

Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas



El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso

**Memoria para optar al grado de doctora
presentada por:**

María Isabel Pascual Martín

Fecha de lectura: 14 de julio de 2021

Bajo la dirección de los doctores:

Luis Carlos Contreras González

Miguel Ángel Montes Navarro

Huelva, 2021



Universidad de Huelva

Departamento de Didácticas Integradas



Universidad
de Huelva

El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso.

Tesis Doctoral

María Isabel Pascual Martín

Dirigida por

Luis Carlos Contreras González

Miguel Ángel Montes Navarro

Huelva, 2021

Esta investigación ha sido desarrollada en el marco de los proyectos *Caracterización del conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas* (EDU2013-44047-P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España y *Conocimiento Especializado del profesorado de matemáticas y formación del profesorado (MTSK-TE)* (RTI2018-096547-B-I00), financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Tecnología.

Además, esta investigación ha sido desarrollada en el marco del grupo de investigación DESYM (HUM 0168), del Plan Andaluz de Investigación.

Finalmente, esta investigación se encuadra en la agenda de investigación del grupo SIDM de la Universidad de Huelva, en su grupo de trabajo sobre Conocimiento del Formador.

*A mis padres, por
apoyarme y creer en mí,
incluso cuando ni yo misma lo he hecho.*

Agradecimientos

Desde la tranquilidad de quien mira hacia atrás con el camino casi recorrido, no puedo dejar pasar la oportunidad de reconocer el trabajo, la compañía y el cariño, de todas las personas con las que he compartido este proceso de investigación en distintos niveles.

A mis directores, Luis Carlos y Miguel Ángel, gracias. Gracias a Luis Carlos por saber ver lo mejor de mí, por ser una fuente de energía constante y por un trabajo que ha traspasado con creces lo exigible a un director. Gracias, muchas gracias, por tu iniciativa en la dirección de mi Trabajo Fin de Máster, porque tengo la certeza de que no podría haber tenido un mejor acompañante desde entonces, y la casi seguridad de que este momento no hubiese llegado sin tu ayuda. A Miguel Ángel, por ser la exigencia, el esfuerzo y la brillantez, gracias. Gracias por todas las oportunidades y gracias por tu confianza. Gracias por adelantar un camino y por querer ayudar a los demás en él, por ser un referente. Hemos llegado hasta aquí los tres juntos y para mí es un orgullo poder decir que soy vuestra alumna, gracias por enseñarme tanto en tantos sentidos.

Llegamos los tres, pero no solos. A mis compañeros del área de Didáctica de las Matemáticas, a Pepe, Nuria, Juampe, Lorenzo y Myriam, gracias, parte de vosotros está en esta memoria, y ojalá esa parte fuese mayor. Gracias por ser generosos con vuestro tiempo, vuestras ideas y vuestro trabajo. He crecido, como investigadora y como formadora, con vuestro ejemplo y soy consciente de mi suerte.

A mis compañeros del Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía, que me recibieron como una más y que supieron transmitirme un sentido de Universidad muy especial que creó este *gusanillo* en mí, por vuestro inmejorable trato y por hacerme sentir en el trabajo como en casa, gracias.

A la comunidad nacional de investigadores en Educación Matemática, y en particular al grupo de jóvenes investigadores de la SEIEM, gracias. La cita anual de la agenda de la sociedad se ha convertido en una oportunidad que espero con ilusión y de la que siempre vuelvo con muchos proyectos. Sentirme parte de esa comunidad ha sido un impulso a mi carrera investigadora y compartir trabajos con sus integrantes, una fuente de motivación.

En el desarrollo de una investigación de tesis, hay personas con las que compartes una parte muy concreta de tus preocupaciones y con las que te sientes muy cercana. A los ya doctores en distintas áreas, mis compañeros y amigos, María, Any, Diego Armando, Linda, Priscila, a quienes siguen en el camino y quienes me acompañaron en sus inicios,

Milena y Eric, gracias. El camino que hemos compartido y las experiencias que hemos vivido juntos, siempre estarán en mi corazón, aunque nuestros caminos nos lleven a distintos lugares, geográficos y de investigación. Gracias por comprender mis desvelos, por impulsarme siempre a seguir adelante. Sois una de las cosas más bonitas que me llevo de estos años en los que no todo han sido alegrías, pero que hoy podemos celebrar juntos.

A Rocío, por serlo todo a la vez, gracias. Mi casi-también-directora, mi compañera de trabajo, de doctorado y de vida. Gracias por haber sido tantas cosas que no sepa dónde agradecerle todo lo que me has dado, gracias por ser tú. Hoy estoy cerrando un capítulo que hace poco cerraste tú y sólo espero que el resto del camino lo recorramos juntas. No entendería los últimos años sin tu compañía, tus preocupaciones y tus riñas, y no sólo en lo que se refiere al desarrollo de la tesis. Sería injusto para nuestra amistad no agradecerle haber sido un soporte vital en tantos momentos, gracias, muchas gracias.

Gracias también a Raquel, Adrián, Olvido, Joaquín, Mónica y Antonio. Por no cansaros de preguntarme qué estaba haciendo, cuánto me quedaba, qué venía después y cómo me sentía, a pesar de que ya hubiera respondido esas preguntas. Gracias porque, a pesar de no entender en algunos momentos lo que estaba sucediendo, nunca habéis dudado de que sería capaz de hacerlo. Por vuestra confianza ciega y vuestro amor incondicional, muchas gracias. Por ser mi refugio y mi paréntesis, y porque vuestra simple presencia ha servido para reiniciarme cuando más falta me ha hecho. No sería yo sin vosotros y desde luego, no habría sido capaz de continuar.

Gracias también a mi familia, mis pilares fundamentales. A mi Tata, que es una parte de mí misma que siempre me acompaña. Teniéndote a ti sé que tengo cuatro manos, dos cabezas y dos corazones. Nunca ha habido un no de tu parte, la forma en la que te entregas y la manera en la que sabes qué es lo que necesito ha sido imprescindible para llegar a este momento. A mi hermano, gracias, porque siempre está presente aun no pudiendo estar cerca, por darme la tranquilidad de que si algo sale mal, siempre estará ahí para ayudarme. Por tus bromas, tu complicidad y tu forma de escucharme, gracias Juan Antonio. A mis padres que han hecho de mí lo que soy hoy. Gracias mamá por ser mi ejemplo de lucha y superación, por empujarme y darme siempre un motivo para salir adelante. Gracias papá por ser nuestra red, por tu sacrificio y tu amor, por tu forma de entenderme y por no dejarme caer. No hay palabras con las que pueda describir todo lo que valoro lo que habéis hecho por mí, este éxito también es vuestro.

ÍNDICE

MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	11
CAPÍTULO I: PILARES TEÓRICOS PARA LA FUNDAMENTACIÓN	15
1.1 Introducción	17
1.2 El formador de profesores de matemáticas	18
1.3 El contenido de la formación inicial de maestros de matemáticas	20
1.3.1 El conocimiento útil para enseñar matemáticas	22
1.3.2 Habilidades, competencias y prácticas profesionales	27
1.3.3 Ser y sentirse maestro	28
1.4 Antecedentes de investigación en relación con el conocimiento del formador	29
1.4.1. El conocimiento del profesor como parte del conocimiento del formador.....	30
1.4.2 El conocimiento sobre cómo enseñar a enseñar.....	37
1.4.3 Estándares de la Asociación de formadores de profesores	42
1.5 Síntesis de las aportaciones teóricas y preguntas abiertas	44
CAPÍTULO II: PROCESO METODOLÓGICO	47
2.1 Pregunta y objetivos de investigación.....	49
2.2 Caracterización del estudio	51
2.3 Enfoque metodológico	52
2.4 Diseño de investigación: estudio de caso.....	54
2.4.1 Descripción del caso	54
2.5 Técnicas de recogida de la información.....	60
2.6 Técnicas de análisis de la información	61
CAPÍTULO III: ANÁLISIS DE LOS DATOS	63
3.1 Análisis de la observación de aula Ob-07/10.....	65
3.2 Análisis de la observación de aula Ob-11/10.....	76
3.3 Análisis de la entrevista con el formador En-S.....	85
3.4 Análisis de la observación de aula Ob-18/10.....	91
3.5 Análisis de la observación de aula Ob-21/10.....	100
3.6 Análisis de la observación de aula Ob-25/10.....	109
3.7 Análisis transversal de las evidencias de conocimiento del formador.....	115
3.7.1 Respecto al conocimiento del contenido de la formación.....	115
3.7.2 Respecto al conocimiento didáctico del contenido de la formación.....	125
CAPÍTULO IV: DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES	131
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. <i>El conocimiento de la formación inicial de maestros de matemáticas.....</i>	22
Figura 2. <i>Estructura del conocimiento especializado MTSK (Carrillo et al., 2018)</i>	24
Figura 3. <i>Modelo de competencia docente como un continuo (Blömeke et al., 2015)</i>	27
Figura 4. <i>Triángulo de enseñanza del formador (Zaslavsky y Leikin, 2004)</i>	31
Figura 5. <i>Tetraedro del conocimiento del profesor (Prestage y Perks, 1999)</i>	33
Figura 6. <i>Tetraedro del conocimiento del formador (Perks y Prestage, 2008)</i>	33
Figura 7. <i>El conocimiento matemático para formar profesores (Castro-Superfine et al., 2020) .</i>	34
Figura 8. <i>Conocimiento en la formación de profesores (Jaworski, 2008)</i>	36
Figura 9. <i>El conocimiento didáctico del formador de maestros (Escudero-Ávila et al., 2021)....</i>	41
Figura 10. <i>Organización de los indicadores del Estándar 1: Enseñanza, de la ATE</i>	43
Figura 11. <i>Organización de los referentes teóricos y red de preguntas</i>	45
Figura 12. <i>Interpretación de las herramientas de la Grounded Theory</i>	53
Figura 13. <i>La formación en Didáctica de las Matemáticas en el Grado de Educación Primaria en la Universidad de Huelva</i>	56
Figura 14. <i>Herramientas fijas de Geogebra usadas en el aula</i>	65
Figura 15. <i>Ejemplos seleccionados para la construcción de la definición de polígono</i>	91
Figura 16. <i>Ejemplos de polígonos para identificar criterios de clasificación</i>	109
Figura 17. <i>Organización de las evidencias de conocimiento del contenido de la formación inicial de maestros</i>	116
Figura 18. <i>Relaciones entre el MTSK del formador y del maestro</i>	121

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. <i>Estructuración de un bloque de una asignatura con MTSK</i>	26
Tabla 2. <i>Marco de conocimiento didáctico del contenido aplicable al formador (Chick y Beswick, 2018)</i>	39
Tabla 3. <i>Objetivos, y conocimiento en su base, de la asignatura observada.</i>	57
Tabla 4. <i>Sesiones videograbadas y contenido abordado.....</i>	60
Tabla 5. <i>Síntesis de las evidencias de conocimiento Ob-07/10</i>	75
Tabla 6. <i>Síntesis de las evidencias de conocimiento Ob-11/10</i>	84
Tabla 7. <i>Síntesis de las evidencias de conocimiento En-S.....</i>	90
Tabla 8. <i>Síntesis de las evidencias de conocimiento Ob-18/10</i>	99
Tabla 9. <i>Síntesis de las evidencias de conocimiento Ob-21/10</i>	108
Tabla 10. <i>Síntesis de las evidencias de conocimiento Ob-25/10</i>	114
Tabla 11. <i>Evidencias de conocimiento matemático del formador.....</i>	116
Tabla 12. <i>Evidencias de conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas</i>	119
Tabla 13. <i>Evidencias de conocimiento de prácticas profesionales docentes</i>	122
Tabla 14. <i>Evidencias de conocimiento sobre identidad profesional docente.....</i>	123
Tabla 15. <i>Categorías de conocimiento del contenido del formador</i>	124
Tabla 16. <i>Evidencias de conocimiento didáctico del contenido matemático del formador</i>	125
Tabla 17. <i>Evidencias de conocimiento didáctico del contenido didáctico del formador</i>	127
Tabla 18. <i>Evidencias de conocimiento del programa de formación inicial</i>	129
Tabla 19. <i>Categorías de conocimiento didáctico del contenido de la formación</i>	129
Tabla 20. <i>Categorías de conocimiento didáctico del contenido de la formación</i>	136

MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio del conocimiento del formador de maestros constituye un reto de la investigación en Educación Matemática en la actualidad. Desde mi punto de vista personal, como formadora de maestros en el aula de formación inicial, detenernos a comprender cómo se estructura este tipo de conocimiento en su complejidad es indispensable. Hay preguntas que, si reflexiono con detenimiento, sé responder como, por ejemplo, qué tipo de maestros quiero que sean mis alumnos o qué conocimiento quiero que construyan y que relacionen. Sin embargo, he tenido más dificultad al cambiar el foco de mis preguntas y pensar en qué tipo de formadora soy yo o qué conocimiento me permite ayudar a mis alumnos en su proceso de profesionalización docente. Siempre he pensado que, si soy capaz de construir buenos ejemplos con mis estudiantes o si soy capaz de hacer que comprendan cómo utilizar un recurso de enseñanza o cómo diseñar una actividad desde el conocimiento especializado de las matemáticas, de forma que sea relevante para ellos como futuros docentes, con suerte, dentro de cinco o seis años cuando sean maestros en un colegio, habrá un poco de mí en ese colegio. Esta tesis está motivada, en primera instancia, por la responsabilidad personal que supone formar parte de la comunidad educativa y por el compromiso social que entiendo que conlleva. Hay preguntas que necesito responder y, a pesar de que no es un trabajo transformador de la realidad -me bastaría con llegar a comprenderla-, es un trabajo que sin duda me transforma a mi como formadora de maestros.

Cuando comenzó mi andadura como formadora, lo que tenía a mi disposición eran los mismos materiales con los que mis alumnos iban a trabajar, los que formaban parte de la bibliografía recomendada del curso, y compañeros con más experiencia cuyas clases podía visitar como oyente y con los que compartía ratos de charla informal llenos de preguntas. No es un comienzo distinto al de otros compañeros de profesión, pero ¿cómo puede ser ese el conocimiento del formador? Con el paso del tiempo soy capaz de reconocer la influencia de mis compañeros en mi labor como formadora, también puedo ya observar cambios en mi conocimiento, derivados de la experiencia de estos últimos años, y puedo reconocirme trasladando ideas derivadas de mi trabajo como investigadora en Didáctica de las Matemáticas al aula de formación inicial; sin embargo, sigue habiendo preguntas que no sé responder, pero sé que mis preocupaciones son compartidas.

Los trabajos sobre el conocimiento necesario para enseñar a los maestros constituyen una línea de investigación poco desarrollada (Beswick y Goos, 2018; Chapman, 2008; Masingila *et al.*, 2018; Smith, 2003; Tzur, 2001), sobre todo considerando la expansión que han tenido los trabajos sobre conocimiento profesional docente en diferentes etapas durante las últimas décadas. Aún con ello, esta línea de investigación ha ido ganando interés hasta considerarse un campo de investigación emergente (Beswick y Chapman, 2013; Even, 2008; Jaworski y Huang, 2014). El formador de maestros es una pieza clave en la mejora de la Educación Matemática, en tanto que es uno de los actores principales en la formación inicial y permanente de los maestros que se encargarán de enseñar matemáticas (Jaworski, 2008). La influencia del formador de maestros, en la formación inicial y permanente, se entiende como una analogía de la reconocida relación que hay entre el conocimiento y la actuación del profesor de matemáticas y el éxito de sus estudiantes en las distintas etapas.

La falta de evidencia de investigación sobre el formador tiene su origen en que los trabajos que hacen referencia a la formación de maestros, a menudo ponen el foco en cómo es el contenido de la formación o cómo aprenden los estudiantes para maestro, pero rara vez en el formador de maestros o en su conocimiento (Cochran-Smith, 2005; Even, 2014). A su vez, la mayoría de los trabajos en relación con el conocimiento del formador surgen del análisis de la propia práctica del formador y de su reflexión estructurada (Adler *et al.* 2005; Gellert *et al.* 2013), lo que reduce los resultados de investigación únicamente a los formadores de maestros que publican artículos de investigación.

Asimismo, avanzar en la investigación sobre cómo es el conocimiento del formador puede servir para diseñar programas de formación de formadores y favorecer el relevo generacional en este colectivo. Responder a la pregunta ¿cómo se estructura el conocimiento del formador? nos acerca a poder responder la pregunta ¿qué debería conocer?, como guía para el diseño de programas de formación de formadores (Goodwin *et al.*, 2014).

Estamos entonces ante una problemática de investigación que se muestra necesaria, por su poca presencia en la literatura de investigación; relevante, por la importancia del formador en los procesos de formación de maestros; y, aplicable, desde el punto de vista de la formación de formadores y la selección de formadores.

Para dar respuesta a la pregunta de cómo es el conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial hemos formulado la investigación a través de un proceso

metodológico top-down, bottom-up (Grbich, 2003). Este presupuesto supone una primera revisión teórica de antecedentes en relación con el tema de investigación que se desarrollan en el Capítulo I. Las características de los distintos perfiles de formador de maestros (Even, 2008; 2014), unidas a la heterogeneidad de los programas de formación inicial (Watson y Mason, 2007, Sánchez y García, 2008) sirven como punto de partida de nuestra revisión teórica, que culmina con los avances que se han hecho en la línea de conocimiento del formador de maestros a nivel internacional.

En el Capítulo II, centrado en la descripción metodológica del estudio, se desganan la pregunta y los objetivos de investigación concretos que han guiado el proceso de recogida de información. Como el objetivo es comprender una realidad concreta, tomamos un posicionamiento interpretativo y hemos escogido el estudio de caso instrumental como diseño de investigación (Bassey, 1999, Stake, 2000), con el fin de poder proponer un marco de organización del conocimiento que pueda aplicarse a otros formadores. En la descripción del caso, se incluye información tanto del informante como del contexto en el que se desarrolla la formación inicial. A través de las técnicas de observación no participante (Flick, 2007) y entrevista con el formador, pretendemos recolectar distintas evidencias con origen en la realidad de la investigación que sustenten categorías de conocimiento del formador en línea con los presupuestos de *grounded theory* (Strauss y Corbin, 1990).

El proceso de investigación diseñado en el Capítulo II se desarrolla en el Capítulo III a través del análisis de los datos obtenidos, que se presenta secuenciado y que se sintetiza finalmente con una lectura transversal de los mismos, para mostrar el proceso de refinamiento de las categorías de conocimiento. Este análisis constituye la etapa bottom-up de la investigación.

El Capítulo IV, de discusión de los resultados y conclusiones, pretende enmarcar los resultados obtenidos en el entretejido de las investigaciones sobre el conocimiento de formador y pretender ser el cierre que muestra nuestra comprensión de la realidad observada. Este capítulo contempla también la revisión crítica del proceso de investigación y abre camino a posibles líneas de investigación derivadas de los avances que proponemos en la caracterización del conocimiento del formador de maestros en formación inicial.

CAPÍTULO I: PILARES TEÓRICOS PARA LA FUNDAMENTACIÓN

Organización del capítulo

1.1 Introducción

1.2 El formador de profesores de matemáticas

1.3 El contenido de la formación inicial de profesores

1.3.1 El conocimiento útil para enseñar matemáticas

1.3.1.1. El modelo MTSK como estructurador del conocimiento que se construye en formación inicial

1.3.2 Habilidades, competencias y prácticas profesionales

1.3.3 Ser y sentirse maestro

1.4 Antecedentes de investigación sobre el conocimiento del formador

1.4.1. El conocimiento del profesor como parte del conocimiento del formador

1.4.2. El conocimiento sobre cómo enseñar a enseñar

1.4.3. Estándares de la Asociación de formadores de profesores

1.5 Síntesis de las aportaciones teóricas y preguntas abiertas

1.1 Introducción

Para dar respuesta a la pregunta de investigación de esta tesis, incluimos una síntesis relacionada de lecturas que han permitido estructurar nuestra mirada hacia la observación de la práctica del formador.

Este capítulo comienza con la reflexión de qué entendemos por formador de maestros de matemáticas. Asumiendo la variedad de perfiles de profesionales que intervienen en la formación de maestros (Beswick y Chapman, 2012; Coles, 2014; Halai, 1998; Lin y Acosta-Tello, 2017; Jaworski y Huang, 2014; Palhares *et al.*, 2009; Sztajn, Ball y McMahon, 2005; Zaslavsky y Peled, 2008), desde la etapa de formación inicial hasta la etapa de formación continua, centramos nuestra atención en el formador que gestiona asignaturas directamente relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la formación inicial de maestros de Educación Primaria. Esta aclaración terminológica es pertinente puesto que las distintas acepciones de formador que encontramos en la literatura de investigación (Even, 2008; 2014), sitúan el foco de análisis de conocimiento del formador en diferentes aspectos.

Para comprender el conocimiento del formador de maestros en formación inicial, recurrimos al estudio del contenido de la formación inicial de maestros, con el objetivo de comprender cuál es el objeto de enseñanza con el que trabaja el formador. Hemos tomado los ámbitos de desarrollo profesional propuestos por Ponte (2012): conocimiento, práctica profesional e identidad profesional, para caracterizar un contenido que se reconoce heterogéneo. En este sentido, entendemos que podemos encontrar conocimiento del formador respecto a qué conocimiento le es útil al maestro para enseñar matemáticas (Carrillo *et al.*, 2018), conocimiento relacionado con cómo se desarrollan competencias profesionales, como el diseño de clases (Blömeke *et al.*, 2008) o ligadas a la mirada profesional (Fernández *et al.*, 2018), entre otras; y, conocimiento sobre cómo se construye la identidad profesional docente.

Por último, cerramos el capítulo incluyendo trabajos previos en relación con el conocimiento del formador (Beswick y Chapman, 2012; Chick y Beswick, 2018; Perks y Prestage, 2008; Zaslavsky y Leikin, 2004; Zopf, 2010). El objetivo de este análisis es doble. De un lado nos coloca en el punto de partida sobre el que comenzar a trabajar y desde el que podemos contribuir en concreción y aporte de evidencias. De otro lado, sirve para identificar, desde el análisis de las perspectivas de investigaciones anteriores, cuáles son las necesidades de investigación en la línea de conocimiento del formador.

1.2 El formador de profesores de matemáticas

Uno de los retos de la investigación sobre el formador de profesores de matemáticas está en la propia definición de formador, ya que está cargada de matices que engloban a un grupo heterogéneo de profesionales (Even, 2008; 2014). Los trabajos de investigación en relación con el formador de profesores reflejan esta heterogeneidad mediante la utilización de distintos términos, para referirse a formadores entre los que se pueden establecer sutiles diferencias. Entre los términos más utilizados encontramos *teacher trainer* (Palhares *et al.*, 2009), *didactician* (Coles, 2014), *mentor* (Halai, 1998; Lin y Acosta-Tello, 2017), *mathematics teacher educator* (Beswick y Chapman, 2012, 2013; Jaworski y Huang, 2014), *mathematics educator* (Zavlavsky y Peled, 2008), *professional developers* (Elliot, 2005), y *teacher developers* (Sztajn *et al.*, 2005).

Por ejemplo, con la utilización del término *didactician* (Coles, 2014), se hace referencia a aquellos formadores cuya especialización está en el estudio y la investigación en Educación Matemática (Coles, 2014; Jaworski y Gellert, 2003). Sería uno de los más afines al perfil de formador universitario español en la etapa de formación de maestros, en la mayoría de los casos, que combina el trabajo de investigación en educación matemática con su labor como profesor en formación inicial. No obstante, la formación inicial de profesores contempla siempre, en el contexto español, un periodo de prácticas en centros escolares, independientemente de la etapa de Educación Infantil, Primaria o Secundaria, donde cobra importancia la figura del *mentor* (Halai, 1998; Lin y Acosta-Tello, 2017). El *mentor*, que podemos traducir como el tutor de prácticas en los centros escolares, es considerado formador de profesores en tanto que propicia el desarrollo profesional de sus alumnos en prácticas, que deben conectar los saberes teóricos aprendidos en la universidad con la realidad de aula (Jaworski y Gellert, 2003). Esto es así, aunque, en ocasiones, no se trata de especialistas en el contenido matemático, pero sí en el saber práctico de la experiencia de aula (Lin y Acosta-Tello, 2017).

Una de las consecuencias de esta distinción y de la variabilidad de términos utilizados, está, por ejemplo, en la dificultad que tienen los formadores universitarios y los tutores de prácticas para reconocerse como miembros de un grupo que comparte profesión, la de formar estudiantes para maestro (Even, 2014). Esta falta de percepción de la pertenencia a un mismo colectivo se extiende a otros agentes que participan en la formación de profesores y supone uno de los retos para conformar una *comunidad de práctica* entre los formadores, en el sentido de Wenger (1998).

Los matices entre *mathematics teacher educator* (Beswick y Chapman, 2012, 2013; Jaworski y Huang, 2014) y *mathematics educator* (Zavlavsky y Peled, 2008) pueden situarse en el interés de los investigadores que los utilizan por resaltar alguno de los conocimientos (didáctico-matemático o matemático) que conforman el conocimiento del formador de profesores, con independencia de que se consideren en uno u otro contexto de instrucción o en uno u otro momento del desarrollo profesional de los profesores. Por otra parte, los términos *professional developers* (Elliot, 2005), *teacher developers* (Sztajn *et al.*, 2005), que enfatizan en el desarrollo profesional (excluyendo la etapa inicial) se utilizan en contextos en los que se trabaja con profesores en servicio. Ambos sirven para designar agentes externos que participan puntualmente en el desarrollo profesional del profesor, que en nuestro contexto podría asemejarse con los profesionales de los centros de profesorado (CEP).

En un sentido amplio, podemos considerar que los formadores son aquellos que trabajan con profesores facilitando el desarrollo de su conocimiento profesional para la enseñanza (Amador, 2021). Esta definición sitúa la reflexión en dos aspectos clave que nos permitirán posicionarnos sobre qué vamos a considerar como conocimiento profesional para la enseñanza y como desarrollo profesional. Consideramos que el conocimiento profesional del profesor se sustenta sobre el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido (Ball *et al.*, 2008; Carrillo *et al.*, 2018; Godino, 2009; Rowland *et al.*, 2009), lo que implica que en el caso de los formadores de profesores de matemáticas¹ vamos a considerar el conocimiento y el desempeño profesional del formador en relación con las matemáticas y su enseñanza como variable definitoria. En el contexto español, al igual que en otros países, los formadores de profesores pueden ser profesores universitarios o profesores de Secundaria o Primaria. Esta distinción puede suponer diferencias en la formación académica y en las experiencias de cada tipo de formador, pero no serán foco de discusión en este trabajo. De igual forma, teniendo en cuenta que el desarrollo profesional del profesor incluye la formación inicial (Carrillo *et al.*, 1999) además de la formación continua, entenderemos como formadores a aquellos profesionales que acompañan a los profesores en las distintas etapas de su desarrollo. Este posicionamiento abre el término formador a profesionales ligados a las instituciones

¹ Esta concreción, en relación con el formador de profesores de matemáticas, no implica que se niegue la influencia de otros formadores en el aprendizaje de los estudiantes para maestro, de la misma forma que el estudio focalizado en el conocimiento del profesor de matemáticas no excluye la interacción con otras formas de conocimiento provenientes de disciplinas como la Organización Escolar o la Pedagogía General.

universitarias, pero también a otros que en contextos no formales contribuyen de forma sistemática al desarrollo profesional del profesor.

Considerar las características de cada perfil de formador puede servir para comprender el conocimiento que moviliza en su aula o que emerge de las reflexiones sobre su práctica y supone una variable complementaria a tener en cuenta desde el punto de vista de la investigación. No obstante, la existencia de distintos perfiles de formador no debe suponer un obstáculo para reflexionar sobre el conocimiento del formador de profesores. Más bien, considerar las posibles aportaciones de cada uno de los perfiles, nos puede acercar a una descripción de máximos en relación con el conocimiento útil para enseñar a enseñar.

Un último aspecto clave sobre el que debemos reflexionar, cuando pensamos en el formador, está relacionado con las distintas naturalezas de los programas de formación de profesionales de la enseñanza en las distintas etapas educativas. Nuestro interés se centra en la comprensión del conocimiento del formador de maestros de Educación Primaria, que enseñarán matemáticas, entre otras asignaturas. Somos conscientes de las particularidades que esto conlleva, que son pensar en un programa de formación concreto, orientado desde sus inicios a la enseñanza, y centrarnos en una única faceta del conocimiento del maestro generalista, la de su papel como maestro de matemáticas. En adelante, para ceñirnos al contexto de la investigación, entenderemos el formador como formador de maestros y a los estudiantes para maestro como futuros maestros de matemáticas.

1.3 El contenido de la formación inicial de maestros de matemáticas

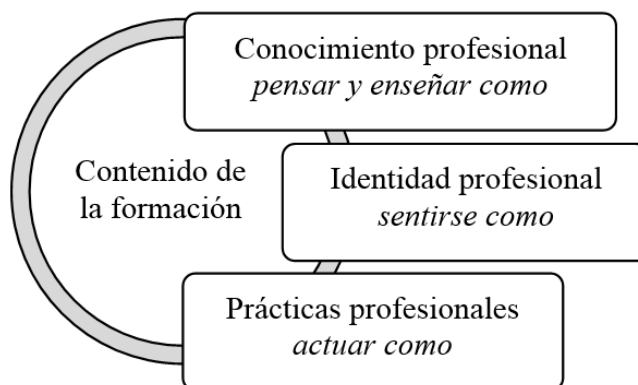
La respuesta a las preguntas “¿Qué necesitan aprender los estudiantes para maestro (EPM) para enseñar matemáticas?” y, “¿Cómo lo aprenden?” no es inmediata y está mediada por nuestra visión de cómo son las matemáticas, que determina la forma en la que conceptualizamos su enseñanza y aprendizaje, tanto como profesores como como formadores (Thompson, 1984; Lerman, 1990; Schiffer, 1997). Además, tiene que ver con nuestras creencias sobre qué es un maestro, más allá de su conocimiento. La formación inicial de maestros es, en consecuencia, heterogénea en cuanto a su estructura y contenido (Watson y Mason, 2007, Sánchez y García, 2008). No obstante, detenernos a reflexionar sobre las preguntas anteriores y a estructurar cómo es el contenido de la formación de maestros en cada contexto, nos sirve como antesala para acceder al conocimiento del

formador, que debe ser aquel que le permita desarrollar el contenido que construye con sus alumnos.

Durante la formación inicial, los estudiantes para maestro deben hacer conexiones entre las ideas teóricas que se desprenden del campo de la Educación Matemática -teorías, modelos, dificultades en torno a un tópico- y la puesta en práctica de esas ideas en los diseños y planificaciones docentes. Sin embargo, no es realista que sea responsabilidad de los estudiantes para maestro hacer esas conexiones. Es el formador de maestros quien está al tanto de las teorías más relevantes en Educación Matemática, así como de los resultados de investigación más recientes y de las prácticas y recursos que facilitan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Jaworski y Huang, 2014); y es éste, quien asume el reto de que los EPM puedan llevar a la práctica de aula su propia interpretación de dichas teorías (Jaworski, 2001). A partir de esta idea, podríamos identificar distintos cuerpos de saberes del formador: aquél que se corresponde con los conocimientos de investigación en el área; aquél que le permite hacer la traslación de ese conocimiento al aula de formación inicial; y aquél que le permite evaluar la idoneidad de los diseños de sus EPM. A partir de esta identificación podríamos empezar a vislumbrar posibles ámbitos de conocimiento del formador, que se mueve a distintos niveles, relacionados con la investigación, la enseñanza en formación inicial y la enseñanza en Educación Primaria. Asimismo, en consonancia con Ponte (2012), consideramos que el contenido de la formación inicial de maestros se articula en torno a tres grandes ejes: conocimiento profesional, prácticas de enseñanza e identidad profesional (Figura 1). Así, encontramos otra posible fuente de acceso al conocimiento del formador: la de la conformación de la identidad profesional de los EPM. Esta conceptualización implica que el formador tendría que poseer conocimiento que le permitiese: *enseñar a pensar como un profesor, enseñar a conocer como un profesor, enseñar a sentirse como un profesor y enseñar a actuar como un profesor* (Feiman-Nemser, 2008, pp. 698) y por tanto, el estudio del conocimiento que se construye en la formación inicial de maestros, de las prácticas profesionales que se desarrollan en la etapa y de los procesos de conformación de la identidad profesional, se tornan un punto de partida rico para iniciar nuestra investigación.

Figura 1.

El contenido de la formación inicial de maestros de matemáticas.



1.3.1 El conocimiento útil para enseñar matemáticas

Al comenzar la formación inicial, los estudiantes para maestro cuentan con bastante conocimiento informal sobre cómo se enseña matemáticas. Han visto cómo sus profesores enseñan matemáticas, han sido aprendices y en discusiones con sus compañeros han podido vivenciar distintas formas de aprender; incluso, tienen ciertas ideas sobre la naturaleza de las matemáticas (Jaworski y Gellert, 2003). Sin embargo, este conocimiento es limitado y tiene origen en la experiencia personal de cada uno de ellos. La experiencia durante la escolarización supone el primero de los niveles de desarrollo profesional, en el sentido de Ma (1999), que continúa durante la formación inicial y la práctica docente. La etapa de formación universitaria es el momento de dar fundamento a la experiencia de la escolarización y de construir la base sobre la que se desarrollará la futura práctica docente.

En el contexto universitario español, los estudiantes para maestro reciben una formación de grado universitario durante cuatro años, en los que la carga lectiva de las asignaturas destinadas a desarrollar su conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas es variable, según el artículo de autonomía universitaria previsto en la Ley Orgánica de Universidades. Así, cada centro universitario dispone, en su plan de estudios de Grado en Educación Primaria, qué cantidad y cómo se van a desarrollar los créditos de las diferentes asignaturas. En ocasiones, algunos planes de estudio dividen las asignaturas según si trabajan principalmente conocimiento matemático o conocimiento didáctico del contenido, y en otras, las asignaturas integran ambos conocimientos en torno a los grandes temas matemáticos.

Es reconocido que los estudiantes para maestro presentan grandes carencias de conocimiento matemático al comenzar la formación inicial. En este sentido, trabajos

como los de Kajander y Holm (2016), ponen de relieve que los cursos de formación en los que los estudiantes para maestro pueden desarrollar el conocimiento conceptual de las matemáticas, que les permita usar distintas representaciones para desempaquetar los conceptos y desarrollar una comprensión profunda de los procedimientos, supone la antesala para el aprovechamiento de aquellos cursos centrados en el desarrollo del conocimiento didáctico del contenido. Esta aproximación sustenta los planes universitarios donde se imparten asignaturas centradas únicamente en construir conocimiento matemático y, en la mayoría de casos, con posterioridad, otras en las que se incluyen aspectos didácticos.

De otro lado, se han investigado las ventajas de tratar ambos conocimientos de forma conjunta. Cardetti y Truxaw (2014), concluyeron que los estudiantes para maestro que participan en cursos de formación diseñados específicamente para ellos, que incluyen conocimiento didáctico del contenido y conocimiento matemático, aumentan sus puntuaciones de seguridad y motivación en la enseñanza de las matemáticas al establecer mejores conexiones entre ambos conocimientos.

En consonancia con el contexto en el que se ha desarrollado la investigación, un aula de formación inicial donde se interrelacionan los saberes matemáticos y didáctico-matemáticos, vamos a considerar el segundo de los modelos de formación. Aún dentro de este posicionamiento, la construcción de los programas de formación de maestros está mediada por distintos factores propios del contexto de cada universidad. Entre estos factores, está la tradición investigadora del cuerpo de formadores que se toma como base para dar forma a los contenidos en el aula de formación inicial. Para profundizar en el conocimiento que se construye en el aula de formación inicial, vamos a servirnos del Modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas² (MTSK, Carrillo *et al.*, 2018). Esta elección está condicionada por nuestro posicionamiento sobre qué debe saber un maestro y por el contexto del caso que estudiamos. En ningún caso conlleva que no se reconozcan alternativas de formación de maestros con base en otros fundamentos de investigación.

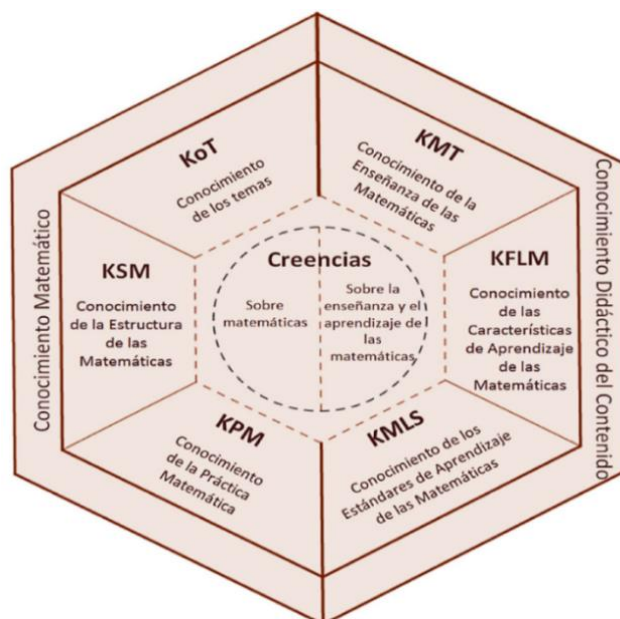
² Aunque el modelo MTSK hace referencia explícita al “profesor” en su nombre, ha servido como modelo analítico en distintas etapas educativas, incluyendo educación infantil, educación primaria, educación secundaria obligatoria y post-obligatoria y universidad (ver Carrillo *et al.*, 2018)

1.3.1.1 El modelo MTSK como estructurador del conocimiento que se construye en formación inicial

El modelo MTSK, se ha mostrado útil como estructurador de los programas de formación inicial de maestros además de como guía en contextos de formación permanente (Montes, *et al.*, 2019, Montes *et al.*, 2021). El modelo MTSK mantiene la división clásica entre los distintos conocimientos del profesor de Shulman (1986, 1987): conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido. La inclusión de las creencias del profesor y el concepto de especialización de los distintos saberes que lo componen, son distintivo de este modelo respecto a sus coetáneos (Ball *et al.*, 2008; Godino, 2009; Rowland *et al.*, 2009). De un lado, se considera que las creencias sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, permean los distintos dominios de conocimiento del profesor y sirven como filtro o potenciador del conocimiento profesional y su desarrollo (Aguilar-González, *et al.*, 2019). De otro lado, desde la perspectiva del modelo, el conocimiento matemático para la enseñanza es intrínseco al contexto en el que se construye y en el que se usa (Flores *et al.*, 2013) y, por tanto, el conocimiento del profesor, en su conjunto, es de naturaleza especializada (Carrillo *et al.*, 2013). Otra de las aportaciones del modelo MTSK a la comprensión del conocimiento especializado de los maestros y, por ende, a la caracterización del conocimiento que se construye en el aula de formación inicial, es su detalle en la descripción de distintos dominios y categorías de conocimiento (Figura 2).

Figura 2.

Estructura del conocimiento especializado MTSK (Carrillo et al. 2018)



Centrándonos en los dominios de conocimiento, conocimiento matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK), encontramos un total de seis dominios de conocimiento en los que se diferencian indicadores y categorías que sirven para estructurar el discurso en torno a la comprensión del conocimiento del maestro. Esta división se entiende como una herramienta analítica, pues se reconoce el conocimiento del profesor como un todo holístico (Carrillo, *et al.*, 2014).

Desde la perspectiva del modelo MTSK, el conocimiento matemático (MK) constituye una red estructurada de conocimiento que sigue sus propias reglas (Carrillo *et al.*, 2018). El dominio de esta red, así como la comprensión de sus reglas y de sus características, puede dotar al profesor de herramientas matemáticas que le permitan lidiar con situaciones de contingencia que se produzcan en sus aulas. Así, el dominio de conocimiento matemático se estructura en tres subdominios: conocimiento de los temas (KoT³), conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM). El conocimiento fundamentado de las definiciones, procedimientos o representaciones de los distintos tópicos matemáticos formarían parte del KoT; la comprensión de las relaciones entre los distintos tópicos, en esa forma de red interrelacionada, formaría parte del KSM; y, la comprensión de cómo se construyen las matemáticas y de las formas de proceder en la disciplina, en el sentido de conocimiento sintáctico (Schwab, 1978), formarían parte del KPM.

Por último, el modelo MTSK contempla la inclusión del dominio de conocimiento didáctico del contenido (PCK), como aquél que permite al profesor trasladar el conocimiento matemático disciplinar a sus estudiantes, más allá de variables didácticas generales. El PCK surge de la reflexión sobre las matemáticas en relación con su enseñanza, su aprendizaje y su secuenciación y, en consecuencia, se divide en tres subdominios de conocimiento que son: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), y conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática (KMLS). La enseñanza sobre un tópico debe incluir consideraciones respecto a las distintas teorías y estrategias de enseñanza que formarían parte del KMT; consideraciones respecto a las principales

³ Las siglas empleadas para referirnos a cada uno de los subdominios de MTSK se forman, al igual que en el nombre, tomando la traducción al inglés de cada uno de estos subdominios: knowledge of topics (KoT), knowledge of the structure of mathematics (KSM), knowledge of practices in mathematics (KPM), knowledge of mathematics teaching (KMT), knowledge of features of learning mathematics (KFLM) y knowledge of mathematics learning standards (KMLS)

dificultades y formas de interacción con el contenido matemático que manifiestan los estudiantes, que formarían parte del KFLM; y, consideraciones respecto a los distintos niveles de secuenciación y aprendizajes esperados en distintos grupos de edad, que formaría parte del KMLS.

Un ejemplo de cómo se ha usado MTSK para organizar el contenido de la formación de maestros, concretamente en la asignatura que se ha usado como contexto para la obtención de la información en esta investigación, puede consultarse en Montes *et al.* (2019). Los autores incluyen una síntesis de los subdominios de MTSK que se pretenden construir con los EPM en relación con el bloque de formas planas (Tabla 1).

Tabla 1. Estructuración de un bloque de una asignatura con MTSK

SUBDOMINIO DE MTSK	CONTENIDO DE LA MATERIA
Conocimiento de los temas	Concepto de polígono Características críticas de los polígonos Clasificación de formas planas Elementos de los polígonos que permiten clasificarlos Representaciones, notación y vocabulario ligado a la noción de polígono (y forma plana) Ejemplos representativos de formas planas Propiedades y resultados geométricos (Teorema de Pitágoras, Desigualdad Triangular) Fenomenología de los polígonos
Conocimiento de la Estructura Matemática	Circunferencia como no-ejemplo extremo Diferentes geometrías
Conocimiento de la Práctica Matemática	Construcción de definiciones matemáticas Función del ejemplo y el contraejemplo Razonamiento deductivo e inductivo Formulación y comprobación de hipótesis Demostraciones formales e informales
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas	Recursos para la enseñanza de la geometría Actividades y propuestas para la enseñanza de polígonos
Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático	Indicadores de aprendizaje del contenido Imagen y definición de concepto (Tall y Vinner, 1981) Niveles de Van Hiele (1986) Errores y obstáculos habituales al tratar con polígonos
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje Matemático	Currículo escolar de geometría (concreción en polígonos y formas planas)

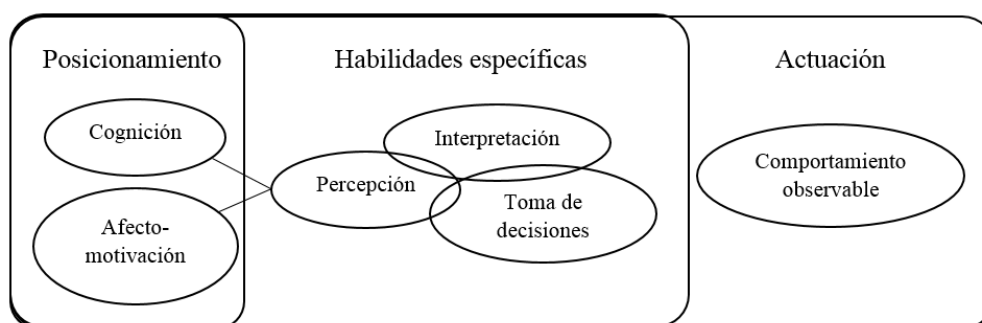
La aportación de este ejemplo sirve para poner de relevancia, cómo se estructura un bloque de una asignatura atendiendo a los distintos conocimientos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde el punto de vista del modelo MTSK. Este ejemplo representa el trabajo que se hace en el resto de los bloques de la asignatura que combina la construcción de conocimiento matemático y didáctico matemático.

1.3.2 Habilidades, competencias y prácticas profesionales

Durante el desarrollo de una clase de matemáticas, en cualquier etapa educativa, juega un papel muy importante la competencia profesional del profesor, que tiene un impacto significativo en la calidad de la enseñanza y en el aprendizaje de sus alumnos (Blömeke *et al.*, 2020). Los resultados, en este sentido, llevan nuestro interés hacia ese segundo ámbito de la formación de profesores que propone Ponte (2012), el de la práctica profesional. Entendemos que más allá del conocimiento matemático y didáctico-matemático que sustenta las acciones del maestro, la formación inicial debe configurarse como un espacio donde tenga lugar la construcción de ese conocimiento en acción que es *el hacer o el ser capaz de*. De esta forma, consideraremos la competencia docente como la habilidad de ofrecer una respuesta observable, apoyada en los recursos cognitivos y motivacionales del profesor, resultado de interpretar una situación de enseñanza-aprendizaje (Blömeke *et al.*, 2015). Para los autores, puede entenderse como un continuo (Figura 3. Modelo de competencia docente como un continuo (Blömeke *et al.*, 2015).

Figura 3.

Modelo de competencia docente como un continuo (Blömeke et al., 2015)



El desarrollo de este tipo de habilidades docentes permite que los maestros, no solo estén capacitados para responder ante situaciones de contingencia en el aula (Rowland *et al.*, 2009), sino que puedan, previamente, diseñar de forma óptima las situaciones de enseñanza (Blömeke *et al.*, 2008) y, además, profundizar en sus reflexiones durante todo el proceso (Schön, 1987, 1991). El estudio de diferentes habilidades, competencias y prácticas profesionales, sentará las bases sobre nuestro acercamiento al conocimiento del formador sobre cómo desarrollarlas con sus EPM en el aula de formación inicial.

Entre las diferentes prácticas profesionales consultadas en la literatura de investigación, hemos identificado la competencia en planificación de lecciones (Blömeke *et al.*, 2008), la competencia en formulación de problemas escolares (Carrillo y Montes, en prensa), la

competencia en diagnóstico o evaluación del pensamiento de los estudiantes (Ostermann *et al.*, 2018) y la competencia ligada a la mirada profesional del profesor (Fernández *et al.*, 2018). La selección de estas prácticas profesionales está ligada a la naturaleza de la asignatura que desarrolla el informante de esta investigación.

1.3.3 Ser y sentirse maestro

A diferencia de las líneas de investigación en relación con el conocimiento profesional y con las prácticas profesionales, los trabajos sobre identidad profesional se consideran relativamente recientes en el campo de la Educación Matemática (Black *et al.*, 2009; Ponte, 2011). La identidad profesional es una parte del autoconcepto que se desarrolla en diálogo con las construcciones sociales y culturales propias de la profesión, es el producto de la interacción con los otros (Blake *et al.*, 1998), y se considera en construcción constante a lo largo de la carrera profesional del docente (Losano *et al.*, 2018). Es la forma en la que el individuo, en nuestro caso el maestro, se reconoce personalmente dentro del cuerpo profesional desde un punto de vista social y cultural (Holland *et al.*, 1998).

De acuerdo con Lave (1988), el desarrollo de la identidad profesional dentro de una comunidad y la construcción de conocimiento y prácticas profesionales, son parte del mismo proceso. La construcción de la identidad profesional motiva, da forma y significado al resto de aprendizajes. Por este motivo, la formación inicial de maestros se articula como un escenario clave en su desarrollo (Losano *et al.*, 2018). La construcción de distintas prácticas de enseñanza y la legitimización de determinados tipos de conocimiento en el aula de formación inicial, pueden ayudar a los EPM a desarrollar una identidad profesional (Ponte, 2002), lo que conlleva tomar consciencia del papel del formador en este proceso. Las concepciones del formador sobre qué es un maestro y su conocimiento sobre distintas identidades profesionales y cómo se construyen, pueden derivar en distintas tomas de decisiones que, de alguna manera, implicarían distintas formas en enseñanza. De esta forma, por ejemplo, la presencia de actividades de simulación en las que los EPM puedan adoptar el punto de vista y los valores asociados a un maestro de matemáticas, contribuirían al desarrollo de la identidad profesional (Ponte, 2002), y su selección y gestión por parte del formador, darían cuenta de su conocimiento respecto a este pilar de la formación inicial de maestros.

1.4 Antecedentes de investigación en relación con el conocimiento del formador

Un punto de partida común, en las investigaciones sobre el conocimiento del formador de profesores, ha sido considerar la distinción clásica entre el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1986, 1987), en consonancia con cómo se estructura el conocimiento del profesor. Para este autor, a rasgos generales, el conocimiento base del profesor se estructura en siete categorías de conocimiento (Shulman, 1987). Centraremos este apartado en torno a los avances en el ámbito del conocimiento del formador focalizando en el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1986).

El conocimiento del contenido se articula bajo la premisa de que *solo aquellos que comprenden, enseñan* (Shulman, 1986, pp. 14). Esta idea de comprensión del conocimiento, relacionable con la taxonomía cognitiva de Bloom (1976), marca un nivel de profundidad en el conocimiento del profesor que el autor relaciona también con la idea de *conocimiento semántico* y *conocimiento sintáctico* (Schwab, 1964). Esto implica que el conocimiento del contenido del profesor debe permitirle ir más allá de los hechos conocidos en su campo de conocimiento hasta los porqués y hasta la forma en la que se genera conocimiento en su disciplina. Los presupuestos de Shulman, en relación con el conocimiento del contenido, se extienden al campo del conocimiento del formador y serán retomados más adelante.

No obstante, son sus reflexiones sobre el conocimiento didáctico del contenido las que constituyeron uno de los hitos más relevantes en el estudio del conocimiento del profesor. Los modelos de conocimiento que se han desarrollado en el área de la Didáctica de las Matemáticas en los últimos años dan cuenta de ello (e.g. Ball *et al.* 2008; Carrillo *et al.*, 2018; Godino, 2009; Rowland *et al.*, 2009). Esta forma particular de conocimiento está ineludiblemente relacionada con la materia que se enseña ya que surge de la intersección entre el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico general. Para Shulman, las características idiosincrásicas de cada ámbito de conocimiento derivan en distintas formas de representación para su enseñanza y dan lugar a distintas concepciones de los estudiantes en relación con el conocimiento que el profesor debe conocer y gestionar para la enseñanza de un contenido (Shulman, 1986). En el caso del conocimiento del formador se ha mantenido también la consideración de este tipo de conocimiento.

Ahora bien, enseñar a enseñar supone un nuevo contexto con respecto a la enseñanza de las materias curriculares sobre las cuales se ha ido articulando el conocimiento del profesor. De las características de este contexto y de los aprendices, estudiantes para maestro, surgen matices que hay que tener en cuenta en el acercamiento hacia el conocimiento del formador. Algunas de las claves para entender la formación de maestros, aportadas por Zopf (2010), se relacionan con: el contenido de la formación, los EPM y los objetivos de la enseñanza. En comparación con el aprendizaje de las matemáticas, aprender a enseñar matemáticas supone un cambio en el contenido que se aprende, que ahora incluye todo el conjunto de conocimientos matemáticos y matemático-didácticos que conforman el saber profesional, a los que nosotros añadimos el saber hacer y el ser. Asimismo, el aprendizaje de la práctica profesional de enseñar lleva consigo adquirir la capacidad de analizar el objeto matemático que se enseña, reflexionar sobre su construcción y sobre cómo transformarlo para su enseñanza (Engeström, 1999). Entre otras implicaciones, esto significa que los EPM deben reconstruir una matemática ya aprendida como estudiantes de Primaria y Secundaria. Finalmente, el fin último del aprendizaje del EPM es construir conocimiento para enseñar a sus estudiantes, a diferencia del estudiante de Primaria y Secundaria, cuyo fin es aprender matemáticas para su propio uso.

En adelante, profundizaremos en los antecedentes en relación con el conocimiento del formador. Tomaremos como base, como se ha desarrollado en el punto 2.3 de este trabajo, que el contenido de la formación trasciende el contenido matemático y que, por tanto, el conocimiento del formador sobre el contenido de la formación debe de alguna forma relacionarse con el conocimiento necesario para enseñar. Además, incluiremos trabajos previos sobre el conocimiento que permite al formador transformar el contenido de la formación para que sus EPM puedan construir conocimiento profesional, en el sentido del conocimiento didáctico del contenido de la formación.

1.4.1. El conocimiento del profesor como parte del conocimiento del formador

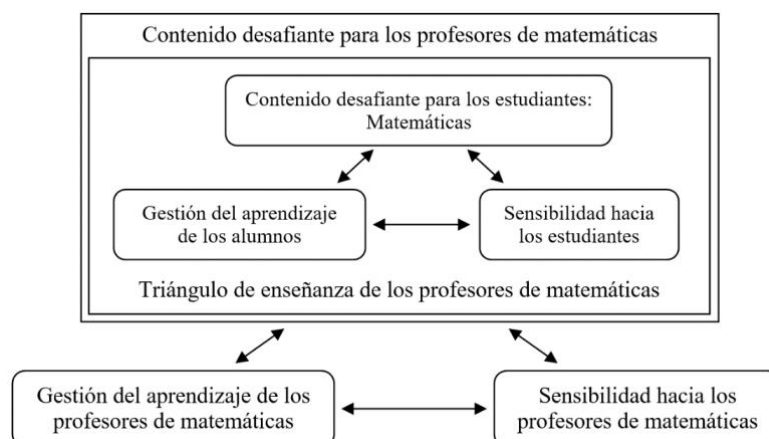
Profesor y formador de profesores comparten un objetivo común que es mejorar la educación matemática de los estudiantes (Jaworski, 2008). Las tareas en formación inicial se construyen con ese objetivo principal y, por tanto, el diseño y la gestión de las tareas de formación de maestros, tienen su base en el conocimiento sobre la enseñanza de las

matemáticas (entre otros). Sin embargo, ¿qué podemos decir de las relaciones entre los conocimientos de ambos profesionales? Algunos investigadores conceptualizan el conocimiento del formador como una extensión del conocimiento que el profesor necesita para enseñar (Castro-Superfine, 2020; Perks y Prestage, 2008; Olanoff, 2011; Zaslavsky y Leikin, 2004; Zopf, 2010), aunque no es un hecho consensuado que exista inclusión del conocimiento del profesor en el conocimiento del formador (Jaworski, 2008). Relacionar un conocimiento y otro, implica considerar una adaptación al nuevo contexto de enseñanza y trasladar los distintos enfoques de conocimiento del profesor a la comprensión del conocimiento del formador. La base común de los trabajos en los que se incluye el conocimiento del profesor en el del formador se encuentra en que, siendo el conocimiento profesional el objeto de aprendizaje, este tiene que formar parte del conocimiento del formador que debe poder transformarlo para facilitar su adquisición.

Los trabajos de Zaslavsky y Leikin (2004) sobre el conocimiento del formador se apoyan en la idea de triángulo de enseñanza propuesta por Jaworski (1992, 1994) –gestión del aprendizaje, sensibilidad hacia los estudiantes y reto matemático– para la conceptualización del triángulo de enseñanza del formador. De esta forma, si el triángulo de enseñanza sirve para dar sentido a las prácticas de enseñanza de las matemáticas (Jaworski, 1992), la extensión propuesta por Zaslavsky y Leikin (2004) vertebraría la comprensión sobre las prácticas en el contexto de la enseñanza de la enseñanza de las matemáticas (Figura 4). Partiendo de esta idea de extensión, entendemos que el conocimiento necesario para gestionar la enseñanza de tareas que supongan un reto, desde el punto de vista matemático, se extiende al conocimiento (del formador) para generar retos de enseñanza sobre cómo enseñar.

Figura 4.

Triángulo de enseñanza del formador (Zaslavsky y Leikin, 2004)

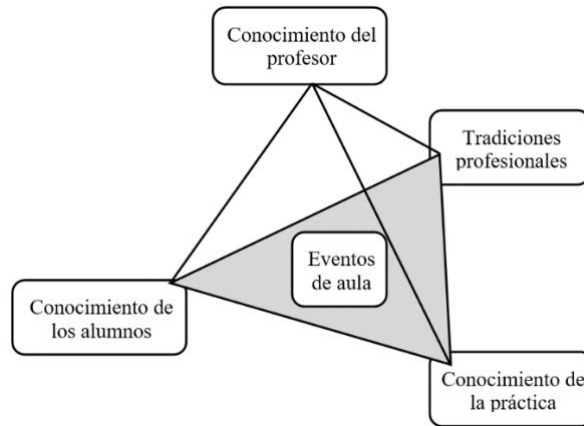


En Zaslavsky y Leikin (1999), se desarrolla esta misma idea de superposición de capas entre los perfiles de profesor de matemáticas, formador de profesores y formador de formadores; diferenciándose entre la tarea que desarrolla cada perfil y el contexto en que lo hace, de forma que el conocimiento de cada perfil incluye al del anterior. El estudio del conocimiento del formador de Zaslavsky y Leikin (2004) se encuadra dentro de una comunidad de práctica en la que los tres perfiles de enseñanza se ven involucrados. Sirviéndose de la perspectiva de Steinbring (1998), sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en la que se rompe la linealidad de dichos procesos, presentan un modelo de desarrollo profesional del profesor, el formador y el formador de formadores en el que cada agente puede adoptar diferentes roles, asumiendo entonces que un conocimiento precede o se incluye dentro de otro. La idea principal radica en que la reflexión del formador de profesores sobre cómo interactúan los EPM con una tarea desafiante, desde el punto de vista de la enseñanza de la matemática, alimenta su conocimiento en relación con la gestión de estas tareas de enseñanza. Es en ese ciclo continuo es donde se desarrolla el conocimiento del formador que debe entonces incluir, tanto conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas para proponer los retos de enseñanza, como conocimiento derivado de la puesta en práctica de este tipo de tareas y conocimiento de sus EPM.

De otro lado, la conceptualización del conocimiento del formador de Perks y Prestage (2008) se articula en torno a las mismas bases que su modelo de conocimiento profesional del profesor (Prestage y Perks, 1999), el *tetraedro del conocimiento del profesor*. En este modelo se relacionan distintas facetas de conocimiento profesional para transformar el conocimiento matemático en el conocimiento de las matemáticas necesario para enseñar. La propuesta de Prestage y Perks (1999) (Figura 5) incluye el *conocimiento práctico*, que deriva de las formas de proceder en el aula; las *tradiciones profesionales*, como normas y conocimiento reglado en el currículum, la práctica docente y en la investigación; y, el *conocimiento sobre los alumnos*, en relación con su forma de aprender. Según estos autores, la reflexión del profesor sobre estas cuatro facetas, fundamentan las decisiones que toma sobre los eventos en el aula, como las tareas que proponen, la selección de contenidos o las decisiones metodológicas, y constituyen su conocimiento profesional.

Figura 5.

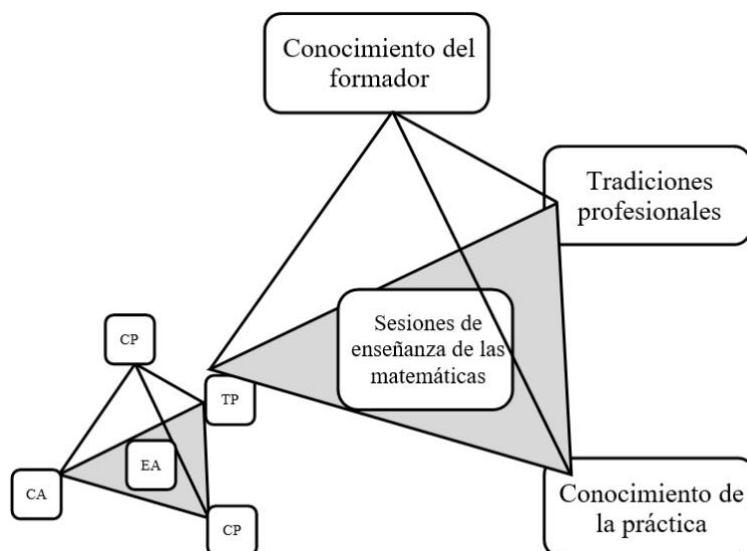
Tetraedro del conocimiento del profesor (Prestage y Perks, 1999)



De forma análoga, el conocimiento del formador tendría su base en la red interconectada de saberes propios de la enseñanza en el aula de formación inicial. El conocimiento sobre cómo enseñar a enseñar se asienta en la reestructuración del vértice de conocimiento de los alumnos e igual que en el caso del conocimiento del profesor, en la práctica de aula y en las tradiciones profesionales (Figura 6). La configuración de este modelo de conocimiento del formador está estrechamente ligada al proceso personal de los autores como formadores y a la reflexión derivada de ello. Esto implica que la nueva articulación del vértice de conocimiento de los alumnos tiene su origen en el conocimiento profesional construido mientras eran profesores, que se apoya en las facetas que describen en su modelo de conocimiento profesional del profesor.

Figura 6.

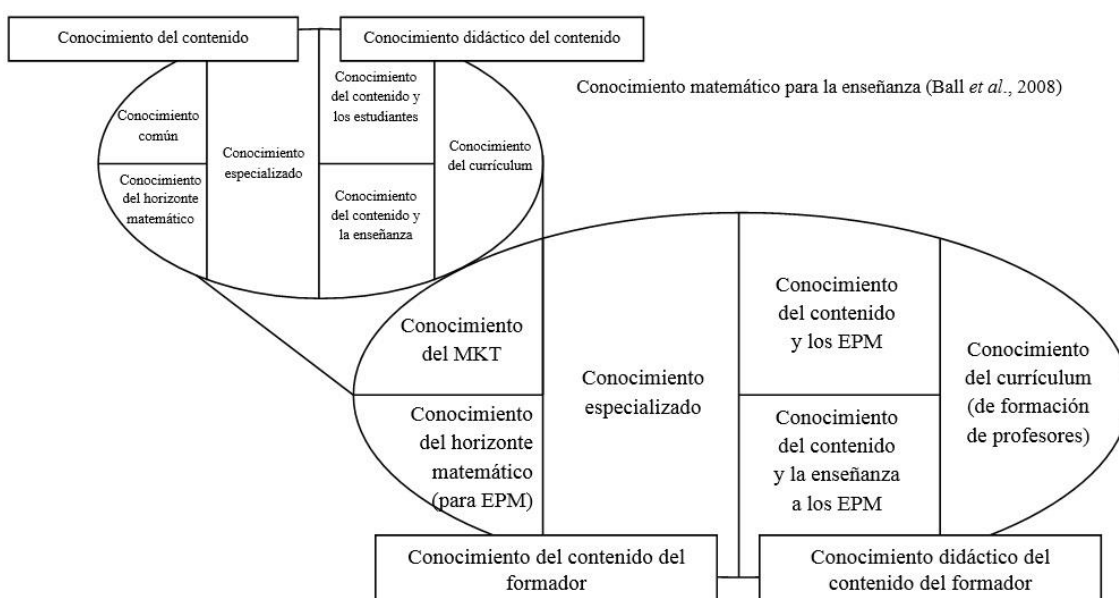
Tetraedro del conocimiento del formador (Perks y Prestage, 2008)



Dentro de los trabajos con base en el modelo MKT (Ball *et al.*, 2008), Castro-Superfine *et al.* (2020), proponen una conceptualización del conocimiento en la que tomando como base la estructura del modelo MKT, se incluye el conocimiento del profesor como uno de los seis dominios que lo caracterizan. Se articula así un modelo de conocimiento del formador de profesores (MTEK, por sus siglas en inglés), en el que se mantiene la división entre el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido, adaptándose al contexto de formación, y es el subdominio de conocimiento común el que se reorganiza para incluir el conocimiento del profesor (Figura 7).

Figura 7.

El conocimiento matemático para formar profesores (Castro-Superfine et al., 2020)



Considerando la inclusión del modelo MKT dentro del conocimiento del formador, Castro-Superfine *et al.* (2020) presentan la analogía de considerar que el conocimiento del profesor es al conocimiento del formador, lo que las matemáticas son al conocimiento del profesor. Esto es, las tareas de formación inicial tienen como objetivo construir MKT y, por tanto, el conocimiento del formador tiene que incluir el conocimiento de ese MKT y de cómo enseñarlo.

En los trabajos de Zopf (2010) y Olanoff (2011) el foco de investigación se ha situado en el conocimiento matemático del formador. Este hecho nos sitúa en una faceta concreta de su conocimiento, pero nos ayuda a entender cómo se han ido desarrollando los estudios partiendo del conocimiento del profesor. En ambos casos, el conocimiento matemático

del formador vuelve a ser considerado una extensión, esta vez, del conocimiento matemático del profesor.

La diferencia entre ambos conocimientos se establece en términos de profundidad y amplitud (Zopf, 2010). El conocimiento matemático del formador incluye, según esta autora, un conocimiento sólido de la epistemología de las matemáticas, su estructura y las formas de trabajo de la disciplina. Asimismo, se caracteriza por ser *panorámico*, ya que permite desarrollar los contenidos matemáticos desde los conceptos fundamentales hasta los avanzados; *conectado*, relacionando contenido dentro y entre dominios matemáticos, *fluido*, que permita mostrar la panorámica y las conexiones entre contenidos de forma natural, e *intencional*, encaminado a la consecución de una meta u objetivo de aprendizaje concreto (Zopf, 2010). De esta forma, las conexiones que realizan los formadores entre las diferentes componentes del conocimiento del profesor, y de estos elementos cognitivos con otros ligados al desarrollo de la profesión del profesor, unidas a un conocimiento matemático base más extenso, determinarían la diferencia entre el conocimiento del profesor y el conocimiento del formador.

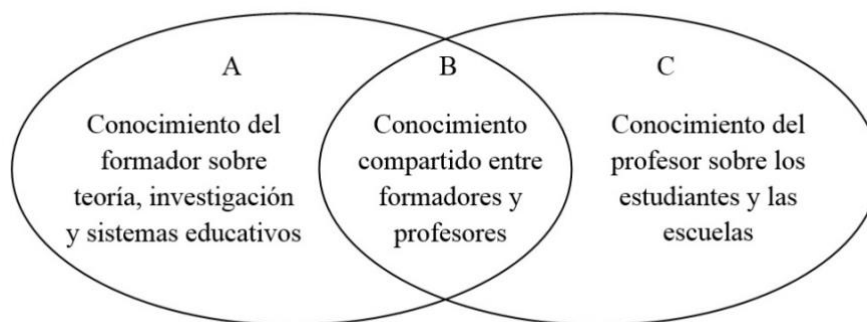
Las investigaciones de Olanoff (2011), sobre el conocimiento matemático para enseñar profesores en el caso de la multiplicación y división de fracciones, refuerzan muchas de las ideas propuestas por Zopf (2010). Además, Olanoff (2011) reflexiona sobre la necesidad de que el conocimiento matemático del formador, por ejemplo, permita analizar distintos modelos de representación de los tópicos matemáticos, así como identificar cuáles son los aspectos claves de cada uno para poder elegir entre ellos tomando consciencia de sus consecuencias para la formación de profesores. Estos conocimientos nos acercan al conocimiento didáctico del contenido, pero desde el análisis de sus características con base en el conocimiento matemático que lo sustenta.

En los trabajos descritos hasta ahora, hemos visto cómo se propone la inclusión del conocimiento del profesor en el conocimiento del formador. De acuerdo con estos autores, el conocimiento del formador estaría configurado como una extensión del conocimiento del formador, en su estructura o en su profundidad o alcance matemático y matemático-didáctico. No obstante, Jaworski (2008), asumiendo que se trata de dos conocimientos íntimamente relacionados, propone otro sistema de relaciones (Figura 8. Conocimiento en la formación de profesores (Jaworski, 2008)) que pretende enfatizar en

cómo formadores y profesores poseen conocimientos propios de sus áreas de especialización.

Figura 8.

Conocimiento en la formación de profesores (Jaworski, 2008)



Según expone Jaworski (2008), a pesar de que formadores y profesores compartan un objetivo común y de que el conocimiento de ambos está estrechamente relacionado, es un error dar por sentado que los formadores son conocedores de todas las facetas del conocimiento del profesor –como se desprende de los trabajos que hemos sintetizado hasta ahora. El origen de estas diferencias se encuentra en que el conocimiento de los profesores sobre las particularidades de sus alumnos y los contextos en los que se desenvuelven –o se desenvolverán-, es desconocido para los formadores, que poseen un conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas que se considera generalizado para abarcar distintas realidades durante la formación de maestros. Es relativamente sencillo admitir que los conocimientos que se encuentran en A (en la Figura 7), que sustentan el conocimiento del formador, no son compartidos por los profesores. El motivo es que no es objetivo de la formación de maestros hacer explícitos esos conocimientos, sino construir con los EPM el conocimiento –con base en A- que será necesario para su práctica del día a día. Esa misma idea es la que defiende Jaworski (2008) con lectura en la dirección contraria. Encontraríamos en C (en la Figura 7) determinadas concreciones de conocimiento con relación a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, principalmente, que no formarían parte del conocimiento del formador.

Este nuevo aporte genera uno de los cuestionamientos de la investigación, que tiene entre sus objetivos contribuir con datos empíricos a comprender la relación entre el conocimiento del profesor y el conocimiento del formador en la realidad de aula de formación inicial observada. Nuestro posicionamiento inicial concuerda con los referentes que hemos mostrado, en tanto que reconocemos que el conocimiento del

formador debe incluir, al menos, parte del conocimiento del profesor, entendiendo que forma parte del contenido de la formación; y que la estructuración del conocimiento del profesor puede servir de guía en el esbozo de un modelo de conocimiento del formador.

1.4.2 El conocimiento sobre cómo enseñar a enseñar

Retomando la estructuración del conocimiento del formador de maestros resultante de considerar al formador como docente y, por tanto, en consonancia con los presupuestos de Shulman (1986, 1987), cabría preguntarse qué características del conocimiento del formador le permiten transformar el contenido de la formación en contenido de aprendizaje. En este sentido, nos preguntamos cómo es el conocimiento didáctico del contenido de la formación del formador. Los trabajos incluidos hasta ahora, aunque han sido seleccionados por cómo el conocimiento del formador integra el conocimiento del profesor, han ido arrojando ya algunas ideas respecto del conocimiento didáctico del contenido. En el caso del triángulo de enseñanza del formador (Zaslavsky y Leikin, 2004), se incluían elementos de conocimiento del formador en relación con la gestión de los aprendizajes y en relación con la sensibilidad hacia los EPM. Los trabajos derivados del tetraedro del conocimiento del formador (Perks y Prestage, 2008), añaden además el conocimiento sobre las tradiciones profesionales. Además, entre los resultados aportados por Olanoff (2011) se vislumbra un tipo de conocimiento sobre cómo enseñar el contenido matemático en formación de maestros, relacionado con el análisis de los fundamentos matemáticos de distintos tópicos.

De estos trabajos se extrae, además, una idea recurrente en los estudios del conocimiento de formador que tiene que ver con los dos niveles en los que se focaliza el discurso del formador de maestros de matemáticas, ambos interrelacionados (Jaworski y Huang, 2014). Por una parte, a nivel de aula de formación, se establecen las relaciones de enseñanza entre el formador y los EPM y, en consecuencia, el contenido y las consideraciones didácticas bajo las que desarrollarlo -lo que relacionaríamos con la gestión de la enseñanza, la sensibilidad hacia los EPM y el conocimiento de prácticas profesionales (Perks y Prestage, 2008; Zaslavsky y Leikin, 2004). Por otra parte, junto a este plano, convive otro contexto, que lleva el discurso del formador hacia las relaciones entre los futuros maestros y sus estudiantes y que vuelve a materializarse en un nuevo contenido matemático-didáctico –en el que cobra sentido la consideración del conocimiento del profesor como parte del conocimiento del formador. El resultado de discernir entre estos dos escenarios es considerar la dualidad de los estudiantes para

maestros como aprendices, en un contexto actual, y como futuros maestros, en un contexto futuro.

Considerando, además, que el contenido de la formación inicial de maestros engloba conocimiento profesional, conocimiento sobre prácticas de enseñanza y desarrollo de la identidad profesional, nuestra mirada sobre cómo se enseña en el aula de formación inicial debe diversificarse en esas tres áreas. La primera consecuencia de esta apreciación, es considerar que, si el conocimiento especializado del maestro de matemáticas se articula como conocimiento de las matemáticas y conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento del formador de maestros en relación con cómo construir conocimiento profesional con sus EPM debe contemplar conocimiento didáctico sobre el contenido matemático y conocimiento didáctico sobre el conocimiento didáctico. Esto es, el conocimiento didáctico del formador debe permitirle ayudar a que sus EPM reconstruyan y profundicen su comprensión en relación con una matemática ya aprendida (Ma, 1999); y debe también permitirle construir con ellos conocimiento sobre cómo enseñarla a sus futuros alumnos. En otra línea, la del conocimiento sobre las prácticas profesionales, el conocimiento didáctico del formador englobaría conocimiento sobre cómo guiar a los EPM en el desarrollo de dichas prácticas profesionales (diseño de tareas, formulación de problemas o *noticing*, por ejemplo). Finalmente, cabría preguntarse cuál es el conocimiento didáctico del formador que es útil en la construcción de la identidad profesional de sus estudiantes.

Atendiendo a la primera de nuestras inquietudes, el conocimiento didáctico sobre el conocimiento profesional, la propuesta de Chick y Beswick (2013) es considerarlo como un meta-conocimiento didáctico del contenido, que podría ser descrito como “el conocimiento didáctico del contenido *para enseñar* el conocimiento didáctico del contenido *para enseñar matemáticas*” (Chick y Beswick, 2013). Las autoras se apoyan en la aproximación de Chick *et al.* (2006) y Chick (2007) sobre el conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas. Desde este punto de vista, el conocimiento didáctico del contenido del profesor de matemáticas se organiza en torno a tres categorías: conocimiento didáctico, conocimiento matemático en un contexto didáctico, y conocimiento didáctico en un contexto matemático. Cada una de estas categorías se organiza en función del peso del conocimiento matemático o didáctico que sustenta una evidencia. Por ejemplo, pueden darse situaciones como el análisis del pensamiento del estudiante, que son resultado de la reflexión conjunta e inseparable de conocimiento

matemático o didáctico –formaría parte de la categoría de conocimiento didáctico- pero también otros momentos en los que es el análisis de un contenido matemático el que deriva en cómo gestionar su enseñanza –conocimiento matemático en un contexto didáctico- y también, evidencias en las que priman las elecciones didácticas sobre una tarea matemática –en las que se evidencia la categoría de conocimiento didáctico en un contexto matemático- (Chick, 2007). La propuesta de Chick y Beswick (2018) es cambiar el objeto de esas categorías para incluir, en el caso del conocimiento didáctico del contenido del formador, conocimiento referido a la enseñanza de profesores y a la enseñanza en la escuela. De esta forma, el conocimiento didáctico del contenido del formador puede aludir a cómo aprenden los EPM, pero también a cómo aprenden los estudiantes de Primaria, los conceptos serán aquellos relacionados con las matemáticas pero también con la enseñanza de las matemáticas y el conocimiento del currículum aludiría a estos mismos dos niveles. El modelo que proponen se organiza según las categorías de la Tabla 2.

Tabla 2. Marco de conocimiento didáctico del contenido aplicable al formador (Chick y Beswick, 2018)

Conocimiento	Categorías
Conocimiento didáctico	Estrategias de enseñanza Pensamiento del estudiante Creencias del estudiante Afectos de los alumnos en relación con el contenido Demanda cognitiva de la tarea Representaciones de los conceptos Explicaciones Conocimiento de los ejemplos Conocimiento de los recursos Conocimiento del currículum
Conocimiento matemático en un contexto didáctico	(Creencias sobre) La naturaleza del contenido Conocimiento profundo de contenidos fundamentales Desempaquetado del contenido en componentes clave Estructura y conexiones Conocimiento procedimental Métodos de resolución
Conocimiento didáctico en un contexto matemático	Aproximaciones de evaluación Metas de aprendizaje Captura y mantenimiento del foco de atención por parte de los estudiantes Estrategias de enseñanza Afectos de los estudiantes (general)

Con base en este modelo, las autoras señalan que, de la misma forma que se identifica conocimiento didáctico del contenido del profesor cuando, por ejemplo, tenemos evidencia sobre el uso de una estrategia de enseñanza para un concepto matemático, podemos encontrar conocimiento didáctico del formador sobre las estrategias de enseñanza cuando promueve la discusión en torno a distintos métodos de enseñanza para

un mismo fin, con el objetivo de que los EPM desarrollen conocimiento didáctico sobre cómo enseñar.

El trabajo de Chick y Beswick (2018) y sus relacionados, suponen un avance en nuestra comprensión sobre el conocimiento didáctico del contenido del formador. La adaptación de la estructura del conocimiento didáctico del contenido del profesor puede hacerse desde otros marcos de conocimiento, como teorizan las autoras. Si nuestra referencia sobre el conocimiento del profesor, por su presencia en la asignatura observada y por nuestro posicionamiento como investigadores, es el modelo MTSK, podríamos usar sus categorías como lentes con las que mirar el conocimiento didáctico del formador movilizado en el aula de formación inicial observada. No obstante, desde nuestra comprensión sobre el contenido de la formación de maestros, encontramos que debe haber algún otro conocimiento que permita al formador convertir las prácticas profesionales y la identidad profesional en un conocimiento que se aprende en el aula de formación inicial.

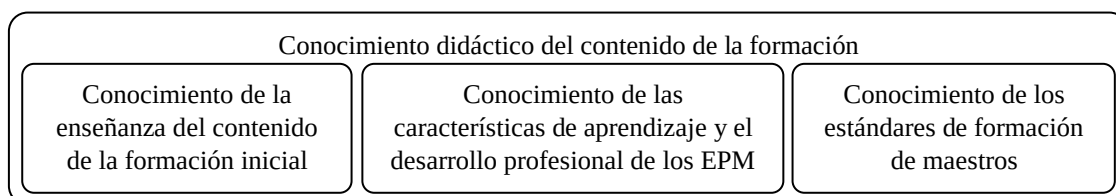
De otro lado, Muir *et al.* (2017) desarrollaron una investigación sobre el conocimiento didáctico del contenido del formador, apoyándose en las herramientas de análisis del Cuarteto de Conocimiento (Rowland *et al.*, 2009). Los autores justifican la elección de este marco, que está diseñado para analizar el conocimiento del contenido matemático en contextos de conocimiento del profesor, por la forma en la que entienden el contenido de la formación de maestros, que incluye conocimiento matemático y didáctico. De acuerdo con Muir *et al.* (2017), el conocimiento didáctico del formador se evidencia en dos niveles: en el diseño y en la implementación de sus sesiones de aula –en la toma de decisiones sobre objetivos, la consideración de posibles obstáculos de los EPM y el diseño de tareas para la formación-; y, en relación con el conocimiento didáctico del profesor que se pretende construir. En algunos momentos de la formación inicial de maestros, el formador actúa de manera similar a como lo hace un profesor de matemáticas. En concordancia con Muir *et al.* (2017), esos momentos en los que se exhibe conocimiento didáctico del contenido, pueden servir de ejemplo y ser tomados por los alumnos en su futuro profesional.

Desde la perspectiva de Escudero-Ávila *et al.* (2021), el conocimiento del formador se considera *multidimensional, complejo, integrado, contextualizado y dependiente del contenido matemático*. Los autores proponen considerar que lo que se enseña en el aula

de formación inicial se articula en torno a los pilares de conocimiento, práctica e identidad profesional (Ponte, 2012) y, por tanto, el conocimiento didáctico del formador debe estructurarse en cómo se enseñan, cómo se aprenden y cómo se secuencia la enseñanza de cada uno de estos tres elementos (Figura 9).

Figura 9.

El conocimiento didáctico del formador de maestros (Escudero-Ávila et al. 2021)



En relación con el conocimiento de la enseñanza del contenido de la formación inicial, Escudero-Ávila *et al.* (2021) teorizan sobre la profunda reflexión que debe hacer el formador en torno a las tareas de enseñanza que selecciona, debido al impacto que tienen para el aprendizaje de los alumnos (Grevholm *et al.*, 2009), y el conocimiento necesario para poder hacer esa elección con fundamento. En línea con los autores, las tareas de formación deberían orientarse a construir conocimiento profesional –matemático y didáctico-matemático-, a desarrollar prácticas profesionales y a fomentar la identidad profesional de los EPM. Tareas como grupos de discusión (Carrillo y Climent, 2011), análisis de vídeos (Coles, 2014) y narrativas (Ivars y Fernández, 2018), son algunas de las sugeridas.

De otro lado, el conocimiento de las características de aprendizaje y el desarrollo profesional de los EPM hace alusión a las dificultades que pueden presentar los EPM en relación con el contenido matemático, con frecuencia procedimental y fragmentado (Olanoff, 2011) y, además, con sus formas preconcebidas de entender la enseñanza de las matemáticas, como por ejemplo, su capacidad de predecir el éxito de una tarea o sus limitaciones a la hora de diseñar actividades. Al conocimiento sobre cómo interactúan los EPM con el contenido de la formación, se une la consideración de la etapa de formación inicial como parte del desarrollo profesional docente, lo que conlleva a la proyección de una identidad profesional.

Por último, el conocimiento de los estándares de formación de maestros, en Escudero-Ávila *et al.* (2021), se describe como el más contextual de los tres tipos de conocimiento didáctico, entendiendo que engloba el conocimiento del currículum de la etapa donde se

desenvolverán los EPM, desde un punto de vista global y conectado, y el conocimiento de cómo articular la formación para construir el conocimiento necesario para que los EPM desarrollen ese currículum, desde cada uno de los pilares que conforman el contenido.

1.4.3 Estándares de la Asociación de formadores de profesores

Una mirada a los estándares de actuación del formador de maestros puede completar nuestra visión sobre qué conocimiento estaría en la base de esas prácticas deseables en el formador. Tomaremos como referencia los estándares propuestos por la Asociación de formadores de profesores (ATE) en el contexto estadounidense. La ATE propone un total de nueve estándares que describen líneas de actuación que deberían ser prioritarias para el formador (ATE, 2008). Estas recomendaciones contemplan nueve áreas específicas del trabajo del formador de maestros: enseñanza, competencia cultural, investigación, desarrollo profesional, desarrollo de programas de formación, colaboración, servicio público, mejora de la profesionalización y visión sobre la enseñanza. Además, la ATE propone indicadores para cada uno de los estándares de los que desarrollaremos los relacionados con el estándar ligado a la enseñanza por ser el más cercano a la labor docente del formador. La organización de los indicadores que se presenta en la Figura 10, permite relacionar cada uno de estos indicadores con el conocimiento del formador que subyace a que se desarrollen esas prácticas, dichos indicadores son:

- Desarrollar una enseñanza efectiva que contemple las necesidades de los distintos aprendices.
- Demostrar y promover el pensamiento crítico y la resolución de problemas entre otros formadores, profesores y/o estudiantes para maestro.
- Revisar el contenido de las asignaturas para incorporar los resultados de investigación más recientes y/o mejores prácticas.
- Servir de modelo de práctica reflexiva para promover la reflexión en los EPM.
- Demostrar un conocimiento del contenido apropiado.
- Demostrar un conocimiento del ámbito docente preciso y apropiado.
- Conocer variedad de métodos de enseñanza y evaluación, incluyendo el uso de la tecnología.
- Servir de mentor para profesores y/o formadores noveles.

- Facilitar experiencias de desarrollo profesional en relación con buenas prácticas de enseñanza.
- Contemplar las políticas educativas y los resultados de investigación relacionados con la educación y la formación de profesores como bases de sus prácticas.

Figura 10.

Organización de los indicadores del Estándar 1: Enseñanza, de la ATE (ATE, 2008)



La dificultad en establecer dichas relaciones radica en la variedad de conocimientos que se entretelen para conformar una práctica, no obstante, hacer estas relaciones nos ayuda a visualizar la naturaleza de cada tipo de conocimiento.

Una vez organizado cada uno de los estándares, se refuerza la necesidad de considerar el conocimiento de la enseñanza de las prácticas profesionales y de la enseñanza de la identidad profesional. Ambos tipos de conocimiento, que difícilmente encontramos en la literatura de investigación estarían en la base de la capacidad de *facilitar experiencias de desarrollo profesional en relación con buenas prácticas profesionales*, la habilidad para *demostrar y promover el pensamiento crítico y la resolución de problemas entre... estudiantes para maestro*, y como sustento del hecho de *servir de modelo de práctica reflexiva para promover la reflexión en los EPM*. Cabría entonces preguntarse qué

evidencias de este tipo de conocimiento podemos encontrar en la realidad de aula de formación inicial.

1.5 Síntesis de las aportaciones teóricas y preguntas abiertas

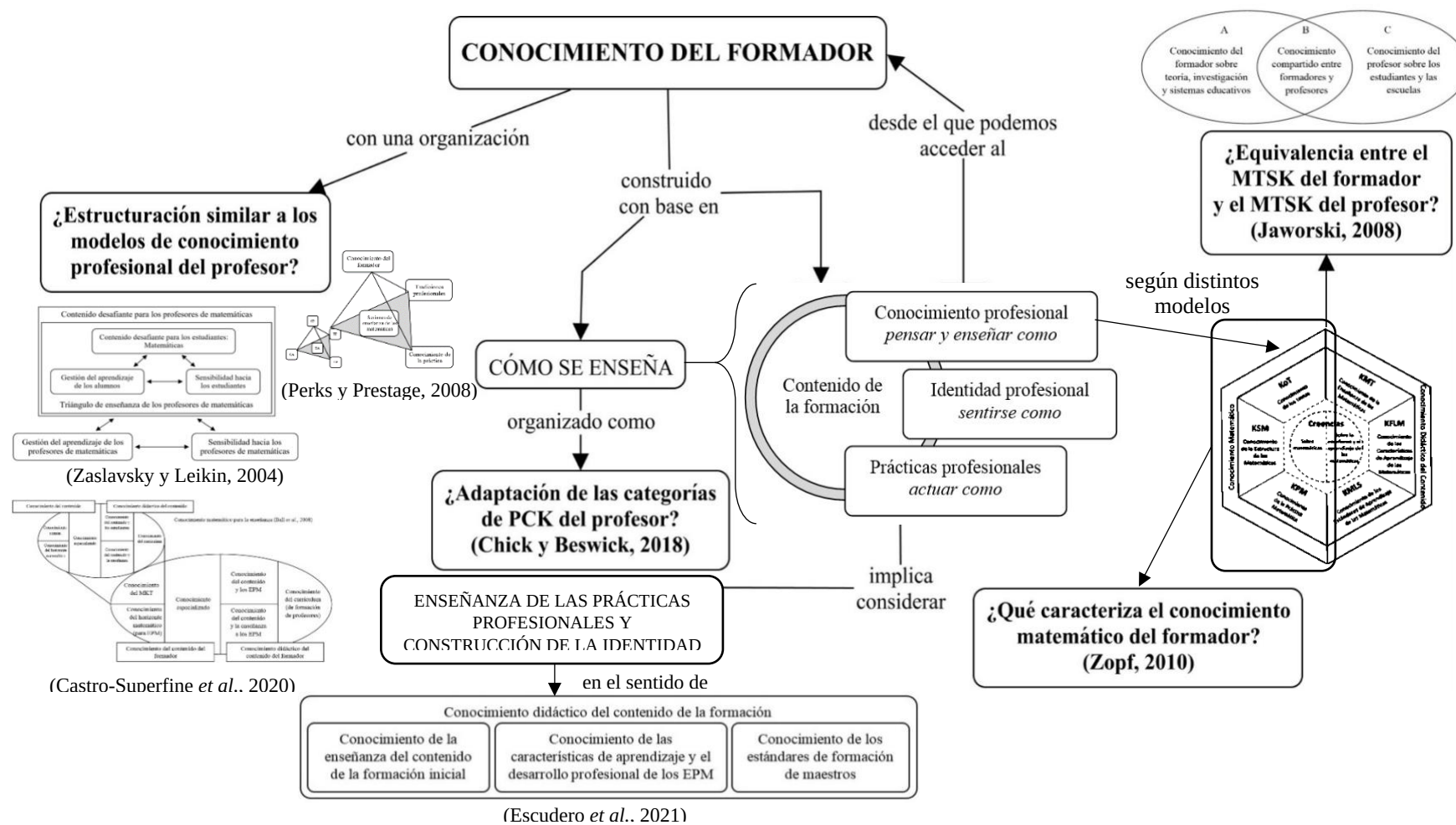
Una vez desarrolladas las aportaciones teóricas en relación con el tema de la investigación, conviene que organicemos todos estos antecedentes para esclarecer cuál es el punto de partida en la recogida de datos. La Figura 11 muestra la relación entre los distintos antecedentes y las preguntas que surgen de su análisis.

Utilizaremos estas aportaciones, no como estructuradoras de la realidad a observar, sino como lecturas que pueden añadir sensibilidad a nuestro análisis y dirigir nuestra atención, por ejemplo, hacia cómo es el conocimiento matemático del formador. Si en términos de la propuesta de Zopf (2010), podemos esperar encontrar un conocimiento matemático en el formador que es más amplio y profundo que en el caso del profesor, ¿cómo podemos caracterizar esa profundidad y esa amplitud? Además, las propuestas de distintos autores (Castro-Superfine, 2020; Perks y Prestage, 2008; Zaslavsky y Leikin, 2004), arrojan luz sobre la posibilidad de estructurar el conocimiento del formador tal como se ha estructurado el conocimiento del profesor, sin embargo, ¿las evidencias de conocimiento del formador permitirán estructurar, en este caso, un modelo similar a MTSK o a alguno de los modelos de conocimiento del profesor existentes? Sabemos también que enseñar a enseñar es algo más que enseñar matemáticas, ¿qué caracteriza el contenido de la formación? ¿Podemos identificar evidencias de conocimiento en relación con los pilares de conocimiento, práctica e identidad de Ponte (2012)?

Con la apertura hacia los datos que requiere la aproximación metodológica de esta investigación, son preguntas que pasan a un segundo plano pero que pueden contribuir a nuestro análisis desde el punto de vista de su pertinencia en la línea de investigación sobre conocimiento del formador.

Figura 11.

Organización de los referentes teóricos y red de preguntas.



CAPÍTULO II: PROCESO METODOLÓGICO

Organización del capítulo

2.1 Pregunta y objetivos de investigación

2.2 Caracterización del estudio

2.3 Diseño de investigación: estudio de caso

2.3.1 Descripción del caso

2.3.1.1 Contexto. La formación inicial de maestros de Educación Primaria en la Universidad de Huelva, en el área de Didáctica de las Matemáticas.

2.3.1.2 La asignatura. Didáctica de las matemáticas para la Educación Primaria III: Las formas, las figuras y sus propiedades.

2.3.1.3 El informante: Lucas

2.4 Técnicas de recogida de la información

2.5 Técnicas de análisis de la información

2.1 Pregunta y objetivos de investigación

Teniendo en cuenta las líneas abiertas de investigación que surgen de los trabajos previos, parece especialmente relevante para el área recoger y codificar evidencias de conocimiento del formador. Esto contribuiría a que las aproximaciones a modelos de conocimiento del formador fuesen concretándose y pudiésemos cosificar la teorización del conocimiento del formador en una forma estructurada para aplicarlo a los distintos escenarios donde se acusa su ausencia –formación o selección de formadores, por ejemplo. No obstante, hay preguntas intermedias en relación con el conocimiento del formador que podemos aglutinar bajo la pregunta de investigación:

¿Cómo es el conocimiento profesional de un formador de estudiantes para maestro de Primaria, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la Didáctica de las Matemáticas?

Responder a esta pregunta implica reflexionar sobre diferentes aspectos. De un lado, consideraremos su *conocimiento profesional*, en el sentido de conocimiento para la enseñanza de una asignatura que versa sobre *Didáctica de las matemáticas*, incluyendo contenido matemático y conocimiento didáctico del contenido. La primera de las consideraciones no implica que no reconozcamos otro tipo de saberes provenientes de otros roles del formador –por ejemplo, como investigador-. La segunda concreción, muestra un contexto de análisis que tiene consecuencias respecto del conocimiento que puede llegar a movilizarse. Estas dos particularidades, unidas al trabajo con *estudiantes para maestro de Primaria*, sirven para focalizar nuestro trabajo en la etapa de formación inicial y en el contexto formal de Grado de Maestro en Educación Primaria.

Para conseguir una respuesta completa y atendiendo, como hemos mencionado, a las preguntas intermedias que se derivan de los trabajos anteriores, generamos las preguntas auxiliares:

- *¿Qué similitudes/diferencias se establecen entre la comprensión y el uso del conocimiento especializado del profesor de matemáticas por parte del formador y del profesor?*

Entendiendo que el formador, como hemos comprobado en los antecedentes de investigación, es un agente activo en la construcción de conocimiento profesional por

parte del EPM, esta pregunta persigue entender cómo es el conocimiento de esos marcos de conocimiento docente (en concreto MTSK) que moviliza el formador de maestros.

- *¿Cómo es el conocimiento matemático del formador de maestros de matemáticas?*

Responder a esta pregunta nos acercaría a los interrogantes en relación con las conexiones que establece el formador. Implica comprender cómo esas conexiones vertebran su conocimiento matemático y qué consecuencias pueden tener para la articulación del conocimiento didáctico que sustentan, en relación con el contenido de la formación.

- *¿Qué posibles categorías de conocimiento estructurarían el conocimiento del formador en relación con la enseñanza del contenido de la formación?*

Entendiendo el contenido como algo más que el conocimiento que se construye en el aula de formación inicial, en relación con la enseñanza de las matemáticas, cabría preguntarse cómo se organiza el conocimiento para enseñar a enseñar, qué evidencias podrían sustentar una aproximación a la estructura de un modelo de conocimiento de conocimiento del formador.

Para dar respuesta a estas preguntas de investigación, formulamos el siguiente objetivo:

- Objetivo principal: Comprender y caracterizar el conocimiento matemático y didáctico matemático que moviliza el formador de maestros durante la enseñanza del contenido de la formación y durante sus reflexiones respecto de la enseñanza.

Para la consecución de este objetivo, se establecen los objetivos auxiliares:

- Objetivo auxiliar 1: Caracterizar el contenido de la formación inicial de maestros en la Universidad de Huelva, en una asignatura de Didáctica de la Geometría.
- Objetivo auxiliar 2: Identificar y codificar evidencias de conocimiento provenientes de la observación del aula de formación inicial.
- Objetivo auxiliar 3: Diseñar una entrevista para la reflexión guiada del formador sobre su práctica como docente.
- Objetivo auxiliar 4: Fundamentar las categorías emergentes de conocimiento, a partir de la saturación de evidencias y en relación con los antecedentes teóricos.

2.2 Caracterización del estudio

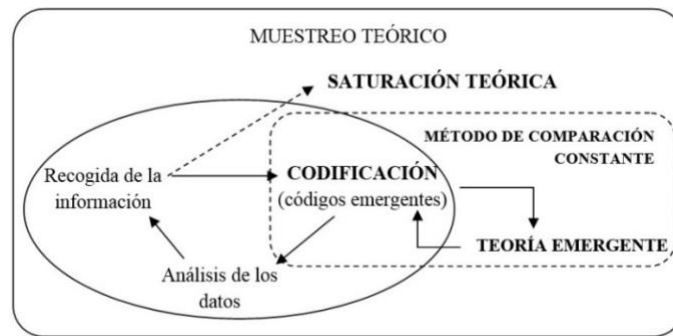
Las decisiones metodológicas que se han tomado en el diseño de la investigación están condicionadas no solo por el tipo de preguntas que formulamos, sino por el tipo de respuestas que queremos conseguir. Adoptar un paradigma de investigación supone reflexionar sobre las bases ontológicas y epistemológicas que lo sustentan. Desde el punto de vista ontológico, consideramos el papel activo que tienen los agentes en cada uno de los procesos sociales en los que se desenvuelven, en los que atribuyen distintos significados, y cómo esos significados y acciones modifican los procesos de manera cíclica (Bryman, 2001). Desde el punto de vista epistemológico, y en consonancia con nuestro posicionamiento ontológico, consideramos que conocer implica interpretar una realidad desde lo subjetivo de la persona que conoce y, por tanto, entendemos que comprender una realidad implica comprender las motivaciones y la influencia de las personas que participan en ella. En coherencia con estos presupuestos, el enfoque de investigación que adoptamos es interpretativo en tanto que el objetivo es conseguir profundizar en una realidad y en sus significados (Bassey, 1999). La elección de un paradigma interpretativo tiene a su vez consecuencias metodológicas en relación con el proceso de investigación y con respecto a las técnicas de obtención y análisis de la información.

Una de las primeras consecuencias de la elección de este tipo de paradigma de investigación es la adopción de una metodología de corte cualitativo, que concuerda con la búsqueda del *cómo* más que del *qué cuantificable* (Bryman, 2001). Las características particulares de los estudios cualitativos, en relación con la comprensión de un contexto y el problema de cuantificación, generan criterios de evaluación de la calidad de la investigación distintos a la fiabilidad y la validez propios de las investigaciones cuantitativas. Lincoln y Guba (1985) proponen los criterios de *credibilidad*, *transferencia*, *confianza* y *confirmabilidad*. La credibilidad se alcanza cuando las explicaciones que se dan son factibles para otros investigadores. Se puede conseguir a través de la validación de los miembros del estudio (Bryman, 2001) o de la triangulación de expertos (Flick, 2007). En el caso de esta investigación, se diseñó una entrevista con el formador para confirmar algunas de las evidencias de conocimiento extraídas de las observaciones. Además, durante el transcurso de la investigación, se han discutido los resultados parciales en el seno del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (SIDM) y en el contexto nacional con expertos

del área (Pascual *et al.*, 2019). En relación con la transferencia, que se formula en sustitución a la validez externa, Lincoln y Guba (1985) proponen que, ante la imposibilidad de reproducir de manera exacta de un contexto social concreto, la amplitud en la descripción del estudio puede facilitar la identificación de contextos, al menos similares, donde podrían aplicarse los resultados. En este sentido, se proporciona una descripción del caso, más allá del informante, en el apartado 2.4.1. En lo que respecta a la *confianza* y la *confirmabilidad*, se comparten todas las evidencias recogidas durante el estudio, en formas de transcripción, de forma anexa a esta memoria. Además, durante el análisis de la información, se irán alternando evidencias de esas transcripciones como muestra de transparencia de la investigación.

2.3 Enfoque metodológico

El diseño de la investigación combina aproximaciones teóricas y de emergencia de los datos, en lo que podría justificarse desde el punto de vista de un proceso *top-down*, *bottom-up* (Grbich, 2003). De esta forma, nos servimos de la sensibilidad teórica que aporta la revisión de antecedentes para comprender la naturaleza de la información en su contexto (Holton, 2007). Esta revisión previa, permite que, como investigadora, pueda centrar la atención en determinados componentes de la realidad observada, pero en ningún momento ha sido tomada como estructuradora previa a la observación. Este matiz hace que la revisión teórica sea compatible con los presupuestos y las técnicas de la *Grounded Theory* como enfoque de la investigación (Pidgeon y Henwood, 2004). El enfoque de la teoría fundamentada se ha mostrado útil en el desarrollo de estudios cualitativos (Charmaz, 2000, 2008; Bryman, 2001) ya que permite adaptar la reflexión del investigador a las evidencias obtenidas de la realidad investigada. Durante el proceso de investigación con base en esta teoría, los momentos de recogida y análisis de la información se alternan en distintos ciclos. De esta manera, el análisis de los datos genera nuevos elementos de comprensión en la recogida de la información. Este proceso iterativo, con base en los datos, permite que se generen teorías y categorías locales de comprensión de la realidad que nos van a permitir aproximarnos al conocimiento del formador de maestros. Las herramientas sobre las que se organiza este enfoque son: *muestreo teórico* (Glasser y Straus, 1967), *codificación* (Charmaz, 2000), *saturación teórica* y *método de comparación constante* (Strauss y Corbin, 1990). La Figura 12 representa nuestra comprensión sobre las interrelaciones de estas herramientas.

Figura 12.*Interpretación de las herramientas de la Grounded Theory*

Cada una de las herramientas de la teoría fundamentada se organiza en consonancia con el proceso de *muestreo teórico* que incluye el “*proceso de recogida de datos para generar teoría, en el que el analista recoge, codifica, y analiza sus datos conjuntamente*” (Glaser y Strauss, 1967, pp. 45). Es la característica principal que distingue la *Grounded Theory* de otros enfoques metodológicos (Charmaz, 2000). En nuestra investigación, se corresponde con el proceso de observación y transcripción de cada una de las sesiones de formación inicial que se han registrado. La *codificación*, clave en este enfoque, consiste en dar nombre o etiqueta a unidades de información que parecen ser potencialmente relevantes desde el punto de vista de conformación de la teoría (Charmaz, 2000). Al contrario que en otras aproximaciones, no se codifican las unidades de información atendiendo a unas categorías preestablecidas, sino más bien en dirección opuesta. En nuestra investigación, por ejemplo, el trabajo con las transcripciones del aula de formación inicial comenzó con la identificación de los fragmentos relevantes, en el discurso del formador o en su gestión de la formación, que se etiquetaron, en un primer momento, de forma que expresasen el conocimiento identificado en un nivel local. A medida que se fueron sucediendo las observaciones, y una vez que se decidió incluir la entrevista —el muestreo teórico permite la inclusión de nuevas técnicas de recogida durante la investigación—, esos códigos se fueron refinando y reescribiendo para agruparse en torno a lo que serían las protocategorías de conocimiento del formador, que a su vez se utilizaban para analizar nuevos datos. Este proceso de organización, comparación y ajuste, se enmarca dentro del *método de comparación constante*. Consideramos la *saturación teórica* de los códigos generados cuando no apareció información nueva o relevante con respecto a las categorías, y cuando era posible explicar el análisis de nuevas unidades de información con los códigos previamente generados (Strauss y Corbin, 1998).

2.4 Diseño de investigación: estudio de caso

La elección de un diseño de investigación representa cómo prioriza el investigador una serie de dimensiones en el proceso de investigación, que son: relaciones entre variables, generalización, comprensión del comportamiento y los significados, interrelaciones en fenómenos sociales (Bryman, 2001). En línea con nuestro posicionamiento interpretativo, hemos escogido el estudio de caso como diseño de investigación. El estudio de caso tiene como objetivo profundizar en la comprensión de la complejidad de una situación particular, un sistema cerrado (Bassey, 1999, Stake, 1995). Nuestra elección es comprender el comportamiento y los significados que subyacen al conocimiento del formador, alejándonos de un posicionamiento de relaciones causa-efecto o de corte valorativo. La investigación que hemos desarrollado se corresponde con una aproximación inductiva al conocimiento del formador, en el sentido expuesto por Bryman (2001). Esto implica que comprender el caso en el que nuestro informante, Lucas, se desenvuelve como formador de maestros en la etapa de formación inicial, nos acerca a la comprensión de un marco general de conocimiento del formador. En este sentido, no se pretende generalizar los resultados de esta investigación como “el formador debe” o “el formador sabe”, sino que se pretende establecer unos presupuestos teóricos que permitan vertebrar las futuras investigaciones sobre conocimiento del formador. La generalización no es en relación con la población de los formadores, sino en relación con la construcción de un modelo teórico de comprensión del conocimiento del formador. Se trata, por lo tanto, de un *estudio de caso instrumental* (Stake, 1995) en el que el foco no recae en las características particulares del caso, sino en su potencial para general teoría al respecto del fenómeno que representa.

2.4.1 Descripción del caso

Aunque nuestro foco de atención esté en el conocimiento del formador que sustenta la enseñanza en el aula de formación inicial, o el que emerge en la reflexión del formador, entendemos que el caso de estudio engloba otros elementos más allá de las características del informante. Comprender cómo es el conocimiento de nuestro informante, Lucas, implica reflexionar sobre los EPM con los que interactúa, la formación de maestros en la Universidad de Huelva y la guía didáctica de la asignatura que imparte; además, de las características de su perfil como formador.

2.3.1.1 Contexto. La formación inicial de maestros de Educación Primaria en la Universidad de Huelva, en el área de Didáctica de las Matemáticas.

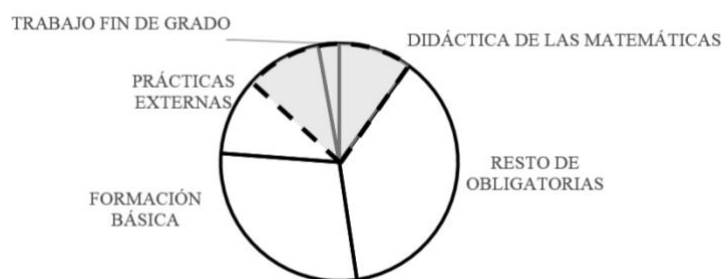
La formación inicial de maestros de Educación Primaria en la Universidad de Huelva, según el plan de estudios actual, comprende un total de 240 créditos ECTS distribuidos en ocho semestres. Los créditos de formación se dividen en asignaturas de distinta naturaleza: formación básica (60 créditos ECTS), obligatorias (100 créditos ECTS), optativas (30 créditos ECTS), prácticas externas (44 créditos ECTS) y trabajo fin de grado (6 créditos ECTS). Las asignaturas de *formación básica* comprenden las materias que son comunes a todos los grados en Educación Primaria en todas las universidades españolas. Las asignaturas *obligatorias* son propias de los distintos planes de estudio de cada universidad y por lo tanto pueden variar de un centro a otro. Las asignaturas *optativas* constituyen la elección de una mención específica dentro de la formación del EPM y sirven para concretar su perfil profesional hacia la Educación Especial, la Educación Física, la Educación Musical o la enseñanza de una Lengua Extranjera. Las *prácticas externas* suponen el primer contacto formal de los EPM con la realidad de enseñanza y en el Grado en Educación Primaria de la Universidad de Huelva, se concreta en dos periodos de 20 créditos ECTS y 24 créditos ECTS en el sexto y octavo semestre de formación, respectivamente. De estos dos periodos, es el segundo de ellos es el que está dedicado de forma explícita al desarrollo de la docencia en escuelas de Educación Primaria. Finalmente, el *trabajo fin de grado* consiste en la elaboración de un informe de distinta naturaleza –revisión teórica, investigación didáctica o innovación didáctica–, con el que el EPM debe demostrar las competencias desarrolladas durante su formación.

Las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas dispuestas en el plan de formación de maestros, se enmarcan dentro de las asignaturas obligatorias y suponen un total de 21 créditos ECTS que se organizan en cuatro asignaturas: *Introducción a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (3 créditos ECTS –segundo semestre), *Didáctica de las Matemáticas para la Educación Primaria I: Números y operaciones* (6 créditos ECTS –cuarto semestre), *Didáctica de las Matemáticas para la Educación Primaria II: la construcción del lenguaje matemático, magnitudes y medida y tratamiento de la información, azar y probabilidad* (6 créditos ECTS –quinto semestre) y *Didáctica de las Matemáticas para la Educación Primaria III: Las formas, las figuras y sus propiedades* (6 créditos ECTS –séptimo semestre). Además, hay ocasiones en las que los alumnos cursan las prácticas externas del octavo semestre bajo supervisión de un

formador especializado en el área de Didáctica de las Matemáticas, y casos en los que el trabajo fin de grado se realiza con foco en algún elemento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Con todo ello, la formación de los maestros de Educación Primaria en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, oscila entre los 21 créditos ECTS y los 39 créditos ECTS –en el segundo periodo de prácticas, se comparte la carga crediticia con la enseñanza de alguna materia de mención. En la Figura 13, se puede dimensionar el peso de la formación en Didáctica de las Matemáticas dentro del plan de estudios.

Figura 13.

La formación en Didáctica de las Matemáticas (máximos) en el Grado de Educación Primaria en la Universidad de Huelva



A pesar de que la formación en Didáctica de las Matemáticas es relevante y está presente en todos los cursos del grado, el éxito de los EPM en el desarrollo de estas asignaturas está marcado por dificultades de distinto tipo. Trabajos como el de Montes *et al.* (2021) o Pascual *et al.* (2019) ponen de relieve las dificultades de los EPM en la formulación de problemas de Primaria o en la construcción de definiciones geométricas, que son ejemplos de las necesidades de formación de los EPM en el contexto en el que se desarrolla la investigación. Las dificultades en relación con la comprensión profunda del contenido matemático de los EPM son comunes también en otros contextos de formación inicial y constituyen una variable a tener en cuenta para entender los procesos de formación inicial de maestros y, en particular, el conocimiento que moviliza el formador. De esta forma, aunque, como hemos mencionado con anterioridad, es el modelo MTSK el que articula la formación de maestros en Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Huelva, independientemente del bloque curricular al que haga alusión la asignatura, es común el desequilibrio entre el trabajo en conocimiento matemático y el trabajo en conocimiento didáctico del contenido en detrimento del segundo.

2.3.1.2 La asignatura. Didáctica de las matemáticas para la Educación Primaria III: Las formas, las figuras y sus propiedades.

De las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas que establece el plan de estudios en la Universidad de Huelva, nos centraremos en *Didáctica de las matemáticas para la Educación Primaria III: Las formas, las figuras y sus propiedades*, ya que las observaciones de aula que se registraron se corresponden con el desarrollo de esta asignatura. Esta particularización no está sujeta a la presuposición de que el conocimiento del formador tenga distinta estructura dependiendo de la materia que imparta, sino que pretende mostrar una imagen más completa del contexto en el que se desarrolló la investigación. Los objetivos de aprendizaje específicos de la asignatura observada, se muestran reorganizados en la Tabla 3.

Tabla 3. *Objetivos, y conocimiento en su base, de la asignatura observada.*

Conocimiento base del objetivo	Objetivos de aprendizaje de la materia
Conocimiento sobre las matemáticas	O1. Conocer los principios fundamentales relativos a los contenidos geométricos de las matemáticas escolares, reconociendo relaciones entre ellos. O3. Analizar, razonar y comunicar eficazmente argumentaciones matemáticas relativas a los contenidos geométricos. O6. Identificar distintas situaciones, fenómenos y representaciones relativos a los contenidos geométricos de las matemáticas escolares, describiendo sus diferencias en cuanto a los contenidos como objeto de enseñanza-aprendizaje.
Conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas	O4. Conocer y relacionar los elementos del currículo respecto a la enseñanza de los contenidos geométricos en primaria (objetivos, contenidos, recomendaciones metodológicas, evaluación), describiéndolos críticamente y relacionándolos con propuestas de enseñanza. O5. Cuestionarse y argumentar qué contenidos geométricos enseñar en primaria, para qué y cómo, superando visiones simplificadoras e integrando consideraciones del currículo oficial y de la investigación sobre el aprendizaje de los contenidos. O7. Analizar críticamente propuestas, materiales y recursos para la enseñanza de los contenidos geométricos de primaria, argumentando posibles beneficios y obstáculos para el aprendizaje. O8. Diseñar materiales y actividades para la enseñanza de los contenidos geométricos de primaria y la evaluación de su aprendizaje, considerando cuestiones sobre el contenido, el aprendizaje y la enseñanza y haciendo explícitas las decisiones tomadas y sus razones. O9. Justificar el posible proceso de pensamiento matemático de alumnos manifestados en sus producciones, relativos a los contenidos geométricos de las matemáticas escolares, considerando nociones sobre el aprendizaje de dichos contenidos.
Conocimiento sobre prácticas profesionales	O2. Enunciar y resolver problemas matemáticos relativos a los contenidos geométricos de las matemáticas escolares en diversas situaciones y relacionándolo con consideraciones sobre su aprendizaje. O10. Identificar modos de comunicación y estrategias de interacción en el aula de matemáticas, argumentando sus implicaciones para el aprendizaje.
Conocimiento sobre identidad profesional	O11. Valorar el análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje matemáticos como vía de aprendizaje como profesor. O12. Valorar el trabajo con compañeros como vía de aprendizaje como profesor.

Como se puede observar, el diseño de la asignatura, desde la explicitación de los objetivos de aprendizaje, combina elementos de conocimiento matemático y didáctico matemático. Esto sitúa la investigación en un contexto en concreto en relación con la estructura de las distintas asignaturas en la formación inicial de maestros (en el sentido, anteriormente mencionado de Watson y Mason, 2007, Sánchez y García, 2008). Además, la estructuración del conocimiento que se pretende construir, acorde con el modelo de conocimiento MTSK, unida al trabajo sobre prácticas profesionales como el diseño de tareas y planes de clase (Blömeke *et al.*, 2008) o la formulación de problemas escolares (Carrillo, Montes y Contreras, en prensa) y el tratamiento transversal de contenido relacionado con la formación de una identidad profesional, convierten la asignatura en un buen escenario de análisis de conocimiento del formador desde el punto de vista de los antecedentes teóricos consultados.

En relación con el temario que se desarrolla en la asignatura, con base en los contenidos curriculares de la etapa de Educación Primaria, se distinguen los bloques: (i) *Introducción a la enseñanza y aprendizaje de los contenidos geométricos en Educación Primaria*, (ii) *La situación y orientación en el espacio, distancias y giros*; (iii) *Formas planas*; (iv) *Cuerpos geométricos*; (v) *Regularidades y simetrías*; y, (vi) *Diseño y análisis crítico de propuestas de enseñanza de los contenidos geométricos en Educación Primaria*. Durante el desarrollo de las sesiones, los contenidos relacionados con cada uno de los bloques del temario no presentan una división tal cual se observa en la guía (Anexo I). Como muestra de las relaciones que establece el formador entre cada uno de estos bloques, aunque predomina el trabajo en relación con el bloque de *Formas planas*, podemos observar cómo se apoya en construcciones relacionadas con la simetría en el plano, por ejemplo, que además es foco de interés en la entrevista con el formador.

La base teórica sobre la que se apoya la asignatura incluye materiales específicos para maestros de Primaria (Carrillo *et al.*, 2016; Castro, 2001) en los que se desarrollan algunos conceptos básicos de la matemática escolar desde el punto de vista de su enseñanza. Sustentan el discurso sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, trabajos como el de Tall y Vinner (1981), sobre imagen y definición conceptual, el modelo de Van Hiele (que puede consultarse en Jaime *et al.*, 1990), desde el punto de vista de aprendizaje y enseñanza de los conceptos geométricos y aportaciones sobre el uso de materiales en la enseñanza de la geometría (Álvarez, 1996; Coriat, 2001).

2.3.1.3 El informante: Lucas

El informante de esta investigación, de pseudónimo Lucas, ha sido formador de maestros de Educación Primaria (y en menor medida, de maestros de Educación Infantil) durante los últimos 39 años. El perfil de Lucas como formador, concuerda con la conceptualización de *didactician* (Beswick y Chapman, 2012; Coles, 2014), ya que compagina su rol como formador de maestros con su actividad como investigador en el área de Didáctica de las Matemáticas. Los formadores de este perfil pueden hacer transferencia del conocimiento que se origina en la investigación hacia la formación inicial, permitiendo que los EPM comprendan mejor los distintos modos de enseñanza (Jaworski y Huang, 2014). Podemos suponer, en línea con trabajos anteriores (Escudero-Ávila *et al.* 2021), que las relaciones entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico matemático en este perfil de formador, con base en la reflexión sobre distintos elementos de conocimiento, permiten tomar decisiones fundamentadas en relación con el conocimiento que necesita un maestro y el diseño de programas de formación.

La formación base de Lucas es de Licenciado en Matemáticas, con posterior especialización en el área de Didáctica de las Matemáticas a través de sus estudios de Doctor en Pedagogía (en ese momento no existía una nomenclatura explícita para el área de Didáctica de las Matemáticas en los títulos de doctorado). A pesar de que el título de licenciatura en Matemáticas, unido a la capacitación pedagógica, habilita para impartir clases en la etapa de Educación Secundaria, Lucas no tiene experiencia en esa etapa. Podemos decir, por tanto, que la experiencia profesional de Lucas es prácticamente exclusiva en formación inicial de maestros. A pesar de ello, se ha visto envuelto en escenarios de trabajo colaborativo con maestros de primaria, con los que ha podido participar en su desarrollo profesional, manteniendo el contacto con la realidad de aula de forma indirecta y ha ejercido como formador en contextos de formación permanente de profesores de Primaria y Secundaria, a través de cursos específicos de los distintos CEPs (Centros de Formación de Profesores) de la Comunidad Autónoma de Andalucía.

La actividad investigadora de Lucas ha sido en la línea de conocimiento y desarrollo profesional del profesor, con intereses relacionados con las creencias, la resolución de problemas y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Este bagaje de investigación en torno al perfil del profesor, unido a las creencias de Lucas sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, configuran una idea en el formador sobre qué es un maestro y cuál debe ser su conocimiento. Aunque las creencias de Lucas no serán

foco de esta investigación, reconocemos su influencia en las distintas facetas de conocimiento del formador.

2.5 Técnicas de recogida de la información

Los instrumentos de recogida de la información que hemos usado en esta investigación son la observación no participante y la entrevista semiestructurada (Flick, 2007). La observación no participante, que incluyó la recogida de notas de campo y el intercambio de impresiones con el formador antes y después de las sesiones, se registró mediante la grabación en audio y video de las sesiones. Se registraron un total de cinco sesiones, de dos horas de duración cada una, que han sido nombradas como Ob-x/y para identificar el orden cronológico en el que se recogieron los datos. La tabla 4, recoge una síntesis de los contenidos que vertebran cada una de las sesiones.

Tabla 4. *Sesiones videograbadas y contenido abordado*

Sesión	Contenido que se trabaja
Ob-7/10	Geogebra como recurso para el aprendizaje de los EPM y la enseñanza de la geometría. Elementos de geometría del plano.
Ob-11/10	Vectores de traslación. La composición de traslaciones. Simetría como isometría en el plano.
Ob-18/10	Construcción inductiva de la definición de polígono. Diagonales y áreas de polígonos regulares, concavidad/convexidad, suma de ángulos interiores.
Ob-21/10	Líneas notables de los triángulos. Clasificación y criterios de clasificación. Diseño de actividades sobre triángulos.
Ob-25/10	Ejes de simetría en los polígonos, el caso del paralelogramo. Niveles de Van Hiele en tarea de paralelogramos. Circunferencias circunscritas, construcción del centro de la circunferencia. Triángulos, ternas pitagóricas.

La entrevista semiestructurada, resultado del análisis de la Ob-11/10, se construyó con la intención de confirmar algunos de los resultados parciales de la investigación y de ahondar en la comprensión del conocimiento didáctico del contenido de la formación de Lucas. El tema matemático escogido para la entrevista fue la simetría, de ahí que las evidencias de conocimiento que se desprenden de ella se organizan con el código En-S. Para realizar la entrevista nos apoyamos en la visualización de episodios de formación para favorecer la evocación del recuerdo. El guion de preguntas que inicialmente quisimos que orientasen la entrevista, fue:

- *¿Cuáles son los elementos matemáticos más importantes de cara a la construcción, por parte de los maestros, de su conocimiento sobre simetrías?*
- *¿Qué te aporta Geogebra, como formador, para promover la construcción de conocimiento profesional por parte de los EPM? ¿Aporta algo en cuanto a las simetrías en particular? ¿Conoces algún otro recurso que permita esto?*
- *¿Geogebra te permite fomentar el establecimiento de relaciones entre contenidos por parte de los EPM? ¿Qué te aporta en relación con las formas de demostrar? ¿Crees que aportaría lo mismo a un maestro que impartiera clase en Primaria?*
- *¿Crees que ellos comprenden la utilidad de Geogebra para enseñar matemáticas? ¿Por qué?*
- *¿Qué es necesario para elegir, entre varios, un buen recurso para la enseñanza de las matemáticas? ¿Enseñas este tipo de cosas?*
- *¿Qué dificultades suelen tener los EPM al tratar con las simetrías? ¿Geogebra aporta algo para abordarlas?*
- *¿Qué dificultades suelen tener los niños de primaria al tratar con las simetrías? ¿Geogebra aporta algo en este contexto?*
- *¿Qué crees que puede diferenciar tu clase sobre simetrías de una ‘buena’ clase de primaria sobre simetrías? [Poner video] ¿En qué te gustaría que se diferenciara?*
- *Si tuvieras libertad para elegir qué enseñar, con estudiantes para maestro con una base matemática adecuada, ¿en qué aspectos incidirías, en relación con la simetría?*

Las grabaciones en video y audio de las sesiones de clase y la grabación en audio de la entrevista fueron transcritas para el análisis de la información.

2.6 Técnicas de análisis de la información

Para el análisis de la información se seleccionaron episodios, de una u otra fuente, que han sido organizados en función del contenido de la formación abordado, con la intención de ser agrupados y generar categorías que nos permitan comprender qué se está trabajando en el aula de formación inicial y qué conocimiento profesional subyace en la planificación y la gestión de esas situaciones. Las evidencias de conocimiento provenientes de la

observación de aula se codificaron como Ob-x/y: n-m, por ser obtenidas de la fuente observación (“Ob”), el día y el mes en que se grabaron (x/y) y las líneas de la transcripción completa en las que se encuentra el fragmento (n-m). Por su parte, las evidencias de conocimiento provenientes de la entrevista se codificarán como En-S: n-m, por provenir de la fuente entrevista (“En-S”) y por las líneas a las que nos queremos referir de la transcripción completa.

Los significados que se desprenden del discurso de Lucas se han analizado desde el punto de vista del análisis de contenido (Krippendorff, 1990), siguiendo tres fases: descripción, análisis e interpretación (Johnson, *et al.*, 2014). La fase de descripción se corresponde con la selección de unidades de información dentro de las transcripciones en forma de extractos que relatan la situación del aula; en el análisis, hemos identificado características de estas unidades de información para establecer relaciones entre ellas y escribir posibles categorías de conocimiento del formador; y finalmente, para la interpretación de los datos en su conjunto, hacemos una lectura transversal de las evidencias para conseguir fundamentar nuestra comprensión del conocimiento del formador.

La organización del análisis sigue, en primer lugar, un orden cronológico de recogida de la información. En consonancia con las bases metodológicas que hemos establecido, este orden nos permite mostrar la evolución de los distintos elementos de conocimiento identificados en cada una de las transcripciones que hemos analizado. De esta forma, las evidencias encontradas en los primeros análisis sirven como herramientas para articular los análisis posteriores, lo que nos permitirá establecer conclusiones sobre categorías de conocimiento del formador que las agrupen.

La validación del análisis se consigue mediante los procesos de triangulación de consenso entre expertos (Flick, 2007) y el contraste entre fragmentos procedentes de distintos instrumentos de recogida, como aproximación multi-metodológica (Baxter y Lederman, 2001)

CAPÍTULO III: ANÁLISIS DE LOS DATOS

Organización del capítulo

- 3.1 Análisis de la observación de aula Ob-07/10
- 3.2 Análisis de la observación de aula Ob-11/10
- 3.3 Análisis de la entrevista con el formador En-S
- 3.4 Análisis de la observación de aula Ob-18/10
- 3.5 Análisis de la observación de aula Ob-21/10
- 3.6 Análisis de la observación de aula Ob-25/10
- 3.7 Análisis transversal de las evidencias de conocimiento del formador
 - 3.7.1 Respecto al conocimiento del contenido de la formación
 - 3.7.2 Respecto al conocimiento didáctico del contenido de la formación

3.1 Análisis de la observación de aula Ob-07/10

En esta sesión se están abordando contenidos geométricos de Educación Primaria con la ayuda del *software* Geogebra. Lucas pretende que el trabajo de los EPM durante el curso se apoye en esta herramienta y el objetivo para la sesión, declarado por él mismo, es *intentar reflexionar sobre las características de geometría dinámica que tiene Geogebra, que iremos viendo a lo largo del curso [...] vamos a dedicar casi dos tercios de la clase a usar, a conocer la herramienta [a la vez que] vamos a poner en cuestión algunas ideas o conceptos geométricos* (Ob-07/10: 3-15). Para ello, los alumnos disponen de su ordenador personal y una de las alumnas, bajo las instrucciones de Lucas, trabaja en la mesa tecnológica del formador que está conectada a un proyector.

Tal como declara el formador, la clase se invierte en ir conociendo las herramientas preestablecidas de Geogebra (Figura 14), profundizando en los contenidos matemáticos que representan, desde el concepto de punto hasta las isometrías en el plano que son contenidos del curso. Además, también se profundiza en algunos botones de edición.

Figura 14.

Herramientas fijas de Geogebra usadas en el aula



Durante la sesión, Lucas va interrogando a sus EPM sobre el conocimiento que poseen de los distintos conceptos matemáticos involucrados y retoma sus respuestas, intentando que las definiciones aportadas por los EPM ganen precisión, como podemos ver en el extracto Ob-07/10: 117-124. A colación de la primera de esas herramientas de Geogebra, Lucas discute con sus alumnos sobre lo que es un punto y busca que concreten la definición hacia el par ordenado que necesita un sistema de coordenadas, en este caso cartesianas, para identificar un lugar en el plano.

Lucas: [...] ¿Qué es un punto? ¿Alguien me puede decir definir punto?

Alumno: Una referencia de un plano.

Lucas: Una referencia de un plano, buen comienzo. Una referencia en un plano, referencia, ¿en qué sentido? Piensa en un plano, ¿qué es una referencia? ¿Qué elementos te tienen que dar para tener una referencia?

Alumno: Unas coordenadas.

Extracto Ob-07/10: 117-124

Esta dinámica se repite cuando se trabajan los conceptos matemáticos de recta, semirrecta, segmento, línea poligonal, rectas perpendiculares y paralelas, mediatriz y bisectriz, recta tangente, polígono, cuerdas en una circunferencia y, entre ellas, diámetro, arco de circunferencia y, ángulo. El tratamiento que se hace en el aula de estos conceptos es equiparable al que puede hacer un profesor con sus alumnos de matemáticas. Lo característico en este contexto es que se relaciona con una reconstrucción de conceptos de etapas educativas anteriores que persigue que los EPM expliciten su conocimiento para enriquecerlo desde el punto de vista matemático. Esta actividad de reconstrucción de definiciones, recurrente durante la sesión, supondría una evidencia tanto de conocimiento matemático del formador -el necesario para analizar los elementos críticos en las definiciones geométricas- como de conocimiento sobre cómo (re)enseñar estos contenidos matemáticos a los EPM. Informa, por lo tanto, de su conocimiento sobre una estrategia de enseñanza basada en el análisis profundo de los conceptos geométricos y apoyada, fundamentalmente, como veremos más adelante, en el análisis de ejemplos.

Aunque el trabajo matemático que se realiza en el aula tiene sus bases en los contenidos curriculares de la etapa de Educación Primaria, en ocasiones, sí se profundiza en conceptos que trascienden la geometría escolar. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso de las posiciones relativas de rectas no coplanarias, en concreto con respecto al paralelismo (extracto Ob-07/10: 292-305):

Lucas: Pero estamos hablando de rectas coplanarias, rectas que están en el mismo plano, pero las rectas pueden no estar en el mismo plano [Se acerca a su mesa y se dirige a la alumna sentada en la su mesa] Ayúdame, por favor, sostén el folio horizontal, imaginaos... los folios no dejan de ser partes de un plano ¿verdad? ¿Lo veis claro? Ahora mismo son diferentes de diferentes planos, que son infinitos... [Separa su folio del de la alumna y lo gira] Hemos construido planos paralelos, ¿vale? Un plano y otro son paralelos. Por mucho que yo prolongue este hacia allá, hacia allá... los planos van a seguir paralelos. Vale, pues imaginamos una recta cualquiera pintada en mi folio y una recta pintada en folio, a lo largo de los dos [Los folios forman una cruz], esas rectas, ¿cómo serían? [Espera respuestas]

Lucas: Si los planos son paralelos, esas dos rectas son paralelas y sin embargo, no son paralelas en el sentido de paralelas en el mismo plano, las posiciones relativas de dos rectas las podemos estudiar en el mismo plano o coplanarias, o en distintos planos.

Extracto Ob-07/10: 292-305

El conocimiento sobre las posiciones relativas de rectas que no son coplanarias, no forma parte del conocimiento que debe adquirir un alumno de Educación Primaria y por lo tanto puede considerarse no exigible a un maestro de esta etapa, en tanto que no le es útil en su práctica docente. De esta forma, el conocimiento de Lucas sobre la posibilidad de que las rectas se sitúen en distintos planos y las consecuencias de ello, forma parte del cuerpo de conocimiento que, como formador, no comparte con el colectivo que forma. Lucas identifica este “límite” y declara que a pesar de que no es contenido curricular de la etapa de Educación Primaria, los EPM podrían reflexionar al respecto. El extracto Ob-07/10: 308-311, respecto a la aclaración de Lucas en el aula de formación inicial informaría entonces, no sólo de su conocimiento sobre los contenidos del currículum de Educación Primaria, sino también sobre la necesidad de que el conocimiento del profesor (en este momento EPM) vaya más allá que el contenido de la etapa, tanto en extensión como en fundamento:

Lucas: [...] En primaria se suelen estudiar las rectas coplanarias, las rectas no coplanarias no se suelen trabajar en primaria, pero es interesante que vosotros reflexionéis sobre que esa posición relativa depende de si están o no en el mismo plano y que a la vez os preguntéis qué ocurriría en distinto plano, porque eso os va a dar una visión más rica del paralelismo.

Extracto Ob-07/10: 308-311

La idea de rectas paralelas, lleva también a Lucas a desarrollar su conocimiento sobre otras geometrías, pero esta vez con una aplicación orientada al aprendizaje de los alumnos de Educación Primaria. En este caso, al construir la definición de rectas paralelas con los EPM se ha rescatado la idea de que las rectas paralelas son aquellas que aunque se prolonguen no se cortan. Lucas pide a los EPM que enuncien ejemplos cotidianos que pudiesen tomarse como ejemplos de rectas paralelas en los que la perspectiva rompe con esa idea de rectas que nunca se cortan, como los raíles en los tramos de vías de tren que son rectos. El conocimiento de Lucas sobre distintos tipos de geometría al explicar la situación (extracto Ob-07/10: 346-362), añade otra nota distintiva entre el conocimiento matemático del formador y el conocimiento matemático del profesor:

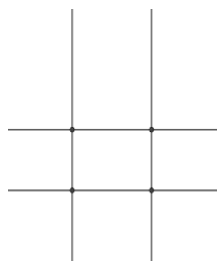
Lucas: [Parece] Que se cortan, ¡caray! Entonces, fijaos, definimos rectas paralelas como aquellas que se prolongan pero que no se cortan, que no se encuentran en un punto y sin embargo, nuestra vista en el ejemplo más cotidiano que podemos encontrar parece que se llegan a cortar [...] de hecho en geometría, no en geometría euclidiana que es la que trabajaremos aquí, en geometría afín, en geometría proyectiva, el concepto de paralela no es correcto desde ese punto de vista, porque las

rectas paralelas en otras geometrías sí convergen, convergen en el infinito.

Extracto Ob-07/10: 346-362

Consciente de lo inexacto de la expresión de que las rectas paralelas son aquellas que no se cortan y de los posibles obstáculos didácticos que esta idea conllevaría en los futuros aprendizajes de los alumnos a los que los EPM acabarán dando clases, Lucas reformula la idea de rectas paralelas como aquellas cuya distancia es constante en cada punto, como se puede observar en el extracto Ob-07/10: 364-374:

Lucas: La idea de paralela que debemos trabajar en primaria yo no la trabajaría desde esa perspectiva de que no se cortan nunca, aunque el comienzo sea intuitivamente así, hay una cosa que es mucho más potente... y es que la distancia de un punto y su equivalente en la otra recta, es siempre la misma. Si yo comparo un punto y el que está en frente, entre comillas, la distancia entre un punto y el que está enfrente es siempre la misma... es decir, la perpendicular a dos rectas paralelas en cualquiera de sus puntos me marca una distancia, si lo vuelvo a hacer me marca una distancia... [Dibuja en la pizarra dos paralelas y luego sendas perpendiculares]



Lucas: Pues estas distancias [Señalando los puntos], son siempre la misma. Esa idea es más potente geoméricamente que la idea de que no se corten.

Extracto Ob-07/10: 364-374

En relación con estos últimos extractos, identificamos el conocimiento matemático del formador de maestros como más extenso que el conocimiento exigible a un maestro de matemáticas, desde un punto de vista cualitativo. Además de conocimiento sobre el currículum de Educación Primaria, Lucas evidencia un conocimiento matemático que le permite establecer relaciones entre los contenidos curriculares y otros más avanzados que dan cuenta de la fluidez en el conocimiento matemático del formador.

No obstante, el contenido matemático que se construye en la sesión es principalmente de la etapa escolar y se combina con conocimiento sobre la enseñanza en ese contexto. Las referencias a esta etapa son una constante en el discurso de Lucas, quien, a la vez que construye un concepto con los EPM, suele reflexionar sobre esa idea en la etapa de Educación Primaria. Por ejemplo, durante la construcción del concepto de línea

poligonal, Lucas genera un ejemplo de línea poligonal que satisface una de las características del concepto, ser un conjunto concatenado de segmentos, pero no la relativa al cambio de dirección de estos segmentos (extracto Ob-07/10: 211-220). El objetivo de Lucas es discutir con los EPM si esa representación se corresponde con una línea poligonal y en caso de ser así, su potencialidad como ejemplo de enseñanza del concepto (extracto Ob-07/10: 244-253)

Lucas: Conjunto de segmentos concatenados, concatenados en el sentido de que el fin de uno es el principio de otro. Pero, fíjate, esto es un conjunto de segmentos concatenados. [Dibuja en la pizarra]



Lucas: Imagina que siguen en la misma recta. ¿Esto es una poligonal?

Alumno: Sí... porque puede ser una plana.

Lucas: Podríamos considerarlo como un caso particular de poligonal, pero no deja de ser una poligonal conflictiva. La poligonal, en este caso, habría que ver cómo estudiarla, porque las poligonales tienen una característica, para que las consideremos poligonal en el sentido amplio, y es que los segmentos concatenados, cada vez, cambian de dirección. [...]

No tiene sentido trabajarla como poligonal, más bien la llamaremos un segmento dividido en segmentos.

Extracto Ob-07/10: 211-220

Lucas muestra conocimiento sobre la potencialidad de los ejemplos de enseñanza en Educación Primaria, que en cierta forma traslada también a su formación hacia los EPM. En el extracto Ob-07/10: 244-253, en el que se están comparando ejemplos de líneas poligonales, se sirve de la idea de transparencia del ejemplo para diferenciar las dos representaciones. Además, en el sentido de la teoría de la variación, propone a los EPM reflexionar sobre la inclusión de otras dimensiones de variación para poner el foco en estas, como la idea de que varios segmentos pueden compartir dirección mientras que no sean consecutivos.

Lucas: [...] El ejemplo que yo pondría de poligonal para explicarla nunca sería este, este es un ejemplo de poligonal poco transparente, no nos daría información real, entonces, si eso es poligonal y luego le enseñas a un niño una así [Dibuja en la pizarra]



Estos dos son claramente diferentes, esto me da una idea mucho más potente de lo que es poligonal [Señala el último dibujo] segmentos que en cada uno de ellos van cambiando dirección; puede haber direcciones iguales, claro, pero no seguidas, y podríais dibujarlas a propósito para que vuestros alumnos comprendieran también esa parte, iguales direcciones, pero no seguidas.

Extracto Ob-07/10: 244-253

El conocimiento de Lucas, sobre la ejemplificación en el aula de matemáticas, se extiende hacia los conceptos de no ejemplo y contraejemplo, que se han abordado en el aula con anterioridad. Dentro del concepto de polígono, Lucas trabaja con sus alumnos la condición de polígono regular como equilátero y equiángulo, haciéndoles ver las consecuencias de no exigir alguna de las condiciones. La idea que intenta transmitir en el extracto Ob-07/10: 492/508 tiene que ver con cómo generar ejemplos de enseñanza que permitan poner la atención en alguna característica en concreto del objeto matemático, de forma que se muestre prominente respecto a otras. Es una idea similar a la de la línea poligonal anterior. En este caso, en el contexto del concepto de polígono regular, se exploran los casos de cuadrados, rombos y rectángulos. La idea es que los EPM logren identificar los no ejemplos de rombos y rectángulos como cuadriláteros regulares al no cumplir las condiciones de equiángulo y equilátero, respectivamente.

Lucas: No, un polígono que solo tenga sus lados iguales y no tenga sus ángulos iguales

Alumno: El rombo

Lucas: El rombo... ¿cualquier rombo? ¿Qué rombo tiene los cuatro ángulos iguales?

Alumna: El cuadrado

Lucas: El cuadrado... así que cualquier rombo no cuadrado sería un cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales y no tiene ángulos iguales, por tanto, si lo que queremos es hacer notar a nuestros alumnos la idea de irregularidad, podemos no exigir segunda condición y viceversa, un polígono que tenga todos sus ángulos iguales... que tenga todos sus ángulos iguales y no tenga todos sus lados iguales.

Extracto Ob-07/10: 492-508

El conocimiento de Lucas sobre la tipología de ejemplos de enseñanza se hace explícito en la síntesis de la reflexión anterior, como se observa en el extracto Ob-07/10: 514-519:

Alumna: Entonces el rombo es un contraejemplo

Lucas: Un no ejemplo diríamos, de polígono regular y me sirve para trabajar en contra de la idea de que para ser polígono regular basta tener los lados iguales, el rombo tiene los cuatro lados iguales y sin embargo no tiene los cuatro ángulos iguales.

Extracto Ob-07/10: 514-519

Además, se trata de un conocimiento del que se sirve también para ayudar a los EPM a identificar las debilidades de sus definiciones. En el extracto Ob-07/10: 377-392, durante la construcción del concepto de mediatriz, Lucas general un ejemplo que satisface la definición de un EPM para que pueda compararlo con su imagen de mediatriz, de forma que le sirva para poder refinar su definición:

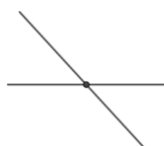
Lucas: Porque la mediatriz, tú me la vas a definir como...

Alumno: Como la recta que atraviesa...

Lucas: Una recta, la mediatriz es una recta que es...

Alumno: Que va justo por el centro del segmento

Lucas: ¿De cualquier manera? [Dibuja en la pizarra]



Lucas: ¿Esto es mediatriz?

Alumno: No

Lucas: Entonces, dímelo de nuevo

Alumno: Es la recta perpendicular que atraviesa justo por el centro del segmento

Lucas: Perpendicular en el punto medio, es la manera más corta de definirlo

Extracto Ob-07/10: 377-392

El conocimiento de Lucas sobre la ejemplificación en el aula de matemáticas forma, por lo tanto, parte de su conocimiento sobre una estrategia de enseñanza en Educación Primaria, pero a la vez, forma parte de su conocimiento sobre cómo estructurar la enseñanza en formación inicial. Lucas se apoya en el análisis de ejemplos y no ejemplos de determinados conceptos geométricos para profundizar en ellos con sus EPM y para que estos tomen consciencia de su utilización como herramienta de enseñanza, con base en la teoría de la variación. Este doble papel en la utilización de los ejemplos evidencia cómo Lucas moviliza simultáneamente conocimiento matemático y didáctico-matemático que configura la formación de maestros como un todo relacionado.

Asimismo, el conocimiento de Lucas, sobre las potencialidades del *software* que utiliza durante su exposición en el aula de formación inicial, se dirige también en dos sentidos. De un lado, presenta Geogebra como un recurso de aprendizaje para los EPM y de otro lado, como un recurso de enseñanza en su futura práctica profesional. El objetivo de Lucas es que sus EPM fundamenten su conocimiento sobre los conceptos geométricos y sobre las construcciones que el *software* permite realizar. Durante sus construcciones,

Lucas pone el acento en el carácter dinámico de la herramienta, lo que permitiría que los EPM desarrollasen una comprensión de la geometría más fluida y relacional. En el extracto Ob-07/10: 9-11, durante la presentación de la sesión, destaca estas ventajas.

Lucas: Si en vez de hacer, de trabajar la geometría con números, en casa, con lápiz, papel, regla, compás, cartabón, etc., lo hacéis con Geogebra, seguramente, aprenderéis muchísimo más.

Extracto Ob-07/10: 9-11

Lucas es consciente de que sus EPM son a la vez aprendices de matemáticas –desde el punto de vista de la reconstrucción de conocimiento matemático- y aprendices de maestros de matemáticas, y extiende su reflexión sobre Geogebra a la futura práctica profesional de los EPM haciendo hincapié en las ventajas en relación con el contenido compartido entre usuarios del programa (Extracto Ob-07/10: 22-25)

Lucas: Entre esos usuarios también hay otros profesores y al final podéis compartir todas vuestras producciones. Es decir, Geogebra es un programa que todo el mundo puede usar, donde se coopera y se construye, y, bueno, os podéis encontrar recursos para todos los niveles educativos, para todos los conceptos, para todas las intenciones.

Extracto Ob-07/10: 9-11

En este extracto, en el que Lucas sitúa a los EPM como maestros de matemáticas, encontramos, además, indicios de conocimiento de la construcción de una identidad profesional docente en el interés de Lucas en mostrar un perfil profesional del maestro como agente activo que genera contenido de enseñanza y como integrante de una comunidad profesional con intereses compartidos.

Durante el desarrollo de la sesión también identificamos evidencias de conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos geométricos en Educación Primaria. Su discusión, por ejemplo, sobre las dificultades en la comprensión del concepto de infinito por parte de los alumnos de Educación Primaria, vuelve a situar la reflexión del EPM en el contexto de un maestro de matemáticas capaz de analizar el pensamiento matemático de sus estudiantes (Extracto Ob-07/10: 170-184)

Lucas: Que la recta, entre comillas, vamos a poner esa idea entre comillas porque es intuitiva, no tiene ni principio ni fin es... infinita, y, ¿el segmento?

Alumna: Está delimitado.

Lucas: Está delimitado. Digo que esto hay que ponerlo un poco entre comillas, ¿eh? Porque, fijaos, un niño puede preguntaros: Maestro, entonces, en un segmento, entonces, ¿no hay infinitos puntos? ¿Qué le diríais?
[..]

Un segmento es finito en cuanto a porción de una recta, quiere decir que está determinado, pero, sin embargo, tiene infinitos puntos y la recta es infinita, es infinita porque no tiene límites, ni principio ni fin y, además, es infinita porque tiene, además, infinitos puntos. Cuidado con los infinitos ahí, que en primaria, podéis estar creando otros conflictos.

Extracto Ob-07/10: 170-184

En relación con la idea de infinitud de la recta, desde el punto de vista de la enseñanza en Educación Primaria, Lucas evidencia conocimiento sobre las dificultades que generan las representaciones de las rectas en el aula (Extracto Ob-07/10: 333-335):

Lucas: [...] Este es un ejemplo muy limitado. De hecho, trabajar rectas en un aula es muy complicado porque tienes que echar mano de información no verbal para mostrar que va más allá de lo que estoy pintando, va más allá [Va estirando y alargando las manos]

Extracto Ob-07/10: 333-335

Y en esta misma línea de las representaciones de contenidos geométricos, cuando se está trabajando la representación de los ángulos en *Geogebra*, Lucas reflexiona sobre el obstáculo de identificar el ángulo con la representación en forma de arco con la que se introduce el concepto en Educación Primaria (Extracto Ob-07/10: 756-769)

Lucas: Una cosa interesante con el ángulo: Los alumnos de primaria piensan que este ángulo es más pequeño que este [Señalando a las dos marcas] ¿qué pensáis vosotros? [Dibuja en la pizarra]



Alumna: Yo los veo iguales...

Alumno: ¿Que piensan qué?

Lucas: Los alumnos de Primaria piensan que este ángulo [Señala el arco de circunferencia menor], es más pequeño que este [Señala el otro arco] eso os lo vais a encontrar, ¿qué problema hay? ¿Con qué están identificando ángulo?

Alumno: Con la abertura de la recta...

Lucas: Con el lugar donde pintas el símbolo del ángulo, pero el ángulo en realidad, hemos dicho que es la porción del plano determinada por dos rectas que se cortan [Rellena el ángulo con la tiza]. El ángulo es el mismo independientemente de donde yo lo pinte.

Extracto Ob-07/10: 756-769

Podemos decir, entonces, que Lucas evidencia conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de los alumnos de Primaria y su origen, pese a no estar el origen en un contenido de la etapa, y sobre el peso de las representaciones de los conceptos geométricos en la enseñanza en Educación Primaria. Este conocimiento sería relacionable con el conocimiento del profesor de la misma forma que lo fue el contenido matemático presente en el currículum de Educación Primaria.

Por último, es también reseñable el conocimiento que evidencia Lucas sobre el programa de formación inicial. Como se ha mencionado en la descripción del contexto, los EPM cursan en el cuarto semestre una asignatura relacionada con el bloque curricular *Números*, y en el quinto semestre, una asignatura con base en el bloque curricular *Medida*. Lucas conoce el plan de formación de maestro y se apoya en resultados del trabajo en esas asignaturas cuando aplica la densidad de la recta real a la densidad de los ejes coordenados y cuando en la definición de ángulo utiliza el concepto de magnitud y cantidad de magnitud (Extractos Ob-07/10:132-137 y Ob-07/10: 398-412)

Lucas: Como la recta real, los números reales, de izquierda a derecha, está marcado con números enteros, me lo marca con números enteros, pero como sabéis que entre cada dos números enteros hay infinitos números racionales e irracionales... ¿verdad que sí lo sabemos? Nos costó esto en segundo, ¿eh? Bueno, pues como sabemos, que esa recta es densa nosotros sabemos que esos otros números que también están ahí.

Extracto Ob-07/10:132-137

Lucas: [...] ¿y qué es la bisectriz de un ángulo?

Alumno: La mitad de un ángulo

Lucas: La mitad de un ángulo es un ángulo y una bisectriz no es un ángulo. Si yo cojo un ángulo que es una magnitud... os acordáis de tercero ¿verdad? Una magnitud es susceptible de ser sumada, restada, dividida, si yo una magnitud la divido ¿me sale otra magnitud distinta? [...] Una cantidad, porque la magnitud es el concepto, un ángulo de 30 grados es una cantidad de 30 grados, una cantidad de magnitud, una cantidad angular, si yo una cantidad de magnitud la divido en dos cantidades de magnitud ¿las magnitudes que quedan separadas son de distinta naturaleza que la original?

Extracto Ob-07/10:398-412

Estas referencias, locales en el contexto, permiten que los alumnos puedan conectar las materias de la formación inicial y puedan reconocer relaciones entre los bloques de contenidos que les permitan tener una visión holística de la matemática escolar. Ese mismo conocimiento holístico y rico en relaciones es el que muestra Lucas en relación

con el contenido de la formación de maestros, sobre dificultades de los EPM asociadas a ese contenido, y con el sustento matemático que lo vertebra.

En resumen, durante toda la sesión, Lucas va mostrando su conocimiento matemático y didáctico-matemático de forma interrelacionada, lo que en un primer momento informa de su visión compleja del contenido de la formación. Además, se evidencia un doble discurso del formador en relación con los contextos de formación inicial y de Educación Primaria, lo que dirige nuestra mirada hacia conocimientos del formador de distintas naturalezas. En la Tabla X, hemos sintetizado los indicadores de conocimiento que hemos ido evidenciando y las posibles categorías que derivan del análisis de esta sesión. Estas categorías, en la columna *codificación*, serán consideradas y refinadas en el análisis de la siguiente sesión y las siguientes.

Tabla 5. Síntesis de las evidencias de conocimiento Ob-07/10

Conocimiento	Codificación
Elementos matemáticos necesarios y suficientes en la construcción de definiciones geométricas	Conocimiento de la práctica matemática definir
Posiciones relativas de rectas no coplanarias	Conocimiento matemático avanzado
Definiciones geométricas en distintas geometrías (no euclidianas)	
Conexiones entre contenidos geométricos más allá de las curriculares	Conocimiento de las conexiones entre conceptos
Uso didáctico de los ejemplos en formación inicial. Definición/imagen conceptual	Conocimiento de teorías de aprendizaje extrapoladas a la formación inicial
El uso de no ejemplos como herramienta para la construcción de la definición de mediatriz	Conocimiento de estrategias de enseñanza de contenidos matemáticos en formación inicial
La densidad de los ejes cartesianos como paralelismo de la densidad de la recta real [en el sentido de contenido de la formación]	Conocimiento sobre la organización del programa de formación inicial
Definición de ángulo y amplitud angular desde el punto de vista trabajado previamente en magnitudes y medida [como contenido previo en formación inicial]	
Uso de ejemplos límite en la construcción de la definición de línea poligonal	Conocimiento de diseño de tareas en EP
Dimensiones de variación en la construcción del concepto de regularidad [Equilátero/equíángulo]	
Dificultad en la representación de rectas en la vida diaria	Conocimiento sobre la fenomenología de un contenido
Obstáculos didácticos ligados a las definiciones de recta y segmento durante la enseñanza en EP	Conocimiento de la repercusión de estrategias en enseñanza en el aprendizaje en EP
Dificultades de los alumnos de EP con respecto a la comprensión del ángulo	Conocimiento de las dificultades de los alumnos en EP
Las rectas coplanarias no se estudian en EP	Conocimiento sobre el currículum en EP
El maestro como agente activo en el diseño y análisis de tareas de enseñanza	Conocimiento sobre perfiles profesionales
El maestro como integrante de una comunidad de práctica con intereses comunes [derivado del uso cooperativo de Geogebra]	Conocimiento sobre el maestro en una comunidad de práctica

3.2 Análisis de la observación de aula Ob-11/10

En esta sesión, los alumnos siguen trabajando con Geogebra en sus ordenadores personales y la clase comienza con Lucas declarando el objetivo para ese día, que es *ver la opción de Geogebra de simetría y [...] estudiar los elementos clave de la simetría, vamos a repasar, lo que ya vimos el viernes y vamos a ver las traslaciones o desplazamientos* (Ob-11/10: 4-6). Para el trabajo sobre estas isometrías, Lucas comienza retomando la idea de vector sugerida en clase anterior, haciendo hincapié en la diferencia entre dirección y sentido (extracto Ob-11/10: 14-20). Este hecho, unido al trabajo que se hizo en la sesión anterior en el mismo sentido, constituye un indicio del conocimiento de Lucas sobre la dificultad de los EPM para diferenciar ambos conceptos.

Lucas: No un segmento, un vector era... ¿alguien me lo define? ¿Alguien me lo vuelve a recordar?

Alumna: Es un segmento con dirección

Lucas: Es un segmento orientado. Es la idea más intuitiva, la definición más corta y más sencilla de vector [...] Ya vimos también la diferencia entre dirección y sentido, una recta tiene un sentido y... [Hace movimientos de dirección con las manos para enfatizar y se enciende el ordenador] tiene una dirección y dos sentidos.

Extracto Ob-11/10: 14-20

De esta forma, vemos cómo Lucas vuelve a seguir una dinámica de reconstrucción de la definición de vector, con foco en la explicitación rigurosa de los elementos clave de la definición, que permite que los EPM tomen consciencia de cada uno de esos elementos. Lucas sigue la misma estrategia cuando se trabaja sobre el procedimiento de suma de vectores, sobre los conceptos de paralelogramos, que hila con el concepto de vector suma, y los trapecios; y en el trabajo en el aula alrededor de la construcción de simetrías en el plano. Todas estas evidencias ponen de relieve el conocimiento de Lucas sobre una estrategia para la reconstrucción de contenido matemático en el aula de formación inicial y además sobre su conocimiento matemático, fundamentado y relacionado.

Mientras se va trabajando en el aula el concepto de vector de desplazamiento, previo al trabajo sobre traslaciones, Lucas va mostrando su conocimiento sobre las dificultades de los EPM en relación con el contenido matemático. El conocimiento de Lucas sobre la dificultad de los EPM al confundir las coordenadas cartesianas con las componentes del vector, acaba configurando la tarea con la que se inicia la sesión. En esta tarea, los EPM deben construir un vector de coordenadas (2,0) en sus portátiles y luego compartir, con el resto de compañeros, esos vectores. En el extracto Ob-11/10: 77-111, apreciamos el

primer indicio de conocimiento del formador sobre las dificultades de los EPM cuando les pide que retiren los ejes de coordenadas para que no actúen como distractores de la identificación de componentes del vector:

Lucas: ¿Todo el mundo tiene un vector?

Alumna: Sí

Lucas: Por favor, ocultad los ejes para que... nos despista un poquito y dejad solamente la cuadrícula, bueno... ¿Cómo sé yo la orientación del vector en función de sus coordenadas? Porque cuando habéis creado el vector os ha creado sus coordenadas ¿verdad?

[...]

Lucas: Con distintos puntos hemos generado un vector cuya representación, cuya componente, cuyas coordenadas son las mismas y son vectores distintos, ¿son distintos?

Extracto Ob-11/10: 77-111

Para construir la idea de vectores libres, los alumnos generan vectores (2,0) y posteriormente identifican los puntos de origen y extremo que obtienen en el software. Lucas construye una tabla con todos esos puntos para, sirviéndose de los ejemplos de los alumnos, poder reflexionar sobre las características de los vectores (extracto Ob-11/10: 159-165).

[Lucas termina de escribir los puntos origen y extremo en la pizarra]

A	B
(4,2)	(6,2)
(2,3)	(4,3)
(4,0)	(6,0)
(1,2)	(3,2)
(10,4)	(10,2)
(1,1)	(3,3)

Lucas: Volvemos atrás, ¿qué tienen en común?

Alumno: Que avanzan todos...

Lucas: Todos avanzan dos, ¿y...?

Alumna: Y no...

Lucas: Y no sube ninguno, ¿eso es correcto?

Extracto Ob-11/10: 159-165

El papel de la ejemplificación, en esta tarea de enseñanza, vuelve a ser predominante. A partir del análisis de ejemplos (y no ejemplo) de puntos de origen y extremo para vectores (2,0), Lucas busca un acercamiento inductivo a la definición de vector libre donde, apoyándose en la representación de esos vectores, los alumnos podrán identificar sus características comunes (extracto Ob-11/10: 264-272).

Lucas: Iguales módulos, pero tienen algo más, tienen la misma altitud, que es lo mismo que decir iguales módulos...

Alumna: ¿Paralelos?

Lucas: ¡Paralelos! Paralelos, hay infinitos vectores, pero todos esos tienen el mismo módulo y son paralelos. Es decir, están sobre una misma dirección o una paralela y tienen el mismo sentido [Silencio] ¿tienen el mismo sentido?

Alumna: Claro

Lucas: Todos tienen el mismo sentido, porque si el sentido fuera contrario cambiarían sus componentes

Extracto Ob-11/10: 264-272

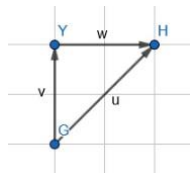
En este extracto podemos observar la conexión que hace Lucas entre rectas paralelas y la representación de un vector. Ambos conceptos se habían trabajado en la clase anterior y ahora se concretan y se conectan, lo que supone un indicio de conocimiento del formador sobre conexiones interconceptuales que guían la secuencia de las tareas en la formación de maestros. Otro ejemplo de conexión interconceptual es la que se realiza entre el vector suma y la diagonal de los paralelogramos (extracto Ob-11/10: 395-413)

Lucas: ¿Es la única manera de ir de G a H? Estamos hablando de plano, y yo quiero ir de G a H, ¿qué posibilidades tengo?

Alumna: ¿Con un vector?

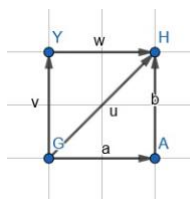
Lucas: Con un único vector solo sería esa, pero ¿hay más posibilidades de ir de G a H? Bueno, pues, por favor, coged un vector cualquiera y ponedme varias posibilidades con suma de desplazamientos.... Composición de desplazamientos, composición de traslaciones para ir de G a H. Dos vectores que equivalgan al vector a. [Tiempo de trabajo]

Lucas: Esta es una opción, ¿no? Con dos pasos, primero me voy a Y... de G a Y y luego de Y a H, hombre no es el camino más corto, eso lo sabíamos... pero me lleva de G a H en dos pasos... ¿otro que me lleve de G a H en dos pasos? Otro, Natalia [La composición de desplazamientos que ha hecho Natalia en el proyector]



Lucas: Prueba con otro, otro, ¿vale?

[Natalia completa con otra forma de llegar de G a H]



Extracto Ob-11/10: 395-413

En esta ocasión, es el vector suma el que sirve de enlace con el concepto de paralelogramo. Después de haber trabajado la suma de componentes, los alumnos van representando los vectores de desplazamiento de un punto a otro de la trama y, aunque condicionados por la cuadrícula de Geogebra, se acercan a la idea de que la suma de dos vectores es la diagonal de un paralelogramo del que los dos vectores son lados. Generalizar esta idea con el obstáculo de la representación, hace que Lucas explicita que el peso de la trama puede limitar los movimientos, de forma que la construcción resultante siempre sea un cuadrado o un rectángulo (extracto Ob-11/10: 414-418)

Lucas: Bueno, todas estas las está haciendo por la trama, se está moviendo por la trama que le da mucha seguridad, pero hay otros muchos movimientos que no irían por la trama y ¿veis todas las posibilidades que hay no?

Extracto Ob-11/10: 414-418

Analizando estos últimos extractos de la transcripción, podemos extraer varias conclusiones en lo que respecta al conocimiento de Lucas. En primer lugar, como consecuencia de que el trabajo en el aula de formación inicial es fundamentalmente matemático, Lucas evidencia conocimiento matemático que se ha revelado fundamentado y relacionado, en tanto que le permite establecer conexiones entre diferentes conceptos, como rectas y vectores o vector suma y diagonal de paralelogramo. Llama la atención la fluidez con la que va dirigiendo su discurso sobre estos conceptos, más que la profundidad con la que los desarrolla. Además, en relación con la enseñanza de estos contenidos, encontramos conocimiento del formador sobre las dificultades de los EPM en la comprensión del concepto de vector y conocimiento del formador sobre estrategias de enseñanza del contenido matemático en la formación de maestros, basadas en la construcción de definiciones y en la ejemplificación.

Respecto a las tareas alrededor de la construcción de vectores, desplazamientos y coordenadas, encontramos también una evidencia del conocimiento matemático de Lucas ante una de las preguntas de una alumna (extracto Ob-11/10: 34-49).

Alumna: Lucas, ¿qué son coordenadas polares?

Lucas: No tenía previsto verlo, pero cuando tú tienes una superficie esférica las coordenadas no van en las coordenadas cartesianas, necesitamos unas coordenadas distintas, unas coordenadas polares. Una superficie esférica no tiene una superficie plana, no se puede representar en el plano. Para poder representar la posición de un punto en una esfera usamos las coordenadas polares... no lo usaremos en geometría, no es un concepto de geometría de primaria y no lo veremos aquí [...] Si yo estoy en un punto

cualquiera de la tierra ¿cómo se representa ese lugar en función de los meridianos y paralelos? [...] La latitud y la longitud determinan cómo se representa y cómo se localizaría un punto cualquiera del plano pero no con coordenadas cartesianas sino con otras coordenadas.

Extracto Ob-11/10: 34-49

En este extracto, encontramos una nueva evidencia de conocimiento matemático avanzado en comparación con el conocimiento matemático exigible a un maestro de Primaria, sobre los distintos tipos de coordenadas y la ubicación en superficies esféricas. Además, encontramos conocimiento del formador sobre la selección de contenidos en la formación inicial de maestros, al explicitar que no se contempla como contenido de la formación al no ser contenido curricular de Educación Primaria.

Retomando el análisis, desde la conexión que hizo Lucas entre vector suma y diagonal de los paralelogramos, encontramos evidencia de conocimiento del formador acerca de la práctica de clasificar en matemáticas. En el contexto de la asignatura, se trabajan las clasificaciones inclusivas, en particular de cuadriláteros, como herramienta para construir relaciones entre las figuras y como forma de progresar en el razonamiento geométrico de los EPM en términos de la teoría de aprendizaje de los Van Hiele. Así, cuando Lucas está trabajando sobre los paralelogramos que se pueden formar, tomando el vector suma como diagonal y los vectores que lo componen como lados de ese paralelogramo, fuerza la representación del paralelogramo genérico para iniciar la reflexión sobre clasificaciones inclusivas con sus EPM (extracto Ob-11/10: 527-534).

Lucas: Aquí, para ir de G a H lo he hecho en dos etapas, esas dos etapas me representan los lados de un paralelogramo que en este caso es un cuadrado y lo he hecho en dos etapas, y el vector suma, es la diagonal de ese paralelogramo, que es un cuadrado; y aquí pasa lo mismo, pero ese paralelogramo ya no es un cuadrado es un rectángulo. Lo que quiero es un caso más general, quiero hacer un camino en dos etapas de manera que esas dos etapas sean los lados consecutivos de un paralelogramo que no sea ni un cuadrado ni un rectángulo ¿me he explicado bien?

Extracto Ob-11/10: 527-534

La dificultad de la tarea que propone Lucas reside en el cómo está usando el término paralelogramo. Los EPM tienden a ser reticentes a la hora de reestructurar las clasificaciones de polígonos aprendidas durante su etapa escolar y rara vez alguno de ellos ha trabajado clasificaciones inclusivas en esas etapas. Consciente de la dificultad de los EPM en identificar el romboide como paralelogramo genérico, en el extracto Ob-10/11: 562-567, Lucas explicita:

Lucas: Es que vosotros todavía estáis usando otra palabra para lo que yo llamo paralelogramo, en vuestra cabeza es otro concepto, que es el concepto de romboide [...] Discutiremos en su momento si es útil o no utilizar la palabra romboide y por qué es útil o no.

Extracto Ob-10/11: 562-567

A pesar de que hace hincapié en que el tipo de clasificaciones que se trabajarán en el aula es contenido de las sesiones posteriores y no profundiza en exceso, encontramos que el conocimiento de Lucas le ha permitido dirigir su discurso conectando contenido geométrico desde la construcción de vectores hasta la práctica de clasificar y su producto final, en forma de clasificación inclusiva. Además, Lucas muestra indicios de su conocimiento sobre las consecuencias de la utilización de distintas clasificaciones para el aprendizaje de los alumnos de Educación Primaria y propone a los EPM analizar libros de texto para revisar las definiciones y clasificaciones que emplean (extracto Ob-11/10: 653-655)

Lucas: Ya podemos encargar esta tarea: Buscad en libros de texto cómo llaman a lo que yo estoy llamando paralelogramo, si es que lo llaman paralelogramo o si por el contrario lo llaman romboide

Extracto Ob-11/10: 653-655

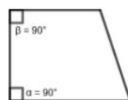
Esta referencia, al rol de aprendices de maestro de los EPM, es la primera que se hace en la sesión. Destaca en ella que Lucas no solo le da una aplicabilidad al contenido matemático que se está discutiendo, sino que sitúa a los EPM en un contexto de docentes que son críticos con los materiales que utilizan, en este caso el libro de texto. Supone por tanto un indicio de conocimiento del formador sobre la formación de un perfil profesional concreto que contribuye al desarrollo de la identidad profesional de los EPM. Al hilo de esta dualidad en la definición de una figura geométrica, Lucas enlaza su discurso con los diferentes procedimientos de resta que se pueden aprender en Educación Primaria y que los EPM han revisado en materias anteriores. La relación que establece el formador entre el tratamiento escolar que se hace de estos dos contenidos, da cuenta de su conocimiento de la enseñanza en Educación Primaria y de la estructuración del programa de formación inicial de maestros, en consonancia con el primero (extracto Ob-11/10: 655-658)

Lucas: en segundo, normalmente yo pregunto quién ha aprendido a restar con el algoritmo de pedir prestado y quién ha aprendido con el algoritmo de regalar, y normalmente hay de los dos tipos, pues a ver si en los libros de texto también tenemos esa dualidad.

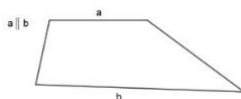
Extracto Ob-11/10: 655-658

La discusión sobre clasificaciones inclusivas en el aula de formación inicial, que se propone desde el punto de vista del razonamiento geométrico propuesto en la teoría de los Van Hiele, trae consigo otra reflexión de Lucas respecto a los niveles de aprendizaje que proponen los autores. En el extracto Ob-11/10: 668-694, se observa cómo Lucas evidencia conocimiento sobre esta teoría de enseñanza y aprendizaje y lo aplica a la formación inicial de maestros, acompañado de su conocimiento sobre notación matemática. Entendemos que Lucas quiere ejemplificar una situación en la que el *análisis* prevalece sobre la *visualización*, como forma de repasar ese contenido con los EPM, que tienen lecturas sobre la teoría disponibles como contenido de la asignatura.

Lucas: Esa figura, ¿qué figura es? [...] Porque estos dos ángulos son de 90 grados, no porque lo parece... porque estos dos [Señala los ángulos] son de 90 grados, lo puedo construir, si estos dos son de 90 grados, perpendicular más perpendicular igual a paralela ¿vale? [En la pizarra dibujado]



Lucas: Un trapecio porque tiene dos lados paralelos... y ¿los otros dos? No tengo datos... pero es un trapecio... y por último [Dibuja en la pizarra]



Lucas: a paralela a b significa... [Señala en la pizarra a//b] segmento a paralelo al segmento b, esta figura que veis ahí es... la vista no es orientativa, lo que simbolizamos sí lo es [Señala a//b] ¿Qué figura es esta?

Extracto Ob-11/10: 668-694

En la última parte de la sesión, Lucas introduce el procedimiento de construcción de simetrías. Durante la explicación, propone a los alumnos que representen primero puntos y luego polígonos y, que sin ayuda de la herramienta simetría de Geogebra, construyan simetrías a partir de sus propiedades. Para ello, Lucas va discutiendo cada una de las propiedades de los puntos simétricos respecto al eje y los alumnos van recogiendo las condiciones que han de cumplir- distancia al eje que es mediatriz y rectas paralelas formadas por cada punto y su homólogo. La forma de llevar a cabo esta actividad, es similar a las anteriores de reconstrucción de contenido matemático. La alumna que ocupa el lugar del ordenador conectado al proyector inicia la actividad. En el extracto Ob-11/10: 769-772, podemos ver un fragmento de las instrucciones que Lucas va dando, en relación con la posición de la figura y el eje de simetría.

Lucas: Un polígono cualquiera, con la opción polígono... es curioso, tenemos la tendencia a pintarlo uno de los lados siempre paralelo a un eje. Ahora el eje de simetría, que no sea paralelo a ese lado, pero que tampoco sea paralelo a la base... ni a este lado, ni a la base... coge por el camino del en medio.

Extracto Ob-11/10: 769-772

La insistencia de Lucas por la representación no prototípica de figuras, en cualquiera de los contenidos que se abordan en el aula, es una constante. El objetivo de Lucas es que los EPM construyan figuras no prototípicas para enriquecer la imagen mental de los distintos contenidos de la asignatura. Estas evidencias recurrentes constituyen un indicio del conocimiento de Lucas sobre la manera en la que los EPM interactúan con el contenido matemático y sobre las dificultades que tienen en la elaboración de simetrías cuando los ejes no ocupan una posición vertical u horizontal, o cuando atraviesan la figura a la que hay que construir su simétrica.

Después del trabajo sobre la elaboración de simetrías, Lucas propone una actividad de formulación de problemas que interpreta que se puede aplicar a los dos roles que desempeñan los EPM, como aprendices de matemáticas y como aprendices de maestro y que denotan su conocimiento sobre prácticas de enseñanza en formación inicial y su conocimiento sobre cómo diseñar tareas para la enseñanza en Educación Primaria. Los extractos Ob-11/10: 921-925 y Ob-11/10: 931-944, así lo reflejan.

Lucas: Cada uno elige su pareja, le da una figura y su transformado, pero quitando todo lo demás, una figura y su transformado de manera que sólo se vea la primera y la otra... que no se vea nada más y le pregunta si ha pasado de una a otra con una simetría y la otra persona tiene que decirle sí o no usando los criterios de los que hemos usado para la simetría.

Extracto Ob-11/10: 921-925

Lucas: Por ejemplo, imaginaos que este polígono [Se acerca a la pizarra] es un pentágono y este es un hexágono, no puede ser una simetría, ¿por qué? Porque la simetría es una isometría, conserva todo, conserva la distancia, conserva la superficie, conserva los ángulos, conserva la forma, es una isometría, luego ya lo descartaríamos. Es una buena actividad para hacer en primaria que le pongamos al niño un objeto y su transformado hipotético y le preguntemos si ha podido ser transformado con un movimiento del plano. La respuesta tendría que ser no, porque no conserva algo de los ángulos. Esa sería una posible pregunta, para vuestro compañero no lo hagáis tan fácil, que la otra sea idéntica pero que esté movida y que os diga vuestro compañero si pudo ser obtenida con una sola simetría y que os diga el por qué.

Extracto Ob-11/10: 931-944

Como hemos podido comprobar, en esta sesión se han desarrollado principalmente contenidos matemáticos en relación con los vectores de desplazamiento, la clasificación de polígonos y la simetría. No obstante, Lucas ha ido mostrando conocimiento sobre cómo enseñar ese contenido a sus alumnos y conocimiento que le ha permitido situar a los EPM como maestros, reflexionando sobre aspectos didácticos. En síntesis, mostramos en la tabla X, las evidencias de conocimiento que hemos ido señalando y las posibles codificaciones que se derivan de ellas. Algunas de las codificaciones coinciden con otras ya encontradas en la sesión anterior y serán abordadas en el análisis transversal de los datos.

Tabla 6. Síntesis de las evidencias de conocimiento Ob-11/10

Conocimiento	Codificación
Coordenadas polares y su relación con coordenadas cartesianas en contextos de superficie esférica	Conocimiento matemático avanzado
Los vectores que tienen la misma dirección se sitúan en rectas paralelas	Conocimiento de las conexiones entre contenidos geométricos
Vectores suma como diagonales de paralelogramos	
Clasificaciones inclusivas en formación inicial: construcción de clasificaciones	Conocimiento de la práctica de clasificar
La elaboración de definiciones como herramienta para la reconstrucción del conocimiento matemático	Conocimiento de estrategias de enseñanza de contenido matemático en formación inicial
Comparación de ejemplos de vectores (2,0) para desligar componentes de coordenadas cartesianas	
Construcción de definiciones a partir de un proceso inductivo con ejemplos de la definición	
Utilización de no ejemplos de vector para la construcción de la definición	
Identificar un movimiento facilita la comprensión de las características de su construcción	
Formulación de problemas como estrategia de aprendizaje matemático (y docente)	Conocimiento de teoría de aprendizaje geométrico aplicada a la formación inicial
Niveles de Van Hiele en formación inicial.	
Dificultad de los EPM en relación con la definición del concepto de vector	Dificultades de los EPM en relación con el contenido matemático
Los EPM tienen dificultad en la comprensión de clasificaciones inclusivas	
Dificultad de los EPM en simetrías cuando la posición de los ejes no es prototípica	
Las representaciones de los EPM suelen ser protípicas, lo que deriva en una imagen mental incompleta	
Actividades que exploran las dimensiones de variación de los vectores, replicables en EP	Conocimiento sobre cómo enseñar conocimiento sobre la enseñanza en EP
El análisis de las posibles dificultades facilita la comprensión del proceso de aprendizaje	Conocimiento sobre cómo enseñar conocimiento sobre las dificultades de los EP
Relaciones entre aproximaciones didácticas de EP trabajadas en distintas materias de la formación inicial	Organización del programa de formación inicial y sus relaciones
El maestro debe ser capaz de analizar críticamente el contenido matemático de los libros de texto	Perfil profesional docente

3.3 Análisis de la entrevista con el formador En-S

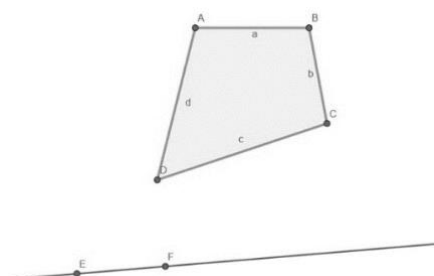
A propósito de las evidencias de conocimiento encontradas hasta el momento, incluimos una entrevista con el formador que, como se indicó en el capítulo sobre metodología, tiene una doble finalidad: confirmar indicios de conocimiento para incorporarlos a los siguientes análisis, e indagar en el conocimiento didáctico del formador que es más difícilmente observable en la práctica. El análisis de esta entrevista nos permitirá fortalecer las categorías de conocimiento codificadas y nos ayudará a comprender en profundidad el conocimiento del formador. Incluiremos fragmentos de la observación del aula, procedentes de la transcripción Ob-11/10, que permiten contextualizar las preguntas formuladas durante la entrevista.

La primera de las reflexiones del formador durante la entrevista surge a raíz de la visualización de un episodio de la observación video grabada en el que Lucas está trabajando con sus EPM el concepto de simetría apoyándose en la herramienta Geogebra. En el extracto Ob-11/10:769-780 se puede observar cómo, estando los EPM trabajando con su ordenador personal, Lucas dirige la sesión guiando a una alumna a representar los resultados en la pantalla compartida del aula.

Lucas: Bueno, pues vamos a pintar todos en nuestro Geogebra, sin cuadrícula y sin ejes, un polígono cualquiera, hecho por vosotros mismos con la opción polígono [...] es curioso, tenemos la tendencia a pintar uno de los lados siempre paralelo a un eje. Ahora el eje de simetría, que no sea paralelo a ese lado, pero que tampoco sea paralelo a la base... ni a este lado, ni a la base.

Alumna: ¿Una recta?

Lucas: Sí, una recta, bien, necesitamos otro punto, no, más abajo... vale [En la pizarra compartida queda representado]



Extracto Ob-11/10:769-780

Las instrucciones de Lucas durante la construcción del ejemplo se centran en la posición relativa del eje de simetría con la figura. Durante las indicaciones, el formador fuerza que

las representaciones tengan una posición y dirección que no coincida con ninguno de los bordes que naturalmente da cualquier recurso, no necesariamente los ejes cartesianos, pero que evocan ideas de paralelismo y horizontalidad. Preguntado por esta insistencia, Lucas justifica su elección en los extractos En-S:167-169 y En-S:175-178.

Lucas: El hecho de que el eje no sea vertical, para entendernos, u horizontal, sobre todo que no sea vertical, es porque la simetría, vista desde la posición no estándar, les cuesta mucho.

Extracto En-S:167-169

Lucas: Algunas de las dificultades que se manifiestan en la formación de maestros, han sido fruto de situaciones de aprendizaje mal resueltas en Primaria y arrastran en gran parte ideas erróneas y conceptos mal contruidos desde su etapa como aprendices.

Extracto En-S:175-178

En estos fragmentos se puede observar el conocimiento que tiene Lucas sobre cómo los EPM interactúan con el concepto simetría. Lucas justifica que, enfrentar esta dificultad cambiando la posición de los ejes, hace que una de las propiedades de la simetría como movimiento, que es la perpendicularidad de los segmentos que unen cada punto con su transformado, adquiera mayor presencia en la actividad. El uso de ejes en posición vertical tiene como resultado una figura simétrica alineada con la figura original que obstaculiza, según el formador, que los EPM tomen consciencia de que el requisito de perpendicularidad debe cumplirse. La tendencia de los EPM a construir la simetría de esta forma tiene su origen, según el formador, en las experiencias matemáticas que han tenido los futuros maestros en relación con el concepto, que han derivado en una imagen conceptual pobre respecto al movimiento. La utilidad de forzar a que aparezcan las dificultades matemáticas de los EPM repercute, según Lucas, en la comprensión que pueden desarrollar los EPM sobre aspectos didácticos en la enseñanza de la simetría en el desempeño de su futura profesión. El extracto En-S: 19-22, lo pone de relieve:

Lucas: Analizar las situaciones de dificultad en la comprensión de las propiedades de la simetría, les puede anticipar también algunas dificultades que los estudiantes de Primaria pueden tener con la simetría, a la hora de identificar sus propiedades.

Extracto En-S: 19-22

En las siguientes intervenciones de Lucas en el aula se van resaltando las condiciones que debe cumplir cada punto simétrico al original y se insiste en que la simetría se construya, no con el comando reflexión que tiene la aplicación Geogebra, sino a partir de las

propiedades del movimiento. La utilización de esta aplicación como recurso para la enseñanza de contenido matemático en la formación inicial, se justifica en el extracto En-S: 39-51.

Lucas: Geogebra aporta la facilidad de eliminar la dificultad que pueda tener una persona cuando construye relaciones gráficas, para centrarse en las relaciones matemáticas que están subyacentes.

Extracto En-S: 39-51

Y además, se reflexiona sobre otros beneficios de la aplicación que también son aplicables al trabajo con la simetría, pero particularizando en el caso del trabajo de triángulos que se dio en una sesión anterior; concretamente en relación con la visualización de las implicaciones del Teorema del lado opuesto a un ángulo agudo, recto u obtuso. Esta idea queda reflejada en el extracto En-S: 83-86.

Lucas: Geogebra lo que te permite es ver en tiempo real lo que va sucediendo cuando en el caso de los triángulos, por ejemplo, cuando un triángulo va adquiriendo ciertas propiedades y cuando pasa de acutángulo a obtusángulo, o en el rectángulo, te permite conjeturar propiedades que, de otra manera, en geometría estática no es posible.

Extracto En-S: 83-86

Esta no es la única utilidad que el formador pretende transmitir respecto al uso del software. Conviven con ella tanto la idea, no siempre percibida por los EPM, de que Geogebra debe ser vista también como un recurso para la enseñanza de las matemáticas, (extracto En-S: 122-125), como las ventajas de su utilización durante el desarrollo de la profesión de los EPM (extracto En-S: 107-109).

Lucas: La dificultad que tenemos con este recurso y con otros es que les cuesta mucho salir de su papel como aprendices. Yo creo que un EPM, para ser capaz de situarse en el papel de docente, de profesor, tiene que haberse desprendido ya de la necesidad de aprender el algo que va a enseñar.

Extracto En-S: 122-125

Lucas: Yo intento trasladarles la idea de que Geogebra puede ser una herramienta muy importante en sus aulas, sí, aunque no lo hago de manera explícita [...] yo siempre he pensado que hay una especie de isomorfismo utópico en la labor del formador [...] lo que tú haces en el aula de formación inicial tiene que tener cierta similitud con lo que tú quieres que ellos hagan en clase de primaria.

Extracto En-S: 107-109

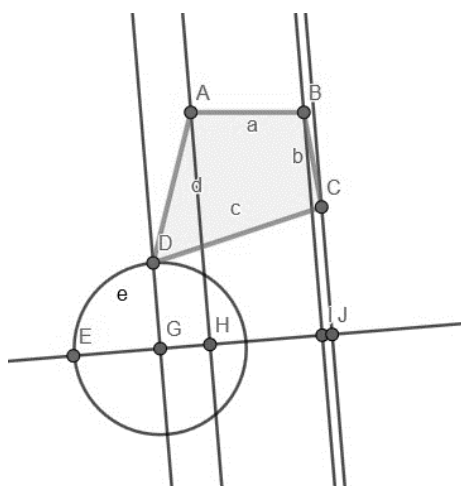
Ambos fragmentos orientan ahora el análisis sobre el conocimiento del formador acerca de la dualidad del EPM como aprendiz y como futuro docente y acerca de cómo se construye el conocimiento didáctico del contenido en la formación inicial. Respecto a la primera idea, es recurrente en las intervenciones de Lucas su reconocimiento sobre que los EPM deben construir conocimiento matemático, históricamente calificado como deficiente en este colectivo, a la vez que conocimiento didáctico del contenido. Este hecho es una de las dificultades que el formador considera que tienen los EPM durante su formación inicial porque resulta, en sus palabras, prácticamente imposible que los dos aprendizajes se den a la vez. Situándonos en la intencionalidad de Lucas, de que los EPM desarrollen conocimiento didáctico sobre la utilización de Geogebra en las clases de Primaria, encontramos la idea de isomorfismo didáctico. Que Lucas sea consciente de este proceso durante el desarrollo de sus clases de formación inicial, nos informa de su conocimiento sobre cómo se enseña a enseñar matemáticas a partir de esa imitación en coherencia con las estrategias vivenciadas en la formación inicial. Del mismo modo, pone de relieve el conocimiento de Lucas sobre el software adaptado a la enseñanza en la etapa primaria, cuando cambia su discurso hacia lo que podrían hacer sus EPM en relación con los estudiantes de primaria.

Mientras la clase sobre simetría continúa, los EPM van manifestado dificultades, no solo para utilizar el recurso, sino también en relación con las propiedades de la simetría. Esta situación lleva a Lucas a realizar paso a paso el simétrico a uno de los puntos del polígono con respecto al eje de simetría establecido (puede observarse en la imagen del extracto Ob-11/10:769-780), haciendo la traducción entre las instrucciones que van indicando a Geogebra y las propiedades de la simetría tal como se han trabajado en clase.

Lucas: Voy a ir paso a paso... sé que el transformado de B está en una recta que pasa por B y es perpendicular al eje, pues le digo perpendicular y pongo punto y recta... en una recta perpendicular a este eje con este punto, pero está sobre esa recta. El transformado de A sé que está en una recta que pasa por A y que es perpendicular al eje [...] ¿Qué más sé? Lo que tú me has dicho, que la distancia al eje es igual a esta [Señalando un punto y su transformado]. Lo otro que sé es que la distancia de este punto a la perpendicular que yo estoy preparando aquí es igual a la de aquí con el punto correspondiente, ¿eso cómo lo matizo? ¿Cómo puedo poner yo aquí el punto equivalente? ¿Qué hago? ¿Qué función puedo usar?

Alumna: ¿Circunferencia?

Lucas: Yo no sé la unidad del eje... Con circunferencia centro y punto, claro, el centro va a ser este [Señala un punto del eje, G] y el punto va a ser este [Señala el punto D] ¿vale?



Extracto Ob11/10: 820-844

La discusión sobre este fragmento llevó a Lucas a reflexionar sobre las dificultades de los EPM con el contenido matemático al ser preguntado por la relación entre estas y las dificultades que manifiestan con respecto al conocimiento didáctico del contenido (Extracto En-S: 162-164) y de ahí al diseño de los programas de formación inicial de maestros (Extracto En-S: 212-216)

Lucas: Lo podemos decir de dos maneras, el no conocimiento del contenido es un obstáculo para el conocimiento didáctico del contenido o, un buen conocimiento del contenido facilita poner la atención en los procesos de enseñanza y aprendizaje de ese contenido, en mi experiencia es así.

Extracto En-S: 162-164

Lucas: El programa de la asignatura, cuando lo observas desde fuera tiene una carga de MK mucho más grande que una carga en PCK [...] Sin embargo, en la realidad la carga es más equilibrada, con más peso al MK, desde luego.

Extracto En-S: 212-216

La relación que establece Lucas entre las dificultades de los EPM con respecto al contenido matemático es similar a la que ya había manifestado con respecto a cómo el EPM reflexiona sobre los recursos de enseñanza. El nexo común está en la imposibilidad de una reflexión didáctica sobre un concepto, procedimiento o recurso del que no se tiene un conocimiento matemático consolidado. Además, este conocimiento es utilizado como justificación para el diseño de la asignatura, en el que Lucas participó activamente. Según el formador, la predominancia de conocimientos matemáticos sobre los didácticos tiene su base en la formación matemática de los EPM, aunque no configuren su ideal de formación inicial de EPM. En relación con ese ideal y con los diferentes filtros de

selección del contenido de la formación, extracto En-S: 197-201, Lucas termina añadiendo:

Lucas: La primera idea es que ese contenido esté presente en Primaria y la segunda idea es que la versión de ese contenido que tengo que trabajar con ellos les tiene que permitir comprender el contenido de Primaria con suficiente profundidad como para saber transformarlo. A esta última además se le une una etapa de desempaquetado, comprender en el sentido de que empiecen a surgir en tu cabeza los porqués, las razones [...]. En el proceso de desempaquetado, estaría la visión del concepto como objeto de enseñanza y aprendizaje, pero la comprensión del concepto y sus relaciones, son esenciales.

Extracto En-S: 194-201

Así, el formador incluye como contenido de la formación, no solo el conocimiento profundo y relacionado de los contenidos presentes en el currículum escolar, sino además, elementos relacionados con cómo enseñarlos, algunos de ellos derivados de ese análisis profundo y otros complementarios desde el punto de vista de la didáctica.

Tabla 7. Síntesis de las evidencias de conocimiento En-S

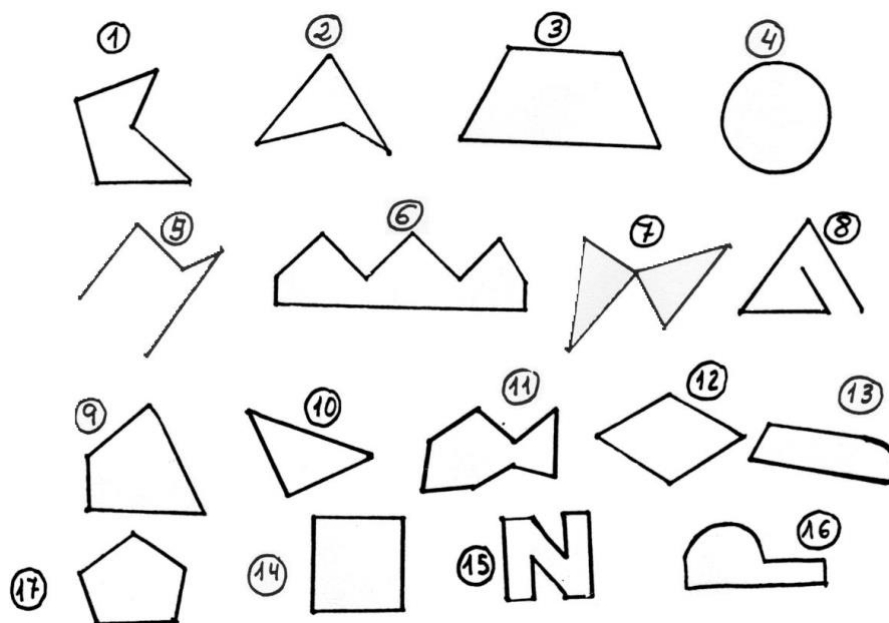
Conocimiento	Codificación
Análisis de las potencialidades de las distintas representaciones de la simetría	Conocimiento para la enseñanza del contenido matemático
Selección de ejemplos no estándares con respecto a las posiciones relativas de las figuras en la simetría	
Utilización de Geogebra y reflexión sobre sus potencialidades como recurso para la formación de maestros.	
Reflexión sobre los errores durante la realización de simetrías de los EPM les ayuda a organizar su comprensión sobre aspectos didácticos en su enseñanza	Conocimiento para la enseñanza del contenido didáctico
Posibilidad de traslación de metodologías de enseñanza en formación inicial a metodologías de enseñanza en Primaria (Isomorfismo didáctico)	Conocimiento sobre cómo enseñar a enseñar
Previsión de las dificultades de los EPM en relación con el contenido matemático del movimiento simetría	Conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de los EPM
La dificultad de los EPM, en relación con la construcción de la simetría, obstaculiza la construcción de conocimiento sobre cómo enseñarla.	
Consideración de la dualidad de los EPM como aprendices de matemáticas y como futuros maestros	Conocimiento sobre las necesidades de formación de los EPM
Los contenidos de la formación inicial deben partir de un estudio fundamentado de los contenidos de primaria	Conocimiento sobre los estándares de los programas de formación de maestros
La formación de los EPM debe incluir elementos que permitan el desempaquetado de los contenidos matemáticos	

3.4 Análisis de la observación de aula Ob-18/10

Lucas presenta esta sesión a los EPM como una clase en la que principalmente se va a abordar la práctica de definir, en concreto a partir de la definición de polígono, de la siguiente forma: *La sesión de hoy, ¿de qué versa? ¿Cuál es el contenido de la sesión de hoy? Polígonos, ¿vale? Hemos hablado de polígonos, lo hemos hablado de manera muy alegre hasta ahora, y hoy vamos a definir polígono. Hoy toca definir polígono, además de otras cosas* (Ob-18/10: 27-31). La tarea que estructura la sesión, disponible en la plataforma de enseñanza virtual que comparte con los EPM, comienza con un conjunto de figuras geométricas sobre las que se va a discutir los elementos matemáticos que conforman la definición de polígono (Figura 15)

Figura 15.

Ejemplos seleccionados para la construcción de la definición de polígono



Los conceptos matemáticos que se van explorando, como parte de la definición de polígono, son línea poligonal, superficie cerrada e interior continuo. La discusión sobre si incorporar cada una de las imágenes como ejemplos de polígono, permite que se discutan las condiciones necesarias para la definición de polígono, que será construida de forma inductiva. De la selección de los ejemplos de la tarea propuesta se pueden extraer indicios de conocimiento matemático de Lucas sobre la definición de polígono y sobre la práctica de definir, pero además, conocimiento didáctico de cómo construir ese conocimiento matemático en formación inicial, en tanto que se identifican imágenes,

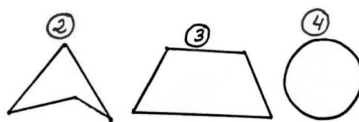
como la número cuatro o la número siete, que permiten que los EPM expresen sus dificultades en relación con la definición (Ob: 18/10: 73-87)

Lucas: Bueno, pues ése va a ser nuestro punto de partida. Con nuestro punto de partida, que no hemos definido nada, uno es una imagen, un ejemplo. ¿Encaja en nuestro ejemplo de polígono, en nuestra imagen de polígono? [En la pizarra, proyectado]



Alumnos (varios): Sí.

Lucas: ¿En todos? ¿Uno sería para todos vosotros un polígono? ¿Para todo el mundo? Seguro, ¿verdad? ¿Alguna duda? Aunque no diga nada, es una cosa muy sencilla la pregunta. Uno sería polígono. ¿Dos? [En el proyector]



Alumna: Sería polígono.

Lucas: ¿También? ¿Tres?

Alumna: Sí.

Lucas: También. ¿Cuatro?

Alumnos (varios): No.

Alumna: Yo tengo puesto que sí, pero...

Lucas: Muy bien. Entonces, en tu imagen de polígono, la palabra rectilíneo, la palabra rectilíneo es necesaria.

Extracto Ob-18/10: 73-87

En la discusión sobre las figuras, que no están coloreadas, se entiende que al hablar de polígono se está incluyendo el interior, lo que lleva a la discusión de la figura cuatro como círculo. La construcción de definiciones matemáticas se presenta como una actividad social, en el sentido de construida, lo que da cuenta de las creencias de Lucas sobre cómo es la matemática que, si bien no son objeto de análisis en este trabajo, pueden transferirse durante la enseñanza en formación inicial actuando como configuradoras de perfil profesional docente (Ob-18/10: 101-111)

Lucas: Nosotros vamos a acordar. ¿Con qué razones hemos llegado a esos acuerdos? ¿Por qué puede ser interesante incluir o excluir el círculo dentro de los polígonos? Eso va a ser una de las cosas que vamos a ver hoy. Si para nosotros es polígono, ¿qué consecuencias tiene que lo sea? ¿Vale?

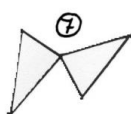
[...]

¿Qué más queremos pensar? ¿Hay una única manera de definir polígono? ¿Hay una manera correcta? ¿O hay varias posibilidades?

Extracto Ob-18/10: 101-11

Además, las discusiones sobre las consecuencias de incluir determinadas figuras, como ejemplos de polígono, muestran el conocimiento de Lucas sobre la interdependencia de los resultados matemáticos que se van construyendo de forma jerárquica. Que Lucas explicita estas relaciones informa sobre cómo se articula su conocimiento matemático en el que los distintos conceptos, procedimientos y prácticas matemáticas están conectados en forma de red. La capacidad de reconocer esas relaciones y de poder reconstruir nuevas relaciones a partir del cambio de los presupuestos que les dan sentido, apunta hacia un conocimiento matemático profundo que puede ser distintivo del formador de maestros con respecto a los docentes de la etapa de Educación Primaria (Ob-18/10: 386-395)

[En referencia al ejemplo]



Lucas: Estoy diciendo: ¿Qué consecuencias tendrá? Cuando yo estudie relaciones entre vértices, diagonales, etc., esto que me iba muy bien, esto me lo rompe. Ya no puedo establecer patrones. A la hora de clasificar, por tanto, porque clasificar no es otra cosa que encontrar propiedades comunes y meterlo dentro de un cajón. Cuando yo quiera clasificar, ¿esto dónde lo meto? ¿Esto qué es: un hexágono o un pentágono? Porque tiene cinco vértices y seis lados. Es verdad que rompe nuestras explicaciones, ¿no? ¿Va a impedir...? Considerar esto polígono, ¿va a impedirnos encontrar relaciones entre las propiedades de los polígonos cuando definamos polígono? ¿Sí o no? ¿Nos conviene considerarlo polígono? ¿Sí o no?

Alumnos (varios): No.

Extracto Ob-18/10: 386-395

Esta estrategia de enseñanza del contenido matemático en formación inicial se ha mostrado recurrente en las observaciones que hemos realizado hasta ahora. Consciente de que los EPM se encuentran en un proceso de reconstrucción del conocimiento matemático durante la formación inicial, Lucas se apoya en la ejemplificación y en el análisis de las definiciones geométricas para fundamentar esta nueva forma de comprender el contenido matemático, que permitirá a los EPM transformarlo como contenido de enseñanza en Educación Primaria, desde la perspectiva del isomorfismo didáctico ya comentada. Los últimos extractos constituyen una nueva evidencia sobre el conocimiento didáctico del contenido matemático en formación inicial. Como también hemos podido observar con anterioridad, el discurso de Lucas va alternándose entre el contexto de formación inicial y el contexto de enseñanza en Educación Primaria. Ante las dificultades que se presentan durante la tarea, el formador delimita distintas

aproximaciones a la definición de polígonos y explicita su conocimiento sobre las tradiciones de enseñanza de los conceptos matemáticos en etapas anteriores, donde predominan los acercamientos deductivos (Ob-18/10: 178-184)

Alumna: Yo, por lo menos, entiendo que, si no lo podemos comparar con nada, si no tenemos claro lo que es polígono, ¿cómo vamos a decir si es polígono o no?

Lucas: Bueno, tú niegas la mayor. Tú dices: “Sin definir polígono, ¿cómo voy yo a saber qué es un polígono?”. Bueno, pues yo pongo en duda tu afirmación porque lo que tú estás diciendo es que la única manera de definir es de lo general a lo particular. Y yo quiero ponerlo en duda. A lo mejor es porque es a la que estáis acostumbrados. Yo quiero saber si es posible, a partir de diversas situaciones particulares, intentar construir un concepto general.

Extracto Ob-18/10: 178-184

El conocimiento que muestra Lucas sobre la enseñanza de los contenidos geométricos en etapas anteriores, mientras expone una tarea de construcción de ese conocimiento, supone un indicio de su conocimiento sobre las ideas de los EPM en relación con ese contenido matemático. Este hecho nos hace suponer que el diseño de las tareas de formación inicial está influenciado por el conocimiento de Lucas sobre las concepciones de los EPM en relación con el contenido matemático. En esta misma línea, Lucas propone la reflexión sobre las consecuencias de distintas aproximaciones metodológicas en la etapa de Educación Primaria. De un lado, propone la traslación de la tarea al contexto de Primaria (Ob-18/10: 90-92) y de otro lado, invita a los EPM a reflexionar sobre la riqueza de la tarea para el aprendizaje en Educación Primaria (Ob-18/10: 480-486)

Lucas: Esta actividad es exportable a un curso de Primaria, tal cual. Esto que estamos haciendo aquí, yo lo puedo trasladar a Primaria, porque en Primaria se ven polígonos.

Extracto Ob-18/10: 90-92

Lucas: Vamos a reflexionar un momentito ahora sobre la riqueza que haya podido tener, a la hora de discriminar, la riqueza que haya podido tener cada paso que hemos dado en la eliminación, ¿no? De cara a cómo comprendemos ahora esos pasos. Y cómo el definir, consensuando propiedades, nos lleva a una manera compartida de definir polígono frente a una definición impuesta de la que no comprendemos por qué se imponen esos criterios, ¿no? Pues funciona igual cuando vosotros lo enseñéis, porque vuestros alumnos podrán también hacer ese proceso que es más rico.

Extracto Ob-18/10: 480-486

El primero de los extractos anteriores parece estar relacionado con el conocimiento de Lucas sobre cómo enseñar a enseñar, en línea con el isomorfismo didáctico. El formador hace explícito que los EPM pueden diseñar tareas de enseñanza en Educación Primaria en consonancia con las que vivencian en formación inicial. Este nuevo aporte, pone de relieve cómo Lucas articula distintos elementos de su conocimiento para configurar una tarea, que además le sirve para modelar la enseñanza en Educación Primaria; lo que hace puede interpretarse como su conocimiento sobre la enseñanza de conocimiento didáctico para la enseñanza de las matemáticas.

La tarea de construcción de la definición de polígono y las consideraciones sobre su enseñanza en Educación Primaria se cierra con la reflexión de Lucas sobre los materiales de enseñanza en esa etapa, en concreto sobre el libro de texto (Ob-18/10: 508-513). De esta aportación, se desprende conocimiento de Lucas sobre la identidad profesional del profesor, en tanto que lo sitúa como experto en la enseñanza de las matemáticas capaz de tomar una actitud analítica con respecto a los materiales que usa.

Lucas: Lo bonito ahora sería ir a libros de texto, que es la tercera parte de la actividad, y ver si la definición de polígono que se hace en los libros de texto se corresponde con ésta y si nuestro proceso ha sido más rico o menos rico de lo que el libro nos ofrece, que seguramente sea en la otra dirección. Y eso os invito a que lo hagáis. Seguramente, nos lo podemos encontrar en los libros de 3º de Primaria. Os invito a que veáis cómo empiezan los polígonos, cómo los empiezan.

Extracto Ob-18/10: 508-513

Una vez consensuada la definición de polígono en el aula de formación inicial, comienzan a explorarse algunas características, como por ejemplo la concavidad. Los polígonos cóncavos tienen menos presencia que los convexos en los materiales de aprendizaje de las etapas anteriores y Lucas sabe que eso supone una dificultad de comprensión para los EPM, que tienen una imagen estereotipada de los polígonos. El trabajo sobre la concavidad/convexidad en polígonos comienza con la no existencia de triángulos cóncavos y deriva en el estudio de la suma de ángulos interiores de los polígonos. El procedimiento de triangulación de los polígonos, para obtener la suma de ángulos interiores, se fundamenta en que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados y durante el desarrollo de esta actividad, Lucas hace que emerja la necesidad de hacer la demostración de este resultado. Los extractos en relación con cómo se valida el conocimiento matemático informan del conocimiento de Lucas sobre los distintos grados de justificación, sobre la práctica de demostrar y los distintos tipos de demostraciones;

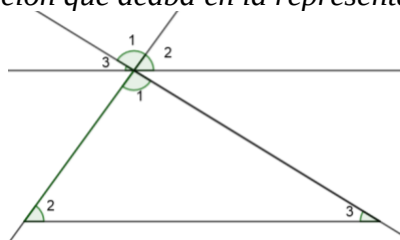
todos relacionables en el sentido de conocimiento matemático del formador. Además, informan sobre su conocimiento del programa de formación inicial de maestros, ya que, durante la construcción de la demostración, se apoya en conocimiento que se construye en asignaturas anteriores.

La tarea de demostración de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados se inicia con una comprobación intuitiva de este resultado. Lucas invita a una alumna a que, a partir de un triángulo de papel, recorte los ángulos y los coloque adyacentes, pudiendo observarse que juntos forman un llano. Esta comprobación se une a la construcción que hicieron los EPM en Geogebra, donde utilizando la suma de ángulos podían variar las posiciones de los vértices y observar que, los cambios en la medida de los ángulos, no afectan a la suma total. Estos resultados previos, ayudan a Lucas a organizar la validación en distintos grados de justificación, que además relaciona con etapas de enseñanza, aludiendo a la aplicación de la comprobación a partir de recortes en los años de Educación Primaria. No obstante, construye una demostración formal de este resultado para los EPM (extracto Ob-18/10: 699-736)

Lucas: Vamos a pararnos en la demostración de que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180° . Para poder seguir construyendo. [Dibuja un triángulo genérico en la pizarra] Voy a llamarle a los ángulos 1, 2 y 3. Quiero demostrar que $1+2+3$ es 180° y lo voy a hacer usando dos principios. El primer principio es que ángulos opuestos por el vértice son iguales. Un axioma, un principio, es algo que no requiere demostración. [...]. Segundo axioma que voy a usar: Si yo tengo dos rectas paralelas y hay una tercera recta que las corta, si tengo dos rectas paralelas y tengo una tercera recta que la corta, los ángulos que la tercera recta origina que están en cada una de las rectas, ¿son...?

Alumnos (varios): Iguales.

Lucas: Iguales. Eso es lo que voy a usar: los axiomas geométricos euclidianos. [Construye la demostración que acaba en la representación]



Lucas: Esta es la primera demostración que tenéis en vuestras manos de que la suma de los tres ángulos de un triángulo, son un llano, una, intuitiva, y otra formal, geométrica pero formal. Demostración directa, por cierto, ¿verdad? Es directa.

Extracto Ob-18/10: 699-736

El conocimiento que muestra Lucas, relacionado con los valores que atribuye a la matemática con respecto a cómo construir demostraciones, forma parte del conocimiento matemático de Lucas. La discusión sobre cómo es el conocimiento de los maestros de Primaria, respecto a este nivel de formalización, podría configurar otro elemento distintivo entre el conocimiento matemático de uno y otro profesional. Durante su exposición de la demostración de la suma de *ángulos* interiores, Lucas hace referencia al tipo de demostración que usa, una demostración directa. El formador vuelve a aludir al tipo de demostración usada cuando se está cuestionando en el aula el número de ángulos cóncavos que puede tener un cuadrilátero (Ob-18/10: 769-775)

Lucas: ¿Por qué uno? ¿Por qué un cuadrilátero cóncavo no puede tener dos ángulos cóncavos?

Alumna: Porque, si tiene dos...

Lucas: Porque si tuviera dos... demostración por reducción al absurdo, porque si tuviera dos...

Alumna: No se podrían hacer los ángulos

Lucas: Mejor, lo puedes hacer mejor. A ver, si tuviera dos, ¿cuántos sumarían?

Extracto Ob-18/10: 769-775

Los tipos de demostraciones a los que hace referencia, demostraciones directas y demostraciones por reducción al absurdo, son contenidos de la asignatura que los EPM cursaron el curso anterior. Podemos comprobar, entonces, el conocimiento que manifiesta Lucas sobre la organización y las relaciones en el contenido de la formación. Este conocimiento se vuelve a evidenciar cuando se hace referencia a la generalización del número máximo de ángulos cóncavos que puede tener un polígono según sus lados. Para esta tarea, Lucas propone a sus estudiantes que se apoyen en la construcción de tablas para generalizar patrones matemáticos que se estudia en el primer curso del programa de formación inicial.

La clase termina con el trabajo sobre las diagonales de los polígonos y las alturas de los triángulos que serán el contenido de la siguiente sesión. Lucas tiene conocimiento sobre las dificultades de los EPM derivadas del trabajo, en etapas educativas anteriores, con figuras prototípicas y lo explicita tanto en relación con las diagonales exteriores, como con la existencia de distintas alturas, a veces exteriores, en los triángulos. En el extracto Ob-18/10: 921-940, observamos cómo Lucas escoge la figura uno, que es cóncava, para hacer esta reflexión sobre las diagonales de los polígonos.

Lucas: Lo que viene ahora es más difícil. ¿Cuántas diagonales tiene el pentágono uno?



Alumnos (varios): [Hablan]

Lucas: Cojo un vértice y soy sistemático, a todos menos a él mismo y a los que están a su derecha e izquierda. Una y dos.

Alumna: Pero es que... y ¿no coincidirá con el lado?

Lucas: Una diagonal podría coincidir parcialmente con un lado y no habría ningún problema. Parcialmente.

[...]

Alumno: ¿Pero esa no está fuera?

Lucas: Ah, bien. ¿Las diagonales en vuestras cabezas estaban...?

Alumnos (varios): Dentro.

Extracto Ob-18/10: 921-940

Además de seleccionar un ejemplo de polígono cóncavo, para trabajar con sus diagonales, Lucas escoge el triángulo obtusángulo para la construcción de las alturas. Ambas decisiones se fundamentan en el mismo tipo de conocimiento sobre las dificultades de los EPM con el trabajo matemático. En el extracto Ob-18/10: 158-168, se puede observar la situación que origina la confusión de la EPM y cómo lo justifica el formador:

Lucas: Ahora quiero que María me calcule las otras dos alturas, ¿puedes venir?

Hemos hecho la más fácil, ahora vamos a hacer otras [El triángulo es obtusángulo, la primera altura que dibuja María es exterior]

Alumna: Pero se ha ido... [La borra]

Lucas: ¿Se ha ido? Vuelve atrás, ¿Qué quiere decir que se ha ido?

Alumna: Que está fuera del triángulo

Lucas: Pero no pasa nada, lo que se ha puesto de relieve es tu idea preconcebida de altura de un triángulo. María está diciendo que ella creía hasta hace un momento, que las alturas de un triángulo, igual que las diagonales, por cierto, caen siempre en su interior y acaba de ver que hay una altura que no está en el interior.

Extracto Ob-18/10: 158-168

En el siguiente extracto, observamos cómo el conocimiento que evidencia Lucas, sobre las potencialidades de los distintos ejemplos de enseñanza, se dirige hacia la etapa de Educación Primaria. En esta ocasión, escoge el triángulo isósceles representado en posición prototípica, es decir, con el lado desigual paralelo a la hoja de trabajo, como ejemplo no transparente para muchas de las propiedades de los triángulos, a pesar de ser el más utilizado. En extracto Ob-18/10: 1082-1085, Lucas resalta esta idea y las consecuencias que tiene para el aprendizaje de los alumnos, mostrando su conocimiento sobre la enseñanza en Educación Primaria. El objetivo, además, es que los EPM tomen

consciencia sobre la utilización de estos ejemplos, lo que supone un indicio de construcción de una identidad profesional reflexiva.

Lucas: Si lo pintamos isósceles siempre, van a salir muchas propiedades; todos los triángulos, para los niños, tendrán un eje de simetría, todos. Todos los triángulos tienen sus alturas dentro, y se van generando propiedades a lo largo de la escolarización que son falsas, o si no falsas, limitadas. Por favor, no hagáis uso de ese tipo de triángulo estandarizado.

Extracto Ob-18/10: 1082-1085

En síntesis, el conocimiento evidenciado por Lucas en esta sesión puede ser organizado como se observa en la siguiente tabla. Las etiquetas de conocimiento identificadas refuerzan y complementan la información recogida en sesiones anteriores, lo que nos permitirá más adelante, extraer conclusiones sobre el conocimiento del formador.

Tabla 8. Síntesis de las evidencias de conocimiento Ob-18/10

Conocimiento	Etiqueta
Prácticas matemáticas definir y clasificar y su interdependencia Conocimiento sobre distintas formas de comprobación/validación de los conocimientos matemáticos Conocimiento de la práctica de demostrar y los tipos de demostraciones	Conocimiento matemático del formador
Construcción de la definición de polígono en formación inicial (inductiva)	Conocimiento sobre tareas para la construcción de conocimiento matemático
Isomorfismo didáctico como estrategia para la enseñanza de conocimiento didáctico	Conocimiento sobre cómo enseñar a enseñar
Dificultad de los EPM en el trabajo con definiciones inductivas Conocimiento de las dificultades de los EPM en reconocer diagonales exteriores Conocimiento de las dificultades de los EPM derivadas de su imagen conceptual de las alturas	Conocimiento de las dificultades de los EPM con el contenido matemático
Los tipos de demostraciones se ven en una materia anterior en la formación inicial Búsqueda de patrones y generalización como contenido de la asignatura de primer curso de formación inicial	Conocimiento del programa de formación inicial
Conocimiento sobre las definiciones en Educación Primaria Aproximaciones metodológicas y sus repercusiones para el aprendizaje en EP	Conocimiento sobre la enseñanza en Educación Primaria
Conocimiento de las limitaciones de las representaciones en el aprendizaje de contenidos geométricos	Conocimiento de las tareas de enseñanza en EP
La utilización de recursos variados y dinámicos favorece en el aprendizaje en EP	Conocimiento sobre recursos de enseñanza en EP
La actividad matemática como una construcción social El profesor debe ser capaz de analizar y cuestionar los libros de texto que usa	Construcción de una identidad profesional

3.5 Análisis de la observación de aula Ob-21/10

En esta sesión se va a trabajar sobre la Tarea 3 del curso, en la que se propone: *Diseña una sesión para trabajar en cuarto de primaria... [Una alumna se ofrece voluntaria] Venga, ¿cuál ha sido tu diseño? Una sesión para trabajar en cuarto de primaria la clasificación de triángulos. Yo no he dicho todavía nada de la clasificación de triángulos, hoy vamos a trabajarla, hoy era la clase en sí, igual que la próxima, trabajaremos la clasificación de cuadriláteros* (Ob-21/10: 56-61).

Previamente a la exposición del diseño de la EPM, Lucas retoma la discusión sobre el uso de representaciones con la que terminó la clase anterior (Ob-21/10: 6-9). De la misma forma que vimos el conocimiento del formador sobre las limitaciones que las representaciones de polígonos convexos tienen sobre el concepto de diagonal, el formador continúa reflexionando sobre los triángulos en ese sentido.

Lucas: ¿Cuál es la razón por la que nosotros vimos las alturas de... que tenemos la idea de que las alturas están dentro de los triángulos y las diagonales están dentro de los polígonos? Las razones las hemos comentado, hay una visión estereotipada de las figuras planas en los libros de texto, se suelen poner figuras planas típicas.

Extracto Ob-21/10: 6-9

En este extracto, además de evidenciar el conocimiento de Lucas sobre la enseñanza de la geometría en Educación Primaria, obtenemos una muestra de cómo relaciona las dificultades que tienen los EPM con el contenido matemático con las dificultades originadas en la etapa de Primaria. Ahondando en las representaciones de los triángulos, que es el contenido enunciado de esta sesión, Lucas muestra su conocimiento no sólo de las consecuencias de las representaciones en el empobrecimiento de la imagen mental de los triángulos, sino su conocimiento en relación con el uso de recursos y de estrategias y ejemplos de enseñanza que puedan ayudar a completar esa imagen (Extracto Ob-21/10: 10-19). Este tipo de conocimiento que puede, en parte, atribuirse al conocimiento del maestro de Primaria, es una muestra de la comprensión de Lucas del conocimiento especializado del maestro de Educación Primaria en tanto que relaciona conocimiento de distintas naturalezas en su reflexión sobre la enseñanza.

Lucas: Cuando pintamos un triángulo, salvo que queramos hablar de triángulos obtusángulos, lo pintamos en la pizarra, no usamos geogebra ni geotiras ni ningún otro recurso que nos permita ver un triángulo de una manera móvil. Lo pintamos en la pizarra, cosa que es el recurso más útil pero el menos potente para estas cosas, y lo pintamos así:



¿Qué imagen tendrán los niños de un triángulo? Si nosotros forzamos a escribir este triángulo cada vez que pintamos un triángulo, los triángulos en la cabeza de los niños: primero, serán isósceles, y hay muchos más; segundo, tendrán una sola base, porque aquí la idea de base se potencia como única cuando no hay solo una ¿por qué? Porque estamos estableciendo un lado paralelo a los bordes de la pizarra ¿no?

Extracto Ob-21/10: 10-19

Además, Lucas muestra su posicionamiento sobre la selección de ejemplos de enseñanza y de recursos de aprendizaje en Educación Primaria, de manera que vuelve a invitar a los EPM a reflexionar sobre la toma de decisiones y a fundamentar sus actuaciones en lo que supone un indicio de la construcción de identidad docente y de prácticas profesionales en Educación Primaria (extracto Ob-21/10: 21-35).

Lucas: [...] Bueno pues esto no lo vamos a hacer, ¿no? Es lo que quiero decir, no vamos a seguir con esta dinámica de repetir los errores que los libros de texto provocan en los estudiantes y de los que vosotros sois justamente víctimas. Se recomienda trabajar con representaciones en la pizarra diferentes. [...] Y sobre todo, si es posible, utilizaré algo más que la pizarra. Usaré las geotiras, usaré Geogebra o usaré las tramas.

Extracto Ob-21/10: 21-35

Después de su exposición, Lucas da paso al desarrollo de la actividad de clasificación de triángulos. En la dinámica, una de los EPM va a exponer el diseño de actividad que ha planteado y el resto de compañeros, con sus aportaciones en comparación con los diseños individuales, discutirán los puntos fuertes y débiles de la propuesta. La propia selección de esta tarea en formación inicial ya es un indicador de conocimiento de Lucas sobre prácticas profesionales y su enseñanza y aprendizaje. Se trabaja sobre la práctica de diseño de una sesión centrando el discurso en el contenido matemático que se va a abordar, pero también en aspectos metodológicos y de enseñanza de ese contenido. Durante la exposición, Lucas se apoya en la simulación de las actividades diseñadas por la EPM, lo que permite concretar la actividad desde lo abstracto de su diseño y da pie a que los EPM comenten detalles de la puesta en práctica. Esta estrategia de formación en torno a una práctica de enseñanza nos permite identificar el conocimiento de Lucas, no sólo en relación con el contenido matemático, sino también en lo referido a la construcción del conocimiento didáctico para la enseñanza. Las evidencias particulares que nos permiten hacer comprender las relaciones en el conocimiento del formador en la

línea que hemos desarrollado, se detallan a continuación. En primer lugar, en el extracto Ob-21/10: 72-89, después de que la alumna presente los ejemplos con los que va a trabajar la clasificación de triángulos según sus ángulos, Lucas la detiene para intentar que explicité los objetivos de la tarea que ha diseñado. Los EPM con los que trabaja Lucas se encuentran en el último año de formación inicial, no sólo han hecho diseños de sesiones de matemáticas previamente, sino que han cursado asignatura de Didáctica General que les permiten comprender los distintos elementos de los diseños didácticos. En su intervención, Lucas pretende guiar a la EPM a verbalizar esos elementos, consciente de la dificultad de los EPM para diferenciarlos como aspectos formales de los diseños de enseñanza (extracto Ob-21/10: 148-159)

Lucas: Yo te estaba preguntando por los objetivos y tú ya te vas por las actividades. Objetivo: que los alumnos sepan diferenciar entre...

Marta: Entre tipos de triángulos...

Lucas: Es decir, entre...

Claudia: Equilátero, isósceles y escaleno

Lucas: Es decir, que sepan clasificar en función de la longitud de sus lados y, que sepan diferenciar entre...

Claudia: También entre sus ángulos, rectángulo, acutángulo y obtusángulo

Lucas: Es decir, que sepan utilizar un criterio de clasificación según sus ángulos. Buen comienzo para empezar, a lo mejor hay más criterios

Extracto Ob-21/10: 148-159

Al cuestionar con los EPM la existencia de otros criterios de clasificación distintos, Lucas adelanta el trabajo que harán sobre esos criterios una vez finalizada la exposición de la EPM, aunque sin nombrarlos. Encontramos también evidencia sobre su conocimiento de los EPM en relación con el diseño de tareas, en concreto en lo que se refiere a la selección de objetivos de enseñanza, cuando intenta hacer ver que los criterios de clasificación de lados y ángulos son los más familiares para ellos por su protagonismo en los libros de texto. La tarea propuesta era sobre el diseño de una actividad de clasificación, pero con los criterios de clasificación abiertos y las conexiones que hace Lucas sobre el conocimiento matemático de los EPM y el diseño de tareas, podemos interpretar su conocimiento sobre las dificultades de los EPM con respecto a las tareas que diseñan (extracto Ob-21/10: 177-185)

Lucas: El primer instrumento, no el mejor, pero el primer instrumento que un maestro tiene para diseñar una sesión... [...] ¿Qué haces? ¿Cuál es el libro de texto que se está usando? Y nos vamos al libro de texto, que es lo que solemos hacer, porque nuestro conocimiento sobre la matemática no es tan potente, debería serlo, pero no lo es, para que nosotros

directamente discutamos qué es lo que tenemos que dar. Así que tú, siguiendo ese libro de texto muy discutible, dices: “Según sus lados y según sus ángulos” que son los elementos básicos.

Extracto Ob-21/10: 177-185

Una vez expuestos los objetivos de la tarea, la EPM describe una fase inicial en la que utilizaría el enlosado del aula para configurar una trama ortogonal. En la tarea que describe, colocaría círculos de colores en las uniones de las losas del aula y los alumnos utilizando ese color, podrían posicionarse en un lugar determinado. Las intervenciones de Lucas durante la exposición del diseño se encaminan a ir explicitando la posible justificación de las decisiones que ha tomado la EPM (extracto Ob-21/10: 237-240) y las conexiones matemáticas que se dan entre los contenidos en los que se apoya (extracto Ob-21/10: 255-264). Los comentarios al respecto constituyen un indicio de conocimiento del formador sobre el diseño que se está presentando y muestran además su intento por profesionalizar el discurso de la EPM, dotando a la exposición de un carácter fundamentado de práctica profesional.

Lucas: Así que está usando una versión muy personal de una trama y yo creo que ella lo está haciendo, pensando en que cuando los niños vivencian el concepto que se va... no solo a manipular sino vivir, trazar, al moverse por el concepto que se pretende trabajar, van a conseguir un nivel de adquisición mayor.

Extracto Ob-21/10: 237-240

Marta: O también podría ser, para que practicasen otras cosas, ponerle por ejemplo que fuera... A, B, C,... como el juego del barquito, y 1, 2, 3,... para que los niños así también fueran practicando otras cosas. [Señala el dibujo de la trama, a continuación]

	A	B	C
1	.	.	.
2	.	.	.
3	.	.	.

Lucas: Un segundito, ¿qué estaríamos trabajando con lo que acabamos de hacer? ¿Qué concepto estamos añadiendo cuando ponemos letras y números en la vertical y en la horizontal? Coordenadas, ¿vale? Sistema de coordenadas no convencional, pero un sistema de coordenadas muy familiar para el niño, que luego nos puede permitir trabajar vectores. Cuando trabajemos sistemas de coordenadas en el plano, las coordenadas ya van a ser puramente numéricas, pero es un buen comienzo, partir de... para sistemas de coordenadas y orientación en el plano, partir de un sistema de coordenadas de un juego que ellos manejan.

Extracto Ob-21/10: 255-264

La tarea que propone la EPM consiste en que tres alumnos se coloquen en tres puntos de la trama del enlosado en forma de vértices, y el resto de alumnos formando los lados con una cuerda que los uniría a todos. Una vez expuesta la primera parte de su tarea, Lucas va guiando el discurso de la alumna hacia las posibles dificultades de la misma (extracto Ob-21/10: 313-329)

Lucas: Marta y ¿tú crees que ellos se quedan en su cabeza, cada vez, el triángulo que han formado para poder compararlos unos con otros? [...] ¿Y cómo comprueban...? Si tu objetivo es comparar las longitudes en un triángulo dado, ¿cómo comprueban que una longitud es mayor o es menor? Porque uno tendrá que moverse. Habrá que nombrar un juez para que se mueva por los lados del triángulo y diga cuál es mayor y cuál es menor, ¿no?

Marta: No...

Lucas: No tienes intención de que lo comparen.

Marta: Pero eso lo ven ellos mismos, si están dentro de la cuerda y ven que se hace más pequeño y que se tienen que ir para el otro lado, pues ellos mismos...

Lucas: ¿Tú crees? ¿Qué esa apreciación de la longitud va a ser tan fina?

Extracto Ob-21/10: 313-329

Los comentarios de Lucas hacia el diseño informan sobre su conocimiento de la percepción de la magnitud de los alumnos de primaria a la vez que se aplican a una situación concreta. El conocimiento sobre la práctica de enseñanza que muestra el formador se revela como un entramado de conocimiento que se aplica a la situación y que tiene origen en aspectos metodológicos, matemáticos y didáctico-matemáticos. El objetivo de Lucas es que los EPM tomen consciencia de todos esos elementos en el diseño de sus tareas y ante la reticencia de la EPM propone una situación de simulación sobre la tarea en el aula de formación inicial (extracto Ob-21/10: 334-337)

Lucas: Vamos a hacerlo, Marta.

Marta: Vale, pero aquí no podemos [la clase tiene asientos anclados al suelo]

Lucas: Vamos a verlo, a ver, todo el mundo de pie. Formad un triángulo cualquiera [Se levantan y se van dando las manos]

Extracto Ob-21/10: 334-337

Pese a la disposición del aula, la EPM escoge a tres compañeros que simulen los vértices y el resto intenta representar los lados de un triángulo. Una vez construida la situación, Lucas formula preguntas, tanto a la EPM como al resto de sus compañeros, sobre la percepción de la longitud o sobre la amplitud de los ángulos. Esta estrategia de puesta en práctica del diseño a través de la simulación constituye una evidencia de conocimiento del formador sobre cómo enseñar prácticas profesionales. En sesiones anteriores, cuando

se discute sobre respuestas de los alumnos de Primaria ante actividades o ejemplos, se realiza una simulación similar que permite a los EPM desarrollar su conocimiento sobre la interpretación del conocimiento de los alumnos de Primaria y que formarían parte del mismo tipo de conocimiento del formador sobre cómo enseñar a enseñar. Ante las debilidades en relación con el aprendizaje matemático que presenta la tarea, Lucas focaliza el discurso en estos aspectos. Encontramos evidencia del conocimiento de Lucas sobre los diseños de los EPM que tienden a ser completos respecto a distintos niveles de actividad, pero cuyo contenido matemático tiende a diluirse (extracto Ob-21/10: 365-369)

Lucas: Lo hagamos con un recurso, con el de María o con alguno de los que yo os sugería, en cualquier caso, lo que tenemos que tener presente es que debemos dejar abierta la posibilidad para que cada alumno pueda comparar en cada triángulo construido, los lados entre sí y los ángulos entre sí y comparar todos los triángulos también entre sí, porque ahí es donde va a estar el aprendizaje matemático

Extracto Ob-21/10: 365-369

Una vez que se ha trabajado sobre la primera parte de la actividad propuesta por la EPM, Lucas alienta al resto de compañeros a que comparen la actividad con sus diseños o que hagan sugerencias sobre la actividad que acaban de hacer. Ante estas intervenciones, en el extracto Ob-21/10: 416-422, vemos la intención de Lucas de alentar al trabajo cooperativo entre los docentes:

Penélope: Yo le daría una trama a un encargado que vaya dibujando lo que están haciendo...

Lucas: Que vayan otros representando lo que unos van haciendo... Esto como sugerencias, Marta.

Marta: No es que se me acaba de ocurrir que sería mejor darles un geoplano antes de darles la trama.

Lucas: Lo que tú acabas de descubrir es que cuando varios maestros de un colegio trabajan en equipo, diseñan actividades mejores... Claro, sin duda alguna. Eso hagámoslo, por favor, no trabajemos aisladamente. Bueno, ¿ya lo tenemos?

Extracto Ob-21/10: 416-422

Con esta evidencia, se revela la intención de Lucas de discutir un diseño de enseñanza en el aula como estrategia para conseguir construir conocimiento sobre los diseños entre los EPM. Lucas sitúa a los EPM en su papel de maestros, haciendo énfasis en el conocimiento especializado y el discurso compartido sobre la enseñanza que pueden compartir en la comunidad de práctica. Situar la reflexión del diseño de una sesión de enseñanza en el

trabajo cooperativo entre docentes, da cuenta de cómo el formador pretende contribuir a la construcción de la identidad profesional de los EPM.

En la segunda parte de la actividad que se está presentando, la EPM propone que una vez que se han representado los triángulos en una trama ortogonal, pediría a los alumnos que los recortasen y fuesen organizando grupos en función de sus características comunes. La aproximación didáctica que escoge para trabajar la clasificación de triángulos en Educación Primaria, como proceso inductivo, se alinea con las actividades que el formador ha ido organizando en el aula de formación inicial. Aunque no es nuestro objetivo describir el aprendizaje de los EPM, este detalle nos revela información sobre lo que Lucas identifica en la entrevista como isomorfismo didáctico como estrategia de enseñanza en formación inicial. Lucas propone entonces que los EPM salgan a la pizarra a representar grupos de triángulos que se parezcan entre sí, consciente de que la organización que van a hacer tendrá consecuencias sobre los criterios de lados y ángulos. Esta sugerencia parece sustentarse en el conocimiento de Lucas sobre la dificultad de los EPM para conjugar los dos criterios de clasificación y reconocer, por ejemplo, que un triángulo puede ser isósceles y obtusángulo. Durante la representación de los polígonos (extracto Ob-21/10: 484-492)

Lucas: Yo he podido captar otra propiedad que tienen en común los tres primeros: tienen los tres lados distintos, ¿no? Es escaleno, así que uno podría haber estado captando la de obtusángulo y el otro la de escaleno, ¿Qué haríamos aquí? ¿Qué haríamos si tuviéramos un niño que ha captado distinto...? que es lo normal...

Penélope: Pero es correcto

Lucas: Claro, a él le hemos dicho que lo ponga parecido, no le hemos dado instrucciones más que pongan los que se parecen, los voy amontonando y el tercero que pone es este [Señalado el dibujado por él mismo] ¿qué le decimos?

Extracto Ob-21/10: 484-492

La idea que intenta transmitir Lucas es que el análisis de las figuras que pueden hacer los alumnos de Primaria puede variar entre los criterios de lados y ángulos. La tarea que en principio se apoyaba en el trabajo sobre ambos criterios, se ha presentado tan abierta que puede suceder que, durante su puesta en práctica, se generen grupos de clasificación que combinen los dos criterios. El énfasis aquí no está solo en que ellos tomen consciencia de esa organización de los triángulos, sino en que ellos como maestros deben ser capaces de interpretar las respuestas de sus alumnos y comprender los porqués. Esto nos informa sobre el conocimiento de Lucas sobre la práctica profesional docente. Después de aclarar

esta idea, Lucas detiene la exposición para preguntar a los alumnos acerca del triángulo equilátero (extracto Ob-21/10: 513-516)

Lucas: Algún obstáculo para esta actividad... mientras ella dice... ¿qué triángulo no va a salir? ¿Salen todos?... [Espera] El equilátero no puede salir... [Señalando los recursos que se pueden usar en la actividad] El equilátero no puede salir.

Extracto Ob-21/10: 513-516

Ante el escepticismo de algunos EPM, algunos voluntarios tratan de construir, sin éxito, triángulos equiláteros en Geogebra con la condición de que los vértices tienen que estar sobre nodos de la trama. Lucas deja esa demostración al grupo que trabajará con el recurso geoplano en su trabajo práctico de la asignatura, pero valida el resultado de que no se puede construir y que necesitarían una trama isométrica (extracto Ob-21/10: 566-576)

Lucas: Si es isométrica, claro, claro que se puede. En la trama isométrica no hay ningún problema, en la trama isométrica precisamente, sí se pueden hacer.

Marta: Entonces, será mejor trabajarlo en una trama isométrica

Lucas: Yo no he dicho eso...

Marta: No, no, lo digo yo

Lucas: Bueno, si tú lo piensas... magnífico. Yo no te puedo contestar a eso. Me está poniendo en un apuro, dice: “Es mejor una trama isométrica”. ¿Para qué? ¿Para evitar este problema? Yo abordaría el problema, yo quisiera llegar a este problema. Yo quisiera ver que no hay ningún triángulo, que ninguno de los que tenemos es... Yo me lo sacaría luego de mi bolsillo, un recorte y: “Ninguno tenéis este, ningún triángulo como este”

Extracto Ob-21/10: 566-576

A través de esta reflexión, Lucas muestra su conocimiento sobre la enseñanza de la matemática en Educación Primaria. La perspectiva de Lucas sobre problematizar la enseñanza y que los alumnos de Primaria puedan discutir sobre el contenido, supone una nueva contribución a la construcción de la identidad profesional de los EPM.

La sesión termina con la incorporación de nuevos criterios de clasificación de triángulos, la posición del ortocentro y los ejes de simetría. Las líneas y rectas notables de los triángulos y las regularidades y simetrías de las formas planas forman parte del contenido matemático de la asignatura y Lucas los relaciona con la clasificación de triángulos, incluyéndolos como criterios más allá de los ángulos y los lados. Esta inclusión revela conocimiento de Lucas sobre criterios de clasificación que nos informan sobre su conocimiento matemático, pero además sobre su conocimiento sobre la práctica matemática de clasificar, construyendo clasificaciones con los criterios mencionados.

En forma de síntesis, para cerrar la descripción y análisis de esta sesión de aula, organizamos los elementos de conocimiento evidenciados durante la observación, en la siguiente tabla:

Tabla 9. *Síntesis de las evidencias de conocimiento Ob-21/10*

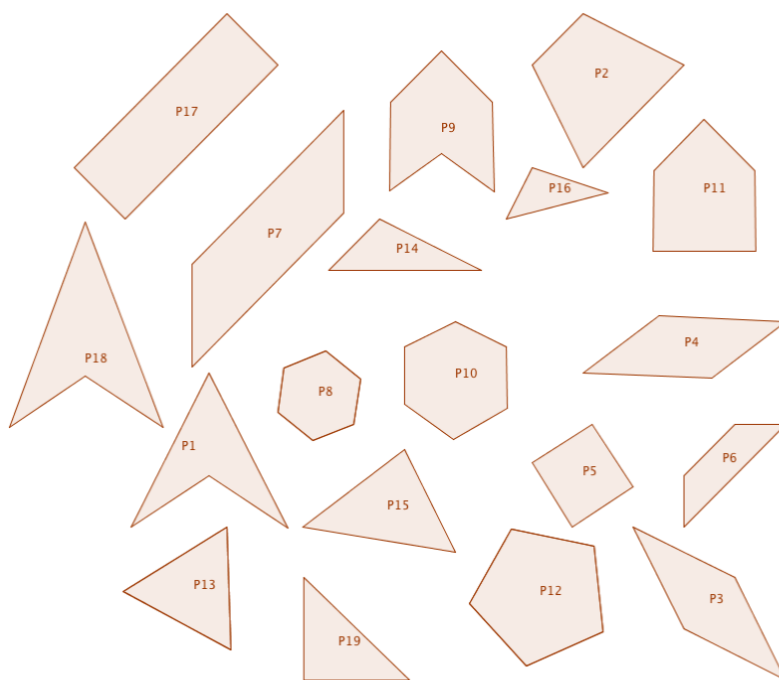
Conocimiento	Etiqueta
La posición del ortocentro y los ejes de simetría como criterios de clasificación de triángulos	Conocimiento matemático del formador
Conocimiento de los recursos y su utilidad en la enseñanza en EP	
Conocimiento sobre características de las tareas de enseñanza que favorezcan una imagen conceptual rica	
Problematicación del contenido matemático como estrategia de enseñanza y aprendizaje	Conocimiento de la enseñanza en Educación Primaria
Libros de texto como recursos predominantes de la enseñanza en Educación Primaria	
Conexiones matemáticas entre la trama ortogonal como recurso y el eje cartesiano	
Conocimiento sobre las consecuencias de las representaciones estereotipadas en el aprendizaje de contenidos geométricos	Conocimiento de las características de aprendizaje en Educación Primaria
Los libros de texto como organizadores curriculares en Educación Primaria	Conocimiento sobre los estándares de aprendizaje en EP
Dificultades en los diseños de los EPM en relación a la percepción de las magnitudes	
El foco matemático se diluye entre otros aspectos de los diseños de los EPM	Dificultades de los EPM con respecto al contenido didáctico-matemático
La utilización de la trama ortogonal imposibilita el trabajo con triángulos equiláteros	
Interpretación del pensamiento de los estudiantes de primaria para la toma de decisiones	Conocimiento de las prácticas profesionales docente
Elementos didácticos en el diseño de tareas de enseñanza	
Simulación de diseños de enseñanza en formación inicial como estrategia de enseñanza de prácticas profesionales	Conocimiento sobre cómo enseñar a enseñar
El trabajo cooperativo del maestro dentro de su comunidad de práctica	
El profesor como selector y analista de distintos recursos	Construcción de la identidad profesional

3.6 Análisis de la observación de aula Ob-25/10

El objetivo de esta sesión es avanzar en el trabajo sobre clasificación de polígonos que se inició con la clasificación de triángulos de la clase anterior. La práctica matemática de clasificar tiene un peso importante en el programa de la asignatura, parejo al de la práctica de definir. El trabajo en torno a esta práctica se aplica principalmente a triángulos, como hemos visto, y a cuadriláteros, aunque se inicia desde la clasificación de polígonos en general. En esta sesión, se retoma una actividad de la tarea 3 en la que se exponen distintos polígonos (Figura 16) con el objetivo de identificar diferencias y similitudes que permitan agruparlos y generar clasificaciones distintas al número de lados.

Figura 16.

Ejemplos de polígonos para identificar criterios de clasificación

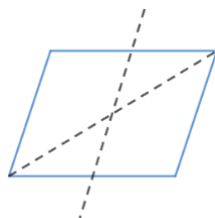


La selección de ejemplos que propone el formador destaca por la variedad de criterios de clasificación que se pueden adoptar y por el tipo de representaciones no prototípicas en posiciones no estándares. Las utiliza para hablar de clasificaciones basadas en concavidad/convexidad, regularidad/irregularidad, posiciones relativas de las diagonales -principalmente con respecto a los cuadriláteros-, y número de ejes de simetría.

Al desarrollar el criterio de ejes de simetría de las figuras, se ahonda en el análisis de la figura P4. Lucas tiene conocimiento sobre las dificultades de los EPM con respecto a la

comprensión de los ejes de simetrías de figuras como esta, en la que la figura puede dividirse en partes de igual área e incluso igual forma que no son simétricas. Este conocimiento se enmarca dentro del conocimiento del formador sobre las dificultades de los EPM con respecto al contenido matemático. La dinámica para abordar esta dificultad es ir mostrando cada uno de los ejes de simetría que identifican los EPM para analizarlos con base a las características de la simetría que ya se han abordado en el aula de formación (extracto Ob-25/10: 47-56).

Lucas: ¿Quién ve un eje de simetría? ¿María? A ver, señálalo... ¿quieres salir por favor? ¿Qué es para ti un eje de simetría? ¿Es el mismo?
[María dibuja una de las diagonales]
Lucas: ¿es el mismo que tú querías ver, Elena? Pinta tú el tuyo por favor [Elena se levanta y completa la figura que había dejado María]



Lucas: ¿Alguien ve otro eje de simetría? Un presunto... ¿alguien ve otro presunto eje?
Alumna: La otra diagonal.

Extracto Ob-25/10: 47-56

Una vez que están expuestos los ejes de simetría, que creen los EPM que tiene el paralelogramo, Lucas invita a los EPM a que justifiquen por qué se tratan de ejes de simetría. La justificación del eje de simetría, como la recta que divide en partes iguales una figura, no tarda en ser expuesta. Lucas evalúa este razonamiento desde el punto de vista de la teoría de aprendizaje de Van Hiele, que constituye una de las lecturas del curso. De esta forma vemos cómo muestra su conocimiento sobre las dificultades de los EPM, sobre teorías de enseñanza-aprendizaje de contenidos geométricos en Educación Primaria y de su extensión a la formación inicial (extracto Ob-25/10: 86-92)

Lucas: Vamos a explicar por qué creías que era un eje de simetría. María está diciendo que ella creía que era un eje de simetría porque si doblaba la figura por el eje de simetría las dos partes eran iguales... entonces esa impresión visual es la que ha podido... ¿es así María? Esa impresión visual es la que le ha dado su argumentación. Cuando ahora ha intentado doblarlo mentalmente ya no lo ve tan claro... [Construye el simétrico de cada punto] Por tanto, ¿es un eje de simetría? no, ¿en qué nos hemos basado para creer que es una simetría en aspectos...

Alumno: Perceptivos

Lucas: Perceptivos... ¿nivel? ¿Nivel Van Hiele?

Extracto Ob-25/10: 86-92

Lucas aprovecha esta oportunidad para desarrollar los niveles de razonamiento de la teoría, mostrando conocimiento sobre su aplicación en Educación Primaria. Además, utiliza la situación en el aula de formación inicial como detonante para reflexionar sobre cómo la teoría se puede utilizar para comprender el aprendizaje y responder de manera fundamentada a las contingencias del aula de Primaria (extractos Ob-25/10: 188-191 y Ob-25/10: 201-206)

Lucas: No hay otros argumentos, cuando nos metemos con otra argumentación desmontamos esa idea intuitiva, esto le va a pasar a los niños, esto que acabamos de ver aquí es una experiencia única, una oportunidad única que cuando seáis maestros de primaria se dará todos los días ¿vale?

Extracto Ob-25/10: 188-191

Lucas: La clase de hoy no tenía esto previsto, pero esto... es normal, esto es lo que a mí me parece normal en un aula. Hemos visto la simetría, ¿sí o no? Pero hay alumnos que no se si vinieron o si estuvieron y no comprendieron. Y aquí se da una situación interesante que no debéis dejar pasar cuando seáis vosotros los que estéis en mi posición, volvemos atrás.

Extracto Ob-25/10: 201-206

Además de la dificultad de considerar las partes en las que se divide la figura, Lucas muestra conocimiento sobre otro punto crítico en la construcción del procedimiento por parte de los EPM. En el aula de formación inicial se ha vuelto a reconstruir paso a paso cómo se hace una simetría, sin embargo, la condición de que los segmentos que unen los puntos y sus simétricos deben ser perpendiculares al eje, sigue siendo un obstáculo en las intervenciones de los EPM. Lucas lo expone tal y como se observa en el extracto Ob-25/10: 275-280:

Lucas: Parece que tiene una potencia enorme la idea de que sea una recta que pase por los puntos medios de los segmentos que unen los puntos y sus transformados, y tiene que ser así, pero además, el ángulo de corte tiene que ser de 90° si no... no es eje de simetría, ¿lo ves? ¿De verdad que lo ves? Esa idea está también muy arraigada en Educación Primaria, porque las simetrías son de ejes verticales y con figuras con segmentos perpendiculares ya al eje.

Extracto Ob-25/10: 275-280

A través de esta última declaración accedemos al conocimiento de Lucas sobre las dificultades de los EPM, pero también sobre su origen. Ya teníamos evidencias anteriores en relación, también, con el procedimiento de simetría. El conocimiento de Lucas sobre

las dificultades de los EPM con respecto al contenido matemático está justificado en el empobrecimiento de las imágenes mentales de los EPM como consecuencia de su exposición a los conceptos o procedimiento de los libros de texto o los materiales de aprendizaje que utilizaron durante su etapa de alumnos de Educación Primaria.

Durante la corrección de los errores de los EPM, Lucas muestra su conocimiento matemático sobre la simetría al apoyarse en las características de construcción de la simetría para conseguir figuras que sí sean simétricas. En este sentido, propone la modificación de la figura para que los ejes seleccionados sean ejes de simetría, mostrando su conocimiento sobre el procedimiento como dinámico y fluido. En primer lugar, forzando la perpendicularidad de los lados y convirtiendo la figura en un rectángulo que sí tiene un eje de simetría en el punto medio de sus lados; y, en segundo lugar, reduciendo los lados mayores para hacer coincidir los puntos simétricos con respecto a la diagonal, consiguiendo un cuadrado.

A partir de la intervención de un EPM, se hace un paréntesis en el desarrollo de la tarea, para explorar los ejes de simetría del círculo. En clase se concluye que los círculos tienen infinitos ejes de simetría, tantos como diámetros. Aprovechando esta idea, Lucas propone a sus EPM:

Lucas: ¿y cómo sé yo cuál es el centro de una circunferencia? Venga, venga, os doy una circunferencia, ¿cómo puedo saber cuál es su centro? ¿Quién me lo dice?

Extracto Ob-25/10: 458-459

Preguntado por esta actividad, Lucas expone que, en esta situación de contingencia, al estar hablándose de diámetros como cuerdas que pasan por centro pensó que una actividad en la que hubiese que localizar el centro, contribuiría al aprendizaje de los EPM sobre simetría porque muchos de los procedimientos se apoyan precisamente en esa idea de infinitos ejes de simetría. Los EPM expusieron procedimientos como la obtención de un rectángulo inscrito y el centro de la circunferencia como punto de corte de las diagonales; así como la construcción de un cuadrado circunscrito a partir de tangentes y perpendiculares, cuyo punto de corte de las diagonales es centro de la circunferencia; la construcción de una recta tangente y otra tangente paralela a la primera, que delimitan un segmento en sus puntos de corte de la circunferencia que es diámetro y de ahí punto medio y centro; o, la obtención de cualquier cuerda y el cálculo de su mediatriz como diámetro de la circunferencia, y de la mediatriz de ese diámetro para encontrar el centro de la

circunferencia. El papel de Lucas durante la exposición de los procedimientos fue el de ir reconduciendo el discurso de los EPM cuando los explicaban y el de ir validando los resultados sobre los que se apoya cada construcción. El conocimiento que expone Lucas en esta parte de la sesión es principalmente conocimiento matemático sobre los procedimientos.

Una vez concluido el trabajo sobre los ejes de simetría de los polígonos como criterio de clasificación, se inicia el trabajo sobre la posición relativa de las diagonales en cuadriláteros (extracto Ob-25/10: 723-728)

Lucas: Hay muchos cuadriláteros que tienen diagonales perpendiculares y por el mero hecho de tener diagonales perpendiculares, a esos cuadriláteros se les puede calcular el área como si fueran... rombos. Todos estos criterios nos permiten clasificar figuras, agruparlas en grandes grupos y de esos grandes grupos aprovechar las propiedades comunes. Eso les da una versatilidad mayor y me permite una relación mayor entre todos sus elementos.

Extracto Ob-25/10: 723-728

Podemos observar cómo el conocimiento de Lucas, sobre las relaciones que se establecen entre las figuras, es dinámico. La construcción de clasificaciones, según distintos criterios, ayuda a los EPM a identificar características comunes en las figuras y por lo tanto, a transferir las propiedades que derivan de esas características de unas figuras a otras. El extracto anterior informa del conocimiento matemático del formador, de su carácter relacionado.

La última parte de la sesión se dedica a la clasificación de triángulos, retomando la combinación de los criterios de clasificación según los lados y según los ángulos y su repercusión en el aprendizaje (extracto Ob-25/10: 818-820)

Lucas: Ahora se trata de cruzarlos entre sí porque en la clasificación de primaria tienden a estar por sus lados de una manera y por sus ángulos de otra, y no permite ver que se pueden cruzar y los estamos cruzando. El resultado es que luego cuesta mucho verlo, porque si nunca se han combinado, lo que se está diciendo, de cierta forma, es que no se pueden combinar y eso no es verdad y hace que la comprensión de los tipos de triángulos esté incompleta.

Extracto Ob-25/10: 818-820

Lucas vuelve a evidenciar conocimiento sobre el uso de las clasificaciones y su repercusión en el aprendizaje de los contenidos geométricos en Educación Primaria e

invita a los alumnos a combinar los distintos criterios para potenciar una imagen más rica que la que se desprende del uso de clasificaciones sin relaciones entre sí.

Además, para finalizar, Lucas introduce el teorema del lado opuesto al ángulo, como una extensión del teorema de Pitágoras, para clasificar los triángulos como acutángulos, rectángulos u obtusángulos según la medida de los lados, que se trabajará el próximo día de clase (extracto Ob-25/10: 864-869)

Lucas: En función de las longitudes de los lados, no de los ángulos, yo te diré sin saber cuánto miden sus ángulos, yo te diré si el triángulo es acutángulo o es obtusángulo y eso será algo nuevo que aprenderéis. Yo te doy tres segmentos y tú me dices si forman o no triángulo, y además me vas a decir si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo, y además me vas a decir cuál es el lado opuesto al ángulo.

Extracto Ob-25/10: 864-869

El conocimiento del formador identificado en esta sesión se resume en la siguiente tabla:

Tabla 10. Síntesis de las evidencias de conocimiento Ob-25/10

Conocimiento	Etiqueta
Criterios de clasificación de polígonos (ejes de simetría, posiciones relativas de las diagonales)	Conocimiento matemático
Teorema del lado opuesto al ángulo (Teorema de Pitágoras)	
Identificación errónea de ejes de simetría en el paralelogramo genérico	Conocimiento sobre las dificultades de los EPM en relación con el contenido matemático
Elementos críticos en la construcción del procedimiento simetría (a través del ejemplo de una EPM)	
Identificación de contingencias en el aula, oportunidades de enseñanza-aprendizaje	Conocimiento sobre teorías de enseñanza en EP
Teoría de Van Hiele para la enseñanza en EP	
Influencia de los libros de texto y las representaciones estandarizadas sobre el aprendizaje de la simetría	Conocimiento sobre el uso de tareas de aprendizaje
Teoría de Van Hiele (niveles de razonamiento geométrico) aplicada a la formación inicial	Conocimiento sobre teorías de aprendizaje de contenidos geométricos en formación inicial
Aprovechamiento de los errores de los EPM como herramienta de enseñanza de conocimiento didáctico del contenido	Conocimiento sobre cómo enseñar contenido matemático

3.7 Análisis transversal de las evidencias de conocimiento del formador

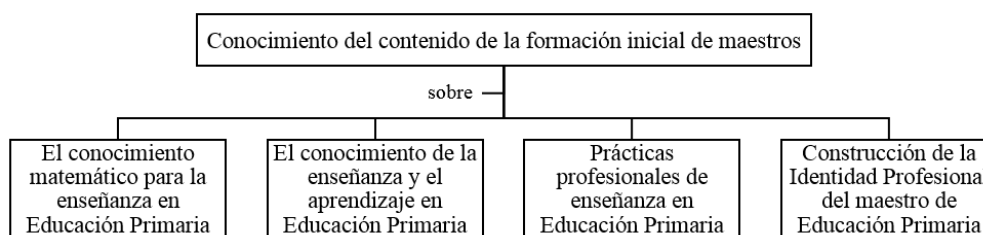
En esta nueva revisión de las evidencias encontradas, pretendemos reorganizar los resultados que hemos obtenido de cada una de las fuentes de información para comprender el conocimiento del formador de maestros. Para reorganizar los datos y poder refinar las categorías de conocimiento que se desprenden de cada episodio, vamos a tomar la diferenciación de conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido que viene siendo referente en los estudios de conocimiento del formador. En primer lugar, para cada uno de los grupos de evidencias, seleccionaremos los diferentes conocimientos, que están estrechamente relacionados con el contexto en el que se encuentran. Finalmente, la reflexión y el análisis de esos tipos de conocimiento, nos permitirá tanto reescribir las categorías de conocimiento del formador en una lectura más amplia que los incluya como indicadores de conocimiento, como comprender las características y relaciones en el conocimiento del formador.

3.7.1 Respecto al conocimiento del contenido de la formación

El contenido de la formación inicial apunta hacia qué tipo de evidencias de conocimiento del contenido son susceptibles de emerger de los datos. En este sentido, hemos encontrado conocimiento matemático, conocimiento matemático-didáctico, y, en menor medida, conocimiento sobre prácticas profesionales y conocimiento sobre la identidad profesional docente. Los resultados obtenidos se entienden desde el contexto de la investigación. La asignatura que se está desarrollando es una materia de corte cognitivo, estructurada con base en el modelo MTSK, que combina la reconstrucción de conocimiento matemático con el trabajo sobre contenidos didáctico-matemáticos. Además, en la entrevista con el formador, pudimos confirmar cómo el desarrollo de la enseñanza en la asignatura tiene que adaptarse al conocimiento matemático de los EPM, que en ocasiones presentan problemas de comprensión y de relación entre los contenidos de la asignatura, lo que dificulta el trabajo sobre contenidos didácticos de Educación Primaria. Este hecho, provoca cierta descompensación entre la construcción de elementos de conocimiento en detrimento del trabajo sobre prácticas profesionales e identidad profesional. Aun así, estructuraremos esta revisión en cada uno de los grupos de evidencia que representan los boques relacionados que estructuran el contenido en la formación inicial de maestros (Figura 17).

Figura 17.

Organización de las evidencias de conocimiento del contenido de la formación inicial de maestros



3.7.1.1 El conocimiento del formador sobre el conocimiento matemático para la enseñanza en Educación Primaria

En este punto, nos referiremos al conocimiento matemático del formador que le permite reconstruir las matemáticas escolares con sus EPM para fundamentar la futura actuación docente de estos. Reconocemos que el conocimiento matemático del formador impregna cada uno de los conocimientos que moviliza en el aula de formación inicial, no obstante, haremos el esfuerzo de aislarlo del todo que compone el conocimiento del formador para profundizar en su comprensión. Las evidencias de conocimiento matemático que hemos encontrado en la investigación, se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 11. *Evidencias de conocimiento matemático del formador*

Ob-07/10	Elementos matemáticos necesarios y suficientes en la construcción de definiciones geométricas	Conocimiento de la práctica matemática definir
	Posiciones relativas de rectas no coplanarias	Conocimiento matemático avanzado
	Definiciones geométricas en distintas geometrías (no euclidianas)	
	Conexiones entre contenidos geométricos más allá de las curriculares	Conocimiento de las conexiones entre conceptos
Ob-11/10	Coordenadas polares y su relación con coordenadas cartesianas en contextos de superficie esférica	Conocimiento matemático avanzado
	Los vectores que tienen la misma dirección se sitúan en rectas paralelas	Conocimiento de las conexiones entre contenidos geométricos
	Vectores suma como diagonales de paralelogramos	
	Clasificaciones inclusivas en formación inicial: construcción de clasificaciones	Conocimiento de la práctica de clasificar
Ob-18/10	Prácticas matemáticas definir y clasificar y su interdependencia	Conocimiento de las prácticas matemáticas
	Conocimiento sobre distintas formas de comprobación/validación de los conocimientos matemáticos	
	Conocimiento de la práctica de demostrar y los tipos de demostraciones	
Ob-21/10	Clasificaciones de triángulos en las que se combinan más de un criterio (lados/ángulos)	Conocimiento matemático ¿del formador?
	La posición del ortocentro y los ejes de simetría como criterios de clasificación de triángulos	
Ob-25/10	Criterios de clasificación de polígonos (ejes de simetría, posiciones relativas de las diagonales)	Conocimiento matemático ¿del formador?
	Teorema del lado opuesto al ángulo (Teorema de Pitágoras)	

Una forma de abordar la estructuración de estas evidencias es hacer una analogía de los avances en la comprensión del conocimiento del profesor, entendiendo que, con respecto a este conocimiento, el formador está actuando como profesor de matemáticas. En este sentido, encontramos evidencias de conocimiento que son relacionables con el conocimiento matemático del maestro que han ido impregnando cada una de las sesiones de trabajo. El conocimiento de Lucas sobre los conceptos y procedimientos geométricos que se trabajan en Educación Primaria, como la clasificación de polígonos, las posiciones relativas de las rectas, las isometrías en el plano y los contenidos matemáticos relacionados con las propiedades y la clasificación de triángulos, en particular, son conocimientos matemáticos que puede compartir con un maestro de Primaria. No obstante, el nivel de justificación y formalización de ese conocimiento ha destacado en cada una de sus evidencias. Lucas muestra recurrentemente una reconstrucción de cada uno de los conceptos y procedimientos matemáticos que difícilmente se explicita en un contexto de enseñanza en Educación Primaria. Este hecho se justifica desde la premisa de que las matemáticas que se enseñan en formación inicial deben permitir que los EPM alcancen un nivel de comprensión que les permita transformarlas para su enseñanza. Podemos interpretar que el conocimiento de Lucas sobre el conocimiento matemático para la enseñanza en Educación Primaria es cualitativamente diferente al del maestro, de la misma forma que es distinta la comprensión del conocimiento matemático del maestro a la comprensión de las matemáticas de sus alumnos. El énfasis, por ahora, en esta diferenciación no se pone en la extensión de ese conocimiento, sino en la comprensión fundamentada del mismo. De otro lado, encontramos evidencias de conocimiento que se han etiquetado como *conocimiento matemático avanzado*, que tienen su origen en la formación matemática de Lucas. Estas evidencias, que incluyen su conocimiento de otras geometrías distintas a la euclidiana, la interpretación de coordenadas en superficies esféricas o la reflexión de Lucas sobre el trabajo geométrico en distintos planos, no forman parte del conocimiento exigible a un maestro de Educación Primaria. No obstante, las evidencias de este tipo de conocimiento se interpretan como la capacidad de Lucas para reflexionar sobre los contenidos matemáticos desde un punto de vista avanzado y para relacionar el contenido matemático de la formación inicial dentro de la red de conocimiento matemático formal. Este grupo de evidencias sí podría identificarse como una extensión del conocimiento matemático para la enseñanza en Educación Primaria. El conocimiento panorámico de los contenidos matemáticos que muestra Lucas, le permite establecer conexiones entre los conceptos y procedimientos que utiliza, como las

posiciones relativas de las rectas y la representación de los vectores, la interpretación de las diagonales de los paralelogramos como vector suma, o las características de la simetría como movimiento y el análisis de los puntos dobles de ese movimiento en la construcción de ejes de simetría de un polígono. El conocimiento de la estructura matemática y el conocimiento de la práctica matemática de los maestros son los más difícilmente observables durante las sesiones de enseñanza en Educación Primaria. Las evidencias en el conocimiento del formador en esta línea llaman nuestra atención sobre las diferencias entre estos conocimientos por parte del formador y del maestro. En el sentido del conocimiento de la práctica matemática, durante las sesiones observadas, han destacado las evidencias de conocimiento sobre la práctica de definir y clasificar, y en menor medida, sobre la práctica de demostrar. Lucas hace hincapié en estas prácticas mostrando a los EPM la forma de construir conocimiento matemático, y transmite con ellas los valores matemáticos que asocia a la disciplina, como el rigor y la objetividad. Interpretamos la presencia de estas evidencias como muestra nuevamente de la comprensión de Lucas de los conocimientos matemáticos, que le permite moverse con fluidez en los procesos de construcción de conocimiento en la disciplina.

En síntesis, consideramos que el conocimiento matemático del formador para la enseñanza en Educación Primaria, puede estructurarse desde las distintas miradas que establecen los modelos de conocimiento profesional del profesor. Las diferencias no estarían en las categorías de conocimiento, sino en los indicadores que emergen, que en la mayoría de las ocasiones ofrecen una visión más fundamentada y relacionada del conocimiento matemáticos cuando observamos a un formador de maestros.

3.7.1.2 El conocimiento del formador sobre el conocimiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria

Como hemos señalado anteriormente, durante las sesiones analizadas se trabaja sobre conocimiento matemático, pero también sobre conocimiento didáctico-matemático. Esta circunstancia abre la posibilidad de que exploremos el conocimiento del formador en esta línea. La heterogeneidad de los programas de formación inicial, en los que a veces las asignaturas no prevén contenidos relacionados con la enseñanza en Educación Primaria, puede implicar que las evidencias que hemos encontrado en esta línea no emerjan en otros contextos. No obstante, consideramos importante incluir este cuerpo de conocimientos porque nos permiten entender el conocimiento de Lucas pero, además, porque supone una visión más rica del conocimiento del formador en el sentido de la configuración de un

modelo de máximos. Las evidencias de conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria que hemos encontrado en el análisis cronológico son:

Tabla 12. Evidencias de conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Ob-07/10	Uso de ejemplos límite en la construcción de la definición de línea poligonal	Conocimiento de tareas de enseñanza en EP
	Dimensiones de variación en la construcción del concepto de regularidad [Equilátero/equíángulo]	
	Obstáculos didácticos ligados a las definiciones de recta y segmento durante la enseñanza en EP	Conocimiento de las tareas de enseñanza y el aprendizaje en EP
	Dificultades de los alumnos de EP con respecto a la comprensión del ángulo	Conocimiento de las dificultades en EP
	Las rectas coplanarias no se estudian en EP	Conocimiento sobre el currículum en EP
Ob-18/10	Conocimiento sobre las definiciones en Educación Primaria	Conocimiento sobre la enseñanza en EP
	Conocimiento de las limitaciones de las representaciones en el aprendizaje de contenidos geométricos	Conocimiento de las tareas de enseñanza en EP
	La utilización de recursos variados y dinámicos favorece en el aprendizaje en EP	Conocimiento sobre recursos de enseñanza en EP
Ob-21/10	Conocimiento de los recursos y su utilidad en la enseñanza en EP	Conocimiento de la enseñanza en EP
	Conocimiento sobre características de las tareas de enseñanza que favorezcan una imagen conceptual rica	
	Problematicación del contenido matemático como estrategia de enseñanza y aprendizaje	
	Libros de texto como recursos predominantes de la enseñanza en Educación Primaria	
	Conexiones matemáticas entre la trama ortogonal como recurso y el eje cartesiano	
	Conocimiento sobre las consecuencias de las representaciones estereotipadas en el aprendizaje de contenidos geométricos	Conocimiento de las características de aprendizaje en EP
Ob-25/10	Los libros de texto como organizadores curriculares en Educación Primaria	Conocimiento sobre los estándares de aprendizaje en EP
	Teoría de Van Hiele para la enseñanza en EP	Conocimiento sobre teorías de enseñanza en EP
	Influencia de los libros de texto y las representaciones estandarizadas sobre el aprendizaje de la simetría	Conocimiento sobre tareas y recursos de enseñanza

El conocimiento de la enseñanza en Educación Primaria que evidencia Lucas está ligado, tanto al análisis de los contenidos matemáticos, como al conocimiento del contexto escolar, en el sentido de tradiciones didácticas y uso de recursos. De un lado, evidencias sobre el uso de la ejemplificación como estrategia de enseñanza, el análisis de las dimensiones de variación de los conceptos, el uso y las tipologías de definiciones geométricas, las distintas representaciones y su relación con la formación de la imagen conceptual, y su conocimiento sobre la problematización de contenidos matemáticos para su enseñanza, nos informan de cómo el conocimiento de Lucas le permite vertebrar su

discurso sobre la enseñanza. En este sentido, el análisis de la construcción de un concepto y las distintas interpretaciones que se pueden hacer de esta construcción, se desarrollan como conocimiento para la enseñanza en Educación Primaria cuando se sugiere que estos procesos guían la secuenciación en el aprendizaje y sirven para hacer énfasis en posibles aspectos que dificultan la comprensión de los alumnos de Primaria. De otro lado, evidencias sobre el conocimiento de Lucas sobre las potencialidades y limitaciones de los libros de texto y sobre la aproximación a la enseñanza a través de la utilización de recursos dinámicos y variados, nos informan sobre un conocimiento que se apoya principalmente en aspectos didácticos, con menor, aunque reconocible, peso matemático. El conocimiento de Lucas sobre la enseñanza y el aprendizaje en Educación Primaria se muestra cohesionado. Encontramos evidencias en las que, a partir de una tarea, Lucas construye su discurso en relación con el contenido matemático que se trabaja, las aproximaciones de enseñanza y su coherencia con las dificultades de los alumnos de Primaria. En relación con las dificultades de los alumnos de Educación Primaria, hemos evidenciado conocimiento del formador sobre las consecuencias de las representaciones en el aprendizaje de los alumnos de Primaria –para el caso de la infinitud de la recta o la amplitud angular, por ejemplo–, sobre la conformación de la imagen conceptual y sobre distintos niveles de razonamiento geométrico estructurados desde la teoría de los Van Hiele. El conocimiento de Lucas sobre la enseñanza y el aprendizaje del contenido geométrico en Educación Primaria, se configura desde su reflexión sobre la matemática y desde su conocimiento de los resultados de investigación. Podemos observar ese origen desde las evidencias encontradas en relación con el conocimiento de los estándares curriculares de Educación Primaria. Lucas muestra conocimiento de los límites del currículo de Educación Primaria porque es capaz de analizar los conocimientos que involucran los conceptos o procedimientos y reconoce cotas en el contenido de la etapa, como en el caso de las posiciones relativas de las rectas no coplanarias. Algo similar sucede con las evidencias en las que estima el curso de Educación Primaria en el que se trabaja un concepto. Lucas muestra conocimiento del currículo como un todo que organiza la etapa, pero no hemos encontrado evidencias en las que se referencien aspectos concretos del currículo explícitamente.

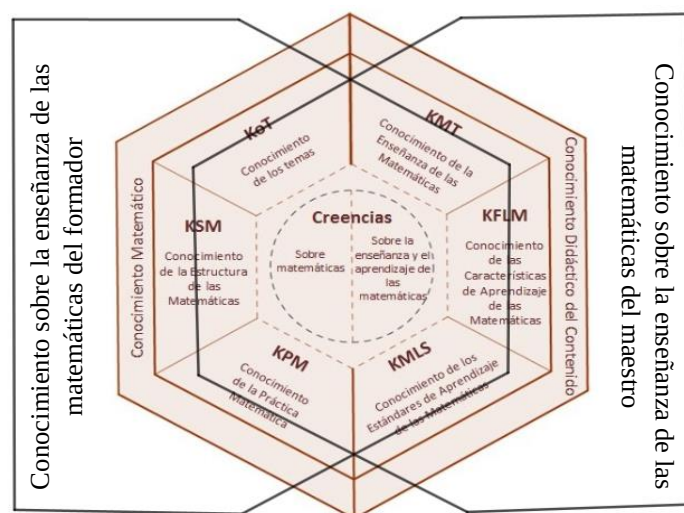
En línea con nuestra reflexión sobre el conocimiento matemático del maestro y del formador, cabría preguntarse qué relaciones pueden establecerse entre el conocimiento didáctico-matemático del maestro y del formador. El conocimiento especializado del

maestro de Primaria, que se empieza a estructurar desde el punto de vista profesional en la formación inicial, continúa evolucionando a lo largo de su carrera docente. La formación complementaria en contenidos específicos y la experiencia de clase del maestro, hace que podamos suponerle el desarrollo de teorías personales de enseñanza y aprendizaje, locales y contextualizadas, que se muestran como conocimiento didáctico-matemático del que no hemos encontrado evidencias en el formador. Otros indicadores de conocimiento didáctico-matemático del maestro, relacionados con la atención a la diversidad funcional en el aula de Educación Primaria o con la organización de la enseñanza de las matemáticas con mayor presencia de consideraciones de Pedagogía General, tampoco han sido evidenciados en el formador.

El conocimiento para la enseñanza en Educación Primaria, que incluye el conocimiento matemático para la enseñanza y el conocimiento didáctico-matemático, es, en parte, compartido por el maestro y el formador. Aunque la comprensión del formador de este conocimiento parece mostrarse más relacionada y extensa en algunos elementos de conocimiento, hay otros aspectos de enseñanza que pueden encontrarse más elaborados en el conocimiento del maestro. Asumiendo la adecuación de los distintos modelos de conocimiento del profesor, representamos esta idea apoyándonos en el modelo de conocimiento MTSK por su ajuste con el contexto de la investigación (Figura 18).

Figura 18.

Relaciones entre el conocimiento para la enseñanza en EP del formador y del maestro.



3.7.1.3 El conocimiento del formador sobre prácticas profesionales en la enseñanza en Educación Primaria

Las evidencias de conocimiento encontradas apuntan también hacia el conocimiento de Lucas sobre distintas prácticas profesionales del maestro de Primaria. Aunque el trabajo que se hace en el aula de formación inicial, analizada sobre este pilar de la formación, sea menor que el relacionado con aspectos de conocimiento para la enseñanza, encontramos episodios en los que el énfasis no se encuentra en el conocimiento matemático o matemático didáctico, sino en la aplicación de ese conocimiento para configurar la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria. A través de las distintas observaciones, hemos encontrado:

Tabla 13. *Evidencias de conocimiento de prácticas profesionales docentes*

Ob-11/10	Formulación de problemas como estrategia de aprendizaje matemático (y docente)	Conocimiento de la práctica de formulación de problemas
Ob-21/10	Diseño de tareas de enseñanza en relación con la clasificación de triángulos	Conocimiento de la práctica de diseños de enseñanza
	Interpretación del pensamiento de los estudiantes de primaria para la toma de decisiones	
Ob-25/10	Identificación de contingencias en el aula, oportunidades de enseñanza-aprendizaje	Conocimiento de la práctica mirar profesionalmente

Lucas evidencia conocimiento sobre la aplicación y la puesta en acción de los conocimientos que vertebran la asignatura. La existencia de estas evidencias refuerza el carácter poliédrico de la formación de maestros y además informa del conocimiento del formador sobre los quehaceres profesionales de los maestros. De un lado, el análisis de las características y propiedades del movimiento simetría se culminó con la invitación de Lucas a formular problemas y a los distintos grados de demanda cognitiva de esos problemas, según si se utilizaban como fuente de estudio, o como ejemplos de problemas para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria. La práctica profesional de formulación de problemas se apoya en multitud de elementos de conocimiento del maestro y supone el máximo grado de adaptación de las tareas de enseñanza a los contenidos, el contexto y las necesidades de los alumnos de Primaria en un contexto escolar. La formación de los EPM, en este sentido, repercute indiscutiblemente en el éxito en su desempeño profesional. Durante la sesión de discusión sobre diseños de enseñanza con el objetivo de clasificar triángulos en Educación Primaria, encontramos el

conocimiento de Lucas sobre la práctica de diseño de tareas mientras guía las intervenciones de los EPM. Las evidencias sobre cómo articula el conocimiento de los tipos de representaciones, las dificultades de los alumnos de Primaria y los elementos estructuradores de los planes de clase, dan cuenta del conocimiento de Lucas sobre esta práctica profesional. El diseño de sesiones de enseñanza fundamentadas ofrece a los EPM la oportunidad de gestionar la enseñanza de forma autónoma y constituye un eje de aprendizaje en la formación inicial. Por último, hemos encontrado evidencias recurrentes sobre la interpretación del pensamiento de los alumnos de Educación Primaria. Es lo que hemos etiquetado como conocimiento de la práctica mirar profesionalmente, en el sentido de comprensión de los razonamientos de los alumnos de primaria en situaciones de contingencia y la adaptación de la enseñanza a esas situaciones. La relevancia de esta práctica de enseñanza se materializa en la adecuación de la enseñanza a las características de aprendizaje de los alumnos, lo que potencia la adquisición de conocimiento matemático conectado.

3.7.1.4 El conocimiento del formador sobre la construcción de la Identidad Profesional del maestro de Educación Primaria

A medida que se han ido desarrollando las actividades de las sesiones observadas, hemos ido dando cuenta de elementos de construcción de la identidad profesional docente que, si bien no constituyen un contenido explícito de la asignatura, se han ido presentando de manera transversal:

Tabla 14. *Evidencias de conocimiento sobre identidad profesional docente*

Ob-07/10	El maestro como agente activo en el diseño y análisis de tareas de enseñanza	Conocimiento sobre perfil profesional docente
	El maestro como integrante de una comunidad de práctica con intereses comunes [derivado del uso cooperativo de Geogebra]	Conocimiento sobre el maestro en una comunidad de práctica
Ob-11/10	El maestro debe ser capaz de analizar críticamente el contenido matemático de los libros de texto	Conocimiento sobre perfil profesional docente
Ob-18/10	La actividad matemática como una construcción social	Construcción de una identidad profesional
	El profesor debe ser capaz de analizar y cuestionar los libros de texto que usa	
Ob-21/10	El trabajo cooperativo del maestro dentro de su comunidad de práctica	Construcción de la identidad profesional
	El profesor como selector y analista de distintos recursos	

Las evidencias relacionadas con la construcción de la identidad profesional docente se dividen en aquellas que muestran las características de los perfiles profesionales de maestros de Educación Primaria y las que se relacionan con cómo el maestro forma parte de una comunidad de práctica docente. En este sentido, Lucas muestra conocimiento sobre el maestro como un profesional reflexivo sobre su práctica, crítico con los materiales que usa y las estrategias de enseñanza que lleva a cabo, y autónomo en el diseño de tareas. Este conocimiento, que se evidencia en el discurso de Lucas cuando centra su atención en el rol de los EPM como futuros maestros, se desprende más o menos explícitamente en cada una de las tareas que se desarrollan y consideramos que forma parte de su conocimiento sobre el contenido de la formación. De manera similar, encontramos evidencias de cómo Lucas sitúa a los EPM en un contexto de comunidad de práctica en el que reconocer a sus integrantes y trabajar en colaboración con los mismos, ya sea a nivel micro, en los centros escolares, como a nivel macro, en relación con los demás docentes. El auto-reconocimiento de los EPM como maestros, abandonando su rol como estudiantes y reconsiderando aspectos profesionales es, según Lucas, uno de los obstáculos a los que se enfrentan los EPM durante su formación inicial. Las evidencias de su conocimiento respecto a la conformación del perfil profesional y a la pertenencia a una comunidad de práctica, se muestran necesaria del contenido de la formación inicial según el formador.

En síntesis, hemos encontrado conocimiento del formador sobre el contenido matemático de la formación que se articula como sigue:

Tabla 15. *Categorías de conocimiento del contenido del formador*

Tipología	Categorías
Conocimiento para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria	Conocimiento matemático relacionado, fundamentado y avanzado Conocimiento didáctico del contenido matemático en EP
Conocimiento sobre prácticas profesionales en Educación Primaria	Formulación de problemas Diseño de actividades de enseñanza Mirada profesional
Conocimiento sobre identidad profesional del maestro de Educación Primaria	Perfiles profesionales docentes Comunidad de práctica docente

3.7.2 Respetto al conocimiento didáctico del contenido de la formación

Vamos a organizar las evidencias de conocimiento de Lucas sobre cómo se enseña y cómo se aprende el contenido de la formación inicial, diferenciando entre los tres bloques que hemos identificado: conocimiento para la enseñanza en Educación Primaria, prácticas profesionales en Educación Primaria e identidad profesional del maestro de Educación Primaria. El conocimiento sobre cómo enseñar a enseñar es, en ocasiones, inferido a partir de la repetición de indicios de conocimiento y a la vez, explicitado en la entrevista con el formador. El conocimiento didáctico del contenido de la formación vertebral los por qué en las elecciones de Lucas sobre las tareas que usa y las decisiones que guían su actuación docente, por lo que no suele estar explícito en su discurso. Es similar a lo que ocurre en el estudio del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas, del que tomamos su estructuración nuevamente.

3.7.2.1 El conocimiento del formador sobre la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento para enseñar en Educación Primaria

Los EPM deben adquirir conocimiento matemático y didáctico-matemático durante su formación inicial y las evidencias de conocimiento didáctico de Lucas se muestran con foco en esos dos tipos de conocimiento. Diferenciamos el conocimiento de Lucas sobre *cómo enseñar a* y *cómo aprenden* los EPM el contenido matemático de la formación inicial, y conocimiento sobre *cómo enseñar a* y *cómo aprenden* los EPM conocimiento didáctico del contenido. Comenzando por las evidencias de conocimiento didáctico del formador sobre los contenidos matemáticos en formación inicial, hemos encontrado:

Tabla 16. Evidencias de conocimiento didáctico del contenido matemático del formador

Ob-07/10	Uso didáctico de los ejemplos en formación inicial. Definición/imagen conceptual	Conocimiento de teorías de aprendizaje extrapoladas a la formación inicial
	El uso de no ejemplos como herramienta para la construcción de la definición de mediatriz Reconstrucción de conceptos geométricos a partir del análisis de los elementos matemáticos que lo componen	Conocimiento de estrategias de enseñanza de contenidos matemáticos en formación inicial
	La elaboración de definiciones como herramienta para la reconstrucción del conocimiento matemático Construcción de definiciones a partir de un proceso inductivo con ejemplos de la definición Utilización de no ejemplos de vector para la construcción de la definición	Conocimiento de estrategias de enseñanza de contenidos matemáticos en formación inicial
Ob-11/10	Niveles de Van Hiele en formación inicial.	Conocimiento de teorías de aprendizaje extrapoladas a la formación inicial

	Dificultad de los EPM en relación con la definición del concepto de vector Dificultad de los EPM con clasificaciones inclusivas Dificultad de los EPM en simetrías cuando la posición de los ejes no es prototípica	Conocimiento de las dificultades de los EPM en relación con el contenido matemático
En-S	Análisis de las potencialidades de las distintas representaciones de la simetría Selección de ejemplos no estándares con respecto a las posiciones relativas de las figuras en la simetría Utilización de Geogebra y reflexión sobre sus potencialidades como recurso para la formación de maestros.	Conocimiento para la enseñanza del contenido matemático
Ob-18/10	Dificultad de los EPM en el trabajo con definiciones inductivas Conocimiento de las dificultades de los EPM en reconocer diagonales exteriores Conocimiento de las dificultades de los EPM derivadas de su imagen conceptual de las alturas	Conocimiento de las dificultades de los EPM en relación con el contenido matemático
Ob-25/10	Identificación errónea de ejes de simetría en el paralelogramo genérico Elementos críticos en la construcción del procedimiento simetría (a través del ejemplo de una EPM)	Conocimiento de las dificultades de los EPM en relación con el contenido matemático

Tal y como señala Lucas en la entrevista, el conocimiento matemático de los EPM al comenzar la formación inicial se caracteriza por ser poco profundo y estar fragmentado. Durante las observaciones, hemos encontrado evidencias de conocimiento del formador que apuntan a ese rol de los EPM como aprendices de matemáticas, con dificultades similares a las de los alumnos de Primaria. El conocimiento de Lucas sobre cómo es el aprendizaje de los contenidos matemáticos de los EPM, apunta principalmente hacia esas dificultades. Las evidencias de conocimiento sobre la enseñanza de contenido matemático en la formación inicial, aunque aplicables al contexto de Educación Primaria, siempre hacen hincapié en la construcción fundamentada del contenido matemático. Esto es debido a que las matemáticas que se enseñan en el aula de formación inicial deben hacer hincapié en la fundamentación y en las relaciones entre contenidos para facilitar que los EPM puedan comprenderla con tal grado de profundidad que puedan convertirlas en conocimiento enseñable. En esta línea, encontramos conocimiento del formador sobre la construcción inductiva de conocimiento matemático, principalmente sobre definiciones; sobre tareas para la fundamentación de procedimientos como la simetría, o sobre la ejemplificación como estrategia de enseñanza a en formación inicial.

En relación con las evidencias de conocimiento del formador sobre cómo enseñar conocimiento didáctico del contenido matemático, identificamos:

Tabla 17. Evidencias de conocimiento didáctico del contenido didáctico del formador

En-S	Posibilidad de traslación de metodologías de enseñanza en formación inicial a metodologías de enseñanza en Primaria (Isomorfismo didáctico)	Conocimiento sobre estrategias para la enseñanza de estrategias de enseñanza en EP
	La dificultad de los EPM en relación con la construcción de la simetría, obstaculiza la construcción de conocimiento sobre cómo enseñarla.	Conocimiento sobre las dificultades de los EPM con respecto al conocimiento de la enseñanza
	El análisis de las posibles dificultades facilita la comprensión del proceso de aprendizaje	Conocimiento sobre estrategias para la enseñanza de conocimiento didáctico
Ob-25/10	Análisis de los razonamientos geométricos de los EPM (Van Hiele) como ejemplos de su aplicación a EP	Conocimiento sobre estrategias para la enseñanza de conocimiento sobre las dificultades en EP
	El análisis de los errores de los EPM, permite reflexionar sobre las posibles dificultades de los alumnos de EP	

La estrategia predominante, para la enseñanza de conocimiento para la enseñanza de las matemáticas en las sesiones observadas, es el isomorfismo didáctico entre la actuación del formador y la actuación del maestro. Según nos informa Lucas, él modela en el aula de formación inicial actividades que son imitables en Educación Primaria, de forma que los EPM puedan replicarlas en su futura actuación como docentes. De esta forma, las estrategias de enseñanza de contenido matemático que ha puesto en práctica, como la construcción inductiva de definiciones a partir de actividades de ejemplificación, la selección de ejemplos de enseñanza analizados desde el punto de vista de su transparencia o la fundamentación de los procedimientos realizados, adquieren un doble papel de enseñanza, el de la adquisición del contenido matemático que se trabajaba en cada caso y el de ejemplo de cómo enseñarlos en el aula de Educación Primaria. De otro lado, hemos evidenciado conocimiento del formador sobre cómo se construye conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje en Educación Primaria. Lucas utiliza los obstáculos de aprendizaje y los errores de los EPM como ejemplos de las dificultades de aprendizaje de un contenido matemático de los alumnos de Primaria. Durante las sesiones analizadas, es común que Lucas se detenga en que los EPM expliciten sus dificultades en relación con los diferentes conceptos y procedimientos que se trabajan en el aula. Su conocimiento sobre cómo construir con los EPM conocimiento sobre las dificultades de los alumnos de Educación Primaria se apoya en los paralelismos que hay entre los EPM y los alumnos de Primaria durante la reconstrucción y el aprendizaje matemáticos de cada uno respectivamente.

3.7.2.2 El conocimiento del formador sobre la enseñanza y el aprendizaje de prácticas profesionales y sobre la construcción de la identidad profesional

Las prácticas profesionales que se desarrollan en el aula de formación inicial, como hemos mencionado anteriormente, son la formulación de problemas, el diseño de tareas de enseñanza y la interpretación del pensamiento de los alumnos de Primaria, en el sentido de mirada profesional. El conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de estas prácticas que evidencia el formador hace referencia, por ejemplo, a la fundamentación de las decisiones didácticas en los diseños de enseñanza. Según Lucas, el conocimiento matemático de los EPM vuelve a mediar en forma de obstáculo en el diseño de tareas de enseñanza, debido a que el diseño de espacios de ejemplos variados o las relaciones entre el contenido de distintas actividades, se ve perjudicado por la falta de dominio del tema a trabajar. El aprendizaje de las prácticas de formulación de problemas y el desarrollo de la mirada profesional, también se ven obstaculizados por el mismo motivo. Para la enseñanza de estas prácticas, Lucas suele explicitar los conocimientos matemáticos que las sustentan y utiliza estrategias de simulación en las que los EPM puedan analizar el razonamiento geométrico de un hipotético alumno de Educación Primaria, y en las que puedan, además, discutir distintas aproximaciones a una misma tarea diseñadas por ellos mismos.

El conocimiento de Lucas, para contribuir a que los EPM desarrollen su identidad profesional docente, está ligado al desarrollo de las prácticas matemáticas. Durante las sesiones Lucas va trabajando de manera transversal sobre valores que constituyen una forma profesional de repensar el contenido matemático ligados a la idea de profesor reflexivo, crítico y que toma decisiones de enseñanza de forma autónoma, fundamentadas en su conocimiento profesional. Asimismo, encontramos evidencias de conocimiento sobre la construcción de la identidad profesional en las constantes invitaciones a que los EPM se proyecten dentro de una comunidad de práctica con los mismos conocimientos e intereses.

3.7.2.3 El conocimiento del formador sobre el programa de formación inicial

El conocimiento de Lucas sobre el programa de formación de maestros incluye conocimiento relacionado con la selección, organización y secuenciación del contenido del programa de formación inicial. Las evidencias que hemos encontrado al respecto se sintetizan como siguen:

Tabla 18. Evidencias de conocimiento del programa de formación inicial

Ob-07/10	La densidad de los ejes cartesianos como paralelismo de la densidad de la recta real [en el sentido de contenido de la formación] Definición de ángulo y amplitud angular desde el punto de vista trabajado previamente en magnitudes y medida [como contenido previo en formación inicial]	Conocimiento sobre las relaciones entre las distintas asignaturas del programa formación inicial
En-S	Los contenidos de la formación inicial deben partir de un estudio fundamentado de los contenidos de primaria La formación de los EPM debe incluir elementos que permitan el desempaquetado de los contenidos matemáticos	Conocimiento sobre la selección de los contenidos en el programa de formación inicial
Ob-18/10	Los tipos de demostraciones se ven en una materia anterior en la formación inicial Búsqueda de patrones y generalización como contenido de la asignatura de primer curso de formación inicial	Conocimiento sobre la organización del programa de formación inicial

En el contexto de la formación inicial de maestros, los formadores son también los diseñadores de los programas de formación, por lo que parte del conocimiento del formador atiende a qué contenidos deben abordarse en la formación inicial. En este sentido, el conocimiento de Lucas sobre los contenidos matemáticos que se abordan en la formación inicial, nos indica que estos deben partir de los conocimientos del currículo de Primaria y deben ser lo suficientemente profundos como para permitir que los EPM puedan hacer la reconstrucción necesaria para convertirlos en conocimiento enseñable. En este contexto, las distintas asignaturas de didáctica de las matemáticas están organizadas siguiendo los bloques curriculares –resolución de problemas, números, medida, estadística y probabilidad, y geometría- y, como resultado de la comprensión interrelacionada de los conocimientos matemáticos que evidencia el formador, encontramos evidencias de conocimiento sobre cómo se relacionan los aprendizajes de cada una de las materias del programa de formación inicial.

En síntesis, hemos encontrado conocimiento didáctico del contenido de la formación que se articula como sigue:

Tabla 19. Categorías de conocimiento didáctico del contenido de la formación

Tipología	Categoría
Conocimiento sobre la enseñanza del contenido de la formación	Tareas de construcción inductiva de conocimiento matemático fundamentado
	Ejemplificación en el aula de formación inicial
	Análisis de los fundamentos de los conceptos y procedimientos geométricos
	Isomorfismo didáctico como herramienta de enseñanza de conocimiento de la enseñanza
	Técnicas de simulación de prácticas profesionales
	Análisis de los obstáculos y errores de los EPM como obstáculos y errores potenciales de los alumnos de EP

Conocimiento sobre el aprendizaje del contenido de la formación	Teorías de aprendizaje matemático extrapoladas de EP Dificultades en el desarrollo de prácticas profesionales con origen en las dificultades de comprensión del contenido matemático Dificultades en la construcción de la identidad profesional por protagonismo del rol de aprendiz en el EPM
Conocimiento sobre el programa de formación inicial de maestros	Selección del contenido de la formación inicial Secuenciación de los aprendizajes en el programa de formación inicial Relaciones entre los conocimientos adquiridos en el programa de formación inicial

CAPÍTULO IV: DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Con el objetivo de concluir la investigación, conviene que elevemos nuestros resultados hasta los avances teóricos en la línea del conocimiento del formador. El esfuerzo por enmarcar nuestro trabajo en la panorámica de investigación vendrá acompañado por el planteamiento de preguntas abiertas, en forma de prospectiva de investigación, que pueden completar nuestros avances o ayudar a superar las limitaciones del estudio.

En primer lugar, organizaremos la discusión de los resultados a partir de las preguntas de investigación que formulamos en el diseño, pues todas ellas configuran nuestra respuesta a *¿Cómo es el conocimiento profesional de un formador de estudiantes para maestro de Primaria, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la Didáctica de las Matemáticas?*

¿Cómo es el conocimiento matemático del formador de maestros de matemáticas?

Una de las aportaciones de esta investigación es el avance en la comprensión del conocimiento matemático del formador de maestros. En este sentido, hemos encontrado evidencias de conocimiento fundamentado sobre los conceptos y procedimientos geométricos que se trabajan en Educación Primaria y más allá de los estándares curriculares de la etapa. Durante las observaciones, Lucas desarrolla numerosos procesos de desempaquetado de conocimiento matemático, en el sentido de Ma (1999), que nos han permitido evidenciar el nivel de justificación y formalización con el que se desenvuelve el formador en relación con estos contenidos. Las evidencias, en este sentido, se entienden desde la perspectiva de profundidad del conocimiento matemático del formador de los trabajos de Zopf (2010), y contribuyen a desarrollar ese sentido de profundidad en forma de solidez y justificación. El conocimiento matemático del formador es profundo porque le permite extraer los elementos básicos de cada concepto o procedimiento para construir una secuencia de enseñanza transparente que le permite compartir con sus EPM no sólo resultados, sino formas de proceder en matemáticas. Así, el conocimiento matemático del formador permite que, durante la sesión de clase, los EPM puedan desarrollar sus propias versiones del aprendizaje matemático (Jaworski y Huang, 2014), principalmente en los momentos en los que se validan sus propias construcciones matemáticas. Nuestra propuesta para comprender la estructura del conocimiento matemático del formador es servirnos del dominio de conocimiento matemático de MSTK (Carrillo *et al.*, 2018). Aceptando que los distintos modelos de conocimiento del profesor podrían cumplir su papel, escogemos MTSK por su riqueza

como herramienta analítica y por sintonía con nuestra forma de entender el conocimiento especializado. Encontramos evidencias en el conocimiento del formador de cada uno de los subdominios de *conocimiento de los temas (KoT)*, *conocimiento de la estructura matemática (KSM)*, y, *conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM)* (Carrillo *et al.*, 2018). Algunas de estas evidencias se han categorizado como *conocimiento matemático avanzado*, entendiendo que avanzado, aquí, significa fuera de las cotas exigibles para la enseñanza en la etapa de Educación Primaria. Este tipo de conocimiento que muestra la extensión del conocimiento del formador en términos de KoT, puede leerse también como una muestra de su comprensión de la estructura matemática (KSM). Destaca la fluidez con la que el formador establece relaciones entre los contenidos matemáticos, una característica que no puede considerarse limitada al caso y que ya recoge la literatura de investigación (Escudero-Ávila, 2021; Olanoff, 2011; Zopf, 2010). Una de las consecuencias de la profundidad y la fluidez en la comprensión del conocimiento matemático, es la capacidad del formador para desarrollar distintas prácticas matemáticas en el aula. En el aula de formación inicial observada *se hace* matemáticas, *no se estudia* matemáticas, y gracias al conocimiento de Lucas sobre las prácticas de definir, clasificar o demostrar, puede reproducir en el aula el proceso de construcción de contenido matemático. El conocimiento matemático del formador es el motor del trabajo en aula de formación observada: es el que le permite guiar a sus EPM en la construcción de conocimiento matemático, desde el que se secuencian los conceptos y actividades -en función de las conexiones matemáticas identificadas-, y es también el conocimiento que permite a Lucas identificar los obstáculos de los EPM en la construcción del conocimiento matemático y didáctico-matemático. La conexión entre el conocimiento matemático y cómo facilitar su reconstrucción en el aula de formación inicial, ha sido explorada en los trabajos de Olanoff (2011).

En síntesis, teniendo en cuenta las características de este conocimiento, y considerando nuestro objetivo de avanzar en la construcción de un modelo que nos permita comprender el conocimiento del formador, consideramos que la estructuración del conocimiento matemático para la enseñanza que ofrecen los modelos de conocimiento del profesor resulta útil en este nuevo contexto, siempre y cuando se mantenga la apertura y la sensibilidad hacia indicadores de conocimiento que pueden revelarse cualitativamente distintos a los identificados en los profesores.

¿Qué similitudes/diferencias se establecen entre la comprensión y el uso del conocimiento especializado del profesor de matemáticas por parte del formador y del profesor?

Algunas de las reflexiones sobre el conocimiento matemático del formador pueden extenderse a su conocimiento didáctico del contenido, configurando su conocimiento especializado para la enseñanza en la etapa de Educación Primaria. Durante el desarrollo de las sesiones analizadas, hemos encontrado que Lucas hace continuas referencias a la etapa de Educación Primaria, a través de las cuales hemos podido acceder a su conocimiento sobre la enseñanza en esta etapa. El conocimiento de Lucas le ha permitido configurar un discurso fluido con base en elementos, tanto matemáticos, como didáctico-matemáticos. En este sentido, el desarrollo de un contenido matemático no solo incluía su conocimiento sobre el tema, sus relaciones y las formas matemáticas de proceder, sino que tendía a traducirse como una forma de enseñanza o en el análisis de dificultades los alumnos de Educación Primaria. Todo parecía indicar que el conocimiento del formador incluye al conocimiento del profesor (Castro-Superfine, 2020; Perks y Prestage, 2008; Zaslavsky y Leikin, 2004), no obstante, reconocemos conocimiento del profesor que no hemos podido evidenciar en el caso del formador y que, por su formación y experiencia, parecen poco probables de darse. Este hecho nos sitúa en aproximaciones más cercanas a la propuesta de Jaworski (2008). Los resultados de esta investigación nos han llevado a concluir que la relación entre los dos tipos de conocimiento no es de inclusión, sino que existe un núcleo de conocimiento compartido, que es el que se construye en formación inicial. El conocimiento, principalmente matemático, del formador que no le es útil para la formación de maestros de Primaria, sería la extensión sobre el conocimiento del profesor. El conocimiento, principalmente didáctico-matemático, del profesor derivado de su experiencia a lo largo de su desarrollo profesional, se correspondería con la extensión sobre el conocimiento del formador al que nos estamos refiriendo.

Otra de las diferencias que han emergido, se encuentra en el nivel de consciencia. Lucas, por su formación, es capaz de reconocer el conocimiento del profesor como un todo organizado y puede cosificarlo. En la entrevista con el formador y en las conversaciones previas a las sesiones, sobre los objetivos y las actividades previstas, es donde podemos observar ese nivel de consciencia. Sin embargo, en el caso de los maestros, no existe el conocimiento profesional como constructo teórico sino como un conjunto de conocimientos que son útiles en el día a día docente y que gestionan a nivel más informal.

¿Qué posibles categorías de conocimiento estructurarían el conocimiento del formador en relación con la enseñanza del contenido de la formación?

Para responder a esta pregunta, primero deberíamos responder a ¿cuál es el contenido de la formación inicial de maestros? A pesar de su heterogeneidad, existe cierto consenso en considerar que no es sólo contenido matemático, independientemente de que los programas de formación inicial dispongan de asignaturas en los que los contenidos matemáticos y matemático-didácticos no se combinen (Watson y Mason, 2007; Sánchez y García, 2008). Los resultados que hemos obtenido, en relación con el conocimiento del formador, están estrechamente ligados con nuestra comprensión del contenido de la formación de maestros, que siguiendo a Ponte (2012), se estructura como: conocimiento profesional, prácticas profesionales e identidad profesional. El conocimiento del formador se entiende entonces como *multidimensional, complejo e integrado*, en el sentido propuesto por Escudero-Ávila *et al.* (2021), ya que debe atender no solo a las distintas naturalezas de los aprendizajes en el aula de formación inicial, sino también a la dualidad en los distintos roles de los EPM, como aprendices y como futuros maestros.

Las evidencias de conocimiento del formador, derivadas de la observación y entrevista con Lucas, nos han permitido estructurar distintas categorías de conocimiento didáctico del formador alrededor de la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento necesario para enseñar, de las prácticas profesionales docentes y de la identidad profesional docente. Situar nuestro estudio relacionándolo con antecedentes de investigación en este sentido, es especialmente difícil por la escasez de trabajos en los que se aborde de manera explícita.

Uno de los principales antecedentes en esta línea es el trabajo de Chick y Beswick (2018), del que se desprenden categorías de conocimiento relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos y matemático-didácticos, como: estrategias de enseñanza, pensamiento del estudiante, representaciones de los conceptos, conocimiento de los ejemplos, conocimiento de los recursos, que han estado presentes en este trabajo. No obstante, nuestra aportación completa el conocimiento didáctico del formador, incluyendo conocimiento sobre cómo enseñar prácticas profesionales y sobre cómo media y se construye la identidad profesional en la formación inicial. Retomamos las categorías propuestas en el análisis:

Tabla 20. *Categorías de conocimiento didáctico del contenido de la formación*

Tipología	Categoría
Conocimiento sobre la enseñanza del contenido de la formación	Tareas de construcción inductiva de conocimiento matemático fundamentado Ejemplificación en el aula de formación inicial Análisis de los fundamentos de los conceptos y procedimientos geométricos Isomorfismo didáctico como herramienta de enseñanza de conocimiento de la enseñanza Técnicas de simulación de prácticas profesionales Análisis de los obstáculos y errores de los EPM como obstáculos y errores potenciales de los alumnos de EP
Conocimiento sobre el aprendizaje del contenido de la formación	Teorías de aprendizaje matemático extrapoladas de EP Dificultades en el desarrollo de prácticas profesionales con origen en las dificultades de comprensión del contenido matemático Dificultades en la construcción de la identidad profesional por protagonismo del rol de aprendiz en el EPM
Conocimiento sobre el programa de formación inicial de maestros	Selección del contenido de la formación inicial Secuenciación de los aprendizajes en el programa de formación inicial Relaciones entre los conocimientos adquiridos en el programa de formación inicial

Cada una de las tipologías de conocimiento, mostradas aquí, mantiene una similitud estructural con los subdominios del conocimiento didáctico del contenido del modelo MTSK, aunque su contenido va mucho más allá del contenido de aquellas.

De un lado, el conocimiento de Lucas sobre la enseñanza del contenido de la formación, atiende a las peculiaridades de cómo se enseña el conocimiento matemático –donde su cercanía con el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas del profesor, es mayor-; y de cómo se enseña el conocimiento didáctico del contenido matemático. Ambos tipos de conocimiento tienen una especial relación, considerando que el conocimiento de Lucas sobre cómo enseñar el contenido matemático se expone de manera que los EPM puedan, mediante isomorfismo didáctico (Ponte y Chapman, 2008), adquirir conocimiento sobre la enseñanza en Educación Primaria. Esta relación, se hace más explícita cuando el formador se apoya en teorías de enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria para estructurar la enseñanza en formación inicial y cuando invita a su EPM a reflexionar sobre su propio proceso de reconstrucción del contenido matemático como estrategia para comprender el aprendizaje de las matemáticas. Esta práctica del formador, puede interpretarse también desde los presupuestos de *modelling* en los trabajos de Rojas (2021). Durante el desarrollo de las sesiones de formación inicial Lucas actúa de forma que los EPM puedan extrapolar las actividades o su gestión al aula

de matemáticas de Educación Primaria, y con distintos grados de explicitación, su propio proceso de enseñanza de las matemáticas es el que vertebra el conocimiento sobre la enseñanza que se construye en el aula de formación inicial. El conocimiento del formador que subyace a estas prácticas es, no sólo el conocimiento matemático y matemático-didáctico de la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria, sino el conocimiento de las características de sus EPM como aprendices y de la consideración del contenido de la formación incluyendo cómo se enseña y qué es ser maestro. De otro lado, las técnicas de simulación a las que recurre el formador para construir conocimiento sobre posibles respuestas de los alumnos de Primaria y para que los EPM puedan desarrollar su habilidad en relación a distintas prácticas profesionales, suponen un ejemplo determinante de técnicas para la enseñanza del contenido de la formación. Durante estas simulaciones, se conjuga tanto el conocimiento matemático y didáctico-matemático trabajado, como la habilidad de ponerlo en práctica, así como el reconocimiento por parte del EPM de su rol profesional.

Debido a las características del contexto de la investigación, hemos encontrado numerosas evidencias del conocimiento de Lucas sobre cómo el conocimiento matemático de los EPM dificulta la construcción de conocimiento didáctico. Esta relación se aplica también al conocimiento del formador sobre la falta de fundamentación matemática en los diseños de los EPM, sobre la capacidad de los EPM para interpretar y actuar en situaciones de aula concretas y sobre la dificultad que manifiestan para sentirse maestros y no aprendices de matemáticas. Podría decirse entonces que en el conocimiento de Lucas sobre cómo aprenden los EPM hay un núcleo de evidencias de conocimiento sobre las consecuencias del conocimiento matemático en el resto de aprendizajes, que es predominante. No obstante, existen otras evidencias que apuntarían hacia el conocimiento de Lucas sobre la priorización de consideraciones relacionadas con la Didáctica General -de organización del aula, de estrategias de trabajo o participación- en detrimento de otras con fundamento en la Didáctica de las Matemáticas, que constituyen indicios sobre su conocimiento de las dificultades de los EPM que no tienen origen en el conocimiento matemático.

Finalmente, hemos encontrado evidencias de conocimiento del formador sobre cómo se estructura y organiza el programa de formación inicial de maestros. Este tipo de evidencias son especialmente relevantes en un contexto en el que el contenido de la formación está condicionado por el formador. En el caso de Lucas, podemos concluir que

su conocimiento sobre el programa de formación inicial tiene su origen en su vasta experiencia en el programa, impartiendo clases en distintas asignaturas, del que además ha sido uno de los diseñadores. Las evidencias de conocimiento del formador sobre el currículum de la formación inicial de maestros, nos permiten comprender cómo relaciona los distintos conocimientos y cómo es capaz de conectarlos en el aula para que los EPM doten de significado cada una de las parcelas ficticias de conocimiento que inevitablemente presenta cada asignatura.

El desarrollo de la investigación ha servido para arrojar luz sobre las preguntas que nos planteábamos, pero a la vez para abrir nuevos interrogantes, que ayudarían no sólo a profundizar en los resultados obtenidos sino a continuar avanzando en otras líneas.

Limitaciones y prospectiva de la investigación

Una de las principales limitaciones de este estudio es con respecto a las características mismas del conocimiento del formador de maestros. La heterogeneidad de perfiles, incluso en formación inicial universitaria, tiene consecuencias sobre las características de los conocimientos de los distintos formadores. Partimos del supuesto de que estas diferencias no deberían suponer contradicciones en la conformación de un modelo de conocimiento del formador de maestros, sino más bien deberían sumar elementos de comprensión. Consideramos necesario seguir trabajando en esa línea, incluyendo el análisis de otros perfiles de formador, el desarrollo de estudios comparativos o de dinámicas de trabajo cooperativo entre formadores, donde se puedan vislumbrar los aportes de cada perfil, traduciéndose en formas de conocimiento.

Otro de los condicionantes en el estudio son las creencias del formador sobre las matemáticas, sobre su enseñanza y aprendizaje y sobre el maestro de matemáticas. No ha sido nuestra intención incluir el análisis de las creencias del formador, pero nuestra sensibilidad hacia ellas ha hecho que hayan estado muy presentes durante todo el estudio. La influencia de las creencias en el conocimiento del formador parece ser relevante. Muchos de los conocimientos que ha mostrado Lucas estaban mediados por su creencia sobre cómo son las matemáticas y cabría preguntarse qué conocimientos se movilizarían en otros contextos.

Además, la elección de Lucas como caso nos invita a reflexionar sobre el desarrollo profesional del formador. Muchos de los conocimientos evidenciados por Lucas tienen su base en su experiencia profesional, además de su experiencia investigadora, por lo que

el conocimiento que ha evidenciado, tanto en su tipología como en sus características, está condicionado en gran medida por ello. Investigaciones relacionadas con la evolución del conocimiento del formador podrían arrojar luz sobre las distintas fuentes de conocimiento del formador de maestros. Incluso en este trabajo, el origen del conocimiento no ha sido analizado.

Investigaciones de corte intervencionista también podrían ser resultado de los avances en esta línea de conocimiento. En el sentido de aplicabilidad de la investigación, el avance en la comprensión del conocimiento del formador permitiría continuar con estudios de formación de formadores, de manera que se pudiese seguir el proceso de desarrollo profesional de los formadores noveles en su propia comunidad de práctica.

El desequilibrio entre la cantidad de evidencias de los distintos tipos de conocimiento evidenciados durante el desarrollo de la investigación, nos conduce a la necesidad de profundizar en el trabajo sobre la construcción de la identidad profesional en la formación inicial. La gran carga cognitiva de la asignatura, unida a los momentos de trabajo sobre prácticas profesionales, ha dejado poco espacio para el trabajo explícito sobre la identidad profesional. Además del interés de investigación, que de por sí despierta el desarrollo de ese sentimiento de pertenencia a una comunidad de práctica y de identificación dentro de ella, consideramos que el conocimiento del formador sobre aspectos relacionados con la identidad y con cómo ayudar a sus alumnos a construirla, constituye una necesidad en el campo de la investigación en Educación Matemática. Estudios con alumnos en prácticas, en colaboración con los tutores del centro, pueden ser buenos escenarios para examinar el conocimiento del formador al respecto.

Por último, podríamos profundizar en el estudio del formador como diseñador de programas de formación. En formación inicial de maestros, el formador tiene un papel importante en la selección de contenido y, por lo tanto, su conocimiento profesional y sus creencias sobre los maestros cobran especial importancia. Los distintos programas de formación inicial de maestros dan cuenta de las distintas aproximaciones que se pueden hacer a sus diseños. Igual que el contenido del programa de formación inicial del aula observada ha supuesto un elemento determinante en el estudio, cabría preguntarse qué relaciones hay entre el conocimiento del formador y el programa de formación inicial que desarrolla, o entre el tipo de programa y la formación de los EPM.

Reflexiones personales sobre la investigación

Con el objetivo de cerrar el ciclo que inicié con la muestra de mis inquietudes personales como formadora, quisiera dedicar unas líneas al potencial de esta investigación desde la perspectiva de la mentorización de profesores noveles. Retomando una de las líneas de investigación abiertas mencionadas con anterioridad, considero que la aplicabilidad de los estudios de conocimiento del formador a la formación de formadores noveles supone uno de sus puntos fuertes con respecto a su relevancia.

Mi conocimiento como formadora ha ido evolucionando a la par que evolucionaba la investigación. Utilizando el símil que usamos para hablar de la consciencia del profesor sobre su conocimiento especializado, considero que no existía en mí ese constructo abstracto de conocimiento del formador, sino ideas sueltas sobre qué debería saber para enseñar en el aula de formación inicial. Las lecturas respecto al conocimiento del formador, la reflexión profunda y fundamentada sobre ellas y, sobre todo, la oportunidad de ver en otro cómo se movilizaban los conocimientos en la formación inicial de maestros, han supuesto un revulsivo para mi perspectiva sobre la formación inicial y sobre mi conocimiento como formadora, mucho más estructurado ahora.

Me hubiera gustado acompañar la investigación de un registro formal sobre mi desarrollo como formadora, del que ahora mismo solo puedo hablar desde mi perspectiva, para mostrar la potencialidad de la observación entre pares, de las discusiones con formadores expertos como Lucas y de la grabación de las propias sesiones. Considero que con el cierre de esta memoria se abren muchísimas posibilidades de investigación que guiarán mi carrera como investigadora y que sin duda tendrán repercusión en mi rol como formadora de maestros.

Los antecedentes de investigación sobre el conocimiento del formador y la cantidad de preguntas abiertas al respecto me hacen reflexionar sobre la agenda de investigación en el campo de la Educación Matemática. Los investigadores, a menudo también formadores, tenemos las herramientas, los escenarios y la capacidad analítica para avanzar en el conocimiento del formador, a partir de la reflexión, la autocrítica y la discusión entre pares. Mi esfuerzo como investigadora novel, por comprender el conocimiento de Lucas, ya ha supuesto un gran avance en mi desarrollo profesional como formadora y me hace imaginar las posibilidades de crecimiento que tenemos como comunidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adler, J., Ball, D. L., Krainer, K., Lin, F. L., y Novotna, J. (2005). Mirror images of an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 359–381.
- Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, M. C., y Carrillo, J. (2019). An Example of Connections between the Mathematics Teacher's Conceptions and Specialised Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(2).
- Álvarez, A. (1996). *Actividades matemáticas con materiales didácticos*. Madrid: Narcea.
- Amador, J. M. (2021). Mathematics teacher educator noticing: examining interpretations and evidence of student's thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*.
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389–407.
- Bassey, M. (1999). *Case Study Research in Educational Settings*. Open University Press.
- Beswick, K., y Chapman, O. (2012). Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. *Paper presented at the 12th International Congress on Mathematics Education*, Coex, Seúl, Korea.
- Beswick, K., y Chapman, O. (2013). Mathematics teacher educators' knowledge. In A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 215). Kiel, Germany: PME.
- Beswick, K. y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to go from here? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 417-427.
- Black, L., Mendick, H., y Solomon, Y. (2009). *Mathematical relationships in education. Identities and participation*. Routledge.
- Blake, N., Smeyers, P., Smith, R. y Standish, P. (1998). *Thinking again: Education after postmodernism*. Bergin & Garvey.
- Bloom, B. S. (1976). *Human characteristics and school Learning*. McGraw- Hill.
- Blömeke, S., Kaiser, G., Köning, J., y Jentsch, A. (2020). Profiles of mathematics teachers' competence and their relation to instructional quality. *ZDM Mathematics Education*, 52(2), 329-342.
- Blömeke, S., Paine, L., Houang, R.T., Hsieh, F., Schmidt, W., Tatto, M.T., Bankov, K., Cedillo, T., Cogan, L., Han, S.I., Santillan, M., y Schwolle, J. (2008). Future

- teachers' competence to plan a lesson: first results of a six-country study on the efficiency of teacher education. *ZDM Mathematics Education*, 40(5), 749-762.
- Bryman, A. (2001). *Social Research Methods*. Oxford University Press.
- Campbell, P., y Malkus, N. (2014). The mathematical knowledge and beliefs of elementary mathematics specialist-coaches. *ZDM Mathematics Education*, 46(2), 213-225.
- Cardetti, F., y Truxaw, M. P. (2014). Toward improving the mathematics preparation of elementary preservice teachers. *School Science and Mathematics*, 114, 1-9.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M., Escudero-Ávila, D., y Flores-Medrano, E. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Hacer y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya, Turkey: ERME.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M.; Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalan, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education* 20(3), 236-253.
- Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Montes, M.Á., Escudero, D.I., y Flores, E. (Coords.) (2016). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Paraninfo.
- Carrillo, J., Coriat, M., y Oliveira, H. (1999). Teacher education and investigations into Teacher's Knowledge. En K. Krainer y F. Goffree (Eds.), *On research in Teacher Education. From a Study in Teaching Practices to Issues in Teacher Education* (pp. 99-146). Osnabrück, Alemania: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Castro, E. (ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Síntesis.
- Chick, H. (2007). Teaching and learning by example. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice: Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Sydney: MERGA.
- Chick, H.; Baker, M.; Pham, T. y Cheng, H. (2006). Aspects of teachers' pedagogical content knowledge for decimals. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 297-304). Praga: PME.

- Chick, H. y Beswick, K. (2013). Educating Boris: An examination of pedagogical content knowledge for mathematics teacher educators. En V. Steinle, L. Ball y C. Bordini (Eds.), *Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow: Proceedings of the 36th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 170-177). Melbourne: MERGA.
- Chick, H. y Beswick, K. (2018). Teaching teachers to teach Boris: a framework for mathematics teacher educator pedagogical content knowledge. *Journal of mathematics teacher education*, 21, 475-499.
- Chapman, O. (2008). Mathematics teacher educators' learning from research on their instructional practices: A cognitive perspective. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 115-134). Sense Publishers.
- Charmaz, K. (2000). Grounded Theory: Objectivist and Constructivist Methods. En N. K. Denzin, Y. S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative Research* (pp. 509-536). SAGE.
- Charmaz, K. (2008). Reconstructing Grounded Theory. En P. Alasuutari, L. Bickman, J. Brannen (Eds.). *The Sage Handbook of Social Research Methods* (pp. 447-460). SAGE.
- Coles, A. (2014). Mathematics teachers learning with video: the role, for the didactician, of a heightened listening. *ZDM Mathematics Education*, 46(2), 267-278.
- Cochran-Smith, M. (2005). Teacher educators as researchers: Multiple perspectives. *Teaching and Teacher Education*, 21(2), 219-225.
- Coriat, M. (2001). Materiales didácticos y recursos. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Síntesis.
- Denzin, N.K. (1970). *Research act in Sociology*. Aldine.
- Elliot, R.L. (2005) Professional development of professional developers: Using practice-based materials to foster and inquiring stance. *Paper presented at the annual meeting of the American Education research Association*, Montreal, Canada.
- Engeström, Y. (1999) Activity theory and individual and social transformation. En Y. Engeström, R. Miettinen, y R. Punamaki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 19-38). Cambridge University Press.
- Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras, L.C. (2021) What do Mathematics Teacher Educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.) *The learning and development of mathematics teacher educators* (pp. 23-40). Springer.
- Even, R. (2008). Facing the challenge of educating educators to work with practicing mathematics teachers. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The International*

- Handbook of Mathematics Teacher Education: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, Vol. 4 (pp. 57-74). Sense.
- Even, R. (2014). Challenges associated with the professional development of didacticians. *ZDM Mathematics Education*, 46(2), 329-333.
- Feiman-Nemser, S. (2008). Teacher learning: how do teachers learn to teach? En M. Cochran-Smith, S. Feiman-Nemser, D. J. McIntyre y K. E. Demers (Eds.), *Handbook of Research on Teacher Education: Enduring Questions in Changing Contexts* (p. 697-705). Routledge.
- Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Ediciones Morata.
- Flores, E., Escudero, D., y Carrillo, J., (2013). A theoretical review of specialized content knowledge. In B. Ubuz, Ç. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3055-3064). Antalya, Turkey: ERME.
- Gellert, U., Hernández, R. B., y Chapman, O. (2013). Research methods in mathematics teacher education. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 327–360). Springer.
- Glaser, B., y Strauss, A.L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. Aldine De Gruyter.
- Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 20, 13-31.
- Goodwin, A.L.; Smith, L.; Souto-Manning, M.; Cheruvu, R.; Ying Tan, M.; Reed, R. y Taveras, L. (2014). What should teacher educators know and be able to do? Perspectives from practicing teacher educators. *Journal of teacher education*, 65(4), 284-302.
- Grbich, C. (2003). *New Approaches in Social Research*. SAGE.
- Halai, A. (1998). Mentor, mentee, and mathematics: a story of professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 295–315.
- Holland, D., Skinner, D., Lachicotte, W., y Cain, C. (1998). *Identity and agency in cultural worlds*. Harvard University Press.
- Holton, J.A. (2007). The coding process and its challenges. En M. Hardy, A. Bryman (Eds.), *The Handbook of Data Analysis* (pp. 265-289). SAGE.
- Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics*, 12(1), 8–14.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. The Falmer Press.

- Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: teachers, teacher-educators and researchers as co-learners. En F-L. Lin y T.J. Clooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education*. Kluwer Academic Publishers.
- Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. En B. Jaworski y T. Woods (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, (pp. 1-11). Sense Publishers.
- Jaworski, B., y Gellert, U. (2003). Educating new mathematics teachers: integrating theory and practice, and the roles of practising teachers. En A. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F.K.S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Jaworski, B., y Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM Mathematics Education*, 46(2), 173-188.
- Johnson, H.L., Blume, G.W., Shimizu, J.K., Graysay, D. y Konnova, S. (2014) A teacher's conception of definition and use of examples when doing and teaching mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 16 (4), 285-311.
- Kajander, A., y Holm, J. (2016). What Math Matters? Types of Mathematics Knowledge and Relationships to Methods Course Performance. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 16 (3), 273-283.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Paidós.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge University Press.
- Lin, P., y Acosta-Tello, E. (2017). A practicum mentoring model for supporting prospective elementary teachers in learning to teach mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 49, 223-236.
- Lincoln, Y.S., y Guba, E. (1985). *Naturalistic Inquiry*. SAGE.
- Lerman, S. (1990). Alternative perspectives of the nature of mathematics and their influences on the teaching of mathematics. *British Educational Research Journal*, 16(1), 53-61.
- Losano, L., Fiorentini, D., y Villareal, M. (2018). The development of a mathematics teacher's professional identity during her first year teaching. *Journal of Mathematics teacher Education*, 21, 287-315.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Masingila, J.; Olanoff, D.; Kimani, P. (2018). Mathematical knowledge for teaching teachers: knowledge used and developed by mathematics teacher educators in

- learning to teach via problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 429-450.
- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., y Barrera-Castarnado, V. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: Una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Prácticas sobre el aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp.157-176). Ediciones Universidad de Salamanca.
- Montes, M., Pascual, M.I., y Climent, N. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(1), 83-104.
- Muir, T., Wells, J., y Chick, H. (2017). Developing an understanding of what constitutes mathematics teacher educator PCK: A case study of a collaboration between two teacher educators. *Australian Journal of Teacher Education*, 42(12), 60-79.
- Olanoff, D. E. (2011). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The case of multiplication and division of fractions*. (Tesis doctoral no publicada). Syracuse University, New York, EE. UU.
- Palhares, P., Gomes, A., Carvalho, P., y Cebolo, V. (2009). From Teacher Education to Teacher Practice: A Gap Affecting the Implementation of Tasks. En B. Clarke, B. Grevholm, R., y Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* (pp. 275-284). Springer.
- Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P. y Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestro: análisis de sus definiciones de polígono. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 463-471). SEIEM.
- Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2019). Un acercamiento al conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 473-482). SEIEM.
- Perks y Prestage (2008). Tools for learning about teaching and learning. En B. Jaworski y T. Woods (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, (pp. 265-280). Sense Publishers.
- Pidgeon, N., y Henwood, K. (2004). Grounded Theory. En M. Hardy, A. Bryman (Eds.). *The Handbook of Data Analysis* (pp. 625-648). SAGE.
- Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: Essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(6), 413–417.
- Ponte, J.P. (2012). Mathematics teacher education programs: practice and research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(5), 343-346.

- Ponte, J. P., y Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teachers' Knowledge and development. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 225- 236). Routledge.
- Ponte, J.P., Oliveira, H., y Varandas, J. M. (2002). Development of pre-service mathematics teachers' professional knowledge and identity in working with information and communication technology. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 93-115.
- Prestage, S., y Perks, P. (1999). Towards a pedagogy of initial teacher education. En L. Bills (Ed.) *Proceedings of the BSRLM Day Conference* (pp. 91-96). University of Warwick: BSRLM.
- Rojas, F., Montenegro, H., Goizueta, M., y Martínez, S. (2021) Researching modelling by mathematics teacher educators: shifting the focus onto teaching practices. En M. Goos y K. Beswick (Eds.) *The learning and development of mathematics teacher educators* (pp. 367-382). Springer.
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., y Huckstep, P. (2009). Transformation: Using examples in mathematics teaching. En T. Rowland, F. Turner, A. Thwaites, y P. Huckstep (Eds), *Developing Primary Mathematics Teaching: Reflecting on Practice with the Knowledge Quartet* (pp. 67-100). Sage.
- Sánchez, V. y García, M. (2008). What to teach and how to teach it: dilemmas in primary mathematics teacher education. En B. Jaworski y T. Woods (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, (pp. 281-298). Sense Publishers.
- Schifter, D. (1997). *Learning mathematics for teaching*. Centre for the development of teaching.
- Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner*. Jossey Bass.
- Schön, D. (1991). *The reflective practitioner: How professionals think and act*. Avebury.
- Schwab, J. J. (1964). The structure of the disciplines: Meanings and significances. En G. W. Ford y L. Pugno (Eds.), *The structure of knowledge and the curriculum* (pp. 6-30). Rand McNally
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Smith, K. (2003). So, what about the professional development of teacher educators? *European Journal of Teacher Education*, 26(2), 201-215.
- Stake, R.E. (1995). *The Art of case study research*. SAGE.

- Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of mathematics teacher education*, 1, 157-189.
- Strauss, A.L. y Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. SAGE.
- Strauss, A.L., Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques* (segunda edición). SAGE.
- Sztajn, P.; Ball, D., y McMahon, T. (2005). And who teaches the mathematics teachers? Professional development of teacher developers. *Contributed paper for an interactive work-session at the ICMI-15 Study conference on the professional education of mathematics teachers*, Aguas de Lindoia, Brazil.
- Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
- Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.
- Tzur, R. (2001). Becoming a mathematics teacher-educator: Conceptualizing the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4(4), 259-283.
- Watson, A. y Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 205-215
- Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge University Press.
- Zaslavsky, O. y Leikin, R. (1999). Interweaving the training of mathematics teacher educators and the professional development of mathematics teachers. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 143–158). Technion
- Zaslavsky, O. y Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education* 7, 5-32.
- Zaslavsky, O., y Peled, I. (2007). Professional development of mathematics educators. In B. Choksi y C. Natarajan (Eds.), *epiSTEME Reviews: research trends in science, technology and mathematics education* (pp. 211–225). Macmillan.
- Zopf, D. A. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education* (Tesis doctoral no publicada). University of Michigan, Ann Arbor, EE. UU.