en la segunda columna] y en la
194		tercera columna sustituimos los términos independientes 0, 2t, t; y todo
195		eso va partido por el determinante de A.
196		De esto nos queda $-t+2t+2t-3t$ y eso partido por -14, pero eso da 0
197		partido por -14 que es 0.
198		Luego la solución será la siguiente, ¿nos conviene llamar a t, λ ó 2λ ?
199	E2:	2λ .
200	Aly:	Fijaros que la x nos quedó como t partido por 2, la y como -t partido por
201		2 y la z, 0.
202		Entonces nos conviene llamar a t, 2λ .
203		Entonces la solución nos queda x igual a λ , y igual a $-\lambda$, z igual a 0 y t
204		igual a 2λ , para λ que es cualquier número real, ¿de acuerdo?
205		Bueno pues esos eran los tres apartados que faltaban de ese ejercicio.
206		Pues ahora página 108 [del libro de texto], ejercicio 1 el a y el b, son dos
207		ejercicios que dependen de un parámetro ¿lo habéis intentado?
208		¿E8 lo has intentado?
209	E8:	No.
210	Aly:	Pues mínimo hay que hacerlo [Aly se refiere a que haga el ejercicio que
211		acaba de hacer en la pizarra].
212	E8:	Lo estoy haciendo.
213		Pues a lo mucho lo estás copiando y lo que tienes que hacer es hacerlo.
214	Aly:	Cuando yo era chica mi madre siempre se ponía a coser manteles
215		grandes y yo veía, pero es muy diferente ver que hacerlo ¿me entiendes?,
216		ella los hacía para ver si yo aprendía.
217	E8:	[E8 se queda callado].
218	Aly:	Pues los ejercicios no hay que verlos, hay que hacerlos.
219		Bueno de la página 108 el ejercicio 1 que es $x+y+az=0$, $ax-y=-1$,
220		$x+4y+6z=0$, bueno empezamos, la matriz de coeficientes del sistema
221		sería 1, 1, a [en la primera fila]; a, -1, 0 [en la segunda fila] y 1, 4, 6 [en
222		la tercera fila].
223		Bueno pues vamos a estudiar el rango, rango 1 hay, y rango 2 para ver si
224		hay o no hay, como depende de un parámetro, entonces directamente nos
225		podemos ir al rango máximo, aunque con la submatriz de orden 2
226		formada por los 2 últimos elementos de la segunda y tercera fila y de la
227		segunda y tercera columna vemos que hay rango 2 ¿os fijáis? [Pues el
228		determinante de esa submatriz es distinto de 0].
229		Bueno pero es mejor estudiar de una vez si tiene rango máximo que es
230		tres, entonces el determinante de A sería menos 6 más 4a al cuadrado

231		más a menos 6a y eso es igual a 4a al cuadrado menos 5a menos 6.
232		¿Qué es lo que hago con el valor del determinante?
233		Pues como siempre, ver para qué valores ese determinante se hace 0,
234		vale.
235		Eso ya no lo hago, sólo voy a anotar lo que da, la a sale dos y menos tres
236		cuartos.
237		¿Queda claro esto?
238	E2:	Si pero no sabía si se podía reducir o no.
239	Aly:	A ver, cómo que no sabías si se podía reducir.
240	E2:	Sí pero a mí me daba menos seis octavos.
241	Aly:	Pero menos seis octavos se puede reducir a menos tres cuartos aquí
242		y en el contexto que sea.
243		Algunas veces les da miedo hacer unas cosas, pero luego a veces...
244		Bueno entonces tenemos que cuando a vale dos y menos tres cuartos, el
245		determinante vale 0, luego ¿qué tres cosas tengo que hacer?
246		Así en grande, primero estudiar qué me da si a es distinto de dos y
247		distinto de menos tres cuartos.
248		Por otro lado, otro apartado ¿cuál es? estudiar qué pasa si a es igual a dos
249		y por otro lado si a es igual a menos tres cuartos.
250		Así, a partir del rango es lo que hay que hacer.
251		¿Y por qué se hace eso?
252		Pues porque si a es distinto de dos y de menos tres cuartos entonces el
253		determinante va a ser distinto de 0, por lo tanto el rango de la matriz va a
254		ser ¿cuánto?
255	E1:	3.
256	Aly:	3, y ¿el rango de la ampliada?
257		Por mucho que le añada una columna más, va a seguir siendo lo mismo,
258		luego ¿cómo va a ser el sistema en ese caso?
259	E1:	Compatible determinado.
260	Aly:	Compatible determinado, nada más tiene solución única, vale.
261		¿Cómo se calcula esa solución única que vamos a tener? ¿Por qué
262		método?
263		Por Cramer, claro.
264		Bueno pues entonces existe una única solución y el método que nos da
265		esto es el método de Cramer.
266		Bueno pues como tenemos, entre comillas tenemos, bueno si tenemos el
267		valor del determinante de A lo que pasa es que depende de un parámetro,
268		queda como polinomio de segundo grado que es 4a al cuadrado menos
269		5a menos 6, bueno pues eso es lo que va a ir en el denominador.
270		Entonces tenemos que x va a ser igual al determinante de 0, -1, 0 [en la
271		primera columna]; 1, -1, 4 [en la segunda columna]; a, 0, 6 [en la tercera
272		columna] y todo eso va partido por el polinomio 4a al cuadrado menos
273		5a menos 6, claro en este caso la solución nos va a quedar genérica en
274		términos de a.
275		Bueno pues resolviendo el determinante nos queda -4a+6 y todo eso
276		partido por el polinomio 4a al cuadrado menos 5a menos 6.
277		Y no se puede simplificar más ni factorizar más ahí, porque el polinomio
278		del denominador solamente se anula para a igual a dos y a igual a menos

279		tres cuartos.
280		Ah, pero ¿para a igual a menos tres cuartos?, ah no, no.
281		Estaba viendo si con ese valor daba 0 en el numerador, pero no,
282		tampoco, entonces si no es 0, digamos que aunque yo factorice no se
283		puede simplificar, entonces eso ya se queda así, vale.
284		La y nos queda, arriba [en el denominador] el determinante de 1, a, 1 [en
285		la primera columna], 0, -1, 0 [en la segunda columna] y a, 0, 6 [en la
286		tercera columna] y todo ese determinante va partido por el polinomio 4a
287		al cuadrado menos 5a menos 6, de eso nos queda, del determinante da
288		a-6 y eso va partido por el polinomio 4a al cuadrado menos 5a menos 6.
289		Y la z nos queda igual al determinante de 1, a, 1 [en la primera columna];
290		1, -1, 4 [en la segunda columna] y 0, -1, 0 [en la tercera columna] y todo
291		ese determinante va partido por el polinomio 4a al cuadrado menos 5a
292		menos 6, del determinante nos queda 3 y eso va partido por el polinomio
293		4a al cuadrado menos 5a menos 6.
294		Entonces ya tenemos la solución para el caso en que a es distinto de dos
295		y de menos tres cuartos.
296		Bueno y ¿qué vamos a hacer ahora?
297		Pues vamos a estudiar qué pasa si a vale 2, el sistema que nos queda es
298		$x+y+2z=0$, $2x-y=-1$, $x+4y+6z=0$, vale, ahí tenemos un caso particular del
299		sistema.
300	E2:	Podemos estudiar el rango directamente de la ampliada.
301	Aly:	Claro, podemos estudiar el rango directamente de la ampliada,
302		fijaros una cosa que ya tenemos aquí, este sistema que tenemos aquí ya
303		es un caso concreto [para a igual a 2] del sistema genérico [con
304		parámetro a], entonces, ¿podemos ampliar el rango de la matriz de
305		coeficientes?
306	E2:	No.
307	Aly:	Ya lo tenemos hecho, yo he hecho este determinante y los dos únicos
308		valores que hacen ese determinante igual a 0 son a igual a dos y a igual a
309		menos tres cuartos, luego, si estamos haciendo el caso para a igual a dos,
310		pues ya lo tengo, o sea que no hay que volver a hacerlo, ya está hecho,
311		¿esto lo entendéis todos? ¿E1?
312	E1:	No.
313	Aly:	No, pues bueno vamos a ver, si hacemos el determinante de la matriz A
314		nos queda que es igual a 4a al cuadrado menos 5a menos 6, ¿esto cuándo
315		se anula?, ¿cuándo da 0 ese determinante? ¿para qué valores?
316	E2:	Para a igual a dos y para a igual a menos tres cuartos.
317	Aly:	Si para a igual a dos y para a igual a menos tres cuartos, ¿qué pasa si a es
318		igual a dos?
319		Pues si tú sustituyes ese valor en lo que te dio el determinante, el
320		determinante es 0, entonces eso es lo que he dicho, que ese determinante
321		ya lo tenemos hecho ¿no?
322		Bueno si eso ya está hecho, entonces ¿cuál va a ser el rango de esa
323		matriz?
324		Pues va a ser 2, 2 si es seguro que es porque tenemos aquí que el
325		determinante de la submatriz de orden 2 [formada por los dos primeros
326		elementos de las dos primeras filas y columnas] es distinto de 0, da -3,

327		bueno pues el rango de A sería 2, lo que si hay que hacer es el rango de
328		la matriz ampliada.
329		Escribimos la matriz ampliada sería 1, 1, 2, 0 [en la primera fila];
330		2, -1, 0, -1 [en la segunda fila]; 1, 4, 6, 0 [en la tercera fila], vale.
331		Entonces rango 2 de la matriz ampliada sí que tenemos [Aly señala el
332		mismo menor de orden 2 que garantizo el rango 2 de la matriz A], ¿qué
333		hacemos para ver si la matriz ampliada tiene rango 3?
334	E1:	Pues sustituimos la...
335	Aly:	La última fila y la última columna y veo cuánto vale su determinante,
336		claro ya no hacemos el determinante con las primeras tres filas y tres
337		columnas porque ese ya está hecho, tenemos que el determinante de A es
338		0 con a igual a 2,
339		por lo tanto el determinante que nos queda por hacer ahí con la matriz
340		ampliada sería este 1, 1, 0 [en la primera fila]; 2, -1, -1 [segunda fila];
341		1, 4, 0 [tercera fila] y eso nos da $-1+4=3$ el cual es distinto de 0,
342		por lo tanto, ¿qué rango sale en la matriz ampliada?
343		Sale rango 3, es fácil de hacer ese determinante por la última columna.
344		Si el rango de A es 2 y el rango de la ampliada es 3, ¿cómo es el sistema?
345	E1:	Incompatible.
346	Aly:	Entonces no hay que buscar ninguna solución, porque no la hay, vale.
347		Último caso que hay que hacer, el de numerito fraccionario ¿no?,
348		¿qué ocurre si a es igual a menos tres cuartos?
349		Bueno si a es igual a menos tres cuartos, vamos a empezar a hacer lo
350		mismo, vamos a empezar con la matriz ampliada, bueno la matriz
351		ampliada ¿quién sería en este caso?
352		Sería 1, 1, $-3/4$, 0 [en la primera fila]; luego tenemos $-3/4$, -1, 0, -1 [en la
353		segunda fila]; y en la última fila 1, 4, 6, 0.
354		Bueno, ¿y qué pasa con esa matriz ampliada?
355		Pues lo mismo de antes, hasta aquí esto es la matriz A [Aly señala en la
356		matriz ampliada la primera submatriz de orden 3].
357		¿Qué pasa con esta matriz? ¿Es necesario que hagamos otra vez el
358		determinante de A?
359	Es:	No.
360	Aly:	No, porque ya está hecho en un principio, ya hemos visto que para ese
361		valor concreto $[-3/4]$, el determinante vale 0,
362		lo que sí conviene garantizar es que sí tenemos el rango 2 y el rango 2 sí
363		tenemos, tomando por ejemplo la submatriz de orden 2 [Aly señala la
364		submatriz de orden 2 formada por los dos elementos de en medio, de la
365		segunda y tercera filas y columnas].
366		Vamos a ver el rango de la matriz ampliada, ¿qué se necesita para ver el
367		rango de la matriz ampliada?
368		Si partimos de esta submatriz de orden 2 [La que Aly señaló
369		anteriormente], aunque fijaros que también podemos tomar la primera
370		submatiz de orden 2 [la que está formada por los primeros dos elementos
371		de las primeras dos filas y columnas],
372		bueno vamos a trabajar con la que ya habíamos señalado, entonces ¿con
373		qué la ampliamos?
374	E1:	Pues ampliamos con la primera fila y la última columna, entonces ¿qué

375		determinante es el que nos queda?
376	Aly:	Pues nos queda el determinante de 1, $-3/4$, 0 [en la primera fila];
377		-1, 0, -1 [en la segunda fila]; 4, 6, 0 [en la tercera fila] y vemos el valor
378		de ese determinante,
379		si me da que va a tener rango 3 pues sería incompatible pues el rango de
380		A es 2, que no, pues entonces hay que resolver.
381		Bueno al hacer ese determinante nos da 9, si queda distinto de 0
382		entonces ¿qué rango tiene la matriz ampliada?
383	E2:	3.
384	Aly:	Rango 3, y es lo más fácil para terminar esto ¿por qué? porque no
385		coincide con el rango de la matriz de coeficientes, es decir, el rango de A
386		es igual a 2 y eso es distinto del rango de la ampliada que es 3, por lo
387		tanto el sistema es incompatible y entonces no hay solución.
388	E2:	Sino hubiera ocurrido eso, ¿se hubiera resuelto por otro lado?
389	Aly:	Sí.
390	E4:	Yo lo hice con otro menor de orden 2 y también me da distinto de 0
391		[el determinante de orden 3 ya ampliado].
392	Aly:	Sí, de hecho yo lo hice con otro menor de orden 2 y el determinante
393		daba 3, tomando el primer menor de orden 2 [formado por los dos
394		primeros elementos de la primera y segunda filas y columnas] y
395		ampliando con la última fila y la última columna y da 3, pero bueno para
396		que veáis que se puede tomar otro menor, el que queráis, lo importante es
397		ver el rango.
398		Nos falta por hacer el apartado b de este ejercicio y haced el de una
399		ecuación matricial del ejercicio 116, hacerlo porque una cosa es verlo y
400		así no se aprende, hay que hacerlo porque como no se ponga uno a hacer
401		ejercicios y equivocarse mucho, no se aprende.

E1 significa estudiante 1, E2 significa estudiante 2 y así sucesivamente hasta E12. Es significa varios estudiantes.

ANEXO III. Cuestionarios

ANEXO III.1. Preguntas de los cuestionarios

Cuestionario 1



Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Nombre: _____

Instituto donde labora: _____

Asignatura(s) que imparte: _____

Asignaturas que ha impartido durante su trayecto profesional: _____

Preparación Profesional: _____

Máximo grado de estudios (especificar el área): _____

Antigüedad de impartir asignaturas de matemáticas: _____

Cursos de actualización didáctica, matemática o sobre tecnología en los que ha participado los últimos dos años: _____

Algún otro dato que desee incluir y que considere relevante en su formación profesional: _____

Gracias.



Cuestionario 2 (para Emi).

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

En este nuevo tema (**Programación Lineal**):

1. ¿Qué concepciones matemáticas erróneas pueden tener los alumnos?
2. ¿Cómo afrontar en la enseñanza de ese contenido, esas concepciones matemáticas erróneas?
3. ¿Qué otras dificultades de aprendizaje pueden presentar los alumnos en este contenido en particular?
4. ¿Cómo evaluará este contenido?
5. ¿Qué importancia curricular tiene ese contenido?
6. ¿Cómo motivaría a sus alumnos a aprender este contenido?

Gracias.



Cuestionario 2 (para Aly).

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

En este nuevo tema (**Resolución de sistemas de ecuaciones mediante determinantes.**

Regla de Cramer):

1. ¿Qué concepciones matemáticas erróneas pueden tener los alumnos al aprender este tema?
2. ¿Cómo afrontar en la enseñanza de este contenido, esas concepciones matemáticas erróneas?
3. ¿Qué otras dificultades de aprendizaje pueden presentar los alumnos en este contenido en particular?
4. ¿Cómo evaluará este contenido?
5. ¿Qué importancia curricular tiene ese contenido?
6. ¿Cómo motivaría a sus alumnos a aprender este contenido?

Gracias.



Cuestionario 3.

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Con base en su práctica profesional podría contestar por favor lo más explícitamente posible las siguientes cuestiones respecto a:

Libro de texto:

1. ¿Cuál libro de texto utiliza para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
2. ¿Por qué utiliza ese libro?
3. ¿Cómo se sabe si un libro es bueno para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
4. ¿Qué ventajas y/o desventajas tiene utilizar o seguir fielmente un libro de texto para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
5. ¿Cómo cree que afecte el libro de texto en el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué afecta de esa manera?

Currículum:

6. ¿Por qué debe estudiar Matemáticas un alumno de bachillerato?
7. ¿Por qué debe estudiar este contenido matemático un alumno de segundo de bachillerato?
8. ¿En el currículum vienen establecidos algunos criterios para evaluar al alumno?
9. ¿Sigue al pie de la letra el currículum? ¿por qué?
10. ¿Qué opina del currículum actual de matemáticas de bachillerato en general?
11. ¿Qué opina del currículum actual de matemáticas de segundo de bachillerato, es decir, del currículum donde aparece este contenido? ¿Debe cambiar? Si/No ¿cada cuánto o en base a qué?
12. ¿Existe diferencia entre el currículum de Matemáticas para bachillerato de España y la comunidad andaluza o es el mismo?
13. ¿Cómo identificar o saber cuáles son los conceptos fundamentales o principales en el currículum de esta asignatura?

Gracias.



Cuestionario 4.

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Con base en su práctica profesional podría contestar por favor lo **más explícitamente** posible las siguientes cuestiones:

1. **¿Qué debe saber o dominar un profesor para enseñar matemáticas?**
2. **¿Qué debe saber o dominar un profesor para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)? ¿qué prioridad les da y por qué?**

Gracias.



Cuestionario 5 (para Emi)

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Por favor podría comentarnos acerca de su impresión de los resultados del examen de bloque, es decir, ¿A qué cree que se deben esos resultados? ¿Cree que valió la pena dedicar más tiempo del planificado inicialmente a programación lineal? Si/No ¿por qué?

Podría compartirnos **ampliamente** todas sus impresiones al respecto, basadas en su experiencia profesional, y en particular, centradas en los resultados de los exámenes de este bloque a estos alumnos.



Cuestionario 6

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Con base en su práctica profesional podría contestar por favor lo más explícitamente posible las siguientes cuestiones respecto a:

Motivación profesional:

1. ¿Por qué se dedica a enseñar matemáticas?
2. ¿Qué le motiva a enseñar matemáticas en bachillerato?
3. ¿Hay alguna diferencia entre su modo de impartir clases hoy día y hace unos años? Si existe alguna diferencia, ¿en qué consiste?, ¿por qué existe tal diferencia?, ¿qué la ha motivado?

Aspectos generales:

1. ¿Dónde o cómo aprendió el contenido matemático que enseña en el primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato?
2. ¿Recibió alguna formación pedagógica/didáctica para enseñar matemáticas? ¿dónde o cómo aprendió CÓMO enseñar ese contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
3. ¿Cree que enseñar matemáticas es más fácil que enseñar otras materias? Si/No ¿por qué, a qué cree que se debe?



Cuestionario 5 (para Aly)

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Por favor podría comentarnos acerca de su impresión de los resultados del examen de bloque, es decir, ¿A qué cree que se deben esos resultados? ¿Cree que valió la pena dedicar ese tiempo para ese bloque? ¿Qué pasaría si hubiese dedicado más tiempo? ¿Cree que obtendría los mismos resultados? Si/No ¿por qué?

Podría compartirnos **ampliamente** todas sus impresiones al respecto, basadas en su experiencia profesional, y en particular, centradas en los resultados de los exámenes de este bloque a estos alumnos.

Gracias.

ANEXO III.2. Cuestionarios contestados

ANEXO III.2.1. Respuestas de Emi



Universidad
de Huelva

Cuestionario 1.

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Nombre: _____

Instituto donde labora: _____

Asignatura(s) que imparte: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, Estadística

Asignaturas que ha impartido durante su trayecto profesional: Matemáticas (Bachillerato, Secundaria), Informática, ámbito científico-tecnológico

Preparación Profesional: Licenciatura en Matemáticas, Cursos de doctorado, cursos del C.E.P. (didáctica, nuevas tecnologías, diseños curriculares, ...), estudios de lenguas extranjeras.

(Programa de Diversificación 4º ESO)

Máximo grado de estudios (especificar el área): Licenciatura en Ciencias Matemáticas
2 cursos de doctorado (análisis Matemática. 34 créditos)

Antigüedad de impartir asignaturas de matemáticas: 21 años

Cursos de actualización didáctica, matemática o sobre tecnología en los que ha participado los últimos dos

años: en los dos últimos años no he participado en ningún curso de ese tipo (con anterioridad sí), mis últimos estudios se han centrado en los idiomas.

Algún otro dato que desee incluir y que considere relevante en su formación profesional: _____

Gracias.



Universidad
de Huelva

Cuestionario 2.

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

En este nuevo tema (**Programación Lineal**):

1. ¿Qué concepciones matemáticas erróneas pueden tener los alumnos?

Más que concepciones erróneas yo diría que algunos alumnos tendrán dificultades en la resolución de los problemas, bien porque no sean capaces de plantear correctamente el problema, bien porque cometan fallos a la →

2. ¿Cómo afrontar en la enseñanza de ese contenido, esas concepciones matemáticas erróneas? Para vencer las dificultades mencionadas habrá que trabajar a fondo, tanto en el aula como en casa. Aparte de resolver los problemas propuestos en el libro de texto, los alumnos →

3. ¿Qué otras dificultades de aprendizaje pueden presentar los alumnos en este contenido en particular?

Pueden tener dificultades con aquellos problemas en los que el enunciado no mencione explícitamente las dos variables →

4. ¿Cómo evaluará este contenido?

A través de la realización de una prueba escrita en la que los alumnos deberán resolver un problema de programación lineal y a través del examen de bloque de Álgebra →

5. ¿Qué importancia curricular tiene ese contenido?

Creo que tiene gran importancia puesto que el alumno se enfrenta a la resolución de "problemas reales" en los que tiene que interpretar datos, analizar una situación, →

6. ¿Cómo motivaría a sus alumnos a aprender este contenido?

Sinceramente no veo que sepa cómo motivarlos, lo que intento siempre es transmitirles el gusto por las matemáticas, por el trabajo y el esfuerzo personal. Intento ayudarles →

Gracias.

- ① hora de resolver el sistema de ecuaciones (enores a la hora de despejar las incógnitas, o a la hora de representar las rectas en el plano o en el momento de determinar la región del plano correspondiente a la inequación) o de determinar los vértices del polígono que determina la región factible, ...) o bien a la hora de trazar las rectas de nivel y encontrar la solución óptima.
- ② alumnos recibirán una hoja extra de trabajo en la que se les propondrá la resolución de problemas de programación lineal de diversa índole. Se originarán el mayor número posible de problemas en la pizarra y se hará hincapié en cómo resolver el problema "de forma segura y razonada".
- ③ a definir para resolver el problema.
- ④ (matrices, sistemas de ecuaciones, programación lineal) y si es posible (al final del trimestre), a través de la realización de ciertas actividades en las que usarán como herramienta de trabajo el programa Descartes (aún no he tenido tiempo para prepararlas).
- ⑤ definir variables, funciones y aplicar/elejir entre varios métodos de resolución
- ⑥ en todo lo que pueda y nunca les desanimo. Cuando ellos comprueban que tienen éxito, se motivan ellos solos.



**Universidad
de Huelva**

Cuestionario 3.

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Con base en su práctica profesional podría contestar por favor lo más explícitamente posible las siguientes cuestiones respecto a:

Libro de texto:

1. ¿Cuál libro de texto utiliza para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II
Segundo curso de Bachillerato
Editorial: Guadiel-grupo Edebé
2. ¿Por qué utiliza ese libro?
Porque es el libro que se había elegido en el Departamento de Matemáticas. Personalmente yo no participé en la elección de este libro, pues hace unos años solamente impartía las matemáticas del bachillerato de ciencias, el criterio de una profesora que desde siempre impartía estas matemáticas fue determinante para su elección.
3. ¿Cómo se sabe si un libro es bueno para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
Para mi un libro es bueno si aborda todos los contenidos matemáticos con claridad (lenguaje matemático claro y preciso), si los estructura en un orden lógico, si tiene buenos ejemplos de los contenidos matemáticos y si tiene una buena relación de ejercicios propuestos para aplicar dichos contenidos (los ejercicios son variados en cuanto al nivel de dificultad y en cuanto al tipo).
4. ¿Qué ventajas y/o desventajas tiene utilizar o seguir fielmente un libro de texto para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
En mi caso, no puedo decir que siga fielmente ningún libro de texto, me gusta dar los contenidos matemáticos a mi manera, pero es cómodo tener un libro de texto a mano para poner algunos ejemplos y para mandar tareas para casa. Además el libro de texto sirve al alumno como guía y complemento de los apuntes que toma en clase.

5. ¿Cómo cree que afecte el libro de texto en el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué afecta de esa manera?

Como he contestado en la pregunta anterior, el libro es un complemento, si un alumno no ha asistido a clase, no estará tan perdido, pues puede seguir los contenidos a través del libro, e incluso, para un alumno que haya asistido a clase, puede consultarlo para reforzar sus ideas o bien para aclararlas. El tiempo de clase es limitado y se sigue un ritmo que a veces es rápido para ciertos alumnos, que necesitan más tiempo para asimilar los contenidos, con los apuntes y con un libro pueden con más calma reflexionar sobre dichos contenidos.

Curriculum:

6. ¿Por qué debe estudiar Matemáticas un alumno de bachillerato?

Un alumno del bachillerato de Ciencias Sociales debe estudiar matemáticas para tener una formación más completa, además, cuando curse estudios universitarios necesitará una base matemática adecuada para afrontar las asignaturas de matemáticas de la carrera que estudie.

7. ¿Por qué debe estudiar este contenido matemático un alumno de segundo de bachillerato?

El contenido que se estudia en el primer trimestre (matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, programación lineal bidimensional) tiene una gran aplicación en el planteamiento y la resolución de problemas de las ciencias sociales.

8. ¿En el currículum vienen establecidos algunos criterios para evaluar al alumno?

En el currículum de las asignatura se establecen unas enseñanzas mínimas en las que se dan los objetivos, los contenidos y los criterios de evaluación.

9. ¿Sigue al pie de la letra el currículum? ¿por qué?

Sigo el currículum porque creo que se debe dar lo más completo posible.

10. ¿Qué opina del currículum actual de matemáticas de bachillerato en general?

El currículum actual de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales me parece correcto. Los contenidos de 1º y 2º de Bachillerato se estructuran de una forma lógica y se dan bloques de contenidos adecuados en cuanto a su futura aplicación a las Ciencias Sociales: Álgebra, Análisis, Probabilidad y Estadística.

11. ¿Qué opina del currículum actual de matemáticas de segundo de bachillerato, es decir, del currículum donde aparece este contenido? ¿Debe cambiar? Si/No ¿cada cuándo o en base a qué?

Como ya he dicho antes me parece correcto, aunque, como no soy especialista en matemáticas aplicadas seguramente mi visión no sea tan crítica como la de un especialista.

12. ¿Existe diferencia entre el currículum de Matemáticas para bachillerato de España y la comunidad andaluza o es el mismo?

Sinceramente no he estudiado en profundidad las diferencias, creo que básicamente es el mismo.

13. ¿Cómo identificar o saber cuáles son los conceptos fundamentales o principales en el currículum de esta asignatura?

Creo que cada bloque tiene sus conceptos fundamentales, a partir de los cuales se desarrollan los contenidos del mismo. Sin embargo, como en esta asignatura no se establece ninguna justificación teórica de los procedimientos que se siguen, no se hace hincapié en dichos conceptos, se utilizan como simples herramientas.

Gracias.



**Universidad
de Huelva**

Cuestionario 4

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Con base en su práctica profesional podría contestar por favor lo **más explícitamente** posible las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué debe saber o dominar un profesor para enseñar matemáticas?

Creo que un profesor de matemáticas debe haber estudiado matemáticas (me refiero a la carrera de matemáticas), tener una visión amplia de lo que son las matemáticas.

2. ¿Qué debe saber o dominar un profesor para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)? ¿qué prioridad les da y por qué?

En cuanto a los contenidos debe dominar el Álgebra de matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y la Programación lineal. En cuanto a los procedimientos debe conocer los distintos métodos de cálculo que se utilizan.

Gracias.



Universidad
de Huelva

Cuestionario 5

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Por favor podría comentarnos acerca de su impresión de los resultados del examen de bloque, es decir, ¿A qué cree que se deben esos resultados? ¿Cree que valió la pena dedicar más tiempo del planificado inicialmente a programación lineal? Si/No ¿por qué?

Podría compartírnos **ampliamente** todas sus impresiones al respecto, basadas en su experiencia profesional, y en particular, centradas en los resultados de los exámenes de este bloque a estos alumnos.

Los resultados del primer examen de bloque (10/12/08) no fueron buenos, solamente un alumno de los quince matriculados aprobó el examen, cosa que ya esperaba. Por mi experiencia en este tipo de exámenes sé que los alumnos se ven superados por tener que estudiar una materia tan amplia (para ellos), con una gran variedad de ejercicios y de dificultades en los mismos. Trabajan en clase (unos más que otros), pero en casa hacen lo justo, como mucho van haciendo algunas de las tareas que les propongo para casa, pero no se les ocurre pensar que eso es insuficiente, que para afianzar los contenidos y para desarrollar las destrezas matemáticas tienen que trabajar mucho más. Por eso me gusta hacer un examen de recuperación de bloque antes de que acabe la evaluación, los alumnos suelen reaccionar ante el primer fracaso, adquieren la conciencia de que lo que han hecho hasta el momento no es suficiente. Los resultados del examen de recuperación de bloque (17/12/08) fueron bastante mejores, de los doce alumnos presentados (hubo tres que no se presentaron) aprobaron el examen diez. Después en el segundo examen de recuperación de bloque (04/02/09) aprobó una de las alumnas que no se había presentado al anterior, lo que considero sumamente positivo, pues es bastante frecuente que algunos alumnos abandonen la asignatura porque piensan que no pueden con ella y creen que no la aprobarán. En cuanto a la asimilación de los métodos desarrollados en el bloque, los alumnos no han tenido dificultad en usarlos, aprenden bien cuáles son los "pasos" de cada método y en qué orden deben aplicarlos, el problema estriba en las operaciones básicas (muchos de ellos se equivocan en sumas con números enteros, por ejemplo) y en la lectura de los enunciados de los problemas y

su posterior traducción al lenguaje algebraico. } Por ello no creo que haya sido tiempo perdido todo el tiempo de más que hemos dedicado a la programación lineal. [Por otra parte estoy contenta con el cambio de actitud de los alumnos, creo que a lo largo del curso han ido cambiando su percepción de la materia, ya no la ven como algo imposible para ellos, los encuentro más receptivos que al principio y creo que no abandonarán el curso (problema relativamente frecuente entre los alumnos de matemáticas de bachillerato). En el grupo de quince alumnos que tengo una de las alumnas que sí tenía aprobado el examen de bloque ha abandonado los estudios, tuvo varios problemas de salud, faltaba por ello a clase y al final no se ha vuelto a incorporar, y una de las alumnas que en teoría no debía tener dificultades este año, porque siempre ha aprobado las matemáticas, no ha aprobado el primer examen de recuperación de bloque y no se ha presentado al segundo, además ha dejado de venir a clase. Con los trece alumnos que quedan en el grupo creo que hay tiempo para que mejoren en la asimilación de contenidos y para que maduren "matemáticamente", nunca me desespero si mi trabajo no dá sus frutos a corto plazo, creo que hay que valorar los resultados en un plazo de tiempo más largo.

Gracias.



Universidad
de Huelva

Cuestionario 6

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Con base en su práctica profesional podría contestar por favor lo más explícitamente posible las siguientes cuestiones respecto a:

Motivación profesional:

1. ¿Por qué se dedica a enseñar matemáticas?

Desde muy pequeña me ha gustado aprender, en el colegio todo me gustaba, todo me parecía fácil, era muy rápida haciendo las cosas, y enseguida me ponía a ayudar a mis compañeras de clase, mis profesores se dieron cuenta y me iban rotando las compañeras de pupitre (desde los siete años hasta los doce), siempre estaba con alguien que necesitaba alguna ayuda, después (desde los doce hasta los dieciocho años) me dejaban participar activamente en la clase de matemáticas (me daban temas para que me los preparara por mi cuenta y después los explicara) y tenía grupos de compañeras a mi cargo, tanto dentro de la clase como fuera (daba clase de matemáticas todos los días durante una hora), me gustaba explicar las matemáticas y me ponía muy contenta porque siempre conseguía que se enterasen de todo y sus notas mejoraban muchísimo. Nunca quise recibir dinero por ello, pero sí acepté regalos: libros de matemáticas, de historia de las matemáticas, de matemáticas modernas,... Cuando llegó el momento de decidir qué estudiar en la universidad, todos mis profesores me aconsejaron que estudiara matemáticas, yo tenía mis dudas, me atraían tantas Facultades que fue duro decidir. Fueron cinco años estupendos. Cuando terminé la licenciatura de Ciencias Matemáticas tampoco sabía qué hacer con mi vida. Un profesor del Departamento de Álgebra, me propuso que me quedara trabajando con él sobre unos temas de Lógica Matemática, pero yo pensaba que no era lo suficientemente inteligente como para trabajar en la universidad. Así que no acepté. Antes de que tuviera tiempo para pensar qué iba a hacer, comencé a recibir ofertas de trabajo para dar clases de matemáticas en centros de enseñanza privados (de Cataluña, Canarias, ...). Siempre decía que no, hasta que me llamaron de la Delegación de Educación de Navarra (una amiga mía se había encargado de enviar nuestra documentación a varias delegaciones). Fue mi

madre la que me dijo en ese momento que ya estaba bien de decir que no. Así comencé mi primer curso académico como profesora de matemáticas en un centro de bachillerato. En el verano siguiente me presenté a las oposiciones para ser Profesora Agregada de Bachillerato en la especialidad de Matemáticas (fueron unos amigos los que me convencieron para que probara, nunca las preparé). Aprobé y me destinaron al centro donde actualmente trabajo, ya desde hace veinte años. A lo largo de estos años cuando he reflexionado acerca de porqué me dedico a la enseñanza, siempre he llegado a la misma conclusión, me he dejado llevar, nunca tuve una idea clara sobre lo que quería hacer y a qué quería dedicarme, en realidad nunca pensé "quiero ser profesora de matemáticas", sin embargo, he disfrutado y sigo disfrutando muchísimo con mi profesión.

2. ¿Qué le motiva a enseñar matemáticas en bachillerato?

Me gusta dar clase a los jóvenes de entre catorce y dieciocho años, no son ni muy pequeños ni muy mayores. Me gusta prepararlos para la universidad, ayudarles a cruzar el puente entre las matemáticas elementales que ellos conocen y las matemáticas superiores que tendrán que afrontar cuando lleguen a la universidad.

3. ¿Hay alguna diferencia entre su modo de impartir clases hoy día y hace unos años? Si existe alguna diferencia, ¿en qué consiste?, ¿por qué existe tal diferencia?, ¿qué la ha motivado?

Sí ha habido muchos cambios en el modo de impartir mis clases, cuando empecé fundamentaba todos los contenidos teóricos, daba las definiciones matemáticas, demostraba los teoremas, los ejercicios que proponía eran diferentes. El cambio en el sistema educativo ha propiciado todo esto. Ahora el bachillerato sólo son dos años, no cuatro como antes. Los alumnos comienzan el bachillerato con dos años de "retraso", después de haber pasado por una enseñanza secundaria, que es obligatoria, y donde conviven en la misma clase alumnos que quieren estudiar y alumnos que no quieren y no dejan estudiar. Ya no hay tiempo para ver las matemáticas como antes, hay que ir a lo rápido, dando las matemáticas como si fuera una clase de cocina, con "recetas" para resolver los problemas.

Aspectos generales:

1. ¿Dónde o cómo aprendió el contenido matemático que enseña en el primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato?

La primera vez que estudié este contenido (Álgebra: matrices, determinantes y sistemas) fue cuando cursaba la asignatura de Matemáticas de C.O.U de Ciencias (curso de orientación universitaria) y después durante la carrera estudié durante cuatro años Álgebra (eran asignaturas anuales de cinco o seis horas semanales, se llamaban Álgebra I (obligatoria en 1º de carrera), Álgebra II (obligatoria en 2º de carrera), Álgebra III y Álgebra IV(en 3º y 4º de carrera, ya no eran obligatorias, la elegían los alumnos que querían estudiar matemática pura). Nunca hasta este año había estudiado nada sobre Programación Lineal (en el COU de ciencias no se estudiaba, y en la carrera se abordaba en una asignatura de 4º de la rama de matemáticas aplicadas, que yo no elegí). Así que fui a lo fácil, me leí todos los temas de programación lineal bidimensional de los diferentes libros de texto que cogí del Departamento de Matemáticas

2. ¿Recibió alguna formación pedagógica/didáctica para enseñar matemáticas? ¿dónde o cómo aprendió CÓMO enseñar ese contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?

Nunca recibí formación pedagógica para enseñar matemáticas. Cuando terminé la carrera (en la que no había ninguna asignatura de didáctica de las matemáticas, aunque sí de historia de las matemáticas, que era voluntaria y se daba fuera del currículum) me matriculé en primero del C.A.P. de Matemáticas (Curso de Adaptación Pedagógica para las Matemáticas, en Zaragoza eran dos años de CAP) pero como estuve trabajando en Navarra no podía asistir a las clases, tenía que hacer el curso en la modalidad de no presencial (hacer trabajos y presentarme a unos exámenes) y me dijeron que no necesitaba hacer el CAP para presentarme a las oposiciones, puesto que me bastaba con ejercer la docencia de matemáticas durante un periodo mínimo de seis meses, así que no lo hice. (Tengo que decir que además unos amigos me contaron que el profesor encargado de evaluar la asignatura de pedagogía del CAP en la universidad de Zaragoza “odiaba” a los matemáticos, según él, eran la escoria de la enseñanza, lo que me predispuso a no intentarlo, mi opinión era la contraria, yo siempre consideré que mis profesores de matemáticas, a lo largo de toda mi vida, eran excelentes profesores). Curiosamente, he sido tutora de prácticas del CAP de Matemáticas de la Universidad de Huelva durante muchos años, he recibido a los alumnos del CAP en mis clases, hemos tratado cómo abordar las enseñanzas de las matemáticas, les he dado una propuesta de trabajo y he supervisado sus prácticas.

3. ¿Cree que enseñar matemáticas es más fácil que enseñar otras materias? Si/No ¿por qué, a qué cree que se debe?

Para mí me resulta más fácil, es a lo que estoy acostumbrada. Aunque no me ha importado en algunos momentos de mi vida profesional impartir otras materias: dibujo, economía, informática y ámbito científico-tecnológico. En estos casos los resultados (medidos en términos de aprobados) han sido bastante satisfactorios, incluso a veces más que en matemáticas. No creo que enseñar matemáticas sea ni más fácil ni más difícil que enseñar otras materias, si el profesor domina la materia, sabe enseñarla y sabe llegar al alumno, es lo mismo enseñar una cosa que otra.

ANEXO III.2.2. Respuestas de Aly



Universidad
de Huelva

Cuestionario 1.

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional del Profesor, en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Nombre: _____

Instituto donde labora: _____

Asignatura(s) que imparte: Matemáticas (1º ESO, 3º ESO, 2º ESO, 2º Bachillerato)

Asignaturas que ha impartido durante su trayecto profesional: Informática Aplicada, Estadística, Matemáticas.

Preparación Profesional: - Licenciatura Matemáticas.

- CAP.

- 1er ciclo inglés (Escuela Oficial Idiomas).

Máximo grado de estudios (especificar el área): Licenciatura Matemáticas.

Antigüedad de impartir asignaturas de matemáticas: 13 años.

Cursos de actualización didáctica, matemática o sobre tecnología en los que ha participado los últimos dos años: - Curso sobre dinamización en el aula (U+U)

Algún otro dato que desee incluir y que considere relevante en su formación profesional: Actualmente, me encuentro impartiendo las

Matemáticas de 1º ESO dentro del Proyecto Bilingüe del centro, lo cual requiere preparación y formación continua.

Gracias.



Universidad
de Huelva

Cuestionario 2.

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

En este nuevo tema (Resolución de sistemas de ecuaciones mediante determinantes.

Regla de Cramer):

1. ¿Qué concepciones matemáticas erróneas pueden tener los alumnos al aprender este tema?

* Clasificación de los sistemas según n.º ecuaciones y n.º incógnitas (p.ej. no siempre un sistema de 3 ec. con 3 incógnitas tiene solución).

* Sistemas con infinitas soluciones

2. ¿Cómo afrontar en la enseñanza de este contenido, esas concepciones matemáticas erróneas?

Ampliando las miras: hay multitud de sistemas y requieren para su clasificación un método. A priori es difícil saber si tienen o no tienen solución, y cuántas.

3. ¿Qué otras dificultades de aprendizaje pueden presentar los alumnos en este contenido en particular?

Operaciones algebraicas (en los casos en que los sistemas dependen de algún parámetro): operaciones con polinomios, factorización de éstos, resolución de ~~las~~ ecuaciones de grado 2, 3.

4. ¿Cómo evaluará este contenido?

Mediante un examen de bloque (que abarca todo el bloque de Álgebra). En total son 4 temas muy relacionados entre sí. Más adelante habrá una recuperación del mismo contenido.

5. ¿Qué importancia curricular tiene ese contenido?

Enlaza perfectamente con los temas anteriores (Álgebra) y con los siguientes (Geometría). Será útil en la parte geométrica.

6. ¿Cómo motivaría a sus alumnos a aprender este contenido?

Tiene especial importancia "imaginar" lo que ocurre geométricamente a partir de cada sistema de ecuaciones. Nos sirve para interpretar la realidad (posiciones relativas de planos en el espacio).

Gracias.



Universidad
de Huelva

Cuestionario 3.

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Con base en su práctica profesional podría contestar por favor lo más explícitamente posible las siguientes cuestiones respecto a:

Libro de texto:

1. ¿Cuál libro de texto utiliza para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)? *Matemáticas II (Anaya)*
2. ¿Por qué utiliza ese libro? *Es muy completo, entona y sobre todo en ejercicios.*
3. ¿Cómo se sabe si un libro es bueno para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)? $\longrightarrow$
4. ¿Qué ventajas y/o desventajas tiene utilizar o seguir fielmente un libro de texto para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)? $\longrightarrow$
5. ¿Cómo cree que afecte el libro de texto en el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué afecta de esa manera?

Currículum:

6. ¿Por qué debe estudiar Matemáticas un alumno de bachillerato?
7. ¿Por qué debe estudiar este contenido matemático un alumno de segundo de bachillerato?
8. ¿En el currículum vienen establecidos algunos criterios para evaluar al alumno?
9. ¿Sigue al pie de la letra el currículum? ¿por qué?
10. ¿Qué opina del currículum actual de matemáticas de bachillerato en general?
11. ¿Qué opina del currículum actual de matemáticas de segundo de bachillerato, es decir, del currículum donde aparece este contenido? ¿Debe cambiar? Si/No ¿cada cuánto o en base a qué?
12. ¿Existe diferencia entre el currículum de Matemáticas para bachillerato de España y la comunidad andaluza o es el mismo?
13. ¿Cómo identificar o saber cuáles son los conceptos fundamentales o principales en el currículum de esta asignatura?

Gracias.

3. Primero lo valoramos en el Departamento. A nosotros lo que más nos interesa es que traiga muy claros los contenidos teóricos y gran cantidad y variedad de ejercicios, y éste lo cumple.

4. A mí me gusta tener un libro de texto de referencia porque así ~~los~~ ^{el} alumnado tiene una guía en casa para seguir el temario y para no perderse. Además tienen ahí todos los ejercicios y no hay que estar constantemente aportándoles fotocopias, que luego ellos los desordenan bastantes.

5. Yo no creo que afecte especialmente. Todos más o menos traen la misma estructura y contenidos.

6. Para consolidar su formación, y porque en secundaria obligatoria, desgraciadamente no se puede profundizar lo suficiente.

7. Creo que no todos los alumnos de Bachillerato deben estudiar este contenido. Para eso hay una optatividad según los gustos de cada uno.

8. No. Aunque en este curso nos guiamos un poco por los contenidos en selectividad y la "importancia" que se le da a cada parte.

9. Creo que bastante. (aunque siempre añadiendo algunas cosas y quitando otras). Para dar más continuidad y orden a la materia.

10. Que los alumnos de BS no deberían dar tanta Matemática, y quizás sí más estadística, y los alumnos del Bachillerato Científico y Tecnológico deberían cursar más asignaturas de Matemáticas, o al menos, que ésta fuese obligatoria para los alumnos de Ciencias de 2º curso, y con más horas (o un Bachillerato más largo). Y los del BCT no deberían tener tantas

11. Se debería ampliar más algunas temas o tener más tiempo para profundizar más en los temas actuales. Debería cambiar para ampliarse.

12. Sinceramente, no lo sé.

13. En cada bloque hay contenidos fundamentales que estructuran la materia.

392
asignaturas
de letras.

Respuesta al cuestionario 4

1. ¿Qué debe saber o dominar un profesor para enseñar matemáticas?

En mi opinión lo más importante que debe dominar un profesor de matemáticas es la materia que tiene que exponer.

En segundo lugar, tiene que saber exponerla con claridad y precisión, sobre todo los contenidos teóricos. Seleccionar bien los ejercicios y la manera de exponerlos en la clase es muy importante también, con una buena dicción, estando atento para responder dudas y llevando el control del aula, lo cual no siempre es fácil.

También es bueno que el profesor domine las nuevas tecnologías para establecer otro cauce de comunicación con sus alumnos, aunque esto último no es imprescindible.

2. ¿Qué debe saber o dominar un profesor para enseñar este contenido matemático? ¿Qué prioridad les da y por qué?

Más o menos la respuesta es la misma que para la pregunta 1. Por orden de importancia, lo que debería saber un profesor para explicar este bloque sería:

- 1º: Dominar muy bien la materia (sistemas, matrices, det.) y no sólo la materia propia de 2º sino también la de cursos anteriores relacionados con álgebra: factorización de polinomios, operaciones con fracciones algebraicas...
- 2º: Exposición clara y concisa y lo más eficaz posible, en cuanto al tiempo necesario, de los contenidos teóricos.
- 3º: Seleccionar concienzudamente los ejercicios (ejercicios-tipo) y exponerlos en el momento oportuno, relacionándolos con la teoría de forma equilibrada y apropiada, es decir organizar bien cada clase previamente.
- 4º: Establecer cauces de comunicación con el alumnado: atención de dudas en clase, atención personalizada cuando sea necesario, comunicación vía plataforma, en los centros tic, para colgarles ahí soluciones de exámenes, o colección de ejercicios, etc.
- 5º: Buena selección de los ejercicios para los exámenes escritos y correcta evaluación.

La prioridad que les doy es ésta porque, ante todo, un buen profesor, de la materia que sea, tiene que saber de qué está hablando. Si no es así, es imposible todo lo demás. Imaginemos un actor que va a la clase con la lección del día muy bien aprendida pero no conoce nada más de la materia. Con toda seguridad, no podría atender dudas que salen espontáneamente; ni podría, a partir de un mismo ejercicio establecer variantes del tipo: ¿ qué habría pasado si hubiésemos obtenido tal cosa en lugar de ésta?... o por ejemplo: tened cuidado con poner tal cosa en lugar de ésta, que es un fallo muy común..., y es que a veces este tipo de comentarios y advertencias creo que es de gran ayuda, o por ejemplo comentar en voz alta algún error que ha cometido algún alumno en la resolución de algún ejercicio. Por eso, para mí lo más importante es dominar muy bien la materia que se está explicando y todo lo que guarde relación con ella.

A continuación pongo la claridad en las exposiciones en contenidos teóricos y prácticos y una buena selección de los mismos porque creo que eso ayuda a organizar bien la clase en cuanto al factor tiempo. Es importante recalcar que aquí jugamos en contra del tiempo y no se puede malgastar. Por último los puntos 4 y 5 los dejo para el final, ya

que, aunque son importantes, no me parecen imprescindibles, y considero más importantes los tres primeros en cuanto a la tarea de un profesor de matemáticas.

cuestionario 5.

Por favor podrías comentarnos acerca de tu impresión de los resultados del examen de bloque, es decir,

¿A qué crees que se deben esos resultados?

¿Crees que valió la pena dedicar ese tiempo para ese bloque? ¿qué pasaría si hubieses dedicado más tiempo? ¿crees que tendrías los mismos resultados? Si/No ¿por qué?

Podrías compartírnos ampliamente todas tus impresiones al respecto, basadas en tu experiencia profesional, y en particular, centradas en los resultados de los exámenes de este bloque a estos alumnos.

Los resultados han sido algo mejores de lo que yo esperaba en principio. Creo que el fallo fundamental ha sido el primer examen que tuvimos (sólo de los temas 1 y 2). Las notas no fueron buenas quizás porque no se lo tomaron demasiado en serio, y ahora con la proximidad de la fecha de las evaluaciones y la entrega de notas, parece que se han puesto a estudiar un poco más en serio.

La verdad es que ocurre a menudo que los estudiantes van de menos a más; es decir que empiezan un poco flojos sobre todo en el primer trimestre y cuando ya van entrando en materia es cuando se van animando a esforzarse más.

Creo que sí valió la pena dedicar ese tiempo porque con menos sería imposible abarcar esta parte de la materia. Quizás si se dedicase más tiempo habría mejores resultados, seguramente, pero si eso es a costa de quedarnos cortos en otra parte del temario, no podemos hacerlo. A cada parte, hay que dedicarle su tiempo correspondiente, ni más ni menos.

Una nota curiosa que me ha sorprendido en este grupo de alumnos es que han querido hacer el examen de recuperación pronto, y además casi todos los que han aprobado el bloque han manifestado su intención de poder presentarse a dicho examen para subir nota.

Finalmente, de los seis suspensos que había, se presentan hoy cinco alumnos para aprobar y de los cinco alumnos que habían aprobado el bloque de álgebra, se presentan tres a subir nota. Esto no me resulta habitual, teniendo en cuenta que después de todos los exámenes que llevan con todas las asignaturas están cansados y deseando de tener unas vacaciones. Pues en lugar de eso, aquí estamos, hoy día 18 de Diciembre, con el instituto casi vacío, y ellos haciendo su examen. Esperemos que les merezca la pena.



**Universidad
de Huelva**

Cuestionario 6

Respetable profesora solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Con base en su práctica profesional podría contestar por favor lo más explícitamente posible las siguientes cuestiones respecto a:

Motivación profesional:

1. ¿Por qué se dedica a enseñar matemáticas?

Me dedico a enseñar matemáticas porque es lo que me ha gustado desde que estudiaba enseñanza media; era mi asignatura favorita y decidí estudiar mi licenciatura por ese motivo, por el gusto personal. Con esos años uno no se plantea si al final terminará dando clases o trabajando en una empresa privada, por ejemplo. Esa cuestión se decide un poco más tarde, según lo que te marca el mercado laboral, aunque en una carrera tan teórica como ésta, la enseñanza es la salida más habitual.

2. ¿Qué le motiva a enseñar matemáticas en bachillerato?

Que hay un mayor nivel que en secundaria obligatoria, y por supuesto, esto es un reto mayor. Anteriormente (hace unos 12 años) di clases en la Universidad de Huelva, en algunas carreras técnicas, y lógicamente era un reto aún mayor.

3. ¿Hay alguna diferencia entre su modo de impartir clases hoy día y hace unos años? Si existe alguna diferencia, ¿en qué consiste?, ¿por qué existe tal diferencia?, ¿qué la ha motivado?

Creo que sí hay diferencias sobre todo impuestas por la falta de motivación y de interés del alumnado. Hemos llegado a un punto en el que uno tiene que ingeniárselas para convencer y atraer al alumnado mucho más que hace unos años, sobre todo en la E.S.O., aunque también en Bachillerato.

Concretamente, en Bachillerato también ha cambiado mucho la profundidad teórica con que se tratan algunos temas. Las demostraciones teóricas y los teoremas van poco a poco desapareciendo del mapa, tanto que algunas veces tenemos la sensación

de estar impartiendo un recetario como de cocina, es decir para un determinado problema del bloque de geometría por ejemplo enseñamos al alumno las fórmulas y que tiene que hacer esto o aquello de una determinada forma pero sin mucha consistencia teórica detrás por falta de tiempo. Esto es consecuencia directa de la disminución de horas de clase de nuestra materia y de la disminución del número de cursos "serios". Hace unos años un alumno terminaba 8º de EGB con 14 años y tenía 4 cursos por delante (tres de BUP y uno de COU) para prepararse de una forma más rigurosa para ir a la Universidad; ahora sólo contamos con dos cursos de Bachillerato para hacer la misma tarea. Como compensación se ha alargado la secundaria obligatoria dos cursos más (se termina con 16 años) pero eso no garantiza en absoluto una buena preparación, no hay más que entrar un día cualquiera en una de estas aulas y ver el ambiente.

Si además unimos a esto que las leyes educativas en este país dura lo que dura un cambio de gobierno, esto termina de rematar el caos.

Creo que todo esto condiciona y mucho la perspectiva del profesor.

Además el alumnado está muy desmotivado en general, las familias muchas veces están demasiado desentendidas de la educación de sus hijos y esto repercute también negativamente.

Aspectos generales:

1. ¿Dónde o cómo aprendió el contenido matemático que enseña en el primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato?

Justamente ese contenido lo aprendí en mi curso de COU, el año último de preparación para la Universidad.

2. ¿Recibió alguna formación pedagógica/didáctica para enseñar matemáticas? ¿dónde o cómo aprendió CÓMO enseñar ese contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?

Recibí el curso del CAP antes de hacer mi oposición, pero creo que más que aprender esto que me preguntas en el CAP uno va aprendiendo a lo largo de la vida de sus propios maestros y profesores, y más tarde, lógicamente, de su propia práctica profesional. También se aprende de compañeros, entre nosotros comentamos cómo afrontar determinados conceptos, qué actividades van mejor que otras, etc.

Creo que nunca se aprende de una única fuente, sino de todo un poco.

3. ¿Cree que enseñar matemáticas es más fácil que enseñar otras materias? Si/No ¿por qué, a qué cree que se debe?

No, en absoluto creo que sea más fácil. Creo que es diferente.

En ocasiones es una asignatura abstracta y ya se sabe, cuanto más abstracto sea algo, más difícil de entender resulta. Pero también me he encontrado muchas veces con alumnos que le tienen auténtico pánico y al final resulta que no ha sido para tanto, e incluso les ha ido mejor que en otras materias.

Creo que las matemáticas tienen peor fama de la que realmente debería.

El principal escollo en alumnos menores es el álgebra, justo cuando empieza la abstracción o representación de variables en los problemas y ejercicios mediante letras y toda la operatividad en polinomios, etc. El planteamiento de problemas les

En conclusiones
F. Profesores
Principales fuentes
de las q' adquiere
formación pedagógica
p' enseñar matemáticas
1) Cursos de capacitación
2) Experiencia propia
3) Práctica profesional
4) Entre compañeros
cuando comentan
cómo afrontar

cuesta mucho en general, y para alumnos mayores temas como las progresiones con sus fórmulas correspondientes y la aplicación de éstas, o por ejemplo los límites son conceptos un poco difíciles de entender y de asumir por ellos. Como yo les digo a mis alumnos algunas veces, no nos encontramos un polinomio o el número π por la calle normalmente, pero sí podemos escuchar canciones en inglés o ir a visitar un museo o un parque natural.

ANEXO IV. Guión de la entrevista



Guión de preguntas para la entrevista semi-estructurada

Respetable profesora, solicitamos su colaboración para dar respuesta a las siguientes cuestiones, ya que la información que usted tenga a bien proporcionar será utilizada en la elaboración de la tesis doctoral de Leticia Sosa Guerrero dentro del área de Desarrollo Profesional en el Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de esta Universidad, de antemano agradecemos su apoyo.

Podría contestar por favor lo **más explícitamente** posible las siguientes preguntas:

Curriculum:

1. ¿Quién propone los materiales curriculares (libro de texto y la programación de contenidos matemáticos) que estudian los estudiantes de segundo de bachillerato?
2. ¿Sabe con base en qué se proponen los materiales curriculares (libro de texto y la programación de contenidos matemáticos) que estudian los estudiantes de segundo de bachillerato?
3. Cuando encuentra un tópico incompleto o inadecuado en su explicación o uso de ejemplos en los textos:
 - a) ¿Cómo son aprehendidas y tratadas por los profesores estas deficiencias en materiales curriculares?
 - b) ¿Cómo toma una parte de texto y transforma su entendimiento de eso en instrucción que sus alumnos puedan comprender?
4. ¿Cómo enfrenta el “cubrir el currículum” y “enseñar para aprender”, es decir, cómo encara o afronta esa disyuntiva, esa tensión?
5. Si tuviera que seleccionar ciertos contenidos porque le dan más poco tiempo, ¿cuáles enseñaría? ¿cómo identifica el profesor conceptos principales en el currículum, cómo o con base a qué modifica actividades y elimina aspectos que considera periferales al entendimiento conceptual? ¿cómo decide el profesor el tipo de conocimiento que deben aprender los estudiantes, el contenido matemático que debe enseñar?
6. ¿Por qué debe estudiar este bloque de Álgebra un alumno de bachillerato?

7. ¿Con que otros contenidos matemáticos está relacionado este bloque de Álgebra en este mismo nivel de bachillerato?
8. ¿Cómo se relaciona este bloque de Álgebra con otros contenidos matemáticos?
A través de ...
9. ¿Con que otros contenidos matemáticos está relacionado este bloque de Álgebra pre y post de ese curso?
10. ¿Con que contenidos de otras áreas científicas está relacionado este bloque de Álgebra pre y post de ese curso?
11. ¿Qué implicaciones se pueden tener si un alumno no aprende los temas del bloque de Álgebra en bachillerato, respecto a otros contenidos matemáticos que estudiará en niveles posteriores?
12. ¿Cuál es el tratamiento real que se le da normalmente al Álgebra en la práctica, a lo largo de su paso por la escuela, desde primero de ESO hasta segundo de bachillerato?
13. ¿Dónde y cómo aprendió o adquirió este conocimiento curricular?
14. En sí, ¿cómo describiría la importancia y evolución del contenido del primer bloque durante toda su trayectoria curricular?

Conocimiento del profesor de sí mismo como profesor:

1. ¿Cuál es su papel como profesora de matemáticas en bachillerato?
2. ¿Cuáles son sus virtudes y debilidades como profesora de matemáticas en bachillerato?

Conocimiento del entendimiento de los estudiantes:

1. ¿Cómo motiva a los alumnos a aprender ese contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
2. ¿Conoce algunos estilos de aprendizaje? ¿Cuáles?
3. Usted, ¿Cuál ó cuáles promueve más?
4. ¿Cómo lo propicia o lo promueve en sus alumnos? Ej. Poniendo ejercicios, entrenando la mente, etc.
5. ¿Cómo logra que sus alumnos aprendan? Ej. Manejando el mayor núm. de registros: tabular, geométrico, etc., resolviéndoles sus dudas.
6. ¿Qué características le permiten saber si un alumno aprendió o no este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)? ¿Cómo detecta los signos de entendimiento y confusión de sus estudiantes?

7. ¿Cuáles podrían ser los indicadores de que un alumno muestra interés por un contenido? (pregunta, cómo participa, ¿qué hace?, etc.
8. ¿Cómo y cuándo atiende las diferencias individuales de los alumnos en su clase?
9. ¿Por qué es tan importante que un alumno sepa escribir ordenadamente lo que hace cuando resuelve un ejercicio?
10. ¿Qué papel juegan los **valores éticos** en el aprendizaje de los estudiantes?
11. ¿Cómo debe ser la comunicación de la profesora-estudiantes, estudiantes-profesora para que se dé la enseñanza-aprendizaje de este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
12. ¿Qué papel juega la interacción del profesor con los estudiantes para enseñar un contenido?
13. ¿Es importante que los alumnos tomen nota en la clase? ¿qué papel juega en el aprendizaje del alumno las notas que tome en clase?

Enseñanza:

Sobre pedagogía,

1. ¿Qué significa enseñar matemáticas?
2. ¿Qué se necesita para enseñar matemáticas?
3. ¿Qué tipo de actividades son más favorables para enseñar matemáticas?
4. ¿Qué tipo de representaciones (tabulares, gráficas, etc.) son las que más promueve para enseñar matemáticas?
5. ¿Cuáles son sus objetivos educativos centrales o generales siempre que va a empezar a enseñar un tema?
6. ¿Qué es más importante, la enseñanza o el aprendizaje? y ¿por qué?

Estrategias instruccionales y representación para la enseñanza,

1. ¿Cuáles son las principales dificultades a las que se enfrenta para poder enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato) de una manera que usted considere correcta? ¿A qué cree que se deban esas dificultades?
2. ¿Cómo estimula a los alumnos a aprender y usar las matemáticas?
3. ¿Qué recursos de apoyo utiliza en la enseñanza de las matemáticas? ¿Cuáles son las más útiles?
4. ¿Cuáles son sus estrategias para el manejo del salón de clase, es decir, para mantener la disciplina en el grupo, para que le pongan atención cuando explica, etc.?

Conocimiento didáctico del contenido:

Si consideramos al Conocimiento Didáctico del Contenido como el conocimiento que va más allá del conocimiento del contenido, es decir, como el conocimiento de contenido que incorpora los aspectos más relacionados a su enseñanza. En el cual se incluyen:

***Las formas más útiles de representación (En matemáticas en primaria por ejemplo, si uso rectángulos o círculos para representar fracciones, etc.)**

***Los ejemplos, las explicaciones, analogías, ilustraciones y demostraciones más adecuadas.**

Es decir, en este tipo de conocimiento se toman en cuenta las formas de representar y formular el contenido para hacerlo comprensible para otros.

1. ¿Qué tan importante es que los profesores tengan un conocimiento profundo sobre la didáctica de la matemática que enseñan?
2. ¿Cuál es el conocimiento didáctico que necesita un profesor para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
3. ¿Considera que hoy en día es más difícil enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato) que antes? Si/No ¿por qué?
4. Conforme cambia su propia comprensión, ¿percibe algún cambio en la forma en que enseña? ¿en qué consiste ese cambio? ¿qué es lo que provoca dicho cambio?
5. ¿Qué se necesita para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
6. ¿De qué forma o cómo influyen los estudiantes en su conocimiento didáctico del contenido?
7. ¿Qué tan importante es que un profesor conozca la naturaleza del entorno del estudiante, el entorno de la escuela?

Evaluación:

1. ¿Con base a qué selecciona los problemas que pone en un examen?
2. ¿Qué desea evaluar? ¿qué parte del contenido quiere evaluar? ¿qué habilidades quiere que demuestren tener los alumnos? ¿cómo evaluar el aprendizaje de los alumnos en ese contenido?
3. En general, ¿cómo se evalúa un contenido de matemáticas? ¿qué papel juegan las actitudes y aptitudes, disponibilidad e iniciativa de los estudiantes (a parte de las capacidades) en la evaluación de los estudiantes?

Tecnología:

1. ¿Conoce algo sobre la relación del ordenador (u otra herramienta tecnológica) con las matemáticas y su enseñanza? Si la respuesta es sí, ¿qué conoce sobre ello?

2. ¿Usted ha usado algún recurso tecnológico para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
3. ¿Utiliza algún software educativo o calculadora graficadora para explorar y construir conocimiento matemático? ¿Cómo aprendió a usarlos, los softwares o la calculadora graficadora o las TIC?
4. ¿Qué resultados ha obtenido con el uso de esos recursos?
5. ¿Cómo cree que influirían en el aprendizaje de este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
6. ¿Qué propondría para enseñar un contenido matemático de bachillerato, por ejemplo matrices, usando el ordenador?
7. ¿Qué tan importante es que los profesores tengan un conocimiento acerca de las herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas y en particular de este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?
8. ¿Cuál es la principal dificultad a la que se enfrenta al intentar implementar la tecnología, cualquier software por ejemplo, en el aula?

Para concluir,

Contenido matemático (subject matter)

1. ¿Qué tan importante es que los profesores tengan un conocimiento profundo de las matemáticas que enseñan?
2. ¿Cuál sería el conocimiento matemático necesario que necesita un profesor para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?

Gracias.

ANEXO V. Transcripción de la entrevista realizada a Emi

L: Buenos días, estamos con la profesora Emi del Instituto, vamos a comenzar la entrevista.

L: Eh, buenos días profesora, todas las preguntas que vamos a hacer son con base meramente en su práctica y casi todas las preguntas están orientadas principalmente al primer bloque (Álgebra) que fue el que estuve trabajando con usted, bueno esta información que se obtenga será usada con fines meramente científicos aplicados en mi tesis que pertenece al área de Desarrollo Profesional del Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de la Universidad de Huelva, empezaremos con unas preguntas respecto al currículum.

1. ¿Quién propone los materiales curriculares, el libro de texto por ejemplo o las programaciones de los contenidos matemáticos que estudian los alumnos de segundo de bachillerato?

Emi: Bueno hay una parte que es la de contenidos que no la puedo elegir porque viene ya determinada por las leyes educativas, entonces el Ministerio de Educación, cada cierto tiempo saca una normativa en la que establece los contenidos mínimos de las diferentes asignaturas, en este caso los alumnos que yo tengo pertenecen todavía al bachillerato LODE, porque primero hubo un bachillerato LOGSE luego un bachillerato LODE y el próximo año cambiará a la LOE, son a través de estas leyes educativas que desarrollan los contenidos y realizan las modificaciones de los contenidos que estiman oportunas en cada caso, después de estas leyes, cada comunidad (autónoma) puede adaptar o añadir algunos contenidos, pero normalmente las áreas de ciencias, como las matemáticas que son tan generales y que no se pueden adaptar como la geografía o la historia, pues normalmente no tienen ninguna modificación

L: ¿El Ministerio de Educación es a nivel de toda España?

Emi: Sí, el Ministerio de Educación, las leyes que saca son nacionales y luego deja un pequeño porcentaje de participación a las comunidades, luego en algunos casos deja algunos puntos abiertos donde cada comunidad tiene una pequeña libertad de aplicación de esa ley, pero es mínimo el margen que tiene y en cuanto al libro de texto, eso ya es un poquito diferente porque ahí sí ya hay libertad total para poder elegir el libro de texto, entonces de hecho, los libros de texto que hay en España sirven para todas las comunidades, independientemente del programa que desarrollen, luego es cierto también que en el curso de segundo de bachillerato, la universidad, como realiza los exámenes de selectividad pues establece también unos objetivos y contenidos mínimos, es decir, desarrolla en cada uno de los diferentes contenidos de la asignatura cuáles son los puntos principales que no deben faltar en el currículum, porque esos son los que después van a ser examinados

L: Respecto a los libros de texto, ¿existen reuniones con sus colegas de matemáticas en donde discutan qué libro es mejor utilizar, o cada profesor es totalmente libre de elegir el que él quiera?

Emi: En nuestro Departamento realizamos siempre una acción coordinada entre todos los miembros del Departamento, entonces ningún profesor elige de forma particular un libro, siempre al finalizar un curso nos reunimos, valoramos el trabajo con los distintos textos que hemos utilizado y decidimos si seguimos con esos mismos libros de texto o los cambiamos, como suelen aparecer libros nuevos, los estudiamos y luego nos

volvemos a reunir para determinar los que más nos han gustado y los que queremos utilizar

L: Entonces se hace un proceso donde se vota y se acepta por mayoría o ¿cómo es?

Emi: Pues hasta ahora no hemos tenido mucho problema en el Departamento porque todos los profesores hemos coincidido en elegir el mismo libro texto, siempre nos ha gustado el mismo, a veces dudábamos entre dos pero ese ha sido el mayor problema, nunca ha habido problemas en el Departamento por eso, también hay que decir que las leyes nos obligan a mantener libros de texto un período determinado de tiempo, no podemos cambiarlo todos los años

L: ¿Cuánto tiempo tienen que durar con un libro?

Emi: Pues la ley establece que sean cuatro años, lo que sucede es que cuando hay cambios legislativos, entonces se olvidan esos períodos y se empieza desde cero, o sea que en algunos casos se ha podido...

L: Durar más tiempo

Emi: No al contrario, si no estábamos contentos con un libro, como comenzaba un nuevo período de aplicación en una ley nueva, pues ya la anterior no servía y podíamos...

L: O sea que aunque no cumpliera los cuatro años...

Emi: Exactamente

L: Reglamentarios

Emi: Sí, de todas formas cada ley siempre tiene una nueva salida o sea una pequeña trampa y si no queríamos estar obligados a usar ese libro por cuatro años, lo que hacíamos es que lo poníamos obligatorio, lo recomendábamos, entonces es una forma de conseguir que si por alguna causa luego aparece un libro que nos guste más o hemos visto que el libro que hemos utilizado no es el adecuado, no tenemos porque esperar los cuatro años, pero también es cierto que no nos gusta, vamos y no lo hemos hecho nunca es cambiar continuamente de libro, por los problemas económicos que derivan para los alumnos porque claro un alumno que es repetidor pues tiene el libro del año anterior y se va a gastar dinero en otro libro, o los libros se pasan de unos hermanos a otros, entonces normalmente los libros de texto en el Departamento han durado cierto tiempo en los cursos en los que se han puesto

L: Bueno pero puede ser que si un alumno es repetidor y se decide cambiar ese libro porque el profesor considera que no funciona como él quería, le tocará de todas formas gastar otra vez

Emi: Sí, en esos casos si

L: Muy bien, y

2. ¿Sabe con base en qué se proponen los materiales curriculares por ejemplo el libro de texto y la programación de contenidos matemáticos que estudian los alumnos de segundo de bachillerato?

Emi: Sí, siempre en base a las leyes educativas, es decir que en cada ley educativa se establecen los contenidos y las editoriales se basan en esos contenidos, muchas veces para no tener problemas los amplían, por eso porque saben que en algunas comunidades pueden hacer algunas variaciones, entonces no tienen que hacer distintos libros de texto, entonces son libros que sirven en cualquier ámbito

L: Sí, y supongo que las editoriales dado que saben que el profesor pudiera cambiar cada cuatro años, también ellos sacarán nuevos ejemplares cada cierto tiempo ¿no?

Emi: Bueno, no solamente eso, como las leyes van cambiando, ellos tienen que ir cambiando también en los libros de texto, igual que nosotros nos vemos obligados a modificar muchas cuestiones de nuestro trabajo, pues ocurre una cosa, que la tendencia última de las editoriales es a tener varias líneas editoriales, es decir, la misma editorial puede publicar en dos líneas distintos libros de texto de matemáticas para segundo de bachillerato pero con un enfoque totalmente distinto para que así, según el criterio de los profesores pues ofrecen una mayor variedad de aproximación a la materia

L: **Sí, ofrecen una amplia gama por decirlo así,**

3. Cuando usted encuentra un tópico incompleto o inadecuado en su explicación o uso de ejemplos en los textos:
 - a) ¿Cómo son aprehendidas y tratadas estas deficiencias en los materiales curriculares?
 - b) ¿Cómo toma una parte de texto y transforma su entendimiento de eso en instrucción que sus alumnos puedan comprender?

Emi: Bueno hay que decir que el libro de texto es un apoyo pero realmente, salvo en este caso, en este año en concreto que yo lo he seguido con mucho más detalle, debido a que he tenido una alumna con deficiencia visual muy severa y que el libro lo tenía transcrito en Braille, entonces por comodidad y por facilitarle a ella el acceso a los contenidos, pues me he guiado bastante por el libro pero también es cierto que en clase, lo que es el texto no se utiliza, es decir, yo doy la explicación y enfoco el tema correspondiente desde según mis criterios, o sea hay veces que coincide con el orden establecido en el libro y hay veces que puede coincidir con las explicaciones del texto y otras que no coincide, entonces eso a mí nunca me ha preocupado, que la forma de introducir los conceptos teóricos, de desarrollar los temas coincidan o no, es cierto que cuando no coinciden con el libro se lo hago saber a los alumnos porque si luego van a estar en casa utilizando ese libro, pues quiero que vean que realmente hay diferencia entre lo que yo les he explicado en clase, o por lo menos en el orden que he seguido o en el enfoque que he dado con respecto al libro, el libro es cómodo porque precisamente se puede utilizar mucho material de ejemplos o ejercicios para hacer, pero cuando no coinciden esos ejercicios o ese material, con el que yo creo que es más adecuado para el tema, entonces los propongo yo y les doy material aparte en fotocopias para que ellos trabajen en casa o lo trabajemos en clase

L: **Muy bien y usted**

4. ¿Cómo enfrenta el “cubrir el currículum” y “enseñar para aprender”, es decir, cómo encara o afronta esa disyuntiva, esa tensión?

Emi: Pues creo que la verdad es que no la afronto bien [Emi sonríe], porque siempre, por lo menos en nuestro departamento de matemáticas hemos pensado que hay que cubrir el currículum, es decir, que es mejor dar una visión general de la asignatura aunque la demos de una forma menos rigurosa o más rápida, que quedarnos a mitad del currículum aunque esa mitad se vea en profundidad y el alumno aprenda mucho más de cada uno de esos temas que se han visto pero como claro, a costa de sacrificar otros, pues pensamos que no, que no es lo adecuado y luego es cierto que es muy difícil porque en este caso las matemáticas son muy complicadas entonces, no se trata de profundizar en los conceptos y en la metodología sino que ellos utilicen los cuatro conceptos que se les dan y que ellos los apliquen para resolver problemas, entonces es cierto que ahí no hay tanta dificultad, o sea no hay tanta tensión en cuanto a lo que se

refiere a cubrir el currículum y enseñar para aprender porque lo que hay que enseñar en esta asignatura es precisamente eso, aplicar esos contenidos matemáticos aunque no se fundamenten o no se llegue a una profundización que haga que ellos entiendan realmente de dónde han salido y para qué sirven, simplemente pues como cuando comemos y no nos preguntamos qué es lo que comemos y para qué sirve ¿no?, ellos utilizan la matemática de esa manera

L: Vale,

5. Si tuviera que seleccionar ciertos contenidos porque le dan más poco tiempo, usted ¿cuáles enseñaría? ¿cómo identifica los conceptos principales en el currículum, cómo o con base a qué modifica actividades y elimina aspectos que considera periferales al entendimiento conceptual? O ¿cómo decide el profesor el tipo de conocimiento que deben aprender los estudiantes, el contenido matemático que debe enseñar?

Emi: Bueno es una pregunta bastante compleja, en el sentido de que siempre hay que seleccionar, es cierto, porque el tiempo es limitado, lo que ocurre es que aunque el tiempo es limitado, es cierto que el contenido de la asignatura no es excesivo y si podemos afrontar todos esos contenidos, en el caso hipotético de que no fuera así, en el bloque de Álgebra por ejemplo, ¿en qué me centraría?, pues sería en el trabajo con las matrices y en la programación lineal, y la resolución de problemas la dejaría más de lado

L: ¿Y con base a qué haría esa modificación? ¿Por qué matrices y programación lineal y dejar un poco la resolución de problemas?

Emi: Pues por las características de la asignatura y por su posterior desarrollo en los estudios que vayan a cursar en las distintas carreras universitarias, porque realmente las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, según mi criterio, el trabajo con las matrices es fundamental y es la base para realizar después cualquier aproximación a problemas de las matemáticas sociales y el problema de programación lineal pues es un problema típico de, también de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, mientras que la resolución de sistemas de ecuaciones es algo que se ha tratado a lo largo de todo el contenido de las matemáticas, pero ya desde secundaria, es decir, desde secundaria ellos aprenden a resolver sistemas de ecuaciones con dos ecuaciones y dos incógnitas e incluso en primero de bachillerato también se les dan las explicaciones para que aprendan a resolver sistemas con tres ecuaciones y tres incógnitas, se vuelve a explicar en segundo de bachillerato, con lo cual, si tuviera que eliminar algo eliminaría eso porque no lo veo tan fundamental

L: Muy bien, usted

6. ¿Por qué considera que debe estudiar este bloque de Álgebra un alumno de bachillerato?

Emi: Bueno quitando consideraciones tradicionales como por ejemplo, que siempre se ha hecho así [Emi y L sonríen], y nunca se me había ocurrido plantearme lo contrario, es cierto que las matemáticas tienen muchas áreas distintas por así decirlo y bueno, históricamente el Álgebra tiene un peso muy importante y es cierto que sigue teniéndolo en las matemáticas sociales, con lo cual yo pienso que sí que es necesario

L: Bien,

7. ¿Con que otros contenidos matemáticos está relacionado este bloque de Álgebra en este mismo nivel de bachillerato?

Emi: Bueno como ya he dicho en primero de bachillerato, en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales 1, que es la asignatura que cursan en el año anterior, pues estudian una parte de Álgebra en la que se hace un pequeño repaso de los contenidos de Álgebra estudiados en la secundaria, como puede ser el trabajo con números reales, en concreto las operaciones con los radicales o por ejemplo también, el estudio de la recta real, que se hace siempre en todos los niveles de secundaria, y también se vuelve a repasar en primero de bachillerato y luego se vuelve a estudiar la resolución de sistemas de inecuaciones, cosa que se había hecho también en secundaria, sólo que en secundaria la resolución de sistemas de inecuaciones, solamente con una incógnita y se hace de forma algebraica, en primero de bachillerato se estudian sistemas de inecuaciones con dos incógnitas y la resolución gráfica, y gracias a esto luego, en segundo de bachillerato cuando se da el tema de Álgebra, el tema de la programación lineal, pues realmente se puede avanzar rápido porque no es necesario volver a explicar o empezar a explicar desde el principio cómo se resuelven sistemas de inecuaciones con dos incógnitas que es una parte importante, y también los sistemas de ecuaciones pues son como ya he dicho antes, se estudian en la secundaria y también en primero de bachillerato, o sea que es el mismo tipo de problemas, a lo mejor no con tantas incógnitas o casos tan generales pero o sea que sí, siempre por lo menos hasta ahora, los bloques de matemáticas tienen una continuidad desde la secundaria al bachillerato y en bachillerato, los mismos bloques de primero tienen su continuidad en segundo de bachillerato, se desarrollan y se amplían

L: Ya que me ha dicho con cuales otros temas se relacionan, ¿cómo ha observado que es esta relación?,

8. ¿Cómo se relaciona este bloque de Álgebra con otros contenidos matemáticos? A través de... ¿de qué? ¿de gráficas?, ¿de qué?... ¿cómo se da esa relación?

Emi: Bueno pues las matemáticas por la naturaleza que tienen pues las áreas no están tan inconexas unas de otras, es decir, están muchas de ellas relacionadas, por lo menos en este nivel tan elemental ¿no?, en otros niveles ya con otro rigor, pues se pueden ya estudiar temas mucho más complejos y ya no tan relacionados unos de otros, pero en lo que son las matemáticas de secundaria y de bachillerato, la Geometría está relacionada con el Álgebra, con el Análisis, entonces pues por ejemplo una cosa que resulta básica es la representación en el plano real de puntos, rectas, determinar regiones, entonces eso se hace en Álgebra, se hace en Análisis, se hacen en Geometría, el trabajo que se realiza en secundaria de operar con números reales, se vuelve a usar con las matrices porque si bien es cierto que las matrices tienen un Álgebra propia, pero está basada en el Álgebra de los números reales, con lo cual ellos siguen utilizando el Álgebra de los números reales, y precisamente ese es uno de los problemas que se arrastran de siempre, porque por una razón casi misteriosa, los alumnos que llegan a secundaria con un buen nivel de operatividad, es decir, que realizan los cálculos correctamente, no tienen nunca problemas, pero no conseguimos que aquellos alumnos que tienen muchas dificultades en el cálculo con operaciones sencillas de números reales, aprendan a operar correctamente y ese problema lo siguen arrastrando y de hecho se nota en las operaciones con matrices, los alumnos que siempre han operado bien con números reales hacen bien los cálculos con las matrices, los otros no, saben el Álgebra de las

matrices, saben muy bien cuáles son las propiedades y cómo se realizan las operaciones pero luego fallan en el momento de aplicar las operaciones de números reales

L: Muy bien,

9. ¿Con que otros contenidos matemáticos está relacionado este bloque de Álgebra pre y post de ese curso?

L: Bueno ya nos comentó algo acerca de la trayectoria de ese contenido matemático de Álgebra, a través de su trayectoria curricular desde secundaria a lo que es bachillerato, entonces con eso queda cubierta esa pregunta, ahora

10. ¿Con que contenidos de otras áreas científicas está relacionado este bloque de Álgebra pre y post de ese curso?

L: Por ejemplo con Física, con...

Emi: Si como estamos con la asignatura aplicada a las ciencias sociales, aunque algunos de los contenidos de Álgebra se pueden aplicar a bastantes ciencias, realmente el enfoque se le da a las ciencias sociales, de manera que realmente su mayor aplicación aparece en la economía, en sociología también puede haber algunas aplicaciones, pero yo diría que fundamentalmente en los estudios universitarios o posteriores, este bloque (Álgebra) está relacionado fundamentalmente con la economía

L: Sí, muy bien

11. ¿Qué implicaciones se pueden tener si un alumno no aprende los temas del bloque de Álgebra en bachillerato, respecto a otros contenidos matemáticos que estudiará en niveles posteriores?

Emi: Bueno ocurre siempre que un alumno no asimila bien los contenidos, tiene esa laguna entonces cuando en cursos posteriores tenga que enfrentarse a estos temas tendrá dificultades, puede que con la edad, con la madurez alcanzada en etapas posteriores sea capaz de asimilarlos en un momento, sin que realmente el hecho de que antes no lo haya conseguido no pueda, porque realmente considero que la sencillez del Álgebra es tal, que si ahora un alumno no ha sido capaz o bien porque no lo haya estudiado correctamente o no le ha dedicado una atención adecuada o porque simplemente está en una etapa evolutiva en la que sus intereses principales no son los estudios, si luego por ejemplo va a la universidad, si pienso yo que puede realmente afrontar los contenidos de Álgebra sin demasiada dificultad, precisamente por eso, por la sencillez de esta parte

L: Bien desde su perspectiva,

12. ¿Cuál es el tratamiento real que se le da normalmente al Álgebra en la práctica, a lo largo de su paso por la escuela, desde primero de ESO hasta segundo de bachillerato?

Emi: Bueno el tratamiento real, la verdad es que en matemáticas el Álgebra no está nunca abandonada porque hay otros contenidos de matemáticas que si son menos tratados en secundaria como puede ser el tema de probabilidad y estadística, que como aparecen al final del currículum de cada asignatura de matemáticas pues por falta de tiempo no se afrontan, sin embargo, en matemáticas se suele seguir siempre un orden, por lo menos en nuestro departamento, empezamos todas las asignaturas de secundaria con el bloque de números, Álgebra a continuación, después Geometría y después Funciones y luego si hubiese tiempo, que en algún caso yo si lo he tenido, la parte de

Probabilidad y Estadística. Entonces el Álgebra siempre se trata de forma real y exhaustiva en todos los cursos de secundaria, es decir, en primero de ESO se trabaja con ecuaciones algebraicas sencillas, de primero y segundo grado con una incógnita, luego en segundo de ESO ya se introducen sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, también se trabajan inecuaciones y en tercero se vuelven a revisar esos contenidos y se vuelven a hacer ejercicios ya con mayor dificultad que otros y en cuarto de ESO, pues ocurre exactamente lo mismo, se vuelve a tratar el tema de números, del Álgebra, de las ecuaciones, pero ya ampliada, ya no sólo las ecuaciones polinómicas sino ecuaciones racionales, irracionales, exponenciales e incluso logarítmicas

L: Una pregunta más, usted

13. ¿Dónde y cómo aprendió o adquirió este conocimiento curricular?

Emi: Sí, ¿por conocimiento curricular a qué se refiere exactamente?

L: **A su conocimiento de este trayecto del contenido, en este caso del contenido de Álgebra en toda su trayectoria de secundaria a preparatoria, inclusive si tuviera algunos indicios de ese contenido de Álgebra pero a niveles más inferiores pero claro, adaptados a su etapa en primaria y preescolar, es decir, todo ese conocimiento que usted tiene, le podemos llamar conocimiento curricular, ¿dónde lo adquirió o cómo aprendió?**

Emi: Bueno tengo que decir que antes de ser profesora he sido alumna, entonces he tenido que estudiar desde pequeña como todos los demás matemáticas, entonces me ha parecido, con el sistema educativo con el que yo estudié, que las matemáticas estaban bien aplicadas, o sea que era la secuencia de contenidos que se daba y el tratamiento que se daba a esos contenidos era el adecuado, aunque no era profesora era alumna y siempre me ha gustado valorar si había incongruencias o no, es cierto que en algunos temas, claro no se podía profundizar y no se llegaba a comprender algunas de las propiedades, por ejemplo de las funciones, porque no teníamos los conocimientos matemáticos suficientes, teníamos un conocimiento y una teoría adaptada al nivel educativo, pero es cierto que en el Álgebra, desde que tengo memoria de que yo estudiara Álgebra y aplicara todos los conocimientos de Álgebra pues esa secuenciación la he tenido presente, cuando yo he sido profesora, los primeros años que yo estuve trabajando, trabajaba con el mismo sistema educativo que yo recibí como alumna, entonces para mí fue muy fácil, porque fue reproducir lo que yo había aprendido en el aula con mis profesores de matemáticas, entonces fue seguir sus pasos de cómo desarrollaban y qué secuenciación, luego es cierto que con la experiencia, nos hace ver a los profesores, cuál es el tratamiento más adecuado que se puede dar, cómo las explicaciones se pueden mejorar según se introduzcan los conceptos y las operaciones, pero es que el Álgebra tiene un desarrollo tan evidente que no da para realizar muchos saltos o hacer aproximaciones muy diferentes, por lo menos desde mi punto de vista y luego bueno, es claro que a lo largo de mi práctica profesional los sistemas educativos han ido cambiando, entonces el desarrollo del Álgebra pues ha sufrido, no en cuanto los contenidos que se han tenido que impartir, sino en el nivel educativo en el que se han tenido que impartir, es decir, con los nuevos sistemas educativos estos contenidos se han tenido que impartir en edades superiores a las que yo los había dado con anterioridad, por ejemplo, si antes en lo que sería lo equivalente a primero de ESO ya se tenía un manejo muy bueno del Álgebra, ahora es cierto que en primero de ESO ya no, o sea no es que se haya cambiado la asignatura, pero si es cierto que los contenidos se han ido postergando a niveles cada vez superiores

L: ¿Eso lo ha observado desde el inicio de su práctica o ahora más que nunca se ve acentuado eso?

Emi: No, eso como nosotros los profesores tenemos que seguir el currículum que desarrollan desde estancias superiores, aunque es cierto que luego nosotros tenemos criterio para decir bueno pues esto hay que darlo como un profesor de matemáticas cree que debe darlo, porque claro un profesor de matemáticas no es un locutor que le dan un papel por delante y que diga, bueno pues esto es lo que me dicen que diga esto digo, nunca es así. Pero si es cierto que si la programación de una asignatura cambia, nosotros tenemos en cierto modo que acatar y seguir esa nueva programación, y lo que he dicho que he observado es que ahora los contenidos se abordaban, ya no en la misma etapa evolutiva del alumno, es decir, que por desgracia es eso, entonces es cierto que como en matemáticas siempre se han repetido mucho los contenidos, al abordarlos antes mucho antes, pues cuando se llegaba a bachillerato ya tenían todas esas herramientas muy bien interiorizadas, en el sentido de que las aplicaban y las usaban con mucha normalidad y no era algo de lo que habría, que como ocurre ahora, empezar prácticamente desde cero

L: Muy bien, bueno ya para terminar esta parte del currículum, nos podría sintetizar nuevamente, o describir la importancia y evolución de ese contenido del primer bloque, durante toda su trayectoria curricular, es decir, sintetizar cuál es su importancia, porque ya se habló más que nada de la evolución, de cómo se presenta, etc., pero su importancia, su relevancia

Emi: Sí, yo siempre he considerado que el Álgebra tiene una gran importancia, que tiene una gran relevancia en las matemáticas, precisamente porque las matemáticas comenzaron a desarrollarse a partir de los números y del Álgebra, entonces para mí en todos los niveles educativos ha sido una parte muy importante, si tenemos que cuantificarla en términos numéricos pues yo le daría el peso, mínimo de un tercio de la materia

L: ¿cómo un tercio de la materia?

Emi: Sí, en el sentido de que para mí siempre hay, bueno depende también del nivel educativo porque en algunos niveles el Álgebra en términos numéricos si queremos cuantificarlo, pues diríamos qué peso tiene en el contenido curricular, en matemáticas de primero de ESO pues prácticamente sería el 50%, mientras que conforme vamos subiendo de nivel, como aparece en otras áreas de matemáticas que no se han abordado como por ejemplo las Funciones, pues el peso de las Funciones o el sitio de las Funciones va dejando menos espacio a otras partes como puede ser el Álgebra, pero el Álgebra realmente nunca pierde su peso específico y su importancia y siempre está rozando para mí, en lo que sería el 50% o el 40% de la asignatura. No en el caso de segundo de bachillerato porque es cierto que sería solamente el 30% porque hay tres grandes bloques y no se le puede dar más importancia, también por lo que me han dicho que va a cambiar la asignatura, porque cambia de nuevo el sistema de bachillerato, el año que viene aplicamos una ley nueva y por lo que ya he estado estudiando, el Álgebra pierde contenido en segundo de bachillerato y ya no será un tercio sino será un cuarto de la asignatura, se reduce un poco.

L: Vamos a continuar con la entrevista, ahora haremos dos preguntitas respecto a su conocimiento propio como profesora,

1. ¿Cuál es su papel como profesora de matemáticas en bachillerato?

Emi: Mi papel como profesora de matemáticas en bachillerato, pues diría que es la de enseñarles matemáticas, aunque resulte bastante trivial la respuesta, o por lo menos si no enseñarles grandes contenidos matemáticos, si enseñarles cómo es el mundo de las

matemáticas o por lo menos enseñarles que existe un mundo ahí, al que se pueden acercar si ellos están dispuestos y de facilitarles unos recursos, unas herramientas para que ellos cuando continúen estudiando en la universidad, puedan afrontar los contenidos matemáticos que les propongan. El que me gustaría que fuera mi papel que es demasiado, casi inalcanzable, que es como una ilusión que podemos hacernos a veces los profesores de matemáticas, la de enseñarles a pensar, me encantaría pensar que en algún momento si les he enseñado a pensar, pero lo veo difícil

L: Bueno quien sabe, puede ser que sí, no creo que siempre estén así de robot ¿no?,

2. ¿Cuáles considera que son sus virtudes y debilidades como profesora de matemáticas en bachillerato?

Emi: Mis virtudes, si es que se les pueden llamar virtudes, pues diría yo la claridad en las explicaciones, siempre he conseguido, por lo menos en el aula cuando el alumno presta atención a las explicaciones, que capte lo que quiero decir, es decir, tampoco si no lo capta a la primera no me importa repetirlo otra vez de otra manera y nunca me molesto porque un alumno haga preguntas, que a lo mejor no las debiera hacer porque, o no van con el tema o bien porque ya debería conocer la respuesta, entonces yo creo que el profesor de matemáticas tiene que tener esa pequeña concesión con los alumnos y sobre todo pienso que es una ventaja conseguir que los alumnos entiendan las explicaciones, que las matemáticas en algunas ocasiones las ven como algo tan abstracto, tan incomprensible que muchas veces cierran el libro, dejan de ir a clase porque piensan que no son capaces de comprender

L: Tiran la toalla, como se dice comúnmente

Emi: Exactamente, luego yo no lo llamaría virtud, casi lo diría, diría yo que es una manía que tengo y es la de que aunque se fundamenten poco las matemáticas, me gusta que cuando ellos resuelven ejercicios o problemas, fundamenten todo lo que están haciendo, que escriban con corrección y con rigor lo que están haciendo, es decir, que conozcan el nombre de los objetos matemáticos que están utilizando, que conozcan el nombre de los métodos que están utilizando y de las propiedades, y que lo escriban correctamente, eso ya no diría que es una virtud, pero si más una manía, una obsesión que tengo. Debilidades como profesora, tengo unas cuantas, pero yo creo que la principal, es la de ser demasiado protagonista en el aula, una vez dadas las explicaciones del tema y en el momento de abordar los problemas, pues también es cierto que me gusta ayudarles en la realización de los mismos al comienzo, pero pienso que me debería retirar antes, es decir, que tardo demasiado tiempo en decir yo ya no resuelvo nada sois vosotros los alumnos los que tenéis que pensar, plantear y resolver, eso si es algo que me critico a mí misma, pero claro cuando ya me doy cuenta ya es un poco tarde, aunque intento poner remedio pero si es una debilidad que de verdad me cuesta luchar contra ella, porque cuando los alumnos se quedan parados frente al cuaderno, sin hacer absolutamente nada y yo espero un minuto, dos minutos, tres minutos y pregunto por qué no estáis haciendo nada y se ponen es que no sabemos, pues tendría que tratar de seguir un tipo de estrategia diferente a la que sigo, que en este caso a veces, pues me pongo yo a resolver las cosas, aunque si es cierto que siempre no me pongo yo sola a hacerlo sino que intento arrastrarlos a todos ellos y que sean ellos, con pequeñas preguntas que les voy haciendo, los que vayan viendo qué es lo que hay que hacer en cada caso, pero vamos es difícil

L: Y cuando ya se decide a dejarlos trabajar solos, por decirlo así, ¿qué es lo que a usted le hace decidirle dejarlos?

Emi: Sí, porque ya he constatado que realmente el método que estoy siguiendo no está sirviendo, que podría seguir así días y días y no serviría de nada porque estarían en el mismo punto ellos, lo que interesa es que ellos sean capaces de hacer las cosas y claro, no se puede abusar de realizar los ejercicios en la pizarra

L: **Muy bien, bueno Emi ahora nos gustaría que nos compartiera algo sobre su conocimiento del entendimiento de los estudiantes, en particular, aquí se va a ver un poco más enfatizado lo referente al contenido del primer bloque, todas estas preguntas van orientadas más que nada a ese tema, entonces la primer pregunta sería**

1. ¿Cómo motiva a los alumnos a aprender ese contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?

Emi: Bueno lo de motivar a los alumnos es algo que nunca he sabido yo cuándo, porque los consigo motivar muchas veces y otras veces no, porque digo yo, si soy la misma persona y la misma profesora y voy ganando experiencia, se supone que cada vez tendría que ir siendo más fácil pero no, es yo creo que tan aleatorio y que depende de la motivación de cosas a veces tan poco relacionadas con lo que es la práctica profesional y a veces es posible que tal vez se motiven más por la relación personal que por la profesional, es decir, si les cae mal el profesor, se desmotivan enseguida, si les cae bien no es que los motive pero por lo menos se puede empezar a intentarlo

L: **Pero algunos indicios que usted haya observado que le permiten ver que se emocionan, que se motivan**

Emi: Bueno yo creo que la mejor motivación que tienen ellos siempre es cuando se dan cuenta que han asimilado los contenidos y que son capaces de resolver los problemas, yo noto que empiezan a motivarse siempre en ese punto, cuando a lo mejor hasta la fecha no han sido capaces de resolver o de plantear un problema y de repente cuando ven que son capaces de hacerlo, de repente cambian

L: **Sí, ahora me hace recordar una escena que me comentó de cuando fue el primer examen del bloque de Álgebra, el caso particular de E13, ella es una chica que le costó mucho trabajo pero se dio cuenta de que pudo resolver un problema en el examen, podría comentar algo de esa escena si es que lo recuerda**

Emi: Pues sinceramente no lo recuerdo, tengo muy mala memoria [L y Emi sonríen]

Emi: Sí es cierto que recuerdo que E13 es una de las alumnas que más dificultades ha tenido al inicio y que puede que más se haya esforzado y que precisamente lo que más le haya motivado a continuar con el trabajo de la asignatura haya sido lo que he comentado antes, que ella ha sido capaz de hacer las cosas, es decir, muchas veces ellos se desmotivan porque dicen, yo lo intento pero a mí no me sale nada, entonces ya para qué lo voy a intentar si nunca lo voy a conseguir, si a mí nunca me va a salir resolver esta ecuación o resolver este sistema. Eso es con lo que yo lucho, intento siempre convencerles de que ellos tienen la capacidad intelectual suficiente como para afrontar todos los problemas de todos los ejercicios que les proponga, simplemente tienen que intentarlo y es cierto que dándoles unas pequeñas ayudas, cuando ellos ven que son capaces, ellos se motivan, no conozco yo otra forma de motivarlos

L: **Usted**

2. ¿Conoce algunos estilos de aprendizaje? ¿Cuáles?

Emi: Pues los alumnos aprenden a veces por imitación, a veces a uno le dicen como hacer las cosas y repite los mismos pasos y lo hace, otros cómo aprenden, pues la

verdad que no lo sé. Siempre mi problema, sobretodo al principio cuando empecé a trabajar era ponerme en el papel de los alumnos y mis amigos que eran profesores siempre me lo decían, Emi no puedes pensar que tus alumnos son como tú y que aprenden como tú y es cierto porque yo he tenido una forma de aprender muy diferente a la que yo veo que tienen mis alumnos y también mis motivaciones y mis métodos de trabajo son muy diferentes, entonces al comienzo de mi carrera profesional había un abismo entre lo que yo entendía que tenía que ser el aprendizaje de los alumnos y lo que constataba como aprendizaje real de mis alumnos y claro, con el paso del tiempo pues esas distancias ya han ido disminuyendo, ya me he metido más en la piel del alumno, pero sigo muchas veces sin entenderles

L: ¿Por qué dice que son distintas sus formas a las suyas, qué ha observado, qué detalles le permiten hacer esa conjetura?

Emi: Pues por ejemplo que yo he sido siempre muy autodidacta, a mí siempre me han gustado las clases y dar clase, aprender de todo lo que me podían enseñar los profesores pero además completar todo ese conocimiento que me transmitía el profesor en el aula, completarlo fuera del aula, entonces yo cogía no solamente el libro de texto sino muchísimos otros libros, leía mucho, pensaba mucho, trabajaba por mi cuenta a otro nivel totalmente diferente que a lo mejor estaba muy por encima del de la clase o del que se pedía para ese nivel, entonces claro es otro mundo totalmente diferente que comprendo que no es lo habitual, es cierto que a lo largo de mi carrera también me he encontrado con alumnos muy brillantes y que a ellos les podía poner a prueba y exigirles con un nivel de exigencia mayor que al resto, hasta llegué a hacerles exámenes especiales para determinados alumnos, porque me parecía que eso los motivaba, claro ahora no puedo hacerlo porque en estos últimos años, en estos dos o tres años, porque todavía hace cuatro años reconozco que tuve alumnos de esas características, entonces claro, pienso que hay que exigir en función de las capacidades y aquellos alumnos que tienen una capacidad alta y además un gusto por la matemática que es patente pues no hay que aburrirlos, siempre hay que estimularlos entonces, cómo se estimula ese tipo de alumnos, pues poniéndoles a pensar, poniéndoles retos y dificultades mucho mayores que al resto de la clase, así que entonces eso lo he hecho

L: Emi y en este grupo particular de alumnos [el grupo de segundo de bachillerato], ¿qué ha notado o qué le permite constatar qué han aprendido algo?, ¿cómo cree que lo han logrado?

Emi: Pues a base de trabajo personal, de esfuerzo personal, de interés por la asignatura

L: Bien,

3. Usted, ¿Cuál considera que promueve más?

L: Comentó un solo estilo ahora en la respuesta anterior

Emi: Sí

L:

4. ¿Cómo cree que lo promueve en sus alumnos? ¿Cómo es eso? ¿O cree que lo promueve?

Emi: Es que yo creo que no tengo tanta influencia sobre los alumnos porque eso es algo tan personal que yo intento transmitirles que la mejor manera de aprender es enfrentarse uno mismo a los problemas solo y, a cuántos más problemas se enfrente y en cuanto más difíciles sean mejor, o por lo menos abarcar una amplia gama de problemas y eso requiere un trabajo personal en casa, entonces yo siempre les mando tarea para casa, precisamente para que como obligación tengan que hacerlo, pero además de esa tarea

obligatoria, les doy hojas de problemas que ya no es tan obligatorio, en el sentido de que esas hojas de ejercicios o problemas, quien las quiera hacer las va a hacer y quien no no, pero que tengan ese material para que los que realmente estén motivados o yo les haya transmitido la idea de que es bueno que hagan más problemas de la cuenta, más de los que yo les pido en clase, que tengan ese material para hacerlo

L: Bien, la siguiente pregunta era

5. ¿Cómo logra que sus alumnos aprendan? Por ejemplo manejando el mayor número de registros, que manejen gráficas, que manejen aspectos numéricos, ¿cómo logra que esos alumnos aprendan?

Emi: Yo intento estructurar un poco el pensamiento, porque claro intento desglosar cuáles son los pasos que hay que seguir, como se supone que lo que tienen que aprender es a resolver problemas, pues intento estructurarles el pensamiento o no estructurarles el pensamiento pero sí que sigan unas pautas fijas y siempre les digo lo mismo, en primer lugar leer, leer bien, leer todas las veces que sea necesario, después de leer mirar, porque hay veces que hay que mirar porque no solamente es texto, depende del tipo de ejercicio o de problema que se trate y luego pensar, pero no pensar en abstracto sino pensar en qué situación estamos, contextualizar el problema, el ejercicio y recordar cuáles son las estrategias que se siguen en esa situación y seguirlas, es decir, aunque no se sepa muy bien si se va a llegar a algún sitio y paso a paso, que lo hagan

L: Y por ejemplo,

6. ¿Qué características le permiten saber si un alumno aprendió o no este contenido matemático, en particular este del primer bloque? ¿Cómo detecta los signos de entendimiento y de confusión de sus estudiantes?

Emi: Bueno en el bloque de Álgebra y por las características que tiene, está dividido en tres temas, el trabajo con las matrices, la resolución de problemas a través de sistemas lineales y los problemas de programación lineal, pues creo que es fácil saber si un alumno aprende o no, en el sentido de que cuando se propone un ejercicio, un problema, voy haciendo preguntas y va respondiendo adecuadamente, se ve cuando pregunto en clase a un alumno determinado y no es capaz de dar la explicación de ese paso, pues ya veo que no lo ha aprendido o que no lo ha practicado lo suficiente, luego en cuanto a la parte de matrices, por ejemplo, pues se puede detectar a veces si conocen bien la operatividad de las matrices o no, pues cuando se corrige el examen, pero normalmente en el aula ya no es necesario un examen para saber qué grados de asimilación de contenidos tiene cada alumno, porque dejarlo todo para un examen, la verdad que un día un alumno puede tener un mal día y no hacerlo bien, pero a lo largo del día a día si se puede constatar, porque a través de las preguntas en el aula, preguntas concretas dirigidas, sobre cada uno de estos ejercicios o problemas y luego pues cuando les propongo a ellos y se quedan solos resolviéndolos, cuando veo yo si son capaces realmente de irlos resolviendo ellos solos o si por el contrario, como ocurre en muchas ocasiones, tienen que irme pidiéndome ayuda, cuando yo me paso por las mesas

L: Sí, esto tiene mucho que ver con la siguiente pregunta, de que

7. ¿Cuáles podrían ser los indicadores de que un alumno muestra interés por un contenido? El alumno pregunta, participa, ¿qué hace?

Emi: Pues normalmente si tiene interés, siempre pregunta las dudas que tiene, es decir, cuando un alumno tiene poco interés pues no suele preguntar nada, porque no le interesa ese es un punto, luego hay otro punto en el que manifiesta su interés, en la atención directa, el profesor mirando a los alumnos conoce si el alumno está atendiendo o no, otra forma de comprobar el interés que tiene, pues cuando se plantean los problemas si el alumno se pone a resolverlo o si por el contrario no hace absolutamente nada y luego también al momento de acabar la clase, cuando no importa si toca el timbre o no pues se nota, que por cierto tengo que decir que la clase no ha puesto pegas, es decir, que se han terminado las cosas sin protestar aunque nos hayamos pasado de la hora de la clase, y hay veces que a algún alumno se le escapa, que es en pocas ocasiones pero cuando está disfrutando con la resolución de algún tipo de ejercicio o de problema, pues lo dice, dice ¿ya?, ¿ya ha terminado la clase? O por ejemplo en ese caso, que he tenido dos asignaturas diferentes casi con los mismos alumnos, he tenido la asignatura de Estadística y de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, pues tengo que decir que en Estadística el grado de interés ha sido mayor que en el de Matemáticas, porque los mismo alumnos que en Matemáticas tenían bastantes dificultades y que se tenían que esforzar mucho y que alguno de ellos no estaba demasiado motivado, sin embargo en la asignatura de Estadística llegó a hacer todo lo contrario y llegaron a preguntarme ¿no podemos tener dos horas seguidas de Estadística en lugar de una de Álgebra y una de Estadística? Porque estábamos trabajando unos problemas de la binomial por ejemplo y les gustaba, o por ejemplo ejercicios de la binomial aproximada por una normal, entonces recuerdo en esa parte que estábamos con esos temas que los veía yo con un interés que no los había visto en Álgebra por ejemplo

L: Y ¿A qué cree que se debe ese cambio o esa motivación más por Estadística que por Matemáticas?

Emi: Bueno la Estadística, creo yo que es una materia bastante agradecida porque los problemas que se plantean son problemas reales, normalmente son estudios estadísticos que se realizan en el área de la sanidad o en otras áreas, en el área de la producción y luego las herramientas son fáciles de, para la resolución de problemas no son difíciles de adquirir y cuando ellos aprenden a desglosar el enunciado, a percibir cuáles son los datos que se les dan y saben plantearlo y les sale les gusta, pero la verdad no creo que eso depende tanto del profesor como de las matemáticas en sí, es decir, que yo pienso que hay siempre temas más atractivos que otros, para los alumnos por lo menos

L: O incluso para el profesor también

Emi: Sí

L: Bien y usted

8. ¿Cómo y cuándo atiende las diferencias individuales de los alumnos en su clase?

Emi: Bueno como he dicho antes, cuando he tenido alumnos con una capacidad intelectual mucho mayor, siempre he tenido un tratamiento diferenciado del resto, cuando ocurre todo lo contrario, que la capacidad es bastante menor de la que se espera, pues también intento tener una atención personalizada e incluso atenderlos fuera de clase y en el caso por ejemplo de E9, una alumna con deficiencia visual severa, no se trataba de capacidad intelectual sino de un problema físico de no poder ver la pizarra por ejemplo, o de que el material que le tenía que presentar no podían ser las fotocopias o las copias de ejercicios que les daba a sus compañeros, ella necesita todo el material adaptado, entonces pues eso, he tenido que darle el material adaptado, he tenido que dar las explicaciones pensando en que la persona que me está oyendo no ve la pizarra, y eso en Matemáticas la verdad es complicado y luego por ejemplo he tenido que adaptar

también materiales para que ella sea capaz de dibujar y enseñarle un método para dibujar sin ver, es decir, que yo siempre, no me gusta abandonar a ningún alumno del tipo que sea, o bien porque destaque por ser más inteligente que el resto o bien por todo lo contrario, porque no tenga la capacidad intelectual adecuada o porque tenga algún problema físico, entonces pienso que sobre todo si demuestran interés no hay que decepcionarles y hay que ayudarles, entonces siempre busco la manera de adaptarme a su situación

L: Sí muy bien y,

9. ¿Por qué es tan importante que un alumno sepa escribir ordenadamente lo que hace cuando resuelve un ejercicio?

Emi: Porque el orden en Matemáticas es fundamental, un alumno que no es capaz de escribir, bueno he tenido algún caso de algún alumno que le costaba mucho trabajo escribir las cosas y sin embargo si razonaba bien y he tenido que insistir mucho con ese alumno para que aprendiera a escribir lo que pensaba, pero claro he tenido que ir por pasos, no he podido decirle desde el primer día, esto me lo tienes que hacer así, porque cuando me he dado cuenta que ese alumno era tan diferente, que es cierto que razonaba muy bien pero luego escribía dos cosas, entonces empecé a decirle, si tú tienes esa manera de escribir las matemáticas pues vale, yo ahora de momento te dejo, entonces tú ponme esto nada más, pero conforme iba pasando el curso iba intentando, le decía pues ahora añade esto y así le iba dando las instrucciones y poco a poco ese alumno se metió en lo que era escribir con lenguaje matemático la resolución de un problema, porque a él le gustaba pensarlo todo mentalmente pero luego no era capaz de estructurar ese pensamiento por escrito, prácticamente sin escribir nada llegaba a la solución, otros alumnos no son de ese nivel, es decir, no son de esas características, no son capaces de seguir un pensamiento ordenado y llegar a la solución correcta, sino que empiezan a hacer la cosas de cualquier manera y bueno pues no les salen las cosas, porque al no mantener un orden, al no poner por escrito las explicaciones pues muchas veces cometen errores que no cometerían si siguieran un orden, del que estábamos hablando

L: Sí, y

10. ¿Qué papel juegan los **valores éticos** en el aprendizaje de los estudiantes?

Emi: Bueno yo siempre les digo a los alumnos que aprender es importante y saber matemáticas, pero que también es importante ser buena persona, a lo mejor no debiera decírselo pero lo pienso y muchas veces lo digo, entonces yo me fío mucho de mis alumnos, es decir, yo vigilo poco en un examen, sé que en algunas ocasiones ellos han intentado copiar, pero claro por la naturaleza de las matemáticas no tengo que vigilar que copien de un libro de texto o de unos apuntes porque eso es imposible, como mucho lo que pueden hacer en un examen es hablar unos con otros o pasarse alguna pregunta, como siempre me he fiado de ellos así que no he vigilado mucho pero cuando lo han hecho, al corregir el examen es tan evidente que entonces sí se lo he dicho, mira tú haz copiado o tu compañero te ha ayudado a hacer esta pregunta y entonces sí les he sancionado y les he puesto en evidencia en esa falta de ética, que si que entendía que un alumno podía ayudar a otro pero que no era la manera y luego a la hora de reconocer si se trabaja o no se trabaja pues tienen que ser honestos con ellos, cuando analizan los resultados de las evaluaciones porque han suspendido matemáticas o porque no han suspendido, pues tienen que analizar qué parte de culpa tienen o de éxito en esa nota, y no pensar que es el profesor o es la asignatura sino que serán otras cosas

L: Muy bien,

11. ¿Cómo debe ser la comunicación de la profesora-estudiantes, estudiantes-profesora para que se dé la enseñanza-aprendizaje de un contenido matemático, en particular de este del primer bloque?

Emi: ¿La comunicación se refiere al trato?

L: Sí, al trato a la interacción

Emi: Pues yo creo que tiene que haber primero un respeto previo, los alumnos tienen que respetar al profesor como tal, que está en el aula para ayudarles a aprender y el profesor también tiene que saber que está en el aula para eso, o sea que yo no estoy para otra cosa y entonces con ese respeto como punto de partida, pues luego tiene que haber un ambiente relajado en clase, es decir, de confianza, donde el alumno pueda preguntar las dudas que tenga sin miedo ni a un mal comentario o a cualquier otra cosa, pero claro también el profesor tiene que ser tajante en cuanto a que en la clase tiene que haber una disciplina y un orden y un ambiente de trabajo, es decir, no porque haya un ambiente afable y extendido, se puede convertir la clase en perder el tiempo y no hacer nada, entonces el profesor se tiene que poner en su papel y reprender al alumno cuando está hablando en un momento que no debe o cuando no esté trabajando o por cualquier cosa que no esté haciendo bien en ese momento

L: Muy bien, y para usted,

12. ¿Es importante que los alumnos tomen nota en la clase? ¿qué papel cree que juegue en el aprendizaje del alumno las notas que tome en clase?

Emi: Bueno tradicionalmente todos los alumnos toman notas en la clase, porque les gusta estudiar más los apuntes dados por el profesor que el libro en sí, a ellos les cuesta mucho trabajo ponerse a estudiar un libro, por lo menos de matemáticas y en ese sentido es bastante importante porque sin ese material algunos de ellos no estudiarían, pero bueno no me parece a mí fundamental, depende de cada alumno, depende de cómo aprenda cada alumno y de la facilidad que tenga o no, porque hay veces que es mejor no estar tomando apuntes y estar atendiendo, pero bueno como el ritmo tampoco es muy rápido, yo intento equilibrar el ritmo para que ellos puedan tomar las notas y al mismo tiempo puedan estar pensando en lo que están escribiendo y en lo que se está diciendo, sino no serviría desde luego, si fuera tan rápido que ellos no pudieran enterarse, ni tampoco tan lento

L: Bueno muy bien, pues esas eran las preguntas principales respecto a los estudiantes, ahora vamos a pasar a otra etapa en la que es de enseñanza en sí, empezaremos con algunas preguntas más directas sobre pedagogía y luego sobre sus estrategias instruccionales y representaciones que usted utiliza

Emi: Si

L: Para usted

1. ¿Qué significa enseñar matemáticas, en general?

Emi: Enseñar matemáticas, bueno yo creo que en realidad no enseñamos matemáticas, enseñamos o mostramos un mundo matemático, un mundo matemático adaptado para ellos porque es cierto que no se les enseña el universo matemático tal y como es, se les adapta y enseñar matemáticas pues es eso, que ellos entren en ese mundo adaptado y

que sean capaces de moverse, por lo menos con cierta comodidad o con cierta soltura, o por lo menos si no lo hacen en un principio, en un futuro si sean capaces de hacerlo

L: Y

2. ¿Qué se necesita para enseñar matemáticas?

Emi: Para enseñar matemáticas, primero saber matemáticas, conocer el universo matemático en su totalidad, no solamente una parte, y luego pues querer ser profesor, porque uno puede tener una mente privilegiada para las matemáticas pero a lo mejor no le gusta la enseñanza, entonces yo pienso que a un profesor le debe gustar enseñar, que es importante

L: ¿Entonces qué quiere decir “querer ser profesor”?

Emi: Que hay una parte del trabajo que es bastante vocacional, porque no es como un conductor de autobús, a lo mejor estoy equivocada, pues tal vez un conductor de autobús no necesita una motivación especial, mientras que para enseñar sí, porque si un profesor simplemente se dedica a dar clase pero sin mayores preocupaciones de cómo repercute su actividad profesional en los alumnos, porque no le interesa para nada porque es un trabajo más, pues no creo que sea la situación ideal ni mucho menos y por eso, no hay ningún profesor perfecto, todos tenemos muchos fallos, algunas virtudes, pero es muy importante que si un profesor quiere ser profesor y quiere enseñar y le gusta enseñar y le gustan por supuesto las matemáticas, pues ese gusto por enseñar y ese gusto por las matemáticas es visible y lo captan los alumnos y eso a los alumnos les transmite una buena sensación, en el sentido de decir, pues no debe ser tan mala la matemática y a lo mejor no es tan malo aprender, entonces un poco como por contagio por que si a mí me gusta una cosa, intento que a los demás también les guste, entonces ese papel me parece que sí es importante

L: De manera global,

3. ¿Qué tipo de actividades son más favorables para enseñar matemáticas?

Emi: ¿Actividades? Pues se pueden hacer muchas actividades de mucho tipo, se pueden hacer actividades en el aula e incluso algunas fuera del aula, por desgracia últimamente las actividades fuera del aula casi no se realizan, recuerdo en alguna ocasión que sí hicimos, para celebrar el año mundial de las matemáticas en el 2000, fue una experiencia bonita y luego dentro del aula pues también hay muchos recursos, es decir, que no solamente tenemos los libros, las hojas de problemas, sino que ahora con las nuevas tecnologías tenemos a nuestra disposición a través de los ordenadores y de las aplicaciones matemáticas muchas herramientas de trabajo que yo he utilizado en años anteriores y que no he utilizado en este año, precisamente por tener a E9 en clase

L: Por ejemplo, ¿qué otras actividades pudiera aplicar en Álgebra?

Emi: Pues en Álgebra, no actividades diferentes sino, por ejemplo existe una aplicación, que es la aplicación matemática “Descartes” que propone una serie de contenidos pero con unas herramientas diferentes, entonces es posible en una hora abordar muchos ejercicios sin el fastidio del desarrollo algebraico, que siempre se pierde tiempo, pero en estas actividades se pueden aplicar los conocimientos y se ven los resultados en un momento

L: Muy bien, un poco relacionado con eso, de manera global hablando de toda la matemática escolar,

4. ¿Qué tipo de representaciones son las que más promueve para enseñar matemáticas, las tabulares, las gráficas, cuáles?

Emi: Bueno las tablas son muy adecuadas para muchos contenidos matemáticos, entonces lo que se refiere a resolución de problemas, ya sea que se plantean con sistemas de ecuaciones lineales o de programación lineal, pues las tablas ayudan mucho a estructurar los datos del enunciado y a plantear el problema, a plantear las ecuaciones o las desigualdades según se trate, entonces las tablas también ocupan un lugar muy importante, las gráficas en el Álgebra realmente no las utilizo, para otros temas sí, pero en Álgebra no, puedo seguir a lo mejor en algún caso como el de las matrices, que he visto que por ejemplo el cálculo de la matriz inversa pues no eran capaces de hacerlo mentalmente porque la aplicación con la fórmula a través de la matriz adjunta, el determinante y todo esto que siempre se ha enseñado de forma tradicional y que siempre, por lo menos yo y los alumnos con los que he trabajado hasta ahora, se realizaba en un paso o en dos pasos o se hacían mentalmente, cuando he visto que estos alumnos que he tenido este año no eran capaces, que tenían muchos errores, que tenían varias equivocaciones, entonces lo que he hecho ha sido a través de una forma gráfica, desglosando los pasos que se siguen, que lleguen al cálculo de la matriz inversa, ayudándoles poniéndoles los signos correspondientes para los adjuntos, primero los menores complementarios, es decir, con un gráfico pasando de unas matrices a otras y también estaba pensando ahora que, de forma gráfica

L: En programación sí

Emi: En programación en algunos casos, claro aparte de la restricción del problema hay que dar la región factible de forma gráfica, eso ya va implícito en el problema, no es que sea algo extra, otra es que me había acordado antes pero ahora se me acaba de olvidar qué otro tipo de gráfica se podría utilizar pero ahora mismo se me ha ido de la memoria, se me había ocurrido otro ejemplo distinto pero se me fue

L: En general, ¿cuáles son sus objetivos educativos centrales o globales, por ejemplo siempre que va a empezar a enseñar un tema, se planta a la pizarra y mentalmente, a veces hasta inconscientemente ya se tienen unos objetivos globales programados, cuáles serían en su caso?

Emi: Pues en mi caso siempre son los objetivos mínimos y los objetivos mínimos adaptados a cada bloque de contenidos de la materia, entonces el Álgebra tiene para mí unos objetivos mínimos y esos son los que yo me trazo siempre, me fijo siempre al comenzar el tema

L: ¿Y cuáles serían, de manera global?

Emi: Pues de manera global en el Álgebra, empezando por las matrices pues primero que sepan lo que es una matriz, que distingan lo que es una matriz de un determinante, que conozcan las operaciones básicas con matrices y que apliquen ese cálculo de matrices pues a resolución de ecuaciones o a planteamiento de otro tipo de problemas, pero nada más, en sistemas de ecuaciones lineales simplemente que sepan distinguir las matrices asociadas al sistema, sepan por ejemplo aplicar el método de Gauss y la regla de Cramer, cuándo se puede uno cuándo otro, qué ventajas tiene uno, qué ventajas tiene otro, es decir, no sólo que conozcan los diferentes métodos sino que ellos aprendan a valorar la utilidad de cada uno de ellos y en los casos en los que se pueden aplicar o no, y lo mismo ocurre en el caso de programación lineal, les he dado más que un método de resolución de problemas porque entre los que podía elegir me pareció que era el más sencillo y además me servía para todos, porque había una parte gráfica que deseché porque me parecía que necesitaba de una precisión que los alumnos no la tenían y además teniendo a E9 todavía con mayor razón para evitar ese método

L: Esa parte gráfica ¿en qué tema en particular?

Emi: En el tema de programación lineal hay una parte en la que ya al final del problema, una vez que ya se ha calculado la región factible y ya está dibujada en el plano y se tienen los vértices de la región factible, luego para conocer dónde está el mínimo o el máximo de la función objetivo, pues nosotros lo hemos hecho calculando el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible y de ahí ir sacando las conclusiones pertinentes, pero hay otro método que consiste en trazar unas rectas paralelas y saber dónde se alcanza el máximo o el mínimo de la función objetivo en esa región factible y ese método gráfico lo he desechado por eso, porque me parecía que los alumnos no se manejan bien con el dibujo, se manejan bien hasta cierto punto, no es que no sepan porque de hecho las cosas básicas las conocen, pero claro hace falta una precisión que me parecía que no merecía la pena explicar el método y además como con E9 hubiera sido imposible, porque ya demasiado que ha conseguido con dibujar la región factible, si encima tenía que ver paralelas, eso ya no, o sea ya con sus limitaciones, no se puede llegar

L: Ya para terminar esta parte referente a la enseñanza Emi,

5. ¿Qué pudiera decir que es más importante, la enseñanza o el aprendizaje? y ¿por qué?

Emi: Pues sin duda el aprendizaje, nunca he pensado que la enseñanza sea lo más importante

L: ¿Y por qué te vas más por el aprendizaje que por la enseñanza?

Emi: Porque realmente es el objetivo de la enseñanza, es decir, la enseñanza es, esto es como el huevo y la gallina, ¿qué es primero el huevo o la gallina? Pero pienso yo que la enseñanza tiene que estar totalmente subordinada por el aprendizaje, es decir, que la enseñanza no es una entidad que tenga vida propia, no tiene ningún sentido si con un tipo de enseñanza determinada no se consigue ningún aprendizaje y además es tan poco importante porque en muchas ocasiones el alumno aprende sin profesor, o podría aprender sin profesor o con una ayuda mínima, entonces lo que ayuda al desarrollo del alumno tanto en sus aspectos personales como en la adquisición de conocimientos, de estrategias, de evolución de su pensamiento es el aprendizaje, que el profesor puede ayudarle un poco, pues puede que sí, pero lo importante es cómo se las ingenia, a mí no me importa que el alumno sea independiente de mí y que él recurra a técnicas o a otros recursos, lo importante es que él lo logre

L: Muy bien, pues ahora unas preguntas sobre sus estrategias instruccionales y las representaciones que usa para la enseñanza, en ese grupo en particular que tienes ahora,

1. ¿Cuáles son las principales dificultades a las que se enfrenta para poder enseñar este contenido matemático y más todavía más concreto, en este primer bloque de una manera que usted considere la más adecuada? ¿A qué cree que se deban esas dificultades?

Emi: Bueno algunas de esas dificultades ya las he mencionado antes, en la parte de matrices, de operaciones con matrices, pues las dificultades que tienen son las del cálculo con números reales, en la parte de sistemas de ecuaciones lineales, vuelven a tener problemas con el cálculo con números reales cuando están trabajando con matrices y también tiene una dificultad añadida de transcribir a lenguaje matemático el enunciado del problema, pero realmente si se trabaja con un número suficiente de enunciados, acaban por tener pocas dificultades, puede que en las primeras sesiones sí pero luego los enunciados no tienen mucha dificultad en sí y son capaces de superarla, algunos no, pero son alumnos que a lo mejor porque tienen una mala lectura, es decir, la lectura es

importantísima quien no domina el lenguaje no podrá dominar nunca las matemáticas y ese problema lo tienen de carencias de lenguaje y esa es una dificultad que parece que no tiene ninguna relación con las matemáticas pero es fundamental, hay que analizarlo y poder interpretarlo, el lenguaje. Y luego en la parte de programación lineal pues ocurre lo mismo, si no se sabe leer el enunciado o no se sabe interpretar, no se domina el lenguaje, no se puede transcribir ese enunciado a lenguaje matemático y luego en esa parte pues ya no hay tantas dificultades como con el cálculo de números porque apenas y aparece, es la resolución de los sistemas de inecuaciones, pero la verdad no son complicados si se les marcan unas estrategias sencillas, acaban por hacerlo bien, luego para hacer la gráfica, las dificultades que tienen, que tienen que elegir escalas, que es un problema que a ellos se les suele presentar bastante a menudo, como tienen que hacer un dibujo, una representación gráfica, pues algunos no son capaces de ver cuál es la escala más adecuada para que el dibujo tenga el tamaño correcto por ejemplo, y poco más porque luego ya no, realmente no tiene mucha complejidad el tema

L: Sí,

2. ¿Cómo estimula a los alumnos a aprender y usar las matemáticas?

Emi: ¿Cómo estimular? ¿Más o menos es como cómo se motiva?

L: Sí

Emi: Pues ya he dicho

L: ¿Les da un premio, no sé? [Emi y L sonríen]

Emi: ¿Premios? Yo creo que la nota les estimula, no hemos hablado hasta el momento de las calificaciones, pero hay veces que soy muy estricta corrigiendo un examen por ejemplo, les penalizo los fallos de expresión o de falta de explicación matemática, esos fallos los penalizo bastante, pero también es cierto que intento en algunos casos, ponerles una buena nota, siempre la mejor nota posible que les pueda poner y en la evaluación que no hay que evaluar no sólo las notas de los exámenes sino que claro, a nivel bachillerato el peso de las calificaciones obtenidas en los exámenes es un peso específico muy grande, llega al 90% y en ese margen del 10% es para valorarles la actitud, la actitud que han tenido en clase, el trabajo que han realizado en clase, en casa, el gusto que tienen por las matemáticas, todo ello me permite un margen de maniobra, que aunque sea pequeño pero es el suficiente para que como en algunos casos en los cuales si sólo contara la nota del examen, los tendría que suspender, pues gracias a esa valoración positiva en los otros aspectos, aprobando la evaluación consigo que para la siguiente evaluación, ellos tengan un mayor estímulo hacia el aprendizaje

L: Bien, y

3. ¿Qué recursos de apoyo utiliza en la enseñanza de las matemáticas? ¿Cuáles considera que son más útiles?

Emi: ¿Recursos? Pues hemos hablado del libro de texto, de los apuntes, del material extra, de hojas de problemas, de hojas de actividades que se pueden realizar con aplicaciones matemáticas en el ordenador

L: ¿Podría comentar un poco acerca de todos los ejercicios que prepara, porque durante la observación que estuve con usted, vi que se dedicaba a la preparación de distintos tipos de ejercicios, busca en un lado, busca en otro sitio, les da de unos, les da respuestas, les busca de otros los problemas, de todo eso nos podría comentar un poco de eso?

Emi: Sí, bueno los ejercicios según el bloque de contenidos pueden ser más personales o menos, en el sentido de que en Análisis siempre me ha gustado crear a mí los enunciados de los ejercicios, inventarme yo mis propias funciones y todo, en Álgebra no

hago esto, lo tengo que reconocer, pero si es cierto que además la asignatura es de segundo de bachillerato y deben de pasar unas pruebas de selectividad, pues manejo muchos libros de texto de la asignatura, con diferentes enfoques, diferentes tipos de problemas, tengo también todo el material que nos da la universidad sobre pruebas de selectividad que han realizado o que se han trabajado y entonces voy haciendo una selección tanto de las pruebas de selectividad como de otros libros de texto y no solamente me gusta darles el material de trabajo para ellos, sino que es cierto que en algunas ocasiones les doy luego la resolución, es decir, doy un margen de tiempo suficientemente largo, que el que quiera haber trabajado en ese material lo haga, pero como no hay tiempo físico en clase para usar todo ese material y para corregir todos esos ejercicios, pues me gusta que el alumno que haya trabajado, pueda luego comprobar si ese trabajo que ha hecho extra, lo ha hecho bien o no, o si por lo menos lo ha intentado y no lo ha conseguido, pues que vea cómo se hace, y claro no solamente lo hago con este material extra sino también con los exámenes, es una norma que yo me he fijado, ya no recuerdo cuándo empecé pero fue casi desde el inicio, examen que hacen los alumnos, examen que yo les doy corregido, pero corregido resuelto por mí, es decir, fotocopia de la resolución de todas las preguntas del examen, entonces cuando les entrego el examen corregido suyo, ven los fallos y se los comento y ellos se quedan con el enunciado del problema y luego yo les doy la hoja de soluciones, pero no es la solución, es el desarrollo detallado de la resolución de todos los problemas que aparecen en el examen

L: Que no es sólo la respuesta sino todo el procedimiento

Emi: Exactamente, entonces de esa manera ellos van teniendo ese material, que además como los profesores tendemos a poner siempre un determinado tipo de exámenes, aunque a mí siempre me gusta variar, claro sino se acostumbrarían a trabajar una determinada pregunta, pero creo que es necesario tener el suficiente material de evaluación para los alumnos, en el sentido de que cuando ellos, como tienen que enfrentarse a exámenes, tengan un conjunto de exámenes que les sirvan de referencia, es decir, para preparar el examen porque sino se perderían en el estudio y preparación de los exámenes, entonces ellos tienen modelos de exámenes y tienen la resolución de esos modelos y eso lo he hecho en Álgebra con anterioridad al examen, es decir, no solamente les he dado el examen corregido y con las respuestas, posteriormente a la realización del examen sino que además, con anterioridad les he dado un modelo, un modelo en el que realmente aparecían todos los tipos de preguntas que a mí me han parecido fundamentales en el tema, para que ellos se centren en lo que realmente es importante y además, que puedan preparar correctamente sus exámenes y claro, así a lo largo del curso, conforme va pasando el tiempo van teniendo más material, de tal forma que al final del curso, ahora por ejemplo, porque claro en la primera evaluación que fue cuando tratamos el examen de Álgebra, hice un examen parcial de matrices, otro de sistemas de ecuaciones y luego ya el de bloque, todo eso junto con lo de programación lineal incluida, me hubiera gustado haber hecho uno de programación lineal separado, parcial, igual que hice con los dos primeros temas, pero no fue posible, por falta de tiempo y porque en esas semanas ya tenían muchos exámenes los alumnos y no me pareció adecuado, pero claro hicieron ese examen de bloque, luego hicieron antes de que acabara la evaluación, el último día de la evaluación, un examen de recuperación, luego en enero volvieron a tener otro examen de recuperación y luego algunos alumnos que estuvieron enfermos, les tuve que poner otro examen de recuperación a lo largo de la segunda evaluación y luego ahora, cuando hemos terminado toda la materia del curso, que ya hemos terminado los tres bloques, Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística, pues ahora en este mes de mayo, que estamos preparando ya el examen

final, cada semana tenemos la semana dedicada a cada uno de los bloques, entonces ya hemos tenido la semana de Álgebra, es decir, en esta semana que ha transcurrido hemos vuelto a repasar el contenido, les he vuelto a dar material de Álgebra y hoy mismo van a hacer otro examen de Álgebra, entonces claro, ya con todos esos exámenes de Álgebra que han hecho en el curso, tienen una base suficiente para luego preparar el examen final que haremos al final del curso

L: Quiere decir que los alumnos cuentan con un banco de preguntas y respuestas

Emi: Sí, y yo creo que eso es muy útil para ellos, no solamente la selección de ejercicios que se hagan en clase o el material extra de trabajo que se realice en casa

L: Muy bien, ¿cuáles son sus estrategias para el manejo del salón de clase, es decir, para mantener la disciplina en el grupo, para que le pongan atención cuando explica, etc.?

Emi: Pues eso depende del grupo, porque nunca se pueden seguir las mismas estrategias con alumnos distintos, es decir, a cada grupo y a cada alumno hay que darle un tratamiento, muchas veces personalizado

L: ¿En este grupo en particular?

Emi: En este grupo no me he tenido que esforzar, es un grupo reducido, son alumnos de segundo de bachillerato ya con una cierta edad y bueno es cierto que a la par, creo que soy muy familiar y muy cercana, pero también... o será porque ya me conocen de otros cursos, porque a algunos alumnos de ellos ya les he dado clase en otros cursos, pues me pongo seria cuando me tengo que poner seria y no tengo que esforzarme mucho, es decir, no tengo que ponerme más seria de la cuenta para conseguir, es decir, si la clase está un poco revuelta o no tiene muchas ganas, con decir: “Vamos a trabajar”, y ponerme seria en ese momento ya es suficiente, o simplemente con una amenaza, a veces tengo que amenazar, es decir, que la verdad, las clases no son las mismas cuando se dan a primera hora de la mañana, que nunca hay que amenazar porque en esas horas no hay nadie que tenga ganas de estar despistado o de hablar. Ese problema sólo se ha planteado los viernes que es cuando he tenido clase a la quinta hora (a las 12:45) y ya están cansados por ser el final de la semana, entonces si han tenido un problema de disciplina aunque realmente no ha sido tal, y de estar con pocas ganas de meterse en la clase, en la asignatura, en el trabajo, pues he amenazado y he dicho: “El que hable sale fuera”. Entonces cuando he dicho: “El que hable sale de clase”, ha sido suficiente, luego también he notado yo el respeto que me tienen los alumnos, si el grupo no hubiera tenido ese respeto, pues posiblemente no conseguiría las cosas con tanta facilidad que las he conseguido o me tendría que ganar el respeto con más trabajo, no lo sé, eso depende muchas veces de ellos, no depende de mí.

L: Muy bien, vamos a continuar la entrevista, ahora vamos a abordar algunas preguntas referentes al conocimiento didáctico del contenido, primero le comentaré lo que vamos a considerar como conocimiento didáctico del contenido. Lo vamos a considerar como el conocimiento que va más allá del conocimiento del propio contenido matemático, es decir, como el conocimiento del contenido que incorpora los aspectos más relacionados a su enseñanza, en el cual se incluyen por ejemplo, las formas más útiles de representación, en matemáticas se pudiera decir por ejemplo en el nivel primaria, el uso de rectángulos o círculos para representar fracciones. También se incluyen los ejemplos, las explicaciones, las analogías que usted utiliza, las ilustraciones y las demostraciones que considere más adecuadas en el caso de que se consideren demostraciones en el propio contenido. Es decir, en este tipo de conocimiento se toman en cuenta las formas de representar y formular ese contenido matemático para hacerlo comprensible para otros, vale

Emi: Sí

L: Entonces, con base en eso

1. ¿Qué tan importante es que los profesores tengan un conocimiento profundo sobre la didáctica de la matemática que enseñan?

Emi: Pues realmente es muy importante, porque es cierto que se puede tener un conocimiento matemático, pero no el adecuado para la didáctica, es cierto, siempre cuando hay que transmitir un conocimiento matemático, hay que plantearse cómo se realiza esa transmisión, cómo se va a presentar ese conocimiento, cómo se va a exponer, qué formas de representación, entonces es muy importante la experiencia, porque la experiencia nos ayuda a determinar qué sistemas de representación son más útiles, cuáles menos y también pues por ejemplo, a lo largo de los años, en inventar nuevas formas de representar o de mostrar esos contenidos, la forma gráfica, las analogías en matemáticas ayudan mucho a que el alumno incorpore ese conocimiento, le resulte cercano, porque siempre claro, las matemáticas tienen un componente abstracto que hay que concretizar y la simbología matemática, la notación matemática hay que hacerla asequible y que le resulte en cierto modo natural, y luego cuando se están ya desarrollando los contenidos específicos de un tema, pues hay que determinar cuál es la mejor manera de representar, entonces realmente creo que es muy, muy importante

L: ¿Y cómo saber cuál es la mejor forma de representar?

Emi: Pues ¿cómo elegir?, eso nos lo da la práctica, porque de hecho, el otro día se lo comenté a unos alumnos de mi grupo, que ahora me gustaría a mí empezar el curso, ahora que estoy acabando, porque claro se da la circunstancia especial de que es la primera vez que enseño estas matemáticas y efectivamente no es lo mismo enseñar que conocer, porque el Álgebra, es cierto que la he enseñado durante muchos años pero en unas matemáticas de Ciencias, no en unas matemáticas de Ciencias Sociales, con el Análisis, con las funciones matemáticas, todo el tema del Cálculo Diferencial y de sus aplicaciones, es cierto que lo he explicado muchas veces, lo he enseñado en matemáticas de Ciencias pero nunca en las Matemáticas Sociales y luego para terminar el último bloque, el de Probabilidad y Estadística, pues es la primera vez, no lo he dado antes en otras asignaturas, con lo cual analizando el desarrollo del curso y cómo me he enfrentado a los distintos temas a cómo explicar cada uno de ellos, si he notado que ahora que he visto la repercusión de esa selección, si pudiera volver a empezar cambiaría algunas cosas y no me resultaría tan difícil como me ha resultado en algunos casos enseñar

L: Por ejemplo, ¿qué cambiaría?

Emi: Por ejemplo con la Probabilidad, tuve la suerte de tratarla en dos asignaturas distintas primero en Estadística y después en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, entonces gracias al fracaso que tuve en Estadística la primera vez que expliqué el tema, porque me di cuenta de que la forma que yo había tenido de dar el tema, no había sido la adecuada porque no había conseguido que los alumnos fueran capaces de resolver prácticamente nada, de hecho, como me di cuenta, ni siquiera en ese momento les puse un examen de Probabilidad, les mandé un trabajo de clase y luego evalúe con los demás exámenes que tenía, y eso me sirvió para la asignatura de Matemáticas, cuando tuve que volver a dar la Probabilidad, que era el mismo tema, ya lo abordé de forma totalmente diferente, ya realicé unos esquemas de los diferentes tipos de problemas que se podían presentar y las explicaciones que dí y la forma de decirles cómo se razonaba ya era totalmente diferente a la primera vez que había abordado con ellos porque claro, para mí resolver problemas de Probabilidad era muy fácil, prácticamente no necesito pensar es automático, pero claro transmitir eso, ¿cómo se

enseña a resolver problemas? Pues no es tan fácil a veces, sobre todo cuando no se necesita casi ninguna herramienta matemática o son muy simples, porque con Álgebra por ejemplo, no es tan complicado porque son unas estrategias y unos métodos que son sencillos, salvo las dificultades con las operaciones y poco más, no es complicado, pero en Probabilidad sí que hay que pensar un poquito más, es muy importante hacer la selección y pensar cómo se dan las explicaciones y cómo se ponen los esquemas y qué tratamiento se le da

L: Eso tiene relación con la siguiente pregunta

2. ¿Cuál es el conocimiento didáctico que necesita un profesor para enseñar ese contenido matemático del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato?

Emi: Pues en ese sentido, la práctica hace que el profesor tenga que hacer hincapié en las matrices, en la particularidad de las matrices, que pese a que las operaciones con matrices se basan en las operaciones con los números reales, pero las matrices son un ente propio diferenciado de los números reales aunque en su constitución aparezcan los números reales, entonces tienen que acostumbrarse a pesar de las similitudes con los números, que en las operaciones con números reales hay propiedades que no se cumplen con las matrices y que sí que se cumplen con los números reales, y operaciones que existen con los números reales y que no se pueden definir con matrices, eso por ejemplo cuando se trabaja con ecuaciones matriciales en donde hay que encontrar una matriz y en la expresión matricial al despejar la X, a algunos alumnos se les ocurre dividir por una matriz, por similitud con los números, entonces si el profesor tiene ya ese conocimiento, de la tendencia que tienen los alumnos en algunos casos, puede tomar medidas preventivas, y sobre todo hay que hacer hincapié en ese tipo de cuestiones; en la parte de sistemas, pues como es un tema muy familiar porque es un tema que han estudiado desde secundaria y también en primero de bachillerato, realmente no creo que sea tan importante el conocimiento del profesor, es importante pero a lo mejor ya por la familiaridad que tienen con los sistemas, en bachillerato no, en secundaria es donde es importante porque esa será la base para después y luego en la parte de programación lineal, que yo no tengo ninguna experiencia, que por primera vez la he dado, pues bueno creo que en este caso si he tenido mejor suerte que con la Probabilidad y desde el principio seguí un camino que vi que funcionaba, no tuve que ensayar otros caminos, entonces la representación con las tablas y seguir un esquema muy concreto en el desarrollo de los problemas de programación, hizo que desde un principio los alumnos pudieran abordar esos contenidos sin demasiada dificultad

L: Sí muy bien,

3. ¿Considera que hoy en día es más difícil enseñar este contenido matemático, en particular este del primer bloque que antes? Si/No ¿por qué?

Emi: Bueno en el caso concreto de las Matemáticas Sociales creo que no es más difícil que antes, porque en Matemáticas Sociales lo que prima no son las matemáticas en sí sino sus aplicaciones, entonces las matemáticas son un instrumento, no ocurre así en las Matemáticas de Ciencias donde antes se formalizaba y se hacían demostraciones y se teorizaba mucho más y además los problemas que se elegían tenían una dificultad mayor y una entidad mucho mayor que los que se seleccionan ahora en este momento, sin embargo, como he dicho antes en las Matemáticas Sociales no ocurre así, que como es una asignatura relativamente nueva, por lo menos desde que existe el bachillerato LOGSE, porque claro yo antes, no tengo referencias de la asignatura en, con el sistema

anterior que no era este bachillerato, no sé cómo se daba ni qué contenidos tenía, imagino que eran parecidos, pero desde el bachillerato LOGSE no ha cambiado, es decir, que se estudian las aplicaciones de ciertos contenidos matemáticos y pienso que no es más difícil ahora que antes

L: Bien,

4. Conforme cambia su propia comprensión, ¿percibe algún cambio en la forma en que enseña? ¿en qué consiste ese cambio? ¿qué es lo que provoca dicho cambio?

Emi: ¿Cómo?

L: Comparando la forma en que usted enseñaba hace cinco o un poco más de años, ¿ha percibido un cambio en como enseñaba antes y como enseña ahora?, en dado caso que si perciba ese cambio ¿en qué consiste ese cambio y qué es lo que considera que provoca ese cambio?

Emi: Es cierto que aunque he seguido una línea bastante parecida, una trayectoria sin grandes saltos, pero si a lo largo de mi carrera profesional he notado yo que he ido cambiando la forma de acercarme a los temas, de abordarlos, de dar las explicaciones, en un principio yo pensaba que las matemáticas se entendían de por sí, es decir, que siendo una persona clara, teniendo claridad en las explicaciones, siguiendo un orden lógico, explicando las propiedades correctamente, las matemáticas se comprendían de por sí, sin necesidad de otras ayudas extras y con el tiempo he percibido..., claro es cierto que al principio tuve esa impresión porque realmente percibía que los alumnos sí eran capaces, es decir, que si aprendían matemáticas, pero conforme fue cambiando el sistema educativo, fueron cambiando los alumnos en el sentido de que los alumnos ya venían con otras técnicas de trabajo, con otra forma de abordar el aprendizaje y los contenidos también cambiaron pues hubo que adaptarse y entonces de forma natural porque tampoco lo hice conscientemente pero ahora claro, volviendo la vista atrás me doy cuenta de ello, que ahora analizo mucho más las cosas desde fuera, es decir, no estoy metida dentro, sino que intento salirme fuera y presentarles las cosas e intentar explicarles ese lenguaje matemático, cómo se utiliza, para qué sirve, hacer muchas comparaciones, otras formas de dar los ejemplos, de presentar los temas en general, sí que he cambiado en ese sentido

L: ¿Pero qué es lo que provocó ese cambio?

Emi: Pues yo creo que la adaptación al medio natural, en mi caso tenía que seguir siendo profesora y mi objetivo seguía siendo el mismo, que los alumnos tenían que aprender, entonces si no lo conseguía entonces de alguna manera tenía que hacerlo y entonces conforme vi que la percepción de los alumnos cambiaba y que el grado de abstracción de los alumnos cambiaba, pues yo me fui adaptando a ese cambio

L: A ese medio

Emi: Si

L: Muy bien,

5. ¿Qué se necesita para enseñar este contenido matemático, en general? Usted ya había comentado algunos aspectos de carácter didáctico y matemático ¿habría otro por agregar, algún otro conocimiento que se requiera además de estos?

Emi: Se me ocurre que cuanto más conocimientos colaterales se tengan, mucho mejor, porque es cierto que yo noto que tengo ciertas deficiencias en el campo de las matemáticas aplicadas y que gracias a que este año he dado esta asignatura y he ido leyendo libros, pues entonces he podido tratar el tema de otra forma, si tuviera un mayor

conocimiento en lo que son las áreas de aplicación, porque claro mi conocimiento es superficial, pero mejoraría la forma, por lo menos de abordar los temas, no ya de tratarlos en sí, de desarrollarlos porque no creo que cambiara mucho pero si de darles a ellos una visión más amplia del campo de aplicación, he intentado de todas formas en este bloque de Álgebra la verdad que me he esforzado en la introducción de cada uno de los temas por conseguir esto, pero claro reconozco que cuanto más conocimientos se tengan, mucho mejor para este bloque

L: ¿Conocimiento de qué corte?

Emi: De eso, de todas las áreas no matemáticas que utilizan estos conocimientos matemáticos, ¿porqué? Bueno pues ya hemos tratado muchos de ellos y les he mostrado muchos de ellos, pero es algo que realmente mientras más se conozca pues mejor porque se le da más consistencia a esta asignatura

L: Muy bien,

6. ¿De qué forma o cómo influyen los estudiantes en su conocimiento didáctico del contenido?

Emi: Pues influyen bastante en el sentido de que como ellos son mi materia de trabajo, es decir, mi trabajo da resultado si ellos adquieren el conocimiento que yo les quiero transmitir o si no el conocimiento, por lo menos las estrategias o las herramientas como las queramos llamar, entonces son para mí como un material de laboratorio en el sentido de que si desarrollo un método de trabajo, veo cómo repercute ese método de trabajo, si funciona ellos son los que me lo van a decir si funciona o no, es decir, no puedo establecer *a priori* si un método o unas estrategias de trabajo van a ser válidas, a veces con la experiencia de muchos años puedo pensar que sí, pero en algunas ocasiones precisamente como los alumnos no son los mismos, esas estrategias no sirven, entonces son los alumnos los que hacen que yo tenga que cambiarlas en un momento dado o mejorarlas porque hay veces que no se trata de un cambio drástico pero sí de ciertas modificaciones que ayudan a un mejor desarrollo de los contenidos, de la asignatura

L: Sí, entonces

7. ¿Qué tan importante es que el profesor conozca la naturaleza del entorno del estudiante, del entorno de la escuela?

Emi: Pues cuando yo empecé, realmente no le daba tanta importancia, porque las condiciones eran distintas en el sentido de que al centro de bachillerato sólo acudían los alumnos que querían estudiar bachillerato y que iban a seguir luego en la universidad, era una enseñanza totalmente voluntaria, entonces aunque conocía las características de la zona, del barrio, en realidad sabía que eran los mejores estudiantes de la zona, entonces no importaba si la zona era de una manera o de otra porque yo sabía que esos alumnos precisamente estaban motivados para estudiar, porque de forma personal y voluntaria habían decidido hacerlo, ahora es distinto, porque ahora la secundaria es obligatoria para todos, entonces si importa mucho conocer la familia de donde proviene un alumno o el entorno porque eso va a determinar en algunas ocasiones o en muchas ocasiones el comportamiento en el aula y en cómo se enfrente al profesor, o a la asignatura o al trabajo en sí. En bachillerato ya menos porque claro, en los cursos de bachillerato hay pocos alumnos, porque no todos los alumnos que pasan por secundaria siguen sus estudios en bachillerato, algunos van a ciclos formativos y otros ni siquiera terminan la secundaria, entonces es cierto que cuando llegamos a la etapa de bachillerato ocurre como antes, muchos de los que están aquí es porque son los mejores,

en el sentido de que son los que han elegido esto de manera voluntaria, entonces no importa mucho el entorno o la zona

L: Bien, ahora pasamos a hacer unas preguntas referentes a la evaluación,

1. ¿Con base a qué selecciona los problemas que pone en un examen?

Emi: Pues primero los selecciono en cuanto a si se adecuan o no a los contenidos dados, por ejemplo, particularizando en el bloque de Álgebra, pues me tengo que ceñir a problemas de Álgebra de sistemas y de programación lineal, pero tengo que seleccionar algunos problemas que realmente sean del nivel de la asignatura, porque como el Álgebra se puede dar en distintas etapas, tengo que seleccionar los que correspondan a esta etapa y después, además de que se adecuen a los contenidos que hemos dado y al nivel de la etapa, ahora tengo que decidir el nivel de dificultad que quiero, porque en algunas ocasiones, como hay una gran variedad de ejercicios, unos que son mucho más sencillos que otros, otros son más complicados y unos requieren unos conocimientos más profundos del tema, otros menos entonces tengo que ponderar y suelo equilibrar, me gusta seleccionar los ejercicios de forma que sea fácil, sacar un aprobado, pero que no sea tan fácil sacar un sobresaliente por ejemplo, entonces siempre hay una pregunta que tiene una mayor dificultad o que tiene a lo mejor un nivel que aunque sí se ha tratado en clase, pero no ha sido el nivel medio y luego en cambio otros ejercicios que si son totalmente del nivel medio trabajados en clase, incluso a veces bastante sencillos, para compensar, si uno tiene una dificultad bastante elevada, cosa que intento que tampoco sea, intento que haya una dificultad pero hasta cierto punto, pero siempre compensar para que las preguntas del examen como media, tengan una dificultad también media

L: Comentaba algo de que fueran del nivel, supongo que se refiere a que sean de nivel bachillerato

Emi: Exactamente

L: Pero ¿cómo identifica que sea de ese nivel? ¿qué características le permiten decir que corresponde más a bachillerato?

Emi: Pues, es cuestión de leer el problema porque como he dicho antes, en la parte de Análisis soy capaz de crear mis propios ejercicios, no tengo que usar recursos externos con otros libros o con otras fuentes, pero en Álgebra por comodidad, la verdad que sí que recurro a diferentes libros de texto, a material que ahora se encuentra en Internet disponible en unas cantidades ingentes, entonces ¿qué ocurre?, que voy leyendo los distintos tipos de ejercicios y ya voy haciendo primero una primera selección y después de entre la primera selección que he hecho, a lo mejor digo, pues este lo elimino porque es demasiado fácil y luego este lo elimino porque es excesivamente difícil, pero luego si me quedo con un par de ellos, de un tipo determinado que me gustan, ahora los hago, los hago porque engañan a veces los enunciados, entonces tengo que ver que realmente la resolución del ejercicio se adecua a lo que hemos trabajado en el aula

L: Voy a hacer una pregunta que es bastante extensa pero que puedes ir contestando poco a poco, vale

Emi: Si

L: Cuando hace un examen,

2. ¿Qué desea evaluar? ¿qué parte del contenido quiere evaluar? ¿qué habilidades quiere que demuestren tener los alumnos? ¿cómo evaluar el aprendizaje de los alumnos en ese contenido?

Emi: Bueno eso es difícil, porque siempre lo de la evaluación es algo bastante subjetivo e intento que sea lo menos subjetivo posible pero por ejemplo, ¿qué es lo que me gusta evaluar? Pues evaluar la expresión matemática, me gusta evaluar el orden, me gusta evaluar el tratamiento matemático e incluso en algunos casos no todos los contenidos permiten esto, pero incluso la creatividad ¿no?, pero en general es eso, evalúo el desarrollo, lo que es la aplicación de los contenidos y luego la ejecución. Hay veces que a la ejecución le doy más o menos importancia, otras veces en las que, bueno al desarrollo siempre le doy bastante y a la expresión matemática, pero en general, sobre todo eso ¿no?, los conocimientos que han adquirido ¿cómo se pueden ver en un examen?, pues así a través de la resolución y según como realicen esa resolución pues es su expresión, el orden, la secuenciación, las oportunas explicaciones y luego pues la realización y ejecución del ejercicio

L: Y ¿qué podría decir en cuanto a qué parte del contenido quiere evaluar?

Emi: Pues claro, siempre se intenta que las preguntas del examen abarquen la mayor cantidad posible de contenidos, que no se reduzcan a una parte pequeña, en Álgebra, pues normalmente en la parte de matrices me gusta siempre evaluar por un lado las operaciones con matrices y por otro lado lo que es la resolución de ecuaciones matriciales, en la parte de sistemas de ecuaciones me gusta evaluar el planteamiento del enunciado, en caso de que el problema tenga un enunciado o en este examen por ejemplo, que no tienen enunciado pero que tiene un planteamiento distinto por que el sistema no viene dado explícitamente, lo tienen que encontrar ellos, luego me gusta evaluar el método que ellos eligen para resolver el sistema, entonces evalúo la presentación del método, cómo ellos van explicando, el método que utilizan hasta llegar a la solución y en la parte de programación lineal todos los problemas que he puesto con enunciado, entonces evalúo que ellos sean capaces de escribir los datos correctamente, que sean capaces de definir las incógnitas, evalúo también que sean capaces de definir la función objetivo, que sean capaces de expresar qué es lo que se está buscando en el problema, si se está intentando buscar el máximo o el mínimo de una función y luego pues ya evalúo la parte más mecánica de la resolución que una vez que ya tienen planteada la función y las inecuaciones sean capaces de resolver el sistema, que dibujen correctamente la solución, la región factible y luego ya que encuentren la solución que se busca

L: Y por ejemplo en este grupo ¿cómo va a evaluar? ¿A parte del examen qué otros aspectos va a considerar?

Emi: Pues aparte de la nota del examen, como ellos saben hay un pequeño margen, que a veces es muy importante, en el que se tiene en cuenta la actitud en clase, la asistencia a clase, aunque claro hay veces que la asistencia ha sido irregular porque algunos alumnos han estado enfermos, entonces eso no se lo voy a penalizar, pero la asistencia, el trabajo en clase, la actitud hacía la asignatura, el trabajo personal en casa, la participación en clase, todo eso

L: ¿Qué peso tendría más o menos cada cosa?

Emi: Pues siempre eso está determinado en el departamento, es decir, hace tiempo que llegamos a un acuerdo en darle a la nota del examen un peso del 90% y un 10% al resto, ¿de qué manera y por qué lo hacemos de esta manera? Pues porque pensamos que es muy importante valorar otros aspectos que no sean solamente el éxito en la realización de un examen sino todos los demás que he mencionado, pero claro si se le da demasiada importancia a lo otro corremos el riesgo de que pasen alumnos con un conocimiento inferior a lo que se espera de ellos y claro, hay que tener en cuenta que estamos preparando para el acceso a la universidad, para que sigan continuando con estudios universitarios, entonces para mí es muy importante que ellos sepan el contenido a parte

de los otros, pero claro para ayudarles, ese punto que tiene la actitud es suficiente para que un alumno en algún caso pueda pasar de un 4 a un 5

L: Bien, la siguiente pregunta está en concordancia con lo que me está diciendo, en general, aunque ya me haya comentado cómo se pusieron de acuerdo aquí para evaluar y lo que decidieron tomar en cuenta, usted

3. En general, ¿cómo cree que se debe evaluar un contenido matemático?, es decir, de la misma forma que se está haciendo aquí o usted tiene una perspectiva personal distinta, ¿qué papel juegan las actitudes y aptitudes, disponibilidad e iniciativa de los estudiantes (a parte de las capacidades) en la evaluación de los estudiantes?

Emi: Pues como ya he dicho, incluso al principio de mi carrera profesional el sistema era diferente y yo también seguía una metodología, no muy diferente pero algo diferente y también evaluaba con otro nivel de exigencia mucho mayor, incluso en esos casos en que mi nivel de exigencia cuando evaluaba un contenido matemático aunque era muy alto, siempre he tenido en cuenta la actitud del alumno, por lo menos en un porcentaje mínimo tanto para bien y para mal, porque podía haber alumnos que sacaran una buena nota pero su actitud no era la adecuada, entonces si era por decimales, aunque fuera medio punto pero eso podía suponer que bajaran o subieran, tanto para bien como para mal y ahora todavía con más razón, ahora que ya han cambiado todos los sistemas, sigo tomando en cuenta la actitud pero con ese peso que he indicado y yo estoy conforme, es decir, que es un acuerdo al que hemos llegado en el departamento pero que yo estoy totalmente conforme con él

L: Sí, usted está en total concordancia con eso

Emi: Sí, lo que hagan por ejemplo en otros centros, porque claro aquí no hay unanimidad de criterio, en eso la ley permite ese margen, que en cada centro haya unos criterios de evaluación distintos, pues yo no le diría a nadie lo que debe de hacer, pero a mí la experiencia me dice que funciona bien, tanto para que los alumnos que sacan buenos resultados se fuercen todavía más, como para los que no llegan para poder llegar, o sea que sirve para cualquier tipo de alumnado, funciona

L: Muy bien, bueno pues eso es lo que se refiere a evaluación, ahora continuaremos con unas preguntas ya sobre tecnología

1. ¿Conoce algo sobre la relación del ordenador (u otra herramienta tecnológica) con las matemáticas y su enseñanza? Si la respuesta es sí, ¿qué conoce sobre ello?

L: Me había comentado algo sobre el programa “Descartes”, me gustaría que nos comentara algo de eso y si también conociera otro o inclusive algo sobre calculadora graficadora o cualquier otro instrumento tecnológico que usted haya usado para favorecer la enseñanza

Emi: Bueno tengo que decir que además de dar clase de Matemáticas he dado clase también de Informática, inevitablemente estoy familiarizada con los ordenadores y además desde mi primer año de trabajo casi, claro que entonces lo que yo hacía en clases de informática era enseñar programación, lo cual también servía para las Matemáticas porque quien aprende a programar, pues entrena la mente ¿no?, para ciertas estrategias, luego pues ha cambiado el mundo de los ordenadores, que ya se ha vuelto mucho más accesible y donde ahora ya hay muchas aplicaciones a nuestra disposición, pues entonces por ejemplo, he utilizado durante muchos años y con mucho éxito, la hoja de cálculo, entonces la hoja de cálculo la he utilizado siempre que he dado

los sistemas de Estadística, hemos hecho todo el tratamiento de la Estadística con tablas, con funciones de la hoja de cálculo, con representaciones gráficas en la hoja de cálculo y la verdad que siempre he estado muy contenta con los resultados

L: En particular ¿La hoja de cálculo que usa es la de Excel o es otra?

Emi: Eso da igual porque vamos a ver, no importa el sistema operativo con el que se trabaje ni la marca de la aplicación

L: ¿Tiene los recursos?

Emi: Son exactamente iguales, bueno a veces incluso algunas versiones son mejores que otras pero cuando se trabajaba con Windows y con el paquete de Microsoft Office, se trabajaba con esa, pero realmente la hoja de cálculo que yo manejé no fue esa, fue la de Lotus 1-2-3, que era magnífica, después de Lotus 1-2-3 utilicé la hoja de Excel, luego por ejemplo pasamos a utilizar la de Open Office, pero la hoja de cálculo es la misma

L: Sí, pero ¿aquí cuentan con los recursos necesarios que en dado caso usted quisiera implementar en una actividad o algo así?

Emi: No hay ningún problema porque en las aulas de secundaria tenemos ordenadores en todas las aulas, un puesto de ordenador para cada dos alumnos y todos esos ordenadores tienen la hoja de cálculo e incluso antes, cuando el centro no era centro TIC y no teníamos tantos ordenadores por aula, existía una aula de informática, entonces yo lo que hacía era subir a los alumnos al aula de informática y en los ordenadores del aula de informática teníamos hoja de cálculo y aquí en bachillerato aunque no hay ordenadores en las aulas pero tenemos carritos con ordenadores portátiles, entonces los he usado, este año no por lo que he explicado antes

L: Bien ya me has respondido la segunda pregunta que es acerca de si,

2. ¿Usted ha usado algún recurso tecnológico para enseñar matemáticas?

L: Porque en la primera pregunta era sólo saber si conoce algunos y en la segunda es si ha usado algunos recursos tecnológicos, hay algo que desee agregar sobre algún otro recurso o inclusive si hubiera usado un recurso tecnológico para enseñar en algún momento Álgebra

Emi: Pues por ejemplo, como eh dicho si he utilizado la hoja de cálculo, también he utilizado la aplicación “Descartes” e incluso en cuarto de ESO recuerdo que el tema de Álgebra de polinomios y de fracciones algebraicas, elaboré unos apuntes que luego los grabé en la memoria de cada ordenador del aula y entonces en lugar de dar la clase usando la pizarra, ellos tenían en la pantalla de su ordenador el desarrollo de todo el tema, de los esquemas del tema de Álgebra, las definiciones, los elementos que se utilizaban con los polinomios, las fracciones algebraicas, las operaciones, todo tipo de ejemplos, de esquemas visuales de trabajo con polinomios y fracciones y ejercicios propuestos

L: Y en eso ¿manejaba algunos sistemas, resolución de sistemas?

Emi: En ese caso cuando yo lo hice, fue sobre operaciones con polinomios y fracciones algebraicas, factorización de polinomios, estudio del signo de los polinomios, de las fracciones algebraicas, operaciones con fracciones, estudio de signo de fracciones, pues no utilicé el método tradicional de la tiza y la pizarra, sino al haber elaborado yo ese material de esa forma tan personal y que ellos lo tuvieran visible en la pantalla, pues ahí estaban propuestos ya todos los ejemplos y también los ejercicios de clase que ellos tenían que resolver, pues fue distinta

L: Y por ejemplo ¿para temas ya más sofisticados como matrices y todo eso, ha usado algún programa? ¿El “Matemática” o algún otro?

Emi: No, para matrices no he utilizado nunca, como profesora me refiero

L: Bien y por ejemplo todo lo que me ha comentado que ha aplicado,

3. ¿Dónde aprendió a usar esa tecnología, e inclusive dónde aprendió esa didáctica, porque es aplicar otra didáctica con la tecnología, dónde aprendió ese conocimiento para poder aplicarla?

Emi: Bueno todo lo que se refiere a ordenadores lo he aprendido siempre por mi cuenta, de forma personal y claro, al tener que dar clases de informática, también he aprendido mucho en las clases pero realmente luego hubo unos años, durante unos 6 ó 7 años fui profesora del programa de diversificación, dando la asignatura al ámbito de científico-tecnológico, entonces me dí cuenta con esos alumnos que llevan un programa diferenciado en la secundaria que tienen muchas dificultades y que por eso pertenecen a ese programa, se me ocurrió un buen día al comienzo del curso, en lugar de dar las clases en el aula, llevarlos al aula de informática y empezar a trabajar con ellos las matemáticas con el ordenador, con la hoja de cálculo y así cada alumno seguía su ritmo de trabajo, pero claro eran alumnos con muchas dificultades y además no había uniformidad, cada uno tiene dificultades y además cada uno con unas características muy diferentes a otros, unos mucho más rápidos, otros más lentos, había bastante diversidad, entonces eso les permitía que cada uno siguiera su forma de aprendizaje, pero eso logró que subiera la autoestima de esos alumnos automáticamente y que su concepto de la clase cambiara y que estuvieran totalmente motivados y eso me hizo, después de trabajar con esos alumnos, pensar que podría resultar en mis clases de matemáticas normales

L: Es decir, que a ti nadie te dijo: “Emi puedes dar la clase de esta forma”, sino que tú sola te atreviste a implementar esas hojas de cálculo para Álgebra, todo eso, es decir, que tú misma diseñaste esas actividades, etc., etc.

Emi: Si siempre todas las actividades con el ordenador me las he inventado, pero vamos que original no creo que sea

L: Pero por ejemplo, ¿en este centro hay algún curso de capacitación para didácticas con tecnología o una cosa así?

Emi: No, es cierto que el centro de profesores de vez en cuando da cursos y alguna vez han dado de utilización de los ordenadores y sus aplicaciones, pero como yo ya conocía todo lo de los ordenadores, pues ya no fui a esos cursos

L: ¿Pero son cursos generales?

Emi: Exactamente es para el profesor que quiera se apunta y el que no, no. Es cierto que en el departamento he sido la primera en utilizar esos recursos, mucho antes que los demás pero claro es que cuando no éramos centro TIC y solamente existía el aula de informática, pues yo era la única profesora del departamento que utilizaba esos recursos

L: Y

4. ¿Qué resultados ha obtenido cuando usó esos recursos?

Emi: Como he dicho antes, un gran resultado fue con los alumnos que habían empezado el curso con una autoestima muy muy baja, porque a las alumnos del programa de diversificación les decían que eran los más tontos, pues que cambiaran completamente la idea de ellos mismos y de lo que eran capaces de hacer, es cierto que los engañaba un poco, pero no tanto porque no nos dedicábamos a hacer pasatiempos, sino que yo les daba unas matemáticas que tenían bastante contenido de Estadística porque me parecía que se adaptaba bastante bien a los recursos con la hoja de cálculo y a las capacidades que ellos tenían, además luego el trabajo con la hoja de cálculo les permitía mucha

creatividad, es decir, yo le daba mucha libertad después de enseñarles la utilización de todas las funciones de la hoja de cálculo, luego la presentación era libre y ellos se motivaban mucho con eso y hacían al final unos trabajos magníficos y luego además estaban, como he dicho, mucho más contentos de ellos mismos, eso en primer lugar, luego conseguía que a través de esa satisfacción personal, cuando cambiaba el método y abordábamos otros contenidos que la actitud fuera totalmente distinta y cuando lo he utilizado por ejemplo en primero de bachillerato con los alumnos de Ciencias cuando hemos estado trabajando con las funciones y utilizábamos las gráficas a través de la aplicación “Descartes” y todo eso, pues también mejoraba el conocimiento que ellos tenían de las funciones porque con muy poco tiempo se obtenían muchos resultados, es decir, eran capaces de analizar muchas funciones y de ver características comunes en unas y en otras, cosa que si la hubiéramos hecho de la forma tradicional, hubiéramos tenido que dedicar mucho más tiempo y realizar unos estudios mucho más penosos que a lo mejor no interesaban tanto como el estudio global

L: Emi,

5. ¿Cómo cree que influirían estos recursos o cualquier recurso tecnológico en el aprendizaje de este contenido matemático del primer bloque?

Emi: Bueno en el aprendizaje del contenido yo creo que cualquier recurso que se utilice es bueno y dado que vivimos en un mundo tecnológico y ya ahora no lo podemos negar a lo mejor hace 20 años sí, pero ahora ya no y a los alumnos a los que les doy clase han nacido ya con este mundo tecnológico, pues la verdad es que es un recurso adecuado, no es que sea imprescindible pero pienso que hay que modernizarse en ese sentido

L: Usted

6. ¿Qué propondría para enseñar un contenido matemático de bachillerato, por ejemplo matrices, o cualquiera de Álgebra del primer bloque usando el ordenador?

Emi: Pues en las matrices perfectamente se puede trabajar con las matrices porque incluso la misma hoja de cálculo me permitiría que ellos usaran las funciones, definieran las funciones y que hicieran pequeñas calculadoras matriciales, es decir, que inventaran una calculadora para sumar matrices de un tamaño, otra para otra de otro tamaño u otra calculadora para multiplicar matrices, para calcular la inversa, es decir, todas las operaciones que ellos realizan manualmente, podrían hacer calculadoras dentro de la hoja de cálculo

L: Muy bien, de manera global Emi

7. ¿Qué tan importante es que los profesores tengan un conocimiento acerca de las herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas y en particular en bachillerato?

Emi: Pues como he dicho, no creo que sea esencial o fundamental pero sí aconsejable por las razones que he expuesto antes

L: Bien, usted

8. ¿Tuvo alguna dificultad al intentar implementar la tecnología o cualquier software por ejemplo, en el aula?

Emi: Bueno la única dificultad que hay, siempre y cuando los ordenadores funcionen bien, y en eso he tenido suerte, independientemente del sistema operativo con el que haya trabajado o las aplicaciones que haya trabajado, la verdad no he tenido que dedicarle mucho tiempo porque es cierto que para mí ha sido una herramienta bastante natural y además creo que siempre se me han ocurrido actividades adecuadas para las Matemáticas, el problema está en desarrollar esas actividades con ellos en el aula cuando el grupo es numeroso, porque son actividades que a ellos les atraen, que les gusta, pero hay veces que tienen cualquier problema entonces tienen que consultarme y claro como es una clase totalmente personalizada en la que yo tengo que atender cada problema que se presenta a cada alumno pues muchas veces me ha ocurrido en esas clases, que no he podido atender a todos los alumnos, es decir, de hecho llegué al acuerdo con ellos de decirles en esta clase atiende de esta mitad de la clase hasta aquí y la siguiente clase atenderé a la otra parte, porque claro, empezaban a llamarme Emi, Emi, pero es que digo, a todos a la vez no puedo, decían es que hoy no me has atendido, pues es que no he podido, entonces esa es la única dificultad real con la que yo me he encontrado

L: Muy bien, pues ya para concluir Emi, dos preguntas pero son bastante globales, de hecho son un poco para sintetizar toda esa riqueza que nos has compartido, sobretodo al inicio, de tu experiencia, del conocimiento didáctico del contenido, de los estudiantes, etc.

1. ¿Qué tan importante es que los profesores tengan un conocimiento profundo de las matemáticas que enseñan?

L: Ya estamos hablando de todo el corporativo de profesores, su visión, saliéndose un poquito y viendo las cosas desde fuera ¿por qué es tan importante o qué tan importante es eso?

Emi: Bueno tradicionalmente yo no pensaba que fuese así pero por lo visto se tenía la creencia general de que los profesores de matemáticas eran muy malos profesores, yo nunca tuve esa percepción como alumna de matemáticas, todo lo contrario, yo siempre he pensado que he tenido unos profesores magníficos, pero luego cuando he empezado a trabajar y he estado en contacto con otra gente y he estado incluso en algunos cursos para profesores, porque recuerdo uno en concreto cuando cambiamos del sistema antiguo al de LOGSE, que nos obligaron a todos los profesores a hacer un curso de 100 horas, recuerdo a un profesor de la universidad del departamento de Didáctica, y no lo voy a mencionar, pero yo no estaba de acuerdo con la forma en la que lo estaba expresando y puede que mi visión sea un poco partidista, entonces en ese curso me di cuenta, fui consciente del concepto que se tenía en general de los profesores de Matemáticas, que no era nada bueno, bueno en ese momento a mí me molestó

L: ¿Pero qué concepto?

Emi: Pues que los profesores de Matemáticas tenían unas prácticas didácticas malísimas o sea que, y utilizaba unas metodologías que no eran las adecuadas, o sea como que los profesores de Matemáticas no sabíamos enseñar, podíamos ser Matemáticos, podíamos tener un conocimiento profundo de las Matemáticas pero que como profesores éramos bastante malos, y entonces eso no creo que sea cierto, es decir, y pasará como en todas las áreas profesionales, habrá mejores, peores, malos, buenos, malísimos, habrá de todo; pero sacar esa generalización me parece a mí muy arriesgado, pero sí es cierto que es necesario que el conocimiento matemático profundo del que hemos hablado antes se tenga, porque sino se cae en ese encasillamiento que he mencionado, si un profesor no aprende de su práctica diaria y no modifica sus

estrategias a partir de la práctica diaria y no flexibiliza sus esquemas de trabajo o de evaluación o de práctica docente, pues es cierto que se queda en, por lo que yo entiendo con una mala práctica, es decir, que no va a mejorar y puede que en algún caso, pues si el alumnado o la sociedad o todo el conocimiento en general y la forma de adquirir el conocimiento cambia, pues puede que ese profesor se quede no anticuado sino que no haga realmente bien su trabajo, entonces sí deberíamos ser más críticos, pero no solamente los profesores de Matemáticas sino todos los profesores, es decir, que no basta con ir todos los días, cumplir nuestro horario de trabajo e ir a casa, sino que hay que analizar esos resultados, y es cierto que en las reuniones del departamento analizamos los resultados y hablamos de los problemas, pero también es cierto que no tenemos la tranquilidad suficiente para poder tratar de estos temas didácticos, que cuando yo empecé si se trataban, es decir, había tiempo en las reuniones de departamento y a lo largo de toda la semana, no solamente en las reuniones y los profesores de Matemáticas estábamos continuamente tratando cuál era la mejor manera de abordar los contenidos, cuál era la mejor forma de secuenciar los contenidos, qué estrategias aplicar, compartíamos muchas experiencias. Esto con el paso de los años se ha perdido, por lo menos en mi departamento, también es cierto que yo llevo años fuera del departamento porque mi cargo de Secretaria me impide estar en contacto con los profesores de departamento, entonces tampoco lo que yo estoy diciendo es real, sino que es la impresión que tengo yo

L: De hasta el momento en que usted estuvo en el departamento

Emi: Si, no en el momento actual de este curso académico, pues me imagino que sí que habrán tratado estos temas, pero es cierto que antes había más tranquilidad, que el profesor tenía más tiempo para pensar en su práctica docente y ahora por las exigencias de, que tenemos con las guardias que hay que realizar en el centro y con todo el papeleo, el tema burocrático, descuidamos cuestiones que son fundamentales, porque la administración educativa nos obliga a hacer otras cosas que no son puramente docentes

L: Sí, y en concreto, en síntesis

2. ¿Cuál sería el conocimiento matemático necesario que requiere un profesor para enseñar este contenido matemático, explícitamente o sólo el del primer bloque de segundo de bachillerato, enfocado a las Ciencias Sociales?

Emi: El conocimiento...

L: Sí el conocimiento matemático necesario

Emi: Conocimiento curricular

L: De todo el que usted quiera, de todo el conocimiento que usted crea que se ocupe para poder enseñar ese contenido, puede ser didáctico, matemático, del que usted quiera

Emi: Sí, hay que partir de la base porque primero hay que conocer el contenido curricular, las matemáticas en sí, en lo que es el Álgebra, hay que conocerlo a profundidad, no solamente a nivel de segundo de bachillerato, después de tener un conocimiento a profundidad del tema, dado que son matemáticas que se aplican a las Ciencias Sociales, hay que conocer en qué otras áreas o materias se utilizan estos conocimientos matemáticos del Álgebra y cómo lo utilizan, no solamente cuáles de ellos se utilizan sino cómo lo utilizan, esto a nivel general, luego a nivel particular del conocimiento profundo en el aula, de cómo enseñar este contenido pues es cierto que hay que conocer cuáles son los contenidos, o sea los conocimientos previos que tiene el alumno cuando llega a segundo de bachillerato, hay que saber exactamente qué parte de Álgebra conocen y cuál no, cuáles son conocimientos nuevos para él y cuáles no son

nuevos, luego también hay que conocer cuáles son las dificultades que tiene el alumno para intentar palearlas y luego claro, hay que conocer cuáles son las distintas metodologías que se pueden aplicar, las diferentes formas de trabajar en el aula, todos los recursos disponibles que hay y cómo utilizarlos, es decir, que es realmente un contenido muy amplio.

L: Bueno Emi pues agradezco muchísimo todo su tiempo, que fue bastante el que la distraje, muchas gracias y bueno terminamos la entrevista.

ANEXO VI. Transcripción de la entrevista realizada a Aly

L: Buenos días, estamos con la profesora Aly del Instituto, vamos a comenzar la entrevista.

L: Eh, buenos días profesora, todas las preguntas que vamos a hacer son con base meramente en su práctica y casi todas las preguntas están orientadas principalmente al primer bloque (Álgebra) que fue el que estuve trabajando con usted, bueno esta información que se obtenga será usada con fines meramente científicos aplicados en mi tesis que pertenece al área de Desarrollo Profesional del Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía de la Universidad de Huelva, empezaremos con unas preguntas respecto al currículum.

1. ¿Quién propone los materiales curriculares, el libro de texto por ejemplo o las programaciones de los contenidos matemáticos que estudian los alumnos de segundo de bachillerato?

Aly: Bueno nosotros trabajamos con libros de texto y la programación sale directamente del departamento, luego en los libros de texto, las editoriales hace cada una sus propuestas y nos lo envían para que le echemos un vistacito, lo examinamos un poquito, el departamento entero y ya consideramos la mejor opción, el que venga más completo, con mayor número de ejercicios o actividades algunas resueltas etc., y la programación es lo mismo, es la propia programación que elabora el propio departamento, eso dentro de un contexto legal, digamos dentro de las leyes de educación que tenemos en cada documento y eso, el departamento es la figura, digamos principal

L: Sí y

2. ¿Sabe con base en qué se proponen los materiales curriculares como el libro de texto y la programación de contenidos matemáticos que estudian sus alumnos de segundo de bachillerato?

Aly: O sea ¿por qué escogemos nosotros uno y no otros?

L: No, con base en qué, por ejemplo, alguna ley de educación que haya, que propone un programa

Aly: Sí, nuestras leyes de educación son muy cambiantes, lo que pasa es que aquí pasamos de la LOGSE a la LOE luego a la LEA, tenemos no sé por qué, en España y en Andalucía más concretamente, las leyes cambian muchísimo, ahora mismo nos están mandando a revisión libros de texto para el año que viene para segundo de bachillerato, o sea este año hemos comenzado una nueva etapa en primero de bachillerato y se completa con el segundo curso de bachillerato, entonces de nuevo hay cambios, son cambios mínimos siempre, es verdad, pero vamos, ahora mismo este cambio que tendremos en bachillerato y con secundaria pasa lo mismo, o sea las leyes van cambiando a tal velocidad que no te has adaptado todavía a un sistema o no te has adaptado todavía a un libro cuando ya te plantan otra, entonces muchas veces nos vemos muy perdidos los propios docentes, exactamente cuál es la ley que manejamos actualmente, qué es lo que dice ahí, porque es que enseguida te cambian

L: Pero por ejemplo ¿tiene alguna idea con base en qué se proponen esos cambios quienes proponen esas modificaciones en las leyes?

Aly: Pues un poco la sociedad va avanzando digamos y las nuevas necesidades, ahora mismo, te comento, en secundaria obligatoria, no ya de esta asignatura sino en secundaria obligatoria, los alumnos tenían un horario de 28 horas semanales, ya eso ha cambiado a 30, ¿por qué? Pues porque supongo que para los padres será más cómodo

cuántas más horas mejor, entonces los políticos digamos la clase política que se va encargando de modificar estas cositas, las horas a la semana, eso ya está bastante quieto, ya está bastante cuantificado, que son 30, pero cuando se han producido cambios en ese sentido, siempre es un poco pues los partidos políticos, el que gobierna lo hace según creé

L: Pero en el área de Matemáticas, digamos en segundo de bachillerato ¿hay algún cambio o una modificación en el número de horas que daban antes al que van a dar ahora?

Aly: No, no, no, en segundo de bachillerato no, en la secundaria sí hemos tenido cambio de hora, hasta hace poquito eran tres horas en primero de la ESO cuatro en segundo, tres en tercero y cuarto y ahora mismo es justamente lo contrario, es 4, 3, 4, 4 (respectivamente), con la nueva propuesta de la secundaria obligatoria, en bachillerato no, al contrario, ahí ya está establecido que son cuatro horas en la semana

L: Sí, y por ejemplo, ¿agregan algunos contenidos, aparte de los que ya tenían anteriormente, ahora que van a dar unas horas más?

Aly: Sí, más que agregar contenido yo diría cambiar de curso el contenido, estructurarlo a lo mejor de distinta forma, por ejemplo yo, que el año pasado daba segundo de la ESO y este año también, pues veo que cosas que antes se daban en segundo de la ESO, se ven en primero, y cosas que antes se daban en tercero ahora se dan en segundo, se modifican pero tanto como cambiar o quitar no me parece a mí, yo creo que esto es más, un poco mareo para las editoriales, para los padres, para los profesores, claro para los alumnos, pero al final yo creo que es el mismo perro pero con distinto collar

L: Sí, me gustaría saber

3. Cuando usted encuentra un tópico incompleto o que considere inadecuado en su explicación o uso de ejemplos en los textos:
 - a) ¿Cómo son aprehendidas y tratadas por los profesores estas deficiencias en materiales curriculares?
 - b) ¿Cómo toma una parte de texto y transforma su entendimiento de eso en instrucción que sus alumnos puedan comprender?

Aly: ¿O sea cómo yo cambio un poco lo que viene en el libro de texto?

L: Sí, cómo lo adapta usted a su materia, a su área?

Aly: Bueno, principalmente si hay algo desde el punto de vista de las explicaciones teóricas que viene en los libros que yo vea que están un poquito regulares explicadas o muy poco explicadas, no es que estén mal, sino que el libro de texto suele simplificar mucho los pasos, pues lo que hago es que en la pizarra se aclara mucho más todos los pasos, sobretodo los ejercicios resueltos que nos vienen muy bien para hacerlos con ellos en clase o para que ellos los vean solos, pero claro ellos solos, se atascan con muchos pasos porque no viene con todos los detalles que nosotros lo queremos, entonces bueno pues profundizando más en eso, hacerles ejercicios completos, a nivel teórico yo veo que el libro nuestro ha estado bien a nivel teórico, hay muchos teoremas que traen su demostración, si en algunos casos nos interesa darlas pues la damos, en otros casos depende del tiempo también, el tiempo nos come mucho pero bueno vamos profundizando más o profundizando menos a nivel de explicaciones o simplificando algunas cositas

L: Sí, pero por ejemplo cuando usted ve algún ejercicio o algo que quiere dárselo a conocer, de ese libro a sus estudiantes, qué es lo que pasa en ese proceso, desde el momento en que usted ve ese ejercicio hasta el momento en que usted lo convierte en instrucción, porque en ese transcurso pasan varias cosas ¿no?

Aly: Yo lo hago yo primero, claro lógicamente yo veo primero un enunciado en el libro de texto que me gusta para hacerlo en clase, primero yo lo trabajo, yo lo hago, veo el nivel de dificultad que tiene, el tiempo que me puede llevar eso en clase y al día siguiente o a los dos días se los propongo a ellos si lo veo correcto

L: Sí, muy bien y

4. ¿Cómo enfrenta el “cubrir el currículum” y “enseñar para aprender”, es decir, cómo encara o afronta esa disyuntiva, esa tensión?

Aly: Es una tensión efectivamente porque, eso de enseñar para aprender no se lleva mucho últimamente, yo creo que no se lleva desde muy chiquititos desde el colegio, aquí yo te digo, vamos yo normalmente doy cursos más bajos, este año doy segundo de bachillerato después de 8 años me parece, que no lo daba y la verdad es que me encuentro que de 8 años a acá, los alumnos piensan menos, es verdad, que hace unos años, creo que vamos dando siempre el “cacharreo” como yo le llamo, las operaciones, muchas operaciones desde muy chiquititos muchas operaciones, en secundaria lo mismo, pero lo que es planteamiento del problema por ejemplo, ahí se ve que tienen varias carencias, claro a parte de todas las carencias que ya arrastramos de lo que es los cálculos elementales, pero por ejemplo, los problemas que es donde tú más puedes ver la forma de pensar que tiene el alumno y de la forma de enfrentarse a un problema a una resolución de algo mediante un tratamiento, unos datos ordenados, etc., pues no, no saben enfrentar, no lo saben enfrentar, entonces ¿cómo lo enfrentamos? Pues yo les digo, sobretodo a los más chiquititos, a los de primero y segundo de secundaria, cuando yo les planteo un problema en la parte de Álgebra y se ponen todos atacados, “no problemas no porque nosotros no sabemos” y yo les digo siempre lo mismo, nadie nace sabiendo, todo el mundo tiene que aprender a hacer las cosas, entonces yo les digo a hacer problemas se aprende haciéndolos, nada más y equivocándose mucho, igual que un niño, nace y no sale andando ya, si tu lo a ese niño lo sientas en un carrito hasta que tenga 16 años, el niño cuando se levante no va a saber andar, se tiene que haber caído mucho y haber aprendido mucho para poder llegar a manejarse solo, pues con los problemas es lo mismo y con el pensamiento más abstracto pasa lo mismo, la parte de Álgebra suele chocarles mucho casi siempre, a los más pequeños, los de primero y segundo de secundaria, porque es más desconocido para ellos, requiere un pensamiento más abstracto para ellos, entonces, ¿cómo lo enfrento? Pues lo enfrento eso, quitándoles un poco el miedo y haciéndoles muchos y haciéndoles ver que si se equivocan tampoco pasa nada, que para eso están aquí ¿no?

L: Sí, bien

5. Si usted tuviera que seleccionar ciertos contenidos porque le dan más poco tiempo, en particular de los temas del primer bloque de segundo de bachillerato, ¿cuáles enseñaría? ¿cómo identifica el profesor conceptos principales en el currículum, cómo o con base a qué modifica actividades y elimina aspectos que considera periferales al entendimiento conceptual? ¿cómo decide el tipo de conocimiento que deben aprender los estudiantes, el contenido matemático que debe enseñar?

Aly: Bueno aquí tenemos que seleccionar, eso es que lo tenemos que hacer porque desgraciadamente no nos da tiempo a dar todo, absolutamente todo, por lo menos a mí, con la poca base que traen de atrás, porque de repente sale una regla de Ruffini que ya la debieron de haber visto en primero y no saben, entonces te tienes que parar, volvérsela a explicar, recordársela, aunque ya la hayan visto no se acuerdan, no tienen esa rutina de

haberlo trabajado mucho, entonces ¿cómo seleccionamos? Pues seleccionamos ¿Quieres que te especifique los contenidos que yo sí daría?

L: Sí

Aly: Pues a ver si yo me acuerdo bien ahora

L: De manera general

Aly: Por ejemplo el tema de los sistemas de ecuaciones, pues claro los sistemas de ecuaciones hay que darlos, la homogeneización, es decir hacer un sistema homogéneo, el hacerlo triangular, el método de Gauss también, los determinantes son muy importantes, las propiedades son muy importantes y luego la parte de matrices por supuesto, la operatividad con matrices, el hacerles un problema también con datos, que no sea solamente el planteamiento del sistema

L: Sí pero toda esa selección que nos ha comentado ¿con base en qué la haría, porque considera usted que esos temas son importantes?

Aly: Pues nos lo marca un tanto también la selectividad [examen de selectividad], sobretodo en segundo de bachillerato, nos lo marca mucho lo de selectividad, nos da una serie de criterios, nos dicen, pues esto, esto y esto es lo fundamental, entonces digamos que ahí eso es una meta que a la que tenemos que llegar, a dar todos esos contenidos que nos ponen ellos, o sea el departamento de Matemáticas

L: Sí, usted

6. ¿Por qué considera que debe estudiar este bloque de Álgebra un alumno de segundo de bachillerato?

Aly: Bueno lo tiene que estudiar porque digamos que es la continuación de todo el Álgebra que ellos saben de la secundaria, es algo nuevo para ellos, pero a mí me parece interesante también en el Álgebra, están bien puestos los contenidos y entonces hay que manejarse, por ejemplo plantear un sistema de ecuaciones, hasta cuarto de la ESO ellos saben manejarse con sistemas de ecuaciones de 2 ecuaciones con 2 incógnitas nada más, entonces yo creo que es un poco la continuación, el dar un pasito más allá y a aprender a que eso se puede tratar desde el punto de vista de los determinantes, con las matrices ampliadas, desde el punto de vista matricial, eso les da otra perspectiva también, de la situación

L: Bien,

7. ¿Con que otros contenidos matemáticos está relacionado este bloque de Álgebra en este mismo nivel de bachillerato?

Aly: Pues está muy relacionado con la parte de Geometría, sobre todo, claro la parte de Geometría cuando se empiezan a ver por ejemplo las posiciones relativas entre dos planos, entre tres planos, empezamos a ver que todo se puede trabajar desde el punto de vista matricial también, entonces ahí yo si busco y les hago ver la relación que existe entre un bloque y otro, que no son bloques aparte, ellos siempre tratan los temas como si fueran temas aparte, y no, entonces se trata también de darles algo un poquito más global, sobretodo con la parte de Geometría, es con lo que más relación tiene

L: Y

8. ¿Cómo se relaciona este bloque de Álgebra con otros contenidos matemáticos?
A través de ...

Aly: A través de las ecuaciones de un plano son ecuaciones, un plano es una figura en el espacio, una superficie pero eso, ellos tienen que ver lo que es el dibujo, digamos lo que

es el planteamiento desde el punto de vista del dibujo que lo dan en dibujo también, o sea que ellos lo ven desde otro punto de vista también, pero con ecuaciones no están acostumbrados a verlo, entonces esas ecuaciones está muy relacionado con Álgebra, es Álgebra también, a parte la característica que define los planos o a la recta en el espacio, pues son ecuaciones

L: Muy bien,

9. ¿Con que otros contenidos matemáticos está relacionado este bloque de Álgebra pre y post de ese curso?

Aly: Bueno con cursos anteriores ya te he dicho que es un poquito la continuación de la parte de Álgebra que ellos ven en la secundaria, es un poquito las ecuaciones de segundo grado, sistemas de ecuaciones, sobretodo con esos sistemas de ecuaciones, está relacionado porque les permite dar un paso más allá, avanzar un poquito más, en resolver otros tipos de sistemas más complicados, con más ecuaciones, con más incógnitas y después de ese curso, eso ya depende de la carrera que tome cada uno y su salida profesional de cada uno, pero bueno yo creo que de esa parte de Álgebra, pues puede estar relacionado con muchas, ahora mismo no te se decir exactamente

L: Con ese bachillerato ¿a qué carreras pueden acceder? Ingeniería, Matemáticas, etc.

Aly: Si claro, toda la Ingeniería, la Química, la Física, sobretodo a esas carreras, por supuesto a Matemáticas y en todo eso está muy relacionado, necesitan ese conocimiento algebraico también para entrar en todas las Ingenierías Técnicas, también tienen bastante de Álgebra, claro, tienen yo creo que hasta una asignatura completa que dura todo el año

L: Sí muy bien, y

10. ¿Con que contenidos de otras áreas científicas está relacionado este bloque de Álgebra pre y post de ese curso?

Aly: Con la Biología, pues hay circunstancias y ciertos sistemas ahí, y sobre todo con el Dibujo también, ellos ven la parte del dibujo en Dibujo y lo que es la parte matemática en mi asignatura, entonces aprenden a verlo desde esos dos puntos de vista

L:

11. ¿Qué implicaciones se pueden tener si un alumno no aprende los temas del bloque de Álgebra en bachillerato, respecto a otros contenidos matemáticos que estudiará en niveles posteriores?

Aly: Bueno pues depende ya te digo, de cada carrera que ellos escojan, eso sobretodo en las Ingenierías Técnicas, en las Ingenierías Superiores, en Física en carreras así pues sí está muy relacionado y desde luego, yo se los digo a ellos, los que en segundo de bachillerato no escogen Matemáticas y luego piensan acceder a una de estas carreras de Ciencias de toda la vida, pues están equivocados, pero claro la ley se lo permite por así decirlo

L: ¿A sí?

Aly: Claro, yo he tenido alumnos que han tenido que recuperar la de primero y en segundo no han tenido Matemáticas, no la han escogido ellos libremente y luego al año siguiente piensan meterse en una Química por ejemplo, entonces claro es un disparate, porque un curso serio que ellos dan, digamos que es en primero, serio lo digo entre comillas porque hasta cuarto de la ESO ya sabemos cómo funciona todo, entonces en

primero de bachillerato con un único año que ven de Matemáticas, siquiera se llega a las derivadas, ya está, entonces con un año nada más de nivel matemático ya un poquito más elevado, ¿cómo piensan afrontar una Química? O ¿cómo piensan afrontar inclusive hasta una Biología? O ¿Una Farmacia? O una carrera de este tipo.

L: ¿Esos alumnos tienen la opción de no llevarla sino quieren

Aly: Yo he tenido alumnos que se han tenido que examinar de la asignatura pendiente, han estado matriculados en segundo sin Matemáticas y se han examinado de la asignatura pendiente en primero de bachillerato, pero claro en segundo ya no tenían Matemáticas, la tenían arrastrada, porque como le temen a la Matemática pues le huyen y como si le huyen pues no la cogen, claro. Tenemos cada vez menos alumnos también, pero claro ahí las leyes no nos ayudan mucho

L: Muy bien y

12. ¿Cuál considera que es el tratamiento real que se le da normalmente al Álgebra en la práctica, a lo largo de su paso por la escuela, desde primero de ESO hasta segundo de bachillerato?

Aly: El tratamiento real, yo creo que en los planteamientos de los problemas, en los enunciados de los problemas es donde ellos pueden decir o pueden ver, “ahora veo que esto sirve para algo”, [Aly y L sonríen]

Aly: El otro día me lo decía un alumno en tercero de la ESO, era una representación de una gráfica, de una curva, pero bueno desde el punto de vista algebraico, de una curva no de una línea recta, tú tienes lo que es la ecuación de la recta, hacíamos la tablita de valores y los pintábamos en el plano, una cosa tan simple como esa y claro era una disyuntiva de elegir una autoescuela u otra según, en una había un mínimo de coches más no se cuánto por cada clase que iba dando y en otra era como una tarifa plana, entonces el hecho de ellos ver que eso tiene una aplicación práctica es muy importante, alguna vez que otra, porque es que para ellos la Matemática es una cosa del otro mundo, no tiene que ver con nada, entonces de vez en cuando hay que atraparlos a través de los problemas, a través de los problemas, yo intento buscar problemas, en bachillerato lo consigo menos porque la verdad es que la cosa es más abstracta ya, pero a los pequeños si que les planteo problemas que ha ellos les haga caer en esto, decir bueno pues “ahora sé para que sirve esto”, para poder diferenciar un gasto del otro, viéndolo gráficamente o bien analíticamente a partir del Álgebra

L: Bien y saliéndose un poco de su propia práctica por ejemplo ya en el colectivo de colegas que han dado Álgebra desde ESO a bachillerato, que comparten a veces algunas ideas y todo eso, ¿Qué percibe de cómo se ha dado el Álgebra realmente?

Aly: Realmente es que tampoco podemos estar todo el día planteando problemas de este tipo como el que te comentaba antes, esto pasa una vez y te hace gracia el comentario de los chicos que te dicen eso “ahora sé que esto sirve para algo”, realmente lo que vemos siempre es a correr y a no enseñar a que ellos aprendan, entonces desgraciadamente vamos muy presionados por el tiempo, por lo que traen de atraso de cursos anteriores y entonces claro porque tenemos un temario muy amplio que hay que dar en todos los cursos y entonces nos sabe mal dejar muchas cosas sin dar, entonces eso es a costa de correr más, correr más es en la parte de Álgebra concretamente, es pararte a hacer menos problemas, los problemas son siempre el hermanito huérfano de las Matemáticas porque claro, requiere más tiempo, requiere un planteamiento más serio, requiere, no es el “cacharreo” de resolver una ecuación de primer grado o de segundo grado que es la formulita y ya está, eso más o menos lo llevan ellos más o menos bien, pero lo que es la parte de problemas igual y con los sistemas de ecuaciones pasa lo mismo, claro,

entonces con otros colegas como tú dices, pues yo sé y conmigo misma que vamos siempre a hacer menos problemas y más de operaciones o ecuaciones en este caso claro

L: Usted,

13. ¿Dónde y cómo aprendió o adquirió este conocimiento curricular que nos ha compartido?

Aly: Bueno pues lo aprendí en mi curso de COU, antiguamente vamos, teníamos el BUP, los tres años de BUP y luego COU, el curso de preparación a la universidad

L: Eso de BUP ¿qué quiere decir?

Aly: Bachillerato Unificado Polivalente, todo eso lo estudié cuando yo era alumna de bachillerato y el COU era el Curso de Orientación Universitaria

Aly: O sea era mi curso preparatorio a la universidad, entonces ese contenido, es más yo tengo mis apuntes todavía y me sirven los problemas, vamos que es lo mismo, sabes el temario varía poco, ha venido a menos eso sí te lo digo, en cuanto a demostraciones, teoremas, en cuanto a que cada vez se exigen menos teoremas y vamos más a lo más práctico, entonces en eso sí veo diferencia, pero yo lo aprendí en mi curso de COU, luego en la carrera ya, te digo que no tanto eh, ahí ya se tratan otros conocimientos más altos, más abstractos pero lo que es este bloque en concreto, igual que yo, además con los mismo años que yo

L: Y

14. En sí, ¿cómo describiría la importancia y evolución del contenido del primer bloque durante toda su trayectoria curricular?

Aly: Te lo vuelvo a decir, con lo que más veo relación es con la Geometría y es cuando más estamos recurriendo a matrices, estamos recurriendo a ecuaciones en la parte de Geometría, entonces ahí sí le veo mucha importancia, ya en la parte del Análisis ya varía un poquito más la cosa, ya son un poquito más separados conceptualmente, pero en la parte de Geometría tienen que tener muy fresquita el Álgebra para que la Geometría se les de bien también, porque sino saben hacer una matriz, sino saben resolver un sistema de ecuaciones, no saben darme los puntos de corte o darme claro los puntos comunes

L: Bueno esas serían todas las preguntas correspondientes al currículum, ahora pasaremos a dos preguntas específicas sobre cómo percibe su propio papel como profesora, la pregunta es esa

1. ¿Cuál es su papel como profesora de matemáticas en bachillerato?

Aly: Mi papel es de transmisora de ciertos conocimientos que están ahí en el libro y ellos, sino existiera el profesor de la asignatura, eso no lo saben descifrar, de hecho yo muchas veces les propongo uno aunque esté resuelto en el libro y no son capaces tampoco, de sacarle todo el jugo, tú les tienes que ir diciendo un poquito a ellos lo que es lo más importante, lo que no tanto, cuáles son las integrales más típicas, o los límites que se pueden hacer por un método o por otro, les tienes que ir seleccionando un poco las cosas y darle un poco una graduación de importancia, por así decirlo ¿no?, y de cara a selectividad también, les tienes que ir indicando cómo es la prueba, cuánto tiempo tienen y no se cuanto, es un poco como una guía para ellos, les tienes que ir transmitiendo los conocimientos y al mismo tiempo darles truquillos prácticos también, ¿sabes?, un poquito de todo

L: Sí, muy bien y

2. ¿Cuáles considera que son sus virtudes y debilidades como profesora de matemáticas en bachillerato?

Aly: Difícil la pregunta, [Aly sonríe], autoevaluarse siempre es complicado, bueno virtudes yo creo que intento en la medida de lo posible no dejar dudas sin resolver, o sea que ellos me pueden preguntar, yo creo que la cercanía hasta cierto punto, aunque si es verdad que yo me encuentro más cercana con los más pequeños, es decir, con los de Secundaria que con ellos [los de bachillerato], ellos [los de bachillerato] o por lo menos esta gente, me han marcado cierta distancia que ahora ya al final del curso parece que se va perdiendo, ya tenemos más confianza, más cercanía, entonces pues yo creo que la cercanía es una de mis virtudes en ese aspecto y bueno la claridad, yo creo que en la clase no corro mucho o me paro de vez en cuando a decirles si las cosas están claras, depende del tiempo que haya también eso. Y mi debilidad, pues a lo mejor que no les riño demasiado, a veces les debería reñir más y pararía ciertos “corrillos” que se forman en la clase, a veces veo a algún alumno que está haciendo algo de otra asignatura y no le llamo la atención inmediatamente sino que lo dejo hacer y ya luego se lo digo, tal vez en eso tendría yo que ser más dura en ese aspecto

L: Bueno pues ahora vamos a pasar a unas preguntas referentes al conocimiento sobre los estudiantes, enfocadas un poco más al contenido del primer bloque, bueno

1. ¿Cómo considera que motiva a los alumnos a aprender ese contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?

Aly: En bachillerato es complicada la motivación también, porque ellos van ya de muy mayores, ya están como muy sobrados y la motivación, pues yo no sé si se motivarlos la verdad

L: Muy sobrados ¿Qué quiere decir?

Aly: Muy sobrados, de que como ya son mayores, ellos se reparten muy bien su tiempo, ellos dicen “Ah no importa que hoy no lo haya hecho, mañana tampoco, pero yo para el examen me lo estudio” y luego ven que no pueden con tanto, entonces no sé si se motivarlos la verdad, ¿cómo los motivo? Pues hombre simplemente diciéndoles que no lo dejen todo para el final, que lo hagan día a día, que si les hago dos partes, un examencito primero, luego el examen de bloque de Álgebra pues que el último va a contar más porque es más importante pero que el primero también tiene su importancia, pero ahí creo que yo también fallo un poco, en la motivación, sobretudo en estas edades, enlazando con la pregunta primera, a los más pequeños, o será que llevo más tiempo trabando con los más chicos y entonces me es más fácil

L: Sí y

2. ¿Conoce algunos estilos de aprendizaje? ¿Cuáles?

Aly: Yo creo que en Matemáticas se aprende mucho por repetición de lo que se haya visto hecho en este tipo, sobretudo en este bloque de Álgebra, es muy repetitivo el método, tiene que estar muy claro, a la hora de discutir un sistema que dependa de un parámetro por ejemplo, ellos tienen que verlo primero, porque claro eso sin haberlo visto, esto no se le ocurre a nadie, entonces el estilo de aprendizaje que yo sugiero, en

mis clases además, es por repetición, o sea ves uno, lo expones de dos o tres tipo, problemas tipo y ahora a partir de ahí pues ya les mando otros que sean parecidos

L: Sí, ¿y conoce usted algunos otros tipos de aprendizaje, de cómo aprenden los estudiantes?

Aly: Sí, por ejemplo esto que ha estado mucho de moda, de aprender por sí mismo, eso es perfecto y maravilloso pero claro, para eso se necesita muchísimo tiempo, o sea uno investigando él mismo sus propios contenidos curriculares, no se si habrá alumnos que lo hagan, a lo mejor en Finlandia se puede [Aly sonríe], pero yo creo que aquí no es el sitio, desde luego

L: Bien pues ya contestó usted la siguiente pregunta que es

3. Usted, ¿Cuál ó cuáles promueve más?

L: Que es el repetitivo

Aly: Si

L: Y usted,

4. ¿Cómo lo propicia o lo promueve en sus alumnos? Ej. Poniendo ejercicios, entrenando la mente, ¿cómo?

Aly: Yo creo que poniendo ejercicios claro, mediante la repetición de ejercicios que vayan todos en una misma línea o si hacemos a lo largo de la semana problemas tipo pues luego de cara al primer examen y de cara a la práctica diaria que yo les mando pues también problemas que vayan en esa misma línea, es que como les mande un problema que no tenga nada que ver con lo que ellos han visto en clase, es que no te lo hace nadie, es que no te sirve de nada

L: Bien, usted

5. ¿Cómo logra que sus alumnos aprendan? Ej. Manejando el mayor núm. de registros: tabular, geométrico, etc., resolviéndoles sus dudas.

Aly: Resolver sus dudas es muy importante para ellos y para aprender y también para quedarme más tranquila, pero para resolverles sus dudas tú debiste haberlo hecho antes, sino no. Cuando no hay dudas es porque nadie lo ha hecho, entonces yo creo que resolviendo las dudas principalmente, pero claro eso a la misma vez necesita una motivación de animarlos constantemente para que hagan las tareas de casa y para que también lo pregunten en clases porque a veces lo tienen hecho o medio hecho en el cuaderno o lo que sea, y hasta que les da corte, les da miedo de preguntar en clase, no se cuanto entonces también es bueno que ellos pierdan esa barrera

L: Sí y ¿cómo los estimula para que trabajen más en casa o que cuando los ve que están así como decaídos que no quieren hacer las cosas?

Aly: Pues diciéndoles que eso va para el primer examen que vamos a hacer, antes del examen de bloque y que ese es importante también porque como no resuelvan ese bien, luego les pesa para el examen de bloque y que siempre yo a cada examen de bloque de segundo de bachillerato, le doy más puntuación que a los exámenes intermedios que hago, entonces la motivación es esa, claro llegar al día del examen da cosa y si tu llegas al día del examen sin hacer nada pues es que en el examen no te puede salir nada, aquí se aprende haciendo

L: Muy bien, y

6. ¿Qué características le permiten saber si un alumno aprendió o no este contenido matemático del primer bloque? ¿Cómo detecta los signos de entendimiento y de confusión de sus estudiantes?

Aly: Bueno en los exámenes al corregirlos se ve muy bien, muy clarito si algún alumno se ha enterado bien del procedimiento que hay que seguir, o algún alumno que más o menos ha pasado puntilla, es bueno siempre en los problemas de Álgebra incluirles algo, por ejemplo al resolver un sistema de ecuaciones, incluirles algún tipo de pregunta desde el punto de vista geométrico incluso eso también, como para decirle bueno si fueran tres planos qué posición relativa ocuparían, cuál tendría, entonces, mediante una preguntita extra digamos, que no sea la simple rutina y tal, sino alguna preguntita de más, pero bueno en los mismos cálculos, en los mismos razonamientos que ellos van haciendo yo creo que se puede llegar a ver, que algunos no saben estudiar muy bien, no se hacen su, como todos antes creo yo, sus formularios que nos íbamos haciendo y ahora es más, ellos te lo piden, que tú se los des hecho, o sea en la parte de Geometría por ejemplo, la posición relativa de rectas y planos o de varios planos entre sí y no se cuanto, al final terminamos dándoselos hechos nosotros, entonces esa parte que antes la hacíamos nosotros, ahora ya como que a ellos les cuesta resumir lo importante en una hojita formulario

L: Hacer un concentrado

Aly: Sí, hacer un concentrado y eso también es una buena manera de resumir todo, hacer un, o sea un resumen, un esquema en matemáticas, lo que tenemos a esos niveles es eso, ¿no?, la hojita donde tengas todo recogido, o las derivadas con todo, las derivadas inmediatas, etc., o los principales métodos de integrales o de lo que sea, ¿no?, entonces eso sería bueno, no sé si me he salido mucho de la pregunta

L: No, no, porque esas son las características que le permiten saber si un alumno aprendió o no este contenido matemático y es cómo detecta los signos de entendimiento y de confusión de sus estudiantes

Aly: Sí, pues eso, incluyendo una preguntita extra que no sea de rutina sino que tengan que ir un poquito más allá, a pensar un poquito más allá y bueno hay veces que se ve muy bien que si un alumno no lo ha entendido, porque te cuenta una cosa que nada que ver con el enunciado, o sea que ahí..., no es que no sepan estudiar sino que ni ha tomado ese punto del tema en su estudio

L: Y

7. ¿Cuáles podrían ser los indicadores de que un alumno muestra interés por un contenido? (pregunta, cómo participa, ¿qué hace?)

Aly: Yo tengo alumnos que se ve claramente que están interesadísimos, están en primera fila, hacen todos los días la tarea, preguntan en clase, si a lo mejor son un poco tímidos, a lo mejor no te preguntan directamente en clase, pero para eso tienes tú que estar viendo también y si los ves con caras raras pues preguntarles tú a ellos, hacerlo un poco al revés ¿no?, hay alguno que se queda un poquito al final de la hora y luego te lo pregunta a tí, a parte porque bueno tú sabes que siempre en los grupitos ..., entonces y ahí bueno se ve claramente quien tiene más interés y quién menos, desde luego los hay que no pierden una palabra de lo que yo digo y van tomando apuntes de todo y no sé cuanto y otros que es que no copian nada, se dedican a escuchar, se dedican a reír, se la pasan muy bien en clase claro, eso sí se ve mucho, los hay que sacan asignaturas, otras que no son las mías en mi clase y entonces claro, eso se ve, además de que yo tengo 11 [alumnos] nada más en este grupo y es que se ve todo, ellos piensan que no pero se ve todo

L: Bien y

8. ¿Cómo y cuándo atiende las diferencias individuales de los alumnos en su clase?

Aly: Bueno pues mediante las dudas, ellos me van preguntando las cosas que no les quedan claras y entonces así ya se ven diferencias individuales, o quizá en algún hueco algún alumno me ha pedido este año que le resolviera 2 ó 3 dudas concretas y claro si en clase no me puedo permitir el lujo de dedicarme 20 minutos a esa persona, pues aparte buscamos algún huequecito y quedamos

L: Y se aclara

Aly: Sí, y se aclara

L: Muy bien y

9. ¿Por qué es tan importante que un alumno sepa escribir ordenadamente lo que hace cuando resuelve un ejercicio?

Aly: Pues sí, eso es muy importante en Matemáticas y en esta parte muchísimo más y en Geometría yo diría que más todavía, porque es que sino, ellos mismos no siguen el hilo de lo que van haciendo, sino van con un orden, llega un momento en que es un barullo el ejercicio, para ellos mismos y para el que corrige como yo les digo, y bueno la meta de ellos este año es aprobar la asignatura y luego ir a selectividad, con lo cual yo estoy constantemente este año diciéndoles, esto lo tenéis que escribir lo más ordenado, lo más clarito para el que corrige, es mucho más agradable corregir un ejercicio que está con espacios amplios, que tú puedas hacer una notación si quieres a la hora de corregir y eso al que corrige, no hablo ya de mí, que tengo 11 [alumnos], los que corrigen selectividad que tendrán un montón 250 exámenes por ejemplo, es mucho más agradable ir corrigiendo si tú tienes espacio, o sea desde el punto de vista visual también es importante pero bueno, lo del contenido también lógicamente, y puede estar el contenido muy bien pero si lo tiene muy apelotonado todo, muy rebuscado todo y desordenado, se hace muy complicada la corrección a veces

L: Sí, apelotonado ¿qué quiere decir?

Aly: Muy concentrado en una esquinita una cosa, en otra otra cosa

L: Demasiado denso

Aly: Sí, demasiado denso, es un poquito mejor espaciarlo un poco quizá, a lo mejor ¿no?, y desde el punto de vista visual, es como más relajado corregirlo, es como leer un libro con 300 páginas y con la letra muy pequeñita, o que tenga 500 páginas pero está un poquito más abierto

L: Sí, mejor

Aly: Claro

L: Muy bien y

10. ¿Qué papel juegan los **valores éticos** en el aprendizaje de los estudiantes?

Aly: ¿Valores éticos?

L: La honestidad, etc.

Aly: En clase, en mi clase este año por ejemplo, hay un alumno que cada vez que hace una pregunta o cada vez que lo que sea, los alumnos van como a atosigarlo ¿no?, se meten con él, no se cuanto, pero tampoco es eso, hay que estar siempre..., aunque también es verdad que ellos como ya son un poquito mayores, tampoco vemos muchos problemas a nivel de comportamiento y de actitudes ¿no?, en los pequeños [de secundaria] si se da mucho más, entonces claro que tiene valor, sobre todo desde el

punto de vista del respeto de unos a otros, y hacía los profesores, igual que los profesores a los alumnos también y bueno si alguien pregunta algo que es totalmente ilógico o lo que sea, no nos podemos reír del compañero ¿no?, es que aquí estamos para aprender y sí que tiene importancia, sobretodo para darle cohesión al grupo o para darle también un buen nivel de comportamiento, que haya buen entendimiento entre las dos partes, que sea agradable estar ahí

L: Sí,

11. ¿Cómo debe ser la comunicación de la profesora-estudiantes, estudiantes-profesora para que se dé la enseñanza-aprendizaje de este contenido matemático del primer bloque?

Aly: Yo creo que debe ser lo más clarita posible, lo más escueta posible y sí que te digo que este bloque como fue el primero, es cuando tú menos conoces al grupo, cuando menos conoces a los alumnos, no hay cierta, ¿cómo te digo?, ahora en la parte final, sí que hay cierto grado ya, más de compenetración entre unos y otros ¿no?, te puedes permitir ciertas bromitas a lo mejor en la clase, mientras explicas algún ejercicio o lo que sea, que al principio yo creo que no, entonces esa comunicación, ellos lo agradecen que de vez en cuando pues haya algo, no sé, no es que sea un chiste pero en fin, algo que, por ejemplo el otro día, te pongo un ejemplo para que me entiendas, al resolver una ecuación de orden 3, para factorizar un polinomio de tercer grado, racional, pues había que hacer Rufini y ellos querían seguir todo el rato con Rufini y digo yo: “Pues a mí Rufini que me perdone pero yo ya a partir del polinomio de segundo grado lo resuelvo con la ecuación de segundo grado” pero una tontería de esa, les hizo una gracia tremenda que se hartaron de reír, y yo dije ¿qué he dicho?, entonces verás, ese tipo de comentarios un poquito más distendidos, pues al principio de curso, yo por lo menos, no me sale, hasta que no tengo con ellos cierto grado ya de, haber compartido más horas

L: De conocerlos un poquito más, de tratarlos

Aly: De que tú también tienes que saber hasta dónde llegar y hasta donde no con ellos porque sino...

L: Sí, y entonces digamos que

12. ¿Qué papel juega la interacción del profesor con los estudiantes para enseñar un contenido?

Aly: Bueno pues yo creo que en cuanto más disponibilidad vean ellos en ti, si tienen ciertas dudas que no nos da tiempo a aclarar en clase, que tú sepas quedar con ellos aparte, que si no te enteras bien en cualquier recreo quedamos y nos vemos, yo creo que eso es muy positivo para ellos, lo ven de una forma muy agradable para ellos, les resulta más cómodo que tú tengas cierta disponibilidad y esa interacción entre uno y otro, ellos también te lo devuelven, verás, a lo mejor te hacen un comentario un día que llevas una camiseta suelta y te dicen ya, no sé, algo ¿no?, entonces ese tipo de cosas, ese tipo de relación yo creo que va cambiando a lo largo del curso, sobretodo en un grupo así pequeño y en un grupo que yo antes no conocía a ninguno de los alumnos vamos, quizás a uno, quizás no, seguro, a uno yo le había dado clase en segundo de la ESO

L: Sólo a uno

Aly: Solamente a uno de todo el grupo, entonces a los demás a no, no los conocía, cuando tienes un grupo nuevo pues claro hay que empezar de menos a más, claro

L: Y

13. ¿Es importante que los alumnos tomen nota en la clase? ¿qué papel juega en el aprendizaje del alumno las notas que tome en clase?

Aly: Yo lo considero muy importante, pero este año yo me he quedado sorprendida con algunos que se han dedicado a ir de oyentes toda la hora, o sea no han tomado nota para nada y a mí ese comportamiento me resulta muy llamativo, porque yo que toda la vida he estudiado matemáticas, si yo no hubiera tomado nota, llego a casa y yo qué hago para estudiar eso ¿no?, yo creo que la estrategia de unos es estar al pendiente de la pizarra, viendo lo que yo hago, lo que no, los problemas que se corrigen y tal, y luego pedirle los apuntes al compañero

L: Al que si los hizo

Aly: Claro, pero yo creo que eso es jugar con cierta ventaja ¿no?, entonces para mí si es importante tomar notas de matemáticas, mucho, porque es que es como el diario de lo que tú vas recogiendo, además tú recuadras lo que es más importante y lo que no, una fórmula que salga la pones en condiciones, la recuadras y demás, hacer más énfasis y diferenciar eso de un problema, no sé, me parece que eso a los estudiantes no les interesa tanto tomar buenas notas en la clase, será que los tiempos van cambiando mucho, para mí sí es muy importante

L: Pero luego a la hora del examen ¿salen bien?

Aly: Pues alguno incluso no ha salido muy mal eh, en esta parte de Álgebra y prácticamente no han tomado notas, entonces no lo sé, para mí eso es muy

L: Es muy llamativo

Aly: Sí, es muy llamativo, si, sí

L: Bueno pues esas eran todas las preguntas referentes a algunos aspectos de los estudiantes, ahora van un poco más directas a la enseñanza, empezaremos con una pregunta muy general

1. ¿Qué significa enseñar matemáticas?

Aly: ¡Uy qué pregunta! [Aly sonríe], bueno pues yo creo que es transmitir conocimiento, tener capacidad de resumirle conocimiento matemático, también de vez en cuando una historia matemática, digamos desde el punto de vista de la historia también, de cómo aparece el cero de repente con nosotros, desde cuando empezamos nosotros a utilizar los números que tenemos ahora porque antes se usaban números romanos, desde cuándo aparecen, todos estos contenidos que se salen un poco de lo que traen los libros, o el número pi, yo les digo, no se levanta uno por la mañana diciendo voy a inventar el número pi, claro de dónde sale, porque para ellos se les da todo hecho, entonces de vez en cuando también hay que pararse un poco y ponerte en el sitio del alumno que tú lo estás bombardeando con cosas nuevas todo el tiempo, pero que eso ha llevado siglos de construcción y es lo que ahora mismo no nos da tiempo de hacer, entonces a mí si me gusta de vez en cuando, y bueno yo creo que a la mayoría de los profes, pues paramos un poquito, y no es solamente leer, leer, leer o transcribir lo que dicen los libros de texto, sino un poquito más allá, ampliar un poquito más su competencia matemática, que ahora está muy de moda la competencia matemática, y también desde un punto de vista histórico, no hay que dejar atrás un poquito la historia

L: Sí, y

2. ¿Qué se necesita para enseñar matemáticas?

Aly: Bueno pues primero a ver, que te guste mucho, primero que te guste mucho matemáticas, haberte dedicado a eso ¿no?, haber aprendido bien esos conocimientos y luego saberlos transmitir, es algo muy importante, yo he tenido profesores buenísimos en lo suyo, que han sido número uno en investigadores, pero que luego no sabían transmitir para nada, entonces te quedas que tú dices bueno, hasta desorden en la pizarra a la hora de transmitirte cosas y yo creo que eso, los que estamos al pie del cañón en los institutos, eso lo tenemos muy claro, que hay que saber transmitir bien y si una cosa no queda clara pues volver con otro ejemplo o con otro ejercicio parecido y con no se cuanto, bueno enseñar matemáticas pues es eso que te gusten, que tú las sepas bien y saber transmitir las eso es muy importante también

L: Bien y

3. ¿Qué tipo de actividades son más favorables para enseñar matemáticas?

Aly: Bueno ahí ya te decía antes, el “cacharreo” que llamamos siempre, el manejo del cálculo elemental con números enteros, con fracciones, con todo eso, la operatividad en sí, hay que manejarla muy bien, pues hay actividades muy repetitivas y también para enseñarlos a pensar un poquito más, la parte de problemas, la parte de pensamiento abstracto y la parte de lógica, todo eso también es muy importante y es lo que desgraciadamente se deja mucho de lado, desde los colegios, desde muy abajo y claro, lo ideal sería ir conjugando las dos cosas ¿no?, es lo que intentaríamos hacer siempre en condiciones, pero claro al final los temarios ya te digo, son muy amplios y el tiempo siempre juega muy en contra nuestra y además de las carencias que traen los alumnos desde chicos, bueno intentamos ir ahí haciendo un equilibrio

L: Sí,

4. ¿Qué tipo de representaciones (tabulares, gráficas, etc.) son las que más promueve para enseñar matemáticas, sobretudo en el último año de bachillerato?

Aly: Tabular la verdad que no mucho, representaciones gráficas sí son las que más se utilizan y luego representaciones desde el punto de vista algebraico pues con incógnitas, variables ¿no?, no se si te refieres con representaciones a recogida de datos por ejemplo, que el problema te plantee los datos así

L: Sí, cualquier tipo de representación

Aly: Sí, pues yo creo que la representación gráfica o a partir de un enunciado con texto normal vamos, que no tienes porque recogerlo desde el punto de vista gráfico o tabular ¿no?, esa parte se trata mucho o en la secundaria obligatoria pero quizá en bachillerato menos, es más texto ¿no?

L ¿Será por el mismo tema que depende o...?

Aly: Sí depende, en la parte del Análisis la información es mucho más visual ¿no?, desde el punto de vista gráfico, ahí si por ejemplo para hacer una gráfica, no sé, las derivadas de la gráfica, para representarla gráficamente o a partir de la gráfica dada extraer información sobre la propia función, entonces ahí la información si es gráfica totalmente, en tipos de ejercicios así, yo creo que un poco de todos

L: Sí, muy bien

5. ¿Cuáles son sus objetivos educativos centrales o generales siempre que va a empezar a enseñar un tema? Por ejemplo, se planta en la pizarra y mentalmente o inconscientemente ya tiene unos objetivos generales o ideas generales que quiere cumplir, independientemente del tema que sea

Aly: Bueno los objetivos generales yo creo que siempre, la primera cosa es que se les transmita bien a los estudiantes, que ellos aprenden, a que eso les guste, que les llegue a gustar, que les llegue a calar que no vengan sólo por obligación pero claro, eso hoy en día es súper complicado y bueno objetivos generales, pues eso, plantearles bien cuáles son las cosas más importantes del tema, que eso se les transmita bien a ellos y que se les quede bien y cuando aparecen fórmulas nuevas o lo que sea, siempre decirles esto es importante para tal cosa, esto lo otro para tal cosa, como objetivo general pues yo diría eso, que ellos aprendan a diferenciar lo más importante de lo que no lo es tanto, sobre todo la parte teórica, con las fórmulas que haya en cada tema, de la parte práctica ya, y dentro de la práctica hacer unos problemas tipo de los que puede haber en cada tema y que ellos aprendan a manejarlos con soltura

L: Bien y para usted

6. ¿Qué es más importante, la enseñanza o el aprendizaje? y ¿por qué?

Aly: Esto es un poco filosófico eh, yo creo que el aprendizaje es más importante, ahí tiene un papel más importante el aprendizaje, o sea los alumnos, porque ellos son los protagonistas de su propio aprendizaje, pero sino tienes enfrente a una persona que lo sepa enseñar, es muy complicado, aprender por sí mismo sería lo ideal claro, pero eso ya te digo, podrá ser posible en países súper desarrollados, con mucha economía, con mucha partida presupuestaria para educación donde haya clase con 5 niños, entonces, desde un punto de vista del constructivismo que ha estado muy de moda últimamente, ahí ese aprendizaje debe ser muy bonito de hacer, pero claro en nuestro contexto, en el país que vivimos, dónde vivimos, en nuestra comunidad y tal, pues el aprendizaje es muy importante pero depende de lo que tienes enfrente, de la persona que te lo está transmitiendo, que te lo está enseñando, también hay que darle su sitio

L: Sí, claro y a hora respecto a sus estrategias instruccionales y representación para la enseñanza,

1. ¿Cuáles son las principales dificultades a las que se enfrenta para poder enseñar este contenido matemático del primer bloque de una manera que usted considere correcta? ¿A qué cree que se deban esas dificultades?

Aly: Bueno la principal dificultad es el tiempo, eso siempre está ahí, pero también la poca base que traen, yo creo que se debe a todo el recorrido que ellos hacen, pues desde pequeños y entonces poca base me refiero a que cuando yo estudiaba, cuando yo tenía su edad ya teníamos primero de BUP, segundo de BUP y tercero de BUP y luego COU, teníamos cuatro años para prepararnos para ir a la universidad, cuatro años ya digamos, de no obligatoria, de enseñanza no obligatoria, actualmente sólo son dos, entonces claro, ahí nos vemos muy presionados por los temarios tan amplios que tenemos y el tiempo escaso, si a eso le añadimos la mala base que suelen traer del colegio y de la propia secundaria obligatoria pues claro, ya te digo que yo, me sale un método de Rufini para descomponer un polinomio y al principio de curso, ahora ya sí pero al principio de curso decían, es que no me acuerdo, es que no se hacerlo, yo esto no lo he visto nunca. Entonces te para mucho el hecho de tener que ir volviendo atrás con esas cosas ¿no? y entonces esa es una dificultad muy grande que tenemos, el que los conceptos previos no están suficientemente claros y están sueltos, ¿no?

L: Y entonces ¿A qué cree que se deben esas dificultades? ¿A las malas bases que tienen?

Aly: Sí, sí, muy mala base, actualmente la educación secundaria se ha ampliado hasta los 16 años con lo cual en las clases te encuentras que hay gente que quiere, gente que no quiere, gente que viene aquí a pasar el rato, gente que viene a dar la lata nada más, por decirlo bien [Aly sonríe], entonces claro con todo eso, si en una clase de 20 hay 15 que más o menos si quieren, pero si hay 5 que vienen a darte la lata, no puedes llegar a enseñar como te gustaría, claro que no, entonces eso les perjudica, y no les perjudica como antes hasta los 14 años sino hasta los 16, hemos prorrogado la escolaridad obligatoria, por medidas políticas, porque queda muy bien políticamente que los niños estén recogidos en algún sitio, 2 años más, claro socialmente y a nivel de votos queda muy bien claro, pero el problema ahora no es que los niños estén en la calle, es que están aquí, que no quieren hacer nada y que les dan por saco a los demás, entonces eso se nos echa en contra, se nos vuelve en contra, a la vuelta de 2 años más, ellos entran a un bachillerato ya, te estoy hablando de cursos de tercero y de cuarto que ahí los tengo yo, al final terminan abandonando la mitad, pero ya le han hecho el daño a los compañeros, entonces a la vuelta de 2 añitos de un alumno que está en tercero, está en un bachillerato, ¿cuántos cursos de no obligatoria tiene? 2, tiene 2 por delante, yo tenía 4, y yo tenía Matemáticas los 5 días de la semana, ellos no, ellos tienen 4 días a la semana, entonces vamos recortando, vamos recortando y a cambio han ganado en otras asignaturas, en Tecnología, en Música, en Dibujo, que yo con todo respeto para todas pero hombre, las Matemáticas se han visto perjudicadas, y no sólo las Matemáticas, sino otras más, eso es otro tema, otro debate largo y tendido

L: Sí y digamos que

2. ¿Cómo estimula a los alumnos a aprender y usar las matemáticas?

Aly: Bueno la estimulación para los alumnos y sobretodo a los más pequeños, pues de vez en cuando lanzándoles un problema que tenga una visión práctica de para qué sirve una representación gráfica o comparar dos gráficas distintas, sobretodo desde el punto de vista práctica, ellos le tienen que ver una aplicación, porque sino le ven aplicación, eso es como el que copia la guía de teléfono y eso no sirve para nada, y en la mayoría de los casos por desgracia mucha, mucha de la Matemática que enseñamos, ellos perciben que no les sirve para nada

L: Sí, y

3. ¿Qué recursos de apoyo utiliza en la enseñanza de las matemáticas? ¿Cuáles son los más útiles?

Aly: ¿Recursos de apoyo a qué te refieres?

L: De todo tipo, materiales, de lo que sea

Aly: Bueno vamos a ver, yo por ejemplo los primeros años que aquí se implantaron los ordenadores en la clase, las aulas TIC, yo he hecho cositas ahí y además lo que es una Web Quest para que ellos investiguen, por ejemplo el tema de los cuadriláteros, el tema de los triángulos, para que ellos investiguen, me hagan un trabajito y eso sí era un aprendizaje por iniciativa propia, el problema como en todo es que con el uso, las máquinas están cada vez peor, no se controla bien, se estropean cosas porque es normal y entonces claro, ha sido para nosotros, yo creo que un retroceso, los primeros años de ESO a mí me servía como herramienta, sobretodo en las horas de refuerzo de Matemáticas que ahí si aprovechábamos más los ordenadores y tienes un trato a lo mejor más cercano con los alumnos porque son grupos más reducidos, pues ahí sí, ya te digo que si utilizábamos por ejemplo fotocopias del libro, ejercicios repetitivos, eso sí

L: ¿Hay horas asignadas para refuerzo?

Aly: Sí

L: ¿Nada más en los primeros años de ESO?

Aly: Sí, en primero y segundo y hasta hace poco también había en tercero pero ya no, y ahora mismo ya no se llama de refuerzo se llama de libre disposición que ya es una, antes eran 2 horas semanales, ahora es una, y el centro lo determina y lo reparte como buenamente quiere, pero claro van orientadas a las instrumentales, es decir, a Lengua y a Matemáticas, sobretodo ¿no?, yo tengo este año, una de segundo de la ESO, un refuerzo y ya te digo que mediante fotocopia, mediante los ordenadores

L: Regularmente ¿cuántos alumnos hay por clase en la Secundaria?

Aly: Depende, hay cursos que están más llenos y hay otros en los que hay bastante menos, aquí no solemos tener las clases muy llenas, la ratio está ahora mismo en 30, hasta 30 alumnos puede tener una clase, pero en este centro la verdad es que estamos como con 20 por ahí será la media

L: Bien, ya para finalizar esta parte

4. ¿Cuáles son sus estrategias para el manejo del salón de clase, es decir, para mantener la disciplina en el grupo, para que le pongan atención cuando explica, etc.?

Aly: Bueno pues yo si veo a alguno que está despistado, lo nombro expresamente [Aly sonríe], le doy un toque de atención y ya como que se despierta o uno que se me va durmiendo pues lo mismo, entonces pues estrategias de ese tipo, o cambiar a alguno de sitio de vez en cuando si veo que está dando un poco la murga [causando indisciplina en el grupo] donde está sentado y bueno ayudarles a participar, yo no los saco mucho a la pizarra, porque también me quita mucho tiempo, en los cursos bajitos [primeros años de secundaria] sí salen más a la pizarra, pero a partir de tercero y cuarto, casi todo el tiempo estoy yo en la pizarra, pero yo no voy escribiendo lo que yo creo, sino que nombro a uno, fulanito dime qué tengo que poner ahora, y ellos me van haciendo el ejercicio digamos, un poco a distancia y eso ayuda a que a la hora de corregir pues no sea tan monótono de que ni yo corrijo todo ni corrige todo un compañero, ellos salen a corregir y están en silencio, no hablan nada y hacen todo el ejercicio callados, entonces ¿en qué se convierte la clase? En un barullo terrible, eso a ellos no les gusta tampoco claro, se aburren, entonces ¿qué hago? sobretodo en los cursos ya de tercero y cuarto, estoy yo en la pizarra pero yo les estoy preguntando cuando están sentados, qué va ahora, qué pongo ahora, que no se cuanto. Entonces ese tipo de cositas para mantener un poquito el orden, el que no hablen, el que me pongan atención y eso, cambios de sitio cuando hace falta o cuando veo que una situación se desborda pues alguno sale del aula, algunos van a la biblioteca que es a donde van ahora mismo castigados por así decirle

L: Muy bien, para continuar haré unas preguntas referentes al conocimiento didáctico del contenido, primero le diré lo que vamos a considerar como conocimiento didáctico del contenido. Lo vamos a considerar como el conocimiento que va más allá del conocimiento del propio contenido matemático, es decir, como el conocimiento del contenido que incorpora los aspectos más relacionados a su enseñanza, en el cual se incluyen por ejemplo, las formas más útiles de representación, en matemáticas se pudiera decir por ejemplo en el nivel primaria, el uso de rectángulos o círculos para representar fracciones. También se incluyen los ejemplos, las explicaciones, las analogías que usted utiliza, las ilustraciones y las demostraciones que considere más adecuadas en el caso de que se consideren

demostraciones en el propio contenido. Es decir, en este tipo de conocimiento se toman en cuenta las formas de representar y formular ese contenido matemático para hacerlo comprensible para otros, vale.

L: Entonces con base en eso,

1. ¿Qué tan importante es que los profesores tengan un conocimiento profundo sobre la didáctica de la matemática que enseñan?

Aly: Claro que es importante. Uno no puede enseñar matemáticas si no usa continuamente ejemplos (sobre todo en cursos más bajos) que aclaren el contenido. Actualmente el profesorado conoce muy bien sus materias pero falla más la parte didáctica y de acercamiento al alumnado de esas edades

L: Bien y,

2. ¿Cuál es el conocimiento didáctico que necesita un profesor para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?

Aly: Necesita conocer muy bien la materia (esto es a nivel curricular) y desde el punto de vista didáctico, necesita saber hacer buenas exposiciones, saber relacionar los contenidos con ejemplos de la vida cotidiana, necesita organizar bien la información, y si es posible manejar las TIC como otro cauce de comunicación con sus alumnos

L: Bien y usted,

3. ¿Considera que hoy en día es más difícil enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato) que antes? Si/No ¿por qué?

Aly: Sí, porque el alumnado viene peor preparado de cursos anteriores y esto nos dificulta la tarea cada vez más. Además viene muy poco acostumbrado a pensar por sí mismo y cada vez más hay que dárselo todo hecho (resúmenes, esquemas en otras materias o formularios en nuestra materia)

L: Muy bien, y

4. Conforme cambia su propia comprensión, ¿percibe algún cambio en la forma en que enseña? ¿en qué consiste ese cambio? ¿qué es lo que provoca dicho cambio?

Aly: De hace 8 años (que fue la última vez que di esta materia) para acá mi forma de enseñar cambia en tanto en cuanto cambian los alumnos que tengo delante y las programaciones. Por ejemplo, ahora se exige cada vez menos y de forma paulatina en cuanto a ejercicios teóricos o demostraciones de teoremas, y en el trato con los alumnos hay que estar más encima con las tareas que se les proponen, más como niños pequeños. Esto lo provoca la inmadurez o el no saber estudiar que por desgracia nos encontramos en alumnos de estas edades

L: Ok, y

5. ¿Qué se necesita para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?

Aly: Conocer bien la materia, exponerla con claridad y ser cercano a los alumnos para que ellos puedan preguntar dudas dentro o fuera de clase. Hay que saber detectar errores de base o desmotivación e intentar en la medida de lo posible subsanarlos

L: Ok,

6. ¿De qué forma o cómo influyen los estudiantes en su conocimiento didáctico del contenido?

Aly: A veces pasa que con alguna pregunta o algún comentario que te hacen los alumnos tú percibes que hay algún aspecto que no queda claro tal como tú lo planteas y hay que considerarlo de nuevo. Este tipo de situaciones te hacen aprender qué forma es mejor para exponer un concepto, no solo para un curso sino para siempre

L: Muy bien y,

7. ¿Qué tan importante es que un profesor conozca la naturaleza del entorno del estudiante, el entorno de la escuela?

Aly: Siempre esto nos interesa para saber las condiciones familiares, un poco las condiciones económicas y culturales por si podemos ayudar en algo a nuestros alumnos (por ejemplo facilitarles libros u otros materiales). Aquí es muy importante la tarea de los tutores de los grupos que hacen de nexo de unión entre las familias y la escuela

L: Muy bien, ahora vendrán preguntas referentes a la evaluación

1. ¿Con base a qué selecciona los problemas que pone en un examen?

Aly: Intento seleccionar los problemas de forma que abarquen un amplio abanico de conceptos y procedimientos que se han explicado en clase, es decir, que resuman el contenido dado

L: Cuando hace un examen,

2. ¿Qué desea evaluar? ¿qué parte del contenido quiere evaluar? ¿qué habilidades quiere que demuestren tener los alumnos? ¿cómo evaluar el aprendizaje de los alumnos en ese contenido?

Aly: Siempre en matemáticas se evalúan los conceptos aprendidos y las propiedades explicadas en clase pero a través de rutinas o procedimientos que para mí es lo más importante. Es necesario que el alumno haya captado muy bien el procedimiento para desarrollar un ejercicio y lo haga de forma ordenada y clara

L: Muy bien y

3. En general, ¿cómo se evalúa un contenido de matemáticas? ¿qué papel juegan las actitudes y aptitudes, disponibilidad e iniciativa de los estudiantes (a parte de las capacidades) en la evaluación de los estudiantes?

Aly: Las aptitudes son importantes, evidentemente. No todo el mundo sirve para todo, pero si no se acompaña por una actitud positiva hacia el estudio de nada sirve ser un genio si se instala uno en la negativa a aprender y desarrollar cosas nuevas. Yo evalúo los contenidos de matemáticas a través de los exámenes exclusivamente en este nivel. Pero la evaluación debe ser un poco más amplia y tener en cuenta las actitudes en clase, la buena disponibilidad del alumno a aceptar enmiendas a su trabajo, y la actitud cooperativa con el profesor y con sus otros compañeros de clase. Estos aspectos son más tenidos en cuenta en la etapa de enseñanza obligatoria que en el bachillerato

L: Muy bien, bueno pues eso es lo que se refiere a evaluación, ahora continuaremos con unas preguntas ya sobre tecnología

1. ¿Conoce algo sobre la relación del ordenador (u otra herramienta tecnológica) con las matemáticas y su enseñanza? Si la respuesta es sí, ¿qué conoce sobre ello?

Aly: Por ejemplo programas como DERIVE ayudan a “visualizar” ecuaciones e interpretar su significado geométrico y eso es especialmente interesante sobre todo en esta parte de la materia que tenemos que enseñar para relacionar conceptos de álgebra y geometría. Para cursos inferiores utilizo el programa CLIC, en el cual se “visualizan” conceptos como fracciones, monedas, etc. En la web podemos encontrar muchos recursos interactivos para que los conceptos que se dan a nivel teórico tengan su traducción “visual”. Dentro de esta aplicación (CLIC) resultan muy interesantes las actividades que se plantean para la etapa de primaria (en casa se lo pongo a mis hijas y lo que se va haciendo como un juego va dejando su enseñanza). En la siguiente pregunta nombraré algunos más

L: Muy bien y

2. ¿Usted ha usado algún recurso tecnológico para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?

Aly: Únicamente la plataforma Helvia de que disponemos en el centro para colgarles a los alumnos soluciones de exámenes, pruebas de selectividad y calificaciones. Es decir, lo he utilizado más durante este curso como herramienta de comunicación que a nivel didáctico. También les he indicado a ellos algunos enlaces donde pueden ver videos con explicaciones de matemáticas (en youtube) y enlaces con instrucciones y exámenes de selectividad

L: Muy bien, usted

3. ¿Utiliza algún software educativo o calculadora graficadora para explorar y construir conocimiento matemático? ¿Cómo aprendió a usarlos, los softwares o la calculadora graficadora o las TIC?

Aly: Como software educativo conozco y he usado alguna vez DERIVE con los alumnos, pero no en este curso. Calculadora gráfica no tengo ni he tenido nunca, pero sí calculadora programable. Aprendí a usar esto en mi etapa de estudiante. Ya como profesora, aprendí a usar herramientas como Hotpotatoes y a diseñar Webquests e hice algunas para mis alumnos de 2º y 3º de ESO. Actualmente utilizo más las TIC en mi curso de 1º de ESO bilingüe para buscar apuntes y ejercicios relacionados con nuestro contenido en inglés. Esto se va aprendiendo cada día

L: Ok, y

4. ¿Qué resultados ha obtenido con el uso de esos recursos?

Aly: Lo más importante es que se utiliza un método audiovisual para transmitir ciertos conceptos y por tanto queda más “visualizado” de esta forma, además de un método de aprendizaje guiado con el cual el alumno investiga por sí mismo, pero si esto no va acompañado de un estudio riguroso posterior los resultados no son mejores que con un método más tradicional. Lo que sí se nota es una mayor implicación del alumnado y una buena aceptación de medios audiovisuales en el aula

L: Muy bien y,

5. ¿Cómo cree que influirían en el aprendizaje de este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?

Aly: Se perdería mucho tiempo que no tenemos, pero podría incluirse en algunos ejercicios

L: Y

6. ¿Qué propondría para enseñar un contenido matemático de bachillerato, por ejemplo matrices, usando el ordenador?

Aly: El programa DERIVE

L: Y

7. ¿Qué tan importante es que los profesores tengan un conocimiento acerca de las herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas y en particular de este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)?

Aly: Para mí no es fundamental. Ayuda en ciertos momentos pero en concreto en estos niveles donde vamos contrarreloj no nos podemos permitir un método de aprendizaje basado en el auto-descubrimiento. Conozco muy buenos profesores que no utilizan para nada las TIC en este nivel ni en ningún otro y creo que enseñan matemáticas muy eficientemente

L: Muy bien, y

8. ¿Cuál es la principal dificultad a la que se enfrenta al intentar implementar la tecnología, cualquier software por ejemplo, en el aula?

Aly: La principal dificultad es que en clase tenemos el software libre Guadalinux y esto no nos ayuda mucho. Hay programas o aplicaciones que ves en internet y cuando intentas ponerlas en el aula no van bien. Además, los ordenadores a menudo se bloquean, los alumnos van rompiendo ratones y teclados poco a poco y en concreto en mi centro, que somos centro TIC desde hace 5 años, todo funcionaba muy bien el primer y el segundo año, pero al día de hoy el deterioro es más que evidente. En una clase donde puede haber 15 ordenadores es fácil que te encuentres con que funcionan cinco, por ejemplo

L: Muy bien, pues ya para concluir Aly, dos preguntas pero son bastante globales, de hecho son un poco para sintetizar toda esa riqueza que nos has compartido, sobre todo al inicio, de tu experiencia, del conocimiento didáctico del contenido, de los estudiantes, etc.

1. ¿Qué tan importante es que los profesores tengan un conocimiento profundo de las matemáticas que enseñan?

Aly: Creo que ya en respuestas anteriores lo he comentado. Es muy importante que uno sepa muy bien de lo que habla, le guste su materia y sepa transmitirlo

L: Y

2. ¿Cuál sería el conocimiento (de todo tipo que usted crea conveniente: matemático, pedagógico, etc.) que necesita un profesor para enseñar este contenido matemático (del primer bloque de matemáticas en 2º de bachillerato)? ¿Y para enseñar cualquier contenido matemático de bachillerato?

Aly: Para enseñar álgebra de segundo de bachillerato o cualquier otro contenido matemático de bachillerato es fundamental el conocimiento propio de la materia pero también hay que tener dotes didácticas, y hoy día más que nunca animar constantemente al alumnado a que hagan sus tareas a diario y sean constantes con su estudio.

L: Por último,

3. ¿Desea agregar algo más?

Aly: En los últimos tiempos está creciendo de tal manera la burocracia que tenemos que completar en los centros educativos que a veces se descuida o se dedica menos tiempo a buscar actividades nuevas para desarrollar una clase. Normalmente vamos corriendo de una clase a otra y pasamos de 2º de Bachillerato a 1º de ESO en tres minutos, apenas cambiamos de libro y ya tenemos que estar enfrente de otro tipo de alumnado con una madurez y unas perspectivas totalmente diferentes. A veces esto nos descoloca un poco y tenemos que saber adaptarnos rápidamente a quienes tenemos enfrente en cada ocasión. En los cursos más bajos nos da la impresión de que actuamos más como policías que como docentes, cuidando de que no pinten el libro o la mesa, poniendo orden o evitando alguna pelea o discusión. Con todo esto perdemos gran cantidad de tiempo efectivo de clase a diario, cosa que lamentamos todos.

L: Bueno Aly pues agradezco muchísimo todo su tiempo, que fue bastante el que la distraje, muchas gracias y bueno terminamos la entrevista.

ANEXO VII. Apartado V.1.1. de los resultados: Presentación cronológica de los subdescriptores identificados en cada subdominio del conocimiento matemático para la enseñanza (CME) por tema, para el caso de Emi y luego para el caso de Aly

V.1.1.1 Presentación cronológica de los subdescriptores identificados en cada subdominio del CME por tema, para el caso de Emi

V.1.1.1.1. En el tema de Matrices

En términos del **conocimiento común del contenido**, podemos destacar lo siguiente:

[1.1] Saber lo que es una matriz (definición), usar términos y notación matemática que corresponden al concepto de matriz y saber hacer el ejemplo referente a Criptografía y Sociología. (1-231)

[1.1.1] Saber multiplicar matrices, aunque en este caso Emi se despista y comete un error numérico escribe 119 y debe ser 123 (el 123 es obtenido de $(34)(2)+(11)(5)$). (94-102)

[1.1.1] Saber la operatividad de las matrices (producto de matrices $XA=B$ y obtener $X=BA^{-1}$) y saber la utilidad de la matriz inversa (para descifrar un mensaje en un ejemplo de Criptografía). En el ejemplo, Emi no obtiene la matriz inversa (pues por el momento no es el objetivo) y sólo comenta su funcionalidad (ayudar a descifrar el mensaje) en este ejemplo. (120-125)

[1.1.2] Saber que las matrices tienen aplicación en varios campos, en particular en sociología y en economía. (35-231)

[1.2] Saber que la notación es muy importante en matemáticas. Que en una matriz, a diferencia de una tabla, es mejor decir elementos que datos y que la matriz se denota con paréntesis. (234-235); (241-244)

[1.2] Saber que en una matriz de dimensión $m \times n$, m y n son números naturales. (247-268); (258-364)

[1.2] Saber que las matrices se denotan con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas. (284-287)

[1.2] Saber que los elementos de la matriz tienen la forma a_{ij} con $i=1, 2, \dots, m$ y $j=1, 2, \dots, n$ y que si el orden de una matriz es $m \times n$, entonces m indica el número de filas y n el número de columnas. (288-302)

[1.2] Saber lo que en a_{ij} , los subíndices ij indican la posición del elemento en la matriz, la fila y la columna respectivamente. (309-313)

[1.2] Saber escribir la forma genérica desarrollada de los elementos de una matriz de orden $m \times n$ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. (316-323)

[1.2] Saber que los elementos de la matriz son números reales. (351-356)

[1.2] Saber en una matriz de 4×5 :

1. El número de filas y columnas que tiene esa matriz.
2. Que los elementos de la matriz pueden ser enteros y fraccionarios.
3. Que para localizar un elemento sólo hay que contar la fila y la columna para conocer su posición. (357-387)

[1.3] Saber lo que es una matriz cuadrada (matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas). (391-394)

[1.3] Saber escribir un ejemplo genérico de matriz cuadrada de orden 2 (400-413); y de orden 3. (416-428)

[1.3] Saber la definición de diagonal principal de una matriz (elementos que ocupan una posición en la que el número de fila coincide con el número de columna). (444-446)

[1.3] Saber lo que es una matriz fila (la que tiene una sola fila) y representarla de forma genérica $(a_{11} \dots a_{1n})$. (447-463)

[1.3] Saber lo que es una matriz columna (la que tiene una sola columna) y representarla de forma genérica $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$. (464-472)

[1.3] Saber lo que es una matriz nula (aquella en la que todos sus elementos sean cero). (483-486)

[1.3] Saber lo que es una matriz triangular superior (matriz cuadrada en la que todos los elementos que están situados por encima de la diagonal principal son cero) y representarla en forma genérica. (511-528)

[1.3] Saber lo que es una matriz triangular inferior (matriz cuadrada en la que todos los elementos que están situados por debajo de la diagonal principal son cero) y representarla (apoyándose en un esquema gráfico). (539-548)

[1.3] Saber la definición de matriz diagonal (matriz cuadrada en la que todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son cero). (559-561)

[1.3] Saber lo que es una matriz escalar (los elementos de la diagonal principal son todos iguales). (581-582)

[1.3] Saber lo que es una matriz unidad (matriz cuadrada en la que todos los elementos de la diagonal principal son unos). (609-610)

- [1.3] Saber distinguir entre una matriz escalar, diagonal y unidad. (612-613)
- [1.3] Saber trasponer una matriz de orden 2×3 . (649-683)
- [3.1] Saber cómo se realiza el producto de dos matrices. (12-49)
- [3.1] Saber efectuar el producto de dos matrices cuadradas de orden dos, con números concretos. (55-96)
- [3.1] Conocer cómo obtener el orden de una matriz (contando las filas y las columnas que tiene). (153-171); (186-188)
- [3.1] Saber efectuar el producto de dos matrices (una de orden 1×4 por otra de 4×1) con números concretos y por ello saber que la respuesta de E3 es correcta (E3 le dice cómo se efectuó el producto y el resultado de la matriz producto). (202-218)
- [3.2] Saber calcular el producto de dos matrices cuadradas de orden tres, a pesar de que Emi reconoce que se despistó cuando calcularon el primer elemento de la tercera fila de la matriz producto, pues el que habían calculado era el tercer elemento de la tercera fila y lo habían anotado como primer elemento de esa fila. (359-381)
- [4.2] Saber en qué consiste la propiedad asociativa para la suma de las matrices. (46-59)
- [4.2] Saber en qué consiste la matriz nula en matrices (aquella en la que todos sus elementos son cero). (66-74)
- [4.2] Saber en qué consiste la matriz opuesta en matrices. (79-88)
- [4.2] Saber en qué consiste la propiedad conmutativa para la suma de las matrices. (100-109)
- [4.3] Saber la definición del producto de un escalar por una matriz. (122-133)
- [4.3] Saber por qué se cumple la propiedad $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (por como están definidas la suma de matrices y el producto por un número real). (143-146)
- [4.3] Saber la definición del producto de un escalar por una matriz, la suma y sus propiedades en las matrices. (164-165)
- [4.4] Saber cómo se hace el producto de dos matrices. (195-346)
- [4.4] Saber la fórmula del producto de matrices. Saber la fórmula abreviada del producto de matrices usando el símbolo de Σ ($c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}$ desde $k=1$ hasta n) . (305-316)
- [4.4] Saber en qué consiste la propiedad distributiva en matrices, es decir, que $A(B+C) = AB + AC$ ó $(A+B)C = AC + AB$. (389-396)

[4.4] Saber que en el producto de matrices no se cumple en general la propiedad conmutativa. (435-439)

[4.4] Saber en qué consiste la matriz identidad (en la diagonal principal unos y fuera ceros). (483-485)

[4.4] Saber que $AI=IA=A$. (486-488)

[4.4] Saber que para calcular la matriz inversa será necesario hacer varios cálculos y no sólo una división o fracción como en el caso del inverso multiplicativo en los números reales. (534-539)

[4.5] Saber que al hacer la transformación elemental de cambiar una fila por otra, están cambiando la matriz, ya no es la misma matriz inicial. (576-577); (596-598)

[4.5] Saber la notación matemática para denotar la transformación elemental de cambiar una fila por otra ($F_i \rightarrow F_j$). (579-583); (590-591)

[4.5] Saber realizar la transformación elemental de intercambiar dos filas en una matriz. (585-594)

[4.5] Saber que en una matriz, con un número de filas mayor que dos, las filas se pueden intercambiar entre ellas mediante transformaciones. (600-609)

[4.5] Saber que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, se realiza dicha transformación sólo a esa fila y no a toda la matriz. (613-615)

[4.5] Saber aplicar la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número en un ejemplo concreto (una matriz de orden 2×2). (616-626)

[4.5] Saber la utilidad de las transformaciones elementales: 1) Hallar la matriz inversa, 2) Determinar el rango de una matriz y 3) Resolver sistemas de ecuaciones. (628-634)

[4.5] Saber la notación matemática para denotar la transformación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un número ($F_i + aF_j$). (635-638)

[4.5] Saber aplicar la transformación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un número en un ejemplo concreto (una matriz de orden 2×2). (641-661)

[4.5] Saber hacer los cambios y las transformaciones elementales necesarias para obtener la inversa, en sí, saber aplicar el método de Gauss-Jordán. (735-784); (799-809); (834-843); (850-851)

En términos del **conocimiento especializado del contenido**, podemos destacar lo siguiente:

[1.2] Saber que al expresar el lenguaje matemático el error de los estudiantes puede provenir de la falta de precisión en el lenguaje en la matemática escolar. Saber que expresar el pensamiento matemático con un lenguaje adecuado tiene gran peso. En este caso, Emi les precisa que cuando se hable de matriz se hablará de elementos y no de datos. (234-235)

[4.4] Saber que por la propia forma de hacer las operaciones, es decir, por la propia forma en que están definidas las operaciones con matrices, habrá algunas propiedades de los números reales que se transmitan al producto de matrices y otras no. (350-366)

[4.4] Saber que la multiplicación de matrices es una operación binaria, y por tanto en caso de que haya que multiplicar tres matrices, se debe anotar paréntesis o simplemente tomar en cuenta que se debe hacer primero el producto de dos matrices y luego el resultado por la otra matriz, es decir, saber que no hay forma de multiplicar tres matrices simultáneamente. (411-419)

[4.4] Saber que al calcular la matriz inversa de otra, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión del inverso multiplicativo en los números reales a la matriz inversa, en cuanto a que pueden pensar que como todos los números reales excepto el cero tienen inverso multiplicativo, en las matrices sea sólo la matriz nula la que no tenga inversa, pero en las matrices, además de la matriz nula (que sería similar al cero en los reales), habrá otras matrices que no tengan inversa. (556-562)

En términos del **horizonte matemático**, podemos destacar lo siguiente:

[1.1.1] Capacidad de relacionar varios conceptos matemáticos hasta llegar al deseado.
Álgebra → Sistemas de ecuaciones → Matrices → Tipos de ejercicios → Problemas → Grafos → Matriz.
(13-34)

[4.3] Emi les anuncia que este tema está relacionado con el de “estructuras algebraicas”, que no se ve en esta especialidad de bachillerato (Ciencias Sociales) pero sí en el Científico Tecnológico. (169-187)

En términos del **conocimiento del contenido y de los estudiantes**, podemos destacar lo siguiente:

[1.1.1] Capacidad para escuchar e interpretar el pensamiento que expresan los alumnos en su lenguaje usual. En este caso, Emi pregunta qué es lo que recuerdan del tema anterior (sobre el planteamiento de problemas de sistemas de ecuaciones), E1 contesta que había que poner los datos en una especie de tabla y Emi completa esa respuesta traduciendo y transfiriendo lo que dijo E1 (Emi: *Que cuando nos plantean un problema tú quieres decir que es útil colocar los datos no de cualquier manera sino en una tabla que nos facilita la toma de datos y luego el planteamiento del problema* - Emi voltea a ver a E1 y le pregunta - ¿No es así?). (1-12)

[1.2] Interpretar las respuestas de los estudiantes y guiarlas para llegar a las palabras que ella quiere escuchar, por ejemplo: “¿En lugar de datos decimos elementos?” Pues pretende que los estudiantes aprendan a ir usando el vocabulario adecuado matemáticamente para las matrices, en particular, en la definición de matriz. (232-239)

[1.2] Prever las necesidades de los estudiantes, en este caso Emi sabe que E9 puede tener problemas y acude a ella. Emi anticipa el problema de E9, en este caso, Emi se acerca a E9 para mostrarle en el libro de E9 - en Braille- el ejemplo que se va a hacer. (348-350)

[1.3] Prever las dificultades y necesidades de los estudiantes. En este caso Emi anticipa que E9 por su deficiencia visual, podría tener problemas para entender o seguir lo que Emi va explicando (matriz cuadrada y diagonal principal), por ello se acerca con E9 y cuando Emi verifica que E9 va siguiendo lo que ella ha explicado hasta ese momento, entonces Emi continúa explicando en la pizarra. (434-439)

[1.3] Prever las dificultades y necesidades de los estudiantes. En este caso Emi prevé que E9 por su deficiencia visual, podría tener problemas para entender y seguir la explicación de Emi, por eso ella se acerca a E9, para ayudarla a localizar este ejemplo en las notas que ella le prepara a E9 – algunas veces en Braille-, Emi apoya el dedo de E9 y le va señalando con su dedo, *está es la matriz unidad que vamos a ver ahora y si todos los números son distintos diagonal y si todos son iguales escalar*. Y cuando Emi verifica que E9 va siguiendo lo que ella ha explicado hasta ese momento, entonces Emi continúa explicando en la pizarra. (585-589)

[1.3] Saber que es conveniente que los estudiantes aprendan vocabulario de matrices para cuando vean el tema de operaciones con matrices. (615-620)

[3.2] Saber los errores comunes que pueden cometer los estudiantes al hacer el producto de dos matrices (multiplicar mal, sumar mal o confundirse de fila y columna). (400-406)

[3.2] Saber que si usa esa analogía (la analogía del $1 \in \square$ y la matriz identidad, en cuanto a que al multiplicarlo por otro lo deja invariante) los estudiantes pueden entender “mejor” el papel de la matriz identidad en matrices. (425-426)

[4.3] Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la definición del producto de un número por una matriz si se la dice en lenguaje común. (132-133)

[4.3] Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la propiedad $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ si se la dice en lenguaje común. (138-140)

[4.3] Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la propiedad $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ si se la dice en lenguaje común. (161-163)

[4.4] Prever que los estudiantes al involucrarse más con la fórmula abreviada del producto de matrices y ver que es más compleja (no sólo multiplicar número a número y ya), se hagan una imagen de que algunas propiedades de la suma y producto en los números reales se transmitirán al producto de matrices y otras no. (350-366)

[4.4] Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la propiedad distributiva en matrices si se la dice en lenguaje común. (397-399)

[4.4] Prever que los estudiantes se pueden confundir si Emi anota el orden de cada una de las matrices, al anotar las propiedades del producto de matrices, por ello no lo anota

y les aclara que se supone que las matrices tienen el orden necesario para efectuar el producto. (423-427)

[4.4] Prever que algún estudiante no sepa o no recuerde en qué consiste la propiedad conmutativa en los números reales. (430-434)

[4.4] Prever que a los estudiantes les puede quedar más clara la idea de que no se cumple la conmutatividad en el producto de matrices, simplemente usando un ejemplo concreto en el que a partir del orden se ve que no se cumple, más que ponerse a desarrollar una demostración formal. (442-454)

[4.4] Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la definición de una matriz identidad si se la dice en lenguaje común. (483-485)

[4.5] Emi sabe que la teoría cansa y aburre a los estudiantes. (568-569)

[4.5] Prever que los estudiantes se pueden equivocar al hacer la transformación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un número, es decir, que no se fijen bien en cuál es la fila que van a cambiar. (642-646)

[4.5] Prever que los estudiantes se pueden equivocar al hacer las transformaciones elementales para calcular la matriz inversa y les remarca que tienen que realizar las transformaciones elementales a las dos matrices (A|I) simultáneamente, por ejemplo, si cambian la fila de A entonces hay que cambiar la fila completa, incluyendo la fila correspondiente de I. (730-732); (744-746)

En términos del **conocimiento del contenido y de la enseñanza**¹, podemos destacar lo siguiente:

[1.1] Decidir empezar con estos ejemplos para enfatizar/enfocar el concepto de matriz, con el de Criptografía y con el de Sociología. (35-231)

[1.1.1] Capacidad de transferir y orientar la respuesta del estudiante para conducir dicha respuesta a lo que ella explicará posteriormente. Emi acepta la respuesta de E1 y la completa utilizando términos o aspectos del contenido que usará posteriormente. En este caso, Emi pregunta qué es lo que recuerdan del tema anterior (sobre el planteamiento de problemas de sistemas de ecuaciones), E1 contesta que había que poner los datos en una especie de tabla y Emi completa esa respuesta traduciendo y transfiriendo lo que dijo E1 (Emi: *Que cuando nos plantean un problema tú quieres decir que es útil colocar los datos no de cualquier manera sino en una tabla que nos facilita la toma de datos y luego el planteamiento del problema* - Emi voltea a ver a E1 y le pregunta - *¿No es así?*). (1-12)

¹ En esta sección (V.1.1), en este subdominio, de manera similar a las secciones IV.1.3.1 y IV.1.3.2 del capítulo de análisis, aún aparecen directamente (“en bruto”) los puntos de información evidenciados e identificados en las clases de las profesoras, mientras que en las siguientes secciones de resultados (V.1.2 y V.1.3), aparecerán los descriptores originados por estos puntos de información.

[1.1.1] Introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. Emi usa la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar dichos conceptos. En este caso, Emi para introducir el concepto de matriz hace un recorrido deductivo, es decir, parte de lo general a lo particular relacionando varios conceptos matemáticos familiares a los estudiantes. Empieza por comentarles que el Álgebra es una parte de las matemáticas que durante muchos siglos se ocupaba de resolver ecuaciones hasta aterrizar en que a un grafo se le puede asociar una matriz (Álgebra → Sistemas de ecuaciones → Matrices → Tipos de ejercicios → Problemas → Grafos → Matriz). (13-34)

[1.1.1] Considerar la aplicación de matrices en el ejemplo de Criptografía para introducir luego la definición de matriz. (35-125)

[1.1.1] A manera de cierre del ejemplo de Criptografía. Remarcarles a forma de resumen dos aspectos importantes: 1. Que las matrices no sólo sirven para guardar datos, para almacenar información, sino que con las matrices se pueden realizar operaciones que ayudan a proteger el descifrado de un mensaje y 2. Que con la ayuda de la matriz inversa se puede volver de nuevo al mensaje original. (120-125)

[1.1.2] Emi da un prefacio para empezar este ejemplo. Aprovechar y a especie de repaso mencionarles los tipos de matrices que han estado haciendo (matrices asociadas a grafos y matrices asociadas a problemas). Su habilidad para orientar el contenido a enseñar (recapitula y luego continúa), en particular, para relacionar, para hacer un puente entre el ejemplo que acaba de hacer (sobre criptografía) y el que hará ahora (aplicado a Sociología). (128-138)

[1.1.2] Hacerles énfasis en que vean que las matrices se usan en estudios sociológicos y hacerles notar su interés (de la profesora) de que vean que las matemáticas se aplican en campos muy diversos, en particular, en sociología; después de ver los dos ejemplos de aplicación de matrices. (221-226)

[1.1.2] Proponer un ejemplo cercano a los estudiantes que luego utiliza para hacer ver la aplicabilidad de las matrices (del contenido matemático) en estudios sociológicos. Todo esto puede coadyuvar a que el alumno se familiarice con el concepto y tenga una mayor comprensión del concepto para aplicarlo. Posteriormente para que el estudiante vea que el concepto de matriz puede aparecer en distintos ámbitos, por ejemplo en estudios sociológicos. (136-223)

[1.1.2] Hacerles notar que aunque las matrices se pueden estudiar en campos muy diversos, en este curso se centrarán más en el campo económico, es decir, en el uso de matrices en Economía. (226-231)

[1.2] Aprovechar la respuesta de E7, aceptarla y completarla para dar una definición más precisa de matriz (Emi: *Decídme, ¿qué es una matriz?* E7: *Un conjunto de datos que se disponen en columnas*, Emi: *¿En lugar de datos decimos elementos?*, E7: *También*, Emi: *Sería prácticamente lo mismo pero más genérico, entonces es un conjunto ordenado de elementos dispuestos en filas y columnas*). (234-235)

[1.2] Usar la analogía de una caja para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, para que logren entender “mejor” lo que significa “tamaño de la matriz o dimensión de la matriz” y remarcarles que es importante la dimensión que tenga la matriz. (247-268)

[1.2] Introducir una nueva pregunta para hacerles ver que es equivocada la respuesta de un estudiante y orientar la pregunta a la respuesta que quiere escuchar. En este caso, Emi habla de que una matriz tiene dimensión $m \times n$ y les pregunta qué tipo de números serán m y n . E3 contesta que son enteros y entonces Emi les pregunta si tendrá sentido que m y n fueran números negativos o decimales, a lo cual E8 contesta que son naturales y Emi le confirma a E8 que en efecto son naturales. (258-264)

[1.2] Transferir y orientar la respuesta del estudiante para llegar a lo que ella quiere (Emi: *¿Cuál es la matriz más pequeña? de tamaño*, E3: $m \times 1$, Emi: *¿ $m \times 1$?, una columna*, E3: *Si*). (268-275)

[1.2] Comentarles varios ejemplos de dimensiones de matrices (2x1, 3x2, 4x5, 6x6, etc.) para que los estudiantes conozcan que existe una amplia gama, pero que las que trabajarán en clase serán dimensiones pequeñas, justificando que la teoría es la misma para todas. (279-283)

[1.2] Comentarles, antes de hacer un ejemplo, que los elementos de la matriz tienen la forma a_{ij} con $i=1, 2, \dots, m$ y $j=1, 2, \dots, n$ y les remarca que si el orden de una matriz es $m \times n$, entonces m indica el número de filas y n el número de columnas. (288-302)

[1.2] Abordar un ejemplo de una matriz de orden 5x4 para hacerles notar que la matriz tendría en total 20 elementos distribuidos en 5 filas y 4 columnas. (303-309)

[1.2] Hacerles notar que en la forma genérica desarrollada de los elementos de una matriz de orden $m \times n$ se ve de forma explícita cuáles son los elementos que componen la matriz, tanto en filas como en columnas, a diferencia de la forma abreviada $A=(a_{ij})$ con $i=1, 2, \dots, m$ y $j=1, 2, \dots, n$. (324-327)

[1.2] Orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. En este caso E3 da una respuesta correcta respecto a la ubicación del elemento de la matriz con subíndices 2 y 3, E3 responde que ese elemento estaría en la tercera columna, segunda fila, pero Emi orienta esa respuesta para que se vayan acostumbrando a decir primero el número de filas y luego el número de columna en concordancia con esa convención matemática. (332-335)

[1.2] Hacerles notar que los elementos de la matriz son números reales, antes de seguir avanzando en la presentación del contenido de matrices. (351-356)

[1.2] Hacerles notar en el ejemplo de la matriz de 4x5 que:

1. El número de filas y columnas que tiene esa matriz.
2. Que los elementos de la matriz pueden ser enteros y fraccionarios.
3. Cómo localizar un elemento sabiendo los subíndices, es decir, hacerles ver que para localizar un elemento sólo hay que contar la fila y la columna para conocer su posición. (357-387)

[1.2] Explicar el contenido en lenguaje usual. Una forma de saber localizar un elemento sabiendo los subíndices (comentarles que para conocer la posición del elemento a_{24} sólo hay que ir contando por fila y columna y ubicarlo). (380-387)

[1.3] Transferir la respuesta de los estudiantes para orientarla, es decir, usar un lenguaje con conceptos matemáticos que le servirán posteriormente. En este caso, Emi acepta y completa la respuesta de E7 (Emi: *¿Qué será una matriz cuadrada?*, E7: *La que tiene forma de cuadrado*, Emi: *Muy bien, aquella matriz que tenga el mismo número de filas que de columnas eh*). (391-394)

[1.3] Hacerles notar, al empezar a presentar las matrices cuadradas que hasta ese momento habían trabajado con matrices rectangulares de orden $m \times n$ pero ahora en las matrices cuadradas como el número de filas coincide con el número de columnas, entonces no hablarán de orden $m \times n$ sino que sólo se dirá de orden n . (395-399)

[1.3] Decidir poner un ejemplo genérico de matriz cuadrada de orden dos, después de comentarles cómo sería el orden de una matriz cuadrada (es decir, que si el número de filas coincide con el número de columnas es una matriz cuadrada). (400-413)

[1.3] Abordar un ejemplo genérico de una matriz cuadrada de orden 2 y luego una de orden 3, esto último para hacer énfasis en la notación, en la forma genérica en la que están dispuestos los elementos y en lo que significan los subíndices. (400-428)

[1.3] Usar una analogía entre el cuadrado y la diagonal del cuadrado y una matriz cuadrada y su diagonal principal, para que los estudiantes visualicen “mejor” la diagonal principal de una matriz, en este caso, Emi señala la diagonal principal en el ejemplo de matriz genérica cuadrada de orden 2 y de orden 3. (441-446)

[1.3] Hacer preguntas a los estudiantes (que muchas veces se las contesta ella y otras pocas los estudiantes) para ir definiendo y representando la matriz fila (447-463) y la matriz columna. (464-472)

[1.3] Rescatar la idea de matriz fila y matriz columna y la expresan en términos cercanos a los estudiantes para tratar de que el estudiante fije la imagen de una matriz fila y una matriz columna, haciéndoles ver que se fijan en la orientación de los elementos, horizontal en la matriz fila y vertical en la matriz columna. (473-476)

[1.3] Hacer mención de que puede haber matrices nulas de orden 2×2 y 3×3 , después de decirles lo que es una matriz nula, para que el estudiante se haga una idea de las distintas dimensiones o tamaño que puede tener una matriz nula lo cual es relevante, pues hay que cambiar del $0 \in \square$ al $0 \in M$ (M es el conjunto de matrices), lo cual algunas veces no es tan trivial para los estudiantes, es decir, no es lo mismo 0 a $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Luego, Emi escribe en la pizarra una matriz nula de orden $n \times n$. (483-489)

[1.3] Hacer preguntas e ir guiando (orientando) las respuestas para usar la analogía del $0 \in \square$ y la matriz nula ($0 \in M$) y hacerles notar la importancia, el papel que jugará la matriz nula en las operaciones con matrices, en particular, en la suma de matrices y para ello les recuerda el papel del 0 en la suma y producto en los números reales (que al sumarlo con otro número real lo deja invariante). (492-507)

[1.3] Representar la definición de matriz triangular superior en forma genérica y usar como imagen la figura geométrica del triángulo, para hacer notar por qué se le llama triangular, en particular, triangular superior. Y posteriormente de forma análoga triangular inferior, Emi nuevamente usa la geometría para representar la matriz triangular inferior para visualizar la forma de dicha matriz (Emi dibuja un triángulo grande y dentro de él un cero grande por debajo de la diagonal principal). (511-548)

[1.3] Decidir hacer un ejemplo de una matriz diagonal de orden 3×3 para que los estudiantes visualicen la forma que tiene una matriz diagonal. (562-569)

[1.3] Decidir hacer un ejemplo de una matriz escalar de orden 3×3 y hacerles notar la forma que tiene para que los estudiantes visualicen la forma que tiene una matriz diagonal. (582-584)

[1.3] Evocar conceptos equivalentes vistos anteriormente para presentar un nuevo concepto. Emi les recuerda el ejemplo que pusieron para una matriz escalar y aprovecha eso para presentarles la matriz unidad. (590-604)

[1.3] Aprovechar una respuesta incorrecta para hacer ver las consecuencias que eso conllevaría en el contenido. Emi toma en cuenta la respuesta de E3 a pesar de que no es correcta a lo que ella pregunta, pero aprovecha para hacer ver qué pasaría en el caso que plantea E3, es decir, que si en la diagonal principal de una matriz escalar en lugar de unos fueran ceros entonces sería la matriz nula. (599-608)

[1.3] Comentarles la dirección/orientación de ese contenido en temas siguientes. En este caso, justificarles que en esta clase están aprendiendo vocabulario de matrices (principales tipos de matrices) porque éstas están relacionadas con el tema de operaciones con matrices, que verán luego. (615-620)

[1.3] Para presentar el concepto de matriz traspuesta, Emi inicialmente usa la analogía de una “matriz” con una caja y de “traspuesta” con darle vuelta a la caja y luego se apoya de una figura geométrica: el rectángulo. Emi para presentar la matriz traspuesta les hace la pregunta: ¿Qué pasa si a una caja le doy una vuelta? Para que los estudiantes entiendan “mejor” la idea de lo que diferencia una matriz de su traspuesta. En seguida se apoya de figuras geométricas para representar el concepto de matriz traspuesta. Representa a una matriz de $m \times n$ con un rectángulo y sobre la altura del rectángulo escribe m filas y al lado contiguo n columnas y les pregunta: ¿Qué pasa si yo le doy vuelta al rectángulo? Luego Emi dibuja la nueva forma que tendría el rectángulo al darle vuelta, Emi mira a los estudiantes esperando respuesta y E7 responde que se cambian las filas por las columnas (respuesta que Emi quería escuchar). Y después de darles la caracterización de una matriz traspuesta (que lo único que se cambia es la posición de los elementos, es decir, se cambia a las filas por las columnas), vuelve a remarcarles que transponer una matriz es lo mismo que cambiar el rectángulo, tumbarlo y ponerlo de pie. (624-648).

[1.3] Decidir hacer un ejemplo de matriz traspuesta, luego de explicarles cómo se obtiene la matriz traspuesta de una matriz. En este caso Emi se “inventa” un ejemplo con una matriz A de orden 2×3 con valores concretos (es decir, no con la matriz genérica de orden 2×3 , para que con el ejemplo les quede claro a los estudiantes como transponer una matriz y entonces el orden de A^t es 3×2 . (649-683)

[1.3] Luego Emi pretende mediante una pregunta (¿Cuándo va a coincidir una matriz con su traspuesta?) introducir el concepto de matriz simétrica, pero E5 le hace una pregunta: ¿Cómo asegurarse de que sea la traspuesta? A lo cual Emi da la respuesta (comparando que las filas de una sean las columnas de la otra) y trata de reforzarla con un nuevo ejemplo, una matriz de 3×3 . Es decir, Emi ya no avanza con el siguiente concepto sino que nuevamente retoma lo de la matriz traspuesta y hace otro ejemplo (ahora para una matriz cuadrada de orden 3). (685-713)

[1.3] Usar un esquema gráfico para indicar que la primera fila de A es ahora la primera columna de A^t y similarmente la segunda fila de A es ahora la segunda columna de A^t . En este caso Emi encierra en un rectángulo la primera fila y luego la segunda fila de A y después encierra la primera columna de A^t que sería la primera fila de A, para que noten como la primera fila de A ahora es la primera columna de A^t y similarmente encierra en un rectángulo la segunda columna de A^t que sería la segunda fila de A. (663-674)

[1.3] Aceptar la respuesta de E5 (que la traspuesta también será una matriz cuadrada), la completa (les comenta que la traspuesta también será cuadrada y de orden 3) y les hace notar la estrategia para escribir la traspuesta (ir tomando cada fila de la matriz y anotarlas como columna de la traspuesta, respectivamente). (701-713)

[3.1] Saber cuándo destacar aspectos relevantes de un contenido matemático. En este caso, al empezar a explicarles cómo se hace el producto de dos matrices, Emi les remarca la condición que se debe cumplir para efectuar el producto de dos matrices (que debe coincidir el número de columnas de la primera con el número de filas de la segunda matriz). (5-11)

[3.1] La forma de ir presentando/indicando cómo hacer el producto de dos matrices (12-49):

1. Separar la matriz A por filas y la matriz B por columnas.
2. Efectuar el producto de cada una de esas filas por cada una de esas columnas.
3. Decirles cómo efectuar ese producto (multiplicar una fila por una columna elemento a elemento y sumar esos productos).
4. Repetir el proceso para completar la primera fila de la matriz producto.
5. Repetir el proceso, la segunda fila por cada una de las columnas, dará la segunda fila de la matriz producto.
6. Repetir el proceso hasta llegar a la última fila por cada una de las columnas, da la última fila de la matriz producto.

[3.1] Decidir hacer como primer ejemplo, el producto de dos matrices cuadradas de orden dos. (55-62)

[3.1] Hacerles notar que una forma de garantizar que se puede hacer el producto es hacerlo con matrices cuadradas. (63-66)

[3.1] Una vez que Emi divide en filas la primera matriz y en columnas la segunda matriz ($(=)(|)$), Emi calcula el primer elemento, luego se dirige a un estudiante en específico para que calcule el segundo elemento de la matriz producto, luego a otro estudiante el tercer elemento y a otro el último elemento. (67-96)

[3.1] Usar un esquema gráfico $(\equiv)(|)|$; $(\Rightarrow)(|)$ para representar la división de la primera matriz en filas y de la segunda matriz en columnas, para efectuar el producto de esas dos matrices. Emi usa ese esquema gráfico porque considera que de esa forma los estudiantes visualizan “mejor” o se harán una buena imagen mental de que deben multiplicar una fila de la primera matriz por una columna de la segunda matriz al efectuar el producto de ellas. (68-69); (202-209)

[3.1] Proponerles un ejercicio que ella misma se “inventa”, les pide que escriban quien va a ser la matriz A, la matriz B, ver si se puede efectuar el producto AB y en ese caso qué significado tiene el producto. Luego Emi empieza a supervisar lo que van haciendo los estudiantes. Enseguida Emi regresa a la pizarra para explicar en la pizarra los resultados de los ejercicios, Emi le da un “empujoncito” a E8 para que le diga los elementos de la matriz A, posteriormente Emi les hace notar de qué orden es esa matriz. Después Emi pide a E4 le diga los elementos y el orden de la matriz B. Luego les hace notar que el orden de A es 1×4 y de B 4×1 y por tanto se puede hacer el producto AB, con ayuda de E3, Emi escribe el resultado de AB y les comenta el significado del resultado en este ejemplo (significa el número de combinaciones de vuelos desde Sevilla a Nueva York). (104-236)

[3.1] Comentarles lo que quiere que hagan en este ejemplo (Emi: ... *tenéis que calcular A por B y después de calcular A por B, [...] quiero que me digan qué significado tiene el producto*). (129-132)

[3.1] Involucrar a los estudiantes (que casi no participan) en la respuesta a este ejercicio (Emi: *A ver E8 me puedes decir cuáles son los elementos de la matriz A, vamos contando, ¿de Sevilla a Barcelona cuántos vuelos hay? Tres vuelos, entonces el primer elemento es 3, ¿de Sevilla a Dublín?*, E8: *Cero*, Emi: *Cero*). (139-148)

[3.1] Comentarles una interpretación de la matriz A que acaba de escribir Emi en la pizarra con ayuda de E8. Emi les menciona que los elementos de esa matriz indican el número de vuelos que hay desde la ciudad de Sevilla a cada una de las ciudades que han llamado intermedias. (149-152)

[3.1] Tras el hecho de que los estudiantes no le han podido decir correctamente cuál es el orden de la matriz A, Emi les hace notar que en este caso cada columna tiene un solo elemento pero se considera primera columna, segunda, tercera y cuarta, respectivamente; y que por lo tanto el orden de la matriz A es 1×4 porque tiene una fila y cuatro columnas. (153-171)

[3.1] Hacerles notar el orden que tienen las dos matrices para que vean que en este caso sí se pueden multiplicar esas dos matrices (A tiene orden 1×4 y B tiene orden 4×1 entonces se puede hacer el producto y la matriz producto tendrá orden 1×1). (186-201)

[3.1] Tratar de que los estudiantes vean que el resultado del producto tiene en algunos casos un significado concreto. A pesar de que en este ejemplo que ella se inventó para tal fin puede resolverse sin necesidad de usar matrices, pues es un ejemplo en el que se obtuvo el número de combinaciones de vuelos de Sevilla a Nueva York. (237-241)

[3.2] Decidir qué ejercicios proponerles para que practiquen cómo se hace el producto de dos matrices. a) En el primer ejercicio propone dos matrices cuadradas pero de orden mayor, de orden 3. b) En el segundo ejercicio propone la matriz identidad de orden tres y otra matriz de orden 3×3 para que noten lo que le pasa a una matriz que es multiplicada por la matriz identidad. c) En el tercer ejercicio les propone dos matrices que no son cuadradas, una de orden 2×3 y la otra de orden 3×2 para que también practiquen hacer el producto de dos matrices que no son cuadradas. (243-267)

[3.2] Acercarse a los estudiantes que le piden ayuda para poder empezar a hacer el ejercicio que les ha pedido que hagan. E1 no sabía como empezar a hacer el producto, pide ayuda a Emi, y Emi le comenta que tiene que multiplicar la primera fila por la primera columna y que luego tiene que ir multiplicando cada una de las filas por cada una de las otras columnas. (268-274)

[3.2] Acercarse a los estudiantes que le piden ayuda para poder empezar a hacer el ejercicio que les ha pedido que hagan. E13 no sabía como empezar a hacer el producto, pide ayuda a Emi, entonces E13 con su ayuda calcula los valores de la primera y segunda fila de la matriz producto, pero al llegar al cálculo de los valores de la tercera fila de la matriz producto, E13 se siente perdida con “tantas filas, columnas y sumas de productos”, entonces Emi vuelve a rescatarla y finalmente ayuda a E13 hasta terminar de hacer el producto completo de esas dos matrices. (275-281)

[3.2] Hacerle notar a E13 que la primera fila de la matriz producto se completa multiplicando la primera fila de la primera matriz por cada una de las columnas de la segunda matriz, con la intención de que E13 lo tenga presente cuando complete la segunda fila de la matriz producto. (295-297)

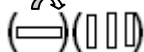
[3.2] Tratar de situar a E13, de hacerle ver de manera general, lo que han hecho para efectuar el producto. Emi intenta que E13 se fije que obtuvieron ya la primera y segunda fila de la matriz producto y que por tanto, la tercera fila se obtendrá de manera similar, es decir, para que por analogía, E13 calcule los elementos de la tercera fila de la matriz producto. (330-345)

[3.2] Emi, al ver que E13 se queda callada y no hace nada a pesar de que ella trató de situarla para hacerle ver de manera general, lo que han hecho para efectuar el producto, Emi le repite cómo se obtiene la primera fila y segunda fila de la matriz producto y por tanto le indica lo que tiene que hacer (explícitamente indicándole los productos con flechas que van de la tercera fila de la primera matriz a cada una de las columnas de la segunda matriz), para calcular los valores de la tercera fila de la matriz producto. (347-355)

[3.2] Tras la segunda equivocación de E13 (de multiplicar sólo el 2 por cada elemento de la columna, y no multiplicar uno a uno, número-a-número de la fila por número-a-número de la columna) Emi finalmente le termina el ejercicio a E13 en su cuaderno. (368-381)

[3.2] Enseñar a precisar el lenguaje, a que se acostumbren a localizar/ubicar un elemento: a) Indicando la posición exacta diciendo fila y columna y b) que sea en ese orden, primero la fila y luego la columna. (388-395)



[3.2] Usar el esquema gráfico  para hacerles notar que deben seguir un orden establecido para hacer el producto de dos matrices para no confundir la fila y columna que deben multiplicar. (403-406)

[3.2] Comentar la analogía del $1 \in \square$ y la matriz identidad. Comentarles que en las matrices, la matriz identidad tiene un papel parecido al $1 \in \square$ en cuanto a que al multiplicarlo por otro (en este caso por otra matriz cuadrada del orden de la matriz identidad) lo deja invariante. (425-426)

[3.2] Repetir el procedimiento de cómo se hizo cierto cálculo para aclarar la(s) duda(s) de los estudiantes. En este caso Emi ve que E15 tiene duda sobre el 10 (valor obtenido de multiplicar la primera fila, segunda columna) y Emi repite las operaciones que se realizan para obtener ese valor y que E15 vea que efectivamente se obtiene ese valor. (432-439)

[3.2] Aprovechar el último ejercicio en el cual las matrices no son cuadradas para hacer notar (441-458):

1. Cuándo se pueden multiplicar dos matrices (cuando el número de filas de la primera matriz coincide con el número de columnas de la segunda matriz).
2. De qué orden va a quedar la matriz producto (en este caso, como A es de orden 2×3 y B de orden 3×4 entonces la matriz producto queda de orden 2×4).
3. Que si las matrices que van a multiplicar no son cuadradas pero cumplen la condición para poder multiplicarlas, es decir, que es posible hacer el producto AB, si se cambia el orden del producto BA entonces ya no se puede hacer el producto. Es decir, intenta que vean que el producto de matrices no es conmutativo. En este caso como A es de orden 2×3 y B de 3×4 , AB es posible pero BA no es posible porque no se cumple la condición de que el número de filas de la primera coincida con el número de columnas de la segunda.

[3.2] Saber qué ejercicios dejarles de deberes (unos similares a los hechos en clase). (464-466)

[4.1] Usar como estrategia para introducir las propiedades de las operaciones con matrices la familiaridad que pudieran tener los estudiantes con las propiedades de los números reales, para hacerles notar que algunas de las propiedades de matrices se derivan directamente de las propiedades de los números reales. (13-17)

[4.1] Emi retoma el proceso de cómo se hace la suma de 2 matrices, antes de dar las propiedades en la suma de matrices. (18-42)

[4.1] Emi usa la analogía de la suma en los números reales con la suma de matrices. (13-42)

[4.2] Para presentarles la propiedad asociativa para la suma de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad asociativa en la suma de los números reales y en las matrices. (46-59)

[4.2] Explicar por qué se cumple la propiedad asociativa en las matrices (en términos de similitud con los números reales). (60-65)

[4.2] Para presentarles la matriz nula en la suma de matrices, Emi les comenta la analogía del elemento neutro en la suma de los números reales y en las matrices. (66-74)

[4.2] Para presentarles la matriz opuesta en la suma de matrices, Emi les comenta la analogía del elemento opuesto en la suma de los números reales y en las matrices. (79-88)

[4.2] Para presentarles la propiedad conmutativa para la suma de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad conmutativa en la suma de los números reales. (100-106)

[4.2] Explicar por qué se cumple la propiedad conmutativa en las matrices (en términos de similitud con los números reales). (110-112)

[4.2] A forma de resumen y para terminar de presentar las principales propiedades de la suma de matrices, Emi les remarca, en concreto, las implicaciones de esas propiedades que acaba de explicarles. (114-118)

[4.3] (Revoicing y traducción) Explicarles la definición del producto de un número real por una matriz en lenguaje común, haciendo preguntas a los estudiantes. (119-133)

[4.3] Hacer notar que en el producto de un escalar por una matriz existe una multiplicación de 2 números reales para luego anunciarles las propiedades de escalares por matrices. (134-137)

[4.3] Explicarles la propiedad $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ en lenguaje común. (138-140)

[4.3] Determinar el momento oportuno para aprovechar y comentarles una nueva propiedad. (147-150)

[4.3] Explicarles la propiedad $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ en lenguaje común. (161-163)

[4.3] Comentarles la utilidad de las propiedades (las aplicarán cuando vean ecuaciones matriciales). (184-187)

[4.4] Al presentarles el producto de dos matrices, hacerles notar/remarcarles que para hacer el producto de dos matrices debe coincidir el número de columnas de la primera matriz con el número de filas de la segunda, es decir, hacer hincapié en la importancia del orden de las matrices para poder multiplicarlas. (195-208)

[4.4] Esquema gráfico para hacer el producto de dos matrices, en la primera matriz dibuja sólo líneas horizontales para representar filas y en la segunda puras líneas verticales indicando columnas, Emi usa este esquema gráfico para que tengan una mayor visualización de que para hacer el producto de las dos matrices hay que multiplicar “filas por columnas”. (218)

[4.4] Hacerles notar por qué han visto en clase la fórmula abreviada para multiplicar dos matrices (en términos de hacerles ver que la fórmula es compleja, es decir, que no es tan sencillo cómo simplemente multiplicar número a número, como por ejemplo en el caso del producto de un escalar por una matriz). (350-366)

[4.4] Para presentarles la propiedad distributiva en matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad distributiva en matrices de los números reales. (375-387)

[4.4] Explicarles en qué consiste la propiedad distributiva en lenguaje común. (397-399)

[4.4] Comentarles cómo y cuándo usar la propiedad distributiva en matrices (en ecuaciones matriciales). (400-406)

[4.4] Hacerles notar que es importante el orden de las matrices para poder multiplicarlas, pero que ella no lo anotará, dará por hecho que al escribir las matrices en las propiedades se supone que cumplen la condición del orden para multiplicarlas. (423-427)

[4.4] Para presentarles la propiedad conmutativa en el producto de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad conmutativa en la suma y producto en los números reales. (430-434)

[4.4] Antes de ver la “no conmutatividad” en el producto de matrices, Emi les comenta la propiedad conmutativa en los números reales. (428-434)

[4.4] Para mostrar fácilmente sin necesidad de hacer una demostración formal de que no se cumple la conmutatividad en el producto de matrices, Emi les da un ejemplo para hacerles notar que simplemente al cambiar el orden de las matrices, ya no es posible hacer el producto, si A tiene orden 2×3 y B tiene orden 3×4 , entonces se puede hacer AB pero no BA. (442-454)

[4.4] Al explicar las propiedades del producto de dos matrices, remarcarles que hay que tener cuidado en el orden de las matrices para poder multiplicarlas. (457-460)

[4.4] Explicarles en qué consiste la matriz identidad en lenguaje común. (483-485)

[4.4] Evocarles un ejercicio equivalente que hicieron anteriormente al multiplicar una matriz A por I y ver que $AI=A$. (489-491)

[4.4] Para terminar de presentarles la matriz identidad, Emi les comenta la analogía entre la matriz identidad en matrices y el 1 de los números reales. (492-499)

[4.4] Para presentarles la definición de matriz inversa, Emi les comenta la analogía entre la matriz inversa en matrices y la propiedad del inverso multiplicativo de los números reales. (500-502); (508-533)

[4.4] Hacerles notar la diferencia entre el inverso multiplicativo de los números reales y la matriz inversa en matrices, para hacerles notar que para calcular la matriz inversa será necesario hacer varios cálculos y no sólo una división o fracción como en los números reales. (534-539)

[4.4] Hacerles notar la analogía entre el inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa en cuanto a que la matriz nula no tiene inversa por la misma razón que el cero no tiene inverso multiplicativo, pues $a \cdot 0 = 0$ en los números reales y en matrices $A \cdot 0 = 0$ (este 0 en matrices es la matriz nula). (541-555)

[4.4] Remarcarles la diferencia del inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa en cuanto a que todos los números reales excepto el cero tienen inverso multiplicativo pero en las matrices, además de la matriz nula (que sería similar al cero en los reales), habrá otras matrices que no tengan inversa. (556-562)

[4.5] Utilidad. Emi les comenta para qué hay que saber las transformaciones elementales (para calcular la matriz inversa). (573-575)

[4.5] Al explicar las transformaciones elementales, Emi les hace notar que al hacer la transformación elemental de cambiar una fila por otra, están cambiando la matriz, ya no es la misma matriz inicial. (576-577)

[4.5] Hacerles notar que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, se realiza dicha transformación sólo a esa fila y no a toda la matriz. (613-615)

[4.5] Hacerles notar en un ejemplo concreto de una matriz de orden 2×2 que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, afecta sólo a esa fila y a la otra fila no le pasa nada. (625-626)

[4.5] Comentarles la utilidad de las transformaciones elementales: 1) Hallar la matriz inversa, 2) Determinar el rango de una matriz y 3) Resolver sistemas de ecuaciones. (628-634)

[4.5] Antes de introducir el método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa, Emi les remarca nuevamente la utilidad de las transformaciones elementales para calcular la matriz inversa. (683-686)

[4.5] Breve reseña histórica para introducir el tema: Método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa (Emi habla un poco sobre Gauss). (689-695)

[4.5] Emi les describe la estrategia para calcular la matriz inversa en un ejemplo que ella se ha inventado con una matriz de 2×2 con el método de Gauss-Jordán, empezando con una pregunta que ella misma contesta. (699-722)

[4.5] Al hacer el ejemplo, remarcarles que tienen que realizar las transformaciones elementales a las dos matrices $(A|I)$ simultáneamente, por ejemplo, si cambian la fila de A entonces hay que cambiar la fila completa, incluyendo la fila correspondiente de I . (730-732); (744-746)

[4.5] Remarcarles nuevamente la estrategia/idea general para conseguir la matriz inversa y les hace notar lo que se ha logrado en el primer objetivo (obtener el primer 1 de la matriz identidad a la que quiere llegar para hallar la matriz inversa). (752-765)

[4.5] Emi repite el proceso de una transformación elemental ante una situación en la que los estudiantes están en “estado de shock”, como deslumbrados e impresionados porque no entienden los cambios y transformaciones elementales que está haciendo Emi en la pizarra para conseguir la matriz inversa con el método de Gauss-Jordán. (778-789)

[4.5] Emi repite lo que se ha hecho hasta ese momento para contestar la pregunta de E5. (790-797)

[4.5] Cada vez que Emi va consiguiendo un cambio para obtener la matriz inversa, ella se detiene y repasa lo que se ha hecho hasta el momento y luego seguir en la solución del ejercicio. (812-817)

[4.5] Emi concluye el ejemplo remarcándoles lo que se tenía y a lo que se llegó $(A|I) \rightarrow (I|A^{-1})$. (855-859)

[4.5] Remarcar o repasar de forma general lo que se hizo, a manera de cierre del ejemplo. (870-881).

[4.5] Decidir qué dejarles de deberes. En este caso, dada la *situación de tensión* que se suscitó al hacer el ejemplo de hallar la inversa, Emi decide dejarles deberes sobre las propiedades de las operaciones con matrices pero no de cálculo de matriz inversa. (882-887)

En términos del **conocimiento curricular**, podemos destacar lo siguiente:

[1.3] Saber que el tema de matriz traspuesta viene en el libro de texto. (622-624)

En términos del **conocimiento pedagógico general**, podemos destacar lo siguiente:

[4.1] Controlando la indisciplina. Al escuchar desorden en el grupo, Emi les dice que ese contenido lo tienen en el libro, así que no es necesario que lo copien y les pide que atiendan al explicación que ella hará y estén en silencio. (7-9)

[4.5] Control de indisciplina y motivación. Emi controla la indisciplina en el grupo y luego trata de motivarlos para continuar y terminar la teoría de matrices. (567-572)

[4.5] Tranquilizar y motivar. Conocimiento para tranquilizar a los estudiantes y motivarlos, en *situaciones de tensión*, tener frases como: “si practican entonces podrán hacer los ejercicios similares a estos con facilidad”. (860-881)

V.1.1.1.2. En el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales

En términos del **conocimiento común del contenido**, podemos destacar lo siguiente:

[6.2.1] Saber que no es necesario convertir las áreas en otra unidad de medida, siempre y cuando usen las mismas unidades de medida en todas las ecuaciones. (252-254)

[6.2.2] Saber lo que son las matrices input/output (insumo-producto). (340-352), (434-438)

[6.2.2] Saber lo que sería una situación de equilibrio en un modelo cerrado de Leontief (gastos=ingresos). (441-462), (508-516)

[7.1] Saber qué transformaciones elementales se pueden realizar en un sistema sin modificar la solución del sistema de ecuaciones:

- 1) Saber que si cambia el orden de las ecuaciones en un sistema no altera la solución del sistema. (10-12)
- 2) Saber que multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de cero, no cambia las soluciones de la ecuación porque con esas transformaciones el sistema es equivalente. (28-31)
- 3) Saber que se pueden sumar las ecuaciones unas con otras porque también las ecuaciones que resultan son equivalentes, es decir, tienen la misma solución. (33-37)

[7.1] Saber la utilidad de las transformaciones elementales en matrices (*porque para encontrar el valor de x , y , z debo despejar, y una forma muy fácil de despejar es haciendo un sistema escalonado*). (51-54)

[7.1] Saber la estrategia para encontrar la solución en un sistema escalonado (si el sistema ya está escalonado entonces si ya se tiene el valor de z , se sustituye en la segunda ecuación y se obtiene y , finalmente se sustituye el valor de y , z en la primera ecuación y se obtiene el valor de x). (55-68)

[7.1] Saber escribir el sistema en forma matricial. (79-95)

[7.1] Saber la estrategia para resolver un sistema de ecuaciones lineales con el método de Gauss (trabajar con la matriz ampliada y conseguir hacer ceros por debajo de la diagonal principal). (109-110), (123-125)

[7.1] Saber que pueden dividir todo por 10 y así manejar cantidades más pequeñas al hacer las operaciones. (126-129)

[7.1] Saber hacer las transformaciones elementales para llegar al sistema escalonado. En este caso las transformaciones elementales son a) $F_2 - F_1$ y b) $F_3 - F_1$. (133-159)

[7.1] Saber obtener los valores de x , y , z a partir del sistema escalonado, es decir, saber “despejar”. (187-216)

[8.2] Saber *grosso modo* en qué consiste el método de reducción de Gauss, es decir, saber escribir la matriz ampliada, hacer ceros por debajo de la diagonal mediante transformaciones elementales, escribir el sistema equivalente escalonado, resolverlo y encontrar la solución. (85-134)

[8.3] Saber cómo se representaría un sistema escalonado en matrices para identificar qué tipo de sistema es. (306-356)

[8.4] Saber lo que es el rango de una matriz (Emi: *El rango es el número de filas linealmente independientes*). (384-386)

[8.4] Saber cómo se obtiene el rango de una matriz y el valor del rango de la matriz de coeficientes ya escalonada, para cada tipo de sistema. (387-397)

[8.4] Saber “las propiedades de sistemas”, es decir, saber el teorema de Rouché-Frobenius. (434-466)

[8.4] Escribir correctamente el sistema en forma matricial y la matriz ampliada. (496-511)

En términos del **conocimiento del contenido y de los estudiantes**, podemos destacar lo siguiente:

[6.2.1] Prever que los estudiantes no saben o no recuerdan a cuánto o a qué equivale un área (un decámetro cuadrado = cien metros cuadrados). (156-157)

[6.2.1] Prever que los estudiantes pueden entender “mejor” el enunciado del problema si se los explica en lenguaje común, en lenguaje que sea más familiar a los estudiantes. (153-162)

[6.2.1] Prever que los estudiantes pudieran hacerse la imagen inadecuada de que los problemas que resolverán en clase serían del tipo del primer ejemplo (“antiguos y difíciles”) y por ello Emi les aclara eso. (225-229)

[6.2.2] Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” el problema si les explica en lenguaje común, lenguaje más familiar a los estudiantes, lo que son las matrices input/output (insumo-producto). (340-352)

[7.1] Prever que los estudiantes se pueden equivocar al escribir el sistema en forma matricial, es decir, que no pongan las equis debajo de las equis (x 's), las y 's debajo de las y 's y las z 's debajo de las z 's. (184-186)

[7.1] Prever que algún estudiante pudiera escribir la solución del sistema sin seguir la convención matemática de que siempre se anota el valor de las incógnitas en el orden en que aparecen dadas, en este caso (x, y, z). (221-225)

[7.2] Prever las necesidades de E9, en particular, la ayuda a localizar en su libro de Braille el problema que están resolviendo. (291-292)

[7.2] Saber que los estudiantes suelen irse con la pinta y representar a las variables con algo que no tiene sentido, es decir, hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente el sentido de las variables en el problema. (311-318)

[8.2] Prever que un error común en los estudiantes es pensar y escribir que al obtener el valor de x, y, z están obteniendo 3 soluciones al sistema, sin hacer conciencia de que el valor de esas tres variables constituye una solución. (137-148)

En términos del **conocimiento del contenido y de la enseñanza**, podemos destacar lo siguiente:

[6.1] Recursos: Proporcionarles en fotocopias las soluciones a ejercicios propuestos anteriormente en las que aparecen detalladas las soluciones paso a paso con la intención de que aquél que los haya resuelto, revise sus soluciones. O también para que sirva de motivación para el que aún no empieza a hacerlos, que sepa que ahí puede mirar cómo se resuelve. Es decir, darles un apoyo/recurso a los estudiantes para que comprueben su aprendizaje sobre ese contenido matemático. (1-12)

[6.1] Saber qué ejercicios proponerles en la nueva fotocopia. Emi, después de proporcionarles una fotocopia en la que detalla paso a paso las soluciones a ejercicios anteriores, les da una nueva fotocopia con ejercicios propuestos donde ha incluido un poco más de laboriosidad y complejidad (matrices de orden 3). (13-17)

[6.1] Explicarles la estrategia de solución del ejercicio (aplicar: una matriz y su inversa para proteger una palabra). (38-69)

[6.2.1] Usar una mini-reseña histórica/anécdota histórica para empezar el tema y luego los sitúa y orienta el tema/contenido (les comenta, que desde siempre el hombre ha intentado resolver problemas por métodos distintos pero que ya cuando empezaron a funcionar las matemáticas lo hicieron planteando ecuaciones). (98-108)

[6.2.1] Iniciar con un ejemplo de un problema histórico (“El problema de los bueyes”) y dar una breve reseña histórica del problema. (116-151)

[6.2.1] “Traducir” una parte del enunciado del problema a lenguaje común, a lenguaje más familiar para los estudiantes, intentando que los estudiantes comprendan “lo que dice” el problema. (153-162)

[6.2.1] Señalar a los estudiantes datos implícitos de un problema (de SEL) porque son relevantes para resolver el problema/ejercicio, y que luego ocupará para hacer el planteamiento del problema. (159-162), (216-217)

[6.2.1] Comentarles la estrategia para empezar a resolver un problema (comprender el enunciado del problema y pensar cuáles son las incógnitas para plantear las ecuaciones. (191-194)

[6.2.1] Darles un “empujoncito” o ayudas puntuales. Emi les da un empujoncito diciéndoles cuáles son las incógnitas necesarias para el planteamiento del problema. (201-209)

[6.2.1] Darles la idea de por donde empezar a plantear las ecuaciones, es decir, les da otro “empujoncito”. (233-234)

[6.2.1] Gestión de la participación. Emi lanza una pregunta al grupo: ¿conformes? Como una forma de tomar en cuenta a los demás estudiantes y hacerles una “llamada” a los estudiantes para atraer su atención y que la vayan siguiendo, es decir, para evitar que la explicación se convierta en un diálogo entre Emi y E2 y los estudiantes no sigan lo que va haciendo (es decir, intenta gestionar por lo menos una participación pasiva de los estudiantes). (265)

[6.2.1] Hacerles ver/notar que con las dos primeras ecuaciones se forma un sistema de 2×2 y hacerles recordar los distintos métodos que ya conocen para resolver un sistema de 2×2 (reducción y sustitución). (306-319)

[6.2.1] Remarcarles que lo que se va a usar para resolver SEL será la técnica matricial, porque es una técnica más avanzada y más eficiente para resolver SEL, en comparación con el método de sustitución y reducción. (320-322)

[6.2.2] En el segundo problema Emi trata de dar una pequeña introducción del problema, tratando de explicarles que dicho problema viene de un modelo (input/output) con una sociedad concreta (1 agricultor, 1 carpintero y 1 sastre), donde se pretende que haya un estado de equilibrio (gastos=ingresos). Para llegar al planteamiento del problema, Emi se apoya de una fotocopia que les preparó, pero además va desarrollando el planteamiento en la pizarra a través de preguntas, Emi se va por partes, primero trata de plantear un lado de la igualdad de las ecuaciones (los gastos) y luego la otra parte (los ingresos) hasta llegar al planteamiento de las tres ecuaciones, luego aprovecha para tratar de representar las tres ecuaciones en forma matricial. (325-529)

[6.2.2] Recursos: Suministrarles una fotocopia en la que viene explicado este ejemplo paso a paso. (334)

[6.2.2] Presentarles una pequeña introducción al ejemplo, les habla de Leontief y su premio novel por la teoría económica sobre matrices input/output (sobre esta matriz hará el ejemplo). (335-338)

[6.2.2] Explicarles en lenguaje común lo que son las matrices input/output (insumo-producto). (340-352)

[6.2.2] Recapitular y orientar el ejemplo a realizar, una vez que les explica lo que son las matrices input/output. (353-358)

[6.2.2] Señalarles un dato del problema que no aparece explícito y que luego ocupará para plantear el problema. Emi explica que para simplificar el problema, la cantidad total que produce cada una de esas personas en un año se considerará como una unidad respectivamente. (361-370)

[6.2.2] Recursos: Apoyarse de la fotocopia para explicar un poco la tabla donde vienen dados los datos del problema del ejemplo que está haciendo. (371-378)

[6.2.2] Hacerles notar aspectos relevantes de la tabla de datos del problema:

1. Leer en filas: “consumidos”.
2. Leer en columnas: “producidos”.
3. Lo que produce cada persona al sumarlo da 1.
4. Que cada uno es el que consume más de lo que cada uno hace, excepto el carpintero, es decir, el agricultor es el que más alimentos consume y el sastre el que más ropa consume. (404-433)

[6.2.2] Explicarles de lo que se trata este problema de SEL, y en particular les habla de lo que sería una situación de equilibrio en un modelo cerrado de Leontief (gastos=ingresos). (441-462), (508-516)

[6.2.2] Hacerles hincapié en lo que quiere que hagan en este problema (plantear las ecuaciones). (463-464)

[6.2.2] Recursos: Usar como recurso de apoyo la fotocopia que ella les preparó para que vean las ayudas, los pasos a seguir para llegar a cada una de las ecuaciones del sistema. (465-529)

[6.2.2] Gestión de la participación. Emi lanza una pregunta al grupo: ¿Estáis los demás conformes con lo que dice E2? Como una forma de tomar en cuenta a los demás estudiantes y hacerles una “llamada” a los estudiantes para atraer su atención y que la vayan siguiendo, es decir, para evitar que la explicación se convierta en un diálogo entre Emi y E2 y los estudiantes no sigan lo que va haciendo (es decir, intenta gestionar por lo menos una participación pasiva de los estudiantes). (478)

[6.2.2] A manera de cierre de los dos ejemplos, remarcarles que lo que tienen en común los dos ejemplos vistos hoy en clase, es que los plantearon con el mismo tipo de ecuaciones (lineales), y aprovecha para comentarles que en este tema harán el planteamiento y luego la resolución del problema viendo qué método aplicar en cada caso. (530-538)

[6.2.2] Aprovechar el poco tiempo que queda para que termine la clase para representar las ecuaciones en forma matricial y que los estudiantes ya se vayan haciendo una imagen de esa representación, aunque eso ya no sea parte del objetivo inicial propiamente, que era llegar al planteamiento de las ecuaciones del problema. (530-566)

[6.2.2] Remarcarles la estrategia para resolver SEL (hacer el planteamiento del problema, luego representarlo en forma matricial y resolverlo), a través de un sistema matricial de las ecuaciones. (567-571)

[6.2.2] Saber qué dejarles de deberes a los estudiantes (estudiar el fin de semana y hacer los ejercicios que les propuso en fotocopias para que practiquen y se preparen para el examen que harán los estudiantes la siguiente semana). (574-575)

[7.1] Remarcarles lo que significa hallar la solución de un sistema (hallar la solución común para todas las ecuaciones que aparecen en el sistema. (1-7)

[7.1] Saber cuándo hacerles una aclaración sobre el contenido, es decir, cuando aclararles/recalcarles que cuando se habla de ecuaciones equivalentes se refiere a ver si tienen la misma solución, en este caso les hace esa aclaración después de preguntarles si dos ecuaciones particulares ($12x+4=28$ y $6x+2=14$) son equivalentes. (17-22)

[7.1] Relacionar matrices con las matrices del sistema, es decir, relaciona matrices con sistemas de ecuaciones [relacionando las transformaciones elementales con matrices (1. Intercambiar una fila por otra, 2. Multiplicar una fila o dividir por un número distinto de cero y 3. A una fila sumarle otra por un número) con las transformaciones de las ecuaciones (1. Al cambiar las ecuaciones no se altera la solución del sistema, 2. Multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de cero, no cambia las soluciones de la ecuación, pues con esas transformaciones el sistema es equivalente. 3. Se pueden sumar las ecuaciones unas con otras y las ecuaciones que resultan son equivalentes, es decir, tienen la misma solución)]. (8-50)

[7.1] Justificarles para qué van a aplicar esas transformaciones elementales. Les hace notar la utilidad de las transformaciones elementales en matrices (*porque para encontrar el valor de x , y , z debo despejar, y una forma muy fácil de despejar es haciendo un sistema escalonado*). (51-54)

[7.1] Trabajar junto con los estudiantes a través de preguntas, la estrategia para encontrar la solución en un sistema escalonado (si el sistema ya está escalonado entonces si ya se tiene el valor de z , se sustituye en la segunda ecuación y se obtiene y , finalmente se sustituye el valor de y , z en la primera ecuación y se obtiene el valor de la x). (55-68)

[7.1] Confirmarles/reafirmarles la estrategia para encontrar la solución en un sistema escalonado, lo cual le servirá para cuando resuelvan el sistema con el método de Gauss (*Entonces este método que consiste en escalar el sistema, si lo aplicamos a las matrices, ¿qué es lo que debemos hacer?, ¿qué queremos conseguir? Que desaparezca la x de la segunda ecuación, y de la tercera ecuación desaparecer la x y la y , es decir, hacer cero la x y la y en la tercera ecuación*). (69-74)

[7.1]

1. Hacerles notar que las transformaciones que pueden hacer en las ecuaciones de un sistema son transformaciones elementales que pueden hacer en las matrices (matrices del sistema).
2. Darles un ejemplo de un sistema de ecuaciones para escribirlo luego en forma matricial.
3. Utilizar el problema de ese ejemplo para resolverlo usando el método de reducción de Gauss. (1-220)

[7.1] Usar el esquema $()()=()$ para mostrar a los estudiantes la forma matricial en la que se puede escribir el sistema de ecuaciones (Emi escribe un paréntesis grande indicando una matriz al lado de la matriz de coeficientes que acaba de escribir, luego el igual y enseguida otros paréntesis grandes indicando que ahí irá otra matriz). (87-89)

[7.1] Tratar de comprobarles que al multiplicar la matriz de coeficientes y la de las incógnitas e igualar los elementos de esa matriz resultado con la de términos independientes, dan las tres ecuaciones y luego les remarca lo que se hace para pasar un

sistema de ecuaciones a forma matricial, escribirlo como en el ejemplo, una matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas y la matriz de términos independientes). (96-104)

[7.1] Comentarles *grosso modo* en qué consiste el método de reducción de Gauss. Comentarles la estrategia de trabajo en el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales (trabajar con la matriz ampliada y conseguir hacer ceros por debajo de la diagonal principal). (109-110), (123-125)

[7.1] Remarcarles cuántas y cuáles matrices tienen en un sistema de ecuaciones (*en un sistema de ecuaciones lineales tenemos en realidad cuatro matrices de las que podemos hablar, la matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas, la matriz de los términos independientes y la matriz ampliada*). (116-121)

[7.1] Hacerles notar que la fila uno (F_1) ha quedado como estaba y cómo ha quedado la fila dos (F_2), después de aplicarle la transformación $F_2 - F_1$. Luego Emi aprovecha esto que les ha hecho notar para que se fijen como quedará la tercera fila después de aplicarle la transformación $F_3 - F_1$. (155-159)

[7.1] Hacerles notar que el objetivo (conseguir hacer ceros por debajo de la diagonal principal) se ha alcanzado con un solo cambio (que consiste en este caso de dos transformaciones: a) $F_2 - F_1$ y b) $F_3 - F_1$). (161-165)

[7.1] Comentarles otra parte del método para continuar hallando la solución del sistema de ecuaciones (*si antes pasábamos de las ecuaciones a la forma matricial, pues ahora de la forma matricial pasaremos al sistema*). (166-168)

[7.1] Remarcarles que a pesar de las transformaciones, la solución del sistema es la misma, es decir, no cambian la solución. (170-173)

[7.1] Pedirles que escriban las ecuaciones del sistema escalonado que ha quedado, al mismo tiempo ella va escribiendo las ecuaciones en la pizarra, escribe la primera ecuación que corresponde a la primera fila, luego les pregunta a los estudiantes *¿cómo quedaría la segunda ecuación del sistema?* A lo cual E2 le responde cómo iría quedando y escribe la segunda ecuación, Emi la completa y luego ella misma se pregunta y se contesta como queda la tercera ecuación, escribiéndola en la pizarra. (174-183)

[7.1] Saber cuándo y qué hacerles notar a los estudiantes: la forma de escribir el sistema escalonado (que escriban las *x*'s debajo de las *x*'s), las *y*'s debajo de las *y*'s y las *z*'s debajo de las *z*'s) justo después de haber escalonado el sistema. (184-186)

[7.1] Hacerles notar lo que queda en el sistema escalonado, en particular, el hecho de que en este caso, en la segunda ecuación, queda un sistema más cómodo porque no sólo ha desaparecido la *x* de la segunda ecuación, sino también la *z* (pues normalmente al escalar el sistema quedan en la segunda ecuación la *y* y la *z*), como sólo tienen la *y* entonces pueden despejar directamente la *y*. (194-199)

[7.1] Comparar la solución que obtuvieron en este ejemplo con la del libro porque eso pudiera dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido. (218-220)

[7.1] Hacerles notar que al escribir la solución del sistema, atiendan a la convención matemática a cerca de escribir el valor de las incógnitas en la solución del sistema en el orden en que aparecen dadas en el sistema. (221-225)

[7.1] Volver a repetir el procedimiento para aclararle la duda a E5, sobre cómo salió la x , es decir, de dónde se obtuvo que $x=1,600$. (231-240)

[7.1] Comentarles su punto de vista sobre las ventajas del método, es decir, hablarles sobre la utilidad del método de Gauss (*El método de reducción de Gauss, es muy simple y cómodo que facilita encontrar los valores de las incógnitas de una forma muy rápida*). (243-246)

[7.2] Proponerles que ellos planteen el problema, pero al final la que lo plantea es ella mediante algunas preguntas a los estudiantes. (249-339)

[7.2] Hacerles notar lo que tienen hasta el momento (la tabla con la información del problema, es decir, los datos) y lo que piden hacer en el problema (calcular el precio de cada uno de los tres dispositivos solares) para hacerles ver hacia donde irán ahora (a definir las variables). (307-310)

[7.2] Aclararles (a raíz de la respuesta incorrecta de E2, al definir las incógnitas como el número de dispositivos, dato que ya les dan y por tanto no es una incógnita –E2 tal vez quiso definir así las incógnitas por analogía con otros problemas) (Emi: *no siempre las incógnitas van a ser el mismo valor, entonces cuando ponemos las incógnitas x , y , z que ponemos en todos los problemas, no tenéis que poner siempre x para los paneles fotovoltaicos, y termosifones y z colectores, eso no tiene sentido* -en este problema). (311-318)

[7.2] Comentarles una forma de identificar las incógnitas del problema. Emi: *regularmente las incógnitas se suelen corresponder con lo que nos preguntan*. (325-328)

[7.2] Decidir qué dejarles de deberes (lo que ya no dio tiempo a terminar en clase: escribir el sistema en forma matricial y resolverlo con el método de reducción de Gauss). (347-351)

[8.1] Remarcarles lo que se ha conseguido (hacer ceros por debajo de la diagonal principal) y a lo que se ha llegado (al sistema escalonado) y que de ahí ya sólo falta despejar y sustituir para encontrar los valores de la incógnitas. (29-45)

[8.1] Decirles que las soluciones las tienen en el libro de texto, para que ellos tengan más seguridad, Emi prevé que eso les puede dar seguridad. (44-45)

[8.2] Hacerles notar tres aspectos importantes acerca de los sistemas antes de remarcarles nuevamente en qué consiste el método de Gauss. 1. Que no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución. 2. Ni todos los problemas se pueden resolver a través de sistemas de ecuaciones lineales. 3. Y que una vez que se tiene un sistema de ecuaciones, lo que se pretende es hallar la solución. (46-84)

[8.2] Remarcarles en qué consiste el método de reducción de Gauss, es decir, hacerles notar los pasos que hay que seguir: escribir la matriz ampliada, hacer ceros por debajo de la diagonal mediante transformaciones elementales, escribir el sistema equivalente escalonado, resolverlo y encontrar la solución. (85-134)

[8.2] Decidir aclararles por qué a un sistema se le llama sistema equivalente (porque tienen la misma solución) cuando pronuncia “sistema equivalente”, al estar explicando en qué consiste el método de Gauss. (109-114)

[8.2] Usar la analogía entre un sistema de ecuaciones y fracciones para explicar el significado de *equivalentes*: Los sistemas son equivalentes porque tienen la misma solución y las fracciones por que al hacer la división de cada fracción da el mismo resultado. (115-131)

[8.2] Tratar de hacerles ver que el valor de las tres incógnitas forman una sola solución. (137-148)

[8.2] Retomar la pregunta que les había hecho antes (¿Existe siempre solución? -para un sistema de ecuaciones lineales), al principio del repaso, para continuar con la introducción para presentar luego la clasificación, es decir, empieza haciéndoles notar que no siempre existe solución al sistema. (149-150)

[8.2] Escuchar y contestar la respuesta de E7, pero luego orientar el contenido a su objetivo. Habilidad para no desviarse y continuar con la orientación que tenía pensada para alcanzar su objetivo: dar una introducción para luego clasificar los sistemas. En este caso, Emi pregunta: *¿Puede salir más de una solución en un sistema?* Y E7 contesta que eso puede darse *en las ecuaciones de segundo grado*, cosa que es correcta pero que no es lo que interesa ahora para el objetivo de Emi, pues ella lo que deseaba escuchar es que un sistema de ecuaciones lineales puede tener infinitas soluciones, por tanto, les comenta que la respuesta de E7 es correcta y orienta el discurso a su objetivo, es decir, les comenta que *cuando hablamos de ecuaciones lineales, puede darse el caso y que hasta ahora no os ha salido, de que haya más de una solución, en realidad puede ser que haya infinitas soluciones*. (159-166)

[8.3] Proponer (inventarse) un ejemplo de SCD escalonado y mediante preguntas a los estudiantes obtiene con ayuda de E2, el valor de las incógnitas x , y , z . (198-221)

[8.3] Proponer (inventarse) un ejemplo de SCI escalonado y mediante preguntas a los estudiantes trata de hacerles notar que la z va tomando varios valores y por lo tanto también la y y la x , para que vean que el sistema tiene infinitas soluciones. (222-245)

[8.3] Emi al no contestarle los estudiantes cuánto vale y de la segunda ecuación $y+z=2$ si $z=\lambda$, Emi “Transfiere y traduce” a lenguaje común, en una forma más detallada (Emi: *A ver hemos dicho que z puede tener cualquier valor ¿no?, le podemos dar cualquier valor que queramos a z , ya que en la última ecuación no me sale un valor determinado para z , entonces si despejamos y de la segunda ecuación $y+z$ vale λ , ¿qué nos queda?* E3: $2-\lambda$), para explicarles lo que les acaba de preguntar, y de esa forma si obtiene la respuesta correcta por parte de E3. (246-257)

[8.3] Explicar para todos de una manera más explícita cómo se obtuvo el valor de la y (Emi: *¿Cómo despejar de aquí la y ? –Emi señala la segunda ecuación- Si tienes que $y+z=2$, entonces $y=2-z$ y si z vale λ , pues entonces y vale $2-\lambda$*). (258-260)

[8.3] Explicarles cómo obtener el valor de la x y después Emi explica nuevamente, pero de manera más detallada, cómo se obtiene el valor de la x y posteriormente hace los cálculos para hacerles ver que $x=1$. (261-271)

[8.3] Hacerles notar la forma de la solución del SCI $[(x=1, y=2-\lambda, z=\lambda)]$. (271-272)

[8.3] Cerrar el ejemplo retomando la solución del sistema y remarcando el papel del parámetro λ en un SCI (Emi: *Como λ no tiene un valor determinado, y puede ser cualquiera –pues $y=2-\lambda$, este sistema tiene infinitas soluciones y es por lo tanto un SCI*). (271-275)

[8.3] Tratar de enfatizar lo que pasa en la tercera ecuación del ejemplo de sistema escalonado que ella les propuso (El sistema que Emi les propone es $x+y+z=3$, $y+z=1$, $0=1$). Mediante preguntas a los estudiantes los guía para que observen, en particular, lo que pasa en la tercera ecuación del sistema escalonado en un SI, para que noten que el sistema no tiene solución. (279-296)

[8.3] Después de ver un ejemplo de sistema escalonado para cada tipo de sistemas, Emi les remarca que en un sistema escalonado la tercera ecuación indica de qué tipo es el sistema (si es SCD, SCI ó SI). (297-306)

[8.3] Escribir la matriz de un SCD ya escalonado usando un esquema gráfico y representarlo. Diferencia la parte de los coeficientes de la parte de los términos independientes, los coeficientes los representa con circulito y a los términos independientes con un cuadro, quedando de la siguiente manera $\begin{pmatrix} \otimes & \otimes & \otimes & \boxed{} \\ 0 & \otimes & \otimes & \boxed{} \\ 0 & 0 & \otimes & \boxed{} \end{pmatrix}$ Emi escribe

eso a través de preguntas a los estudiantes que muchas de las veces ella misma se contesta. (310-332)

[8.3] Escribir la matriz de un SCI ya escalonado, usando el siguiente esquema gráfico para representarlo $\begin{pmatrix} \otimes & \otimes & \otimes & \boxed{} \\ 0 & \otimes & \otimes & \boxed{} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$ Emi va haciendo preguntas para que los estudiantes se

fijen en los elementos que quedan en la última fila al escalar un sistema que es SCI. (333-345)

[8.3] “Revoicing” la respuesta de E2 respecto a cómo quedó la última fila de la matriz en el sistema escalonado (Emi: *Para que nos quede la última ecuación $0=0$, significa que los elementos de la última fila son todos 0, tanto para los coeficientes como para el término independiente*) de un SCI. (341-345)

[8.3] Escribir la matriz de un SI ya escalonado, usando el siguiente esquema geométrico para representarlo $\begin{pmatrix} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{pmatrix}$ Emi va escribiendo la matriz con ayuda de los estudiantes

a través de preguntas a los estudiantes. (346-356)

[8.3] Aceptar la respuesta de E2 y la completarla, con ello termina de representar el esquema gráfico (todos los elementos de la tercera fila son cero excepto el término independiente que es un número distinto de cero). (352-356)

[8.3] Emi a través de una comparación entre las distintas matrices que denotó con la representación gráfica para cada sistema anteriormente, trata de hacerles notar/remarcar en qué se tienen que fijar cuando obtengan el sistema escalonado en una matriz ampliada para distinguir un SCD, un SCI y un SI, es decir, que en particular, deben fijarse en la tercera fila del sistema escalonado. (357-381)

[8.4] Hacerles notar el valor del rango de la matriz ampliada ya escalonada, para cada tipo de sistema. (398-414)

[8.4] Hacerles notar cuánto vale el rango de la matriz de coeficientes ya escalonada para cada tipo de sistema. (382-397)

[8.4] Hacerles notar cuánto vale el rango de la matriz ampliada ya escalonada para cada tipo de sistema. (398-414)

[8.4] Con lo anterior, hace una comparación entre el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada para deducir el teorema de Rouché-Frobenius que Emi le llama “propiedades de sistemas”. (415-466)

[8.4] Comentarles la utilidad de “las propiedades de sistemas”, es decir, del teorema de Rouché-Frobenius (al escalar la matriz podrán decir qué tipo de sistema es y por tanto saber cuántas soluciones tiene el sistema). (467-475)

[8.4] Remarcarles la estrategia para poder clasificar un sistema (Emi: *...planteamos las ecuaciones del problema, pondremos el sistema en forma matricial, aplicaremos las transformaciones elementales sobre la matriz ampliada, para conseguir un sistema escalonado y sobre el sistema escalonado hallamos las soluciones y ya vemos de qué tipo es, ¿de acuerdo?*). (476-480)

[8.4] Decidir empezar con este ejemplo en el tema de clasificar el sistema y en su caso resolverlo, Emi usa un ejemplo para clasificar qué tipo de sistema es pero suena el timbre y ya no lo terminan, sólo deja indicada la matriz ampliada y les comenta la estrategia a seguir, les deja de tarea terminarlo, hacer transformaciones elementales para escalarlo y decir qué tipo de sistema es y si es posible hallar la solución. (481-533)

[8.4] Comentarles parte de la estrategia a seguir en el ejemplo: localizar la diagonal principal y luego hacer ceros por debajo de la diagonal. Ese ejemplo ya no lo terminaron de hacer porque se terminó la clase pero Emi quiere que los estudiantes intenten terminarlo en casa. (522-525)

[8.4] Saber qué dejarles de deberes: terminar el ejemplo que estaba haciendo ella en la pizarra. (529-533)

En términos del **conocimiento curricular**, podemos destacar lo siguiente:

[6.2.2] Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. Saber que este es un ejemplo del libro. (339)

[7.1] Saber que el ejemplo con el que les presenta el método de Gauss, viene resuelto en el libro de texto. (218-220)

En términos del **conocimiento pedagógico general**, podemos destacar lo siguiente:

[6.1] Controlando la indisciplina. Es una clase en viernes después del recreo, motivo por el cual los estudiantes están más inquietos y les cuesta trabajo estar en silencio, Emi intenta callarlos para poder trabajar. (18-20)

[6.1] Emi sabe que comentarles que ya se aproxima el examen puede motivar a los estudiantes a hacer los ejercicios de ese contenido matemático (matrices). (70-79)

[6.2.1] Anunciarles que el nuevo tema que iniciarán en esta clase (SEL) vendrá en el siguiente examen (aproximadamente 3 ó 4 semanas después), para que no se presionen tanto pero para que lo tomen en cuenta luego. Esto tras equiparlos de fotocopias que les preparó con ejercicios propuestos y soluciones a ejercicios anteriores, para que practiquen el fin de semana y estudien para el examen que tendrán la siguiente semana. (93-96)

[6.2.1] Mientras Emi busca las fotocopias que les preparó, en la que aparece el planteamiento de este problema paso a paso, intenta mantener la atención de los estudiantes. (168-173)

[6.2.1] Controlando la indisciplina. Es una clase en viernes después del recreo, motivo por el cual los estudiantes están más inquietos y les cuesta trabajo estar en silencio, Emi intenta callarlos para poder trabajar. (236-239)

[7.1] Invitarlos a que ellos intenten escribir el sistema en forma matricial (*Bueno, vamos a escribir el sistema matricial con estas ecuaciones, ¿cómo podemos ponerlo en forma matricial?, ¿qué quedaría?, ¿podéis intentarlo vosotros, la forma matricial?* -Emi pasa a supervisar el trabajo de los estudiantes). (75-78)

[7.1] Una forma de preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer (encontrar los valores de las variables a partir del sistema escalonado): *¿Se fijaron cómo salen las cuentas?* (217)

[7.1] Una forma de preguntarles si les quedó claro el método, en particular el ejemplo que acaban de hacer: *¿Entonces qué os parece este método?* (226)

[7.1] Una forma de preguntarles si tienen más dudas: *¿Alguna duda más?* (241)

V.1.1.1.3. En el tema de Programación Lineal

En términos del **conocimiento común del contenido**, podemos destacar lo siguiente:

[11.1.2] Simplificar las sumas y restas de términos semejantes (Emi sólo anota los resultados). (264-267)

[11.1.3] Saber porque las seis restricciones deben ser mayor o igual que cero (porque se está hablando de cajas y entonces no puede haber números negativos). (283-291)

[11.1.3] Saber transformar las desigualdades para dejar las incógnitas de lado izquierdo. (316-360)

[11.1.4] Saber que la solución de un problema de PL se encuentra siempre en la frontera de la región factible. (410-411)

[11.1.4] Saber lo que es la región factible (región formada por vértices, si es acotada entonces el problema tiene solución y si es abierta entonces el problema no tiene solución). (413-417)

[11.1.4] Saber la estrategia final para encontrar analíticamente el mínimo (calculando el valor de z en cada uno de los vértices y comparar sus valores). (425-428)

[13.1] Saber que entre las restricciones se pueden juntar algunas inecuaciones, lo cual es válido matemáticamente pero que ahora es mejor dejarlas por separado, tal y como las han escrito, para resolver el problema (por ejemplo, saber que $x \geq 0$, $x \leq 100$ se puede escribir como $0 \leq x \leq 100$ pero que es mejor dejarlas como $x \geq 0$, $x \leq 100$ para solucionar el problema). (154-162)

[13.2] Saber la analogía entre el problema equivalente anterior y el que está presentando, por ser los dos problemas de transporte en PL y que de esa forma se guíen los estudiantes en el procedimiento y solución que tienen del anterior para resolver este. (249-270)

[13.2] Saber que no es lo mismo $8000-(x+y)$ que $(x+y)-8000$ y que de acuerdo al problema debe ser $8000-(x+y)$. (379-381)

[13.2] Saber que hay que simplificar la expresión matemática extensa que han obtenido de la función objetivo. (415-417)

En términos del **conocimiento especializado del contenido**, podemos destacar lo siguiente:

[11.1.2] Saber que al definir las variables en un problema, el error de los estudiantes puede provenir del hecho de definir más de dos variables. En este caso, aunque en el problema se pudieran definir seis variables, el hecho de haber unas condiciones de demanda y de producción hace que el problema se pueda resolver con dos variables. Es al profesor al que interesa que los estudiantes se centren en resolver este tipo de problemas de PL centrados en dos variables, más que los estudiantes divaguen en definir 6 variables y no logren resolver el problema. (146-153)

[11.1.3] Saber que al hacer operaciones con desigualdades el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de las propiedades para las igualdades a las propiedades de las desigualdades y no tener en cuenta que en una desigualdad cuando se multiplica o se divide por un número negativo, cambia de signo la desigualdad. (325-330)

[13.1] Saber que al escribir matemáticamente, el error de los estudiantes puede provenir de que no saben escribir correctamente lo que están pensando, es decir, que para

resolver los problemas propuestos, no basta con pensar sino que además hay que saber escribir correctamente ese pensamiento matemático. (45-46)

[13.2] Saber que el rol de “definir bien las variables” es muy importante para resolver problemas de programación lineal porque parte del éxito o fracaso en la solución el problema depende en cómo son definidas las variables. Esto es, el conocimiento matemático que viene de la reflexión que tiene el profesor a cerca de la importancia de definir bien las variables. (387-391)

En términos del **conocimiento del contenido y de los estudiantes**, podemos destacar lo siguiente:

[11.1.1] Prever que los estudiantes pueden tener la imagen de que los problemas de PL son muy difíciles. (2-11)

[11.1.1] Saber las necesidades de los estudiantes sobre ese contenido matemático. En este caso Emi prevé que a E9 por su deficiencia visual le costará mucho trabajo visualizar y entender los problemas de PL, debido a que habrá dibujos y gráficas y que por tanto, E9 necesita un apoyo para entender la explicación, por lo cual Emi tomará como recurso el libro de texto pues E9 tiene ese apoyo en Braille. (12-28)

[11.1.1] Prever que los estudiantes entenderán “mejor” en qué consiste el problema de transporte si se los dice en lenguaje común, lenguaje más familiar a los estudiantes. (30-40)

[11.1.2] Prever que se les pudiera ocurrir a los estudiantes esa respuesta intuitiva (que todos los refrescos salgan del supermercado más cercano para que sea más barato) para resolver el problema. (112-132)

[11.1.2] Prever que a algún estudiante se le puede ocurrir utilizar seis variables para resolver el problema, lo cual no es factible en este problema que se resuelve con dos variables. (135-153)

[11.1.2] Prever que si agrega en la tabla de distribución otra fila y otra columna los estudiantes visualizarán “mejor” la información y podrán completar la tabla de distribución. (175-187)

[11.1.2] Interpretar la respuesta de E2 y orientarla a la presentación del contenido (E2 responde que el objetivo en este problema es encontrar el número de cajas que deben enviarse, Emi completa esa respuesta comentando que el número de cajas que deben enviarse pero al menor coste posible). (232-233)

[11.1.3] Prever que si les comenta a los estudiantes esa analogía en el proceso de despeje de variables en igualdades y desigualdades, los estudiantes pueden entender “mejor” o hacerse una mejor idea de lo que quiere que hagan en las desigualdades (las variables a la izquierda y los términos independientes a la derecha. (304-314)

[11.1.3] Prever que los estudiantes no distingan la diferencia entre las desigualdades y las igualdades (que en las desigualdades hay ciertas operaciones que transforman la desigualdad y cambian el sentido de la desigualdad). (319-323)

[13.1] Prever que los estudiantes entenderán “mejor” el problema al “traducirles” en lenguaje común, “lo que dice” el problema, es decir, desmenuzarles los datos del problema en lenguaje más familiar a los estudiantes. (23-31)

[13.1] Prever que los estudiantes divaguen en definir más de dos variables. (37-40)

[13.1] Prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen de que siempre las tablas de distribución deben ser grandes y por eso les aclara que no siempre tiene porque ser así. (112-113)

[13.2] Prever que los estudiantes no vean que este problema es equivalente a otro problema de transporte que habían hecho anteriormente. (249-252)

[13.2] Prever que E9 puede necesitar ayuda y acude a ella para ayudarle a identificar los datos del problema en su libro de Braille. (318-319)

[13.2] Interpretar el pensamiento matemático de E7, al aclararle que no están anotando en la tabla de distribución el coste del transporte sino sólo el transporte, el movimiento que hay de unos sitios a otros. (321-324)

En términos del **conocimiento del contenido y de la enseñanza**, podemos destacar lo siguiente:

[11.1.1] Hacerles notar que aunque verán una variedad de problemas en cada uno se tratarán varios aspectos, pero en cuanto al planteamiento y la solución hay similitudes entre ellos. (2-11)

[11.1.1] Comentarles a los estudiantes en qué consiste el problema en lenguaje común, más familiar a los estudiantes. (30-40)

[11.1.2] Remarcarles la importancia (para tener claros los datos del problema) de escribir los datos en una tabla como parte fundamental al comienzo del planteamiento. (52-63)

[11.1.2] Comentarles que los puntos de distribución normalmente son los supermercados, para que se familiaricen con el lenguaje de los problemas para escribir la tabla. (66)

[11.1.2] Remarcarles que es importante leer el enunciado del problema un par de veces y entender los datos del problema, antes de hacer otra cosa. Saber que un primer paso para resolver el problema es tener bien claros los datos, es decir, entender de lo que trata el problema y una vez que tengan ese entendimiento, luego intenten avanzar en las siguientes etapas de solución, es decir, resolver el problema. (86-89)

[11.1.2] Hacerles notar que se puede leer “entre líneas” en los datos del problema, es decir, que aunque no se diga en el problema que tan lejos estén las fábricas de refresco de los supermercados, se puede saber cual supermercado está más cerca de cada fábrica si se fijan en el coste, pues depende de la distancia es el coste de transporte. (101-111)

[11.1.2] Presentarles una respuesta intuitiva que pudieran dar los estudiantes al problema (que todos los refrescos salgan del supermercado más cercano para que sea más barato) y comentarles que al dar esa respuesta puede haber varios riesgos: 1. Que la producción no fuese suficiente. 2. Que no se satisficiese la demanda. (112-132)

[11.1.2] Remarcarles nuevamente que al solucionar un problema de PL es muy importante entender y mostrar los datos del problema. (133-134)

[11.1.2] Hacerles notar lo que representa la tabla de distribución (el número de cajas que salen de cada fábrica a cada supermercado). (156-157)

[11.1.2] Agregar en la tabla de distribución otra fila y otra columna para que esa presentación de la información ayude a los estudiantes a visualizar la información y completar la tabla de distribución en términos de las variables x , y . (175-187)

[11.1.2] Complementar la información de la tabla de distribución, a través de preguntas a los estudiantes (que se responden comparando la producción y la demanda con las variables definidas x , y). (198-221)

[11.1.2] Hacerles notar que sólo con dos variables han conseguido obtener la tabla de distribución y no con seis (lo cual complicaría la resolución). (222-226)

[11.1.2] Completar la respuesta de E2 y orientarla a la presentación del contenido (E2 responde que el objetivo en este problema es encontrar el número de cajas que deben enviarse, Emi completa esa respuesta comentando que el número de cajas que deben enviarse pero al menor coste posible). (232-233)

[11.1.2] Remarcarles lo que han hecho hasta el momento, es decir, los sitúa para luego avanzar en la presentación del contenido (les hace notar que en la expresión de la función objetivo tienen lo correspondiente a la fábrica A y que falta considerar lo de la fábrica B). (252-255)

[11.1.2] Aclararles (sin que los estudiantes se lo pregunten) porque z se llama función objetivo (porque z es la función coste del transporte, función que depende de las variables x , y ; objetivo porque lo que se quiere en el problema es conseguir que ese valor de la z sea mínimo). (269-274)

[11.1.3] Aclararles (sin que ellos se lo pregunten) a que se le llama restricciones (a las condiciones que se dan en el problema). (280-282)

[11.1.3] Aclararles que en los problemas de transporte, a diferencia de otros problemas de PL hay que definir las condiciones (restricciones) pues en otros problemas las restricciones las indica el mismo enunciado. (300-302)

[11.1.3] Comentarles la analogía en el proceso de despeje de variables en igualdades y desigualdades (las variables a la izquierda y los términos independientes a la derecha). (304-314)

[11.1.3] Hacer notar a los estudiantes lo que pasa en una desigualdad cuando se multiplica o se divide por un número negativo (cambia de signo la desigualdad). (325-330)

[11.1.3] Decidir hacer este problema de transporte como primer ejemplo del tema de PL (un ejemplo resuelto del libro de texto). (29-428)

[11.1.3] Decidir ir transformando las desigualdades en el primer ejemplo visto del nuevo tema (PL). (316-360)

[11.1.3] Cerrar lo de las desigualdades, remarcándoles el conjunto de desigualdades que han obtenido. (361-362)

[11.1.3] Cerrar lo que han hecho hasta el momento, es decir, recapitula lo que se ha hecho (datos, variables, tabla de distribución, función objetivo y restricciones) para luego comentarles lo que falta por hacer (región factible y encontrar el mínimo analíticamente). (370-428)

[11.1.3] Decidir no resolver el sistema en ese momento, porque lo que quiere es mostrarles el aspecto de un problema de PL, es decir, la estructura de solución del problema y que los estudiantes se hagan una imagen concreta de dicha estructura. Por ello va a suponer que han resuelto las desigualdades para alcanzar a explicarles *grosso modo* lo que falta (región factible y encontrar el mínimo analíticamente). (377-385)

[11.1.3] Resaltarles algunas características de la región factible que usará luego: región cerrada, vértices y frontera. (390-395)

[11.1.4] Hacer notar a los estudiantes la estrategia final para encontrar analíticamente el mínimo, calculando el valor de z en cada uno de los vértices y comparar sus valores, después de escuchar el timbre que indica que la clase ha terminado y tratando de cumplir su objetivo. (425-428)

[11.1.4] Saber qué y hasta dónde dejarles de deberes (sólo reproducir lo que han hecho en esta clase, con otro problema del libro de texto). (429-439)

[13.1] Remarcarles lo que han hecho hasta el momento y qué es lo que sigue (que sólo han escrito los datos del problema y lo que sigue es definir las variables). (33-36)

[13.1] Remarcarles nuevamente que el problema se resuelve definiendo sólo dos variables (para evitar que los estudiantes divaguen en definir más de dos variables). (37-40)

[13.1] Hacerles notar la importancia de escribir adecuadamente el pensamiento matemático, es decir, no sólo pensarlo sino también escribirlo (ese es un aspecto importante en matemáticas), en este caso, saber definir adecuadamente las 2 variables para resolver el problema propuesto. (45-46)

[13.1] Emi aprovecha que no están bien definidas las variables que ha escrito E1 en la pizarra, para hacerles notar que deben definir las correctamente, dar el significado exacto de cada una de las variables. (45-52)

[13.1] Emi trata de remarcarles que (54-65):

1. Se trata de un problema cuyo objetivo es diferente a los anteriores (antes se buscaba el mínimo y ahora el máximo).
2. Independientemente de que la función objetivo consista en buscar el máximo o el mínimo, el procedimiento para resolver el problema es el mismo.
3. La facilidad de identificar la función objetivo (donde diga máximo o donde diga el mínimo en el problema).

[13.1] Aclararles lo que E1 ha anotado en la tabla de distribución y aprovechar eso para decirles lo que es correcto, lo que no es necesario y/o que está incorrecto de la tabla de distribución propuesta por E1. (81-110)

[13.1] Comentarles sobre una columna que E1 había escrito y que no es necesaria en la tabla de distribución, es decir, corrige lo que hizo E1 en la pizarra. (115-118)

[13.1] Aprovechar la respuesta de E3 para corregir a E1, para hacerle notar que en la primera restricción es $x \geq 0$ y no $x \geq 1$, además de que $y \geq 0$. (131-140)

[13.1] Tratar de explicarle a E1 porque $x \geq 0$ y no $x \geq 1$. (141-144)

[13.1] Tratar de explicarle a E1 su fallo en el planteamiento y aprovecha para destacarles el hecho de que deben saber distinguir los datos que van en cada una de las etapas y no forzar los datos para ponerlos todos en una etapa, por ejemplo no anotar datos en la tabla de distribución que no sean necesarios. (172-183)

[13.1] Cerrar el ejemplo diciéndoles las etapas que conforman el planteamiento del problema y comentándoles que ya sólo les faltaría hacer la resolución del problema para terminarlo completamente. (184-186)

[13.2] Hacerles preguntas para que identifiquen el tipo de problema del que se trata, pues si identifican de qué tipo es, entonces tienen una idea de cómo se resuelve por ser un problema equivalente. (202)

[13.2] Pregunta-respuesta de ella misma para ir escribiendo los datos del problema en la pizarra. (214-219). Preguntas a los estudiantes para ir anotando ella la tabla de distribución en la pizarra. (221-237)

[13.2] Hacerles notar lo que tienen (los datos y la tabla de distribución) y qué es lo que tienen que determinar en el problema (las variables), es decir, que los estudiantes vayan pensando cómo definir las variables en este problema. (239-246)

[13.2] Hacerles notar que este problema es equivalente a otro que ya habían resuelto, aunque los estudiantes aparentemente no lo vean tan equivalente al otro, es decir, hacerles una analogía entre este problema y uno que ya habían hecho antes y comparar los datos de ambos problemas, de tal forma que esa comparación les sirva para ir resolviendo este problema de PL. (249-270)

[13.2] Hacerles notar una pequeña diferencia entre los dos problemas equivalentes, para que los estudiantes se fijen que de Brujas sólo salen lotes de mantenimiento y de Munich lotes de choque. (271-282)

[13.2] Hacerles notar que sólo ocupan de dos variables para resolver el problema, es decir, que en este caso, daría igual que escojan una ciudad a que escojan otra dado que las otras ciudades quedarían en relación a esas. (296-297)

[13.2] Hacerles preguntas a los estudiantes para ir anotando ella la tabla de distribución en la pizarra. (303-386)

[13.2] Aclararle a E7 que no están anotando en la tabla de distribución el coste del transporte sino sólo el transporte, el movimiento que hay de unos sitios a otros. (321-324)

[13.2] Aprovechar la discusión que se presenta con la intervención de los estudiantes para hacerles notar que no están bien definidas las variables. (339-341)

[13.2] Intentar hacer pensar a E15 sobre las consecuencias que pudieran existir si se definen las variables (incorrectas) como él propone. (347-352)

[13.2] Evocar un ejemplo equivalente anterior. Emi vuelve a remarcarles que se fijen en el problema que han estado comparando con este y vean como está escrita la tabla de distribución. Emi ve que en ese momento los estudiantes se sienten desubicados/desorientados para saber definir las variables y por ello les recomienda fijarse en la tabla de distribución del problema que han estado comparando, de esa forma E2 logra definir adecuadamente las variables. Finalmente Emi les remarca que están bien definidas las variables que ha propuesto E2. (353-359)

[13.2] Remarcarles la importancia de definir bien las variables, hacerles notar que normalmente todos los problemas de transporte se resuelven de forma similar y eso les puede servir para que se fijen como se definen las variables en este tipo de problemas de PL. (387-391)

[13.2] Saber qué ejercicios dejarles de deberes. (426-428)

En términos del **conocimiento curricular**, podemos destacar lo siguiente:

[13.1] Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. (15-22)

En términos del **conocimiento pedagógico general**, podemos destacar lo siguiente:

[13.1] Tomar en cuenta a E1 porque ella hizo este ejercicio (fue la única que hizo sus deberes). (152-153)

V.1.1.2 Presentación cronológica de los subdescriptores identificados en cada subdominio del CME por tema, para el caso de Aly

V.1.1.2.1. En el tema de Álgebra de matrices

En términos del **conocimiento común del contenido**, podemos destacar lo siguiente:

[4.1] Saber aplicar las propiedades de campo al despejar la X, es decir, saber que $3X - 2A + 2A = 5B + 2A$ luego $3X = 5B + 2A$ y que se pueden multiplicar por el escalar $1/3$ y entonces $X = (5B + 2A)/3$. (61-67); (77-79)

[4.1] Saber hacer operaciones básicas con matrices (suma, división/multiplicación por un escalar). (80-87)

[4.2] Saber las propiedades del producto de matrices (asociativa y matriz identidad). (176-191)

[4.2] Saber que no siempre existe la matriz inversa, es decir, que no todas las matrices, a pesar de ser cuadradas, tienen inversa. (201-202); (218-219)

[4.2] Saber que A por A inversa es igual a la matriz identidad ($AA^{-1} = I$) y usar esa caracterización como primer método para encontrar A inversa. (222-362)

[4.2] Saber hacer la comprobación, una vez que se obtiene la matriz inversa de A, comprobar ese resultado. (319-342)

[4.3] Saber los cambios (un cambio puede tener una o más transformaciones elementales) que necesita realizar y sus respectivas transformaciones elementales para hallar la matriz inversa, en sí, saber el método de Gauss-Jordán. (422-512)

[4.3] Saber que en la notación de una transformación elemental la primera fila que se denote es la que sufre los cambios, por ejemplo en la transformación $F_1 - F_2$, la F_1 es la que se modifica. (433)

[4.3] Saber que dividir una fila de la matriz por 3 es lo mismo que multiplicarla por $1/3$ (propiedad del producto de un escalar por una matriz). (527-528)

[4.4] Saber que estas dos propiedades $(A+B)^2$ y $(A+B)(A-B)$ que se cumplen con los reales no se cumplen con las matrices, es decir, que en matrices $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ y que $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$. (582-594)

En términos del **conocimiento especializado del contenido**, podemos destacar lo siguiente:

[4.1] Saber que al aplicar la propiedad conmutativa en el producto de matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa del producto en los números reales al producto en matrices. Aly usa este saber para alertar a los estudiantes de la no conmutatividad en el producto de matrices. (118-123)

[4.2] Saber que al aplicar la propiedad conmutativa y el elemento identidad en el producto de matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa y elemento identidad del producto en los números reales al producto en matrices. Aly sabe que el producto de matrices no es conmutativo y que el elemento identidad en el producto de matrices no existe para matrices de cualquier orden sino sólo para matrices cuadradas. (178-181); (187-191)

[4.4] Saber que al aplicar la propiedad conmutativa en el producto de matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa del producto en los números reales al producto en matrices. En este caso, usa ese conocimiento al remarcarles que el conocido desarrollo del cuadrado de un binomio y la diferencia de cuadrados para números reales no se verifica para matrices $[(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ y $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2]$. (602-628)

En términos del **conocimiento del contenido y de los estudiantes**, podemos destacar lo siguiente:

[4.1] Prever que los estudiantes pueden pensar que la forma en que ella resuelve el ejercicio es más fácil que la que usó E2 ó viceversa. El ejercicio consiste en hallar los valores de la matriz X, sabiendo que $3X-2A=5B$ y dando los valores de la matriz A y B. (70)

[4.2] Prever que los estudiantes pueden pensar que el elemento identidad en el producto de matrices existe para una matriz de cualquier orden (pero sólo existe para matrices cuadradas). (187-191)

[4.2] Prever que los estudiantes pueden resolver fácilmente 2 sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y sin escribir el procedimiento, Aly sólo anota los valores resultantes de las incógnitas, cuyos valores representan la matriz inversa en el ejemplo. (299-305)

[4.2] Prever que los estudiantes pueden equivocarse al colocar los valores resultantes de las incógnitas, es decir, que tal vez no tengan cuidado al acomodarlos adecuadamente en la posición inicial, en su posición propuesta al plantear con esas incógnitas los elementos de la matriz inversa. (306-308)

[4.3] Prever que muchas de las veces al hacer la operación 0-1, los estudiantes pueden despistarse con ese cero y fallar en el resultado de la operación, pues ven en una fila el cero y en otra fila el 1 y saben que hay que restar 0 menos 1, pero al ver el cero pueden despistarse y equivocarse en el resultado, escribir 1 en lugar de -1. (467-470)

[4.3] Prever el error que pueden cometer los estudiantes, anticipa que al hacer ceros por debajo y por encima de la diagonal, los estudiantes pueden retroceder en lo que ya se tiene hecho, en lugar de avanzar. (492-498)

[4.4] Prever que los estudiantes pueden equivocarse, es decir que donde más se pueden equivocar es al hacer los cálculos, las operaciones en el procedimiento. (666-667)

En términos del **conocimiento del contenido y de la enseñanza**, podemos destacar lo siguiente:

[4.1] “Traducir” a los estudiantes lo que está haciendo E2, es decir, como lo está resolviendo E2. (35-39)

[4.1] Remarcarles que la dificultad es la misma en la forma que lo hace E2 y en la forma que lo ha hecho ella. (70)

[4.1] Hacerles notar que el resultado es el mismo haciendo el ejercicio de la forma que lo hizo E2 y de la forma que lo hizo ella y remarcarles que lo importante es saber hacer el ejercicio. (88-90)

[4.2] Antes de empezar a explicar el primer método para calcular la matriz inversa, Aly les enuncia lo que han visto (propiedades de la suma, de un producto por un número, propiedades del producto) para aterrizar en que la que les faltaba ver es la matriz inversa. Primero da un repaso de lo visto en días anteriores (las propiedades de las matrices que habían visto) para aterrizar en que, lo que les falta ver es la matriz inversa. (139-152)

[4.2] Aprovechar el ejemplo que viene resuelto en el libro de texto para hacerles notar en qué consiste el primer método para calcular la matriz inversa (usando la caracterización: $AA^{-1}=I$). (162-209)

[4.2] (Utilidad) Anunciarles que verán dos métodos para calcular la inversa pero luego dará otro que será el que usarán más. (164-173)

[4.2] Aly nuevamente repasa las propiedades pero en particular las del producto de matrices hasta aterrizar en el tema que le interesa dar hoy, la matriz inversa. (174-191)

[4.2] Al abordar las propiedades del producto de matrices, Aly va resaltando los aspectos más importantes de 2 propiedades:

1. Que en el producto de matrices AB es distinto de BA (178-181)
2. Que el elemento neutro en el producto de matrices, es sólo para matrices cuadradas. (187-191)

[4.2] Remarcales que no siempre existe la matriz inversa, es decir, que no todas las matrices, a pesar de ser cuadradas, tienen inversa. (201-203); (218-219)

[4.2] Aly les plantea la cuestión de existencia de la matriz inversa para introducir el tema (primer método para calcular la inversa). (194-209)

[4.2] Hacerles notar que en matrices, en el caso concreto de $AA^{-1}=A^{-1}A$ sí se da la conmutatividad. (221-228)

[4.2] Comentarles la analogía del ejercicio a hacer con el ejercicio hecho anteriormente, es decir, les comenta que este ejercicio es parecido a un ejercicio equivalente que hicieron anteriormente. (231-232)

[4.2] Enseñando a hacer (1er. método) (240-291):

1. Anotar la condición $AA^{-1}=I$
2. Denotar como incógnitas a los elementos de la matriz A^{-1}
3. Verificar el orden de cada una de las matrices
4. Calcular $AA^{-1}=I$
5. Plantear la estrategia para encontrar los valores de las incógnitas de la matriz inversa, es decir, resolver el sistema de ecuaciones que se obtienen y de ahí encontrar los valores de A^{-1} .

[4.2] Hacerles notar que se trata de 2 sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, luego sólo anota los resultados porque quiere optimizar el tiempo y considera que lo pueden resolver fácilmente. (299-305)

[4.2] Enseñando a hacer: Aly les comenta lo que hay que hacer ($AA^{-1}=I$) para comprobar el valor de la matriz inversa que acaban de encontrar usando el primer método y les recomienda hacer dicha comprobación si les queda tiempo en un examen. (317-318)

[4.2] Remarcales nuevamente la condición que se debe cumplir para que A^{-1} sea la inversa de A (que $AA^{-1}=I$). (345-346)

[4.3] Comentarles la utilidad de un contenido matemático abordado anteriormente, es decir, evocarles ese contenido anterior para que se ubiquen y se hagan una idea de lo que se va a hacer ahora. (348-351)

[4.3] Descripción del método (Gauss-Jordán). (374-512)

Para ello Aly se basa en lo que aparece en la fotocopia que ella les preparó.

1. Colocar la matriz A y al lado la matriz identidad.
2. Comentarles la estrategia a seguir para encontrar la inversa, es decir, hacer transformaciones elementales para hacer ceros en los elementos por debajo y por encima de la diagonal de la matriz A y lograr hacer unos en la diagonal principal.
3. Realizar los cambios y transformaciones elementales necesarias.

[4.3] Remarcales constantemente la estrategia para hallar la matriz inversa con el método de Gauss-Jordán mientras va desarrollando el ejemplo, para que los estudiantes

no se pierdan cuando ella va haciendo las transformaciones elementales para conseguir la matriz inversa. (382-393); (397-402)

[4.3] Aly les da una breve descripción de lo que verán en la fotocopia que ella les preparó para abordar la explicación de este método. (410-414)

[4.3] Remarcarles que en la primera transformación F_1-F_2 la F_1 , es decir, la primera fila que se anote es la que sufre las modificaciones. (433)

[4.3] Remarcarles que hay que hacer las transformaciones a la fila indicada de manera completa, es decir, incluyendo a la fila correspondiente de la matriz identidad, simultáneamente. (438-439)

[4.3] Remarcarles lo que se ha hecho, en particular, lo que se ha conseguido con esa transformación elemental. (446-447)

[4.3] Evocar que hacer transformaciones elementales es algo que ya han estado trabajando anteriormente en clase, para que los estudiantes adquieran mayor seguridad al desarrollar el método. (460); (489)

[4.3] Situarlos, detenerse y hacerles ver que ya va quedando lo deseado (ceros por debajo y por encima de la diagonal principal), además aprovecha para preguntarles cómo conseguir el último cero que falta hacer para terminar el ejemplo. (478-489)

[4.3] Habilidad para plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. En este caso, suponer que hagan una transformación elemental de manera incorrecta y que en lugar de avanzar retrocedan al diagonalizar la matriz para calcular la matriz inversa. (492-498)

[4.3] Para concluir la aplicación del método Aly vuelve a remarcarles de manera resumida lo que se hizo en el ejemplo. (513-519)

[4.3] Habilidad para plantearles una situación hipotética, adelantándose a una situación que podrían tener los estudiantes en ejercicios posteriores, con el objetivo de que tengan idea de lo que deben hacer ante una situación similar a la que les plantea, Aly les comenta el caso en el que en la diagonal principal obtuvieran 1, 3, 1 en lugar de 1, 1, 1; y que en ese caso sólo habría que multiplicar por $1/3$ toda la fila en la que se encuentra el 3. (520-533)

[4.3] Remarcarles la parte final del segundo ejemplo resuelto en la fotocopia para hacerles notar la situación en la que hayan logrado conseguir la diagonal 1, -1, 1 en lugar de 1, 1, 1. Aly intenta que tengan idea de como conseguir en la diagonal el 1, 1, 1, es decir, que sepan convertir el -1 en 1, que en ese caso sería multiplicar por -1 toda la fila donde está el -1. (538-547)

[4.3] Recursos (fotocopia): Aly al observar que en el libro no viene la explicación para calcular la inversa, decide plasmar en una fotocopia el método de Gauss-Jordán, decirles en qué consiste y darles 3 ejemplos resueltos en los que aparecen las transformaciones elementales necesarias hasta llevar a la matriz inversa y finalmente concluye esa parte apoyándose del texto que aparece en el libro respecto a la matriz inversa. (548-571)

[4.4] Decidir ver un ejercicio del libro porque sabe que los estudiantes pueden presuponer que se cumplen esas dos propiedades (por herencia de los números reales) y que en matrices no se cumple. Las dos propiedades que no se cumplen en matrices son $(A+B)^2$ y $(A+B)(A-B)$. (573-575)

[4.4] Remarcarles que esas dos propiedades en general no se cumplen en matrices por que en las matrices el producto no es conmutativo. (629-631)

[4.4] Para concluir, cerrar el ejemplo, Aly les vuelve a remarcarles que tengan cuidado cuando aparezcan esas dos propiedades en las matrices. (632-635)

[4.4] Aly les explica lo que quiere que hagan (que calculen la matriz inversa con el método de Gauss) en el ejercicio y para qué quiere que lo hagan (para que vean los pasos para llegar a eso). (641-650)

[4.4] Aly les comenta la estrategia para hacer un ejercicio, les da un “empujoncito”, pues ella considera que es lo que ella debe hacer para que los estudiantes empiecen a hacer el ejercicio. (654-656)

En términos del **conocimiento curricular**, podemos destacar lo siguiente:

[4.2] Saber que el método de Gauss-Jordán no es el más rápido pero hay que verlo porque es parte del currículo. (216)

[4.3] Saber qué contenidos deben aprender los estudiantes aunque no aparezcan en el libro de texto (método de Gauss-Jordán). (548-571)

V.1.1.2.2. En el tema de Determinantes

En términos del **conocimiento común del contenido**, podemos destacar lo siguiente:

[6.1] Saber el rol que juega la matriz y el rango de la matriz para determinar la dependencia o independencia lineal. Saber que si los estudiantes miran la matriz y el rango de la matriz que acaban de obtener, de ahí pueden decidir la dependencia o independencia lineal. (25-33)

[6.2] Saber que el determinante de una matriz se representa con un número. (62-72)

[6.2] Saber cómo se obtiene el determinante de una matriz de orden 2×2 . (74-81); (105-108); (116-123)

[6.2] Saber que la clasificación de los sistemas de ecuaciones tiene mucho que ver con los elementos de la matriz de coeficientes, saber que para conocer dicha clasificación,

hay que hacer el determinante de la matriz de coeficientes y ver si el resultado es cero o distinto de cero. (89-90); (97-99); (109); (124-129)

[6.2] Saber usar la notación matemática para representar el determinante. (104)

[6.2] Saber la definición del determinante de cualquier matriz cuadrada. (135-140)

[6.2] Saber aplicar la definición del determinante a un ejemplo concreto de una matriz de 2×2 . (141-157)

[6.3] Saber la primera propiedad de los determinantes, que el determinante de una matriz A coincide con el de su traspuesta. (218-222)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la primera propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (218-222)

[6.3] Saber aplicar la primera propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (224-264)

[6.3] Saber que el $\det A = \det A^t$ se cumple por la conmutatividad del producto en los números reales, a pesar de que se haya cambiado el orden de los elementos de la diagonal secundaria. (251-264)

[6.3] Saber la segunda propiedad de los determinantes, si una fila o columna es cero entonces el determinante vale cero. (278-283)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la segunda propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (278-283)

[6.3] Saber aplicar la segunda propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (272-292)

[6.3] Saber la tercera propiedad de los determinantes, si se cambia una fila o columna entonces el determinante cambia de signo. (301-310)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la tercera propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (304-310)

[6.3] Saber aplicar la tercera propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (320-337)

[6.3] Saber la cuarta propiedad de los determinantes, si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero. (341-342)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la cuarta propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (343-346)

[6.3] Saber aplicar la cuarta propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (347-352)

[6.3] Saber la quinta propiedad de los determinantes, si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado (quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado). (355-365)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la quinta propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (355-365)

[6.3] Saber aplicar la quinta propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (366-401)

[6.3] Saber la sexta propiedad de los determinantes, si existe una proporcionalidad entre dos filas o dos columnas, el determinante vale cero. (422-425)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la sexta propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (426-431)

[6.3] Saber aplicar la sexta propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (432-458)

[6.3] Saber la séptima propiedad de los determinantes, si una fila o columna es suma de dos números, su determinante puede descomponerse en la suma de los determinantes de dos matrices. (469-471)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la séptima propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (472-480)

[6.3] Saber aplicar la séptima propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2) y proponer ella misma el ejemplo como el que pudiera aparecer en cualquier libro de texto. (481-499)

[6.3] Saber la octava propiedad de los determinantes, un determinante formado por dos filas (o dos columnas) es el mismo que si a una de las dos filas (o columnas) le sumo una combinación lineal de la otra. (505-507)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la octava propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (508-512)

[6.3] Saber aplicar la octava propiedad de los determinantes a un ejemplo (de una matriz cuadrada de orden 2)) y proponer ella misma el ejemplo como el que pudiera aparecer en cualquier libro de texto. (517-572); (582-606)

[6.3] Saber la novena propiedad de los determinantes, el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes. (630-633)

[7.1] Saber que no se puede resolver el determinante a partir de lo que está [p q (en la primera fila) y r s (en la segunda fila)] porque se tendría una ecuación con cuatro incógnitas (en el ejercicio dan el dato que el determinante de p q (en la primera fila) y r s (en la segunda fila) vale cuatro). (16-18)

[7.1] Saber usar la propiedad de los determinantes de que se puede sacar del determinante el término común que exista entre filas o columnas, tantas veces como en filas o columnas aparezca y eso multiplicarlo por el determinante que queda. (47-51)

[7.1] Saber que $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$, es decir, saber la propiedad del producto de determinantes y saber la propiedad de $AA^{-1} = I$ y entonces usarla para: $|A||A^{-1}| = |I| = 1$ y entonces $|A^{-1}| = 1/4$. (67-74)

[7.21] Saber que las razones que da E12 para justificar por qué el determinante da cero en el apartado c), d), e) y f) son correctas, es decir, saber las propiedades de los determinantes. En particular, saber que en el c), el determinante da cero porque hay una columna de ceros; en el apartado d), el determinante da cero porque dos columnas son iguales; en el apartado e), saber que el determinante da cero porque la segunda fila es siete veces la primera. (96-112) Y en el apartado f), saber que el determinante da cero porque la columna 1 es menos 20 veces la columna 2. (118-119)

[7.2.2] Saber que la respuesta de E9 es correcta (que como piden calcular ese determinante que es el mismo que el de partida sólo que con las filas cambiadas, entonces cambia de signo y el resultado es 13). (131-138)

[7.2.2] Saber que $|6A| \neq 6|A|$ que en este caso es $6(6)|A|$ pues A es de orden 2×2 . (142-143)

[7.2.2] Saber usar la propiedad del determinante (de sacar un término común de una columna del determinante) para saber que es correcta la respuesta de E9. (148-158)

[7.3.1] Saber en qué consiste la regla de Sarrus. (176-230)

[7.3.2] Saber que entre más ceros haya dentro del determinante mejor, pues los cálculos para encontrar el valor del determinante son más sencillos. (251-252); (289-290)

[7.3.3] Saber la propiedad de que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal. (317-323)

[7.3.3] Saber que la propiedad se cumple porque el desarrollo de Sarrus siempre es el mismo y entonces eso siempre va a pasar para determinantes de matrices de orden 3 (que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal). (337-350)

[7.3.3] Saber que el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: menos el producto de la diagonal secundaria. Esto como deducción de una anterior (que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal). (351-366)

[7.4] Saber que se puede generalizar una propiedad de los determinantes de orden dos para determinantes de orden tres (de proporcional a combinación lineal) y generalizar esa propiedad. (383-398)

[7.4] Saber por qué da cero esa nueva propiedad para determinantes de orden tres o generalización de su equivalente en determinantes de orden dos. Saber que en la nueva propiedad de los determinantes de orden tres (si en un determinante existe una combinación lineal entre las filas entonces el determinante vale cero), el determinante vale cero porque al haber una combinación lineal entre las filas, pueden separar ese determinante como suma de dos determinantes y ver que en cada determinante sumando existe una fila que es proporcional a otra y entonces cada uno de los sumandos es cero. (402-416)

[7.5] Saber por qué el $|A|=0$ en el apartado a), es decir, saber que es debido a que $F_2=0$ (en toda la fila dos los elementos son cero). (440-444)

[7.5] Saber por qué el $|A|=0$ en el apartado b), es decir, saber que es debido a que $F_3=-2F_1$. (445-448)

[7.5] Saber por qué el $|A|=0$ en el apartado c), es decir, saber que es debido a que $F_3=10F_2+F_1$. (451-455)

[8.1.1] Saber aplicar la propiedad de los determinantes en la que si un número está multiplicando a todos los elementos en una fila entonces se puede sacar ese número del determinante, es decir, $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. En el primer apartado (14-18) y en el segundo apartado (27-30), (56-75).

[8.1.1] Aplicar el otro sentido de la igualdad, es decir, $a \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ para terminar el ejercicio. (38-55)

[8.1.1] Saber la propiedad de los determinantes $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$. (84-100)

[8.1.1] Saber aplicar la propiedad $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$ para dar respuesta al tercer apartado del ejercicio. (101-145)

[8.1.1] Saber la propiedad de que si en un determinante una fila es proporcional a otra, entonces el determinante vale cero. (125-127)

[8.1.1] Saber que si en un determinante existen dos filas idénticas entonces el determinante vale cero. (142)

[8.1.2] Saber que si en un determinante dos filas son iguales entonces el determinante vale cero. (185-189)

[8.1.2] Saber que si en un determinante existe una fila o columna en la que todos sus elementos son cero, entonces el determinante vale cero. (194-200)

[8.1.2] Saber que si en un determinante una fila o columna es combinación lineal de otra, entonces el determinante vale cero. (213-217); (250-252)

[8.1.2] Saber que todas las propiedades que han visto para determinantes de orden 2 y 3, también se pueden aplicar en general a cualquier determinante, es decir, de cualquier orden. (218-220)

[8.1.2] Saber que las propiedades de los determinantes son importantes sobre todo para calcular determinantes de orden mayor a tres. (234-236)

[8.2.1] Saber lo que es un menor (Aly: *Se llama menor al valor del determinante de cualquier submatriz que se forma por el cruce de algunas columnas con alguna fila*). (281-283); (306-308); (309-312)

[8.2.1] Saber la notación de un menor (en este caso, saber que se escriben como determinantes y no como matrices). (302-305)

[8.2.1] Saber cómo encontrar el menor complementario de un elemento. (328-361)

[8.2.1] Saber la definición de adjunto de un elemento de una matriz cuadrada. (364-373)

[8.2.1] Saber generalizar todos los menores que pudieran salir de orden 2 (Aly: *Cualquier submatriz de orden 2×2 , su determinante eso sería un menor*). (407)

[8.2.1] Saber calcular el menor complementario de un elemento (incluye saber aplicar la regla de Sarrus para calcular un determinante de orden 3). (408-426)

[8.2.1] Saber calcular el adjunto de un elemento. (439-447)

[8.2.1] Saber la utilidad de encontrar el adjunto de un elemento (Aly: *Nos sirve para desarrollar determinantes mayores que no sean de orden 3, que sean de orden 4, de orden 5*). (452-454)

[8.2.2] Saber calcular un determinante de orden tres mediante adjuntos eligiendo la primera fila. (475-480)

[8.2.2] Saber cómo se escribiría la solución al calcular un determinante mediante adjuntos. (483-486)

[8.2.2] Saber indicar los adjuntos por línea para calcular el determinante de una matriz genérica de orden tres. (526-562)

En términos del **conocimiento especializado del contenido**, podemos destacar lo siguiente:

[6.3] Saber que al hacer cambio de fila o de columna en un determinante, el error de los estudiantes puede provenir de la analogía de cuando hacían cambio de fila en una matriz bajo una transformación elemental. Si se hace un cambio de fila o de columna en el determinante, el resultado del determinante se verá afectado, a diferencia de cuando hacían cambio de fila en una matriz bajo una transformación elemental. (294-300); (314-318)

[7.1] Saber que al aplicar la quinta propiedad de los determinantes (si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado, quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado) de manera recursiva, el error de los estudiantes puede provenir de la igualdad $|\alpha A| = \alpha |A|$, es decir, de la idea matemática de sacar una sola vez el múltiplo común del determinante y no recursivamente. En matrices, si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces $|\alpha A| = \alpha \cdot \alpha |A| \neq \alpha |A|$, es decir, $|\alpha A| \neq \alpha |A|$, pues ahora depende del orden de la matriz cuadrada A , el número de veces que quede multiplicado el múltiplo común por él mismo y todo ello multiplicado por el determinante de la matriz cuadrada A . En este caso $|11A| = 11 \cdot 11 |A| \neq 11 |A|$, A es una matriz cuadrada de orden 2. (21-46)

[7.2.2] Saber que al aplicar la quinta propiedad de los determinantes (si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado, quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado) de manera recursiva, el error de los estudiantes puede provenir de la igualdad $|\alpha A| = \alpha |A|$, es decir, de la idea matemática de sacar una sola vez el múltiplo común del determinante y no recursivamente. En matrices, si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces $|\alpha A| = \alpha \cdot \alpha |A| \neq \alpha |A|$, es decir, $|\alpha A| \neq \alpha |A|$, pues ahora depende del orden de la matriz cuadrada A , el número de veces que quede multiplicado el múltiplo común por él mismo y todo ello multiplicado por el determinante de la matriz cuadrada A . En este caso $|6A| = 6 \cdot 6 |A| \neq 6 |A|$, A es una matriz cuadrada de orden 2. (142-143)

[7.2.2] Saber que cuando un estudiante escriba $36 \cdot 13$ para expresar ese producto, debe usar paréntesis y escribirlo como $36(-13)$. Saber que la notación (saber escribir paréntesis para indicar el producto, sobre

todo cuando haya en los factores un número negativo) es muy importante en la matemática, y en particular en la matemática escolar, pues es el profesor el que hace caer en la cuenta de esa notación matemática y plantearse si al hacer la operación 36.-13, el error de los estudiantes puede provenir del hecho de no usar paréntesis y ver la operación como una resta y no como un producto. (144-145)

[7.3.1] Saber que al aplicar la quinta propiedad de los determinantes (si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado, quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado) de manera recursiva, el error de los estudiantes puede provenir de la igualdad $|\alpha A| = \alpha |A|$, es decir, de la idea matemática de sacar una sola vez el múltiplo común del determinante y no recursivamente. En matrices, si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces $|\alpha A| = \alpha \cdot \alpha |A| \neq \alpha |A|$, es decir, $|\alpha A| \neq \alpha |A|$, pues ahora depende del orden de la matriz cuadrada A, el número de veces que quede multiplicado el múltiplo común por él mismo y todo ello multiplicado por el determinante de la matriz cuadrada A. En este caso, saber que cuando se les pida calcular el determinante de un número por una matriz (eg $|6A|$), por cada fila sale siempre el número que este multiplicando la matriz A dentro del determinante, por ejemplo, si la matriz A tuviera 5 filas pues quedaría el 6 cinco veces fuera. (169-173)

[7.4] Saber que en un determinante de orden dos se puede hablar de proporcionalidad entre filas pero eso, en un determinante de orden tres se traduce en hablar de combinación lineal, es el profesor a diferencia de otros profesionales, el que cae y hace caer en la cuenta de que en el determinante de orden tres al haber tres filas, una se puede escribir como combinación lineal de las otras (cuando ese sea el caso) a diferencia de un determinante de orden dos que sólo tiene dos filas. (417-420)

[7.5] Saber que al escribir matemáticamente, el error de los estudiantes puede provenir de que no saben escribir correctamente lo que están pensando, es decir, saber que además de saber pensar matemáticamente hay que saber escribir matemáticamente, en este caso, escribir la justificación de por qué un determinante vale cero. (449-450)

[8.1.1] Saber que por la propiedad simétrica: Si $a=b$ entonces $b=a$. En sí, saber que la igualdad $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$

también puede verse como $a \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. Para otros profesionales $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ puede ser simplemente una

propiedad para aplicar, pero es el profesor el que hace caer en la cuenta de que hay dos formas de ver la igualdad de esos determinantes, ya sea de derecha a izquierda o viceversa, es decir, hacerles notar y reforzar que es lo mismo $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ que $a \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. (32-37); (42-46)

[8.1.1] Saber que al aplicar la propiedad $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$ (que se cumple también para filas)

cuando en dos filas tienen sumandos, el error de los estudiantes puede provenir de usar la propiedad dos veces al mismo tiempo, en lugar de usar la propiedad primero en una fila y luego en otra, porque la primera vez deben dejar una fila quieta. Saber que no existe propiedad que les diga exactamente que “no deben usar dos veces al mismo tiempo la propiedad”, pero es el profesor el que tiene conocimiento de que ese es un error en los estudiantes, es decir, no es asunto propiamente de la matemática en sí, pero sí de la matemática que ocupa el profesor para la enseñanza. En este caso, hay que calcular

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} \text{ sabiendo que } \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Aly (111-116):

Entonces hay que “descomponer” una fila y luego otra, así tenemos que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

pero $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = 0$ pues $F_2 = 2F_1$

Entonces $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (“descomponiendo” la tercera

fila)

pero $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ pues $F_1 = F_3$ y en el ejercicio dan el dato de que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Entonces $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = 1$

En términos del **conocimiento del contenido y de los estudiantes**, podemos destacar lo siguiente:

[6.3] Prever que los estudiantes se pueden equivocar al hacer el cambio de fila o de columna, al no considerar que ahora se verá afectado el resultado del determinante por un signo menos, a diferencia de cuando hacían un cambio de fila en una matriz bajo una transformación elemental. (294-300); (314-318)

[6.3] Prever que los estudiantes empiecen a hacer cálculos innecesarios cuando puedan aplicar una propiedad de los determinantes. (326-333); (368-369)

[6.3] Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la quinta propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) si se las dice en lenguaje común. (360-365); (402-405)

[6.3] Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la quinta propiedad si escribe detalladamente los pasos de la solución y utiliza términos más conocidos para ellos, por ejemplo “factor común”. (376-395)

[6.3] Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la quinta propiedad al remarcarles en el ejemplo que pueden sacar el 5 como factor común y recomendarles que entre más simplifiquen los números del determinante mejor. (396-401)

[6.3] Prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen de que hay que detallar exhaustivamente los pasos al hacer un ejercicio y por eso Aly les comenta que al hacer los ejercicios, en la práctica, se aplica la propiedad directamente y no es necesario tanto detalle (pues ella escribió detalladamente los pasos en el ejemplo: expresar primero 20 como 5 por 4 y 45 como 5 por 9 y luego al hacer el determinante, escribir todo el proceso detallado para que los estudiantes vean que pueden extraer el 5 como factor común). (406-413)

[6.3] Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la octava propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) si se las dice en lenguaje común, en lenguaje más cómodo para los estudiantes. (508-515); (569-572)

[6.3] Capacidad para escuchar e interpretar el conocimiento/pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje usual, en particular, para escuchar e interpretar la pregunta que hace E1. (607-619)

[6.3] Prever que los estudiantes se harán más fácilmente una idea de la octava propiedad, si les remarca la esencia de esa propiedad (*que el determinante no varía aunque realice por en medio transformaciones elementales*) en términos matemáticos familiares a los estudiantes, es decir, prever que de esa forma se les quede más grabada esa propiedad que usarán luego. (622-627)

[7.1] Prever que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el valor del determinante en el que en comparación con el original, las columnas están cambiadas, es decir, prever que los estudiantes pueden no fijarse en este aspecto que difiere entre las matrices y los determinantes; que en los determinantes al cambiar filas o columnas el resultado se altera, mientras que en las matrices podían cambiar filas mediante transformaciones elementales sin cambiar de signo y entonces en los determinantes: si el determinante de $p \ q \ (\text{ en la primera fila}), \ r \ s \ (\text{ en la segunda fila})$, vale cuatro, entonces el determinante de $q \ p \ (\text{ en la primera fila}), \ s \ r \ (\text{ en la segunda fila})$, vale menos cuatro. (60-66)

[7.3.1] Saber que los estudiantes se pueden equivocar en el signo al calcular el determinante (en ese caso, al calcular el determinante de orden 3). (182-186)

[7.3.2] Anticipar que los estudiantes pueden ponerse a calcular el determinante sin antes echar un ojito por si se pueden usar una propiedad y terminarlo más rápido, es decir, no necesitarían hacer los cálculos, sólo justificar la propiedad que utilicen. (240-246)

[7.3.3] Prever que los estudiantes se pueden equivocar al aplicar la propiedad: El valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado menos el producto de la diagonal secundaria), es decir, prever que los estudiantes apliquen esta propiedad incorrectamente, en particular, prever que los estudiantes pueden olvidarse del signo menos al hacer ese cálculo. (363-366)

[7.3.3] Prever que al haber dicho “negativo” [cuando ella dijo que el resultado del valor del determinante era negativo (en el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: el producto de la diagonal secundaria negativo)], los estudiantes se pueden quedar con la imagen incorrecta de que siempre va a quedar en el resultado un número negativo, pero eso no necesariamente tiene porque serlo pues puede quedar como resultado un número positivo, lo único que pasa es que en el resultado de este determinante le antecede un menos al producto de los elementos de la diagonal secundaria. (374-378)

[7.5] Prever que si les dice de que trata el ejemplo en lenguaje más común, los estudiantes entenderán “mejor” lo que deben hacer en el ejemplo. (436-439)

[8.1.1] Prever que en el segundo apartado del ejercicio hay un $3/5$ que puede despistar a los estudiantes para usar una propiedad de los determinantes, el determinante completo que tienen es (24-31):

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

[8.1.1] Prever que los estudiantes pueden ver la igualdad de una propiedad en un sólo sentido, es decir, ver que $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ pero no ver que $a \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. (32-37)

[8.1.1] Prever que los estudiantes se pueden confundir y creer que en los determinantes hay que multiplicar el 5 por cada elemento del determinante, en la expresión $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, pues eso es lo que se

hace en el producto de un escalar por una matriz (tema que tienen “fresco” porque lo vieron últimamente). Pero en este caso, ese 5 que está fuera del determinante puede entrar en el determinante pero multiplicando a UNA fila o a UNA columna. (32-37)

[8.1.1] Prever una dificultad de los estudiantes, en este caso, sobre cómo extraer 1/5 de la segunda fila, es decir, de 1, 0, 3/5. (67-73)

[8.1.1] Prever que los estudiantes pudieran equivocarse si aplican la propiedad dos veces al mismo tiempo, porque en ese determinante aparecen dos filas en las que hay suma en los elementos, no se puede aplicar la propiedad dos veces al mismo tiempo porque la primera vez debe dejar una fila quieta, es decir, deben usar la propiedad primero en una fila y luego en otra. (93-116)

[8.2.1] Prever que los estudiantes pueden confundir el menor complementario con el adjunto del menor complementario, es decir, prever confusión con dos cosas distintas que acaban de definir. (374-375)

En términos del **conocimiento del contenido y de la enseñanza**, podemos destacar lo siguiente:

[6.1] Recursos: Darles una fotocopia con las soluciones a los ejercicios del examen para que los estudiantes revisen cómo se resuelve. (1)

[6.1] Hacer una serie de señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el primer examen del curso, al decirlo en el grupo puede alertar a los demás sobre los errores que se comenten y de alguna forma prevenirlos del error. (7-48)

[6.1] Remarcarles en el examen que se fijen en la matriz, “mirad la matriz”, debido a que los estudiantes acababan de obtener el rango de la matriz y de ahí podían decidir la dependencia o independencia lineal. (25-33)

[6.2] Hacerles notar que esta parte de los contenidos del curso es muy mecánica pero que aún así, en la parte de sistemas de ecuaciones se complica un poco porque hay muchas operaciones algebraicas y ahí hay que pensar muy bien las operaciones y los cambios de signos. (51-54)

[6.2] Remarcarles la idea de que el determinante de una matriz es un número. Para eso, ella se los comenta y luego se los refirma con un trozo de texto que aparece en el libro, en el que se menciona la idea que les remarca. (62-72)

[6.2] “Traducir” hasta llegar al término exacto que usa comúnmente en el grupo: “sale un sistema compatible determinado, es decir, que tiene una solución única, es decir, que existe una única solución”. (87-88)

[6.2] Utilidad. Remarcarles que posteriormente, para conocer la clasificación de sistemas de ecuaciones, lo importante será hacer el determinante de la matriz de coeficientes y ver si el resultado es cero o distinto de cero. (89-90); (97-99); (109); (124-129)

[6.2] Hacerles notar que para poder calcular el determinante de una matriz, ésta debe ser cuadrada. (133-134)

[6.2] Mediante un ejemplo concreto de una matriz de 2×2 , Aly trata de explicar lo que dice la definición del determinante para cualquier matriz cuadrada y luego les reafirma nuevamente que se cumple lo que se menciona en la definición para ese ejemplo. (141-157)

[6.2] Hacerles ver que con determinantes de matrices de orden 2×2 no hay mucha complicación pero sí para calcular el determinante (los productos para obtener el determinante) de matrices de orden mucho mayor, por ejemplo para calcular el determinante de una matriz de orden 6×6 , y así hacerles notar que para ello se pueden apoyar de las propiedades de los determinantes. (160-173)

[6.3] Hacerles notar que se cumple lo que dice la definición del determinante para cualquier matriz cuadrada para el caso de una matriz de orden 2, antes de explicarles las propiedades de los determinantes de matrices cuadradas de orden 2. (194-207)

[6.3] Explicarles nuevamente cómo se calcula el determinante para esas matrices y remarcarles que la definición del determinante se cumple para matrices de orden 2, antes de explicar la primera propiedad para determinantes de matrices de orden 2. (183-217)

[6.3] Remarcarles nuevamente lo que dice la primera la primera propiedad de los determinantes para tratar de que les quede claro lo que dice y luego para explicarla usa un ejemplo. (221-225)

[6.3] Guiar las respuestas de los estudiantes y darles ayudas explícitas (Aly calcula el primer producto para obtener el determinante de la matriz cuadrada de orden 2). (226-239)

[6.3] Hacerles notar que $\det A = \det A^t$ se cumple por la conmutatividad del producto en los números reales, a pesar de que se haya cambiado el orden de los elementos de la diagonal secundaria. (251-264)

[6.3] Dar un ejemplo antes de decir la segunda propiedad, de hecho su estrategia para presentar la segunda propiedad de los determinantes es:

Dar un ejemplo de cuando una fila sea 0, comentarles lo que dice la propiedad, enseguida un ejemplo de cuando la columna sea cero, nuevamente remarcarles lo que dice la propiedad y finalmente dar un ejemplo concreto en el que una fila sea cero y la otra fila contenga números concretos. (272-293)

[6.3] Remarcarles que la fila o columna cero hacen que el valor del determinante sea cero. (293)

[6.3] Hacerles notar que la tercera propiedad de los determinantes se cumple para cuando se cambien filas pero también para cuando se cambien columnas. (312-313)

[6.3] Explicarles la quinta propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) en lenguaje común. (360-365)

[6.3] La forma de presentarles el ejemplo en la quinta propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2), de expresar primero 20 como 5 por 4 y 45 como 5 por 9 y luego al hacer el determinante, escribir todo el proceso detallado para que los estudiantes vean que pueden extraer el 5 como factor común. (376-395)

[6.3] Remarcarles en el ejemplo para aplicar la quinta propiedad de los determinantes, que pueden sacar el 5 como factor común y recomendarles que entre más simplifiquen los números del determinante mejor. (396-401)

[6.3] Remarcarles nuevamente la quinta propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) en lenguaje común. (402-405)

[6.3] Comentarles que al hacer los ejercicios, en la práctica, se aplica la propiedad directamente y no es necesario tanto detalle (pues ella escribió detalladamente los pasos en el ejemplo). (406-413)

[6.3] Anunciarles que en los ejercicios “tipo” que harán posteriormente, serán de tipo teórico, en el que comúnmente les den el valor de un determinante y con base en ese les pidan calcular otro determinante, para que los estudiantes se vayan haciendo una idea de los ejercicios que harán. (418-420)

[6.3] Hacerles notar el hecho de que la fila dos es una fila que es proporcional a la fila uno, es decir, $F_2 = aF_1$. (426-430)

[6.3] Remarcarles nuevamente la esencia de la sexta propiedad (que una fila es proporcional a la otra). (431)

[6.3] Interpreta y transfiere lo que está diciendo E2, lo transfiere y lo orienta y aprovecha para remarcarles en este ejemplo el uso de la propiedad anterior. (436-444)

[6.3] Hacerles notar en el ejemplo de la sexta propiedad, que esta propiedad se deduce de las dos propiedades anteriores. (449-459)

[6.3] Transfiere e interpreta la pregunta de E4 y luego da la respuesta a forma de explicación para todos los estudiantes. E4 pregunta a Aly si puede aplicar la propiedad viendo la igualdad del otro lado ($\leftarrow$) y Aly aprovecha para hacerles notar a los estudiantes que lo pueden hacer. (460-467)

[6.3] Hacerles notar a través del ejemplo por qué algunas veces interesa separar un determinante en la suma de dos determinantes (pues en ocasiones, al separar en la suma de dos determinantes uno da cero y pueden terminar los cálculos más fácilmente). (486); (492-499)

[6.3] Explicarles la octava propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) en lenguaje común, en lenguaje más cómodo para los estudiantes. (508-515)

[6.3] Proponer el ejemplo en la octava propiedad, es decir, inventárselo, lo va construyendo con ciertas preguntas a los estudiantes, a diferencia de los ejemplos que utiliza en las propiedades de la uno a la seis que los toma del libro de texto. (517-572)

[6.3] Hacerles notar en el ejemplo que se puede justificar que el segundo determinante es cero por cualquiera de las dos propiedades anteriores (la sexta o la séptima). En particular, Aly toma en cuenta lo que dice E1 pero al final usa la propiedad que ella tiene en mente. (561-566)

[6.3] Para cerrar el ejemplo de la octava propiedad de los determinantes, Aly vuelve a remarcarles lo que dice esa propiedad en lenguaje común. (569-572)

[6.3] Transfiere e interpreta la pregunta de E1 y luego da la respuesta a forma de explicación para todos los estudiantes. (607-619)

[6.3] Remarcarles la esencia de la octava propiedad de los determinantes en términos de transformación elemental, es decir, usando un lenguaje matemático familiar a los estudiantes (pues han estado haciendo transformaciones elementales a matrices, en varias clases anteriores). (622-627)

[6.3] Aly presenta la octava propiedad de los determinantes, luego un ejemplo genérico, nuevamente les remarca la octava propiedad, enseguida un ejemplo concreto y finalmente vuelve a remarcarles lo que dice la octava propiedad. (622-627)

[6.3] Saber qué ejercicios y ejemplos del libro dejarles de deberes a los estudiantes. (636-644)

[7.1] Saber qué ejercicios proponerles para empezar a aplicar las propiedades de los determinantes de orden dos. En este caso Aly se guía de los primeros ejercicios propuestos por el libro de texto). (1-126)

[7.1] Saber cuándo y cómo aclarar una idea a los estudiantes. ¿Cuándo? Cuando prevé que los estudiantes se pueden equivocar y ¿cómo? a través de preguntas a los estudiantes. Aly pregunta: ¿puedo decir que $|11A| = 11|A|$? Para que a partir de ahí, los estudiantes piensen en esa posible situación. (21-46)

[7.1] Alertarlos. Hacerles la recomendación de que tengan cuidado cuando tengan que calcular $|11A|$ con una matriz de orden 3×3 porque en ese caso habría que sacar 3 veces el 11. (47-51)

[7.1] Plantearles una situación hipotética de qué pasaría si tuvieran que calcular $|11A|$ con una matriz A de orden 3×3 . Aly usa esa estrategia para prevenir a los estudiantes del error. (47-51)

[7.1] Resolver el ejemplo mediante preguntas a los estudiantes para remarcarles que se fijan en que es un ejemplo en el que en ese determinante en comparación con el original, está cambiado el orden de las columnas. (52-65)

[7.2.1] Remarcarles a los estudiantes este hecho importante al hacer determinantes: decir que vale cero sin hacer los cálculos, implica justificar por qué vale cero. (94-95)

[7.2.1] Hacerle notar a E12 a través de preguntas orientadas el porqué da cero el valor del determinante sin necesidad de hacerlo (porque la segunda fila es siete veces la primera). (105-114)

[7.2.2] Confirmar y reafirmar la respuesta de E9 a ese apartado del ejercicio (que les piden calcular ese determinante que es el mismo que el de partida sólo que con las filas cambiadas, entonces cambia de signo y el resultado es 13). (131-138)

[7.2.2] Hacer referencia a un ejercicio equivalente anterior a este, para que los estudiantes ubiquen el ejercicio en la propiedad correspondiente más rápidamente. (139-141)

[7.2.2] Hacerles notar que es importante escribir adecuadamente en matemáticas, en particular, le hace notar a E9 frente al grupo que use paréntesis, cuando indique el producto de 36 por -13 pues E9 lo había expresado como 36.-13. (144-145)

[7.2.2] Hacerles notar/remarcar la propiedad y decirles de dónde se deduce (que se deduce de la definición de matriz inversa y de la propiedad de que el determinante de un producto es el producto de los determinantes) y que por tanto pueden usar luego. (158-163)

[7.3.1] Comentarles la estrategia para calcular el determinante de orden 3, haciendo alusión a la definición de determinante (que se obtiene haciendo todos los productos posibles dentro de los nueve elementos de la matriz, de manera que en esos productos aparezca siempre un elemento por cada fila y por cada columna). (183-185)

[7.3.1] Indicar con flechas los elementos que hay que ir multiplicando para explicar la regla de Sarrus. En el caso en que los elementos a multiplicar no estén en la diagonal principal o secundaria, Aly forma un triángulo en el cual cada elemento sería un vértice, primero los triángulos que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal principal y luego los que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal secundaria. Usa un esquema gráfico. (187-230)

[7.3.1] Comentarles la comparación entre la forma de presentarlo/representarlo entre ella y el libro (que en el libro aparece un dibujo en el que se indica sólo la trayectoria que hay que seguir para hacer la multiplicación de los elementos mientras que ella usa otro esquema gráfico, el cual, en el caso en que los elementos a multiplicar no estén en la diagonal principal o secundaria, Aly forma un triángulo en el cual cada elemento sería un vértice, primero los triángulos que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal principal y luego los que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal secundaria). (187-230); (232-236)

[7.3.2] Hacerles notar que entre más ceros haya dentro del determinante mejor, pues los cálculos para encontrar el valor del determinante son más sencillos. (251-252); (289-290)

[7.3.2] Destacar la aportación de la respuesta de E1: que al calcular el valor de ese determinante, los sumandos que van en el sentido de la diagonal secundaria se anulan. (253-262)

[7.3.2] Capacidad/habilidad para interrumpir o ignorar la respuesta de E1 (Aly prefiere que también los demás estudiantes intenten resolver el ejercicio, por ello “calla” a E1). (263-268)

[7.3.2] Aclararle a E1 sobre la notación en el libro de texto, es decir, que en un enunciado de un problema, es lo mismo que diga “calcular el determinante” que “halle el valor del determinante”. (269-270)

[7.3.2] Atender (responder) y explicar la duda de E11. E11 pregunta: ¿cuáles son los que van con el signo negativo? (qué productos van precedidos del signo menos al aplicar la regla de Sarrus para calcular el valor del determinante de orden 3). Aly le responde a forma de explicación en la pizarra, que los que van en dirección de la diagonal secundaria ($\square$). (271-277)

[7.3.3] Desarrollar cada uno de los productos al calcular el determinante de una matriz triangular superior, para hacerles ver que de todos los productos, sólo queda el producto de los elementos de la diagonal principal. En este caso ayudó la pregunta de E6 para que Aly desarrollara el procedimiento completo para calcular el determinante de orden 3 aplicando Sarrus. (328-336)

[7.3.3] Aprovechar el ejemplo para generalizarlo en una propiedad (que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal). (337-350)

[7.3.3] Representar la generalización de la propiedad usando un esquema geométrico. Aly escribe un determinante y dentro de él dibuja un triángulo de la diagonal principal hacia arriba y debajo del triángulo escribe un cero grande. (337-350)

[7.3.3] Recapitular las propiedades obtenidas a raíz del ejercicio. Remarcarles nuevamente las dos propiedades (1. Que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal. 2. Que el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: menos el producto de la diagonal secundaria) deducidas del apartado b) del ejercicio dos. (367-373)

[7.3.3] Aclararles que cuando ella dijo que el resultado del valor del determinante era negativo (en el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: el producto de la diagonal secundaria negativo), negativo quiere decir que cambia de signo. (374-378)

[7.4] Aprovechar la propiedad de los determinantes de separar en suma de determinantes, para justificarles porque da cero la propiedad que generalizó (de proporcionalidad a combinación lineal. (402-416)

[7.4] Explicarles porque antes, en un determinante de orden dos no se podía hablar de combinación lineal sino de proporcionalidad, pues al hablar de combinación lineal con dos filas, no tenía sentido porque sólo tenían dos filas, entonces sólo se podría hablar de proporcionalidad, no de combinación lineal. (417-423)

[7.5] “Traducirles” lo que “piden” hacer en el ejemplo: *justificar sin desarrollar, porque esos determinantes den cero, es decir, saber las propiedades para justificarlo.* (436-439)

[7.5] Saber qué dejarles de deberes. (463-464)

[8.1.1] Hacer preguntas para ir orientando la respuesta al apartado a) del ejercicio (eg Aly: *Este es muy fácil ¿no?, ¿qué hay que hacer ahí?*). (12-18)

[8.1.1] Explicar por qué el resultado del primer apartado es 3, Aly utiliza el dato que le dan en el ejercicio y aplica la propiedad de los determinantes en la que si un número está multiplicando a todos los elementos en una fila entonces se puede sacar ese número del determinante, es decir, $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. (14-18)

[8.1.1] Decidir explicar en la pizarra el segundo apartado del ejercicio a pesar de que E1 ha dicho el resultado correctamente, debido a que considera que es un caso especial en el que se usa una sola propiedad dos veces y al final el resultado del determinante no varía respecto al determinante que se tenía como dato en el ejercicio. (20-79)

[8.1.1] Hacer la comparación entre dos formas de hacer un ejercicio a raíz de que E2 ha dicho otra forma de hacer ese apartado (sacar primero 1/5 como factor común, luego sacar 5 como factor común y queda 1, de multiplicar 1/5 por 5) pero usando la misma propiedad. (56-64)

[8.1.1] Decidir explicar a los estudiantes la otra forma de hacer el segundo apartado propuesto por E2 (E2: *sacar el 5 y luego de la segunda fila sacar factor común 1/5 extraerlo fuera del determinante y queda 1, por el 1 que vale el determinante pues es 1*). (64-66)

[8.1.1] A forma de cierre de ese apartado, remarcarles en resumen las dos formas de resolver ese apartado del ejercicio (Aly: ...se puede extraer dos veces, de dos filas un numerito o extraer el 5 y volver a ponerlo dentro del determinante, vale). (78-79)

[8.1.1] Remarcarles, antes de empezar a hacer el tercer apartado del ejercicio, Aly quiere recordarles la propiedad que se usará en este apartado, es decir, la propiedad $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$. (84-92)

[8.1.1] Hacer el mismo ejercicio (el mismo apartado de un ejercicio) de dos formas, primero ella propone una forma de hacerlo, luego E2 propone otra forma y Aly decide explicar esa otra forma de hacerlo en la pizarra para que los demás estudiantes vean esa otra forma de hacerlo y que de cualquier manera el resultado es el mismo. (24-77)

[8.1.1] Remarcarles nuevamente lo que no pueden hacer (descomponer al mismo tiempo la segunda y tercera fila en la que aparecen los sumandos) y darles la estrategia para resolverlo (descomponer primero una y luego otra). (103-105)

[8.1.1] Usar un esquema gráfico para que se fijen (para visualizar) cuál es la fila a la que van a aplicar la propiedad y por tanto las otras dos filas quedan “quietas” (Aly encierra en un círculo la segunda fila). (107)

[8.1.1] Explicarles que $2y$ es $2y+0$ para que lo visualicen más fácilmente los estudiantes cuando apliquen la propiedad. (209)

[8.1.2] Comentarles la estrategia para calcular esos determinantes de orden mayor que 3 (Aly: *hay que buscar ahí entre las filas y las columnas alguna relación, alguna proporcionalidad, combinación lineal, algo*). (181-182)

[8.1.2] Remarcarles nuevamente que las propiedades son válidas para cualquier determinante (se refiere a cualquier orden del determinante). (190-191)

[8.1.2] Repetir lo que ha dicho E1 (E1: *La última columna eh - E1 contesta nervioso- es la primera multiplicada por 1000 más la segunda por 100 y la tercera por 10*) y refinarlo con el concepto de combinación lineal y con eso justifica por qué el determinante vale cero. (207-217)

[8.1.2] Remarcarles nuevamente la validez de los determinantes para distinto orden y les aclara que al decir cualquier determinante, se refiere a cualquier orden del determinante. (218-220)

[8.1.2] Aprovechar la respuesta de E12 (E12: *La última columna es combinación lineal de la segunda*), corregirla y la utiliza para explicar e ir corroborando que la cuarta columna es nueve veces la segunda columna, es decir, la cuarta columna es proporcional a la segunda. (224-231)

[8.1.2] Remarcarles el hecho de que “sin tener que hacer cuentas”, al usar la propiedad de los determinantes el determinante vale cero. (232-233); (241-243)

[8.1.2] Hacerles notar la importancia de las propiedades de los determinantes, sobre todo en determinantes muy grandes. (234-236)

[8.1.2] Interpretar la respuesta de E12 (E12: *Que la 3 es 100 veces la 4 más 10 veces la 1 más la 2*) y completarla, para justificar que el determinante vale cero porque la tercera fila es 100 veces la cuarta fila más diez veces la primera fila más la segunda fila. (248-252)

[8.2.1] Para definir un menor, da ejemplos de submatrices que formarían el menor y finalmente define el menor como el valor del determinante de una submatriz. (263-308)

[8.2.1] Primero da un ejemplo de un menor de orden 2, luego define un poco las características de la submatriz que forma el menor y después vuelve a hacerles notar el ejemplo del menor que acaban de hacer. (263-287)

[8.2.1] Hacerles notar cómo obtener un menor de orden 4 (Aly: *Sería toda la matriz completa de 4 filas y 4 columnas*). (292-293)

[8.2.1] Darles un ejemplo de un menor de orden 3. (294-299)

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 10 \end{vmatrix}$$

[8.2.1] Remarcarles la esencia de los menores de orden 2 y de orden 3 (Aly: *Entonces tenemos los menores que son los de orden 2 y los de orden 3, cruzando filas y columnas, las que me digan o las que necesite, vale*). (300-301)

[8.2.1] Cerrar los ejemplos anteriores haciéndoles ver que todo lo que han visto es para llegar a la definición de menor. (306-308)

[8.2.1] “Traducir” la definición formal que viene en el libro de texto, combinar tanto lenguaje formal con lenguaje común. (309-312)

[8.2.1] Remarcar lo que indica el primer y segundo subíndice (cosa que acababan de ver hace algunos días en matrices), (Aly: *el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna*). (322-324)

[8.2.1] Definir el menor complementario auxiliándose de un ejemplo y luego ya lo denota en general por a_{ij} . (327-342)

[8.2.1] Remarcarles nuevamente cómo encontrar el menor complementario de un elemento (Aly: *Entonces para encontrar el menor complementario de un elemento, suprimo la fila y la columna donde está el elemento y el determinante de lo que queda es el menor complementario de ese elemento, vale*). (343-345)

[8.2.1] Hacerles preguntas como: *¿dónde se encuentra ese elemento?, ¿cuál sería el menor complementario ahí con esa matriz del elemento a sub dos dos, es decir, cuál sería alfa dos dos?* para calcular otro menor complementario y ver si le van entendiendo los estudiantes. El estudiante E2 contesta y ella va remarcando (repitiendo) la respuesta del estudiante y finalmente les remarca nuevamente a todos, cómo han encontrado el menor complementario del elemento a_{22} (de la matriz genérica de orden 3×3). (347-361)

[8.2.1] Hacerles notar que el adjunto por la forma en que está definido (en particular: $(-1)^{i+j}$), algunas veces queda positivo y otras negativo. (376-381)

[8.2.1] Comentarles la aplicación que tienen los adjuntos de los menores complementarios, es decir, decirles para qué les va a servir (Aly: *...esto la aplicación que tiene es para desarrollar determinantes mayores eh, determinantes de orden superior*). (382-384)

[8.2.1] Traducir”, en concreto, lo que piden encontrar en el primer, segundo y tercer apartado del ejemplo (Aly: *Un menor de orden dos de la matriz, luego el menor complementario y luego el adjunto*). (396-397)

[8.2.1] Aclararles este dato (el determinante de la submatriz) que le había faltado decir y que es parte de lo que forma un menor. (403-405)

[8.2.1] Hacerles preguntas para que la vayan siguiendo pero luego ella misma se contesta, eg Aly: *Bueno, ¿qué tengo que hacer entonces para ver cuál es el menor complementario de ese elemento? Pues suprimimos por ende esa columna y esa fila*. (415-417)

[8.2.1] Explicar cómo calculó el determinante de orden 3 con la regla de Sarrus y que se obtiene 198, que es el valor del menor complementario a_{32} . Aly repasa nuevamente cómo calcular el determinante de orden 3 por Sarrus (tema visto hace algunos días). (427-438)

[8.2.1] Hacer una pregunta para que los estudiantes noten la diferencia entre menor complementario y su adjunto (Aly: *¿qué es lo que hay de diferencia entre el menor complementario y el adjunto? El signo*). (440-442)

[8.2.1] Saber qué dejarles de deberes (que hagan un ejercicio que viene en el libro, parecido al ejemplo que han hecho) una vez que ha terminado de presentarles un primer ejemplo. (450-451)

[8.2.1] Decirles para qué sirve lo que han hecho en el ejemplo y por tanto, en general, lo que han visto hasta llegar al adjunto, es decir: menor, menor complementario y adjunto. Comentarles la utilidad de esos tres conceptos: *para desarrollar determinantes mayores que no sean de orden 3, que sean de orden 4, de orden 5*. (452-454)

[8.2.2] Comentarles que esta propiedad (para calcular determinantes mediante adjuntos) que van a ver, se puede aplicar para calcular determinantes de orden tres o más y que ella escribirá la propiedad para el caso de una matriz cuadrada de orden tres. (466-469)

[8.2.2] Comentarles en lenguaje más familiar cómo calcular el determinante de una matriz de orden mayor o igual a tres (Aly: *Bueno pues el valor del determinante es ir multiplicando los elementos de una fila o columna por sus correspondientes adjuntos*). (473-474)

[8.2.2] Aclararles que también pueden calcular el determinante mediante adjuntos eligiendo otra fila. (481-482)

[8.2.2] Darles y explicarles otra forma de escribir (representar) cómo calcular un determinante mediante adjuntos. Aly lo escribe de forma compacta $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ con i fijo. (491-510)

[8.2.2] Comentar la estrategia de la demostración (Aly: *Si en esto –Aly señala los adjuntos que había escrito para calcular el determinante de A con la primera fila- nos ponemos a escribir quién es el adjunto A_{11} , A_{12} , A_{13} van a ver que lo que nos va a quedar es el desarrollo por la regla de Sarrus*). (516-523)

[8.2.2] Comentarles su estrategia para escribir los resultados (Aly: *...primero voy a ir haciendo cada uno de los adjuntos y luego ya los anotamos todos juntos, nos va a salir una fórmula muy grande*). (535-536)

[8.2.2] Comentarles lo que falta por hacer para ver si alguien se atreve a terminarlo en casa y sino ella lo terminará la siguiente clase (ya se terminó la clase y no alcanzó a terminar de hacer la demostración). (563-569)

[8.2.2] Saber qué dejarles deberes. Aly los invita a que terminen lo que faltó por hacer en la demostración (sustituir en la expresión que ya tienen escrita, los adjuntos que acaban de obtener y ver si al hacer el desarrollo obtienen los mismos términos que con la regla de Sarrus, para calcular un determinante genérico de orden tres). (570-571)

En términos del **conocimiento curricular**, podemos destacar lo siguiente:

[6.2] Saber los contenidos que deben aprender y la orientación de éstos, pues el tema que está presentando es determinantes pero sabe que eso se ocupará luego cuando explique la clasificación de sistemas. (97-99)

[6.3] Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. (266-271)

[6.3] Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. (573)

[7.3.1] Saber que la regla de Sarrus viene en el libro de texto. (176-177)

[7.3.1] Saber que la regla de Sarrus viene presentada en el libro de texto (un dibujo en el libro en el que se indica sólo la trayectoria que hay que seguir para hacer la multiplicación de los elementos). (232-236)

[7.4] Comentarles que esta nueva propiedad (de proporcionalidad a combinación lineal) viene en el su libro de texto como propiedad 9. (424-425)

[8.2.2] Saber que ese contenido viene en el libro de texto. (514-515)

En términos del **conocimiento pedagógico general**, podemos destacar lo siguiente:

[6.2] Motivación: Animarlos a que hagan los deberes. (58-60)

[7.2.2] Acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan su mano porque tienen dudas. (152-153)

[7.3.2] Controlar al estudiante que si hizo sus deberes, para que también trabajen los otros (Aly interrumpe e ignora la respuesta de E1, Aly prefiere que también los demás estudiantes intenten resolver el ejercicio, por ello “calla” a E1. (263-268)

[7.3.2] Atender (responder) y explicar la duda de E11. E11 pregunta: ¿cuáles son los que van con el signo negativo? (qué productos van precedidos del signo menos al aplicar la regla de Sarrus para calcular el valor del determinante de orden 3). Aly le responde a forma de explicación en la pizarra, que los que van en dirección de la diagonal secundaria ($\square$). (271-277)

[7.3.2] Una forma de acercarse a los estudiantes para ver si tienen alguna duda y luego explicársela: Aly primero pregunta a E7 si ha entendido lo que debe hacer para resolver el problema, al ver que E7 no le responde y observar a Aly, como esperando que le explique lo que debe hacer, Aly empieza a explicarle lo que hay que hacer, luego le pregunta si ahora si ya sabe lo que hay que hacer para continuar resolviendo el problema, E7 contesta que sí. (278-284)

[7.3.2] Una forma de decirles que si no entienden algo pues le pregunten (Aly dice: bueno si alguien no se entera de algo que me llame). (300)

[7.3.2] Una forma de acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho, preguntándoles qué resultados han obtenido ellos, después de que E10 ha calculado el determinante en la pizarra. (304-312)

[7.3.2] Una forma de acercarse a los estudiantes para saber si tienen dudas, preguntándoles a algunos estudiantes: ¿tú cómo vas? (309-310)

[8.1.2] Control de la indisciplina. Aly: *E3 por qué no atiendes hoy mejor, y copias en casa, porque aquí si vienen a copiar es perder tiempo.* (192-193)

[8.2.1] Una forma de preguntarles si entienden lo que se ha hecho (Aly: *Se entiende ¿no?*). (449)

V.1.1.2.3. En el tema de Resolución de sistemas de ecuaciones mediante determinantes

En términos del **conocimiento común del contenido**, podemos destacar lo siguiente:

[11.1] Saber estudiar el rango de una matriz:

Estudiar el rango de la matriz de coeficientes, es decir, en el apartado a) saber si existe o no rango 1, rango 2 ó rango 3. *Idem* en el apartado b) del ejercicio (84-88). *Idem* en el apartado c). (116-158)

Estudiar el rango de la matriz ampliada:

En el apartado a), aprovechar que ya se sabe que mínimo existe rango 2 (porque la matriz de coeficientes tiene rango 2) y para ver si la matriz ampliada tiene rango 3 basta con calcular el determinante de ésta. (32-36) Saber que el rango de la ampliada es 2 porque el determinante de la ampliada es 0, entonces el máximo menor encontrado fue de orden 2. (51-54)

En el apartado b), saber que el rango de la ampliada es 3 porque el máximo menor encontrado es de orden 3. (89-105)

En el apartado c), saber que el rango de la ampliada es 3 porque el máximo menor encontrado es de orden 3. (159-177)

[11.1] Saber que la última columna es combinación lineal de las anteriores ($C_3=C_1-C_2$). (41-45)

[11.1] Saber el teorema de Rouché-Frobenius (que si el rango máximo encontrado coincide con el número de incógnitas entonces el sistema es compatible determinado). (55-64)

[11.1] Saber que de la escritura de la matriz ampliada pueden ir analizando el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada (para no escribir primero la matriz de coeficientes y luego la ampliada, es decir, para escribir sólo la ampliada y de ahí analizar el rango de ambas). (77-83)

[11.1] Saber la regla de Sarrus para calcular un determinante de 3×3 . (95-99); (171-175)

[11.1] Saber el Teorema de Rouché-Frobenius. (99-107); (178-179)

[11.1] Saber que no se puede escribir el determinante de una matriz que no sea cuadrada. (121-128)

[11.1] Saber que en el sistema de 3×4 al ampliar la matriz de coeficientes con la cuarta columna, el determinante del menor de orden 3 vale cero, porque existe una combinación lineal en las columnas ($C_3=C_1-C_2$). (147-153)

[11.2.1] Saber el Teorema de Rouché-Frobenius. (188-207)

[11.2.1] Saber la relación entre un sistema de Cramer y los rangos (considerando que un sistema será de Cramer cuando el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas y además eso sea igual al rango de la matriz de coeficientes e igual al rango de la matriz ampliada, es decir, todos coinciden). (214-220)

[11.2.1] Saber la definición de la regla de Cramer para un sistema genérico de 4×4 . (237-295)

[11.2.1] Saber escribir el sistema de 4×4 de forma genérica. (238-249)

[11.2.1] Saber cómo calcular x según la regla de Cramer ($x=|A_x|/|A|$). (258-260)

[11.2.1] Saber cómo se calcula el $|A_x|$. (263-275)

[11.2.1] Saber cómo calcular y según la regla de Cramer ($y=|A_y|/|A|$). (278-288)

[11.2.1] Saber cómo calcular z según la regla de Cramer ($z=|A_z|/|A|$). (289-291)

[11.2.1] Saber cómo calcular t según la regla de Cramer ($t=|A_t|/|A|$). (293)

- [11.2.2] Saber hacer la demostración de la regla de Cramer. (299-460)
- [11.2.2] Saber la propiedad de los determinantes de que si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes. (372-416)
- [11.2.2] Saber la propiedad de los determinantes de que el $|A|=0$ si una fila o columna es proporcional a otra. (405-416)
- [11.2.2] Saber la propiedad de los determinantes de que si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila o columna, pero sólo una. (420-428)
- [11.2.2] Saber la estrategia para encontrar $y=|A_y|/|A|$ partiendo del $|A_y|$. (448-458)
- [11.2.3] Saber que en una fracción el denominador tiene que ser $\neq 0$ para que esté definida (determinada). (477)
- [11.2.3] Saber calcular el rango de la matriz de coeficientes (incluye saber determinar el menor de orden 1, 2 y 3, es decir, hacer los respectivos determinantes). (481-487)
- [11.2.3] Saber cómo hacer la comprobación de la respuesta (los valores obtenidos de x , y , z) en el sistema. (542-554)
- [12.1] Saber estudiar el rango de la matriz de coeficientes. (12-33)
- [12.1] Saber calcular determinantes de 3×3 usando la regla de Sarrus. (16-18)
- [12.1] Al encontrar el valor de x , y , z , saber indicar $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$ y simplificar lo que queda en $x=|A_x|/|A|$, $y=|A_y|/|A|$, $z=|A_z|/|A|$. (63-72), (72-82), (83-93), respectivamente.
- [12.2] Saber que se puede usar la regla de Cramer para un SCI. (98-107)
- [12.2] Saber calcular el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada. (130-225)
- [12.2] Saber lo que es *orlar* (ampliar el menor para ir averiguando el rango de una matriz). (137-140)
- [12.2] Saber usar los términos matemáticos (E1 ha dicho que una columna es inversa de otra y Aly le comenta que no inversa sino opuesta, en este caso $C_3=-C_2$). (159-161)
- [12.2] Saber usar términos adecuados en la explicación, pues no es lo mismo decir “eliminamos una columna” de la matriz que decir “a efectos del rango eliminamos una columna” de la matriz. (175-178); (216-217)
- [12.2] Saber cuándo un sistema es compatible indeterminado en términos del rango, es decir, saberse el teorema de Rouché-Frobenius. (231-236)
- [12.2] Saber aplicar (usar) la regla de Cramer para resolver un SCI. (270-277)U(302-355)
- [12.2] Saber la estrategia para indicar los determinantes $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$ para encontrar el valor de x , y , z con la regla de Cramer: siempre los términos independientes se colocan

en la primera, en la segunda o en la tercera columna dependiendo de la incógnita que se busque. (311-313)

[12.2] Saber resolver un SCI. (369-374)

[12.3] Saber parte de la estrategia para resolver SCI (Aly: ... *las incógnitas que van a quedar, son las que están en esa submatriz, es decir, que la última ecuación la eliminamos, entonces ¿ahora qué hacemos con la z? Pues en este caso nuestras incógnitas van a ser x, y, y la z pasa a ser un parámetro, la vamos a llamar λ*). (415-420)

[14.1] Saber lo que dice el Teorema de Rouché-Frobenius. (26-30)

[14.1] Saber que existe rango 1 y rango 2 en la matriz de coeficientes. (35-40)

[14.1] Saber lo que se necesita para ver si el rango es 3 ó en qué caso (saber que hay que calcular el determinante de la matriz de coeficientes y analizar para qué valores da cero el determinante y para qué valores no). (35-40)

[14.1] Saber calcular el determinante de orden 3. (41-43)

[14.1] Saber que el rango de A es dos y el rango de la ampliada es tres (cuando $a=1$). (118-145)

[14.1] Saber que es cierta la afirmación de E4, que si en el sistema, la primera ecuación es $x+y+z=0$ y la tercera ecuación es $x+y+z=1$, no puede ser igual a 0 y a 1 al mismo tiempo. Es decir, saber que un sistema es incompatible si por un lado se tiene que $x+y+z=0$ y que $x+y+z=1$, porque la misma ecuación no puede ser igual a 0 e igual a 1 simultáneamente. (135-137)

[14.1] Saber que el sistema es incompatible (porque el rango de la matriz A es distinto del rango de la matriz ampliada), es decir, saber lo que dice el teorema de Rouché-Frobenius. (147-148)

[14.1] Saber que el rango de A es dos cuando $a=2$. (159-163)

[14.1] Saber que el rango de la matriz ampliada es dos cuando $a=2$. (164-174)

[14.1] Saber lo que dice el Teorema de Rouché-Frobenius y por lo tanto deducir que con $a=2$ el sistema es un Sistema Compatible Indeterminado. (175-181)

[14.1] Saber que si la solución del sistema queda por ejemplo en términos de la expresión $z/2$, entonces es conveniente hacer $z=2\lambda$ y no $z=\lambda$ para que la expresión quede más sencilla. (201-202)

[14.1] Saber que puede quitar la tercera ecuación del sistema (porque el rango de la matriz de coeficientes no es tres sino dos, entonces deja las dos ecuaciones con las que obtuvo rango dos). (211-215); (216-219) y (porque una fila es combinación lineal de las otras dos). (220-225)

[14.1] Saber que si el sistema de 3×3 tiene a lo más rango dos, lo importante es quedarse con las ecuaciones del menor de orden dos cuyo determinante es distinto de cero, independientemente del orden, es decir, de si es la primera y la segunda ecuación o la segunda y la tercera ecuación. (233-243)

[14.1] Saber que en un sistema de 3×3 , si queda rango uno pues habría una incógnita y dos parámetros, si queda rango dos entonces dos incógnitas y un parámetro. (244-246)

[14.2] Saber escribir el sistema del ejemplo en forma matricial $AX=C$. (304-315)

[14.2] Saber que el sistema se puede escribir en forma matricial porque al hacer el producto e igualar término a término (en $AX=C$) se obtiene el sistema inicial. (316-338)

[14.2] Saber despejar la X de la ecuación matricial $AX=C$, es decir, saber que $X=A^{-1}C$. (349-362)

[14.2] Saber la analogía entre el elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices y su funcionalidad (que al multiplicar un elemento del mismo conjunto por el elemento neutro o la matriz identidad, en los números reales o en matrices respectivamente, lo/la deja invariante). (366-368)

[14.2] Saber que $X=A^{-1}C$ es otra forma de calcular el valor de las incógnitas y que para usar esa forma, el sistema debe ser cuadrado (de 2×2 , 3×3 , etc.). (369-374)

[14.2] Saber las condiciones para aplicar $X=A^{-1}C$ y encontrar el valor de x , y , z : el sistema debe ser cuadrado, es decir, igual número de ecuaciones que de incógnitas y existir A^{-1} , es decir, resolver el sistema de forma matricial. (375-381)

[14.2] Saber que como el determinante de A es distinto de cero entonces existe A^{-1} . (386-392)

[14.2] Saber calcular la matriz inversa con la expresión $A^{-1}=(\text{Adj}A)^t/|A|$, incluye saber calcular cada parte de esa expresión ($\text{Adj}A$, $(\text{Adj}A)^t$ y $|A|$). (386-464)

[14.2] Saber encontrar el valor de x , y , z una vez que tiene A^{-1} , es decir, obtener X del producto $A^{-1}C$ y con ello saber el valor de x , y , z . (465-491)

[14.2] Saber cuál método puede ser más rápido y por qué (*por Cramer puede ser más rápido pero depende de la dificultad de la matriz, si hay ceros en la matriz pues es mejor hacerlo por Cramer, pero si piden hacerlo con la forma matricial pues entonces hay que hacerlo con esa forma*). (501-507)

[14.3] Saber que hay que estudiar el rango para saber si el SH es determinado o indeterminado. (534-537)

[14.3] Saber que en el ejemplo de SH existe rango 1, rango 2 y rango 3 (incluye saber calcular los determinantes de orden 2 y 3). (538-552)

[14.3] Saber el Teorema de Rouché-Frobenius, que si el $\text{Rango } A = \text{Rango } A \text{ ampliada} = \text{Rango máximo}$ entonces es un Sistema Compatible Determinado y entonces el sistema tiene solución trivial. (552-558)

[15.1] Saber en el apartado b) del ejercicio (1-14):

1. Que existe rango 1 y rango 2.
2. Que no existe rango 3 (saber la regla de Sarrus y calcular el determinante de la matriz A de orden 3×3).
3. Que cuando $\text{Rango } A = 2 = \text{Rango de la ampliada}$ entonces es un sistema compatible indeterminado (saber lo que dice el Teorema de Rouché-Frobenius).

[15.1] Saber que en el apartado c) existe rango 1, rango 2 y rango 3. (46-52)

[15.1] Saber que el rango de $A = 3$ por más que se agreguen filas porque el orden de A es 4×3 , entonces el rango máximo que puede tener es 3. (56-71)

[15.1] Saber que si el rango de la matriz A no es el rango máximo, es decir, el rango $A < \text{número de incógnitas}$, eso no significa que el sistema sea incompatible. (84-86)

[15.1] Saber que en un sistema homogéneo el rango de $A = \text{rango de la matriz ampliada}$ y entonces siempre será un sistema compatible y entonces lo que tienen que ver es si es determinado o indeterminado. (87-89)

[15.1] Saber que en el apartado d) existe rango 1, rango 2 y rango 3. (95-109)

[15.1] Saber que se puede usar la regla de Cramer para resolver el SCI. (143-155)

[15.2] Saber que existe rango 1, rango 2 y en qué casos rango 3 (dependiendo de los valores del parámetro a). (223-248)

[15.2] Saber que puede usar la regla de Cramer para resolver este SCD, es decir, que se cumplen las condiciones para aplicar esa regla. (252-265)

[15.2] Saber calcular $x = |A_x|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_x|$ y $|A|$. (270-283)

[15.2] Saber calcular $y = |A_y|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_y|$ y $|A|$. (284-288)

[15.2] Saber calcular $z = |A_z|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_z|$ y $|A|$. (289-293)

[15.2] Saber (339-346):

1. Que el rango de la ampliada es 3.
2. Que como el rango de $A = 2 \neq \text{rango de la ampliada} = 3$, entonces el sistema es incompatible y entonces no existe solución.

[15.2] Saber que con $a = -3/4$ la matriz A tiene rango 2. (362-365)

[15.2] Saber que (381-387):

1. El rango de la ampliada es 3.
2. Si el rango $A = 2 \neq \text{rango de la ampliada} = 3$, entonces el sistema es incompatible y entonces no existe solución.

En términos del **conocimiento especializado del contenido**, podemos destacar lo siguiente:

[14.1] Saber que si el valor del determinante se expresa como una ecuación de segundo grado, entonces se pueden aplicar propiedades de los números reales en la ecuación. Es decir, cambiar de signo al término $-a^2$ y, por lo tanto a todos los términos de la ecuación. Aly hace notar a los estudiantes que el valor del determinante no puede cambiar de signo, pero la ecuación de segundo grado en si misma sí (aplicando propiedades de campo de los números reales). E1 ha dicho: “Una pregunta, si el valor del determinante fuera, en particular, $a=0$, tendríamos que igualar eso a 0, pero también se podría cambiar de signo a la a al cuadrado”. La expresión del determinante de la matriz es $-a^2+3a-2$, la ecuación sería expresada como $-a^2+3a-2=0$. (44-56)

[14.1] Saber que en un sistema compatible indeterminado, al dar soluciones a ese sistema con distinto valor de parámetro, en el conjunto de infinitas soluciones la solución será la misma (seleccionen el menor que seleccionen siempre y cuando elijan el menor de forma correcta –que el determinante sea distinto de cero). Es el profesor a diferencia de otros profesionales, el encargado de explicar a los estudiantes (sobretudo cuando es la primera vez que ven eso los estudiantes) que aunque aparentemente vean que las soluciones son distintas (con distinto valor del parámetro) en el conjunto de infinitas soluciones es la misma. (254-262)

[14.2] Saber que al aplicar la propiedad conmutativa en matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa del producto en los números reales al producto en matrices, de tal manera que cuando despejan X de la ecuación matricial $AX=C$, deben tener cuidado al multiplicar A^{-1} por la izquierda en ambos términos de la igualdad, especialmente en la segunda parte de la igualdad (en $A^{-1}C$), pues en las matrices el producto no es conmutativo y entonces $A^{-1}C \neq CA^{-1}$. Es el profesor a diferencia de otros profesionales, el que se plantea la causa matemática del error de los estudiantes al enfrentarse con la propiedad no conmutativa en el producto de matrices. (349-362)

En términos del **conocimiento del contenido y de los estudiantes**, podemos destacar lo siguiente:

[11.1] Prever que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse si pueden usar una propiedad, es decir, sin ver si existe alguna relación entre las filas o las columnas para ver si se puede aplicar una propiedad de los determinantes y no hacer todo el cálculo. En el apartado a) (38-40); en el apartado b) (91-92); en el apartado c) (133-134); (168-169)

[11.1] Prever que los estudiantes se pueden quedar con una imagen inadecuada del contenido y por ello luego siente la necesidad de hacer una aclaración o comentario, es decir, prever que los estudiantes no tomen en cuenta que la matriz debe ser cuadrada

para calcular su determinante, pues el determinante de una matriz que no sea cuadrada no está definido). (121-128)

[11.2.1] Prever que los estudiantes entenderán “mejor” la definición de un sistema de Cramer si se las dice en lenguaje más familiar a los estudiantes. (221-223)

[11.2.2] Prever que los estudiantes no ven fácilmente el otro sentido de la igualdad ($\leftarrow$, en este caso particular, en la expresión $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=C_1$, no ven que esa expresión también se puede ver como $C_1=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t$). (333-337)

[11.2.2] Prever que puede ser más complicado o producir confusión a los estudiantes trabajar con x_1, x_2, x_3, x_4 , por eso al hacer la demostración de la regla de Cramer para un sistema de 4×4 usa la notación x, y, z, t en lugar de x_1, x_2, x_3, x_4 . (339-340)

[11.2.3] Prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen de que no necesitan hacer todo el procedimiento para obtener los valores de x, y, z , debido a lo que acaban de ver en la estrategia de la demostración de la regla de Cramer, pues al hacer la demostración, Aly hizo el desarrollo del procedimiento completo para encontrar el valor de x pero para encontrar el valor de y y de z no hizo el procedimiento completo sino que sólo les comentó la estrategia para calcularlos. (467)

[12.1] Prever que los estudiantes se pueden confundir al tener poca experiencia en estudiar el rango (rango 1, rango 2 y rango 3). (32-34)

[12.2] Prever que para los estudiantes será más comprensible este tema (Uso de la regla de Cramer en un SCI) si lo ven con un ejemplo concreto que aparece resuelto en el libro de texto. (110-112)

[12.2] Prever que no se fijen si existe alguna relación entre filas o columnas y terminar más rápido el determinante justificando la propiedad que utilicen. (155,158); (164-167)

[12.2] Prever que los estudiantes se pueden confundir con la z y la t que ahora son parámetros, por tanto, mejor les dará nombre de parámetro λ y μ , respectivamente. (260-269)

[14.1] Prever que si les dice el Teorema de Rouché-Frobenius en lenguaje más familiar para ellos, entenderán “mejor” lo que dice el teorema. (26-30)

[14.1] Prever que al cambiar de signo a la ecuación que representa el valor del determinante, los estudiantes pueden hacerse una imagen inadecuada y cometer el error de cambiar de signo el valor del determinante, es decir, hacerlo mecánicamente sin saber lo que están haciendo. (44-56)

[14.1] Capacidad para escuchar e interpretar el conocimiento/pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje usual. En este caso, interpretar que lo que E4 quiere decir es que un sistema es incompatible si por un lado se tiene que $x+y+z=0$ y que $x+y+z=1$, es decir, la misma ecuación no puede ser igual a 0 e igual a 1 simultáneamente. (135-148)

[14.1] Prever que se pueden quedar con la idea incorrecta de que resolvieron el problema completo y por ello les aclara que sólo lo han resuelto para $a=2$. (281-282)

[14.2] Prever que los estudiantes pudieran equivocarse al multiplicar por A^{-1} sin considerar si debe ser por la derecha o por la izquierda (para despejar X de $AX=C$). (349-362)

[14.2] Prever que los estudiantes tienen más trabajado el elemento neutro en los números reales y entonces al comentarles la analogía entre el elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices, los estudiantes entenderán “mejor” la funcionalidad de la matriz identidad en las matrices. (366-368)

[14.2] Prever que pueden equivocarse en el signo, al escribir sólo el valor del adjunto, sin escribir todos los cálculos, es decir, al hacerlo directamente. (413-416)

[14.3] Prever que si les destaca a los estudiantes las principales características de un SH antes de hacer el ejemplo, entenderán “mejor”, “más rápido” y “bien” el ejemplo de SH que les va a presentar. (513-529)

[15.1] Prever que puede haber estudiantes que les preocupe o les sea más importante ver cuál sería esa dependencia lineal y pierdan el sentido del problema, es decir, que este dato puede despistar a los estudiantes (ver que el determinante de la matriz A da 0 y que entonces no puede tener rango 3, y que por tanto existe una dependencia lineal en las filas o columnas de la matriz A). En este caso el determinante de orden 3 da 0 y no se ve tan fácilmente la dependencia línea entre filas o columnas. (21-23)

[15.1] Saber que le permite interpretar el pensamiento de E1 y responderle. En este caso E1 pregunta que si el sistema homogéneo es incompatible, pero al justificar E1 su respuesta (E1 dice que es incompatible porque el rango de A va a ser menor que el número de incógnitas), Aly interpreta que E1 lo que intenta decir es que el sistema homogéneo va a salir compatible indeterminado. (90-92)

[15.1] Prever que a los estudiantes les puede parecer extraño usar la regla de Cramer en un SCI y que por ello no la utilicen a pesar de que se cumplan las condiciones para aplicar la regla de Cramer. (150-155)

[15.2] Dar por hecho que los estudiantes pueden resolver fácilmente una ecuación de segundo grado y por ello sólo anotar el resultado de esas operaciones. Aly no resuelve la ecuación de segundo grado sólo anota los valores que da , en este caso $a=2$ y $a=-3/4$. (235-236)

[15.2] Saber que los estudiantes pueden no apreciar que cuando calcularon el determinante de la matriz A y vieron para qué valores ese determinante vale cero, precisamente encontraron que uno de esos valores es $a=2$, entonces A no puede tener rango 3. Es decir, saber que los estudiantes pueden cometer el error de volver a calcular el determinante de A y “estudiar desde cero” el rango de A . (301-328)

[15.2] Prever que al tomar ahora otro menor distinto al que toman comúnmente puede confundir a los estudiantes, al estudiar este sistema. (368-373)

En términos del **conocimiento del contenido y de la enseñanza**, podemos destacar lo siguiente:

[11.1] Transferir y orientar la respuesta del estudiante (E5) a una convención matemática del contenido, es decir, E5 dice el orden de la matriz de coeficientes pero primero dice las columnas y luego las filas (2×3), entonces Aly acomoda la respuesta y remarca que el orden es de 3×2 . (10-16)

[11.1] Transferir y orientar la respuesta del estudiante para conducir dicha respuesta a lo que el profesor explicará posteriormente. (10-17)

[11.1] Comentarles la estrategia de “solución” del ejercicio (tienen la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, lo que tienen que hacer únicamente es estudiar el rango de ellas y ver si los rangos de ellas coinciden porque entonces el sistema es compatible). (22-25)

[11.1] Recomendarles a los estudiantes que observen primero el problema, que se detengan un momentito antes de hacer nada y vean si existe alguna relación entre las filas o las columnas para ver si se puede aplicar una propiedad de los determinantes y no hacer todo el cálculo, pues de existir una combinación lineal entre filas o columnas el determinante vale 0. (38-40)

[11.1] Anunciarles que verán un poquito más sobre eso (saber resolver el sistema) más adelante cuando vean la regla de Cramer (en ese apartado del ejercicio sólo piden decir de qué tipo es el sistema de acuerdo al Teorema de Rouché-Frobenius). (65-68)

[11.1] Hacerles hincapié en que no importa tanto el valor exacto del determinante sino el hecho de que de cero o distinto de cero. (99-101); (175-176); (185)

[11.1] Cerrar el ejercicio de los tres apartados (a), b) y c)) remarcándoles la utilidad del Teorema de Rouché-Frobenius. (180-181)

[11.2.1] Comentar a los estudiantes que la regla de Cramer es el método más práctico y más eficaz para resolver un sistema. (209-210)

[11.2.1] Aclararles “traducir” lo que dice la definición de un sistema de Cramer a lenguaje más familiar a los estudiantes. (221-223)

[11.2.1] Ignorar la respuesta de E8 que es incorrecta y que no aporta nada a la explicación que Aly está dando. (282-283)

[11.2.2] Hacerles notar parte de la estrategia para la demostración de la regla de Cramer. Remarcarles que en el primer elemento de la primera columna sólo han escrito lo que vale C_1 en términos de la ecuación (pues $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = C_1$), es decir, les hace notar que ha escrito a_{11} como combinación lineal, lo cual es el punto clave en el $|A_x|$. (321-324)

[11.2.2] Comentarles la estrategia o parte de ella para hacer la demostración de la regla de Cramer, usar las propiedades de los determinantes (en particular: 1. Separar en sumas de determinantes la columna expresada en términos de combinaciones lineales. 2. Usar la propiedad de proporcionalidad entre columnas y 3. Usar la propiedad de sacar término común). (329-331)

[11.2.2] Remarcarles que en matemáticas es mejor demostrar cosas “largas” (extensas) con cuidado que las cortas, porque en una afirmación corta se tienen tan pocas cosas, tan pocos datos para trabajar que es más difícil, y no como las afirmaciones largas. En concreto, comentarles que no hay que asustarse al tener que resolver un problema que en apariencia es extenso. (365-370)

[11.2.2] Hacerles notar la proporcionalidad entre dos columnas del determinante para ver que entonces ese determinante vale 0 y que lo mismo pasa con los siguientes dos determinantes, de tal forma que hay tres determinantes que dan 0 y del determinante principal $|A_x|$ que tenían inicialmente ya sólo les queda un determinante menos extenso. (405-419)

[11.2.2] Hacerles notar que el término común que existe en la primera columna y que por tanto pueden usar una propiedad de los determinantes para sacar el término común (x) del determinante (si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila o columna, pero sólo una). (420-428)

[11.2.2] Remarcarles a lo que han llegado con lo realizado hasta el momento (a que $|A_x|=x|A|$). (434-435)

[11.2.2] Comentarles la estrategia para calcular $|A_y|$, que sería similar a la anterior (para calcular $|A_x|$) pero ahora se obtendría $|A_y|=y|A|$ entonces $y=|A_y|/|A|$. (448-458)

[11.2.2] A forma de cierre de la demostración de la regla de Cramer, comentarles que la estrategia para calcular $|A_z|$, sería similar a la anterior (para calcular $|A_y|$) pero ahora se obtendría $z=|A_z|/|A|$. (459-460)

[11.2.2] Hacerles notar que una cosa es hacer una demostración y otra hacer ejemplos concretos (con números específicos). (462-464)

[11.2.3] Remarcarles cuándo un sistema es sistema de Cramer, antes de empezar a hacer el ejemplo, es decir, les remarca eso para tener claro lo que hay que hacer en el ejemplo. (472-474)

[11.2.3] Hacerles ver que primero hay que ver que el $|A| \neq 0$ porque el $|A|$ aparece en el denominador de las expresiones $x=|A_x|/|A|$, $y=|A_y|/|A|$, $z=|A_z|/|A|$, es decir, para poder encontrar los valores de x , y , z respectivamente. (475-477)

[11.2.3] Hacerles notar por qué el ejemplo es un sistema de Cramer (que el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas y eso es igual al rango de la matriz de coeficientes e igual al rango de la ampliada). Es decir, remarcarles eso antes de hacer propiamente el ejemplo. (491-493)

[11.2.3] Aly sólo anota lo que da el $|A_x|$, es decir, no lo resuelve, sólo lo indica y anota el valor de x . Similarmente lo hace con el $|A_y|$, lo indica y no lo resuelve en clase, sólo anota el resultado de y . Para z , indica el $|A_z|$ y les pide que ellos lo calculen. (503-505); (506-515); (516-535)

[11.2.3] Gestión de la participación. Saber que los estudiantes también deben participar activamente en clase y no sólo copiar lo que ella escribe en la pizarra. Aly los invita a que calculen el $|A_z|$ que ya ha indicado, para que los estudiantes también hagan algo y no sólo copien lo que anota ella. (520)

[11.2.3] Corregir la idea equivocada del estudiante E3, E3 pensaba que no era necesario hacer el $|A_z|$, porque daba 0, idea errónea de E3 que justificaba que debido a que en la demostración de la regla de Cramer había un paso (para llegar a la expresión $|A_x|=x|A|$) en el que varios determinantes daban 0 (porque existía proporcionalidad entre dos columnas) entonces el $|A_z|=0$. (524-532)

[12.1] Interpretar y completar la respuesta de E1 (En este caso, acaban de indicar cómo encontrar el valor de x usando Cramer y Aly pregunta: *De la misma forma y, ¿a qué será igual?*, E1: *Al A sub y partido por A* , Aly: *y sería igual al determinante de A sub y partido por el determinante de A*). (51-54)

[12.1] Indicarles el determinante A_x y comentarles que se resuelve con Sarrus y sólo anotar el resultado. (63-69)

Indicar nuevamente el determinante de A_y y sólo anotar el resultado, es decir, no escribir ni explicar el procedimiento de Sarrus para calcularlo. (73-79)

Similarmente al anterior, indicar el determinante A_z y sólo anota el resultado. (84-90)

- [12.2] Comentarles que se puede usar la regla de Cramer para un SCI. (98-107)
- [12.2] Evocarles y remarcarles cuándo un sistema es de Cramer, para luego hacerles ver que se puede usar Cramer en un SCI. (98-107)
- [12.2] Decidir con qué ejemplo empezar a abordar este tema (con el primer ejemplo de este tema que aparece resuelto en el libro de texto). (110-112)
- [12.2] Comentarles la estrategia de solución en ejercicios de sistemas: primero hay que saber de qué tipo es el sistema al comparar el rango de la matriz de coeficientes con el de la ampliada. (119-123)
- [12.2] Remarcarles lo que tendrían que ver para ver si el rango de A es tres, es decir, ver si el valor de ese determinante de orden tres es distinto de cero o no. (143-145)
- [12.2] Corregir el lenguaje matemático de los estudiantes (E1 ha dicho que una columna es inversa de otra y Aly le comenta que no inversa sino opuesta, en este caso $C_3 = -C_2$). (159-161)
- [12.2] Remarcarles lo útil que puede ser si primero buscan relaciones entre filas o columnas antes de empezar a hacer operaciones (Aly: ... *todo lo que veamos así - relaciones - es muy bueno porque nos evita hacer muchas operaciones del determinante, vale*). (181-183)
- [12.2] Gestión de la participación: Aly calla a E1 pues su respuesta no es correcta y además no aporta nada a la respuesta correcta del ejercicio (E1 dice que el sistema entonces no es compatible pero se trata de un SCI). (186-187)
- [12.2] Saber cuando ignorar o retomar una respuesta de los estudiantes. En esta ocasión la respuesta de E1 es correcta (que el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada), pero Aly la ignora para hacer el ejercicio. Posteriormente, al escuchar Aly la justificación de la respuesta de E1 (que la columna de los términos independientes es igual a la anterior cambiada de signo, lo cual hace que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al de la ampliada) que ella ignoró por un momento, la acepta y la retoma para mostrarles a todo el grupo por qué el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada. (201-225)
- [12.2] Resumirles lo que han hecho, a lo que han llegado hasta ahora lo que falta por hacer en este ejemplo (apenas han estudiado el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada y falta decir con base a eso qué tipo de sistema es y en su caso resolverlo). (226-229)
- [12.2] Hacerles notar la ventaja de que puede resultar más fácil resolver el sistema si el rango es dos y el número de ecuaciones y de incógnitas es cuatro. (237-239)
- [12.2] Evocarles un tema equivalente (SCI que resolvieron con el método de Gauss) para que ellos comprendan mejor lo que les acaba de decir (que se trata de resolver un SCI como los que habían resuelto antes por Gauss). (241-242)

[12.2] Remarcarles el tipo de sistema del que se trata (SCI con dos parámetros), antes de empezar a hacerlo. (252-253)

[12.2] Hacerles notar lo que tienen (una submatriz de orden dos que ya es de rango dos) y que por tanto pueden usar Cramer (porque esa submatriz cumple con la condición para aplicar esa regla). (271-275)

[12.2] Empezar a decirles la estrategia para usar Cramer, calcular el valor de x que es igual al $|A_x|/|A|$. (276-277)

[12.2] Interpretar las preguntas y respuestas de E1, pues E1 pregunta si ese SCI se puede resolver con una reducción, pero en su primera intervención, pregunta si lo puede resolver por Gauss pero posteriormente al responder a Aly, Aly transfiere su lenguaje común, es decir, su pensamiento matemático a lenguaje matemático (E1: *Una pregunta, si por ejemplo se suma o yo lo quisiera resolver por Gauss ¿se puede?*, Aly: *Claro, lo hemos hecho ¿no?*, E1: *Si pero me refiero por ejemplo a x - y , a la primera fila y la segunda fila.* Aly: *Ah tú dices aplicar una reducción.* E1: *Sí, si.*). (278-284)

[12.2] Remarcarles que siempre tienen ahí (como reserva) el método de reducción (que se ve comúnmente en secundaria) para cuando lo quieran usar (cuando lo consideren útil). (296-299)

[12.2] Decidir resolver el sistema por el método de reducción y por Cramer. Aly inicialmente pensaba resolverlo sólo por Cramer pero debido a la intervención de E1 (que comenta que se puede hacer una reducción –método que hasta el momento los estudiantes tienen más trabajado-), decide hacerlo también por reducción simple. (300-301)

[12.2] Remarcarles la estrategia (siempre los términos independientes se colocan en la primera, en la segunda o en la tercera columna dependiendo de la incógnita que se busque), para indicar los determinantes que aparecen en los numeradores, para encontrar el valor de x , y , z con la regla de Cramer, es decir, para indicar los determinantes $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$. (311-313)

[12.2] Remarcarles que en un SCI el sistema tiene infinitas soluciones y hacerles notar la forma de escribir la solución en términos de parámetros, en este caso $(1+\mu, -1+\lambda-\mu, \lambda, \mu)$. (348-355)

[12.2] Remarcarles lo que se debe hacer, la estrategia a utilizar cuando los estudiantes tengan que resolver un procedimiento de ese tipo, en este caso, saber escribir el sistema compatible indeterminado, saber explicar cuáles ecuaciones no participan en ese menor, que ha dado distinto de 0, quitar las ecuaciones que sobran y obtener las incógnitas, pasar las incógnitas que van a ser parámetros a la derecha y terminar el sistema como si fuera uno de orden 2. (369-374)

[12.3] Ponerlos a hacer un ejercicio parecido al que acaban de hacer, justo después de hacer uno similar a ese para que practiquen lo enseñado. (375-383)

[12.3] Comentarles en lo que se deben de fijar, tipo estrategia, al hacer un ejercicio sobre sistemas de ecuaciones lineales (Aly: *... primero estudiar el rango es muy*

importante saber con que menor distinto de 0 nos quedamos, ver las incógnitas que participan en ese menor, pues son las que verdaderamente nos van a quedar en el sistema). (380-383)

[12.3] Remarcarles que las incógnitas que van a quedar son las que están en la submatriz cuyo determinante es distinto de 0 y por tanto en este caso, eliminar la tercera ecuación y con ello la z pasa a ser parámetro. (415-420)

[12.3] Dejarles de deberes terminar el ejemplo que no dio tiempo a terminar en la clase (resolver el sistema por reducción). (429-432)

[14.1] Comentarles en lenguaje más familiar a los estudiantes lo que dice el Teorema de Rouché-Frobenius. (26-30)

[14.1] Decirles la estrategia, lo que tienen que hacer para resolver el problema (estudiar el rango de la matriz y en su caso ver para que valores da cero el determinante de la matriz). (35-40)

[14.1] Hacerles notar que este ejercicio no es diferente a los que han hecho en clase (como decía E5). (35-40)

[14.1] Remarcarles que es muy importante lo que les comenta, que en el valor del determinante no pueden cambiar el signo, pero cuando está igualada a cero la ecuación que representa el valor del determinante entonces sí. (44-56)

[14.1] Comentarles que pueden usar un “truco” para resolver la ecuación de segundo grado sin necesidad de usar la fórmula general, pero que si se sienten perdidos pues entonces usen la fórmula general, es decir, les da dos alternativas de solución. (63-68)

[14.1] Hacer notar a E2 que no es conveniente usar la regla de Ruffini para resolver ecuaciones de segundo grado y menos cuando las soluciones son fracciones o raíces. (76); (85-91)

[14.1] Remarcarles que no pierdan el verdadero objetivo del problema: Discutir el sistema según los valores de a y clasificarlo. (100-101)

[14.1] Hacer énfasis en que es distinto que dos filas sean iguales a que sean linealmente dependientes. En este caso si $a=1$ entonces la primera y la tercera fila son iguales. (121-124)

[14.1] Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. En este caso, Aly interpreta lo que dice E4 y luego responde explicando porque el sistema es incompatible (porque el rango de la matriz A es distinto del rango de la matriz ampliada). (135-148)

[14.1] Recapitular brevemente lo que han visto y lo que falta por ver (que han visto si a es distinto de uno y de dos, que son los valores que anulan el determinante, luego si a es igual a uno y a continuación van a estudiar lo que pasa si a es igual a dos). (151-153)

[14.1] Hacerles notar que el rango de A es dos porque precisamente obtuvieron el valor de $a=2$ cuando igualaron el valor del determinante a cero para ver para qué valores se hacía cero ese determinante), por tanto, como a es uno de los valores para el cual el determinante de A es cero, entonces el rango de A es dos. (159-163)

[14.1] Hacer notar el hecho de que en la matriz ampliada la primera columna y la tercera son iguales (pues de ser así, el determinante de la ampliada es cero y entonces el rango de la ampliada es dos). (168-169)

[14.1] Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. Explicarles porque quita la tercera ecuación del sistema (porque el rango de la matriz de coeficientes no es tres sino dos, entonces deja las dos ecuaciones con las que obtuvo rango dos). (211-215); (216-219)

[14.1] Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. Explicarles la condición para quitar una ecuación del sistema de 3×3 para resolverlo (garantizar que no existe rango tres y quedarse con las dos ecuaciones con las que se obtuvo rango dos). (216-219)

[14.1] Usar un ejemplo para hacer ver que en un sistema de 3×3 que tiene a lo más rango dos (y no rango tres), no se puede quitar cualquier fila (cualquier ecuación de sistema) para resolverlo, se tendría que quitar la que no garantice rango tres, es decir, dejar las dos ecuaciones que garanticen rango dos. (226-232)

[14.1] Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. Explicarles que si el sistema de 3×3 tiene a lo más rango dos, lo importante es quedarse con las ecuaciones del menor de orden dos cuyo determinante es distinto de cero, independientemente del orden, es decir, no importa si es la primera y la segunda ecuación o la segunda y la tercera ecuación. (233-243)

[14.1] Remarcarles que en un sistema de 3×3 que tiene a lo más rango dos, independientemente de que con las dos ecuaciones que se queden sea la primera y la segunda o la segunda y la tercera (siempre y cuando garanticen el rango dos), la solución del sistema debe ser la misma. (239-243)

[14.1] Hacerles notar la importancia de estudiar el rango (en un sistema de 3×3 , si queda rango uno pues habría una incógnita y dos parámetros, si queda rango dos entonces dos incógnitas y un parámetro). (244-246)

[14.1] Remarcarles que en un sistema compatible indeterminado, el conjunto de infinitas soluciones les debe dar la misma solución (seleccionen el menor que seleccionen siempre y cuando elijan el menor de forma correcta –que el determinante sea distinto de cero). (254-262)

[14.1] Aclararles que no resolvieron el problema completo sino que sólo lo han resuelto para $a=2$. (281-282)

[14.2] Después de mostrarles, paso a paso, que el sistema se puede escribir como $AX=C$, Aly retoma la idea principal del ejemplo: escribir el sistema en forma matricial $AX=C$ para resolver el sistema. (340-342)

[14.2] Hacerles notar la analogía del elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices, aprovecha que los estudiantes tienen más trabajado el elemento neutro en los números reales. (366-368)

[14.2] Remarcarles lo que han obtenido hasta el momento (369-374):

1. Que la $X=A^{-1}C$.
2. Que $X=A^{-1}C$ es otra forma de calcular el valor de las incógnitas.
3. Que para usar la forma $X=A^{-1}C$, el sistema debe ser cuadrado (de 2×2 , 3×3 , etc.).

[14.2] Resumirles lo más importante de lo que han obtenido (las condiciones para aplicar $X=A^{-1}C$ y encontrar el valor de x , y , z : el sistema debe ser cuadrado, es decir, igual número de ecuaciones que de incógnitas y existir A^{-1}). (375-381)

[14.2] Comentarles la estrategia a seguir para resolver el problema (calcular A^{-1} para calcular $X=A^{-1}C$). (393-394)

[14.2] Repetir el proceso de calcular la inversa por adjuntos. Aly decide repetir el proceso por los estudiantes que no asistieron la clase anterior, escribiendo paso a paso el procedimiento para calcular la matriz inversa con la expresión $A^{-1} = (\text{Adj}A)^t/|A|$. (386-464)

[14.2] (Contestando a la pregunta de E2) Comentarles que pueden escribir sólo el valor del adjunto, si no desean escribir todos los cálculos, pero que se fijen bien en el signo que queda. (413-416)

[14.2] Orientarlos sobre lo que tienen (la $\text{Adj} A$) y lo que hay que hacer para continuar el proceso para calcular A^{-1} (calcular $(\text{Adj}A)^t$ y después $(\text{Adj}A)^t/|A|$). (451-452)

[14.2] Retomar el objetivo del problema del ejemplo: resolver el sistema. Por lo tanto recapitula lo que se ha hecho hasta el momento (obtener A^{-1}) y lo que falta por hacer para resolver el sistema (hacer el producto $A^{-1}C$ para obtener el valor de x , y , z). (465-470)

[14.2] Remarcarles la importancia del orden de las matrices para poder multiplicarlas. Además les hace notar el orden (3×1) del que quedará la matriz resultante del producto $A^{-1}C$ en el ejemplo. (474-482)

[14.2] Remarcarles la importancia de identificar en un enunciado cómo les piden resolver un sistema, saber si hay que resolverlo de forma matricial o si es por Cramer, pues con base en eso podrían saber qué método hay que usar. Comentarles que será de forma matricial, si dice resuelve el sistema de forma matricial, entonces hay que hacerlo de la forma $AX=C$, encontrar $X=A^{-1}C$ y de ahí obtener los valores de x , y , z . (492-496)

[14.3] Hacerles notar que hay que estudiar el rango para saber si el SH es determinado o indeterminado. (534-537)

[14.3] Saber qué dejarles de deberes. (560-561)

[15.1] Decidir revisar este ejercicio con sus tres apartados porque permite practicar y repasar los últimos temas vistos en clase, es un 3 en 1, es decir, 3 casos distintos en un solo ejercicio. (1-205)

[15.1] Remarcarles que es importante que se fijen en tomar el menor de orden dos que garantiza el rango dos, una vez que saben que se trata de un SCI y que tiene rango 2. (19-20)

[15.1] Hacerles notar que aunque no se vea fácilmente la dependencia lineal que existe entre las filas o las columnas, lo que importa es que el determinante de orden tres da cero. (21-23)

[15.1] Aclararles que no se puede hablar de determinante de A , porque A no es una matriz cuadrada, pero que van a calcular el determinante de la submatriz de A de orden tres para estudiar el rango de A (A es de orden 4×3). (43-45)

[15.1] Hacerles notar que como A no es una matriz cuadrada (A es de orden 4×3), entonces no está hablando en este caso del determinante de A , sino del determinante de la submatriz de A de orden 3. (53-55)

[15.1] Hacerles notar que ahora (el apartado d) del ejercicio) se trata de un sistema homogéneo de 3×4 , para que noten que el orden de este sistema es contrario al del anterior (4×3). (74-76)

[15.1] Aclararle a E1 que si el rango de la matriz A no es el rango máximo, es decir, el rango $A < \text{número de incógnitas}$, eso no significa que el sistema sea incompatible. (84-86)

[15.1] Aclararle a E1 que un sistema homogéneo nunca va a ser incompatible y que lo que tienen que ver es si es determinado o indeterminado. (87-89)

[15.1] Traducir/interpretar lo que está pensando E1 y responderle. En este caso E1 pregunta que si el sistema homogéneo es incompatible, pero al justificar E1 su respuesta (E1 dice que es incompatible porque el rango de A va a ser menor que el número de incógnitas), Aly interpreta que E1 lo que intenta decir es que el sistema homogéneo va a salir compatible indeterminado. (90-92)

[15.1] Volver a remarcarle a E1 que el sistema será compatible (y no incompatible que era lo que él decía antes). (93)

[15.1] Decirles la estrategia de solución, pues ya han hecho varios ejercicios equivalentes (básicamente tienen una estrategia de solución similar a este). Decirles: *Bueno pues lo mismo de siempre, empezamos a estudiar el rango de la matriz de coeficientes.* (94-95)

[15.1] Hacerles notar que en este ejercicio (sistema homogéneo) se trata de un SCI con un parámetro para que los estudiantes tengan una idea de cómo se va a solucionar ese sistema. (115-118)

[15.1] Comentarles otra parte de la estrategia de solución (quedarse con las ecuaciones del menor que garantiza rango 3 y desplazar la t a la derecha). (119-122)

[15.1] Hacerles notar que ahora se trata de resolver un sistema con tres incógnitas y un parámetro y les comenta a la vez que ya saben también el valor del determinante, para luego preguntarles qué método será conveniente usar para resolver el sistema. Aly quiere escuchar Cramer pero no le contestan eso, Aly insiste para ver si le dicen Cramer pero nada. (129-140)

[15.1] Hacerles notar que a pesar de que se trata de un SCI, al pasar la t como parámetro queda un sistema de 3×3 con determinante distinto de 0 y entonces se puede usar la regla de Cramer. (143-155)

[15.1] Remarcarles que la regla de Cramer comúnmente se usa en SCD pero que en este caso se aplicará la regla de Cramer para este SCI con un parámetro. (150-155)

[15.1] Hacerles notar que en ejercicios anteriores les quedan sistemas de 2×2 que eran fáciles de resolver por reducción, pero que ahora hay que usar otro método. Aly trata de promocionar los métodos para resolver sistemas que han visto en este bloque de Álgebra y que vean que éstos pueden ser más “cómodos”, es decir, más prácticos para resolver sistemas de ecuaciones, por ejemplo, la regla de Cramer. (174-176)

[15.2] Hacerles notar que existe rango 2 aunque en otro menor de una submatriz que no habían tomado anteriormente en clase (Aly: ... *con la submatriz de orden 2 formada por los 2 últimos elementos de la segunda y tercera fila y de la segunda y tercera columna vemos que hay rango 2 ¿os fijáis?*). Comúnmente en los ejercicios anteriores obtenían rango dos con la submatriz formada por los dos primeros elementos de la primera y segunda fila y columna. (224-228)

[15.2] Decirles parte de la estrategia a seguir al hacer este tipo de ejercicios, una vez que se tiene el valor del determinante en términos del parámetro, hay que ver para qué valores ese determinante se hace cero. (232-234)

[15.2] Decirles la estrategia para solucionar el problema. Analizar a) Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4$, b) Si $a = 2$ y c) Si $a = -3/4$. (244-250)

[15.2] Hacerles notar lo que han hecho y lo que van a hacer ahora (situarlos para luego continuar), (Aly: *Entonces ya tenemos la solución para el caso en que $a \neq 2$ y $a \neq -3/4$. Bueno y ¿qué vamos a hacer ahora? Pues vamos a estudiar qué pasa si a vale 2*). (294-297)

[15.2] Hacerles notar que cuando calcularon el determinante de la matriz A y vieron para qué valores ese determinante vale cero, precisamente encontraron que uno de esos valores es $a = 2$, entonces A no puede tener rango 3 pero sí rango 2, lo cual se puede ver con el determinante de la submatriz de orden 2 formada por los dos primeros elementos de las dos primeras filas y columnas, que es distinto de 0. Y que por tanto lo que hay que averiguar es el rango de la ampliada. (301-328)

[15.2] Volver a remarcarles que ya tienen hecho el determinante de A y que por ello ya no es necesario calcular ese determinante, porque el que les queda por hacer es el

determinante de la matriz ampliada (con la columna de los términos independientes). (336-341)

[15.2] Comentarles lo que van a hacer, evocando a lo que acaban de hacer (con $a=2$), es decir, evocando al procedimiento equivalente para que los estudiantes tengan una idea de lo que van a hacer ahora. (Aly: *Bueno si $a=-3/4$, vamos a empezar a hacer lo mismo, vamos a empezar con la matriz ampliada*). (349-350)

[15.2] Remarcarles nuevamente que no es necesario volver a calcular el determinante de la matriz A porque ya saben que da cero. Pero que lo que si necesitan es garantizar que A tiene rango 2, luego les muestra con dos submatrices de A que existe rango 2. (357-365)

[15.2] Hacerles notar que también podrían trabajar con el menor que comúnmente han trabajado en ejercicios anteriores pero que ahora tomará otro menor. En este caso Aly, a diferencia de otras ocasiones, toma una submatriz diferente, normalmente siempre toma la submatriz de orden 2 formada por las primeras dos filas y columnas y ahora tomó la submatriz de orden 2 formada por los dos elementos de la segunda y tercera filas y columnas. (368-373)

[15.2] Decirles esta estrategia de solución: *si me da que va a tener rango 3 –la matriz ampliada- pues sería incompatible pues el rango de A es 2, que no, pues entonces hay que resolver*. Es decir, Aly les comenta lo que hay que hacer para dar respuesta a ese ejercicio. (376-380)

[15.2] Hacerles notar que pueden tomar un menor u otro para estudiar el rango de la matriz (siempre y cuando el menor cumpla que su determinante sea distinto de cero), pero lo importante es estudiar el rango. (390-397)

[15.2] Saber qué dejarles de deberes (ejercicios sobre temas que han visto, para que practiquen y repasen los últimos temas vistos en clase). (398-401)

En términos del **conocimiento curricular**, podemos destacar lo siguiente:

[11.2.1] Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. Saber que la regla de Cramer viene en el libro de texto, en la página 102. (214-220)

[12.2] Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. En este caso, saber que este tema (Uso de la regla de Cramer en un SCI) viene en el libro de texto. (110-112)

[12.2] Saber que el significado de orlar en una matriz, viene en el libro de texto. (137-140)

En términos del **conocimiento pedagógico general**, podemos destacar lo siguiente:

[11.1] Incitarlos a que hagan los deberes y así no tengan tanto problema cuando hagan el examen. (72-73)

[11.2.2] Animarlos a que en la demostración de la regla de Cramer, aunque vean que en apariencia tienen que calcular un determinante muy amplio ($|A_x|$ expresado en la primera columna con combinaciones lineales), cuentan con propiedades de los determinantes para calcularlos más rápido. (329-331)

[11.2.2] Preguntarles a los estudiantes *¿qué pasa?* cuando los ve con cara de duda. (332)

[11.2.2] Animarlos a seguir haciendo la demostración, que no se espanten porque en apariencia vean que el determinante que está quedando $|A_x|$ es muy amplio. (370)

[11.2.2] Animarlos al hacerles ver que en un principio es largo de escribir el $|A_x|$, pero luego hay tres determinantes que dan 0 y entonces sólo les queda uno menos extenso. (417-419)

[11.2.2] Nuevamente animándolos para que hagan la demostración de la regla de Cramer. (Aly: *Sé que no es lo más agradable –hacer la demostración- pero porque veáis esto no pasa nada, no.* Aly 11, p.10). (441-442)

[14.1] Invitarlos a que practiquen y hagan los ejercicios. Aly un poco molesta de tanta pregunta les pide que en lugar de hablar y hablar, de preguntar y preguntar qué pasaría si... y qué pasaría si..., se pongan a hacer los ejercicios (a practicar), es decir, menos hablar y más hacer. (264-267)

[15.1] Acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho. Hacer algunas preguntas a los estudiantes para mantener la atención de los estudiantes y saber los procedimientos que ellos usaron y los resultados que ellos obtuvieron en los dos apartados de ese problema. (1-218)

[15.1] Una forma de motivar a los estudiantes a hacer un ejercicio (Aly: *... ese es el sistema que nos queda para resolver, ¿cómo se resuelve esto ahora?, de estos no hemos hecho ninguno*). (124-126)

[15.1] Hacerles ese comentario, puede ser una motivación para que los estudiantes vean que este apartado del ejercicio es interesante (Aly: *¿Este ejercicio nadie lo ha terminado verdad?*, Es: *No*, Aly: *Pues este es interesante ¡eh!*). (189-191)

[15.2] Acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho. Hacer algunas preguntas a los estudiantes para mantener la atención de los estudiantes y saber los procedimientos que ellos usaron y los resultados que ellos obtuvieron en el primer apartado de este ejercicio. (219-401)

[15.2] Forma de preguntar sus dudas a los estudiantes (Aly: *¿Queda claro esto?*). (237)

[15.2] Forma de preguntar sus dudas a los estudiantes (Aly: *¿Esto lo entendéis todos?*). (311)

[15.2] Invitarlos a que no sólo vean los ejercicios sino que los hagan. Los motiva invitándolos a que los hagan para que se equivoquen y así aprendan. (398-401)