Universidad de Huelva

Departamento de Pedagogía

Diagramas lógicos de Marlo para el razonamiento visual y heterogéneo : válidos en lógica matemática y aristotélica

Memoria para optar al grado de doctor
presentada por:

Marcos Bautista López Aznar

Fecha de lectura: 21 de diciembre de 2020

Bajo la dirección de los doctores:

Luis Miguel Arroyo

Walter Gadea

Huelva, 2020

Doctorado Interuniversitario en Lenguas y Culturas

Departamento de Didácticas Integradas

Universidad de Huelva, 2020

Diagramas lógicos de Marlo para el razonamiento visual y heterogéneo: válidos en lógica matemática y aristotélica

Tesis Doctoral

Marcos Bautista López Aznar

Directores de tesis

Dr. Luis Miguel Arroyo

Dr. Walter Gadea

Tesis doctoral

Diagramas lógicos de MARLO para el razonamiento visual y heterogéneo

Autor:
Marcos Bautista López Aznar

Directores de tesis:
Luís Miguel Arroyo Arrayas
Walter Federico Gadea

Universidad de Huelva
2020

Diagramas lógicos de Marlo para el razonamiento visual y heterogéneo: válidos en lógica matemática y aristotélica

Tesis Doctoral

Marcos Bautista López Aznar

Directores de tesis

Dr. Luis Miguel Arroyo

Dr. Walter Gadea

Revisores Externos

Dra. Valeria Giardino

Dr. Jesús Jasso Méndez

Universidad de Huelva

Doctorado Interuniversitario en Lenguas y Culturas

Departamento de Didácticas Integradas

Universidad de Huelva, 2020

UNIVERSIDAD DE HUELVA

RESUMEN

DIAGRAMAS LÓGICOS DE MARLO PARA EL RAZONAMIENTO VISUAL Y HETEROGÉNEO: VÁLIDOS EN LÓGICA MATEMÁTICA Y ARISTOTÉLICA.

por Marcos Bautista López Aznar

Tesis presentada sobre diagramas lógicos desarrollados por el autor con fines didácticos, con explicaciones sobre su funcionamiento, ejercicios resueltos, algunos datos sobre su eficacia en el aula y una comparativa histórica con otras formas clásicas de representación visual. Se trata de dos clases de diagramas lógicos complementarios: Por una parte, las redes de expectativas Marlo, que son diagramas de árbol. Por otra parte, los diagramas de Marlo, que representan las relaciones entre variables en figuras geométricas como círculos, triángulos y cuadrados que llamamos modelos proposicionales. En ambos casos, estos diagramas pretenden ser herramientas intuitivas para la didáctica de la lógica. A lo largo de la tesis, el razonamiento se considera "heterogéneo": la información visual se integra con el lenguaje formal y natural, lo que facilita una mejor comprensión de los procesos de inferencia; Además, el razonamiento humano, por su naturaleza, siempre va acompañado de una dosis de incertidumbre, aunque eso no lo hace irracional. Por eso combinamos la lógica con la teoría de probabilidad. Tengamos en cuenta que, muy a menudo, nos vemos obligados a tomar decisiones sin toda la información y por eso nuestros diagramas pretenden ayudar a los estudiantes a razonar basándose no solo en lo que es verdadero o falso, sino también en lo que es probablemente verdadero o probablemente falso. En primer lugar, se hace explícito como marco filosófico el concepto orteguiano de razón vital, de modo que los principios de la lógica quedan como sostenes del aprendizaje de organismos bio-psico-sociales, permitiéndoles generar y comunicar expectativas adaptadas a sus circunstancias. En segundo lugar, se repasan algunas definiciones de los diagramas lógicos, haciendo hincapié en que no poseen menos capacidad que el lenguaje formal para mostrar de forma explícita las relaciones entre variables o términos establecidas en las proposiciones. Posteriormente se presentan las redes de expectativas como estructuras bayesianas que se pueden trasladar a una hoja de cálculo, permitiendo procesar matemáticamente múltiples matices entre la incertidumbre y la certeza de que algo llegará a ser verdadero o a ser falso. A continuación, se muestra de qué manera los diagramas de Marlo, gracias a los fundamentos de la lógica aristotélica y de la doctrina de la cuantificación del predicado, facilitan las inferencias con la misma precisión, pero de forma más económica, que otros diagramas como los de Venn, en los que el rigor de la conclusión exige mostrar de forma explícita y exhaustiva todas las combinaciones de variables que definen el universo del discurso. El recorrido por la historia comparada de los diagramas lógicos pretende situar nuestra propuesta dentro de una larga tradición que cuenta con nombres ilustres. Con este apartado pretendemos reconocer influencias y antecedentes, de modo que sea posible valorar con justicia hasta qué punto pueden ser originales o no nuestras aportaciones. La tesis finaliza con múltiples ejercicios resueltos en las redes de expectativas y en los diagramas de Marlo.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su más sincero agradecimiento a los profesores Ana Isabel Calvo Martín, Francisco José Carmona Bernal, Miguel Clavero Guisado, Josefa Delgado Recio, Juan José Espinosa Guerra, Mercedes Durán López, Débora García Fortes, Julio Francisco González Espejo, Alejandro Pérez Pina, muchos de ellos de los departamentos de Matemáticas y Física y Química del IES Pablo Neruda de Huelva, por su participación activa en el Grupo de Trabajo: *Desarrollo de la inteligencia lógico matemática con el diagrama de Marlo*, realizado a lo largo del curso escolar 2015-2016 y en el Grupo de trabajo *Aplicaciones prácticas del diagrama de Marlo en el aula*, realizado a lo largo del curso escolar 2014-2015. Además, está agradecido a todos los compañeros del I.E.S. Pablo Neruda que le han ayudado pacientemente, como los profesores del ciclo de Imagen y Sonido José mateo, Carlos Couriel y Jose Luis Suárez. Especialmente el autor está en deuda con la profesora Meme Rico, que le ha ayudado desde el inicio con los programas necesarios en el diseño gráfico de los diagramas, y también merece mención especial el profesor Alberto Sanz, que ha dedicado muchas horas de su tiempo libre a la grabación y montaje de vídeos explicativos sobre el diagrama que son de gran ayuda a los alumnos/as y que están disponibles en internet. También agradece el autor la genialidad creativa del diseñador gráfico y licenciado en Bellas Artes Pepe Amoedo, que se ha ocupado de las infografías que empleamos en el aula para trabajar los diagramas con las nuevas tecnologías de la información.

Gracias también a la doctora Amparo Díez Martínez, profesora de la asignatura de Filosofía de la Lógica en la UNED, por señalar algunas de las limitaciones en el diseño inicial de los diagramas, que eran consecuencia de un gran desconocimiento en el campo de la lógica. Sus opiniones expertas han orientado mejoras que, siendo necesarias, nunca se había planteado el autor en su práctica docente en Secundaria. Tiene que agradecer también los consejos y comentarios de la doctora Sandra Visokolskis, de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, que le resultaron de gran utilidad a la hora de encarar la pregunta de qué aportación podría suponer su propuesta en el ámbito del razonamiento diagramático. El autor espera que la representación de lo plausible que propone esté a la altura de lo que ella considera ser perspicuo y que estos diagramas, que han sido elaborados, utilizando sus propias palabras, "de forma artesanal", posean algún valor académico más allá del esfuerzo personal con el que han sido creados.

También desea el autor agradecer a otros expertos la ayuda que le han brindado respondiendo dudas a través del correo electrónico o con sus comentarios cara a cara en los congresos. Especialmente está agradecido a la Academia Mexicana de la Lógica por la publicación de su trabajo en el libro *Rutas didácticas y de investigación en Lógica 2016,* guardando un recuerdo especial de las personas que tuvo la suerte de conocer en 2014 durante el XVIII Encuentro Internacional de Didáctica de la Lógica celebrado en Morelia. Fue decisiva para continuar trabajando la acogida que recibió allí el diagrama de Marlo y el hecho de que le hicieran sentir parte de la familia de los lógicos, aun cuando estaba muy lejos de su talla intelectual y de su formación en la disciplina.

Ha sido importante el apoyo, la orientación y la confianza que ha recibido desde el primer momento de sus directores de tesis, los doctores Luis Miguel Arroyo Arrayás y Walter Federico Gadea. También ha sido importante todo lo aprendido de los profesores de la Facultad de Filosofía de la Universidad Complutense de Madrid y de los profesores de la Facultad de Psicología de la UNED a la hora de comprender los procesos del razonamiento. Sin olvidar a sus profesores/as del instituto Joaquín Turina de Madrid, que despertaron una vocación y que serán siempre un modelo de referencia inalcanzable de lo que deberían ser la docencia y la transmisión de valores académicos.

Gracias a su antiguo alumno Guillermo Címbora Acosta por los valiosos comentarios y aportaciones que viene realizando desde el nacimiento del diagrama y por su inestimable ayuda en el proceso de revisión del texto. Gracias a Lili Xia y a Nerea Hernández por sus meticulas revisiones de los ejercicios. Y también agradecer y reconocer las importantes aportaciones del resto de sus alumnos y alumnas dentro y fuera de las horas lectivas. Sin ellos, estos diagramas no existirían, siendo el único motivo para no dar nombres y apellidos saber que le resulta imposible mencionar a todos los que se lo merecen. Porque le mostraron la utilidad de la conversión de los diagramas, porque le ayudaron a deducir la regla de la transformación de las proposiciones trabajando codo a codo en una mesa del instituto o en el asiento de un tren camino de un congreso a Zaragoza; o simplemente porque le señalaron una y otra vez lo que debía ser más claro, gran parte del mérito es suyo.

Y gracias a su mujer, Patricia, que fue siempre la primera en contrastar la inteligibilidad de los diagramas antes de ser llevados al aula. A ella va dedicada esta tesis

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN **1**

1 HIPÓTESIS Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN **5**

1.1 HIPÓTESIS 5
1.2 OBJETIVOS GENERALES Y ESPECÍFICOS 6

2 METODOLOGÍA **7**

3 MARCO TEÓRICO FILOSÓFICO: LUGARES COMUNES **9**

3.1 LA RAZÓN AL SERVICIO DEL CONOCIMIENTO 9
3.2 EL MUNDO COMO REPRESENTACIÓN COMPARTIDA 10
3.2.1 ¿Es la vida un sueño? *10*
3.2.2 El problema de la realidad objetiva *11*
3.2.3 La verdad ontológica: ¿Hay algo ahí fuera? *12*
3.2.4 Fenómeno y Noúmeno. ¿Un antes y un después de Kant? *14*
3.2.5 Representaciones bio-psico-sociales al servicio de la vida *15*
3.2.6 Activación y realidad *17*
3.2.7 ¿Cualidades o substancias? Interaccionismo y Relacionismo *19*
3.2.8 Nominalismo constructivista *21*
3.2.9 Presencias y ausencias como base de las decisiones *23*
3.3 EL NUEVO PARADIGMA DEL RAZONAMIENTO 25
3.3.1 Lógica y neurociencia *25*
3.3.2 Redes causales bayesianas: la lógica de las posibilidades *26*
3.3.3 La Teoría de Redes Relacionales TRR *29*
3.4 ¿SOMOS SERES IRRACIONALES O INTELIGENCIAS COMPLEJAS? 30
3.4.1 Relaciones de apego. El grupo, las emociones y la imitación *38*
3.4.2 El aprendizaje social: De la mente episódica a la mimesis de Erectus *39*
3.4.3 Nivel de identidad-motivación *39*
3.5 DE LA COMUNICACIÓN NO VERBAL AL LENGUAJE ORAL 41
3.5.1 La narración según Jerome Bruner *43*
3.5.2 Escritura y relaciones impersonales. Dispositivos de memoria externa *45*
3.6 INTEGRACIÓN DE LA RACIONALIDAD TEÓRICA Y PRÁCTICA 48

4 DIAGRAMAS LÓGICOS **51**

4.1 EL RETORNO DE LA IMAGEN 51
4.2 LOS MODELOS MENTALES: RAZONAR CON PROPOSICIONES O CON IMÁGENES 53
4.3 EL RAZONAMIENTO HETEROGÉNEO 56
4.4 APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE DIAGRAMAS LÓGICOS 59
4.4.1 Diagramas lógicos y la estructura de las proposiciones *59*
4.4.2 El diagrama se ajusta a normas e interpretaciones consensuadas *60*
4.4.3 Los diagramas lógicos poseen rigor y validez lógica *60*
4.4.4 Ilación o eliminación *63*
4.5 GENEALOGÍA DE LOS DIAGRAMAS LÓGICOS 65
4.6 DESDE COMIENZOS DEL SIGLO XX HASTA LA ACTUALIDAD 66
4.7 DIAGRAMAS DE ÁRBOL Y CIRCUITOS LÓGICOS 71

REDES DE EXPECTATIVAS MARLO **79**

4.8 EL CONJUNTO COMO BASE DE LA INFERENCIA 79

4.8.1 Propagación de la certeza en la red. Primera inferencia ... 81
4.8.2 Segunda inferencia: Intuición y expectativa en los nodos ... 86
4.9 Base del sistema Alfa ... 90
4.10 Notación elemental ... 91
4.11 Los conectores en las redes de expectativas ... 91
4.11.1 La conjunción no elimina posibilidades en la lógica del conjunto ... 93
4.12 Ejemplos de inferencias teóricas en la red de expectativas ... 94
4.13 Relaciones entre clases y elementos: Alfa logo-numérico ... 97
4.14 Ejercicios resueltos en redes lógico-matemáticas ... 102
4.14.1 Ejercicio lógico-matemático presentado en el VIII CIBEM ... 103
4.14.2 Ejercicio propuesto en el IV CIFYCT ... 104
4.14.3 Problema que formó parte del Taller impartido en el II Congreso REF ... 104
4.15 Relaciones contrarias de activación presencia-ausencia ... 105
4.16 Sistema Alfa diferenciando ser de estar ... 108
4.17 Principios generales de las redes de expectativas bayesianas ... 112
4.17.1 Expresión de proposiciones elementales ... 113
4.17.2 Algunos principios lógicos básicos de la inferencia ... 113
4.18 Calculadora lógica en Excel basada en las redes ... 117
4.18.1 Primera integración de la falsedad de Or con la de sus nodos objeto asociados ... 120
4.18.2 Segunda integración de la verdad de los nodos Objeto con las de sus nodos Or ... 121
4.18.3 Primera integración de la verdad And ... 122
4.18.4 Integración de la falsedad And en la inhibición del nodo Objeto ... 122
4.18.5 Integración Or y And en los nodos Objeto ... 123
4.18.6 Reparto de los nodos Objeto a los nodos Or y And ... 123
4.18.7 Traducción a proposiciones en el lenguaje natural ... 123
4.18.8 Traducción a conectores lógicos para proposiciones de primer grado ... 123
4.19 Recapitulación: principios y elementos de la red de expectativas ... 124
4.19.1 Nodos: las células de la red ... 124
4.19.2 Principios de propagación del peso de verdad y falsedad ... 129
4.19.3 Inferencias presencia-ausencia. Estar en las redes ... 130

5 EL DIAGRAMA DE MARLO ... 137

5.1 Algunas consideraciones históricas de interés ... 137
5.1.1 Las proposiciones clásicas del silogismo ... 139
5.1.2 Proposiciones de identidad ... 139
5.1.3 Proposiciones indefinidas ... 140
5.1.4 Términos vacíos e infinitos ... 141
5.1.5 Verdad formal y material ... 142
5.1.6 La existencia de la quimera ... 143
5.1.7 El universo del discurso ... 146
5.1.8 La conversión de la universal negativa ... 148
5.1.9 Cuantificación del predicado y la aparición de la lógica matemática ... 153
5.2 Construcción de modelos proposicionales. ... 154
5.2.1 Isomorfismo de los modelos proposicionales con las redes de expectativas. ... 154
5.2.2 Construcción de los modelos proposicionales en el diagrama de Marlo ... 155
5.2.3 La cuantificación del predicado en los diagramas de Marlo ... 155
5.2.4 Modelos proposicionales considerando la cualidad de la cópula ... 158
5.2.5 Modelos proposicionales considerando la cualidad de las variables o términos asociados ... 159
5.2.6 Afirmación teórica o fáctica en los diagramas de Marlo ... 163
5.2.7 Conjunciones verificadas y posibles ... 163
5.2.8 Información explícita e implícita ... 165

ÍNDICE

5.2.9 Notación con y sin omisión ... 166
5.3 CONVERTIR Y TRANSFORMAR EN EL DIAGRAMA DE MARLO ... 168
5.3.1 Validez formal de los procesos de conversión y transformación. ... 169
5.3.2 Representación y conversión de los conectores ... 175
5.3.3 Conversiones de modelos complejos ... 176
5.3.4 La existencia en las proposiciones transformadas ... 177
5.4 FORMALIZAR EL GRADO DE CERTEZA Y LA INFORMACIÓN IMPLÍCITA ... 182
5.4.1 Inferencia probable más que posible ... 185
5.4.2 Incertidumbre en los diagramas. Razonamiento plausible ... 187
5.5 LA TABLA DE OPOSICIÓN DEL JUICIO ... 191
5.6 LEYES DE LA SÍNTESIS Y EXCLUSIÓN DE MODELOS PROPOSICIONALES ... 193
5.6.1 Reglas de la síntesis de modelos por identidad. ... 193
5.6.2 Reglas del análisis de modelos por contradicción o exclusión ... 195
5.7 FIGURAS DE LA ESTRUCTURA SUPERFICIAL DE LAS SENTENCIAS ... 199
5.8 FIGURAS LÓGICAS POR LA ESTRUCTURA PROFUNDA ... 202
5.9 PRIMERA FIGURA: SÍNTESIS PARTICULAR ... 209
5.10 SEGUNDA FIGURA: EXCLUSIÓN UNIVERSAL Y PARTICULAR ... 216
5.10.1 Reducción de la segunda figura a la primera ... 220
5.10.2 Reducción de Camestres ... 220
5.10.3 Festino a Ferio ... 223
5.10.4 Baroco por Inversión directa ilegítima ... 224
5.10.5 Reducción de la primera figura a la segunda: la síntesis por exclusión ... 228
5.10.6 Modos no válidos de la segunda figura ... 229
5.11 TERCERA FIGURA: SÍNTESIS UNIVERSAL ... 231
5.11.1 Darapti ... 232
5.11.2 Invalidez de EE y AE en la tercera aristotélica ... 235
5.11.3 Felapton ... 239
5.11.4 Datisi ... 242
5.11.5 Disamis ... 244
5.11.6 Bocardo ... 246
5.11.7 Ferison ... 247
5.12 EJEMPLOS DE SILOGISMOS MODALES EN EL DIAGRAMA DE MARLO ... 248
5.12.1 Ejemplos de silogismos modales de la primera figura. Síntesis particular. ... 253
5.12.2 Ejemplo de razonamiento modal con una premisa necesaria y una asertórica ... 256
5.12.3 Asertórico, categórico, problemático ... 257
5.13 INDEMOSTRABLES EN REDES Y DIAGRAMAS DE MARLO ... 259
5.13.1 Primer indemostrable ... 259
5.13.2 Segundo indemostrable ... 260
5.13.3 Tercer indemostrable ... 261
5.13.4 Cuarto indemostrable ... 263
5.13.5 Quinto indemostrable ... 264
5.14 DIFERENCIACIÓN HISTÓRICA ENTRE PROPOSICIONES PRIMARIAS Y SECUNDARIAS ... 265
5.15 PROPOSICIONES SECUNDARIAS EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS ... 266
5.16 ESBOZOS PARA INFOGRAFÍAS CON IMPLEMENTOS *A POSTERIORI* EN LAS CONEXIONES DE LA RED. ... 271
5.16.1 Significado de los conectores en las proposiciones complejas ... 271
5.16.2 Proposiciones complejas en la lógica del conjunto. ... 275
5.16.3 Reglas para una lógica del conjunto en el diagrama de Marlo. ... 276
5.16.4 Variables de activación ... 278
5.17 PROPOSICIONES COMPLEJAS EN LA LÓGICA DEL OBJETO ... 284
5.17.1 Si toda A es B, entonces algún A es B ... 284
5.17.2 Si algún es B, entonces toda A es B ... 285

5.17.3 (A↔B) →(¬B→¬A) ... *287*
5.17.4 (A→B) → (¬C→ ¬D) ... *288*
5.17.5 (A→B) →(¬C→D). Comprimir y descomprimir ... *289*
5.17.6 Conclusión sobre las proposiciones secundarias ... *290*
5.18 SINTAXIS, AXIOMAS Y REGLAS DEL CÁLCULO LÓGICO ... 291
5.18.1 Elementos de los sistemas dicotómicos ... *292*
5.18.2 Sintaxis elemental de las fórmulas utilizadas ... *293*
5.18.3 Axiomas ... *295*
5.18.4 Leyes de la inferencia ... *296*
5.19 PRIMEROS EJERCICIOS MÁS ALLÁ DEL SILOGISMO ... 297

6 HISTORIA COMPARADA DE LOS DIAGRAMAS LÓGICOS ... 301

6.1 PRECEDENTES DE LA FILOSOFÍA DE NUESTROS DIAGRAMAS ... 301
6.1.1 René Descartes (1596-1650) ... *301*
6.1.2 Immanuel Kant (1724-1804) ... *305*
6.2 POSIBLES DIAGRAMAS LINEALES DE ARISTÓTELES ... 309
6.3 LOS PRIMEROS DIAGRAMAS NO ANALÍTICOS ... 314
6.3.1 Primer periodo expansivo (1531-1614) ... *318*
6.3.2 Segundo periodo expansivo (1660-1712) ... *319*
6.3.3 Tercer periodo expansivo (1760-1800) ... *325*
6.3.4 Influencias mutuas hasta el S.XVIII en el uso de diagramas ... *332*
6.4 EL SIGLO XIX: LA DOCTRINA DE LA CUANTIFICACIÓN DEL PREDICADO ... 333
6.4.1 George Bentham (1800-1884) ... *333*
6.4.2 Sir William Hamilton (1788 – 1856) y la cuantificación del predicado ... *334*
6.4.3 El debate sobre Hamilton ... *344*
6.4.4 La distinción sujeto-predicado en los diagramas de Hamilton ... *345*
6.4.5 Silogismo en intensión y extensión ... *347*
6.4.6 Cuantificación del predicado y estructura de las proposiciones ... *348*
6.4.7 Aristóteles y la cuantificación del predicado ... *349*
6.4.8 Augustus De Morgan (1806 – 1871) ... *352*
6.5 AARON SCHUYLER (*1828-1913*) ... 356
6.6 JOHN VENN (1834 - 1923) ... 361
6.6.1 Alcance de los diagramas de Venn ... *361*
6.6.2 Principios elementales ... *361*
6.6.3 Primera valoración ... *362*
6.6.4 Distintas representaciones de Camenes. El coste de la precisión ... *376*
6.6.5 Procesamiento tipo uno y tipo dos ... *380*
6.6.6 Otros silogismos en Venn y Marlo ... *381*
6.6.7 Proposición secundaria (A v B) → (B v C) en los diagramas de Venn y Marlo ... *388*
6.6.8 Venn frente a la doctrina de la cuantificación del predicado ... *389*
6.6.9 Inconvenientes y limitaciones en los diagramas de Venn ... *396*
6.6.10 Conclusiones sobre los diagramas de Venn ... *404*
6.7 LA MÁQUINA DEMOSTRADORA DE STANHOPE (1753-1816) Y LAS CARTAS SILOGÍSTICAS ... 404
6.8 WILLIAM STANLEY JEVONS (1835-1882) ... 407
6.8.1 La máquina lógica ... *407*
6.8.2 Leyes de la lógica de Jevons ... *409*
6.8.3 Fundamentos de nuestros diagramas en Jevons ... *412*
6.9 ALLAN MARQUAND (1853–1924) ... 414
6.10 LEWIS CARROLL: CHARLES LUTWIDGE DODGSON (1832-1898) ... 417
6.10.1 Proposiciones existenciales en Carroll ... *419*
6.11 CHARLES SANDERS PEIRCE (1839-1914) ... 423

6.11.1 Introducción ... 423
6.11.2 Válido para el cálculo proposicional clásico ... 425
6.11.3 El primer sistema: Los Grafos Entitativos ... 426
6.11.4 El segundo sistema: Los Grafos Existenciales (EG) ... 427
6.11.5 Algunos puntos en común de EG con nuestros diagramas ... 441
6.12 FREGE (1848-1925) ... 446

7 LOS DIAGRAMAS EN EL AULA ... 455

7.1 RESULTADOS INICIALES ... 455
7.1.1 Desde 2014 a la actualidad ... 456
7.1.2 Silogismo con conclusión después de transformar vista por los alumnos ... 460
7.2 EXAMEN RESUELTO DEL CURSO 2018/2019 (SE OMITEN LOS SILOGISMOS) ... 461
7.2.1 Alternativa propuesta por los alumnos al ejercicio 3c del examen ... 463
7.3 MATERIALES DIDÁCTICOS COMPATIBLES CON LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS ... 463
7.3.1 Desarrollo de los primeros materiales TIC ... 463
7.3.2 Infografías interactivas ... 464
7.3.3 Infografías de diagramas de árbol ... 464
7.4 PÁGINA WEB DEL AUTOR ... 467
7.5 DIFICULTADES EN EL USO Y APLICACIÓN DE LOS DIAGRAMAS EN EL AULA ... 468
7.5.1 Dificultades propias de las cuestiones complejas ... 468
7.5.2 Error de atribuir la negación implícita en "Ninguno" al sujeto ... 468
7.5.3 Dificultad de distinguir disyunciones inclusivas y exclusivas ... 469
7.5.4 Precariedad de los medios y escasez de recursos ... 469

8 EJERCICIOS RESUELTOS EN REDES DE EXPECTATIVAS ... 471

8.1 NINGÚN A ES B. NINGUNA C ES A. INFERENCIA COMPLETA ... 474
8.2 A⊻B.C⊻A ... 476
8.3 BARBARA EN REDES ... 478
8.4 TODA A ES B. NINGUNA C ES A ... 480
8.5 TODA A ES B. ALGUNA C NO ES A ... 482
8.6 SI Y SOLO SI A, ENTONCES ¬B. SOLO SI C, ENTONCES ¬A ... 484
8.7 SI A, ENTONCES ¬B. SI C, ENTONCES A ... 486
8.8 ¬A EQUIVALE A ¬B. PARTE DE C ES ¬A ... 488
8.9 DARII EN REDES ... 490
8.10 NINGÚN A ES B. ALGUNA ¬C ES A ... 492
8.11 FERIO EN REDES ... 494
8.12 ALGUNA A ES B. NINGUNA C ES A ... 496
8.13 A EQUIVALE A B SOLO C ES A ... 498

9 EJERCICIOS EN DIAGRAMAS DE MARLO ... 501

9.1 SILOGISMOS POR SÍNTESIS ... 502
9.1.1 Síntesis particular ... 502
9.1.2 Otros silogismos que pueden ser categóricos ... 514
9.1.3 Síntesis universal ... 518
9.1.4 Otros silogismos que pueden ser categóricos ... 522
9.1.5 Síntesis probable ... 528
9.2 SILOGISMOS POR SÍNTESIS MEDIANTE TRANSFORMACIÓN ... 536
9.2.1 AE primera figura. Exclusión particular pasa a síntesis universal ... 536
9.2.2 EE de la primera pasa de exclusión particular ¬B con C a síntesis universal ... 537
9.2.3 OE de la primera pasa de exclusión parcial a síntesis parcial ... 538
9.2.4 Modo IE de la primera figura pasa de exclusión particular a síntesis particular ... 539

9.2.5 AO primera figura. Exclusión nula pasa a síntesis probable ... 540
9.2.6 EO de la primera figura de exclusión nula a síntesis probable ... 541
9.2.7 Baroco por síntesis después de transformar ... 542
9.2.8 Camestres por síntesis ... 543
9.2.9 Cesare por síntesis después de transformar ... 544
9.2.10 Festino por síntesis ... 545
9.2.11 Modo con exclusivas en primera AO pasa de exclusión parcial a síntesis universal ... 546
9.2.12 Modo UE de la segunda por síntesis después de transformar ... 547
9.2.13 Modo EU de la segunda pasa de exclusión particular a síntesis universal ... 548
9.2.14 Modo EA de la cuarta por síntesis. Pasa de exclusión particular a síntesis universal ... 549
9.2.15 Fresison por síntesis después de transformar ... 550
9.2.16 Modo A-U de la primera pierde la razón suficiente al transformar ... 551
9.3 SILOGISMOS POR EXCLUSIÓN ... 552
9.3.1 Exclusión universal ... 552
9.3.2 Exclusión particular ... 555
9.3.3 Exclusión nula o probable ... 568
9.3.4 Silogismos por exclusión parcial por términos medios universales ... 571
9.4 SILOGISMOS POR EXCLUSIÓN DESPUÉS DE TRANSFORMAR ... 576

10 CONCLUSIONES ... 579

10.1 VENTAJAS E INCONVENIENTES A NIVEL DIDÁCTICO ... 579
10.2 DESACUERDOS CON LA LÓGICA MATEMÁTICA ... 582
10.3 CUESTIONES FRONTERIZAS Y POSIBLES VÍAS DE DESARROLLO ... 585

11 BIBLIOGRAFÍA ... 589

12 ANEXOS ... 637

12.1 TABLA DE ILUSTRACIONES MÁS RELEVANTES ... 638
12.2 ÍNDICE DE TABLAS MÁS SIGNIFICATIVAS ... 639
12.3 ANEXOS EN MEMORIA EXTERNA ... 639

INTRODUCCIÓN

El diagrama de Marlo y las redes de expectativas suponen una nueva perspectiva en la didáctica del razonamiento esencialmente encaminada a dar soporte visual y tangible a las inferencias lógicas, integrando la incertidumbre como parte de los procesos argumentativos. Estas herramientas son producto de años de investigación colaboradora con el alumnado del I.E.S. Pablo Neruda de Huelva y han sido revisados y mejorados gracias a las aportaciones recibidas en congresos internacionales de Diagramas, de Filosofía, de Lógica y de Matemáticas. También han recibido las aportaciones de dos grupos de trabajo coordinados por el autor en los que participaron varios docentes, especialmente del área de Matemáticas. Así conseguimos dos herramientas alternativas en la didáctica del razonamiento que reconcilian la lógica con el sentido común y que podrían ser utilizadas progresivamente desde edades tempranas en el desarrollo de la inteligencia lógico-matemática. Se han obtenido resultados positivos con más de cuatrocientos alumnos del IES Pablo Neruda de Huelva que han recibido con ellos su primera formación en Lógica y siempre ha existido un entendimiento perfecto con nuestros compañeros/as de Matemáticas y de cualquier otra disciplina en los grupos de trabajo.

Los diagramas de Marlo fueron concebidos en el año 2014 con la intención de mejorar el rendimiento lógico de nuestros alumnos. Primero fueron aplicados a la resolución de silogismos teniendo como paradigma los principios formales de la lógica aristotélica pero sin atender a la distinción entre categórico e hipotético. Luego, nuestra forma de representar las proposiciones nos permitió representar y resolver gráficamente en 2016 problemas de lógica de proposiciones y de predicados aplicando las mismas leyes. Lo único que teníamos que hacer era reinterpretar los conectores lógicos percatándonos de que se limitan a comunicar en qué casos la totalidad o parte de una variable se asocia con parte o la totalidad de otra. Así, la disyunción exclusiva "o bien A o bien B" nos dice que la totalidad de $\neg A$ se asocia con la totalidad de B, mientras que la disyunción inclusiva "A o B" señala que la totalidad de $\neg A$ se asocia con parte de B.

Habíamos llegado gráficamente y sin saberlo exactamente al mismo planteamiento de las proposiciones postulado por la doctrina de la cuantificación del predicado que siguieron autores como Ploucquet, Bentham, Hamilton, De Morgan o Jevons, aunque ellos no dispusieron entonces de un sistema de representación capaz de competir con la propuesta de Venn. Sin embargo, operando con modelos proposicionales en los que se cuantifica el predicado, nosotros pudimos deducir leyes de la inferencia válidas para todo silogismo observando los procesos que se desencadenan a partir de la consideración de la cualidad del término medio contenido en las premisas: de síntesis cuando es el mismo (M-M) y de exclusión cuando difiere (M-¬M). No puede ser casualidad que tales leyes, que nosotros enunciamos gráficamente en 2014, ya hubieran sido descubiertas y enunciadas por Boole en 1854, aunque luego parece que fueron ignoradas por la lógica matemática de la que él mismo fue en gran parte responsable.

Partiendo de las leyes de la síntesis y de la exclusión que nosotros dividimos en ambos casos como total, parcial y probable, llegamos a proponer gráficamente lo que pensamos equivocadamente que eran nuevas figuras del silogismo, pues al analizar las definiciones de las figuras del silogismo que encontramos en la traducción de Miguel Candel Sanmartín de los *Primeros Analíticos* de Aristóteles, nos dimos cuenta con sorpresa de que encajaban casi a la perfección con nuestra propuesta. De hecho, creemos que tales definiciones serían idénticas si el interés del Filósofo hubiera sido explicar únicamente la estructura lógica que permite obtener conclusiones formalmente verdaderas. Sin embargo, Aristóteles buscaba la estructura lógica de la demostración, la cual permite obtener conclusiones que, siendo

necesarias en sentido formal, son también materialmente verdaderas, una cuestión a la que no atendimos inicialmente en nuestros diagramas.

Así pues, operando con modelos proposicionales que consideran la cantidad del sujeto y del predicado y que se corresponden con las proposiciones teorizadas por De Morgan, llegamos a las mismas leyes del silogismo que Boole, las cuales, a su vez, permiten una clasificación de las figuras del silogismo perfectamente compatible con la definición aristotélica. Quizás nuestros diagramas llegan con cien años de retraso para confirmar la intuición de aquellos lógicos que estuvieron siempre convencidos de que era posible convertir el silogismo en una verdadera forma de cálculo con rigor y precisión geométrica. Y es que no hay duda de que la lógica matemática acierta al considerar la estructura elemental del pensamiento, pero creemos que la lógica aristotélica es un punto de partida más adecuado para entender los procesos que sostienen la comunicación.

Pero captar la continuidad entre Aristóteles y Boole requiere definir correctamente la estructura profunda de la proposición, y para ello es necesario partir de la comprensión de la estructura superficial de la sentencia. Así, dos sentencias aparentemente distintas como *Todos los atenienses son griegos* y *Solo los griegos pueden ser atenienses* comunican exactamente la misma proposición, la cual nos dice que la totalidad de los atenienses se corresponde con parte de los griegos. Con dicha proposición ya se puede operar como si de una ecuación se tratara y podemos dar el salto desde el silogismo aristotélico a la lógica matemática sin renuncia del sentido común. Sin embargo, no se llegó a imponer la cuantificación adecuada del predicado de las proposiciones universales negativas, ya que fueron pocos los que se percataron de que en las proposiciones negativas el término a cuantificar no es B sino $\neg B$. Sin este matiz, es imposible distinguir entre una condicional del tipo *Ningún A es B* que se debe formalizar como *Toda A se asocia con parte de* $\neg B$ ($A \rightarrow \neg B$), de una disyunción exclusiva del tipo *O bien A o bien B, pero no ambas*, que se debe formalizar como *la totalidad de A se asocia con la totalidad de* $\neg B$ ($A \leftrightarrow \neg B$).

Hamilton no tuvo la agudeza de De Morgan para captar la estructura exacta de la proposición. Al menos nosotros no hemos encontrado que fuera capaz de formalizar la universal negativa *Ningún A es B*, como *Toda A es parte de* $\neg B$, lo cual era perfectamente sabido por Venn. Pero en lugar de desarrollar las virtudes de la doctrina de la cuantificación del predicado corrigiendo sus defectos, Venn prefirió destacar sus defectos y minusvalorar sus aciertos, poniendo como centro de atención en el análisis de la proposición las posibilidades que son eliminadas en las premisas. De esta forma, y desde nuestro punto de vista, la simplicidad de los diagramas de Venn contribuyó activamente a complicar la lógica de forma innecesaria. El análisis de la proposición en términos de función y argumento es perfectamente compatible con los esquemas tradicionales del análisis de la inferencia basados en las relaciones parte/todo.

Por este y otros motivos que expondremos con más detalle, la estructura profunda de la proposición quedó definida dentro del paradigma de los diagramas de Venn, que aprovechó todas las debilidades de las que adolecía entonces la doctrina de la cuantificación del predicado para descalificarla. Así se impuso un sistema de representación que reduce la inferencia a meros procesos de eliminación. Un sistema simple y riguroso, pero carente de creatividad e imaginación. La idea elemental de intersecar círculos para expresar combinaciones de conceptos ya estaba presente en Ramón Llull y en Leibniz y el añadido que pudiera haber de original a tales figuras nos parece que ya estaba presente en el injustamente olvidado Aaron Schuyler.

Las máquinas de Jevons, Marquand y Stanhope muestran la eficacia de lo que consideramos una perspectiva asociacionista de la lógica. Desde este enfoque, se trata de establecer la probabilidad que mantienen dos términos X e Y de ser idénticos cuando se consideran todas las alternativas posibles que son generadas de forma combinatoria para componer el universo del discurso. Este paradigma probabilístico del razonamiento, en el que todavía se sitúa al menos en parte la obra de Boole, no dejaba de ser simbólico y matemático, y era perfectamente compatible con la doctrina de la cuantificación del predicado que permitía considerar las proposiciones como ecuaciones. Así, tal paradigma fue llevado a cabo desde una perspectiva comprensiva de la lógica en la que se consideraba el análisis de las relaciones conceptuales o formales que definen la unidad como algo previo a cualquier interpretación extensional de los términos.

Debemos reconocer que el intento que hizo Hamilton de exponer la doctrina de las ocho proposiciones elementales mediante diagramas circulares fue muy inferior a la propuesta con la que Venn consiguió ligar históricamente la lógica de clases a sus círculos intersecados, que también eran muy superiores en simplicidad y capacidad de convicción a los diagramas de cuñas del filósofo escocés. Es innegable que toda inferencia requiere,

en último término, de la eliminación de posibilidades y que tal eliminación puede ilustrase con los diagramas de Venn, lo mismo que con cualquier otra herramienta que liste de forma exhaustiva tales posibilidades para servir de apoyo al lógico matemático en la comprobación de sus resultados. Sin embargo, cuando se trata de comprender el modo en el que la razón comunica el valor de las posibilidades del universo del discurso de forma inteligente, esto es, con economía, precisión y relevancia, nos parece que el enfoque de Ploucquet, Stanhope, Bentham, Hamilton, Jevons y otros, además de simetría lingüística proporciona simplicidad a la Lógica y ofrece las claves para unificar las doctrinas de los dos pensadores más grandes en este campo de todos los tiempos: Aristóteles y Boole.

Originales o no, los diagramas de Venn tienen la desventaja, señalada al menos por Hammer y Shin (1998), Riche y Dwyer (2010) y Chen y Boutros (2011) de que requieren expresar de forma explícita y exhaustiva todas las posibilidades que conforman el universo del discurso, aunque se trate de clases vacías. Nuestros modelos proposicionales, cuantificando el predicado y sin renunciar a la dicotomía funcional de sujeto-predicado en la representación, superan esta dificultad y pueden comunicar la misma información que los diagramas de Venn, con el mismo rigor y precisión, pero de forma más económica, manejando solamente variables o términos que contienen información relevante. Y eso nos parece la inteligencia, decir más cada vez con menos.

Son admirables los diagramas de Peirce en este sentido, totalmente originales y desbordantes de creatividad, aunque su elección de representar las proposiciones por la vía de lo imposible complica la comprensión de sus grafos. Por eso preferimos nuestros diagramas en el aula a los de Peirce, porque nos parece más sencillo hilar proposiciones necesarias que imposibles. Y en relación a los diagramas de Venn, más simples que los de Peirce, pensamos que nuestra forma de notación, ligando la información existencial a las variables y no al área en el que se inscriben, nos permite liberar los términos del compartimento que ocupan en pro de una representación diagramática de las fases de la inferencia más dinámica, flexible y que permite establecer un paralelismo mayor entre los pasos de la demostración gráfica y algebraica, al mismo tiempo que se facilita la interpretación de cada paso utilizando el lenguaje natural.

En solo cinco años, el diagrama de Marlo ha evolucionado rápidamente desde la resolución de silogismos sin consideraciones categóricas hasta las redes de expectativas que pueden servir de modelos explicativos del razonamiento inductivo, deductivo y plausible, ofreciendo un marco teórico que parece adecuado para la conversión existencial de las premisas con independencia de que se interpreten según la tradición de la lógica aristotélica o matemática, pues queda perfectamente resuelto en las redes el problema de la conversión que llevó a Venn a eliminar la atribución de existencia de las proposiciones universales para evitar la falacia de afirmar, partiendo de *Todo lo divisible es material*, que *existe lo inmaterial indivisible*. Nosotros pensamos, afines en esto a la tradición aristotélica, que renunciar a la denotación existencial en las proposiciones universales es mutilar el uso del lenguaje por un déficit en la comprensión de cómo emplean los sistemas cognitivos el principio de razón suficiente en los procesos de comunicación cuando informan de qué es razonable esperar y con qué grado de certeza. Formalizar las proposiciones en los diagramas de Marlo y las redes de expectativas permite señalar la diferencia entre un nodo existencialmente activado y un nodo solo formalmente necesario o solo posible, recuperando la diferencia tradicionalmente aceptada entre hipotético y categórico cuestionada por Venn.

Encontramos en la RAE que “objeto” se define en primer lugar como “Todo lo que puede ser materia de conocimiento o sensibilidad de parte del sujeto, incluso este mismo”, y en segundo lugar como “Aquello que sirve de materia o asunto al ejercicio de las facultades mentales”, encajando ambas definiciones a la perfección con el sentido que nosotros pretendemos dar a los nodos objeto de las redes identificándolo con aquello que sirve de centro de atención en los procesos de conocimiento. Frente a la postura aristotélica, nosotros pensamos que desde una perspectiva lógica no existe diferencia entre clases de objetos y que los mismos procesos de análisis racional tienen lugar cuando el objeto central de la red es ocupado por aquello que psicológica y/o ontológicamente consideramos género, especie o individuo. Por otra parte, y frente a la lógica matemática, consideramos que la distinción relevante no es la que tiene lugar entre universal y particular, pues para nosotros, en el conjunto, son igual de dependientes de los nodos centrales tanto los nodos *And* (todo) como los nodos *Or* (alguno), siendo exclusivamente el nodo *Objeto* lo que puede ser tomado como unidad. Nosotros consideramos un grave error pretender identificar las unidades lógico-matemáticas que se expresan en los nodos centrales de la red con los llamados términos singulares. Las leyes de la aritmética son las mismas cuando sumamos especies, géneros, individuos, términos universales, términos particulares, colores, sentimientos, números, letras o cualesquiera otros

objetos que son situados en un determinado momento como centro de atención en las redes de nuestros sistemas cognitivos.

Las redes que proponemos son circuitos lógicos de inspiración bayesiana que permiten visualizar cómo se propagan la verdad-activación y la falsedad-inhibición por los nodos de una estructura configurada como diagrama de árbol en la que se representan todas las conjunciones posibles entre variables dentro del universo del discurso. Estos diagramas de árbol lógicos se inspiran en los modelos de redes neuronales que procesan información en paralelo y nos permiten reconciliar las diferencias entre sistemas lógicos con concepciones de la verdad dicotómicas, tricotómicas como la lógica que manejan los aimara según Gómez A. S. (2013) o de cualquier otro grado. Además, las redes nos permiten observar la diferencia que hay entre una lógica del objeto en la que aquello que consideramos no puede ser al mismo tiempo A y $\neg A$ y una lógica del conjunto donde sí es posible concebir que tenemos A y $\neg A$ al mismo tiempo. También nuestras redes pueden ser aplicadas a la didáctica de la inferencia probabilística o plausible, llamada abducción por algunos lógicos, y aunque parece que vamos más allá de la ortodoxia al aceptar que la incertidumbre forme parte de los enunciados, también podemos trabajar en nuestras redes problemas simples en los que todos los datos son perfectamente conocidos. No obstante, pocas situaciones de la vida cotidiana carecen de incertidumbre y no por ello dejan de exigir una respuesta razonable.

En las redes el peso de la verdad y la falsedad se procesan por separado antes de ser integrados en una única salida o *output*, pero ello no supone ninguna desviación de las leyes de la probabilidad que enseñan nuestros compañeros de matemáticas, quienes de hecho nos han ayudado a precisar todas las fórmulas de la calculadora lógica que hemos desarrollado para demostrar la coherencia de nuestras redes. Así, nosotros establecemos valores de certeza entre menos uno (seguro que no) y uno (seguro que sí), que pueden traducirse a valores de probabilidad entre cero y uno cuando todos los datos son conocidos, de modo que nuestro cero se iguala con una probabilidad igual a 0,5 de que sí (o 0,5 de que no). No obstante, encontramos ventaja en desglosar y separar estos valores, pues no es lo mismo tener motivos a favor y en contra que solo tener seguridad de los motivos a favor o de los motivos en contra.

Pensamos que las redes permiten explicar conceptos muy abstractos de un modo muy sencillo, aunque lo más importante desde un punto de vista docente, que es el que principalmente nos interesa, es que son una muestra de lo que se llama hoy razonamiento heterogéneo, pues se pueden utilizar de manera independiente o combinada códigos lingüísticos, numéricos y cromáticos que facilitan la adaptación de la didáctica del razonamiento a la diversidad del alumnado.

Durante los últimos siete años hemos dedicado con entusiasmo miles de horas a un proyecto que abre nuevas líneas de investigación en la didáctica de la lógica y el razonamiento diagramático, y aunque estas vías pueden ser o no exploradas por otros, a nosotros siempre nos quedará el recuerdo de la formidable experiencia de investigación colaboradora que llevamos adelante con alumnos como Jose Antonio Michinina, quien venía al instituto con otros compañeros a filosofar por las tardes por puro placer, con la intención de ayudarnos en la ampliación de las leyes del silogismo a la lógica de los conectores. Y creemos que lo conseguimos. Desafortunadamente, tenemos la sensación, al terminar esta tesis en el análisis de las proposiciones secundarias, de que nos quedamos a las puertas de aquello que interesa realmente a la lógica moderna. Nuestros diagramas nos obligan a distinguir, por un lado, proposiciones primarias que se refieren a la estructura combinatoria del ser que determina *a priori* las secuencias de variables admisibles en el universo del discurso (lógica de clases) y, por otro, proposiciones secundarias que establecen conexiones *a posteriori* basadas en las correlaciones entre presencias y ausencias de tales secuencias (lógica de predicados). Por ello esperamos que las representaciones gráficas de las proposiciones secundarias que proponemos en esta tesis nos sirvan en el futuro como punto de partida de nuevas investigaciones que tengan como propósito aproximar los campos de la lógica y la neurociencia.

El estilo de citación que emplearemos en la tesis será APA 6, aunque nos referiremos a la obra de Peirce del modo en el que regularmente se hace en la literatura científica sobre el tema. Así, citaremos con [W-] los *Writings of Charles S. Peirce* de 1982; citaremos con [CP-] los *Collected papers of Charles Sanders Peirce*, de 1933 y nos referiremos con [MS-] a los *MS The Charles S. Peirce Papers*, escrita en 1966.

1 HIPÓTESIS Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Hipótesis

Nuestra hipótesis de trabajo ha sido, desde el primer momento, que debía ser posible generar diagramas lógicos alternativos a los diagramas de Venn en los que la inferencia no fuera reducida a meros procesos de eliminación. Es decir, pensamos que tenía que ser factible distinguir gráficamente cada uno de los pasos que tienen lugar durante el razonamiento, de manera que pudiéramos señalizar a nuestros alumnos el camino que debe seguir el pensamiento para llegar a conclusiones formalmente verdaderas partiendo de premisas establecidas como verdaderas y que tal camino era esencialmente el que ya se había señalado por Aristóteles y otros grandes filósofos como ilación del término medio que se repite en las premisas.

Supusimos también que los errores en la resolución de los ejercicios de lógica que proponíamos en el aula podrían limitarse si generábamos un dispositivo de memoria externa que permitiera visualizar las posibilidades en juego y los procesos mismos por los que dichas posibilidades se combinan necesariamente para formar una conclusión.

Sospechamos además que, siendo una la razón, debía ser posible encontrar una única forma de representación que permitiera resolver con las mismas leyes y la misma notación silogismos, lógica de proposiciones y de predicados.

Además confiamos en que tener en cuenta el sentido común de nuestros estudiantes sería la mejor forma de aproximarnos a los procesos constitutivos del razonamiento que andábamos buscando, aunque ello supusiera alejarnos de las convenciones establecidas en las tablas de verdad, especialmente la del condicional, cuyo aprendizaje siempre se resistía a nuestros educandos. Es decir, partimos de la hipótesis cartesiana de que nuestros alumnos/as son capaces de razonar correctamente de forma natural desde edades tempranas y de que son únicamente las leyes convencionales de la lógica matemática las que, estableciendo un criterio de razonamiento válido artificial y alejado del sentido común, les hacen parecer irracionales.

Esto quiere decir que nosotros siempre trabajamos con la hipótesis de que la frecuente comisión de las falacias de la afirmación del antecedente y la negación del consecuente no se debía a déficits en la capacidad de razonar (Nakamura & Kawaguchi, 2016), sino a cuestiones relacionadas con la memoria, que podían ser subsanadas señalando las posibilidades a tener en cuenta de forma tangible en dispositivos de memoria externa. Si además nos percatábamos del valor adaptativo que tiene para nosotros que en nuestra memoria posean un peso mayor las posibilidades confirmadas por la propia experiencia o por una fuente de confianza que las posibilidades meramente posibles, entonces la culpa del divorcio entre la asignatura de lógica y nuestros pupilos era en parte responsabilidad también del intelectualismo de los teóricos que postulan, como diría Ortega, una razón al margen de la vida.

Es decir, que supusimos desde un principio que debía ser posible llegar a una representación de la inferencia que permitiera decirle al alumno: teniendo en cuenta lo que tienes en cuenta tu conclusión es verdadera, por más que si tienes en cuenta lo que los demás tenemos en cuenta te equivocas, como tú mismo verás al reconsiderar tu postura desde una perspectiva más amplia, con más datos, con más información, desde un punto de vista más alocéntrico.

1.2 Objetivos generales y específicos

La pretensión primera y fundamental que hemos perseguido con nuestra investigación, llevada a cabo dentro y fuera del aula, ha sido generar una herramienta didáctica que nos permitiera mejorar el rendimiento lógico que veníamos obteniendo de nuestros alumnos con el empleo de las tradicionales tablas de verdad y diagramas de Venn. Para ello pensamos que debíamos construir una herramienta gráfica capaz de servir de apoyo en el razonamiento lógico del mismo modo que sirven las imágenes de soporte al razonamiento de los geómetras. Dicha herramienta debería alcanzar los siguientes objetivos:

- Resolver del mismo modo un silogismo aristotélico, un problema de lógica de enunciados, de lógica de clases, de predicados o incluso de probabilidad, buscando el *logos* común que pensamos que debe subyacer a las distintas perspectivas de la lógica que hoy se nos presentan.
- Representar los elementos constitutivos del razonamiento de modo que cada uno de los pasos mostrados en la resolución gráfica de una inferencia tuviera una traducción al lenguaje natural y a la notación formal, estando al mismo tiempo justificado dicho paso por leyes que parecieran razonables a la totalidad del alumnado y de los profesores con los que fueran discutidas.
- Integrar las conclusiones plausibles o probables como un tipo más de inferencia formalmente necesaria, es decir, integrar la incertidumbre dentro de los procesos racionales que modulan nuestras expectativas.

2 METODOLOGÍA

El método fundamental de la investigación ha consistido en la detección y análisis de los errores empíricamente observables que reducen la competencia lógica del alumnado. Ha habido una observación minuciosa en el aula de la actuación de los alumnos al enfrentarse a la resolución de problemas lógicos. Se les pedía que utilizasen el método de pensar en voz alta y se analizaba su comportamiento gestual y sus movimientos oculares en la pizarra: ¿mira, señala y nombra los elementos del ejercicio de manera coordinada? Así, se aprovechaban las sesiones en el aula para realizar un constante análisis y revisión de sus procesos: ¿dónde está la dificultad? ¿dónde exactamente se ha salido del camino? Así tratamos de sistematizar los errores en busca de tendencias.

Se combinó la observación empírica de sus procesos con la investigación teórica en psicología acerca de los sesgos del razonamiento con la finalidad de generar herramientas gráficas que facilitaran al alumnado la "visualización" de sus procesos mentales al cometer los errores. Posteriormente se contrastó empíricamente y de forma práctica en el aula la validez y eficacia de estas herramientas, utilizando las aportaciones de los alumnos/as y sus dudas como sistema de retroalimentación y mejora. Se validaban las herramientas y convenían interpretaciones por el método de acuerdo entre jueces. Se instó permanentemente a los alumnos/as a manifestar todas las críticas que les surgían. La herramienta debía ser satisfactoria para ellos. También se probaron los diagramas y redes con alumnos/as de primero de la ESO en varias sesiones para ver hasta qué puntos eran compatibles con el sentido común y la estructura natural del discurso. Las herramientas surgidas en el aula fueron expuestas a la crítica de los expertos en la materia, tanto en entrevistas personales concertadas como en la participación en congresos y publicaciones que obligaron a su revisión anónima por pares. En este sentido, fue una experiencia muy enriquecedora nuestra participación en la *10 th Internacional Conference Diagrams 2018*, el congreso internacional más importante del mundo relacionado con los diagramas lógicos y la inferencia.

Finalmente, con las herramientas creadas diseñamos algunas investigaciones empíricas basadas en cuestionarios que fueron resueltos por todo el alumnado del centro, cuya edad estaba comprendida entre los doce y los diecinueve años. Así pudimos percatarnos de las dificultades de parte del alumnado para comprender el significado de algunas expresiones como "Es falso que alguno" y "Alguno" cuando nos referíamos a los estados de los nodos del conjunto que sirve de base a las redes de expectativas. Gracias a la corrección y discusión de estos cuestionarios con el alumnado pudimos mejorar la comunicación con ellos, por ejemplo, explicando que "Alguno" es "Al menos uno", pero *uno cualquiera* (nodo *Or*) y no *uno concreto* (nodo *Objeto*).

Podemos afirmar pues que el diagrama de Marlo y las redes de expectativas son producto de un proceso de investigación colaboradora entre el alumnado y el profesor, validado posteriormente por expertos en la materia. La metodología estuvo encaminada a la búsqueda de acuerdo del sentido común y la intuición natural de los niños con las teorías y modelos de pensamiento más ortodoxos desde una perspectiva académica, sin renunciar además a generar nuevas hipótesis y datos mediante la investigación empírica.

3 MARCO TEÓRICO FILOSÓFICO: LUGARES COMUNES

> ¿Qué es entonces la verdad? Una Hueste en movimiento de metáforas, metonimias, antropomorfismos, en resumidas cuentas, una suma de relaciones humanas que han sido realzadas, extrapoladas y adornadas poética y retóricamente y que, después de un prolongado uso, un pueblo considera firmes, canónicas y vinculantes; las verdades son ilusiones de las que se han olvidado que lo son; metáforas que se han vuelto gastadas y sin fuerza sensible, monedas que han perdido su troquelado y no son ahora ya consideradas como monedas, sino como metal. (Nietzsche, 1990, p. 25)

3.1 La razón al servicio del conocimiento

Concebimos los diagramas y las redes de expectativas Marlo dentro de aquellos paradigmas teóricos con los que sintonizamos mejor en nuestros años de formación en las licenciaturas de Filosofía y Psicología y que consideramos, *a grosso modo*, afines a las corrientes del pragmatismo y del evolucionismo naturalista. Es decir, que gestamos los aspectos esenciales de nuestro trabajo en el marco de una *epistemología evolucionista* (Pacho, 2009). Solo considerando que el hombre es un producto de la evolución biológica y cultural cobran significado para nosotros términos como *lógica*, *razón*, *pensamiento*, *inteligencia*, *variables* o *inferencias*, los cuales imaginamos como instrumentos al servicio de la vida, de una vida concreta con un cuerpo concreto y unas circunstancias concretas materiales y socioculturales a las que debe enfrentarse tomando decisiones.

Sin el orden de la estructura lógica sería impensable que un organismo pudiera obtener ningún tipo de información a partir de su experiencia particular con el medio. La memoria sería imposible o inservible si no fuéramos capaces de percibir, identificar y distinguir objetos y relaciones, emociones y circunstancias determinadas. E igualmente sería imposible cualquier intercambio de información, correcta o incorrecta, sin respetar, al menos, determinados principios lógicos elementales.

La estructura lógica que representan las Redes y los diagramas de Marlo pretende ser compatible, en primer lugar, con la necesidad que cada organismo tiene de generar sus propios mapas del mundo, bien señalando en ellos objetos y relaciones afines a sus intereses, bien destacando circunstancias que han sido o previsiblemente serán relevantes para él en su interacción con el medio físico o social. Así, cada sistema de creencias está profundamente influido por sus experiencias físicas, pero también por sus preferencias o valores personales, siendo imposible encontrar dos mapas del mundo iguales, ni siquiera en la mente de una misma persona en dos momentos distantes. O dicho de otro modo y repitiendo el tópico, es imposible encontrar dos cerebros iguales, y ello a pesar de que debemos reconocer que existen sistemas de memoria compartidos ya que, aunque parezca extraño, nacemos con una memoria, no personal sino de la especie, preservada en áreas corticales sensoriales y motoras primarias (García, 2018).

Por otra parte, las Redes y los diagramas de Marlo pretenden ser compatibles con el hecho de que los sistemas cognitivos intercambian información generando mapas consensuados y compartidos del mundo.

Por supuesto, el hecho de que existan sistemas de referencia culturales contrarios en ciertos aspectos a las creencias individuales, no resta validez a los principios elementales de la lógica, aunque sí que sesga de raíz cualquier pretensión de verdad absoluta o definitiva. Nada resultaría menos adaptativo e irracional que limitar el potencial de aprendizaje de una comunidad de organismos programando la búsqueda de todas sus unidades con idénticas motivaciones e intereses.

Las redes de expectativas Marlo, concebidas con una finalidad didáctica, podrían ser tentativas aproximadas de la estructura formal universal de nuestros sistemas de creencias, los cuales, a pesar de ser modelados siempre dentro de un contexto cultural y lingüístico determinado y a través de la experiencia personal e intransferible del individuo, parecen compartir cierta configuración *a priori* responsable de que entre diferentes puntos de vista sea posible el intercambio de información. Desde esta perspectiva, la falta de entendimiento y comunicación no debería achacarse a déficits de la razón, sino a la diversidad de motivaciones y conflictos de intereses que son inherentes a la propia vida.

A lo largo del marco teórico y filosófico repasaremos primero algunos lugares comunes en la historia del pensamiento occidental para comprender por qué hablamos de representaciones del mundo socialmente compartidas y no de mundo o realidad en sí. Las representaciones culturales tienen la ventaja de que pueden ser modificadas a conveniencia, es decir, que son dinámicas, flexibles y poseen capacidad de adaptación. Veremos que las representaciones están al servicio de la vida, careciendo de sentido o significado al margen de las necesidades, intereses, valores y preferencias que constituyen las motivaciones biopsicosociales de los sujetos que construyen e interpretan dichas representaciones. Posteriormente haremos hincapié en que no es posible identificar substancias o entidades individuales en la representación del mundo al margen de las diferencias en las cualidades que las definen. Es decir, que no captamos un objeto en sí ni al ver "la manzana" ni al percibir a "Juan": captamos conjuntos de sensaciones diferentes que se nos muestran atencionalmente como unidades u objetos con duración, permanencia e identidad. Pero sólo después de captar una diferencia podemos identificar a un individuo.

Luego veremos cómo los objetos pueden ser definidos o diferenciados bien por la individualidad de sus caracteres o cualidades, *el qué* (objeto teórico), bien por la individualidad de las coordenadas espacio temporales de los estímulos que encarnan a dichas cualidades, *el dónde* (objeto material-contable). Es decir, que en las Redes y los diagramas de Marlo los objetos se definen teóricamente en el *espacio mental* a partir de las diferencias en sus cualidades o en los estímulos que nos informan de su presencia-ausencia, siendo imposible determinar qué es *esto* sin distinguirlo al mismo tiempo de *lo otro,* lo mismo para el qué que para el dónde. Por ejemplo, me resultaría imposible distinguir teóricamente dos gotas de agua sin caracterizarlas con el uso de algún criterio al que ambas no se ajusten en el mismo grado: una podría ser caliente y otra fría, siendo imposible comprender lo uno sin referencia a lo otro. Llamo a esta diferencia de cualidades definición teórica o esencial y se corresponde con lo que llamamos *clases de cosas*, *tipos* o *caracterizaciones*. La idea de hablar de caracterizaciones nos la dio Andrés Bobenrieth en 2017 durante una conversación en Salamanca, en el transcurso del IV Congreso Iberoamericano de Filosofía de la Ciencia y la Tecnología, para evitar el uso del término *tipo*, ya asociado a la teoría de Russell. Sin embargo, no podemos evitar hablar de las *caracterizaciones* como tipos o clases de cosas.

3.2 El mundo como representación compartida

> -Hilas: No puede negarse que percibimos ciertas apariencias o ideas, pero de ello no puede concluirse que los cuerpos existen realmente (…) es imposible que exista ninguna cosa corpórea y real. -Filonús (…) ¿no es evidente que es tu creencia en la substancia material la que te lleva a todas esas extravagancias? Es ella la que te lleva a soñar con esas desconocidas naturalezas de todo. Es ella la que te lleva a distinguir entre la realidad y las apariencias sensibles de las cosas. (Berkeley, 1990, pp. 161-162)

3.2.1 ¿Es la vida un sueño?

¿Existen realmente la materia, la energía, el espacio o el tiempo? ¿Existen la mente, la voluntad, el dolor, las intenciones o los sentimientos? ¿Existe algo, digamos el propio universo, la naturaleza o el mundo, al margen de los organismos que lo perciben? Y si existe, ¿qué es? ¿cuál su esencia, su naturaleza? ¿es predecible, está sujeto a

las leyes de la física, a la voluntad arbitraria de un dios o su devenir es más bien azaroso y caótico? ¿Está a nuestro alcance llegar a conocerlo tal y como es? Este tipo de preguntas, extravagantes para nuestros alumnos en primera instancia, son, sin duda alguna, propias de filósofos ociosos, pero también han inquietado e inquietan a científicos de todas las épocas. Solo este tipo de cuestiones permite al ser humano enfrentarse a sus creencias más radicales, a los modelos acerca del mundo, de los otros y de sí mismos. Sabemos que estimularon a los protagonistas de las Revoluciones científicas (Kuhn, 1962) y que son a su vez estimuladas por los cambios de paradigma (Čapek, 1973; Leyra & Mataix, 1992). Utilizamos creencias en el sentido que tienen para Ortega en *Ideas y creencias* (Ortega y Gasset, 1986) como constituyentes de la base de nuestra vida, de la realidad misma, lo que vivimos y somos sin conciencia expresa de ellas.

Cualquier profesor de Filosofía obliga a sus alumnos a familiarizarse con las extravagantes suposiciones de los escépticos. Se espera con ello desarrollar el pensamiento crítico, la capacidad de cuestionar y cuestionarse. Es por ello un lugar común en cualquier temario de Filosofía el debate entre quienes afirman que hay un *logos* único, una razón universal compartida por todos los seres humanos y aquellos que lo niegan: Sócrates frente a los sofistas, dogmáticos frente a escépticos, racionalistas versus relativistas.

Una muestra de la postura de escépticos y relativistas la encontramos ya en Gorgias, 485/480 a.C., en el *Tratado sobre la naturaleza y sobre el no-ser,* que resulta ser una especie de manifiesto del nihilismo occidental, un ejemplo del talante de aquellos que, como decía Isócrates, "se meten en disputas sin provecho" (Romanillos, 1789, p. 184) y "solo pretenden refutar a otros, cuando ellos mismos se hallan ya refutados desde hace largo tiempo" (Jaeger, Xirau, & Roces, 1990, p. 855).

> Gorgias de Leontinos pertenecía a la misma tropa de los que eliminan el criterio, aunque atacaba la cuestión con una táctica distinta a la de Protágoras y sus seguidores. En efecto, en su libro titulado Sobre el no ser o sobre la naturaleza, dispone sucesivamente tres argumentos principales: El primero es que nada existe; el segundo, que, aunque exista algo, es inaprehensible para el hombre; y el tercero que, aunque sea aprehensible, lo cierto, sin embargo, es que no puede ser comunicado ni explicado al prójimo. (Empírico & In Martos, 2012, p. 92)

3.2.2 El problema de la realidad objetiva

¿Hay algo en sí al margen de nuestras sensaciones? ¿Nombra algo el lenguaje al margen de nuestras propias representaciones, de nuestra imagen de un mundo, de lo que los filósofos llaman *fenómeno*? ¿Es todo un sueño o podemos afirmar con optimismo que la percepción es la aprehensión directa de una situación objetiva.

En el realismo ingenuo, propio del hombre de la calle, el mundo existe y es independiente de nosotros. Esta es la postura de muchos de nuestros alumnos el primer día de clase. No tienen ninguna conciencia de problema, ya que para ellos percibir, pensar y ser coinciden: la mesa es una mesa sin duda, algo distinto del resto de los objetos del aula, una cosa que seguirá ahí cuando yo me vaya a casa y que seguirá siendo la misma cuando yo vuelva mañana. Es un sustantivo, una cosa. Cuando a través del diálogo socrático les muestras que esa cosa puede descomponerse en un tablero, tornillos, patas de hierro, etc., llegan a la conclusión de que su ser mesa era convencional, aunque algunos se resisten. Ahora les parece seguro que lo que realmente es la mesa es un conjunto de átomos. Si les haces ver que los átomos se dividen en electrones y quarks y les preguntas si existe una partícula última indivisible o les cuestionas sobre la antimateria, entonces, tal vez, por un instante, abandonan la postura del realismo ingenuo, aquella postura semejante a del pintor primitivo que pinta el mundo desde su punto de vista, bajo ideas, valoraciones y sentimientos que le son privados, aunque creyendo que lo pinta como es, sin intervención de un sujeto determinado y fijo en un lugar del espacio y un instante del tiempo (Ortega y Gasset, 1966).

El realismo ingenuo es puesto en jaque fácilmente por escépticos y relativistas a base de enfrentar cualquier visión del mundo con otros puntos de vista. El escéptico hace hincapié en que no tenemos ninguna posibilidad de concebir cómo será la realidad al margen de cómo la concebimos, pues no dejaría de ser subjetiva esa segunda interpretación. Luego todo es subjetivo, solo conocemos el fenómeno, lo que se nos aparece, un modo de experiencia particular y variable. Nada podemos decir acerca de una supuesta realidad invariable tras el fenómeno (Empírico, 1993).

Ante la afirmación incuestionable de escépticos y relativistas de que existe una multiplicidad irreductible de puntos de vista contradictorios, el realismo se ve obligado a depurar sus tesis si quiere salvar la existencia de la realidad objetiva. Existe esa multiplicidad en el fenómeno-apariencia-experiencia, pero podemos trascenderla de

algún modo: comienza en Grecia la búsqueda del ser en sí, de lo objetivo, de lo real, del ente como unidad sin contradicción, de la identidad, de la verdad como permanencia. Los primeros filósofos presocráticos, Tales, Anaximandro, Anaxímenes, Empédocles y otros esencialmente preocupados por la naturaleza, ya buscaban un elemento común, el arjé, considerado como la auténtica realidad que subyace al mundo aparente que percibimos. Por su parte Sócrates, más preocupado por el hombre y la sociedad se dedicó a la búsqueda de definiciones universales de las virtudes que permitieran establecer un marco de convivencia basado en una justicia moral-racional, frente a quienes concebían la naturaleza como no-moral, como autoafirmación y egoísmo, deseo de poder o de placer (Sabine, 2002). Platón reflexionó sobre todas las cuestiones ético-políticas y óntico-epistemológicas de su tiempo, estableciendo, con su Teoría de las Ideas, uno de los marcos de referencia más importantes del pensamiento occidental.

Las Ideas de Platón son modelos universales que responden a la pregunta por el ser de un ente cualquiera: ¿qué es x?, por lo que pueden considerarse esencias. Estas esencias no pueden estar sesgadas por la experiencia particular porque ya han sido conocidas por el alma antes de caer en el cuerpo. Es decir, que el hecho de que un ente x tenga en una determinada esencia *p* garantiza que x sea realmente *p,* por más que a mí me parezca *q* o a ti *r*. La invariancia de las esencias garantiza que sirvan de base a la ciencia y a la ética, es decir, son criterios universales para obrar con sabiduría en el ámbito público y privado (Platón & In Eggers, 1988)

Podemos afirmar que Aristóteles se refería a la esencia de las cosas con el término *ousía*, que puede ser traducido como “lo que es siendo” o como “substancia”. En general, sabemos que el vocablo latino substantia significa literalmente "la estancia debajo de" en el sentido de "el estar debajo de" y de "lo que está debajo de", dando soporte a las cualidades o accidentes. Como ya podemos suponer, los filósofos que creen en la sustancia postulan una realidad más allá del fenómeno, más allá de los sentidos, que es la causa objetiva del fenómeno y que sirve como criterio para decidir qué punto de vista es realmente el verdadero. Y precisamente por fundamentar la sustancia un punto de vista absoluto será criticada de forma constante por los escépticos a lo largo de toda la historia de la Filosofía.

Aristóteles emplea el término *substancia* unas veces para referirse a la sustancia primera y otras para referirse a la substancia segunda. La substancia primera es lo que no se afirma de un sujeto, es ese caballo que se presenta objetivamente ahí y ahora y que es la causa de nuestra representación mental subjetiva del caballo que está ahí ahora. La sustancia aristotélica es la causa objetiva de la imagen sensible que se ha formado en nuestra retina y entre ambas, la sustancia real y la imagen de la sustancia, hay una relación de correspondencia o adecuación que garantiza la validez del conocimiento. Así, encontramos en *Metafísica* IV, 5, 1010b, 30 que el estagirita afirma:

> Y en suma, si sólo existe lo sensible, no existiría nada si no existieran los seres animados, pues no habría sensación. Que en efecto, no existirían lo sensible ni las sensaciones sin duda es verdad (pues esto es una afección del que siente); pero que no existieran los sujetos que producen la sensación, incluso sin sensación, es imposible. La sensación, en efecto, no es sensación de sí misma, sino que hay además de la sensación, otra cosa, que necesariamente es anterior a la sensación, pues lo que mueve es por naturaleza anterior a lo que es movido. (Aristóteles. Trad. 1987, pp. 200-201)

En todo caso, Aristóteles en la *Metafísica* reconoce la oscuridad del asunto y lo complica estableciendo diversos sentidos en los que se dice el Ente, porque nuestro mundo no se compone sólo de objetos materiales y podríamos preguntarnos si el tiempo, el espacio o cualquiera de las categorías que predicamos del mundo tiene un correlato real. En todo caso, el Ente fundamental para Aristóteles es la substancia, la cual concibe como un compuesto de materia y forma que legitima la verdad, ya sea en sus dimensiones básicas fáctica y lógica, ya sea en sus dimensiones lógica, epistemológica y ontológica.

3.2.3 La verdad ontológica: ¿Hay algo ahí fuera?

Se dice que algo es verdad en sentido ontológico para diferenciarlo de lo aparente, ilusorio, irreal, inexistente. Al hablar de verdad ontológica la cuestión no es lo que sea la cosa, sino el hecho de si la cosa existe o no únicamente en nuestra mente: ¿hay ahí un caballo de verdad o estoy teniendo una alucinación? Para Aristóteles lo hay, para un escéptico es imposible saberlo con certeza. Recordemos que en filosofía se distingue el que la cosa es (existencia) de lo que la cosa es, una distinción que se remonta a las dicusiones sobre la existencia de Dios (Díez Martínez, 2005) y que será importante en nuestros diagramas lógicos.

MARCO TEÓRICO FILOSÓFICO: LUGARES COMUNES

El concepto de substancia primera como presencia, como entidad material que subyace a los accidentes que son percibidos, ya le permitía a Aristóteles asegurar que lo que vemos o tocamos es real, verdadero en sentido fáctico y/o ontológico y no simplemente fenómeno o fantasía. Como sabemos, el término *fenómeno* procede del griego *φαινόμενον* y su significado es "lo que aparece", habiendo sido ya contrastado por Platón con la realidad verdadera en el libro X de la República.

> Pero incluso admitiendo que existiera algo real al margen de la apariencia nunca ha habido un verdadero consenso acerca de qué entidades son objetivas y cuáles meramente subjetivas. Y esta discusión ha ido siempre más allá de las cuestiones teológicas.“¿Quién va a entender lo que no existe? Muestra de ello son los átomos de Demócrito, las ideas de Platón, los números de Pitágoras, los universales de Aristóteles, el entendimiento agente y las inteligencias”. (Sánchez, Trad. 1984, p. 55).

La Modernidad había establecido como objetivo prioritario determinar con claridad y precisión los objetos de la nueva ciencia (Bacon, 1620). Los términos científicos debían hacer referencia a propiedades reales, objetivas y libres de interpretación subjetiva. Recordemos, siguiendo a Antonio Gallego Cao y Teresa Muñoz Diego en su introducción a *Los Esbozos pirrónicos* (Empírico, Trad. 1993), que dicha obra fue editada por primera vez en 1562 con gran difusión gracias al impacto que causó en Montaigne, sentando las bases del problema fundamental de la filosofía moderna al que habrían de enfrentarse Kant y Hume: el problema de la subjetividad y los fundamentos de la Metafísica (Popkin, 1979).

La distinción que hacía Galileo entre cualidades primarias cuantificables y objetivas y cualidades secundarias meramente subjetivas parecía un remedio sólido contra el pirronismo: sólo es real lo que puede ser medido. Descartes, prototipo del racionalismo, fundamentará la existencia de las cualidades primarias en la sustancia extensa, uno de los tres objetos clásicos de la metafísica que demostrará partiendo de su propia subjetividad, pero avanzando por el camino de la investigación. Descartes pretende fundamentar el nuevo edificio del saber dejando aparentemente atrás la tradición, la autoridad y la revelación como fuentes del conocimiento verdadero. Los modernos, ya sean racionalistas o empiristas, compartirán el afán de desmarcare de las especulaciones estériles de la Escolástica, y, sin embargo, no pueden obviar la necesidad de fundamentación metafísica del mundo. La herencia de Pirrón de Élide (S.IV a.C.) y de su escuela escéptica han obligado a reconocer que todo conocimiento es conocimiento de un sujeto y la existencia de dicha subjetivad, ya se conciba como alma, yo, conciencia, razón pura o voluntad, será a partir de ahora, para algunos, una verdad más firme y segura que la existencia de lo que percibimos como mundo o materia (Descartes, Trad. 2011b)

> En cuanto a la cuarta clase de nuestro conocimiento, es decir, de la existencia real y efectiva de las cosas, tenemos un conocimiento intuitivo de nuestra propia existencia, y un conocimiento demostrativo de la existencia de Dios; de la existencia de cualquier otra cosa no tenemos sino un conocimiento sensible, que no va más allá de los objetos presentes en nuestros sentidos (Locke, Trad.1980, p. 824).

Y aunque se afirme la existencia de una realidad independiente de la subjetividad, la conexión entre los estímulos reales de ese pretendido mundo en sí con las imágenes mentales sigue siendo un misterio, para los filósofos de entonces (Condillac, 1985) (Berkeley, 1980) y la ciencia de ahora, según la cual “Tenemos que, a falta de algo mejor, identificar la experiencia de un estímulo con su representación cortical” (Carlson, 1996, p. 210). En el Libro IV, cap. 3, 12 del *Ensayo sobre el entendimiento humano* nos dice Locke:

> No hay ninguna conexión descubrible entre las cualidades secundarias y aquellas cualidades primarias de las que dependen… Estamos tan lejos de saber qué forma, qué tamaño o movimientos de partes produce un color amarillo, un sabor dulce o un sonido agudo, que no podemos de ninguna manera concebir cómo cualquier tamaño, forma o movimiento de cualesquiera partículas pueden, posiblemente, producir en nosotros la idea de cualquier calor, sabor o sonido, cualquiera que éstos sean. No existe ninguna conexión concebible entre lo uno y lo otro. (Locke, Trad. 1980)

Es decir, que no hay forma de descifrar la relación que existe entre la codificación material de la información en nuestro cerebro y su interpretación mental.

> Hace más de dos mil años, Teofrasto formuló la dificultad básica: en lo referente a la audición, es extraño que él (Empédocles) se imagine que haya explicado realmente cómo oyen las criaturas cuando adscribió el proceso a sonidos internos y supuso que el oído produce un sonido en el interior, como una campana. Por medio del sonido interno podríamos oír sonidos externos, pero ¿Cómo oiríamos este mismo sonido interno? Todavía continuamos enfrentándonos con el viejo problema. (Skinner, 1986, p. 80)

La implacable rotundidad de las tesis pirrónicas no evita, en cualquier caso, que buena parte de los filósofos, lógicos o científicos actuales sigan afirmando la existencia de algún tipo de sustancia o realidad primera ligada a los datos empíricos: materia, extensión, átomos, cualidades primarias de Galileo, etc., tal vez movidos por el impulso intrínseco de la naturaleza humana de evitar la incertidumbre, pues

> Esta duda escéptica con respecto tanto a la razón como a los sentidos es una enfermedad que nunca puede ser curada del todo, sino que tiene que acecharnos en todo momento, por más que la ahuyentemos a veces y ocasionalmente podemos parecer libres por completo de ella… Sólo la falta de atención y el descuido pueden procurarnos algún remedio… estoy seguro de que, sea cual sea la opinión del lector en este preciso instante, dentro de una hora estará convencido de que hay un mundo externo y un mundo interno. (Hume, Trad. 1981, p. 218)

Y se continúa y continuará en el empeño de buscar el elemento primero, el dato radical, pero con pocas perspectivas de éxito. Tal vez por eso el escéptico no se pregunta qué clase de tramoya soporta su escenario vital, simplemente lo vive.

> Podemos muy bien preguntarnos qué causas nos inducen a creer en la existencia de los cuerpos, pero es inútil que nos preguntemos si hay o no cuerpos. Este es un punto que debemos dar por supuesto en todos nuestros razonamientos (Hume, Trad. 1981, p. 321).

3.2.4 *Fenómeno* y *Noúmeno*. ¿Un antes y un después de Kant?

En todo caso y como creen posiblemente, al menos, la mitad de los filósofos, aceptar la subjetividad del conocimiento no significa necesariamente renunciar a las pretensiones de validez universal, ni mucho menos acatar las tesis relativistas más radicales que afirman que cualquier opinión es igualmente válida. La clave para fundamentar una ciencia moderna sería dar entonces con una estructura universal de la subjetividad que justifique la unidad dentro de la multiplicidad y la permanencia a pesar del cambio.En los años que fuimos estudiantes de Filosofía, todos los alumnos de la Facultad aceptábamos que, a partir de Kant, despertado de su seño dogmático por Hume, quedaban fuera de las posibilidades del conocimiento humano la existencia de Dios, del alma, o de un mundo en sí independiente de nuestra subjetivad. No podemos aspirar al *noúmeno*, solo podemos conocer el *fenómeno* (Kant, Trad. 1993). Por eso y al menos en teoría, debería haber un antes y un después de Kant en cuanto a las pretensiones teóricas de llegar a conocer algún tipo de realidad objetiva y definitiva. O al menos un reconocimiento explícito de los límites del conocimiento humano, "Pues la doctrina de Kant provoca en cualquier mente que la haya comprendido una transformación fundamental de tal magnitud que se la puede considerar un renacimiento intelectual" (Rips, 1994, p.19).

Los límites del conocimiento teórico estarían marcados por la experiencia, es decir, por aquello de lo que tenemos intuiciones: "Todo pensar tiene que hacer referencia, directa o indirectamente (mediante ciertas características), a intuiciones y, por consiguiente (entre los humanos), a la sensibilidad, ya que ningún objeto se nos da de otra forma" (Kant, Trad. 1993, pp. 61-66).

Kant habría terminado, supuestamente, con la tradición que desde los presocráticos buscaba en alguna clase de objeto ajeno al sujeto el soporte último de la realidad. Aristóteles, en la *Metafísica* III, 1001a10-20 afirma:

> Pero los que trataron acerca de la naturaleza, por ejemplo Empédocles, dice qué es el Uno, como reduciéndolo a algo más conocido; parece decir en efecto, que éste es la amistad (pues ésta es, al menos, la causa de la unidad para todas las cosas). Otros, en cambio, dicen que es el fuego, y otros afirman que es Aire este uno y el Ente, del cual constan y han sido engendrados todos los entes. Lo mismo enseñan los que admiten la pluralidad de elementos, pues también tienen ellos que contar el Uno y el Ente tantas veces cuantos dicen son los principios. (Aristóteles, Trad. 1987, p. 135).

El mundo que vivimos se reduce a apariencia, a fenómeno, una interpretación al servicio de la vida (Schopenhauer, Trad. 2009).

> «El mundo es mi representación»: esta es la verdad que vale para todo ser viviente y cognoscente, aunque solo el hombre puede llevarla a la conciencia reflexiva abstracta: y cuando lo hace realmente, surge en él la reflexión filosófica. Entonces le resulta claro y cierto que no conoce ningún sol ni ninguna tierra, sino solamente un ojo que ve el sol, una mano que siente la tierra; que el mundo que le rodea no existe más que como representación, es decir, solo en relación con otro ser, el representante, que es él mismo. (Rips, 1994, p. 23)

Eliminada la posibilidad del objeto en sí, independiente del sujeto, la alternativa inmediata era afirmar la subjetivad como fuente de toda realidad como hizo Fichte (Rips, 1994). Recordemos que para el idealismo "ser" significa primariamente ser dado en la conciencia y que Schopenhauer afirmaba que algunos idealistas cayeron en el error de cosificar la razón, la conciencia, la subjetividad, en lugar de percatarse de que el binomio sujeto-objeto es algo inseparable.

En la Lección XIII de *Unas lecciones de metafísica* Ortega y Gasset mantiene que según la tesis realista lo que verdaderamente hay es cosas, un mundo que existe en sí y por sí, independiente de mí. Sin embargo, lo único indudable es que lo que hay lo hay en relación conmigo, dependiendo de mí, como mantiene la tesis idealista y que el realismo ingenuo no tiene salvación posible (Ortega y Gasset, 1983). Toda la filosofía moderna, según Ortega es idealismo (Ortega y Gasset, 1991). Y se ha llegado al idealismo porque, según él, en la búsqueda de lo real, de los datos radicales, la tradición ha eliminado los que no cumplen con los requisitos de «presencia inmediata» o «evidencia intuitiva». Al eliminar todos los objetos que no eran indudables, el residuo ha sido la duda misma, el pensamiento y "llegamos con esto al idealismo" (Rodríguez & Espanya, 1982, p. 55).

¿Hemos vuelto al principio? ¿Admitir la subjetividad del conocimiento justifica que abandonemos la búsqueda de la verdad? Ortega, buen conocedor de Kant, afirma que no, pues "la reducción o conversión del mundo a horizonte no resta lo más mínimo de realidad a aquél; simplemente lo refiere al sujeto viviente" (Ortega y Gasset, 1966, p. 203).

3.2.5 Representaciones bio-psico-sociales al servicio de la vida

Las decisiones conductuales que tomamos en el curso de nuestras vidas se adaptan a las circunstancias, a lo que pensamos que está disponible, a las oportunidades que creemos que nos ofrece el mundo; pero también se adaptan a la interpretación que tenemos de nosotros mismos: de nuestras necesidades y nuestras habilidades. Esta interpretación, modelada a lo largo de nuestra experiencia vital, pretende también ser adaptada a las necesidades de los grupos y comunidades en los que tienen lugar nuestros procesos de socialización. Hoy es un lugar común en las Ciencias Sociales afirmar que vivimos una interpretación bio-psico-social, dinámica y flexible, acerca de nosotros, de los otros y de la naturaleza, que nos permite en primer lugar satisfacer de forma óptima las necesidades particulares de conservación y desarrollo de nuestro organismo y en segundo lugar, satisfacer las necesidades de los grupos y comunidades en los que tienen lugar nuestros procesos de socialización.

> La percepción es biocultural porque, por un lado, depende de los estímulos físicos y sensaciones involucrados y, por otro lado, de la selección y organización de dichos estímulos y sensaciones. Las experiencias sensoriales se interpretan y adquieren significado moldeadas por pautas culturales e ideológicas específicas aprendidas desde la infancia. (Vargas Melgarejo, 1994, p. 47)

De este modo es comprensible y necesario que difieran las interpretaciones concretas de lo real que tiene cada individuo, cada pueblo o cultura (Bruner, 2006; Habermas, 1999; Ortega y Gasset, 1966).

> Lo que es "real" para un monje del Tíbet puede no ser "real" para un hombre de negocios norteamericano (…) se sigue de esto que las acumulaciones específicas de "realidad" y "conocimiento" pertenecen a contextos sociales específicos y que estas relaciones tendrán que incluirse en el análisis sociológico adecuado de estos contextos. (Berger & Luckmann, 1989, p. 15)

En la base de nuestra propuesta la vida es la realidad radical a la cual todo debe referirse. El problema es que, a pesar de que todos tenemos un concepto intuitivo de lo que sea la vida, no existe una definición científica de la misma que esté exenta de problemas.

> Desde que el hombre es hombre, allá en el extremo oriental del Mediterráneo, llevó a cabo al filo de los siglos VII y VI a. de C. la trascendental aventura del descubrimiento de la physis, el fisiólogo, el tekhnites, el epistemón, el biólogo, a la postre, se ha preocupado por la búsqueda de un principio común de estructura, capaz de responder al qué es de la vida, de la naturaleza, de los seres… Baste recordar los archai y átomos presocráticos, los humores hipocráticos-galenicos, la panspermia platónica, el pneuma estoico, el liquor vitae medieval y, ya en el mundo moderno, la fibra de los iatromecánicos, el humidum primigenium harveyano, la mateia vitae hunteriana, el sarcode de Dujardin, y luego el protoplasma, los coloides, los virus, los genes, los ácidos nucleicos, etc. He aquí uno de los problemas fundamentales del pensamiento biológico de todos los tiempos: el esclarecimiento de la relación entre estructura y vida, del que los ejemplos citados constituyen sucesivas aportaciones. (Albarracín, 1983, pp. 14-15)

La propia biología no es capaz de superar determinadas cuestiones, como la de cuál es la estructura protagonista de la vida: ¿El individuo o la comunidad? Albarracín (1983) nos dice que de acuerdo con las reflexiones de Th. S. Hall, ante la pregunta de qué vive realmente, si la célula o algo menor que ella, "la respuesta viene dada y condicionada por la definición que se acepte de la vida" (p.242) y así, mientras algunos ven en la célula el organismo elemental, otros autores van a considerar como primordialmente su aspecto comunitario. Y aunque en la escuela enseñamos a nuestros alumnos que la célula es la unidad mínima del ser vivo, para Richard Dawkins (2011) los genes, más que las células, son los auténticos protagonistas de la vida, es decir, los replicadores que sobrevivieron y construyeron máquinas de supervivencia para vivir en ellas.

Ferrater Mora (1965), cita diversos aspectos que están incluidos en el concepto *vida* desde una perspectiva filosófica: (I) La vida como entidad biológica; (II) La vida como existencia moral; (III) La vida como el valor supremo, objeto de la concepción del mundo; (IV) La vida como el objeto metafísico por excelencia; como aquella realidad que constituye el dato primario y radical en cuyo ámbito se encuentran el valer y todas las especies del ser. Posteriormente, en la misma entrada enciclopédica, Ferrater Mora menciona que desde antiguo se distingue entre diversas especies de vida, especialmente entre la vida o ímpetu de las cosas vivientes dotados de animación y movimiento —lo que podríamos llamar la vida biológica o principio vital— y la vida propiamente humana que culmina en la existencia teórica. Y nos advierte de hasta qué punto es difícil trazar una historia relativamente completa de los significados de 'vida'.

Por nuestra parte, cuando hablamos de la *vida como realidad radical* nos referimos, en primer lugar y desde una perspectiva filosófica, a la vida como objeto metafísico por excelencia, aceptando que "nuestra inteligencia, en el sentido restringido de la palabra, está destinada a asegurar la inserción perfecta de nuestro cuerpo en su medio, a representarse las relaciones de las cosas exteriores entre sí; en fin, a pensar la materia" (Bergson, 1963, p. 433).

Ortega define la vida humana como realidad radical que permite superar la metafísica basada en el objeto o el idealismo centrado en el pensamiento, aunque no es la filosofía de Ortega la única en la que se manifestó la necesidad de esa superación de realismo e idealismo. La vida pasa de ser un mero accidente o ser la raíz de todo lo demás, el Ser deja de ser considerado en sentido absoluto para definirse por su relación o coexistencia y la filosofía misma deja de ser la atención a la cosa (realismo antiguo) o al yo (idealismo moderno) para centrarse en la vida, no como elemento biológico o científico en general sino como tarea biográfica y acción permanente (Salgado González, 2012). Como señalan Rodríguez y Espanya (1982), así ocurre, entre otras, en las filosofías llamadas de la vida de Bergson, Dilthey o Simmel, en las llamadas filosofías del espíritu de Le Senne y Lavelle, en otras escuelas de la fenomenología como la de Scheler y Hartmann, en el *Lebenswelt* de Husserl y en las filosofías llamadas existenciales de Jaspers, Heidegger, Marcel o Sartre. Recordemos que, por su parte, Sartre, (Trad. 1973) distinguía dos especies de existencialistas: los cristianos, entre los que colocaba a Jaspers y a Gabriel Marcel, y los existencialistas ateos, entre los cuales situaba a Heidegger, a los existencialistas franceses y a sí mismo, aunque todos tendrían en común considerar que la existencia precede a la esencia, siendo necesario partir de la subjetividad.

En todo caso, nos conviene ahora destacar que la vida para Ortega es la perspectiva particular y concreta de un sujeto. Sin embargo, la subjetividad de la perspectiva no deforma la realidad como afirmaría el relativista, al contrario, el punto de vista conforma la realidad. El conocimiento está al servicio de la vida, permitiendo seleccionar aquellos aspectos del universo que son relevantes a los intereses particulares de cada punto de vista, de cada organismo, de modo que podamos realizar "nuestro valorar activo, nuestro proyectar propósitos, nuestro actuante hacer efectivos caminos y metas propuestos" (Husserl, Trad. 2008, p. 150).

El concepto clave para entender qué sea la vida no es el de substancia. Para Ortega la vida es actividad pura, no tiene una naturaleza como las cosas que están ya hechas, sino que tiene que hacerse constantemente a sí misma "teniendo que existir en una circunstancia" (Ortega y Gasset, 2016, p. 39). Sustituir la substancia inmóvil por movimiento y acción es parte de la superación del intelectualismo que ha dominado durante siglos la cultura occidental, la cual ha identificó durante siglos el conocimiento con la contemplación pura (Nietzsche, Trad. 1973), "¡Como si el hombre pensase porque sí, y no porque, quiera o no, tiene que hacerlo para sostenerse entre las cosas!" (Ortega y Gasset, 2016, p. 63).

Es importante insistir en que proponer la subjetividad vital como base del conocimiento no supone, como advierte Ortega, una rendición al relativismo. La razón vital, que encuentra datos a su favor hoy en la neurociencia,

hace posible la articulación de todos los puntos de vista generando una aproximación a la verdad que, sin llegar a ser nunca definitiva, sí que supone la construcción de una perspectiva más amplia y adaptada.

> Existen un conjunto de correspondencias, que se han conseguido a lo largo de la evolución, entre las características físicas de los objetos que son independientes de nosotros y el menú de posibles respuestas del organismo (…) El patrón neural atribuido a determinado objeto se construye de acuerdo con el menú de correspondencias, seleccionando y ensamblando las piezas adecuadas. Sin embargo, somos tan similares entre nosotros desde el punto de vista biológico que construimos patrones neurales similares de la misma cosa. (Damasio, 2006, p. 190).

Concebir la razón como instrumento al servicio de la vida nos permite, en primer lugar, situar su génesis desde el biologicismo, es decir, dentro de una perspectiva evolucionista en la que "los órganos e instintos más complejos se han formado, no por medios superiores -aunque análogos- a la razón humana, sino por la acumulación de pequeñas variaciones innumerables, cada una de ellas buena para el individuo que las poseía". (Darwin & In Josa, 2001, pág. 543) Dentro de esta perspectiva el conocimiento puede comprenderse como un instrumento al servicio de las funciones vitales, como una estrategia de supervivencia que permite a los sistemas cognitivos mejorar sus decisiones, sin olvidarnos de que incluso criaturas vivas unicelulares, como la célula de una bacteria o una simple ameba que no tienen cerebro "son capaces de mostrar un comportamiento adaptativo." (Damasio, 2011, p. 52).

El conocimiento, la información, la memoria o las representaciones codificadas de objetos y situaciones sirven de base a esquemas de acción que pretenden dar respuestas adaptadas a los estímulos, pues la actitud científica, presente ya en el hombre primitivo tiene como motivo o impulso final principalmente la supervivencia biológica. (Malinowski, 1970)

> Un animal muy sencillo, Ophiocoma wendtii. O. wendtii es un ofiuro capaz de huir de manera rápida y efectiva de un depredador que se acerca y de refugiarse en cuevas rocosas y grietas de los alrededores (…) su sistema nervioso muy primitivo (…) es posible cartografiar el patrón del depredador, y lo mismo cabe decir para el patrón de una grieta cercana que puede servir de escondrijo. El procesamiento de los patrones del depredador lleva a la activación de los nervios y a las respuestas motoras apropiadas hacia la grieta protectora (...) no estoy sugiriendo que piense (...) ni imágenes mentales (…) Sencillamente, estoy utilizando estos hechos para ilustrar las genealogías de la emisión de señales desde el cuerpo al sistema nervioso, sobre cuya base se pueden comprender las influencias del cuerpo sobre la mente. (Damasio, 2006, p. 192)

Tenemos pues, que los elementos de cualquier sistema lógico deberían aspirar a guardar algún tipo de correspondencia con los elementos que conforman la situación vital de organismos complejos, al menos si consideramos que el objetivo último de las representaciones racionalmente estructuradas no es otro que el de permitir a tales organismos tomar decisiones adaptadas a partir de la información codificada en sus sistemas de memoria relativa a la experiencia propia o ajena.

Al afirmar que la vida es el sostén de la subjetividad y de sus representaciones, ya sean inconscientes y privadas o conscientes y simbólicamente comunicables, quedan el conocimiento y la inteligencia inexorablemente vinculados a la acción. Razón y vida no pueden separarse. "Es preciso que estas dos investigaciones, teoría del conocimiento y teoría de la vida, se reúnan, y, por un proceso circular, se empujen una a otra indefinidamente" (Bergson, 1963, p. 437).

Desde un plano filosófico es fácil asimilar que somos organismos programados para recibir instrucciones a través de los genes y los memes, confrontarlas con nuestra experiencia concreta y transmitir, desde una perspectiva más amplia, nuestra propia interpretación del mundo, nuestro punto de vista único e insustituible (Ortega y Gasset, 1966). Queda así la vida definida como un proceso en el que cada organismo recibe información, la asimila o interpreta y la transmite por medio de los genes o los memes (Shennan, 2002).

3.2.6 Activación y realidad

Hoy sabemos que el cerebro es una red de neuronas con propiedades bioeléctricas (Brown, 2005) y que la estimulación de áreas concretas desencadena la percepción de alucinaciones que llegan a ser reales para quienes las padecen. Por ello, entendemos en esta tesis por estímulo cualquier forma de energía capaz de desencadenar una respuesta en nuestras neuronas, ya sea en forma de sensación, percepción, pensamiento, emoción o conducta. Dicha energía puede iniciarse en nuestros receptores sensoriales, haber sido directamente aplicada sobre nuestras neuronas (Penfield & Boldrey, 1937), derivar de una sustancia química con propiedades psicotrópicas o haberse

generado espontáneamente en estructuras subcorticales, nos dice Brown, tal y como debe ocurrir en los sueños y los flash backs del Trastorno de Estrés Postraumático en los que se reviven como "reales" situaciones con alta carga emocional para el individuo (Oleas & Zúñiga, 2014). Igualmente, las alucinaciones auditivas y visuales de las psicosis que pueden ser inducidas en sujetos sanos, por ejemplo con anfetaminas, y se han relacionado entre otros desencadenantes con la hiperactivación de los sistemas dopaminérgicos y fallas en el sistema glutamatérgico (Avila-Rojas & Pérez-Neri, 2016), poniendo en evidencia que energizar determinadas regiones de neuronas o engramas puede convertir recuerdos latentes o pensamientos puramente imaginarios en perceptos perfectamente actuales y reales para el cerebro, es decir, en entidades aparentemente ajenas a la mente del individuo con capacidad para motivar conductas y emociones en consonancia a sus contenidos. Recordemos que en Psicología, se utiliza el término engrama para referirse a las huellas o trazos en la memoria creados a partir de una vivencia.

También el trastorno del sueño REM pone en peligro a quienes lo padecen porque responden a sus sueños como si fueran reales. Afortunadamente, no es habitual que se dañen los mecanismos de inhibición de la conducta en el sueño. Puede verse una descripción del trastorno en (Gállego Pérez-Larraya & Iriarte, 2007).

Con vistas a regular la conducta, nuestro cerebro elabora mapas de la realidad con entidades físicas, sociales y mentales que poseen la misma capacidad para condicionar nuestras decisiones. Evitamos ser golpeados por una piedra y estamos dispuestos a morir para escapar de la sensación de fracaso o proteger nuestros valores. Baste citar como ejemplo, siguiendo a Gómez, López-Rodríguez, Vázquez, Paredes, y Martínez (2016), que recientemente se han desarrollado de manera independiente la teoría de la fusión de la identidad y la teoría de los valores sagrados, las cuales explican cómo un individuo puede llegar a matar o a sacrificarse por valores compartidos con personas a las que no le unen lazos genéticos.

Nos movemos en espacios físicos, sociales y psicológicos; percibimos seres sin intenciones y seres con intenciones (Premack & Woodruff, 1978) cuyas actitudes y sentimientos hacia nosotros nos afectan. Por ejemplo, dos estudios recientes sobre el suicidio infanto-juvenil coinciden en lo que ya sabíamos, que las relaciones familiares disfuncionales son un importante factor de riesgo (Aguilera, García, & Cáceda, 2017; León, Helena, Laverde Barrera, Álvarez Rodríguez, & Estupiñan Vega, 2015). En un modelo de redes conexionistas todos estos objetos, "ideas" o representaciones, en cuanto construcciones de nuestro cerebro capaces de ejercer influencia sobre la acción, tendrán el mismo grado de realidad fenoménica, lo cual no significa que las situemos en el mismo punto del continuo material-mental. Nosotros asumimos la postura que Martínez Liébana (2000) atribuye a Hume y que denomina como idealismo inmanentista, el cual describe afirmando que lo existente tiene la capacidad de influir en la conducta del sujeto, mientras que lo que no existe no nos compromete disposicionalmente.

> el criterio de distinción entre lo existente y lo no existente solo puede ser el diferente modo de manifestarse la representación de lo uno y de lo otro. Así, el sujeto cognoscente es elemento indispensable para la determinación de lo existente y su diferenciación de lo inexistente. Con respecto a lo existente, al asentir y adherirse firmemente a la representación correspondiente, el sujeto se compromete de forma activa y protagonista, lo que no acontece en absoluto con respecto a lo no existente o a lo meramente concebido sin cualificación existencial. (Martínez Liébana, 2000, p.260)

Los grados de existencia en nuestras redes de expectativas no se tratan como atributos. La presencia y ausencia de un objeto no añade nada a su definición esencial como conjunto de caracteres único y distinto.

> Más aún, no me conformo con afirmar que la concepción de la existencia de un objeto no supone adición alguna a la simple aprehensión, sino que sostengo también la creencia de que algo existe no añade nuevas ideas a las componentes de la idea del objeto. (Hume, Trad. 1981, p. 202)

La idea de relacionar diferentes grados de realidad percibida (presencia-ausencia) con diferentes grados de activación de los nodos en la red no es incompatible con la idea de que toda representación subjetiva es esencialmente una construcción biopsicosocial. Existe y es real para mí el dolor cuando yo siento que me duele; existe y es real mi dolor para mi grupo cuando me consuelan y existe y es real mi dolor para la comunidad cuando el médico me receta analgésicos o firma mi baja sin que nadie le cuestione.

Además, considerar que la activación de las redes de información está implicada en los procesos de inferencia puede ayudar a explicar errores típicos del razonamiento como el sesgo de disponibilidad (González Labra, 2011), las respuestas basadas en la sensación de saber (Ruiz, 2004) o el efecto priming (Tulving, Schacter, & Stark, 1982). También, en la medida en que la activación de las redes que conforman un campo semántico depende de intereses

y necesidades en curso, podemos utilizar las redes de expectativas para ayudar a explicar gráficamente de qué modo la interpretación que hacemos de los estímulos depende de dichas necesidades e intereses. Por ejemplo, mi cuñada, que tenía hoy a su cuidado a un gatito de un mes, lo ha confundido hace un momento con la zapatilla de mi mujer. De entre todas las etiquetas, patrones o engramas que podrían haber explicado la presencia de un pequeño objeto en el suelo, se ha impuesto la más disponible, la más actual, la más afín a sus necesidades en curso, la más energizada.

Por otra parte, relacionar la actualidad o presencia de hechos subjetivamente percibidos como reales con elevados grados de activación cortical permite explicar por qué en situaciones de elevado estrés y urgencia pueden ser nuestros miedos o deseos los máximos responsables de los delirios producidos en las salas de montaje de nuestros cerebros (Maher, 1988). Nuestra representación de la realidad es producto de un proceso creativo que incluye en ella elementos que inventamos e incluimos en ella sin ser conscientes (Ortiz-Tudela & Lupiáñez, 2016).

Ahora podemos reformular las implacables tesis del escepticismo con las que iniciamos el marco teórico considerando que nuestras redes neuronales sólo pueden construir los mapas de la realidad física y mental codificando la información que le aporta su propio organismo. Siguiendo a Damasio (2006) todas las señales sensoriales asequibles al cerebro llegan a él a través del propio medio interno del organismo. El sistema interoceptivo, que cartografía el estado del organismo y sus movimientos, está constituido por señales que acceden por vía neural y humoral a través del torrente sanguíneo. Las señales neurales del sistema interoceptivo incluyen dolor y temperatura, estado de las vísceras, de los músculos estriados y del sistema vestibular. Por su parte, el sistema exteroceptivo que transmite información del medio externo, recibe toda su información por vía neural a través de las señales de contacto mecánico (tacto), contacto químico (olfato, gusto) y telesentido (vista, oído).

> El cerebro aporta conocimiento innato y experiencia automatizada, predeterminando así muchas ideas del cuerpo (...) La mente existe porque existe un cuerpo que le suministra contenidos. Por otra parte, la mente acaba realizando tareas prácticas y útiles para el cuerpo: controlando la ejecución de respuestas automáticas en relación con el objetivo correcto; anticipando y planificando respuestas nuevas; creando todo tipo de circunstancias y objetos que sean beneficiosos para la supervivencia del cuerpo. Las imágenes que fluyen en la mente son reflejos de la interacción entre el organismo y el ambiente (...) La mente existe para el cuerpo, está dedicada a contar la historia de los múltiples acontecimientos del cuerpo, y utiliza la historia para optimizar la vida del organismo. (Damasio, 2006, p. 196)

3.2.7 ¿Cualidades o substancias? Interaccionismo y Relacionismo

Decía Condillac (Trad. 1985) que "los sentidos no me han sido dados para juzgar la naturaleza de las cosas, sino solamente cuáles son las relaciones reales o aparentes que tienen conmigo y las que tienen entre ellas, cuando el conocerlo me es útil (p.109). Y si aceptamos la inevitable mediación de representaciones biopsicosociales en nuestra relación vital con el universo, no podemos afirmar de ningún modo la existencia de entidades individuales al margen de los marcos teóricos que las definen. En las redes de expectativas, un objeto teórico es una conjunción única y distinta de cualidades y las cualidades se definen por su grado de ajuste a un criterio. Al mismo tiempo, el grado de ajuste a un criterio de un estímulo no es un fenómeno que pueda ser definido en términos absolutos, sino únicamente de forma comparativa con el resto de estímulos juzgados por el mismo criterio y con los que, en conjunto, podemos ordenar y establecer una serie en función del mayor a menor ajuste percibido (Trillas, 2015). Por ejemplo, ser muy inteligente en el contexto de mi instituto, no significa lo mismo que ser muy inteligente si ampliamos el grupo de referencia a los miembros de la N.A.S.A. Es imprescindible acumular experiencia para ajustar los juicios, como bien saben los profesores que al corregir un examen se abstienen de puntuar un ejercicio antes de haber corregido a varios alumnos. No existe el buen examen al margen de la relación que mantiene con el resto de los exámenes y con los criterios del sujeto que lo juzga. Del mismo modo, no podemos afirmar la existencia de ninguna sustancia cuyo ser pueda determinarse en términos absolutos, es decir, al margen de la interacción del sujeto con la totalidad dentro de la que se determina su individualidad como objeto; idea que considero en cierta consonancia con el espíritu holista de Hegel (Lozano, 2013). Es imposible determinar *esto* sin determinar *lo otro*, por lo que la identidad de *ab* está función de sus diferencias con $a\neg b$, $\neg ab$ y $\neg a\neg b$, una idea esencialmente contenida en Aristóteles, si abstraemos el carácter sustancialista su filosofía. Así, en *Metafísica* VII, 12, 1038a 25-30 nos dice que "está claro que la definición es el enunciado que arranca de las diferencias y es, en rigor, de la última de ellas" (Aristóteles, Trad. 1987, pp. 385-386).

MARCO TEÓRICO FILOSÓFICO: LUGARES COMUNES

Sí es interesante advertir que, aunque postulamos que cualquier objeto es definido en función del resto de elementos, causalmente veremos que no todos los elementos se relacionan unos con otros, siendo *a prioiri* todo suceso independiente del resto. Es decir, que la activación de *abc* es independiente de la de *ab¬c, a¬bc, a¬b¬c*, *¬abc*, *¬ab¬c*, *¬a¬bc*, *¬a¬b¬c*. La investigación de las correlaciones entre los objetos que componen nuestro mundo nos llevará a considerar que hay conexión de algunos con otros, y no ninguna conexión o la conexión de todos con todos (Bueno G., 2018), en el concepto platónico de la *simploké* empleado en el Sofista, 251e-253e (Platón & Tovar, 1970).

La naturaleza de la causalidad se viene debatiendo desde hace siglos sin que se haya logrado un consenso definitivo. Recordemos que Hume nos advierte de que no captamos la causalidad, sino correlaciones, siempre que aceptemos las conjeturas de la contigüidad y la semejanza.

> La idea de causa y efecto se deriva de la experiencia, la cual nos indica que ciertos objetos particulares han estado constantemente conectados entre sí en todos los casos pasados (...) la probabilidad está basada en la conjetura de que existe semejanza entre objetos de los que no hemos tenido experiencia y objetos no experimentados. Y por lo mismo es imposible que esta conjetura pueda deberse a la probabilidad. (Hume, Trad. 1981, p. 197)

Nosotros nos moveremos en los lugares comunes de la causalidad que ya podemos encontrar en las tablas de presencia-ausencia de Bacon (1620) y que sirven de base a los análisis matemáticos más complejos que se realizan hoy para comprobar las relaciones entre variables a lo largo del tiempo (Silva, 2014). De este modo es posible utilizar nuestras redes para mostrar en el aula que podemos encontrar relaciones entre nodos a lo largo del tiempo del tipo: *siempre que tal está presente/ausente, cual está presente/ausente.* Así podemos señalar que dichos patrones pueden ser espurios o pueden constatar que existía una variable oculta (término medio) que conectaba los nodos, como se ilustra en Gea y Roa (2014). "Son muchos los casos en los que dos caracteres varían a la vez, sin que por ello estén correlacionados. Por ejemplo: las canas y la miopía de las personas" (Martínez, Cuadra, & Heras, 2008, p. 252).

Luego, por una parte, adoptamos una postura esencialmente holista en tanto afirmamos que todos los objetos se relacionan necesariamente porque sus cualidades quedan unas definidas en función de otras, siguiendo, en cierto modo, los más antiguos principios de la filosofía que establecen la continuidad entre lo vivo y lo muerto, lo despierto y lo dormido (Mondolfo & Heráclito, 2007) y por otra parte adoptamos causalmente el concepto de *simploké* que nos mueve a buscar correlaciones entre objetos, pues no hay otro modo de generar representaciones.

> El concepto de representación es central en una teoría del procesamiento de la información, pero no debe entenderse de forma simplista como una especie de fotografía dentro de la cabeza que es observada por un homúnculo más o menos misterioso, sino como un complejo sistema de correspondencias entre características del medio y códigos neuronales que permiten al sistema visual recuperar internamente la información relevante del medio. (Luna & Tudela, 2011, pp. 54-55)

Finalmente, establecemos el qué y el cómo de todas las cosas en relación con los criterios que median la interacción entre el sujeto y su mundo. O, dicho de otro modo, establecemos que todo conocimiento es resultado de la acción vital (Tarpy, 2000). Incluso "nuestra percepción depende en gran medida del movimiento" (Abril, 2001, p. 958).

Frente al positivismo sustancialista, consideramos que al margen de los intereses vitales de la intersubjetividad no podemos afirmar que exista como entidad individual el bosque, un árbol, una hoja, una célula o un átomo. Pero somos conscientes de que el realismo ingenuo y la creencia en la materia no desaparecerán nunca, a pesar de que incluso para el empirismo la idea de cuerpo no era más clara que la de espíritu (Locke, Trad. 1980).

A la hora de definir los objetos lógicos tenemos que enfrentarnos a cuestiones difíciles como la pregunta por la cosa y por la unidad. Nosotros no afirmaremos ingenuamente como Venn (1881) que vamos a eliminar toda connotación metafísica de nuestros diagramas, pues reconocemos que siempre habrá un límite en nuestra capacidad de precisar la naturaleza de los objetos que deja abierta la puerta a la discusión metafísica. Y somos conscientes de que tales límites no afectan sólo a la determinación de los objetos de las ciencias sociales como las intenciones, las emociones, la sociedad, la necesidad de conformidad, etc., sino también a los objetos de la física (Kant, Trad.1989), pues nadie puede precisar con certeza absoluta qué sea un electrón, un positrón, el espacio, el tiempo o la energía. A pesar del positivismo, empeñado en negar la carga metafísica u ontológica de sus constructos, sabemos que es imposible deshacerse de las creencias que conforman la realidad en la que vivimos

(Ortega y Gasset, 1966), por lo que asumimos que ciencia y filosofía deben interaccionar en el desarrollo del conocimiento riguroso (Mosterín, 2001).

Que el número de objetos teóricos que componen mi mundo subjetivo sea mayor o menor es una cuestión de adaptación y rentabilidad en términos del coste-beneficio cognitivo de la generación de nuevas respuestas asociadas a una mayor discriminación de estímulos. Esto significa que aceptamos considerar el ser desde una perspectiva borrosa (Kacprzyk & Zadeh, 1992) aunque la borrosidad del sistema desaparece en las redes de expectativas una vez que se ha tomado la decisión de computar la relaciones considerando unas determinadas escalas y grados de ser en vez de otras. Aunque nada impide que cualquier objeto-formal pueda ser reconfigurado a través de la interacción organismo medio para optimizar los procesos de conocimiento asociados al reconocimiento de patrones y la búsqueda de correlaciones (Rechea & Seoane, 1991). Aceptar que el ser de los objetos depende de la rentabilidad de los criterios y escalas con los que son juzgados exige renunciar a la existencia de entidades individuales al margen de la interpretación subjetiva que las determina. Como ya decía Berkeley (Trad. 1948): "para concebir los objetos existiendo fuera de la mente, sería necesario que concibieseis estos objetos inconcebidos o impensados, lo cual constituye una contradicción manifiesta" (p.151).

> Esta inclinación a conferir identidad a nuestras percepciones semejantes origina la ficción de una existencia continua, dado que tal ficción, igual que la identidad, es en realidad falsa, como reconocen todos los filósofos, y que no tiene otro objeto que el de remediar la interrupción de nuestras percepciones, única circunstancia contraria a su identidad. (Hume, Trad. 1981, p. 209)

También Locke, en el *Ensayo sobre el entendimiento humano*, en el libro IV, XI, 9 nos dice:

> Porque si puedo ver una colección semejante de ideas simples, a la que suelo denominar hombre, que existían todas ellas reunidas hace un minuto, y ahora estoy solo, ya no puedo estar seguro de que existe ahora ese mismo hombre, puesto que no hay ninguna conexión necesaria entre su existencia de hace un minuto y su existencia actual. (Locke, Trad. 1980)

Otros ejemplos de esta postura podemos encontrarlos en otros sensualistas, los cuales han criticado la noción que, en general, se tiene en Occidente sobre la sustancia.

> No hay árbol en general, ni manzano, ni peral; solo hay individuos, pues en la Naturaleza no hay géneros ni especies (...) No distinguimos las clases según la naturaleza de las cosas, sino según nuestra forma de imaginarlas (…) es evidente que habría tantas clases como individuos si a cada diferencia se quisiera crear una nueva clase (…) únicamente nuestras necesidades son las que nos determinan a formar diversas clases. (Condillac, Trad. 1985, p. 39)

Desde el empirismo no podemos negar que haya algo "ahí fuera" que nos afecta activando nuestros receptores para ser registrado. Lo que se niega es que ese noúmeno sea idéntico a la estructura teórica del fenómeno. Pero también negamos que cualquier fenómeno arbitrariamente construido pueda ser adaptativo. Creemos que es posible concebir una estructura formal *a priori* de carácter lógico-matemático en las redes del ser aunque el fenómeno que de hecho será percibido dependa de teorías socialmente construidas dentro de paradigmas variables que se ajustan a intereses, experiencias y circunstancias concretas, según se desprende de todo lo postulado en este marco teórico de lugares comunes.

3.2.8 Nominalismo constructivista

Adoptar una postura constructivista no es incompatible con asumir parcialmente las tesis nominalistas que afirman que solo son "reales" los objetos singulares, mientras que los universales serían meros productos de nuestra mente. "Sólo los individuos existen, sólo ellos son percibidos, solamente de ellos ha de haber ciencia y de ellos debe ser obtenida" (Sánchez, Trad. 1984, p. 127). Recordemos que en la llamada "disputa de los universales" que tuvo lugar en la Edad Media, los nominalistas negaban que los universales, como géneros y especies, tuvieran alguna realidad anterior a las cosas como mantenía el realismo de Platón, de modo que para ellos solo existían los individuos particulares.

Al construir las redes nos encontramos con que las células que sirven de referencia en el reparto matemático de la activación son los llamados nodos *Objetos*. De ellos dependen los nodos *Or* y los nodos *And*, los cuales consideramos una abstracción mayor que la de los nodos objeto, las verdaderas unidades del sistema. Aunque el lugar de las unidades centrales, nodos objeto, puede ser ocupado por individuos, géneros o especies como

explicaremos más adelante, creemos seguir una vieja idea de la filosofía al distinguir entre nodos objeto y nodos *And* concebidos como agregado de objetos.

> Fil.- Respecto de las sustancias, hay también dos clases de ideas. Una, de las sustancias particulares, como la de un hombre o de una mujer; otra, de varias sustancias unidas conjuntamente, como la de un ejército de hombres o la de un rebaño de ovejas, pues también las colecciones forman una sola idea. Teo.- Esta unidad de la idea de los agregados es muy variable; pero en el fondo es preciso confesar que esta unidad de colección no es más que una relación o un nexo cuyo fundamento está en lo que se encuentra en cada una de las sustancias aparte. Así pues, estos seres por agregación no tienen otra unidad cumplida que la mental; por consiguiente, su entidad es también en cierto modo mental o de fenómeno, como la del arco iris. (Leibniz, Trad. 1976, p. 124)

Desde nuestra perspectiva, el lenguaje lógico debería distinguir las propiedades de las entidades individuales que las poseen, pero sin caer en la afirmación de que el individuo es real en sentido ontológico o metafísico. Es decir, que es posible admitir que no existen los individuos en sí y al mismo tiempo admitir que la categoría de cosa-unidad es algo que se impone a nuestra facultad de conocer a priori, un error necesario para que exista pensamiento. (Nietzsche, 1973)

> Si en el concepto empírico de un objeto cualquiera, corpóreo o incorpóreo, suprimimos todas las propiedades que nos enseña la experiencia, no podemos, de todas formas, quitarle aquélla mediante la cual pensamos dicho objeto como sustancia o como inherente a una sustancia, aunque este concepto sea más determinado que el de objeto en general. Debemos, pues, confesar, convencidos por la necesidad con que el concepto de sustancia se nos impone, que se asienta en nuestra facultad de conocer *a priori.* (Kant, Trad. 1993, p. 45)

> La intuición pura únicamente contiene, pues, la forma bajo la cual intuimos algo. El concepto puro no contiene por su parte, sino la forma bajo la cual pensamos un objeto en general. Tanto las intuiciones puras como los conceptos puros sólo son posibles a priori, mientras que las intuiciones empíricas y los conceptos empíricos únicamente lo son *a posteriori*. (Kant, Trad. 1993, pp. 92,93)

Hoy sabemos, gracias a la aportación de la *Gestalt*, que un objeto percibido es algo más que una colección de cualidades (Kanizsa, 1979), pero también sabemos que es imposible identificar un objeto sin determinar sus cualidades con independencia de sus coordenadas espaciotemporales, las cuales, como afirmaba Leibniz, no forman parte de su identidad esencial.

> Por lo tanto, el tiempo y el lugar no constituyen la esencia propiamente dicha de la identidad y de la diversidad, aunque sea cierto que la diversidad de las cosas va acompañada de la del tiempo y la del lugar, porque éstos traen consigo impresiones diferentes sobre las cosas; por no decir que son más bien las cosas las que nos hacen distinguir un lugar y un tiempo de otros, pues en sí mismo son perfectamente idénticos , y ni siquiera son sustancias o realidades completas (…) el principio de individuación se reduce en los individuos al principio de distinción (…) Si dos individuos fuesen perfectamente semejantes e iguales, y (en una palabra), indiscernibles, en sí mismos, no habría principio de individuación, y hasta me atrevo a decir que no habría distinción individual, o diferentes individuos, en tal supuesto. Por esto, la noción de átomos es quimérica y no procede más que de las concepciones imperfectas del hombre. (Leibniz, Trad. 1976, p. 226)

Las redes de expectativas que presentamos en esta tesis hablan fundamentalmente de tipos de objetos lógicos que son resultado de la conjunción de cualidades teóricas. Pero podemos especular con la idea generalmente admitida de que si proyectamos este espacio de posibilidades teóricas en mapas espaciotemporales se genera el darse o no darse efectivo de dichos objetos como intuiciones, es decir, se hace posible su determinación como objetos concretos que son distintos y que están presentes o ausentes aquí y ahora.

> Is space simply a container, or receptacle, for the objects of the sensible world? Could these objects exist without space? Conversely, could space exist without objects? Is there really a void between two objects, or would closer inspection reveal tiny particles of air or other matter? These questions call to mind several related ones. Is space a feature of the physical universe, or is it a convenient figment of our minds? If the latter, how did it get there? Do we construct it from spaceless sensations or are we born with it? Of what use is it? (O'Keefe & Nadel, 1978, p. 5)

El espacio tiempo en el que se insertan las realidades compartidas por grupos y comunidades de individuos resultaría, al igual que el resto de la cultura, de la integración alocéntrica y convencional de mapas inicialmente egocéntricos que son "una función (aunque solo indirectamente) de los movimientos del organismo en el espacio en relación con ese objeto" (O'Keefe & Nadel, 1978, pp. 56-61).

El uso de convenciones ampliamente compartidas en las escalas de medida que imponemos al mundo es la base de la ciencia (Poincaré, 2013), del mismo modo que acordar el significado de los términos es condición necesaria para crear una "comunidad de indagación" (Arnaiz, 2007) que respete los principios del pensamiento crítico (Lipman, 2013). En ello se inspira el diálogo socrático (Brenifier & Arnaiz, 2011), un diálogo cuyo alcance práctico va más allá de servir como herramienta de investigación en el aula o en los cafés filosóficos (Arredondo, Sañudo, Barros, Acosta, & Aguirre-Acevedo, 2016).

Todo lo dicho se traduce en que, aunque estemos convencidos de que los sistemas cognitivos comparten la misma lógica de las posibilidades, el intercambio de información entre ellos requiere negociar y convenir primero los criterios que se emplean para determinar el ser de los objetos y segundo, qué divisiones han de establecerse en relación a los grados de ajuste a dichos criterios: dicotómicas (ser, no ser), tricotómicas (ser, medio ser, no ser), decimales (0.a, 0,1a, 0.2 a… 1.a), etc. De tales divisiones (d) y del número de criterios (c), dependerá el número de objetos teóricos que componen el espacio de posibilidades *a priori* (S).

$$S = d^c$$

Solo una vez que ha sido determinado el ser de los objetos individuales, digamos ab, $a\neg b$, $\neg ab$, $\neg a\neg b$, es posible construir células *And* compuestas de individuos ($ab \bigwedge \neg a\neg b$) o células sintéticas *Or* que se refieran a características compartidas por varios individuos, por ejemplo $\neg b$, que es un carácter común a los objetos $a\neg b$ y $\neg a\neg b$.

El "nominalismo constructivista" que defendemos viene a decir que nunca podrán concebirse cualidades, caracteres, o ideas simples como dirían los empiristas, al margen de los individuos particulares y concretos de los que tenemos experiencia, es decir, al margen de la totalidad de caracteres que determinan la identidad de un objeto o nodo central en nuestras redes.

Resumiendo, para nosotros en las redes y a efecto del reparto de pesos, el objeto ab es anterior a las cualidades a y b que lo componen.

3.2.9 Presencias y ausencias como base de las decisiones

Las redes de expectativas y los diagramas de Marlo permiten formalizar y realizar inferencias a partir de la codificación de la presencia y ausencia de los objetos como modos de estar o existir irreductibles al resto de los atributos.

Las teorías psicológicas actuales del condicionamiento no tienen ningún problema en utilizar la ausencia del estímulo como constructo implicado en los procesos de aprendizaje. Así: "La inhibición condicionada se produce cuando un EC predice la "ausencia del EI" en el contexto del condicionamiento excitatorio" (Tarpy, 2000, p. 61).

Por ejemplo, nos dicen Botella & Corbella (2005) que la reacción de un organismo ante la ausencia o pérdida de conexión con la figura de apego primaria es la propia de una situación de amenaza. También de Guevara (2011) afirma que la representación de entidades ausentes es posible en los niños al margen de la posesión de un lenguaje, aunque pueda ser difícil en el resto de primates y Bermúdez (2003) sugiere que el par de representaciones contrarias presencia-ausencia se encuentra entre las utilizadas por los animales para realizar proto-negaciones.

En todo caso, pensamos que está suficientemente justificado, a nuestro modo de ver, el uso en las redes de expectativas de escalas que van desde el menos uno al cero y del cero al uno para determinar la ausencia o la presencia de un objeto. Podemos comenzar por prestar atención al hecho de que incluso las decisiones más elementales de aproximación o evitación requieren que los sistemas de procesamiento de información discriminen amenazas y recursos en el medio, de cuya presencia y ausencia dependerán los procesos de calma o excitación implicados en la búsqueda y la huida.

> Todos los organismos vivos, desde la humilde ameba hasta el ser humano, nacen con dispositivos diseñados para resolver *automáticamente*, sin que se requiera el razonamiento adecuado, los problemas básicos de la vida. Dichos problemas son; encontrar fuentes de energía; mantener un equilibrio químico del interior compatible con el proceso vital; conservar la estructura del organismo mediante la reparación del desgaste natural; y detener los agentes externos de enfermedad y daño físico. La palabra homeostasis es el término apropiado para el conjunto de regulaciones y el estado resultante de la vida regulada. En el curso de la evolución, el equipamiento innato y automatizado de la gestión de la vida (la máquina homeostática) se fue haciendo muy refinado. En la base de la organización de la homeostasis, encontramos respuestas

> simples como *el acercamiento* o el *alejamiento* de un organismo entero en relación con algún objeto; o bien el aumento de la actividad (excitación) o bien reducción de la misma *(calma o quiescencia*). (Damasio, 2006, p. 34)

Que un organismo capte en un objeto la cualidad de "ser-atractivo" o "ser-repulsivo" es algo que puede ser empíricamente inferido de su conducta como afirmaba Skinner (1986) y nos sirve para hacer notar que si no se establecen diferencias en las cualidades relevantes del mundo no se pueden establecer diferencias en las respuestas. Y viceversa, si no es posible captar en un organismo una mínima diferencia, del tipo que sea, en respuesta a dos estímulos, entonces no podemos afirmar que dicho organismo ha captado los dos estímulos como diferentes, viéndonos obligados a reconocer que lo que ha percibido ha sido uno y lo mismo, pues no podríamos aplicar en modo alguno el principio atomista de la distinción.

Recordemos que Hume, en el *Tratado de la naturaleza humana,* I, I, VII, 18, nos dice:

> Hemos observado que todo objeto diferente es distinguible, y que todo objeto distinguible es separable por el pensamiento y la imaginación. Podemos añadir que estas proposiciones son igualmente verdaderas en su conversa: todo objeto separable es también distinguible y todo objeto distinguible es también diferente. (Hume, Trad. 1981)

La ilustración número 1 expresa las relaciones de presencia-ausencia de recursos y amenazas con diferentes grados de activación y relajación del organismo.

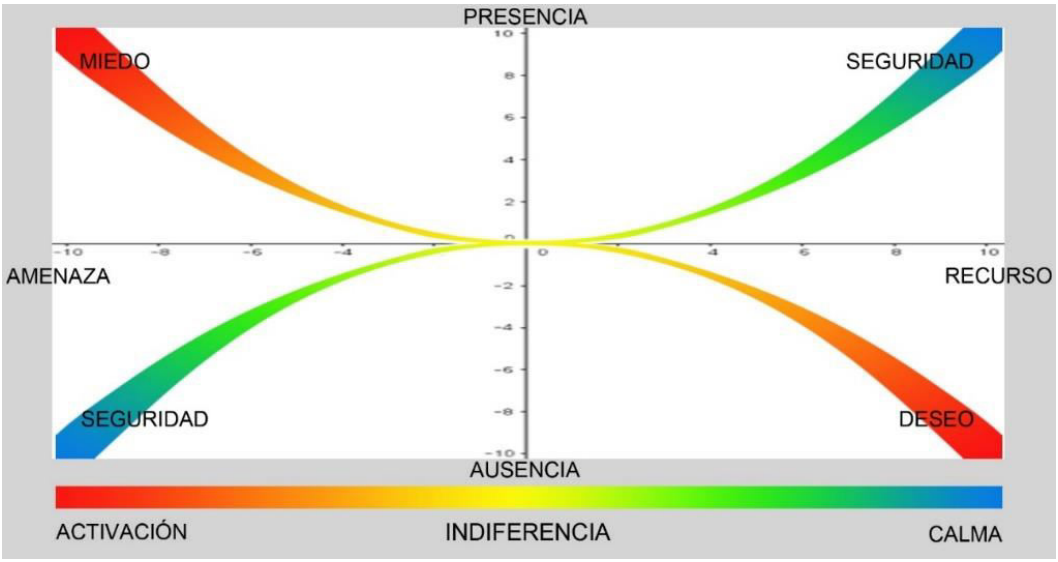


ILUSTRACIÓN 1. RELACIONES DE LA CALMA Y LA ACTIVACIÓN CON LA PRESENCIA-AUSENCIA DE RECURSOS Y AMENAZAS.

Debemos observar en la ilustración que el deseo y la activación aumentan a medida que aumentan el valor del objeto como recurso y su grado de ausencia, mientras que el miedo y la activación aumentan a medida que crecen el grado de presencia y el valor de la amenaza percibida. Skinner (1986) afirmaba que la presencia de un recurso valioso motiva la aproximación y genera sensaciones de seguridad, mientras que su ausencia provoca sensaciones de inquietud y motivación de búsqueda. La cuestión es, que toda representación orientada a la toma de decisiones debe contener, en última instancia, una valoración explícita o implícita de los estímulos del medio que permita compararlos y graduarlos como recursos más o menos satisfactorios, amenazas más o menos peligrosas o elementos indiferentes. Como afirmaba Berkeley (Trad. 1980):

> Los animales han sido dotados con el sentido visual, para que por la percepción de ideas visibles (...) puedan prever (por la experiencia habida por ellos de qué ideas tangibles están relacionadas con ciertas ideas visibles) el perjuicio o beneficio que posiblemente va a seguirse tras la aplicación de sus propios cuerpos a este o al otro cuerpo que hay a distancia. (p.61)

Locke, en su *Ensayo sobre el entendimiento humano*, en el libro II, cap XXI decía que "el motivo que nos incita a cambiar, consiste siempre en un malestar, ya que nada nos puede impulsar a cambiar un estado o a emprender una acción nueva, si no es algún estado molesto" (Locke, Trad. 1980), y en este sentido, llamamos amenaza para un organismo, o si prefiere castigo en términos conductistas, a todo aquello que perjudica la satisfacción de sus intereses vitales. La presencia de una amenaza para un organismo en términos subjetivos puede ser reconocida no

solo por las reacciones de evitación, sino porque fisiológicamente su presencia desencadena emociones activadoras de asco o miedo, o porque su ausencia desencadena sensaciones de alivio y/o relajación.

La búsqueda del placer y la evitación del dolor se presentan como motivaciones fundamentales. Recordemos que, según Scherer (1990), los procesos emocionales conllevan cambios en diferentes subsistemas que movilizan todos los recursos para poder afrontar determinadas exigencias, considerando que también las emociones positivas registran desviaciones en el estado normal del organismo y que Obrist (1981) relaciona la activación con el grado en el que los sujetos movilizan sus energías para la acción.

Esta contraposición entre la búsqueda del placer, de la supervivencia, de la felicidad, de la satisfacción o del contento de sí y la evitación del dolor o el sufrimiento como primeros principios de la conducta se ajusta al sentido común y es asumido tanto por las corrientes filosóficas materialistas y hedonistas como por las corrientes más idealistas. Luego no es objeto de discusión la contraposición entre la atracción y la evitación como principios últimos en la regulación de la conducta, sino cuáles deberían ser los objetos que deberíamos perseguir y cuáles los que deberíamos evitar. Así, en el libro VI de la *República* Platón (Trad. 1997) se refiere al Bien como como algo que todos perseguimos, pero que es oscuro y difícil de precisar.

Hoy resulta una obviedad relacionar la presencia-ausencia de recursos y amenazas con las sensaciones elementales de seguridad y miedo, las cuales a su vez generan cambios fisiológicos que pueden ser detectados y medidos (Anta, 2012; Grzib, 2007; Lindsley, 1951, 1952). Lo que tal vez resulta más difícil de aceptar y asumir es que incluso las proposiciones más formales y frías de la lógica aún mantienen vínculos con las emociones, lo cual delataría que su origen está ligado, como el del resto del lenguaje, a la comunicación de valoraciones subjetivas. Siendo estudiante de filosofía, escuché al profesor Emilio García García afirmar en clase que, incluso cuando resolvemos problemas de matemáticas, adoptamos una actitud valorativa hacia la información. De hecho, se han distinguido experimentalmente dos tipos de activación: una activación subjetiva autonómica que se hace visible en las medidas psicofisiológicas y una activación cortical relacionada con las tareas que requieren un procesamiento cognitivo, la cual produce aceleración de la tasa cardiaca al solucionar problemas de aritmética mental, solución de anagramas, memorización, retención, toma de decisiones, selección de respuesta y razonamiento lógico (Lacey, 1967).

3.3 El nuevo paradigma del razonamiento

3.3.1 Lógica y neurociencia

Desde la perspectiva neurocientífica actual sobre las relaciones entre lógica y lenguaje, que tiene como antecedentes trabajos como el de Zeman (1962) o Habib, Landou, Ansidéi, y Lienas, (1994), la investigación de Menéndez (2009) demuestra que existen correlatos neurológicos específicos relacionados con las inferencias lógicas y gramaticales, las cuales parecen distinguirse de otras capacidades lingüísticas semánticas, léxicas o fonológicas implicadas en los procesos del pensamiento. Menéndez (2009) analiza en su tesis doctoral la relación entre pensamiento y lenguaje a nivel estructural, genético y patológico, además de las relaciones entre Lógica y Lingüística, y entre cerebro y lenguaje, afirmando que las lesiones cerebrales que afectan a los lóbulos frontales alteran componentes específicos de tipo psicolingüístico (funtores), mientras que resultan indemnes otros componentes semánticos y conceptuales, y del mismo modo ocurre a la inversa. Así, el autor muestra cómo en el nivel neurofisiológico, el Sistema Nervioso Central presenta actividades de toma de decisiones que implican el procesamiento de operadores lógicos como la disyunción, la conjunción, la negación o el condicional, los cuales pueden interpretarse también desde nuestra propuesta de redes, donde la inferencia se produce en conjuntos establecidos por asociaciones de variables.

Nosotros creemos que las redes de expectativas comparten paradigma con los trabajos que menciona Menéndez (2009), basados en el esquema propuesto por Mc Culloch y Pitts en 1943. Por ejemplo, nos dice Menéndez (2009) que Poon (2006) propuso crear un cálculo cerebral basado en formalizaciones lógico-matemáticas de procesos psicofisiológicos y González Carlomán (1976) propuso circuitos abstractos lógico-matemáticos modelables según los principios de la Lógica proposicional bivalente implicando a los juntores principales de la negación, la disyunción, la conjunción, y el condicional.

Precisamente, como apoyo al cálculo proposicional tradicional basado en la lógica bivalente verdadero-falso, Menéndez (2009) menciona los resultados de Kandel, Schwartz y Jessell (1995), que demostraban que la descarga del impulso nervioso se manifiesta según la ley del "todo-o nada". Sin embargo, desde nuestra perspectiva la ley de "todo o nada" no debe entenderse como muestra de simplicidad en el procesamiento de la información, como si las neuronas solo fueran capaces de operar con valores uno y cero; al contrario, para nosotros señala que las neuronas son capaces de establecer criterios de decisión dentro de escalas complejas, tal y como muestra la Teoría de Detección de Señales. Es decir, que no se respalda la bivalencia de la lógica, sino la necesidad de establecer criterios claros y definidos de decisión-acción. Cuando durante el XVIII Congreso Español de Tecnología y Lógica Fuzzy, celebrado en 2016 en San Sebastián, una profesora trató amablemente de explicarnos qué era un conjunto borroso, nos pareció obvio que la borrosidad de las categorías caliente-frío no evitaba que los puntos en los que el aparato del aire acondicionado se enciende o se apaga estén perfectamente determinados en cada momento. Que estos puntos puedan variar de forma inteligente requiere, al menos, la posibilidad de diferenciar múltiples grados de temperatura y la capacidad de retroalimentación del sistema valorando la rentabilidad de sus decisiones.

La lógica proposicional es un caso particular de la lógica de las posibilidades que configura las inferencias en las redes de expectativas. Por ello, podemos arriesgarnos a suponer que ningún estudio en neurociencia que respalde la lógica de proposiciones refuta la validez de nuestra propuesta. Al contrario, nada nos impide conjeturar que tales investigaciones puedan llegar a respaldarnos, por más que quede fuera de nuestros objetivos actuales demostrar tal cosa. Si llegara el momento de validar las redes como verdaderos modelos del funcionamiento neuronal, habría que tener en cuenta, como hace Menéndez (2009), y entre otros, los estudios de Neurociencia Cognitiva realizados con neuroimagen (Anderson, Albert, & Fincham, 2005; Fangmeier, Knauff, Ruff, & Sloutsky, 2006; Goel & Dolan, 2001, 2004; Goel, Gold, Kapur, & Houle, 1997, 1998; Heim, Opitz, & Friederici, 2003; Newman, Carpenter, Varma, & Just, 2003; Ruff, Knauff, Fangmeier, & Spreer, 2003) (herederos del postulado de la existencia de asambleas neuronales responsables de la actividad categorial del Sistema Nervioso animal y humano (Hebb, 1949), el enfoque cibernético y lógico (Pask, 1962), los enfoques conexionistas y de redes neuronales de, entre otros, Rosenblatt (1961) y Sutton III, Reggia, Armentrout, & D'Autrechy (1994), sin olvidar el valor que pueden tener los modelos computacionales clásicos (Fodor, 1983; García Albea, 1993; Rivière, 1986).

No hay duda de que estemas muy lejos de revelar la naturaleza exacta y específica en la génesis y funcionamiento de los mecanismos neurológicos del razonamiento, un problema muy alejado de los objetivos de este trabajo. Pero la tesis de Menéndez deja claro que la investigación de dichos procesos es afrontada hoy desde el paradigma de las ciencias naturales y empíricas por disciplinas como la Neurociencia, la Psicología Cognitiva (Braine & O' Brien, 1998; Bucciarelli & Johnson-Laird, 1999; Cheng & Holyoak, 1985; Evans, Newstead, & Byrne, 1993; Fodor J. A., 2010; Johnson-Laird & Byrne, 1991; Oaksford & Chater, 1994; Rips, 1994; Schroyens, Schaeken, & d' Ydewalle, 2001; Wason, 1959), la Matemática (Kempe, 1886; Sheffer, 1913; Styazhkin, 1969; Ramírez Figueroa, 2010), la Lingüística (Janssen & M.B.J. Stokhof, 1981; Kamp & Reyle, 1993; Stenning & Oberlander, 1995), la Teoría de la Comunicación (Fiske, Trad. 1985; Shannon, 1948), la Psiquiatría o la Neurolingüística, y no solo por la tradiciones lógico-matemáticas más afines al intelectualismo.

3.3.2 Redes causales bayesianas: la lógica de las posibilidades

Ni la razón, ni el razonamiento científico son exclusivos de ninguna cultura, ni están limitados al ámbito de las revistas científicas, los congresos o las universidades. Otra cosa son el rigor, la sistematicidad, la precisión en la investigación, la claridad en la comunicación, la amplitud de los datos manejados, la exigencia de mantener una perspectiva amplia e informada sobre los asuntos a tratar o cualquiera otra de las características del proceso de investigación científica (Tamayo, 1986). Incluso los niños formulan hipótesis, hacen inferencias causales y aprenden a partir de la estadística y la observación cuando se enfrentan a los problemas y deben tomar decisiones (Morris, Croker, Masnick, & Zimmerman, 2012) codificando la información en términos de relaciones causales que pueden ser formalmente expresadas en redes bayesianas (Sobel, Tenenbaum, & Gopnik, 2004).

Las redes de expectativas Marlo son una propuesta didáctica en la línea de los modelos gráficos causales inspirados en las redes causales de Bayes. Siguiendo a Gopnik (2004) podemos afirmar que el formalismo de las redes bayesianas se viene desarrollando en las ciencias de la computación, la filosofía y la estadística al menos desde los años 80 del siglo pasado (Glymour & Cooper, 1999; Kiiveri & Speed, 1982; Pearl, 1988; Pearl, Causality,

2000; Spirtes, Glymour, & Scheines, 1993), ofreciendo una representación unificada general de las hipótesis causales que ha sido aplicada al diseño de programas informáticos que pueden hacer inferencias causales precisas en una amplia gama de contextos científicos como la epidemiología, la geología y biología (Ramsey, Roush, Gazis, & Glymour, 2002; Shipley, 2000).

Las redes causales de Bayes permiten el desarrollo de nuevas perspectivas y puntos de vista que aproximan el razonamiento a la probabilidad y nos han permitido, del mismo modo, enfrentarnos a los problemas clásicos del arte de la lógica (García Trevijano, 1993) y al razonamiento aproximado (Pereira Fariña & Sobrino, 2012), de modo que hemos terminado por situar las bases de la inferencia muy próximas al ámbito de la probabilidad.

Esta nueva perspectiva, que ataca la idea de que la racionalidad se ajusta a las reglas de la lógica predominantes, recupera la relación clásica entre lógica y probabilidad y ha venido a llamarse recientemente en Psicología el Nuevo Paradigma del Razonamiento (Elqayam & Over, 2013; Evans, 2012; Oaksford & Chater, 2007; Over, 2009). Dentro de este paradigma, la lógica y la probabilidad comparten procesos cognitivos relacionados con el aprendizaje (Baratgin & Politzer, 2010; Cheng P. C.-H., 2018; Chiesi, Primi, & Morsanyi, 2011; Crupi, Fitelson, & Tentori, 2008; Cruz, Baratgin, Oaksford, & Over, 2015; Dubois, Prade, & Smets, 2001; Feeney, Evans, & Venn, 2008; Haigh & Stewart, 2011; Harris, Hsu, & Madsen, 2012; Hilton & Erb, 1996; Milne, 2012; Oaksford & Chater, 2016; Oberauer, Wilhelm, & Diaz, 1999; Ohm & Thompson, 2006; Pfeifer, 2013; Politzer & Baratgin, 2016; Pyne, 1997; Rubin, 1978; Zhang & Poole, 1996), que ya han sido aplicados en el campo de programación lógica (Bellodi & Fabrizio Riguzzi, 2013).

Así pues, las redes de expectativas y los diagramas de Marlo son formas de representación visual dentro de lo que consideramos una tradición constructivista que no renuncia a la existencia de formalismos universales que concebimos bajo los mismos principios de las redes causales de inspiración bayesiana, admitiendo en ambos casos la incertidumbre como parte de los procesos de razonamiento (Baratgin, Over, & Politzer, 2013; George, 1997, 1999; Handley & Evans, 2000; Politzer, 2005; Leyva-Vázquez, Escobar-Jara, & Smarandache, 2018; Smarandache, 2016)

De hecho, hay una colosal producción de lógicas no clásicas que admiten la incertidumbre, como todas las inspiradas en la lógica cuántica (Cabello Quintero, 2000; Ludwig, 1983; Von Neumann, 2018; Pool, 1968; Putnam, 1957; Reichenbach, 2012; etc.) Debemos reconocer que nuestro conocimiento y comprensión de tales sistemas apenas nos permite tomar de ellos algunos principios elementales que, a buen seguro, han sido mal entendidos, pero que resultan razonables en el aula tal y como son explicados, como la superación de la bivalencia, la importancia de la incertidumbre o el concepto de la probabilidad negativa (Bartlett M.S., 1945; de Barros & Oas, 2014; Feynman, 2012; Haug, 2004; Sokolovski & Connor, 1991), por más que, como veremos, nuestra probabilidad negativa no añade absolutamente nada a los principios ya establecidos de la probabilidad clásica.

Llegamos por tanto a la conclusión de que el cerebro humano codifica la información del medio en redes causales de estructura bayesiana que incluyen incertidumbre y que son modificadas por la experiencia propia y ajena gracias a proceses de aprendizaje y comunicación progresivamente más complejos. La arquitectura de estas redes, parcialmente innata, parcialmente adquirida, debe integrar la experiencia del individuo, del grupo y la comunidad, pero solo en la medida en que las fuentes externas sean capaces de inspirar confianza; un principio en el que insiste la reciente corriente conocida como Neuroeducación (Battro, Fischer, & Léna, 2016; Jensen, 2009; Mora, 2014; Ortiz, 2009).

Las redes de expectativas y los diagramas que se proponen en esta tesis son algo muy simple y aún no tienen potencial para generar modelos capaces de reproducir la compleja estructura de redes que sostiene la representación biopsicosocial del universo en la que se mueven y toman sus decisiones los individuos. Sin embargo, si existe una relación fractal entre las redes neuronales más simples y las más complejas (Mandelbrot, 1982) el fundamento lógico y matemático de ambas podría ser el mismo.

El desarrollo actual de las redes de expectativas solo permite suponer que podrían servir como modelos de la arquitectura de la memoria semántica o declarativa en el sistema cognitivo, la cual contiene el diccionario teórico de los elementos del universo de un individuo que hace posible un procesamiento frío de la información, generalmente lateralizado en el hemisferio izquierdo de nuestro cerebro. Sin embargo, las redes resultan hoy insuficientes para explicar la conducta de seres con intenciones sometidos a procesos motivacionales en los que el

ánimo y el desánimo fluctúan en función de complejos procesos de valoración y evaluación de la rentabilidad de la propia conducta en curso, es decir, de procesos dependientes de la percepción subjetiva de éxito y fracaso consumada o anticipada (Vázquez Alonso & Manassero, 1993; Weiner, 1986; Weiner & Graham, 1989). Pero a falta de investigación empírica, proponer las redes como modelos cognitivos es de momento una simple, aunque interesante, hipótesis especulativa.

No será sencillo consensuar un modelo de racionalidad, ni desvelar cómo interaccionan las múltiples causas que intervienen en nuestras decisiones, o saber cómo resuelven los conflictos biopsicosociales las funciones ejecutivas que operan en nuestros lóbulos frontales para mantener la homeostasis en todos los niveles. Pero resulta obvio que, si lo que conocemos como inteligencia artificial (Nilsson, 1998; Rich & Knight, 1994; Russell & Norvig, 2010; Winston, 1993) pretende construir modelos matemáticos con capacidad para simular fenómenos colectivos y complejos como la conducta humana, será necesario integrar múltiples disciplinas como la teoría de juegos (Friedman, 1991; Maynard Smith, 1982; Nash, 1950; Poundstone, 2011; Von Neumann & Morgenstern, 1944) y el concepto de Estrategia Evolutivamente Estable desarrollado por Maynard Smith (1979), que permitía por primera vez, según Dawkins (2011), apreciar claramente cómo un grupo de entidades independientes y egoístas puede parecerse a un todo organizado en ecosistemas y comunidades. Es obvio que los procesos dinámicos y económicos que subyacen a las teorías evolutivas de juegos están presentes en nuestra interpretación de la razón vital en la que situamos esta tesis. La razón al servicio de las decisiones, las decisiones al servicio de la vida. Y la razón teórica siempre al servicio de la razón vital. Baste recordar, siguiendo a Miller Moya (2004), que las teorías evolutivas de juegos, que se ligan en sus orígenes al conocido juego del dilema del prisionero (Hardin, 1971, 1982), pueden servir de base a una teoría de la racionalidad limitada en el estudio de la acción colectiva, el surgimiento de las normas sociales y la cooperación.

La inteligencia artificial, sin olvidarse de que la lógica universal se esconde en el sentido común (Mueller, 2006), tiene en cuenta las actuales teorías de la decisión que integran la incertidumbre en sus ecuaciones y que se han convertido en una herramienta de trabajo indispensable en disciplinas tan variadas como la economía, la psicología, la ciencia política, la sociología o la filosofía (Aguiar González, 2004).

Podemos afirmar que está en marcha una nueva perspectiva de la razón al servicio de la vida liberada del reduccionismo positivista y de las verdades absolutas del viejo racionalismo. Desde esta perspectiva de la razón vital, los principios elementales y *a prioiri* de la lógica formal no pueden ser otros que los principios formales que permiten organizar los contenidos sintéticos y *a posteriori* del aprendizaje, haciendo comprensibles y comunicables, dentro de las comunidades que comparten sistemas de codificación, mapas provisionales de las relaciones causales del mundo generados con vistas a la anticipación y la supervivencia (Gopnik et al., 2004).

Esos mapas causales y las proposiciones que los comunican deben ser informativas. Recordemos que la información reduce, en cualquiera de los ámbitos a los que se refiere, el universo de posibilidades (Fiske, Trad. 1985; Shannon, 1948) ya que sólo así es posible la toma de decisiones que pretenden optimizar la compleja rentabilidad biopsicosocial de nuestras conductas

> Communication: action on the part of one organism (or cell) that alters the probability patter of behavior in another organism (or cell) in an adaptive fashion. This definition conforms well both to our intuitive understanding of communication and to the procedure by which the process is mathematically analyzed. (Wilson, 1998, p. 9)

Establecemos pues, como marco teórico de nuestra propuesta el Nuevo Paradigma del Razonamiento en psicología. que ya era mantenido por lógicos del siglo XIX como Boole, y que establece que la lógica y la probabilidad comparten fundamentos en la inferencia. Así, las redes de expectativas Marlo se emparentan con los mapas causales de estructura bayesiana que permiten modificar el peso de sus nodos a través de la experiencia (Fodor & Pylyshyn, 1988) configurando *a posteriori* nuestras creencias sobre el mundo y en consecuencia, los contextos que sostienen las inferencias razonables dentro de lo que llamamos lógicas no monotónicas (Morado, 2003), que permiten a los sistemas modificar las consecuencias lógicas al actualizar sus conocimientos. Así es posible considerar representaciones del mundo construidas sobre una circuitería innata con principios de inferencia universalmente compartidos capaces de ser modificadas con implementos adquiridos a través de la experiencia. Fodor y Pylyshin (1988) afirmaban en este sentido que "para los teóricos conexionistas el aprendizaje es un reajuste de los pesos de los valores de las conexiones hasta que el sistema logre la reproducción del modelo, así como sus propiedades estadísticas" (citado en León-Carrión, 2002, p. 174).

3.3.3 La Teoría de Redes Relacionales TRR

Como ya hemos señalado, las redes de expectativas constituyen una herramienta para la didáctica del razonamiento deductivo, inductivo y plausible que puede ser empleada dentro del paradigma del conexionismo, que ha sido diseñada integrando los viejos principios de la inferencia que aprendimos en la Facultad de Filosofía con diversas teorías psicológicas que llevan años en el ambiente y que conocimos siendo estudiantes de Psicología. De este modo, el marco teórico en el que se inscriben las redes es hoy un lugar común para muchas de las disciplinas que tratan de aproximarse a los fenómenos del pensamiento y del lenguaje. Y aunque ya hemos comentado que escapa de las pretensiones de esta tesis investigar la relación entre ambos procesos, creemos que resultará útil señalar que algunas de las hipótesis sobre las que se sostiene el modelo de inferencia propuesto en las redes de expectativas sirven como postulados centrales de teorías conexionistas respaldadas por evidencia neurológica en el laboratorio, como ocurre con La Teoría de Redes Relacionales (TRR) (Lamb, 1999; Lamb & Newell, 1968). Esta teoría se presenta en ciertos ámbitos académicos como un modelo realista del lenguaje porque ha sido elaborada desde un enfoque con base neural, en términos de neuronas y circuitos neuronales (Pulvermüller et al., 2006).

> Ahora, la unidad básica de procesamiento en la TRR es la nexión, término técnico que se define como el módulo básico de procesamiento en la red cognitiva y que se visualiza notacionalmente como la conjunción de dos nodos cualesquiera mediante una única línea interna (...) De este modo, la teoría cristaliza el postulado clave de que la información está en la conectividad (...) Por ejemplo, tanto el cerebro como las redes relacionales operan mediante procesamiento distribuido paralelo (parallel distributed processing): la información en ambos sistemas se procesa en flujos que avanzan en diferentes direcciones y en simultáneo "la divergencia y la convergencia de conexiones neuronales ilustran un principio clave en la organización del cerebro" (...) el cerebro es un procesador bidireccional. (Martín García, 2012, p.230)

Todas las hipótesis confirmadas sobre las que se sostiene la TRR, han sido tenido en cuenta en el diseño de las redes de expectativas y podrían servir como resumen del marco teórico que soporta su estructura, salvo la primera, sobre la cual no podemos pronunciarnos.

Las principales hipótesis confirmadas de la TRR

(i) El sistema lingüístico no contiene símbolos ni objetos sintácticos.
(ii) El sistema lingüístico del individuo es una red de relaciones.
(iii) Las nexiones (y sus nodos individuales) pueden integrar señales entrantes provenientes de otros nodos y distribuir sus señales salientes hacia otros nodos.
(iv) El sistema es bidireccional.
(v) Las relaciones tienen distintos niveles de fuerza.
(vi) Las conexiones se fortalecen gracias a su uso exitoso.
(vii) Los nodos poseen umbrales variables.
(viii) Las conexiones pueden ser de dos tipos: excitatorias o inhibitorias.
(ix) El sistema debe poseer millones y millones de nexiones disponibles (Hipótesis de la Abundancia).

TABLA 1. PRINCIPALES HIPÓTESIS CONFIRMADAS DE LA TRR. TOMADO DE MARTÍN GARCÍA, 2012.

Recordemos que el supuesto conexionista fundamental del procesamiento distribuido parte de que el cerebro es un ordenador con cien billones de células computacionales que interactúan de diversas formas, una idea rastreable hasta la teoría neuronal de Ramón y Cajal (León-Carrión, 2002). En todo caso, es obvio que resulta imposible encontrar dos mapas causales, dos cerebros, dos representaciones del mundo o, como diría Ortega y Gasset, dos puntos de vista iguales. Y es imposible porque en los diferentes paradigmas culturales encontraremos, como ha venido señalando insistentemente el relativismo cultural (Boas, 1993), diversidad a la hora de categorizar los ámbitos del conocimiento (nutrición, aseo, reproducción, cuidado, educación, autorrealización, etc.) en el uso de los criterios, en el número de grados de ser que empleen en las escalas de sus criterios, en sus necesidades, valores

y prioridades a la hora de atender y analizar los dominios, etc., sin que nada de esto impida compartir los principios universales de la inferencia que hacen posible la comunicación.

3.4 ¿Somos seres irracionales o inteligencias complejas?

El hecho de que, al resolver problemas teóricos o tomar decisiones prácticas, las personas sigan múltiples sesgos y caigan en falacias alejadas de los criterios de racionalidad normativos que establece la lógica matemática, hace pensar a muchos investigadores que no existe algo parecido a una razón universal. En el *Tratado de la Naturaleza humana, I, IV, I, 180*, ya decía Hume (Trad. 1981) que "En todas las ciencias demostrativas, las reglas son seguras e infalibles, pero, cuando las aplicamos, nuestra facultades falibles e inseguras son muy propensas a apartarse de ellas y caer en el error" (p.311). Y algo similar se plantea hoy desde el ámbito de la Psicología.

> Los múltiples y frecuentes errores encontrados durante la realización de tareas de razonamiento ha ocasionado, en el seno de la psicología, un amplio debate sobre si el pensamiento humano procede exclusivamente conforme a los principios del cálculo lógico-formal o actúa computacionalmente incorporando información adicional incluida en el contexto de la tarea o información de naturaleza pragmática. (Crespo, 2006, p. 397)

Las personas no siempre siguen todos los pasos del proceso que conduciría a una elección "racional", aunque influyen variables como la relevancia de la decisión a tomar o los conocimientos sobre el tema (González Labra, 2011). Además, insiste González Labra que pueden ser los límites de la memoria operativa los que impiden una exploración sistemática de todas las posibilidades en juego, tal y como explica la teoría de los modelos mentales, o incluso puede deberse el error a mecanismos de defensa que protegen nuestra autoestima, pues sabemos que las personas sesgan de diferentes formas la información social y que esta forma de pensamiento se relaciona con una mayor felicidad personal (Concha, Ramírez, Gallardo, Rovira, & Rodríguez, 2012). También es hoy un lugar común en la piscología del razonamiento que eliminar alternativas para considerar únicamente las más "disponibles" o activas en la memoria, permite generar respuestas de bajo coste en términos de procesamiento de la información pero altamente rentables la mayor parte de las veces, tal y como ocurre con la llamada falacia del sesgo de disponibilidad (Tversky & Kahneman, 1973).

De cualquier forma, es evidente la falta de ajuste entre las teorías que pretenden determinar lo que es racional y los procesos de pensamiento de las personas, aunque más sorprendente resulta la afirmación de que un estilo de pensamiento es al mismo tiempo irracional y adaptativo (Sutherland, 1996). Procesar información es un proceso caro que no siempre es rentable, por lo que puede ser una buena estrategia no malgastar energías y adaptarse a las normas y decisiones del grupo (Aprile, 2006). En todo caso, la falta de ajuste entre nuestras conductas y los modelos normativos de racionalidad vigente no demuestra necesariamente que existan fallos en la facultad de la razón. Aristóteles afirma en *Acerca del Alma* IV, 408b15-25:

> El intelecto -parece ser en su origen- una entidad independiente y que no está sujeta a corrupción. A lo sumo, cabría que se corrompiese a causa de su debilitamiento que acompaña a la vejez, pero no es así, sino que sucede como con los órganos sensoriales: y es que si un anciano pudiera disponer de un ojo apropiado vería, sin duda, igual que un joven. De manera que la vejez no consiste en el que el alma sufra desperfecto alguno, sino en que lo sufra el cuerpo en que se encuentra, y lo mismo ocurre con la embriaguez y las enfermedades. La intelección y la contemplación decaen al corromperse algún otro órgano, pero el intelecto mismo es imposible. (Aristóteles, Trad. 1983, p.40)

La falta de ajuste con los criterios normativos de racionalidad tampoco demuestra que nuestras conductas sean esencialmente irracionales, pues podrían ser las teorías de la racionalidad las que estén equivocadas, al menos por tres motivos obvios:

- Primero, porque las teorías clásicas no consideran los intereses del grupo y de la comunidad y mucho menos las necesidades de coherencia de la identidad de las que habla el humanismo y las terapias de tercera generación (Rojí & Saúl, 2011).
- Segundo, porque aún ignoramos muchas de las variables que intervienen en la toma de decisiones, lo que se traduce en que no exista ninguna teoría capaz de acertar siempre en sus predicciones (González Labra, 2011).
- Y tercero, porque aunque sea fácil caer en el intelectualismo considerando que procesar información es gratis, en realidad es un proceso que supone un alto coste de energía (Aiello & Wheeler, 1995; Isler

> & van Schaik, 2009; Navarrete A., 2012; Navarrete & Isler, 2011), no siendo razonable establecer lo racional sin considerar lo inteligente.

Así pues, del mismo modo que la teología debatía en el siglo XVIII porqué permite Dios, que es sumamente perfecto, la existencia del mal, como vemos en la *Teodicea* de Leibniz de 1710 (Leibniz, Trad. 1950), podríamos preguntarnos hoy por qué permite la selección natural que exista un mundo con organismos que yerran sus razonamientos.

Sería excesivamente arriesgado afirmar que este es el mejor de los mundos posibles, pero de hecho es el que ha superado hasta ahora las pruebas de la selección natural, y, exista un Dios perfecto o no, se explica apelando a la filogénesis. Debemos suponer que cualquier organismo individual con capacidad de aprender, actúa no sólo con la intención de satisfacer sus necesidades privadas, sino con la pretensión de valerse de la experiencia para hacerlo progresivamente de un modo más eficiente o rentable. La codificación de su experiencia le permitirá generar representaciones de la situación y de su mundo o realidad privada, incluyendo representaciones de su cuerpo y de su interacción con las circunstancias como dice la neurociencia. Las representaciones podrán convertirse en interpretaciones progresivamente más complejas sólo en la medida en la que el coste en el procesamiento de la información resulte rentable. Es decir, que cada matiz o discriminación de estímulos tiene un precio y únicamente merece la pena pagarlo cuando es informativo, es decir, cuando puede utilizarse para asociarlo con una conducta diferente y más ajustada que permita afrontar los gastos que la originaron. Por ejemplo, las teorías de la evolución de la tricromacia en los primates se centran en la capacidad de detección y selección de fruta madura y hojas tiernas entre las hojas maduras, superior en los organismos tricromáticos que en los dicromáticos (Smith, y otros, 2012).

También resulta esencial para el organismo presuponer ciertas regularidades en el acontecer del mundo y organizar sus conocimientos de manera coherente, de tal forma que le resulte posible anticipar qué consecuencias se seguirán de determinados estímulos. La teoría de la regularidad se basa en las ideas de Hume, que define la estructura de la causalidad sobre la base de la contigüidad de tiempo y lugar, precedencia temporal, conjunción constante y sobre la idea de una necesidad cognitiva o psicológica que vincula la causa y el efecto. Así, las leyes científicas aparecen como generalizaciones universales de la forma toda vez que ocurre un acontecimiento de tipo x (la causa), ocurre también un acontecimiento de tipo y (el efecto).

Pensemos, que los únicos organismos que se benefician de la memoria son aquellos capaces de recuperar información almacenada con el objetivo de aumentar la probabilidad de alcanzar algún fin adaptativo (Westbury & Dennet, 2000). Desde esta perspectiva, los fundamentos últimos de la lógica-matemática no pueden distinguirse de los principios del aprendizaje, y ello a pesar de que pueda separarse de las estructuras lógicas todo contenido empírico *a posteriori*. Sin la capacidad de generalizar y discriminar estímulos no serían posibles ni la lógica ni cualquier tipo de aprendizaje.

> En los animales son frecuentes las evidencias de razonamiento e inferencia. De hecho, éstos muestran capacidad para realizar inferencias aun cuando efectúan reacciones condicionadas simples. Por ejemplo, una respuesta condicionada desencadenada por la presencia de un estímulo discriminativo implica un juicio del tipo "si el E + rojo está encendido, picotear la clave". Del mismo modo, una RC pavloviana indica una forma básica de razonamiento, por ejemplo, "si suena el tono EC, la comida EI vendrá a continuación". Sin embargo, las especies animales ejercen también un nivel de razonamiento superior al implicado por un simple reflejo de condicionamiento. (Tarpy, 2000, p. 574).

Como ya sabemos por el concepto de homeostasis biológica, el organismo regula su conducta mediante la búsqueda del placer y la evitación del dolor, integrando en su diccionario innato de recursos y amenazas todo lo que aprende mediante procesos de asociación. "En la mente humana hay impresa una percepción de dolor y placer, resorte capital y principio motor de todas sus acciones" (Hume, Trad. 1981, p. 118).

A nivel del organismo individual, las generalizaciones acerca de lo que le beneficia y le perjudica están basadas necesariamente en un número muy pequeño de observaciones, que a pesar de resultar intensas y significativas para él, resultarán en muchas ocasiones supersticiosas e irracionales desde un punto de vista más amplio, tal y como ocurre en la adquisición de algunas fobias (Marks, Boix, & Pallarés, 1991). Sin embargo, aquí es importante recordar que desde la perspectiva de la supervivencia y en relación con las amenazas, vale más equivocarse cien veces en un falso positivo que errar una vez en un falso negativo. La Teoría de Detección de Señales, TDS (Green & Swets, 1966; Nevin, 1969; Tanner & Swets, 1954) postula que el hecho de que un estímulo sea o no percibido como amenaza depende del criterio de decisión del sujeto, el cual establece un punto de corte dentro de lo que son

escalas continuas (López-Casal, 2017). Por ejemplo, el día que mi hermana retiró a su hija pequeña del cristal blindado de los caimanes en el zoo, respondía a una amenaza definida por ella misma como "mucho que perder y poco que ganar". ¿Era realmente irracional su modo de actuar o respondía a la lógica de una razón vital? ¿Nos olvidamos a la hora de juzgar las decisiones ajenas del punto de vista y los intereses de quienes tomas las decisiones?

Un organismo que filogenética y ontogénicamente ha evolucionado para poder integrar en sus procesos de decisión los conocimientos del grupo solo responderá racionalmente cuando así lo considere el grupo. Pensemos, por ejemplo, que entre los requisitos para que una creencia sea diagnosticada como delirio se encuentra el hecho de no ser compartida por el grupo (Ramos, Sandín, & Belloch, 2011). Y cada grupo humano tienen sus propios sistemas de creencias con un importante valor adaptativo (Morgan, 2006).

El hombre primitivo es también racional cuando siembra, caza, cosecha o construye (Bermejo Barrera, 2004). Es una obviedad que la amplitud del punto de vista de un grupo y sus tradiciones es más amplia que la de un individuo dotado exclusivamente de la capacidad de aprendizaje por asociación. Pero no deja de ser la misma razón la que emplean unos y otros en ese constante e inacabado proceso hermenéutico, definido por Ortega como asedio filosófico, en el que sobre el eje de un mismo problema vamos girando en espiral y ampliando la perspectiva (Ortega y Gasset, 1991). Pero no cambia la razón misma, ni es propiedad exclusiva de la cultura occidental. Cuando Descartes (Trad. 1983) afirmó que "habiendo reconocido más tarde, viajando, que no todos los que tienen sentimientos muy contrarios a los nuestros son por eso ni bárbaros ni salvajes, sino que muchos usan tanto o más que nosotros de la razón" (p.83), estaba sentando las bases de nuestro punto de partida, según el cual, no podemos ser irracionales, ni siquiera cuando hacemos un mal uso de la razón.

Como aparece en cualquier manual elemental de sociología, somos seres contradictorios capaces de obedecer ciegamente y al mismo tiempo, cuestionar los principios más elementales del sentido común. Pero nada de esto justifica la afirmación de que nuestras decisiones son irracionales, mientras no tengamos conciencia del complejo entramado de los sistemas a los que sirven: ¿Somos irracionales o desconocemos la complejidad de los factores, muchos de ellos inconscientes (Bode et al., 2011), que intervienen en la motivación de nuestras conductas? (Spinoza, Trad. 1977).

La vida es reacción, planificación, respuesta, proceso, cambio, movimiento motivado por la necesidad de buscar la satisfacción de necesidades que aseguren las funciones de nutrición, relación y reproducción. El comportamiento se orienta a la supervivencia. Pero ¿a la supervivencia de qué o de quién?

> Debemos comenzar liberando a nuestra mente de las viejas actitudes que daban por sentado al organismo individual (…) los efectos fenotípicos de un gen son las herramientas con las que se catapulta a sí mismo hasta la siguiente generación (...) y las herramientas pueden alargar su brazo más allá de la pared individual del cuerpo. (Dawkins R, 2011, p. 306)

La existencia de distintos niveles en la regulación de la conducta justifica la complejidad de la motivación humana, para la cual no existe una teoría unificada (Grzib, 2007). Es evidente que tenemos necesidades fisiológicas de las que nacen impulsos, pero también es evidente que somos capaces de aplazar su satisfacción e incluso inhibirla para adaptarnos a las normas culturales que regulan la convivencia social. De modo que nuestro comportamiento está sometido a diversos niveles de decisión, cada uno de los cuales estaría al servicio de los intereses de unidades de agrupación progresivamente más complejas. Cada uno de estos niveles ofrecería, en una determinada situación, una respuesta orientada a la homeostasis-alostasis de su propia estructura y que podría entrar en conflicto con los intereses homeostáticos del resto de estructuras con las que se anida (Emerson A. E., 1956; Mead, 1934; Freud, Trad. 2016; Wilson, 1998).

MARCO TEÓRICO FILOSÓFICO: LUGARES COMUNES

Desde los avances en Neurociencia, Antonio Damasio (2006) ofrece un esquema de la organización del cerebro que explica en parte la complejidad de nuestra conducta. En primer lugar, nacemos preprogramados con reflejos básicos, respuestas inmunes y procesos de regulación metabólica orientados a mantener la homeostasis fisiológica del organismo. Las conductas elementales orientadas a la búsqueda del placer y evitación del dolor se orientan al mantenimiento de la homeostasis fisiológica de una forma más adaptada a las circunstancias concretas. Instintos y motivaciones se relacionarían con formas más complejas de conducta, lo mismo que emociones y sentimientos. En cualquier caso, Damasio concibe un árbol con estructura anidada en la que lo primero, sería la homeostasis en términos fisiológicos. Nosotros pensamos que la sociobiología aceptaría poner a los genes como raíces de este árbol.

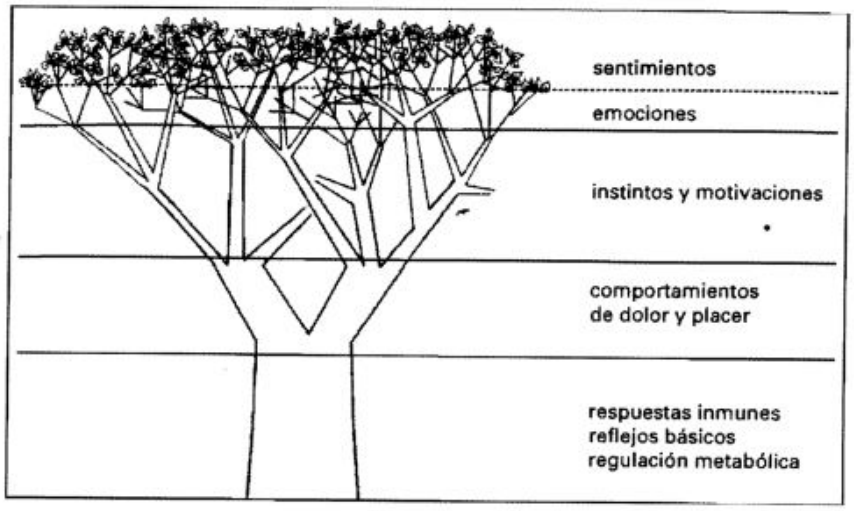


ILUSTRACIÓN 2 ANIDAMIENTO EN LOS NIVELES DEL YO. TOMADO DE DAMASIO, 2006, P. 48.

Parece razonable suponer que cada uno de los distintos niveles o estructuras anidadas que componen un organismo complejo disponen de todos los mecanismos necesarios para detectar y procesar aquellos aspectos de la información, recogida por los sentidos interoceptivos y exteroceptivos, que son relevantes para la satisfacción de sus propias necesidades de conservación y desarrollo. Hoy aceptamos que existen estructuras modulares en nuestro cerebro (Fodor, 1983) que se ocupan de funciones específicas. Siguiendo a Donald (1991), la neuropsicología ha demostrado este hecho a partir del estudio de dislexias, disgrafías y acalculias (Morton, 1984; Shallice, 1986, 1988). Así, hoy podemos afirmar que existen módulos y estructuras cerebrales que se ocupan de procesar la información a nivel social, lo cual se ve apoyado por condiciones como el autismo, en el que hay cierta incapacidad para percibir e interpretar determinados tipos de emociones (Sacks, 2001).

Dejando al margen cualquier intento de desvelar la estructura exacta del cerebro, hay motivos para suponer que distintos niveles de procesamiento de la información son capaces de proponer cursos de acción más o menos urgentes según su perspectiva, lo cual puede llegar a generar dilemas y conflictos que deben resolver las funciones ejecutivas. Damasio (2007) describe el famoso caso de Phineas P. Gage (1823 - 21 de mayo de 1861), quien sobrevivió a una barra de hierro que atravesó su cerebro causándole daños severos en el lóbulo frontal; después del accidente se convirtió en una persona irregular, irreverente, blasfema, sin la menor deferencia hacia sus compañeros, inmoral, grosero, sin capacidad de mantener planes de futuro y que arruinó su vida a base de malas decisiones. El caso de Phineas Gage ejemplifica cómo los conflictos son analizados por la corteza prefrontal, que inhibe los impulsos más básicos en favor de respuestas pretendidamente más adaptadas y que "permiten optimizar la resolución de esas situaciones complejas de una forma eficiente y armoniosa" (Ustárroz, Molina, Lario, & García, 2012, p. 117).

Desde la aproximación propuesta por Miller y Cohen (2001) el procesamiento de la información en el cerebro es competitivo y es necesaria la representación neuronal de metas y reglas en la corteza prefrontal para garantizar una respuesta adaptada (Cohen, Braver, & O'Reilly, 1996; Ustárroz et al., 2012). Tal capacidad de adaptación a las situaciones vitales, relacionada con la toma de decisiones en la corteza prefrontal permite resolver conflictos de intereses bio-sociopsicológicos considerando las consecuencias a medio, corto y largo plazo, lo cual es una

cuestión de interés para la Psicología del Aprendizaje, que afronta el problema estableciendo una analogía entre la conducta y la economía.

> En la teoría económica, el organismo elige entre dos posibilidades: por ejemplo, entre presionar la palanca y obtener comida, y no presionar la palanca y obtener tiempo libre (sin comida); o entre presionar la palanca y obtener comida y presionarla para obtener agua, pudiendo variar la cantidad de trabajo para obtener estos bienes (Grzib, 2007, p. 34-35).

Para comprender los motivos o intereses que justifican las decisiones en la corteza prefrontal deberíamos aspirar al rigor metodológico que la Psicología experimental ofrece en sus investigaciones. Sin embargo, los datos observables en un laboratorio parecen insuficientes para comprender la racionalidad de las decisiones conductuales con las que un organismo se define como ser humano (Eysenck & Miranda 1986). Por nuestra parte, consideramos los principios del análisis funcional (Haynes, 2002; Haynes & O'Brien, 1990) una estrategia adecuada para afrontar la complejidad de las decisiones que toma nuestra corteza prefrontal. Esta técnica se aplica habitualmente en los procesos de valoración y evaluación clínica para obtener una visión de las conductas integrada y holista, y es necesaria para que el terapeuta pueda afrontar problemas complejos, dado que "las relaciones funcionales pueden incluir variables cognitivas, conductuales, sociales, emocionales o fisiológicas" (Kaholokulaa, Godoy, O´Brien, Haynes, & Gavino, 2013, p. 120).

Una decisión inteligente debe mantener la homeostasis general de un sistema en desarrollo compuesto por múltiples y complejos niveles dinámicos que, al mismo tiempo que colaboran en el mantenimiento general de las funciones vitales, compiten por el control de la conducta (Emerson A. E., 1956). La biología no sólo tiene que ocuparse del nivel fisicoquímico o molecular, sino de los niveles superiores de organización viva también (Von Bertalanffy, 1968). Un organismo complejo requiere planificar, coordinar, ejecutar y evaluar múltiples acciones que son necesarias para satisfacer las necesidades de todos sus componentes, considerando los costes energéticos directos, los costes de oportunidades indirectos, los beneficios, las urgencias, etc., por lo que, como vemos en Harris (Trad. 2012) no siempre es evidente para el antropólogo ni la racionalidad ni la funcionalidad de las conductas.

Mantener la homeostasis en el individuo requiere tomar decisiones del mismo modo que en la construcción de un gran edificio en el que electricistas, fontaneros, carpinteros y albañiles subcontratados reclaman para sí, a voces, la atención del único gruista que distribuye materiales, mientras la jefa de obra, una arquitecta que hace las veces de las funciones ejecutivas, debe percibir las necesidades actuales, anticipar las necesidades futuras y tomar decisiones acerca de las prioridades de actuación con vistas a que se alcancen los objetivos sin que nadie se quede parado y se desperdicien o malgasten horas de trabajo. Y al mismo tiempo tiene que prestar atención al clima de trabajo, a las relaciones interpersonales y al estado de ánimo de sus empleados, consciente de que los conflictos emocionales y la implicación de los trabajadores también cuentan en la productividad (Bass, 1981, 1985).

Hoy aceptamos que existen niveles bio-sociopsicológicos en nuestra personalidad (Bermúdez, 2012), por lo que podríamos reducir convencionalmente a estas tres categorías, no discretas, los tipos de homeostasis que regulan la conducta de un organismo cuyas acciones satisfacen intereses que van más allá de las necesidades ligadas a su supervivencia individual (Emerson A., 1939). Y si convenimos tres niveles en la regulación en la conducta del ser humano normalmente integrados, pero que además de cooperar compiten para mantener su propia homeostasis, es tentador especular con la idea de que cada uno de estos niveles posea sus propios mecanismos de memoria y aprendizaje divididos en las grandes variantes que afirma Aguado-Aguilar (2001): conductual, de habilidades motoras, perceptivas y cognitivas y de adquisición de información.

La siguiente figura es solo un modelo especulativo de los distintos niveles de conciencia que podemos suponer en el ser humano. Es un simple resumen gráfico que pretende integrar de una forma holista y pedagógica para nuestros alumnos, tópicos que hemos percibido durante nuestros años de formación en Filosofía y Psicología sobre la naturaleza bio-psicosocial del ser humano. Aunque este modelo resultaría más convincente con el soporte de una teoría unificada sobre el aprendizaje y la memoria que aceptara la imitación y la autoconciencia de la propia identidad como constructos válidos, lo cual resulta todavía impensable, por más que las aproximaciones a la memoria reconozcan de un modo u otro el carácter social de muchos de sus productos (Baddley, 1994; Cermak & Craik, 2014; Edwars, 1994; Enebral Casares, 1994; González, F., 2015; Mendoza García, 2004; Puebla & González, 2015; Ruiz, 2004), y por más que exista un retorno del sujeto en las ciencias sociales, tal y como nos indicaba ya Giménez (1996).

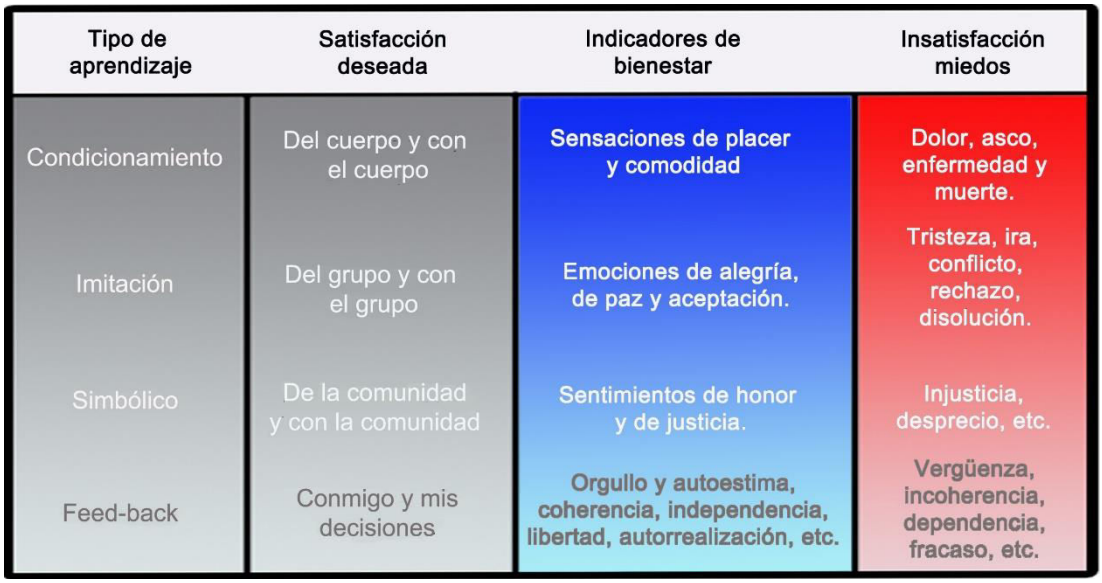


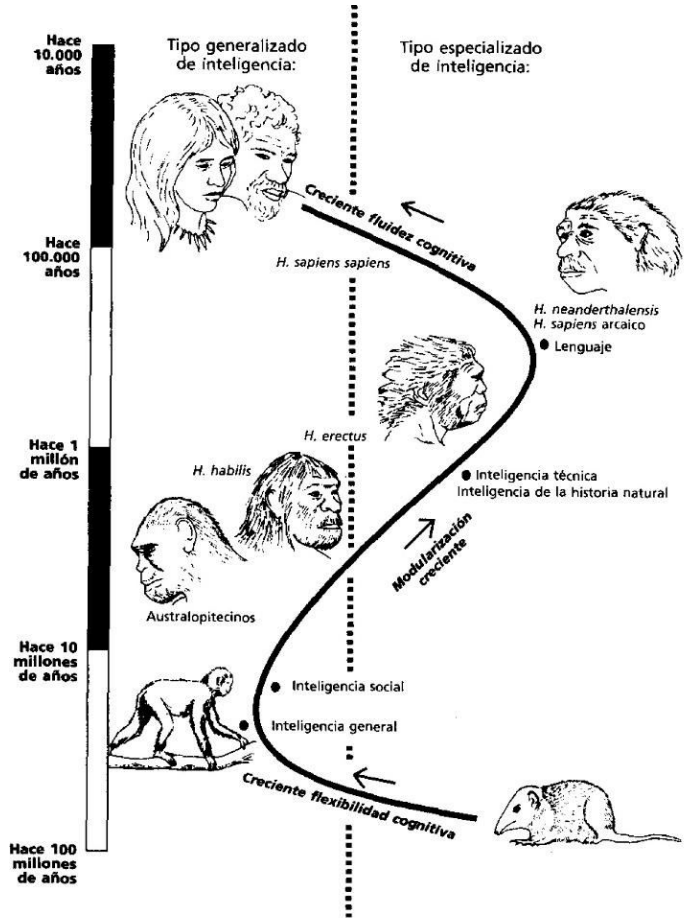
ILUSTRACIÓN 3. RESUMEN DE LOS NIVELES DE REGULACIÓN DE LA CONDUCTA

La intensidad del color azul y del color rojo tratan de expresar la fuerza o cualidad fenomenológica con la que normalmente se expresan en la conciencia las distintas motivaciones en el individuo. Así, por ejemplo, la sensación de dolor que nos advierte de que nuestro organismo está en peligro porque nos quemamos, será percibida por lo general como más física, intensa y urgente que la emoción de tristeza que nos invade al perder un amigo; la cual, a su vez, será percibida con más fuerza que el sentimiento de culpa que nos advierte de una amenaza a nuestra honorabilidad por haber dejado a deber un euro en la frutería, sentimiento que será percibido como algo menos físico que lo anterior.

El cuadro postula un último y polémico nivel "mental" en la regulación de la conducta relacionado con el desarrollo y mantenimiento de una identidad integradora de todos los niveles bio-psicosociales, la cual da sentido a las decisiones del individuo y su trayectoria vital. Por lo tanto, el auge de la reflexión actual sobre la identidad no puede disociarse de lo que se ha dado en llamar el "retorno del sujeto" en sociología y antropología por reacción contra los paradigmas deterministas que pretendían explicar la acción y la conciencia social por la determinación de causas sociales o psicológicas que operan *behind the back*. En este nivel se puede incluir la necesidad de trascendencia postulada en la pirámide de Maslow. También hay que recordar que cada uno de estos niveles emerge a partir del anterior, por lo cual no tiene ningún sentido considerarlos como categorías discretas y damos por supuesto que el peso de los motivos, valores u objetivos que perseguimos varían según la persona, su momento de desarrollo, las circunstancias, el lugar, la cultura, etc. Un punto de vista informado sobre el debate de lo trascendental y lo biológico se encuentra en Ruse, Pérez Sedeño y De Bustos (2007).

En todo caso, el modelo presentado es una versión de nuestras necesidades de homeostasis que no es en absoluto original ni exhaustiva, aunque sí pretende ser clarificadora. Se basa en la famosa Pirámide de las Necesidades de Maslow, el árbol de Damasio de nuestra organización cerebral previamente presentado, en teorías sobre el desarrollo del aprendizaje por imitación (Donald, 1991, 1993; Mithen & Aubet, 1998) y el concepto de desarrollo ontogénico sobre el que han trabajado autores tan diversos como Piaget y Vygotsky y puede mantener cierto paralelismo con la nueva *scala naturae* de los biosemióticos (Kull 2000a, 2000b) propuesta por Blanco Martín (2005, 2010) incluyendo niveles de microsemiosis a nivel celular, vegetativo, animal, lingüístico y cultural.

Cada nivel de aprendizaje alcanzado durante el desarrollo de la mente humana ofrecería a la conciencia integrada sus propios criterios de regulación conductual, los cuales estarían siempre orientados a la satisfacción, tanto de la búsqueda de su propia permanencia, como de la evitación de cualquier daño que impidiera el desarrollo de su ciclo vital. Eso implicaría que cada nivel de aprendizaje-memoria-decisión procesaría fenómenos materiales, sociales o mentales que se mostrarían en la conciencia como una realidad integrada, pues como afirman Edelman y Tononi (2005) "una propiedad de la experiencia consciente es que es integrada- una escena consciente no puede dividirse en componentes independientes" (p.180).



La evolución de la inteligencia humana.

ILUSTRACIÓN 4. EVOLUCIÓN INTELIGENCIA HUMANA. TOMADO DE MITHEN Y AUBET, 1998.

Si postulamos la existencia de las estructuras anidadas de Damasio (2007) en nuestro cerebro, podemos aceptar que en los niveles más primitivos y profundos lo primero es el individuo, mientras que en los niveles más externos de nuestras redes neuronales las estructuras están orientadas a salvaguardar entidades sociales. Cuando tratamos de comprender la conducta orientada a la supervivencia del individuo, deberíamos tomar al individuo como lo primero, pero cuando tratamos de comprender la conducta social, entonces la postura más adecuada parece tomar al grupo como referencia, siendo posible que mi conducta varíe en función de los intereses de una u otra entidad a lo largo de mi ciclo vital o incluso de las circunstancias.

Pero, aun aceptando que hay conductas orientadas a satisfacer los intereses del grupo, el problema de los límites del grupo parece difícil de resolver. ¿Dónde están los límites de mi pertenencia grupal? ¿Con quién o quiénes podemos mantener relaciones cooperativas? ¿En favor de los intereses de qué entidad supraindividual estoy dispuesto a sacrificar mi bienestar de forma voluntaria? ¿Qué perdidas me duelen? ¿Quién o quiénes son los otros para mí? ¿Dónde termina la empatía? No existen definiciones únicas, cerradas y no problemáticas aceptadas en Sociobiología, Sociología, Antropología, Psicología y Filosofía, acerca de lo que es un grupo, de modo que sea posible determinar con precisión los límites de conceptos tales como individuos, agregaciones, colonias, poblaciones, comunidades, grupos de referencia, grupo de pertenencia, grupos primarios, grupos secundarios, familia, tribu, sociedad, nación, estado...

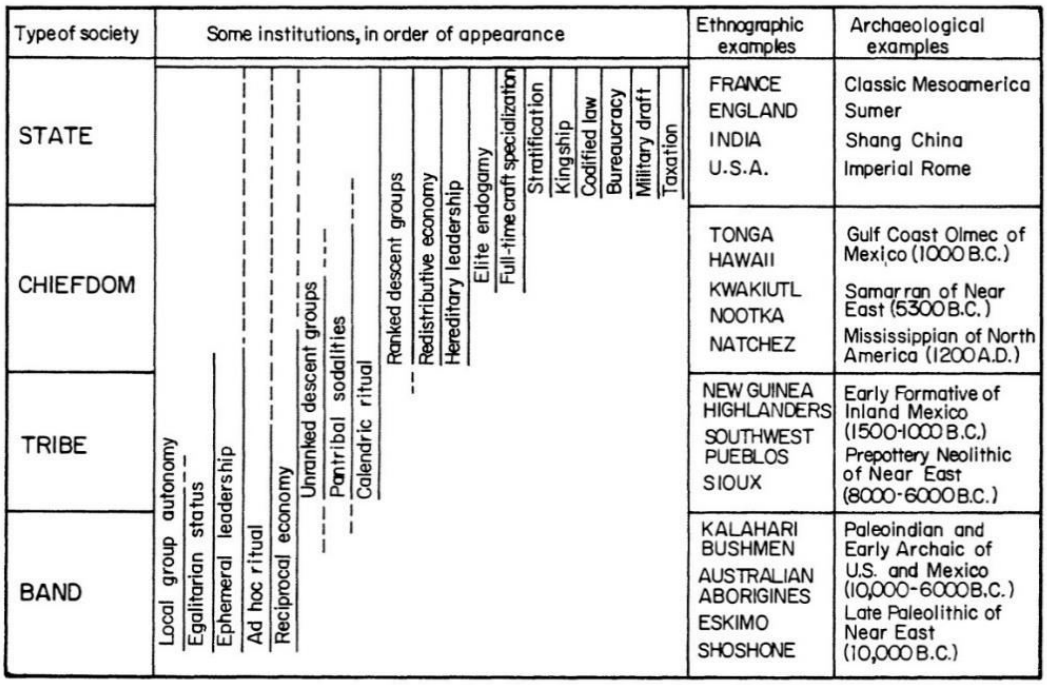


ILUSTRACIÓN 5. PRINCIPALES TIPOS DE SOCIEDAD. TOMADO DE WILSON, 1998, P. 296.

Recientemente, la frecuencia de asociación se cita como uno de los mecanismos en los que se basa el reconocimiento de parientes, junto a la distribución espacial, la semejanza fenotípica y el reconocimiento genético. (Morales, Moya, & e-libro, 2007, pág. 38) y, siguiendo a Huici et al (2011), hay un continuo en la grupalidad, la cual se relaciona con criterios como el tamaño, la interdependencia y el patrón temporal (McGrath, 1984).

En todo caso, parece que, como organismos, los humanos tendemos a organizarnos en grupos cada vez mayores y de mayor complejidad, aunque a medida que aumenta el tamaño del grupo nuestra identificación con él, y en consecuencia nuestra motivación para sacrificar nuestros intereses particulares en favor suyo, generalmente disminuyen. Así De Waal y Ferrer (1997) afirman que a medida que nos alejamos del núcleo del sí mismo nuestra capacidad para la empatía disminuye

ILUSTRACIÓN 6. PIRÁMIDE FLOTANTE. TOMADO DE DE WAAL Y FERRER 1997.

Por nuestra parte, y sin negar ni la complejidad ni la continuidad inherente a los grupos, consideramos que hay cierto consenso al establecer una división entre las relaciones definidas por el contacto cara y cara con aquellos con los que mantenemos lazos emocionales y aquellas otras relaciones que se establecen con extraños a los cuales no nos sentimos vinculados con ningún tipo de apego. Estos dos tipos de relación se sostendrían en dos formas de aprendizaje y comunicación que hoy diferenciamos bien en el ámbito de la Psicología: aprendizaje por imitación y comunicación no verbal frente a aprendizaje por comunicación simbólica. En el último caso, sea o no necesario el condicionamiento, es imprescindible la comunicación para establecer los cánones de la "racionalidad".

3.4.1 Relaciones de apego. El grupo, las emociones y la imitación

Los seres humanos, como realidad bio-sociopsicológica, deben integrar esquemas de acción que no se justifican únicamente por la búsqueda de la satisfacción de las necesidades básicas del organismo individual. Ya hemos visto que los seres humanos parecen motivados para trabajar en pro de los intereses de la familia y de aquellos con los que mantienen relaciones cara a cara y con los que seguramente comparten una mayor proximidad genética (Dawkins R., 2011). En estos grupos los individuos están ligados por vínculos emocionales o apegos cálidos, por más que las decisiones de los psicópatas se deriven de su falta de preocupación empática y prosocial (Moraga, 2015). En este nivel de intimidad y proximidad la moral parece un fenómeno universal y se justificaría fácilmente desde el emotivismo moral apelando a las emociones, tal como defendía Hume, una idea indirectamente apoyada por el experimento de Milgram (1974), en el que los sujetos debían proporcionar descargas eléctricas a otros seres humanos sin saber que todo era una farsa, experimento que confirmaba la relación inversamente proporcional que existe entre la disposición a la crueldad y la proximidad al semejante: a más proximidad al otro menos disposición a la crueldad, y a menos proximidad, más facilitación para la comisión de actos crueles (Laso, 2013). Nos dice Gazzaniga (Trad. 2006) refiriéndose al descubrimiento de las neuronas espejo (Rizzolati, Fogassi, & Gallese, 2001) que dio lugar a numerosas teorías y hallazgos sobre el papel de la mímica y la imitación en el intento de comprender los sentimientos de los demás y añade Gazzaniga que:

> Realmente simulamos sus estados mentales al activar nuestros propios sistemas cerebrales emocionales del mismo modo en que suponemos que están activados los suyos. A través de estos sentimientos que experimentamos, comprendemos los sentimientos de los demás; les leemos la mente y el lenguaje corporal. De hecho, para que funcione nuestro sistema social *debemos* leer la mente de los demás. (p.114)

Desde una perspectiva evolutiva y sistémica (Emery & Trist, 1965; Von Bertalanffy, 1968, 1972) podemos asumir conceptos como el de homeostasis familiar (Brofenbrenner, 1979; Jackson, 1957). La existencia de la emoción de tristeza ante la pérdida de un ser querido, el duelo, nos informa de una ruptura del equilibrio en la homeostasis del grupo, del mismo modo que una sensación de dolor nos informa de una ruptura en la homeostasis del organismo individual. E igualmente, los sentimientos de culpa nos previenen de la amenaza del rechazo social como una emoción de miedo nos avisa de que está en peligro nuestra integridad física. Recordemos que las emociones resultan del modo en el que valoramos las circunstancias y sirven a su vez como señales de las tendencias de acción, estando unidos en el ser humano los procesos de motivación y emoción (Grzib, 2007). Los mecanismos que nos permiten sentir, interpretar y comprender las emociones sociales, propias y ajenas, juegan un papel importante durante los procesos de socialización que tienen lugar en los grupos primarios. Siguiendo a Huici et al. (2011), sabemos que el concepto de grupo primario, de larga tradición, se debe originariamente a Cooley

(1909), quien caracterizó a estos grupos por la asociación cara a cara, la fusión de individualidades en un todo colectivo, la identificación con la vida y objetivos del grupo y fundamentalmente por el "sentimiento de nosotros" que implica la simpatía y la identificación , mientras que en oposición e a estos grupos encontramos ejemplos de grupos secundarios en corporaciones, la ciudad o la nación, siendo los grupos primarios los que determinan el yo social del individuo.

3.4.2 El aprendizaje social: De la mente episódica a la mimesis de *Erectus*

El aprendizaje social goza hoy de un vasto cuerpo de literatura que sigue creciendo rápidamente gracias al interés que despierta en una amplia variedad de disciplinas científicas. Este hecho genera que existan diversos marcos teóricos y enfoques metodológicos en la aproximación a dicho fenómeno (Caldwell & Whiten, 2002). Siguiendo a Grusec (1992) sabemos que la teoría del aprendizaje social comenzó como un intento de R. Sears y otros de fusionar la teoría del aprendizaje psicoanalítico y estímulo-respuesta en una explicación integral del comportamiento humano, recurriendo a la riqueza clínica de la primera y al rigor de la segunda. Nos dice Grusec que Bandura abandonó las características psicoanalíticas e impulsoras del enfoque, haciendo hincapié en las capacidades cognitivas y de procesamiento de la información que median el comportamiento social, de modo que ambas teorías fueron pensadas como un marco general para la comprensión del comportamiento humano, aunque sus aspectos de desarrollo aún no han sido resueltos en detalle. Sin embargo, Bandura ha proporcionado un sólido comienzo teórico: la teoría parece ser capaz de dar buena cuenta de los datos de desarrollo existentes, así como de guiar una nueva investigación. Como señalaba Schaal (1999), el descubrimiento de que algunas áreas en el cerebro de los primates están activas durante la percepción del movimiento y la ejecución proporcionó una hipotética base neural al aprendizaje por imitación, lo cual generaba una ruta prometedora para obtener nuevos conocimientos sobre los mecanismos del control motor perceptual que podrían conducir, a su vez, a la creación de robots humanoides autónomos. Además, señalaba Schaal que los enfoques computacionales para el aprendizaje de imitación pueden describirse desde la perspectiva de la inteligencia artificial tradicional, la robótica, y desde los modelos de redes neuronales e investigación de aprendizaje estadístico.

Antes de ser un denominador común en la etología, ya a finales de los sesenta del siglo pasado Gewirtz (1968) mencionaba múltiples aproximaciones a la imitación: Baer & Sherman, 1964; Bandura, 1962, 1965, 1969; Bandura & Walters, 1963; Brofenbrenner, 1960, 1979; Foss, 1965; Gewirtz, 1961; Hill, 1960; Holt, 1931; Humphrey, 1921; Kagan, 1958; Kohlberg, 1963; Lazowick, 1955; Maccoby, 1959; Miller & Dollard, 1941; Mowrer, 1950, 1960; Piaget, 1951; Sanford, 1955; Sears, 1957; Sears, Rau, & Alpert, 1965; Valentine, 1930; Whiting, 1960. El aprendizaje social por imitación no solo nos permite representar y manipular las relaciones entre los objetos (Byrne & Russon, 1998), también nos permite adquirir valores, principios y competencia en el desarrollo de los roles sociales que definen nuestros grupos; incluso cuando jugamos (Mead, 1934).

Kagan (1958) supuso que el niño se identifica con un modelo adulto a quien ve recompensado porque cree que al poseer las características del modelo y volverse similar al modelo, él también dominará los objetivos atractivos del modelo control, y aunque es evidente que el grado de similitud de nuestro comportamiento con el de nuestros modelos depende del éxito que percibimos en ellos (Weiss, 1977), es innegable que también influyen en los procesos de imitación las emociones de apego. Así, sabemos por Russon y Galdikas (1995) que los orangutanes prefieren modelos con los que mantiene relaciones afectivas positivas, como cuidadores importantes o hermanos mayores, aunque no podemos olvidar que se cuestiona la influencia del apego en estudios realizados en contextos profesionales (Gewirtz, 1968).

3.4.3 Nivel de identidad-motivación

Asumiendo las acusaciones de psicologismo (Palau, 2016) pensamos que la subjetividad es un componente de la proposición lógica que se expresa en la inexorable selección de una de las variables como centro de atención o figura del pensamiento. Así, resulta inevitable elegir cuál será el primer elemento de una igualdad matemática, cuál es el nodo desde el que se inicia la propagación de la activación de nuestras redes de expectativas o qué ejerce como sujeto de la sentencia o de nuestros diagramas. Es imposible inteligir o interpretar un mapa no situándonos en él y por lo mismo, es imposible desvelar la estructura profunda de ningún mapa sin comprender en primer lugar cómo nos situamos en él y en segundo lugar qué es lo que, exactamente, hace posible que cualquiera pueda situarse en él. Y en esta tarea, se hace necesario asumir como constructo un yo que codifica o interpreta las proposiciones

lógicas, aunque es obvio que la existencia de alguna entidad que pueda ser definida como conciencia individual, autoconciencia, identidad esencial, alma, mente o yo es otro de los problemas filosóficos complejos que no puede ser ni resuelto ni abordado de forma exhaustiva en el presente trabajo.

> La evolución de la capacidad de simular parece haber tenido su culminación en el conocimiento subjetivo (…) Quizá la conciencia surja cuando la simulación cerebral del mundo llega a ser tan compleja que debe incluir un modelo de sí misma. (Dawkins, 2011, p. 77)

Ese polémico nivel de autoconciencia se demuestra con la intuición "*cogito, ergo sum*", evidente o indudable para la tradición cartesiana. Sin embargo, para los más escépticos es imposible separar el pensamiento de sus contenidos. En esta línea, que llamaré escéptica, dice Martínez Liébana (1985) apelando a la *Crítica de la Razón Pura* "que no puede darse una conciencia subjetiva que no implique la necesaria referencia a la existencia de lo objetivo, de lo exterior" (p. 181).

Sea cual sea nuestra postura al respecto, el interés por la conciencia sigue siendo actual y es obvio que, al menos conceptualmente, se reconoce hoy como constructo de interés para diversas corrientes dentro de la Neurociencia, la Psicología cognitiva, los estudios sobre la *teoría de la mente* o las corrientes terapéuticas de tradición humanista.

Según Damasio (2011) es difícil determinar cuándo surge la conciencia, pero es considerada una propiedad del sistema nervioso muy relacionada con la actividad del tronco encefálico y la corteza cerebral, un proceso quizá mínimamente presente ya en los peces y los reptiles, pero del que no podemos dudar en los mamíferos, ni en una forma más compleja, en los primates, aunque nuestra conciencia ha aumentado la capacidad de la memoria, de la imaginación y de la creatividad, permitiéndonos usar el razonamiento lógico y el lenguaje. También se ha dicho que no nacemos con la conciencia formada, sino que un bebé tarda unos dos años en tener plena conciencia de sí mismo (Madridejos, 2010). Hoy son varios los neurocientíficos que consideran la conciencia un proceso gradual desarrollado a lo largo de la evolución que permite poner a disposición de todo el cerebro la información que se está procesando en áreas no directamente interconectadas (Edelman & Tononi, 2005; Gazzniga, 2006; Sperry, 1984; Zeki, 1992).

3.4.3.1 Teorías cognitivas y procesos mentales. Las intenciones

A pesar de la resistencia histórica por parte de las concepciones mecanicistas del mundo a cualquier intento de introducir la voluntad o las intenciones dentro del paradigma científico, la psicología cognitiva ha recuperado la mente como objeto de estudio, por ejemplo, en la denominada *teoría de la mente*. La *teoría de la mente* estudia el modo en el que somos capaces de anticipar las intenciones de los demás para reducir la incertidumbre de nuestro entorno social (Tirapu-Ustárroz, Pérez-Sayes, Erekatxo-Bilbao, & Pelegrín-Valero, 2007). También ha recuperado la psicología cognitiva el constructo de la direccionalidad de la conducta, aunque tratando de no hacer concesiones al animismo (Grzib, 2007; Tolman, 1932)

> Los científicos cognitivos, en general, no tienen nada que objetar a la idea de que la conducta está dirigida, incluso dirigida a metas. Si la direccionalidad está gobernada por los resultados de computar la utilidad de resultados alternativos, ésta resulta perfectamente admisible y, de hecho, constituye la pieza maestra de la "teoría de la elección racional". (Bruner, 2006, p. 28)

Vemos en Quirós (2008) que las teorías cognitivas de la motivación han incluido como objeto de estudio los procesos mentales internos, tales como planes metas y expectativas, que son capaces de instaurar nuevas conductas. Abraham Maslow, abanderó un nuevo paradigma (Berlyne, 1975; Maslow, 1987; Rogers, 1961) frente al conductismo y al psicoanálisis, "reinterpretando al ser humano como un ser activo, cognitivamente flexible y orientado al crecimiento personal" (Quirós, 2008, p. 87). Es decir, que la psicología cognitiva terminó por aceptar en su vocabulario términos como planes y metas, e incluso, algunas corrientes han llegado a proponer el concepto de homeostasis psicológica u homeostasis del pensamiento (Stanoulov, 1962) a partir de teorías como la del balance o de la disonancia cognitiva. Festinger (1957) alude a los trabajos de Heider (1946) cuando afirma:

> Otra serie de teorías cognitivas sobre la motivación, basándose en las concepciones homeostáticas, consideran que el desequilibrio entre los pensamientos, las creencias, las actitudes y las conductas, pueden generar estados de tensión (…) Esta auto-consistencia cognitiva de la que hablamos, queda formalizada inicialmente por Heider en su teoría del balance (…) De forma análoga a lo expuesto en la teoría del balance, la teoría de la disonancia cognitiva, propuesta por Leo

> Festinger, establece que debe haber una consistencia interna entre los pensamientos, las creencias, las actitudes y las conductas manifiestas. (Citado en Quirós, 2008, p. 124)

3.4.3.2 Corrientes humanistas y existenciales

Existe, al menos desde Sócrates, una larga y extensa tradición en filosofía y psicología, muy alejada del mecanicismo, que ha considerado a la persona humana libre y responsable de sus decisiones. Rojí & Saúl (2011) consideran que el conductismo había sido negligente con aspectos axiológicos y trascendentales, mientras que la psicología humanista considera a los seres humanos individuos activos, pensantes y responsables de su conducta, capaces de elaborar planes y de elegir entre diversas opciones comportamentales para las que las necesidades biológicas no son lo más significativo de su conducta y desarrollo. Algunos terapeutas consideran qua hay una tendencia innata en los individuos que les impulsa a desarrollarse como plenitud y madurez, desplegando al máximo sus potenciales creativos y afectivos (Bernstein & Nietzel, 2011). El hombre es consciente, tiene capacidad de elección y sus propósitos, sus experiencias, su creatividad y su reconocimiento de significaciones son de carácter intencional (Bugental, 1964). También en este sentido, la Teoría Experiencial propone un enfoque centrado en la persona (Rogers, 1951), que se desarrolla en términos procesuales, considerando al *self* como un sistema dinámico en continuo proceso de autoorganización, como flujo de las síntesis dialécticas de la información interna y externa y que "actualmente es considerado en términos narrativos tanto como narrador como narrativa experienciada" (Rojí & Saúl, 2011, p. 31).

Es destacable el hecho de que los principios propios del movimiento humanista y de las terapias existenciales han sido asumidos, al menos en lo esencial, por las llamadas *terapias de tercera generación* en psicología cognitiva, las cuales subrayan la necesidad de no tasar el éxito únicamente con la desaparición de los síntomas típicos del trastorno (criterios DSM), sino también considerar otras medidas más globales como el ajuste psicosocial, la calidad de vida o que el paciente recupere su capacidad para dirigirse hacia sus metas vitales y goce de una vida con sentido (Barracal Mairal, 2006; Pérez Álvarez, 2006).

Como vemos, la neurociencia, así como diversas corrientes de la psicología cognitiva, humanista y existencial han recuperado constructos como la identidad narrativa, las metas vitales, el sentido de la existencia o la realización personal, viejos clásicos en la historia del pensamiento relacionados con la responsabilidad personal (Boeri, 1997), y la necesidad de desarrollar al máximo las potencialidades para tener una vida buena. No era uno de los objetivos de este apartado reivindicar la deuda que las terapias de tercera generación mantienen con la filosofía, sino poner de manifiesto que los niveles bio-sociopsicológicos que propusimos como marco de una racionalidad compleja son un lugar común dentro las ciencias que se ocupan del ser humano. Como afirma Villegas Besora (2011), desde el enfoque fenomenológico existencial se afirma que el individuo construye su mundo de forma significativa proyectando en él tres ámbitos: el mundo de la naturaleza (*Umwelt*), el mundo social (*Mitwelt*) y el mundo propio (*Eigenwelt*).

3.5 De la comunicación no verbal al lenguaje oral

Podemos suponer que los primeros procesos de comunicación grupal han tenido que ver con la capacidad de imitación, la cual requiere de la presencia del modelo, lo mismo que ocurre durante los procesos de comunicación no verbal. Pero siguiendo a Donald (1991), será la progresiva desvinculación de pensamiento y ambiente lo que permitirá dar el primer gran paso de la cognición propiamente humana y que nos llevaría desde una "cultura episódica" que ligaba el pensamiento a las claves ambientales, a la "habilidad mimética" de *Homo Erectus*: un sistema supra modal unificado que permite usar todo el cuerpo como un dispositivo de comunicación con capacidad de traducir las percepciones de los eventos en acción. Es probablemente en *Homo Erectus* cuando todo el cuerpo se convierte en una fuente potencial de representación consciente. La habilidad mimética supone la metáfora perceptual, un "modelo de modelos" abstracto que permite detener, reproducir y editar cualquier acción voluntaria del cuerpo, bajo control consciente y es la habilidad mental humana más básica, aún hoy fundamentalmente independiente de nuestros modos de representación verdaderamente lingüísticos (Donald, 1993; Eckman, Sorenson & Friesen 1969; Eibl-Eibesfeldt, 1989; Argyle, 1988).

El lenguaje oral no sólo hizo posible el intercambio de información, sino afrontar las demandas progresivamente más complejas exigidas de los procesos de socialización durante la transición del Paleolítico al Neolítico (Redman, & Picazo, 1990; Donald, 1993). Nosotros partimos de considerar que el lenguaje opera como un segundo sistema

de señales que resulta de la generalización de las asociaciones captadas por un primer sistema de señales vinculado a la percepción, determinando "formas de reacción y respuesta ante el medio que son cualitativamente superiores en tanto que mecanismos de adaptación a un medio flexible y variable como el medio social humano" (Belinchón, Igoa, & Rivière, 2009, p. 41). En todo caso, y por formal que sea, el lenguaje empleado por lógicos y matemáticos, en cuanto lenguaje, no deja de ser un producto cultural, una "estructura abstracta que permite a los miembros de una sociedad comunicarse simbólicamente y que tiene una interpretación semántica" (Fernández Sedano & Basabe Barañano, 2007, p. 68), sin olvidar que este segundo sistema de señales surge de las necesidades del grupo y la capacidad de imitación.

Donald (1993) cita diversas teorías que relacionan la imitación con preadaptaciones del lenguaje (Corballis & Beale, 1976; Kimura, 1976). Expone Donald que Kimura observó que la apraxia oral y manual y la afasia a menudo resultan de las mismas lesiones del lado izquierdo y que de esto infirió en un primer momento que el lenguaje y el control de movimiento voluntario están vinculados posiblemente a un procesador común, pero, sin embargo, la evidencia neuropsicológica para vincular la pantomima y el lenguaje con el mismo procesador en serie del lado izquierdo se desvaneció temporalmente (Poizner, Klima, & Bellugi, 1987;Square-Storer, Roy, & Hogg, 1990). Será Corballis (1989) quién, siguiendo nuevamente este trabajo de Donald, sitúe en el hemisferio izquierdo un sustrato común para la generación de imágenes y la praxis, y más tarde para el lenguaje, que consistiría, *a groso modo*, en la capacidad de descomponer el mundo-objeto en unidades elementales posteriormente recombinables, una capacidad requerida tanto para la fonética como para la generación de imágenes (Kosslyn, 1988). Cita también Donald el trabajo de Greenfield (1991), quien abogaba por un mecanismo común del lado izquierdo para la praxis combinatoria y la fonología, en un nivel prelingüístico, y afirma Donald que la independencia de la mimesis se puede demostrar a partir de estudios neuropsicológicos en humanos modernos con lesión cerebral. Así, ciertos afásicos paroxísticos manifiestan una estrategia unificada y coherente para tratar con la realidad que tiene las propiedades de una estrategia puramente mimética. Sus cogniciones tienen un estilo que a menudo se denomina estrategia del "hemisferio derecho" y muestra un grado de unidad y una total independencia del lenguaje. También menciona Donald trabajos que describen pacientes que durante un ataque de afasia eran capaces de describir perfectamente los episodios de sus convulsiones mediante gestos (Lane, H., 1984; Lecours & Joanette, 1980).

Dado que excede las pretensiones de esta tesis precisar cuáles sean las relaciones neuronales entre la capacidad de imitación y el lenguaje, nos limitaremos a suponer que las habilidades miméticas de *Homo Erectus* sentaron las bases para la aparición progresiva del lenguaje oral. En este sentido, es un lugar común en las ciencias sociales afirmar que la obra de Darwin (1897) *Expression of the Emotions in Man and Animals* retomaba un viejo punto de vista sobre los orígenes del lenguaje presente en Demócrito, Protágoras y Epicuro, los cuales lo concebían como un producto socio-cultural forjado en el interior de un proceso evolutivo (Guzmán Brito, 1997). Como vemos en Guzmán Brito, Epicuro concebía el origen del lenguaje entre el naturalismo y el convencionalismo y sostenía que los hombres primitivos, al experimentar sentimientos o afecciones y representaciones particulares, según su etnia, su propia naturaleza y los lugares que habitaban, emitían el aire (la voz) de modo peculiar, bajo el impulso, de esos sentimientos y representaciones (Caro & Silva Irarrázaval, 2008). También dice Guzmán Brito que en el *Peri Hermenias* de Aristóteles, 16a3, las palabras no expresan directamente las cosas, sino las afecciones del alma de las cuales son símbolos del mismo modo que la escritura es símbolo de la voz. También Lucrecio, en el siglo I a.C. en su poema *De la naturaleza de las cosas* afirmaba en el libro V, 1085-1090, que "si las diferentes sensaciones al animal obligan, siendo mudo, a proferir sonidos diferentes, ¿cuánto más natural es que haya el hombre podido designar diversas cosas entonces con sonidos peculiares?" (Lucrecio, Trad. 2002) e igualmente en L.V. 1050-1060 dice:

> ¿Será, por fin, acaso maravilla que, teniendo los hombres voz y lengua, diesen distintos nombres a las cosas, según les afectasen, cuando oímos la variedad de voces y sonidos que hacen los animales y las fieras conforme se suceden en sus almas el miedo o el dolor o el regocijo? (Lucrecio, Trad. 2002)

Hoy sabemos que existen procesos de comunicación no verbal previos al lenguaje que interesan a los etólogos, antropólogos, sociólogos, psicólogos, lingüistas (Argyle, 1972, 1982,1988; Birdwhistell, 1979; Davis & Mourglier 2004; Duchenne & de Boulogne, 1990; Efrón, 1970; Ekman, P. 2004, 2007; Hall, E. 1989; Hinde, 1972; Knapp, 1982; Knapp & Hall, J. 2002; Knapp, Hall, J. & Horgan, 2014; Mehrabian, 2007; Morris, 1970, 2000; Morris & Ferrer, 2011; Ruesch, 1956), los cuales nos permiten, siguiendo a Argyle (1988), expresar y reconocer las emociones principalmente a través de la cara, el cuerpo y la voz; así como comunicar actitudes interpersonales para el establecimiento y mantenimiento de relaciones con el tono de voz, la mirada, el tacto, etc. El campo de

estudio de la comunicación no verbal puede incluir aspectos como los silencios durante la conversación, marcadores acentuales, proxémicos, químicos, visuales, etc., que aportan mucha más información que la transmitida por el lenguaje verbal (Poyatos, 1994).

En todo caso, para el objeto de nuestra tesis solo es preciso incidir en que la mente humana y el lenguaje no son diferentes de otras habilidades complejas como la ecolocalización y deben ser explicadas como el producto de un proceso evolutivo que está sometido a la selección natural, lo cual no es incompatible con afirmar que existe una especialización innata para la gramática (Barkow, H., Cosmides, & Tooby, 1992). La expresión involuntaria de las emociones y el uso de gestos han debido preceder y dar lugar al lenguaje en el seno de grupos que necesariamente mantenían relaciones cara a cara y vínculos emocionales (Mead, 1934). Si es así, los gestos intencionados precedieron a las primeras formas de lenguaje oral y permitirían el intercambio de información entre los miembros del grupo facilitando el desempeño de los distintos roles que cada uno tuviera asignados de forma natural o convencional.

En base a todo lo dicho, cualquier perspectiva de la lógica debería asumir que la función inicial del lenguaje es comunicativa, porque el lenguaje es ante todo un medio de comunicación social, un medio de expresión y comprensión mediado por procesos de generalización que no están restringidos ni a los fenómenos naturales ni a las entidades materiales. “Sólo cuando aprendemos a ver la unidad entre la comunicación y la generalización comenzamos a comprender la conexión real existente entre el desarrollo del pensamiento infantil y el desarrollo social del niño.” (Vygotski, Kozulin, & Abadía, 1995, pp. 7-8).

La generalización también puede referirse a la descontextualización, algo a lo que debemos referirnos para comprender la diferencia que estableceremos en nuestros diagramas entre las redes que procesan presencias y ausencias, a las que de hecho nos enfrentamos aquí y ahora, y las redes que recodifican dicha información de un modo teórico abstrayéndola de sus coordenadas espaciotemporales. Así, desde la Psicología del Lenguaje, Belinchón (2009) afirma que la función representacional del lenguaje permite el desplazamiento referencial o apertura situacional, es decir, que los signos lingüístico-verbales no están ligados a referentes inmediatamente presentes en el tiempo o en el espacio, pudiendo por tanto referirse a aspectos de la realidad presentes, pasados o futuros, reales o imaginarios, lo cual permite, a su vez, la narración de lo relevante a quienes no estaban presentes (Mendoza García, 2004).

Pero, además, frente al intelectualismo, debemos entender el lenguaje como un fenómeno social que en sus inicios ha debido mantener un carácter eminentemente práctico ligado también a las emociones. No hay lenguaje que en sus inicios no esté ligado a la intencionalidad, a las emociones, a los procesos sociales. Decir y hacer constituyen una unidad funcionalmente inseparable (Austin, 1975; Searle, 1969, 1976; Rosaldo, 1982), de modo que también se requiere una perspectiva pragmática para comprender el concepto de verdad en el lenguaje (Rorty, 1982).

Para Bruner (2006) el lenguaje se desarrolla siempre en un contexto cultural organizado de forma narrativa y no de forma lógica o categórica. La narración es la base de nuestra cultura, de nuestro lenguaje y de la estructura mental que soporta la identidad. Hay “unidad de los procesos afectivos e intelectuales” (Vygotski, Kozulin, y Abadía, 1995, p. 10) y afirma Ong (1987) que en los pueblos primitivos orales la lengua viene a ser un modo de acción y no sólo una herramienta del pensamiento. Existen hoy múltiples teorías sobre las relaciones entre lenguaje y emoción (Foolen, 2012) y teorías lingüísticas que han dado importancia a los aspectos emotivos del lenguaje (Bühler, 1990; Firth, 1957; Jakobson, 1960; Malinowski, 1923; Tomasello, 2008; Schnoebelen, 2012; Wilce, 2010; etc.).

3.5.1 La narración según Jerome Bruner

Los organismos no sociales aprenden por condicionamiento clásico, mientras que los organismos sociales además coordinan sus conductas e intercambian información del medio físico y social por medio de la imitación y diversas formas de comunicación no verbal. Estas formas de imitación preceden necesariamente a cualquier forma de comunicación simbólica y al lenguaje, el cual, siguiendo entre otros a Bruner (2006), mantiene una estructura narrativa. Para Bruner, una narración consta de una secuencia singular de sucesos, estados mentales, acontecimientos en los que participan seres humanos como personajes o actores y su significado viene dado por el lugar que ocupan en la configuración global de la secuencia: su trama o fábula. Nos dice Bruner en este trabajo

que tenemos una predisposición a organizar la experiencia de forma narrativa, mediante estructuras de tramas. Un concepto que está ya contenido en la noción aristotélica de *mímesis*, cuando afirmaba que el drama imita a la vida (Aristóteles, Trad. 1974). Encontramos en Bruner (2006) la siguiente cita que a nosotros nos parece que refleja perfectamente la estructura vital profunda del lenguaje:

> Una historia describe una secuencia de acciones y experiencias de un determinado número de personajes, ya sean reales o imaginarios. Estos personajes se representan en situaciones que cambian…[a] las que reaccionan. Estos cambios, a su vez, revelen aspectos ocultos de las situaciones y de los personajes, que dan lugar a una situación problemática que requiere nuevos pensamientos o acciones, o ambas cosas a la vez. La respuesta que se da a esta situación hace que concluya la historia. (Ricoeur, 1981, p. 277)

Bruner (2006) sostiene que en cualquier cultura aceptamos el Principio de Cooperación de Paul Grice (Grice, 1975), según el cual se proponen cuatro máximas para los intercambios conversacionales: cualidad, cantidad, relevancia y manera. Este principio, que deberíamos tener en cuenta al interpretar las proposiciones lógicas, nos obliga a ser breves, claros, relevantes y veraces. Además, dice Bruner, por este principio cooperativo damos por supuesto que la gente se comporta de manera adecuada respecto a la situación en la que se encuentra. Así, el aparato narrativo hace frente a la canonicidad y la excepcionalidad de las situaciones, de modo que si estamos en una oficina de correos nos comportamos en plan oficina de correos (Barker, R., 1968; Wicker, 1979).

Las historias mantienen un estatus moral y epistémico. La narración trata, casi desde las primeras palabras del niño, del tejido de la acción y la intencionalidad humana. Lo que no se estructura de forma narrativa se pierde en la memoria (Mandler, 1984), la cual altera o elimina las representaciones no canónicas del mundo (Bartlett & Bartlett, 1995), siendo la elaboración de marcos una actividad social (Shotter, 1990).

Podemos afirmar entonces, siguiendo a Bruner (2006), que las primeras formas de comunicación social empleando el lenguaje mantenían estructuras narrativas que permitirían el intercambio de información a los miembros del grupo dentro de lo que Ong (1987) llamaría "cultural orales" sin escritura o impresión, y para las cuales sería más importante la verosimilitud que la verdad lógica.

Cuando un profesor de Historia de la Filosofía explica hoy a sus alumnos el paso del *mythos* al *logos* (Bermejo Barrera, 2004; García Gual, 2004; Nestle & Homerus, 1975), es recurrente afirmar que en la mitología griega todos los fenómenos naturales estaban divinizados (Giannini, 2007) aunque a nosotros nos interesa hacer hincapié en otras características del mito comúnmente aceptadas: que es primeramente oral y etnocéntrico.

Tiene sentido que las primeras formas de cultura míticas sigan tradiciones orales. Y es obvio que solo puedo hablar con aquellos con los que mantengo relaciones cara a cara y que conocen mi lengua. De modo que las primeras narraciones mitológicas cumplían claras funciones de socialización a través de narraciones animistas emocionalmente significativas cuya veracidad se apoyaba fuertemente en la tradición. La conexión con la autoridad divina, la tradición, la autoridad, han sido consideradas recientemente malas razones para creer por parte de las mentes más críticas y exigentes (Dawkins R. , 2004). Sin embargo, también es legítimo recuperar todo lo valioso de aquellas viejas formas de transmisión cultural (Ong, 1987). Hoy creemos que el mito no es infantil ni irracional (Morgan, 2006), ni podemos prescindir del valor socializador de las emociones (Uche & Alonso, 2015).

Ese lenguaje cargado de emoción se ha relacionado desde Freud con la lógica del inconsciente, que entronca con el deseo y se rige por los principios de condensación y desplazamiento, lo que permite, según algunos autores, construir un lenguaje complejo no reductible a ninguna estructura gramatical (Visacovsky, 1999). En este sentido, encontramos en Bruner (2001) dos clases de argumentos: los que convencen de su verdad por semejanza con la vida o verosimilitud y aquellos que requieren de la verificación mediante una prueba formal y empírica. De los segundos, dice Bruner que se ha afirmado que son un perfeccionamiento o abstracción de los primeros.

Después de todo lo expuesto, podemos afirmar basándonos en los autores citados, que el desarrollo del lenguaje oral solo fue posible a partir de la adquisición de capacidades de *mimesis* dentro de grupos que mantenían relaciones cara a cara y vínculos emocionales. Las primeras narraciones orales, entonces igual que ahora, sirvieron de base a los procesos de socialización primarios, dotando a los individuos de identidades colectivas forjadas a través de ritos y tradiciones que regulaban las relaciones sociales, así como de normas que permitían autorregular el comportamiento en beneficio del grupo.

3.5.2 Escritura y relaciones impersonales. Dispositivos de memoria externa

La escritura es concebida como pensamiento en acción que hizo posible nuevas formas de pensamiento antes imposibles (Menary, 2007), de modo que supuso una revolución cognitiva, una modificación de nuestras formas de pensamiento (Cabrera, 2017; Cáceres, 2011; Donald, 1991).

> Podemos llamar a la escritura un "sistema secundario de modelado" que depende de un sistema primario anterior: la lengua hablada. La expresión oral es capaz de existir, y casi siempre ha existido, sin ninguna escritura en absoluto; empero, nunca ha habido una escritura sin oralidad. (Ong, 1987, p. 18)

Los modelos que intentan explicar hoy la producción de textos conciben la escritura como un proceso: que implica distintas actividades de pensamiento superior desde el inicio y hasta el final del mismo (Abarca, 2008; Angulo & Bravo, 2006; Marinkovich, 2002). Sin la escritura no sería posible una formalización del tipo que ahora llamamos "lógica", ni existiría el silogismo aristotélico tal y como hoy lo conocemos (Harris, 1989) y quizás no sería posible sin ella diferenciar un sistema de memoria teórico vinculado exclusivamente al ser de las cosas de un sistema fáctico que procesa la presencia-ausencia durante las acciones en curso, siguiendo una división que puede justificarse, al menos en parte, desde la división que hace hoy la neurociencia de una memoria episódica ligada a mi experiencia y una memoria semántica desligada de mi experiencia personal (Aguado-Aguilar, 2001).

Sabemos por los libros de Historia de la Filosofía, que el paso del *mythos* al *logos* estuvo ligado a la aparición de la escritura tanto como al intercambio cultural generado por el comercio en las colonias griegas (Nestle & Homerus, 1975). Havelock (1963) demostró cómo los inicios de la filosofía griega estuvieron relacionados con la estructuración del pensamiento originada por la escritura y aunque ya sabíamos que el lenguaje tiene un gran impacto sobre la naturaleza del hombre (Vygotsky, 1962) podemos afirmar que la difusión de la escritura, de la escritura alfabética, junto a la democratización de la palabra y del saber, jugó un papel importante en el desarrollo del pensamiento crítico que rechazaba el mito y la autoridad en Grecia (García Gual, 2004) y sabemos que estos procesos de superación del pensamiento mítico, etnocéntrico, son precursores, no sólo del individualismo (Jaeger, Xirau, & Roces, 1990), sino de una nueva forma de pensamiento que dominará la historia de la Filosofía y que se caracteriza, como afirma Martínez Liébana (1985), por ser estática y visual. De hecho, la escritura creó la peligrosa relación entre certeza, verdad y presencia "por escrito" de las ideas porque, dice Ong (1987): "propicia todas estas abstracciones que separan el saber del lugar donde los seres humanos luchan unos contra otros. Aparta al que sabe de lo sabido" (p.49).

> La actividad de la escritura debe definirse en términos de comunicación humana, la cual presupone a su vez la noción de significado y de sensaciones visuales, puesto que la escritura es una comunicación que opera mediante la percepción visual de inscripciones, y no mediante la percepción de sonidos y de gestos (Croft y Cruse, 2008, p.21. Citado en Cáceres, 2011).

Siguiendo a Donald (1991), la escritura se relaciona con la tercera transición importante en la memoria humana, la cual comienza a finales del Paleolítico superior gracias a la posesión de suficiente memoria explícita (Graf & Schacter, 1985) como para afrontar la costosa invención de los primeros símbolos visuales permanentes. Estos símbolos mejorarían el acceso voluntario a las representaciones de la memoria (Donald, 1993; Greenberg & Ruhlen, 1992).

No es un objetivo de esta tesis desentrañar las complejas relaciones entre pensamiento y lenguaje escrito, por lo que debería ser suficiente evidenciar que de hecho, dichas relaciones existen. Lo que nos interesa destacar ahora es que, del mismo modo que el lenguaje oral fue clave como herramienta socializadora de los individuos que formaban parte de grupos en los que predominaban las relaciones cara a cara, la escritura permitió la convivencia entre desconocidos, haciendo posible la subsistencia de ciudades, naciones y estados (Barraza Ibarra, 2011; Harris, 1989; Redman & Picazo, 1990).

Según Harris (1989), fueron las necesidades políticas las que invirtieron la actitud inicial de rechazo de los griegos hacia la escritura. Los primeros alfabetos eran fáciles de aprender y adaptables a casi todas las lenguas, y liberaran, como afirman Clayton y Cóndor (2015), al comerciante del poder del templo, real o militar. Por otra parte, desde muy temprano se hizo también evidente el potencial de manipulación ligado a los textos escritos (Svenbro, 1993), y de hecho, podemos pensar que creaciones culturales como el derecho romano sentaron las bases de la jurisprudencia y la soberanía de los Estados-Nación generando lazos de adoctrinamientos internos (Korstanje, 2010). Recordemos que, para Foucault (2001), la cohesión temporal bajo la autoridad del Estado requiere llevar la

guerra hacia fuera de las fronteras y que hoy somos conscientes de que los sistemas de comunicación no transmiten conocimientos neutros (Echeverría, 1995; Habermas & Hoyos, 1973). Sistemas más complejos de comunicación suponen herramientas más poderosas para educar y/o manipular.

Para bien o para mal, serán exigencias de las formas de organización política y la necesidad de desarrollar nuevas formas de regular la convivencia las que impulsarán el desarrollo de los textos impersonales. Sabine (2002) explica cómo con el ocaso de la Ciudad Estado griega y la llegada del imperio de Alejandro Magno, la ética individualista de cínicos y epicúreos se dirige a la búsqueda de la autarquía individual, lo cual suponía una clara renuncia al modelo que proponía la naturaleza social del hombre en Platón y Aristóteles. Así, Tarn (1927) afirma: "El hombre como animal político, fracción de la *polis* o ciudad estado autónoma, había acabado con Aristóteles; con Alejandro comienza el hombre como individuo" (p.79).

Así pues, a medida que las organizaciones políticas crecían se hacía necesario una forma de derecho capaz de regular las relaciones entre distintas culturas. Y ese derecho, como nos dice Sabine (2002), no podía estar basado en la diversidad de costumbres. Se hacía necesario crear leyes escritas que regularan la convivencia y el intercambio comercial de los pueblos. Y esas leyes escritas debían basarse en un concepto de razón con pretensiones de universalidad, lo cual descartaba las religiones particulares. No es casual que los estoicos, que veían en la lógica la descripción rigurosa de los patrones aceptables de razonamiento (Morado, 2008), fueran impulsores del iusnaturalismo (Guariglia, 2010; Hervada, 1979; Ayala Martínez, 2003; Latorre, 1985).

La escritura permitió el intercambio de información y la regulación de la convivencia entre individuos que eran inicialmente extraños los unos para los otros, sin relaciones cara a cara, sino unidos por vínculos impersonales de pertenencia a comunidades complejas. Por ello, siguiendo a Oloume (2015), podemos afirmar que el lenguaje jurídico y el lenguaje científico se expresan de forma impersonal y con sus propias marcas léxicas y gramaticales que tratan de distanciar, e incluso ocultar, al sujeto del discurso para conseguir apariencia de objetividad. Así se hace posible que para Aristóteles la ley sea la razón desprovista de pasión (Blanco, E. 2010) y que el texto científico establezca leyes universales. Y es este también el nivel en el que la moral requiere para trascender las emociones, todo ello con vistas a mantener el orden y la paz social dentro de los territorios unificados (Latorre, 1985; Radbruch, Delos, Le Fur, Breña, & Carlyle, 1975).

Venimos manteniendo a lo largo del trabajo que el ser humano tiene una naturaleza bio-sociopsicológica, y dentro de la naturaleza social hemos distinguido dos niveles. El primero estaba basado en las relaciones cara a cara y se caracterizaría porque dentro de ese nivel la conducta de los individuos se regula por emociones sociales en las que es importante la empatía. El segundo nivel social se refiere a los intereses de las comunidades que mantienen vínculos de relación impersonales, como naciones y estados que van más allá de las relaciones personales. En este nivel, que llamaremos de comunidad, la convivencia entre extraños y sociedades heterogéneas ha sido legitimada históricamente desde dos vías no siempre fácilmente diferenciables. La primera es la vía cálida, y opera apelando a emociones como la sociabilidad natural del ser humano o la fraternidad religiosa entre hombres que se consideran hijos de un mismo Dios (Ratzinger, 1971). La segunda es la vía fría de la razón, o razón de Estado, que, siguiendo a Sabine (2002), Platón concebía en *La República* como gobierno ideal, un gobierno en el que las decisiones serían tomadas por tecnócratas en vistas al bien común, dejando al margen los apetitos egoístas particulares o los intereses de casta de los ciudadanos En la misma línea, también explica Sabine en su *Historia de la teoría política* que Hegel mantuvo también que la libertad nada tiene que ver con el individualismo, sino que es una facultad o cualidad reflejada en el individuo por la facultad nacional de autodeterminación. El individuo y sus fines cuentan muy poco. El individuo es sólo una variante accidental de la cultura que lo ha creado. Sus deseos y satisfacciones caprichosas deben ser sacrificadas para la realización de los fines de las naciones. El valor de una persona depende de la labor que realiza y de su papel en el drama social.

Es una obviedad que en el debate histórico entre razón y fe intervinieron intereses políticos y económicos (Sabine 2002) pero no es objeto de este apartado afrontar la complejidad de las relaciones entre religión y las estructuras económicas, sociales y políticas que sí abordan trabajos como el de Weber y Gavilán (2014).

Lo que resulta evidente es que las religiones han estimulado y siguen estimulando, incluso en las sociedades laicas, un concepto de hermandad destinado a facilitar la gobernabilidad fomentando la sociabilidad entre los miembros de comunidades heterogéneas (Arbós & Giner, 1993; Giner, 1993). También Schwartz (2007) afirma que, aunque varios imperios recurrieron a la tolerancia religiosa para integrar poblaciones heterogéneas sometidas

a un gobernante absoluto, el imperio español y el portugués utilizaron la política de unidad e intolerancia religiosa. Tal vez por eso John Locke (Locke & Popple,1689) apelaba a la tolerancia religiosa y a la libertad de conciencia, haciendo manifiesto que la convivencia en las sociedades modernas debía sustentarse en algún principio que estuviera por encima de las creencias religiosas. Así, los sentimientos de deber y de justicia kantianos (Kant, Trad. 2000) serían el único fundamento posible del contrato social entre hombres civilizados que se han liberado de las cadenas de sus impulsos egoístas para legislar en vistas de lo que sería justo para cualquiera (Rousseau, Trad. 2003).

Este nivel en la regulación de la conducta individual, que se ajusta a un deber impersonal expresado en normas y leyes objetivas y universales que tienen la cualidad de estar escritas, aparece como constante de las modernas sociedades heterogéneas. El deber y las leyes que la razón autónoma se impone a sí misma, como afirmaba Kant (Trad.1980), o las leyes que resultan del consenso como diríamos hoy, permiten al individuo obrar con vistas al bien común, y se correspondería aproximadamente con el nivel postconvencional del desarrollo moral de Kohlberg, en el cual el individuo se mueve por los principios que deberían guiar a cualquier sociedad (Kohlberg, 1963; Rawls, 1972) y que sirven de base para el planteamiento de algunos dilemas morales (Lemmon, 1962). Es decir, que el imperativo categórico kantiano nos informa de una exigencia para la homeostasis de la convivencia entre extraños, una condición necesaria para la simbiosis de los grupos que sería deseable extrapolar a la convivencia entre naciones (Kant, Trad.1998). Actualmente, también Gazzaniga (Trad. 2006) explica la diferencia entre los dilemas morales que son planteados en un escenario personal e impersonal por Joshua Greene, neurofisiólogo de Princenton (Greene, 2017).

El nivel postconvencional en las decisiones morales que nos hace tener en cuenta a los extraños no es una conquista generalizada, e incluso es negado por autores como el propio Gazzaniga (Trad. 2006), que considera la acción altruista imposible sin el sustento de la empatía. Y si recordamos la pirámide de Damasio, a medida que nos alejamos del *self* nuestra disposición al altruismo decae.

Hemos visto hasta ahora que la conducta de un ser humano puede orientarse a la satisfacción de sus necesidades biológicas particulares, guiándose para ello de sus propias sensaciones en la búsqueda del placer y la evitación del dolor. Hemos visto que puede dirigir su conducta en función de los intereses de su grupo, mediante la imitación de modelos o a partir de tendencias vinculadas a emociones de carácter social como la empatía. Sabemos que pueden reducirse el esfuerzo y el tiempo necesarios para modificar la conducta de un ser humano a través de diversas formas de sugestión oral, entre la que se encuentra la hipnosis, la cual requiere siempre del establecimiento de una relación de confianza para que el paciente acceda a ser influido (Capafons, 1998a, 1998b; Lazarus, 1973) y finalmente, es obvio que resulta posible modificar la conducta a través del texto escrito, asimilando conocimientos e intereses de extraños como propias, como ocurre en los libros de autoayuda, que no dejan de ser un ejemplo de respuestas basadas en la ideología hegemónica y el sentido común de la época (Papalini, 2010).

El lenguaje oral y escrito han sido empleados como vehículos para la educación de los individuos y también como una poderosa herramienta para la manipulación y el engaño, posibilidades ambas en aumento a medida que las ciudades crecieron en el Neolítico para convertirse en ciudades, naciones y estados. Y una coincidencia tal vez no causal que ya hemos señalado en cierto modo: será con el aumento de la complejidad social y cultural de los grupos, cuando surja el concepto moderno de individuo que reivindica su libertad de conciencia ante una multiplicidad heterogénea de creencias. A dicha libertad de pensamiento vincularon la libertad en Grecia (Sabine 2002) y a dicha libertad, afirma Renaut (1993), apelaría el cristianismo en sus orígenes. Pero fuera para educar o manipular, lo que a nosotros nos interesa señalar es que la proposición pudo adquirir, gracias al lenguaje escrito, la forma impersonal que permite transmitir el conocimiento como algo independiente de la persona particular que lo adquirió en un espacio tiempo concreto, del mismo modo que permite expresar las leyes con una forma universal que las distancie de los intereses del legislador. Esa desvinculación de lo personal, de las emociones, de las vivencias, del espacio y del tiempo permite la aparición de un pensamiento capaz de crear generalizaciones conscientes que ponen el conocimiento y las normas de convivencia al alcance de todos. Luego una proposición condicional impersonal como las que maneja la lógica del tipo *Si A, entonces B*, tiene su origen en la necesidad de codificar una vivencia poniéndola al alcance de cualquier miembro de la comunidad con el que no se mantienen relaciones cara a cara. Por una parte, el código no puede materializarse ya en gestos o palabras, sino que es necesario utilizar movimientos que dejen huella. Por otra parte, hay que resaltar que lo que se dice es útil o se cumple más allá de mi tribu.

Nosotros no ligamos la lógica al lenguaje, sino a los principios del aprendizaje sin los que sería imposible afrontar las duras exigencias que la selección natural impone a la vida. Entendemos que tanto el lenguaje natural como el formal son solo formas de codificar información utilizando el movimiento para generar diferencias en la señal, signo o estímulo, que pueden vincularse con aspectos de la experiencia que fueron percibidos como distintos y que solo pueden conservar dicha distinción o identidad en la medida en que la señalización acote para ellos una parte del espacio que ocupa la representación del mundo en la mente del individuo o en la cultura del colectivo. Lo mismo podemos hacer utilizando diagramas, aunque asumiendo respecto al lenguaje natural y formal distintas relaciones de coste-beneficio relativas a la creación de la señal y la comunicación de matices.

Que cada cultura tiene su propio código lingüístico es evidente a cualquiera, pero no lo es que todos los códigos compartan una misma lógica universal *a priori* que sirve de base también al condicionamiento clásico. Nosotros nos posicionamos del lado del racionalismo porque pensamos que la forma externa de todo mensaje debe ajustarse a la estructura profunda y *a priori* de lógica para poder comunicar, siendo imposible consensuar ningún código sin compartir antes la capacidad misma de consensuar. Pero nos alejamos de cualquier intelectualismo que considere por separado los principios de la lógica y del aprendizaje, pues no es posible el desarrollo inteligente de la razón vital al margen de la experiencia.

3.6 Integración de la racionalidad teórica y práctica

Fuentes de diversas disciplinas ponen de manifiesto que la creciente complejidad de nuestras estructuras mentales se relaciona con nuestra pertenencia a grupos cada vez más complejos que han utilizado y utilizan la comunicación verbal y no verbal como herramientas fundamentales en los procesos de socialización. Si bien los primeros grupos de humanos modernos aprovecharon la capacidad de sugestión del lenguaje oral en las relaciones cara a cara utilizando narraciones míticas cargadas de emoción para comunicar valores y modelar las conductas, las grandes comunidades y estados que se han venido desarrollando desde el Neolítico utilizan el lenguaje escrito para persuadirnos de que las leyes que regulan nuestra vida entre desconocidos son justas e imparciales y del mismo modo, se utiliza la escritura enmascarando la subjetividad del discurso científico con marcas léxicas y gramaticales que asociamos con la objetividad. Nuestra pertenencia a naciones y estados aumenta la heterogeneidad de criterios con los que nos enfrentamos a la hora de tomar nuestras decisiones, multiplicando los conflictos que deben ser resueltos por las funciones ejecutivas en su permanente búsqueda de homeostasis biológica, social y psicológica.

Todos estos conceptos deberán ser integrados dentro de una visión holista de la inteligencia humana que dote de sentido a la complejidad de nuestra conducta y nuestras elecciones desde un modelo de racionalidad maduro, que no sea ni reduccionista, ni etnocentrista, ni logo centrista, para no precipitarse al afirmar que los seres humanos cometen falacias lógicas porque son esencialmente irracionales.

Afirman Horkheimer, Murena, y Vogelmann (2002) que la razón subjetiva tiene que ver esencialmente con la adecuación de medios a fines que son más o menos aceptados y que presuntamente sirven a los intereses del sujeto con miras a su autoconservación, ya se trate de la autoconservación del individuo solo o de la comunidad, de cuya perdurabilidad depende la del individuo. También la razón vital de Ortega es una razón al servicio de la vida compatible con el concepto de cognición encarnada (Ballard, Hayhoe, Pook, & Rao, 1997; Beer, 1995; Chiel & Beer, 1997; Churchland, Ramachandran, & Sjenowski, 1994; Clark, 1997, 1998; Wilson, 2002), una perspectiva desde la cual el conocimiento y la acción son inseparables, siendo la acción racional una acción elegida y llevada a cabo porque su agente cree que así puede lograr lo que desea (Abitbol & Botero, 2005).

Hoy no es difícil sostener que el conocimiento, la cognición, la inteligencia, la lógica o la razón están al servicio de la vida y sus decisiones y que las representaciones que construimos no son representaciones del mundo en sí, sino de nuestra interacción con el mundo. Por ello tampoco resulta original afirmar que una respuesta es adaptada si en las circunstancias concretas en que tiene lugar permite la satisfacción de una o varias necesidades de forma rentable, ni es original considerar que una conducta es inteligente cuando la información disponible permite suponer que es adaptada, por más que el discurrir de los acontecimientos pueda contradecirnos. De este modo hemos desligado razón e inteligencia del ámbito de las verdades absolutas para asociarlas, de un modo más modesto, al ámbito de las conductas razonables.

El modelo global de inteligencia que proponemos en la siguiente ilustración pretende resumir de forma didáctica el modo en el que suponemos que interaccionan los distintos componentes que evolutivamente se han ido

agregando a nuestros sistemas cognitivos. Se pretende clarificar y distinguir los sentidos en los que se habla hoy de racionalidad e inteligencia, de modo que podamos localizar y delimitar el tipo de inferencias que consideramos que representan y resuelven los diagramas y las redes de expectativas Marlo. El esquema, síntesis del marco teórico desarrollado a lo largo del capítulo, ofrece una concepción dinámica de la inteligencia al servicio de la vida cuyas funciones ejecutivas serían capaces de integrar los aspectos fríos o puramente teóricos del conocimiento, representados en azul, con los cálidos o afectivos (Cunningham & Zelazo, 2007; Rueda & Paz-Alonso, 2013; Zelazo & Müller, 2002), representados en naranja.

ILUSTRACIÓN 7. RELACIONES ENTRE LA INTELIGENCIA TEÓRICA Y PRÁCTICA.

Puede observarse en la imagen cómo progresivamente aumenta la complejidad en el procesamiento de la información orientada a las decisiones que debe tomar el cerebro, aunque se han omitido las relaciones entre las estructuras del Sistema Nervioso Central y del Sistema Nervioso Periférico Autónomo y Voluntario encargadas de preparar y ejecutar respuestas adaptadas a la interpretación de la situación. Recordemos una vez más que la adaptación se relaciona con la capacidad de los organismos de captar información a través de sus receptores y de procesarla eficazmente para generar respuestas adecuadas, ya sea por una vía rápida, paralela y automática, ya sea por una vía lenta asociada al pensamiento abstracto (Evans, 2003), siendo la vía lenta la que ha venido a ser identificada tradicionalmente con la lógica y la razón. Sin embargo, es posible otro punto de vista en el que la diferencia entre vía rápida y lenta, entre racional e irracional, entre superstición y ciencia, no dependa de la aplicación o no de los principios de la lógica, sino de la cantidad y la calidad de la información que es procesada aplicando dichos principios antes de generar una respuesta.

En la ilustración diferenciamos entre datos y señales con el objetivo de indicar que las señales pueden llegar a tener una carga de significado emocionalmente tan intensa como la que encontramos en los delirios más resistentes a la crítica racional (Ramos et al., 2011), y en el mismo sentido separamos los hechos “objetivos” de las vivencias más subjetivas.

4 DIAGRAMAS LÓGICOS

4.1 El retorno de la imagen

A lo largo de la historia de la filosofía se ha cuestionado el papel que los sentidos y la imaginación tendrían como fuentes válidas de conocimiento, habiendo sido considerada la imagen un medio imprescindible de los procesos cognitivos por filósofos de distintas tendencias. Así, dice Aristóteles en *Acerca del alma* VII, 131a15-20 que "el alma jamás intelige sin el concurso de una imagen" y añade en esa misma obra en VIII, 432ª, 5-10 que "careciendo de sensación, no sería posible ni aprender ni comprender" (Aristóteles, Trad.1983). Un escéptico como Francisco Sánchez, que afirma no saber realmente lo que es el conocimiento, se atreve a definirlo como " una comprensión, una visión penetrativa, una intelección, y cualquier otra cosa -si la hay- que signifique lo mismo" (Sánchez, Trad. 1984, p. 109) y Descartes mantiene que solo podemos deducir con certeza aquello que " podemos ver por intuición con claridad y evidencia", (Descartes, Trad. 1983b, p. 151). Sin olvidar a Kant, que negaba la posibilidad del conocimiento sin mediación de las intuiciones de la sensibilidad.

> Los objetos nos vienen, pues, dados mediante la sensibilidad y ella es la única que nos suministra intuiciones. Por medio del entendimiento, los objetos son, en cambio, pensados, y de él proceden los conceptos. Pero, en definitiva, todo pensar tiene que hacer referencia, directa o indirectamente (mediante ciertas características), a intuiciones y, por consiguiente (entre los humanos), a la sensibilidad, ya que ningún objeto se nos da de otra forma. (Kant. Trad. 1993, p. 66)

A pesar del valor concedido a la imagen como fuente del conocimiento no han faltado nunca detractores de su poder demostrativo, llegando a ser eliminadas de la lógica en particular y del conocimiento en general durante buena parte del siglo XX. Sin embargo, este valor de la imagen y de la argumentación visual ha sido recuperado en las últimas décadas (Santibáñez Yañez, 2017). Afirma García (2011) que en la primera mitad de los años noventa, Gottfried Boehm, antiguo discípulo de Gadamer, y W. J. Thomas Mitchell, catedrático de filología inglesa y de historia del arte de la universidad de Chicago, diagnosticaron simultáneamente un giro cultural hacia la imagen al que denominaron respectivamente «giro icónico» y «giro pictórico», que sentaba las bases de la *Bildwissenchaft* (ciencia de la imagen) en el contexto académico alemán y de los *visual studies* en el ámbito anglosajón, siendo el caso que nadie discutiría hoy la importancia de la imagen como medio de comunicación ni, en consecuencia, sus posibilidades como vehículo para la transmisión de conocimiento, la solución de problemas, hablándose incluso de "su importancia en el contexto del descubrimiento científico y de la creatividad en general" (Ahumada, 1999, p. 8)

A finales del siglo XIX, Venn (1881) afirmaba que aunque las letras son instrumentos adecuados para el cálculo y que solo ellas pueden ser llamadas propiamente símbolos, los diagramas pueden servir como demostraciones más breves y ya a principios del siglo XXI se reivindica no solo el valor teórico de la imagen, sino su potencial práctico y comercial.

DIAGRAMAS LÓGICOS

Hoy se afirma que el conocimiento puede codificarse en árboles de decisión, expresiones lógicas, conglomerados, clasificadores o redes neuronales con variables de entrada discretas y que las herramientas de visualización de datos y conocimiento son componentes de muchas herramientas de minería de datos comerciales y en software no comercial (Śnieżyński, Szymacha, & Michalski, 2005).

El desarrollo de procedimientos gráficos en las ciencias de la computación; el estudio de la visualización en la inteligencia artificial y las ciencias cognitivas, han llevado a tomar en serio las demostraciones diagramáticas (Legris, 2012), al menos desde los años 60 del pasado siglo (Bernhard, 2001). El rol de los diagramas ha crecido en el S. XX en redes sociales, comunicación digital y ciencias (Giardino, 2015). Como vemos, este renacimiento del interés en la visualización en las ciencias formales surge como consecuencia de desarrollos en áreas muy diferentes, incluyendo las ciencias computacionales, las matemáticas y su didáctica (Giardino, 2017; Mancosu, 2008; Mumma & Panza, 2012), la lingüística (Goodman, 1968)) la psicología cognitiva (Block, 1981, 1983; Dennett, 1981; Fodor, 1981) y la filosofía (Peláez, 2014). Por ello, algunos filósofos y científicos cognitivos siguen hoy con entusiasmo esta nueva dirección del razonamiento multimodal que involucra representaciones mentales no lingüísticas (Chandrasekaran, Glasgow, & Narayanan, 1995) que podrían, incluso, ayudarnos a comprender mejor la naturaleza estructural de la representación misma (Cummins, 1996). También Malinas (1991) ha explorado las relaciones entre los conceptos de representación pictórica y "verdad en" una imagen a través de la noción de semejanza desarrollando la "Tesis Central"[1] de la representación de Peacocke (Peacocke, 1987).

A pesar del valor generalmente reconocido hoy de las imágenes, han existido detractores de su uso mucho antes del actual debate acerca de la existencia o no de imágenes mentales y de sus estatus más allá de meros epifenómenos (Shin, Lemon, & Mumma, Diagrams, 2018). Por ejemplo, Ingleby, discípulo de Hamilton, afirmaba estar familiarizado con los diagramas que él llamaba esquemas, de Euler, Ploucquet, Lambert, Hamilton y Boole, y aunque consideraba los de Lambert los mejores, estaba convencido de la inutilidad de todos ellos y de la inconveniencia de que los estudiantes los emplearan (Ingleby, 1856). Venn (1881) menciona también que el Dr. Mansel criticaba los diagramas porque los consideraba en su totalidad un intento de visualizar aquellos conceptos que deberían ser únicamente accesibles al entendimiento.

La postura que mantiene que los diagramas carecen de un auténtico valor lógico demostrativo es denominada en Legris (2012) *logocentrismo*, porque supone que toda teoría de la deducción sea una teoría acerca de estructuras lingüísticas con aspectos sintácticos y semánticos. También en el ámbito de la psicología existe un debate entre los que defienden que la información se almacena en imágenes y los que defienden el formato exclusivo de los códigos proposicionales (Crespo, 2006). Por ejemplo, para Skinner hablar de representación suponía una vuelta al mentalismo y Gibson no veía necesaria la representación del medio en la mente, porque los organismos lo perciben directamente y sin someterlo a interpretación. Sin embargo, y a pesar de la oposición de corrientes influyentes como el conductismo a tener en cuenta las imágenes, estas han recuperado interés para los psicólogos (Shin et al., 2018). Millar (1997) afirma que las imágenes se convirtieron en algo respetable hacia la segunda mitad del siglo pasado, gracias a la evidencia de la especialización hemisférica y a los resultados en estudios sobre la memoria de dibujos y otros materiales no verbales. También han sido importantes los trabajos de Shepard y Kosslyn sobre rotaciones de imágenes (Kosslyn, 1980; Kosslyn, DiGirolamo, Thompson, & Alpert, 1998; Shepard & Metzler, 1971) y su postulado sobre la existencia de un almacén viso-espacial que es complementado por otro sistema de almacenamiento proposicional (Kosslyn, 1977, 1988).

Es obvio que los experimentos cognitivos avalan la existencia de una memoria visual distinta de una memoria verbal y que en el aspecto de recuerdo parece la primera superior a la segunda (Ahumada, 1999). Crespo (2006) señala que los estudios con resonancia magnética funcional muestran que es diferente la actividad cerebral con y sin tarea imaginativa y que existen relaciones entre la imagen perceptiva y la imagen mental generada con esfuerzo en ausencia del objeto físico, siendo la primera altamente flexible y con capacidad informativa limitada. La imagen ha vuelto a ser objeto de estudio científico y es importante hoy, afirma Crespo, porque el mundo representante, propio del pensamiento, dispone de propiedades sensoperceptivas análogas al mundo representado.

A pesar de los detractores de la imagen mental, existe desde hace décadas gran interés de la psicología por las relaciones entre la visualización y los mecanismos del razonamiento humano (Howell, 1976; Sober, 1976).

[1] "something is a Φ-depiction iff (i) it is intended successfully that for those seeing it in its intended viewing conditions it is F-related to the concept Φ, and (ii) it is not in those conditions R-related to that concep".

Algunos científicos cognitivos se han concentrado en las funciones que cumplen imágenes o diagramas en capacidades cognitivas como la memoria, la imaginación, la percepción, la navegación, la inferencia, la resolución de problemas, etc. (Shin et al., 2018). Lo visual puede convertirse en argumento y las imágenes pueden ser premisas incluso sin convertirse en proposiciones, simplemente en base a procesos cognitivos básicos considerados junto a la teoría semiótica (Santibáñez Yañez, 2017). Pero si formalizamos las premisas utilizando imágenes, los diagramas (considerados aquí como productos externos y no como imágenes mentales) no solo son herramientas pedagógicas, sino que pueden servir como pruebas matemáticas, formar sistemas lógicos y servir como modelos de los procesos básicos cognitivos implicados en el razonamiento (Allwein & Barwise, 1996; Johnson-Laird, 1983, 2002; Johnson-Laird & Byrne, 1991; Pietarinen, 2011).

Como señalan Shin et al. (2018) los investigadores de la inteligencia artifical, preocupados por el poder expresivo y heurístico de los sistemas de representación, llevan debatiendo durante décadas sobre diferentes formas de representación (Sloman, 1971, 1985,1995). Por lo tanto, han acogido con beneplácito las discusiones sobre el papel distintivo del razonamiento visual y, recientemente, se han organizado diversos simposios interdisciplinarios sobre razonamiento diagramático en conferencias de inteligencia artificial. También existe interés, por ejemplo, en averiguar cómo los agentes cognitivos interactúan con gráficos externos en tareas inferenciales ((Brandt & Stark, 1977; Shimojima A., 1995; Shimojima & Katagiri, 2008), en saber cómo se codifica la transformación de una imagen (Trafton & Trickett, 2001) y cómo el tipo de diagrama afecta a las estrategias y errores en la resolución del problema (Xing, Corter, & Zahner, 2016). Y este interés no es sólo teórico, sino que está generando resultados prácticos. Por ejemplo, Harel (1988) inventó *Higraphs*, un sistema de representación visual informático que ha tenido aplicaciones industriales (Booch, Rumbaugh, & Jacobson, 1999). Barker-Plummer y Bailin (1997) presentan también un estudio de caso sobre el desarrollo de computadoras que llevan a cabo razonamiento analógico similar al que utilizan los humanos al probar ciertos teoremas matemáticos. También el Grupo de Razonamiento Matemático de Alan Bundy ha mostrado cómo un sistema de prueba formal semiautomático puede realizar algunas de las inferencias perceptivas que los humanos encuentran naturales (Jamnik, 2001). Por ejemplo, que la suma de los primeros *n* números naturales impares es *n* al cuadrado, se ve fácilmente al descomponer una cuadrícula *n* x *n* en "*ells*" (Jamnik, Bundy, & Green, 1999).

Pero que la psicología y la inteligencia artificial acepten hoy el constructo de imagen mental y tengan interés por los diagramas lógicos no implica asumir su valor en el campo de las demostraciones racionales. Es cierto, por una parte, que hay autores para los que toda la lógica formal es esencialmente diagramática, tal y como demuestran diagramas como los *Grafos Existenciales* de Peirce, en los que la necesidad lógica se presenta a la mente humana de tal manera que pueda ser entendida y aprendida (Legg C., 2013), e incluso se desarrollan hoy *softwares* para razonar con diagramas (Howse, Molina, Shin, & Taylor, 2002). La investigación busca soporte computacional para el razonamiento visual, por lo que se discute la equivalencia informacional y computacional de los distintos sistemas de representación (Larkin & Simon, 1987), se busca la singularidad de la inferencia diagramática (Gurr, Lee, & Stenning, 1998; Stenning & Lemon, 2001) y se establecen marcos formales para generar lenguajes visuales correctos (Dejuan Wang & Lee, 1993). Buena parte de la investigación actual explora el uso de diagramas en pruebas automatizadas de teoremas (Barker-Plummer & Bailin, 1997; Jamnik, Bundy, & Green, 1999), aunque no todos sean igualmente claros, icónicos o perspicuos (Cheng, 2016; Visokolskis, 2008).” In fact we now see that all formal logic is essentially diagrammatic, although we have seen that the diagrams may be more or less perspicuous” (Legg, 2013, p. 36).

Sin duda, el problema de la relación entre iconicidad y conocimiento simbólico, entre inferencia lingüística y diagramática es complejo y supera los objetivos de esta tesis profundizar en él. No obstante, nosotros asumiremos que el lenguaje formal y los diagramas son dos formas adecuadas de representación que pueden igualmente ajustarse a leyes precisas de formación e interpretación (Hammer, 1994) y ello a pesar de que la teoría de los modelos mentales (Laird & Philip, 1995) sea hoy una referencia ineludible al afrontar el debate acerca de la naturaleza del razonamiento y de sus vínculos con proposiciones o imágenes.

4.2 Los modelos mentales: Razonar con proposiciones o con imágenes

Existen hoy dos enfoques principales sobre el pensamiento deductivo: las teorías basadas en reglas formales de inferencia, que postulan que la deducción es un proceso sintáctico y la teoría de los modelos mentales, la cual postula que el pensamiento deductivo es un proceso semántico similar a la búsqueda de contraejemplos.

> Para Johnson-Laird, en vez de una lógica mental, las personas usan modelos mentales para razonar. Los modelos mentales son como bloques de construcción cognitivos que pueden combinarse y recombinarse conforme sea necesario. Como cualesquiera otros modelos, representan el objeto o la situación en sí; su estructura capta la esencia (se parece analógicamente) de esta situación u objeto. El aspecto esencial del razonamiento a través de modelos mentales no está sólo en la construcción de modelos adecuados para representar distintos estados de cosas, sino también en la habilidad de probar cualesquiera conclusiones a las que se llegue usando tales modelos. (Moreira & Rodríguez Palmero, 1997, p.11)

Laird y Philip (1995) critican las teorías que postulan la existencia de reglas formales de inferencia inconscientes para derivar conclusiones a partir de las premisas. Así ocurre en el cálculo lógico basado en representaciones "proposicionales" formadas por cadenas de símbolos estructuradas sintácticamente en un lenguaje mental que genera cadenas de pasos deductivos que son consideradas las pruebas lógicas (Braine, Reiser, & Rumain, 1984; Osherson & Markman, 1974; Rips, 1983). En su lugar, Laird y Philip proponen en este trabajo como alternativa su teoría de los modelos mentales, la cual no rechaza las representaciones proposicionales, pero las trata como descripciones que permiten construir modelos mentales. El proceso de deducción, así como la inducción y la creación se llevan a cabo en dichos modelos en lugar de en las representaciones proposicionales (Johnson-Laird, 1995). Así, ve los modelos como la forma natural en la que la mente humana construye la realidad, concibe alternativas y busca las consecuencias de las suposiciones. Los modelos son, como propuso Craik (1967) el medio de pensamiento, un producto de la comprensión del discurso similar a los modelos relevantes generados al percibir o imaginar eventos (Jonhson-Laird, 1995).

Así pues, según Johnson-Laird (1983), los sujetos no parecen razonar acudiendo exclusivamente a reglas de inferencia puramente lógicas, sino construyendo representaciones mentales de las premisas en las que se recurre también a factores eminentemente textuales o semánticos. Los individuos sin entrenamiento lógico no tienen ninguna competencia en la aplicación de reglas formales, por lo que la dificultad de una inferencia deductiva depende de factores formales vinculados tanto a la dificultad de procesamiento y comprensión de las premisas como a los recursos de la memoria operativa que se ponen en marcha para decidir si la inferencia es válida buscando contraejemplos (Bara, Bucciarelli, & Johnson-Laird, 1995; Crespo, 2006).

Aunque excede el objetivo de esta tesis cuestionar la teoría de los modelos mentales de Laird resulta evidente que, si no existieran principios lógicos sería imposible, como mínimo, comprobar la validez o falsedad de los modelos que se generan al interpretar las conclusiones buscando contraejemplos (Hampson & Morris, 1996). De hecho, está por ver hasta qué punto los errores más comunes en la resolución de silogismos pueden explicarse a partir de la mayor complejidad que suponen las inferencias que implican considerar distintas ramas del espacio de posibilidades a la vez, tal y como ocurre en los silogismos por exclusión y en aquellos en los que una variable permanece como posibilidad en varias vías (por ejemplo, en los silogismos no necesarios). Los silogismos por exclusión se han mostrado sistemáticamente en el aula como más difíciles de resolver (Aznar, 2014) y lo mismo ocurre con las inferencias plausibles [2]. En todo caso, lo esencial para nosotros es el alto grado de consenso alcanzado en el aula con los alumnos en relación a los procesos que empleamos y el hecho de que su rendimiento en la resolución de silogismos, desde la formalización de premisas hasta la interpretación de conclusiones, mejore rápidamente con la instrucción. Todo ello significa para nosotros dos cosas: primero, que de algún modo, y al igual que ocurría con el esclavo del *Menón*, los alumnos conocen las reglas del razonamiento antes de estudiar lógica; segundo, que necesitan ser instruidos en el uso de la razón para corregir errores comunes y aprovechar el potencial de sus herramientas de pensamiento y comunicación.

La búsqueda de modelos alternativos que refuten las conclusiones, que es la clave de los procesos de inferencia según la teoría de los modelos mentales, es también la base de la ironía en el método socrático y, precisamente, lo que hacen mis alumnos cuando comprueban si quedan en las redes o en los márgenes de los diagramas posibilidades implícitas que no hayan sido eliminadas por las premisas y que deban ser tenidas en cuenta a la hora de limitar sus conclusiones. Y una vez que han aprendido a interpretar y distinguir las expresiones formales particulares de las universales, este proceso tiene lugar de forma encapsulada sobre las proposiciones simbólicas de la conclusión sin necesidad de revisar ningún tipo de imagen. La comprensión de la lógica de las posibilidades se facilita recurriendo a las imágenes, pero no del mismo modo en todos los alumnos, lo mismo que no es

[2] No obstante, tal vez la dificultad de las inferencias por exclusión pueda deberse a las herramientas concretas con las que mis alumnos solucionan los silogismos, pudiendo facilitarse con estrategias como la transformación de premisas antes de operar para reducir la inferencia a procesos de síntesis.

igualmente eficaz el uso de códigos de colores para todos ni el uso de números ni el uso de proposiciones formales, una premisa aceptada hoy en la investigación cognitiva (González, G., Castro Solano, & González, F. 2008).

Somos conscientes de que los alumnos no siempre generan conclusiones conformes a los principios de la lógica de proposiciones y de que en estos casos sus procesos cognitivos parecen ajustarse a las predicciones de la teoría de los modelos mentales.

> Tres etapas están implicadas en la resolución de una inferencia desde la perspectiva de los modelos mentales: interpretación de cada una de las premisas, integración y validación. Ante un silogismo, las personas suelen, en primer lugar, construir un modelo mental de cada una de las premisas. Algunos sujetos recurren a aplicación de sistemas semejantes a los diagramas de Euler-Venn. El problema es que el uso de estos formalismos se complica, especialmente, ante enunciados particulares o debido a la compleja combinatoria que presentan. De ahí que no siempre resulten útiles. A ello unido, los sujetos no suelen contemplar todas las posibilidades interpretativas que un enunciado categórico puede incluir. (Crespo, 2006, p. 397)

Y aunque incluso el proceso de razonamiento basado en modelos puede constituir una base cognitiva unificada para el razonamiento ordinario y científico (Figueroa, 2010), aún no podemos descartar que los razonamientos de nuestros alumnos se ajusten a una lógica natural de las posibilidades cuando disponen de dispositivos de memoria externos y códigos adecuados en los que apoyarse (Aznar, 2016c). La experiencia de los últimos cinco años en el aula utilizando métodos de razonamiento heterogéneo, que han multiplicado desde el primer momento el rendimiento lógico de nuestros alumnos (Aznar, 2014, 2015, 2020c, 2020d), nos persuade de que la misma estructura lógica subyace a las inferencias que se realizan sobre las redes de expectativas utilizando números, códigos de colores, lenguaje natural o proposiciones formales, siendo el uso combinado de estas estrategias el método que, aparentemente y a falta de estudios controlados, mejor resultado nos permite obtener. No obstante, la idea de que la multimodalidad favorece los procesos de inferencia no es en absoluto original, y ha guiado nuestra actividad docente desde que, hace ya más de veinte años, nos impactó la obra *La comprensión y la representación del espacio: Teoría y evidencia a partir de estudios con niños ciegos y videntes* (Millar, 1997) y su explicación del modo en que la información háptica y visual se integran para formar la representación del espacio.

En todo caso, hay que advertir sobre el valor de los modelos visuoespaciales con bases no lingüísticas porque, a pesar de la evidencia neurocientífica, "no existe aún una idea consensuada y suficientemente nítida acerca de su naturaleza y de sus funciones epistemológicas, tal que permita diferenciarlo claramente del razonamiento proposicional, que es aquel que ha sido considerado en forma standard como prototipo del razonar" (Ramírez Figueroa, 2010, p.9), siendo lo más posible que ambos tipos de razonamiento se encuentren interrelacionados de forma compleja (Menéndez & de la Puente, 2013).

Por otra parte, somos conscientes de que la afirmación de que subyace una misma lógica de las posibilidades a distintas formas de representación es contraria a la tesis de Barwise, que no veía necesario suponer tal "interlingua"

> People who accept the argument against a universal diagrammatic system, and so accept the idea of a heterogeneous reasoning system, often suppose that in order to have a rigorous heterogeneous system, there must be some system of conventions into which all the others can be embedded and compared, some sort of "interlingua" to mediate between the various systems of representations. But this is not correct. Whether it is useful to have an interlingua is debatable, but there is certainly no logical necessity to employ one. (Allwein & Barwise, 1996, p. 185)

Aunque renunciar a dicha tesis no nos impide estar de acuerdo plenamente con él en su afirmación de que el razonamiento consiste en extraer de la información explícita de las premisas las conclusiones que ya están contenidas en ellas implícitamente.

> We approach inference from an informational perspective. Wherever there is structure, there is information. But in order for agents (animals, people, or computers) to traffic in information, the information must in some way or other be presented to or represented by the agent. Typically, a given representation or family of representations will represent certain information explicitly, while other information will be implicit in the information explicitly represented. Inference, as we understand the term, is the task of extracting information implicit in some explicitly presented information. This informational perspective is part of the modern, semantic approach to logic associated with names like Gödel, Tarski, Robinson, and the like (…)What we need to do, and need to teach students of inference to do, is to use the most appropriate form of representation for the reasoning task at hand. As long as the purported proof really does clearly demonstrate that the information represented by the conclusion is implicit in the information represented by the premises, the purported proof is valid. (Allwein & Barwise, 1996, p. 180)

Siguiendo a Legris (2012) podemos afirmar que es posible desarrollar una teoría del razonamiento dentro del marco de la teoría de la información. Desde este paradigma se considera la extracción de información un rasgo característico de la deducción que es además independiente de la forma de representación (Barwise & Etchemendy, 1996).

Una vez admitido que lo relevante es la información y que la información es eliminación de posibilidades, consideramos que no es determinante el tipo de código que se utilice para almacenar y comunicar nuestras expectativas sobre estados de cosas. Por ello es posible hacer lógica con diagramas si su presentación como cálculo deductivo es matemáticamente impecable (Moretti, Orayen, & Digitalia, 2012). Consecuentemente rechazamos las tesis de quienes afirman la supremacía del razonamiento proposicional cuando herramientas como los *Grafos Existenciales* de Peirce se muestran equivalentes al cálculo de predicados de primer orden (Johnson-Laird., 1983) y tienen una notación más perspicua que la empleada en los *Principia* de Russell y Whitehead (Roberts, 1973). "Consequently, one legitimately wonders why modern logic turned out to be almost exclusively symbolic in the 20th century" (Moktefi & Shin, 2013, p. 11). En Peirce (1966) encontramos:

> I do not think I ever reflect in words: I employ visual diagrams, firstly because this way of thinking is my natural language of self-communion, and secondly, because I am convinced that it is the best system for the purpose. [MS 620, p. 8][3]

4.3 El razonamiento heterogéneo

Hoy ha resurgido el debate acerca de las formas más adecuadas de representar la inferencia y se discute la exclusividad de los códigos lingüísticos como formas válidas de representación lógica. Filósofos, psicólogos, lógicos, matemáticos y científicos de la computación han incrementado su interés por la importancia del razonamiento multimodal, con especial atención a los sistemas de representación diagramáticos no simbólicos (Moktefi & Shin, 2012; Shin et al., 2018). Así, hay autores que mantienen que también los diagramas y otras formas de codificar conocimiento pueden ser adecuados para contener razonamientos (Allwein & Barwise, 1996; Hurley & Novick, 2006)

Defender cabalmente la validez de las representaciones gráficas requería superar la crítica que se venía haciendo a los diagramas de no tener una interpretación única de su significado. Así, Shin (2002) sugería que los grafos de Peirce, uno de los más importantes sistemas diagramáticos construidos hasta la fecha, podían tener múltiples interpretaciones, mientras que las fórmulas de los lenguajes simbólicos ordinarios no las tienen. Sin embargo, como se muestra en el análisis de Pietarinen y Bellucci (2015) los grafos de Peirce no son diferentes de las notaciones simbólicas, a las que son lógicamente equivalentes en el suministro de múltiples lecturas o facilidad de cálculo. Si aceptamos esto, una demostración matemática puede ser lingüística "O puede ser heterogénea, es decir, expresarse conjugando componentes lingüísticos y componentes visuales" (Seoane, 2016, p. 34), sin que exista un esquema de representación universal en el que prevalezca uno de ellos.

> Just as many in logic and AI once argued (and still argue) that first-order logic is a universal representation language, others are now striving toward a universal non-linguistic representation scheme. We want to suggest that the search for any universal scheme of representation— linguistic, graphical, or diagrammatic—is a mistake. Efficient reasoning is, we believe, inescapably heterogeneous (or "hybrid") in nature. (Allwein & Barwise, 1996, p. 180)

Así pues, se afirma que el razonamiento puede ser diagramático o simbólico, visual o lingüístico, quedando abierta la discusión de si existe algún *logos* común o *interlingua* que permita traducir la información de un modo a otro Allen Barwise y Etchemendy no creen necesaria esta "interlingua", como demuestra, según ellos, *Hyperproof*, un programa de ordenador que se usa como libro de texto en cursos elementales de lógica combinando diagramas y sentencias, algo permitido en sus reglas de inferencia (Shin, 2004, p. 104). Nos dice Cañas (2012) que la pretensión de Barwise y Etchemendy era obtener reglas de inferencia aplicadas a la información, y no a la representación.

Nosotros suscribimos la idea de analizar el razonamiento desde la perspectiva de la comunicación de información, pero precisamente por ello encontramos ciertas diferencias entre las proposiciones expresadas de forma visual en nuestros diagramas y la notación formal que desarrollamos a partir de ellos para simplificar la representación. Según nuestra experiencia, los diagramas y el empleo de la visualización nos parecen más

[3] Con MS nos referiremos a *MS The Charles S. Peirce Papers,* de Peirce y Library (1966).

adecuados para que un alumno aprehenda o capte por sí mismo las relaciones lógicas entre variables que determina una proposición, pero los códigos lingüísticos nos parecen más adecuados para la comunicación de tales relaciones. Así, cuando Schopenhauer expone la diferencia entre quienes prefieren proposiciones lingüísticas abstractas antes que intuiciones basadas en imágenes, nos dice que la ventaja de las primeras empleando conceptos es su capacidad de ser transmitidas, una capacidad que no está presente en los diagramas.

> (...) algunos espíritus solo encuentran satisfacción total en lo conocido intuitivamente. Lo que ellos buscan es la razón y la consecuencia del ser en el espacio presentada intuitivamente: una demostración euclídea o una solución aritmética de problemas espaciales no les dice nada. Otros espíritus, en cambio, exigen conceptos abstractos, los únicos aptos para la aplicación y comunicación: ellos tienen paciencia y memoria para los principios abstractos, las fórmulas, las demostraciones en largas cadenas silogísticas y los cálculos, cuyos signos representan las abstracciones más complicadas. Estos buscan precisión: aquellos, carácter intuitivo. La diferencia es característica. El saber, el conocimiento abstracto, tiene su máximo valor en el carácter transmisible y en la posibilidad de ser conservado de forma fija: solo por eso posee una importancia tan inestimable para la práctica. Uno puede conocer intuitiva e inmediatamente por su simple entendimiento la conexión causal de los cambios y movimientos de los cuerpos naturales, y encontrar plena satisfacción en ello; pero ese conocimiento no es apto para comunicarse hasta que no lo haya fijado en conceptos. (Schopenhauer, Trad. 2009, pp. 49-50)

En nuestro aula, la información lógica es formalizada empleando códigos espaciales que guían el trazado del exoesqueleto de las redes de expectativas y de los diagramas de Marlo, pero también usamos códigos lingüísticos, numéricos y cromáticos que vinculamos a los grados de certeza o valores de verdad de las afirmaciones. En las redes de expectativas Marlo podemos expresar un elevado número de proposiciones verdaderas sobre el estado de un sistema Alfa, pero su construcción es costosa en términos de espacio y tiempo. Por su parte, el diagrama de Marlo selecciona una región de Alfa relevante y muestra con detalle las combinaciones necesarias, imposibles o todavía compatibles con las proposiciones enunciadas. Los diagramas de Marlo son construcciones más baratas que los diagramas de árbol que expresan el sistema Alfa, pero contienen más información implícita y su interpretación es más compleja, lo cual exige una dedicación mayor al adiestramiento en su manejo. Para los ojos expertos, un solo diagrama de Marlo contiene la misma información que una compleja red de árbol, pero es algo que debe ser aprendido con el uso. Finalmente, el lenguaje formal de las proposiciones simplifica el código, lo economiza, y con muy poco es capaz de decir mucho, aunque sea a costa de perder matices que sí son observados en los diagramas de árbol o de Marlo.

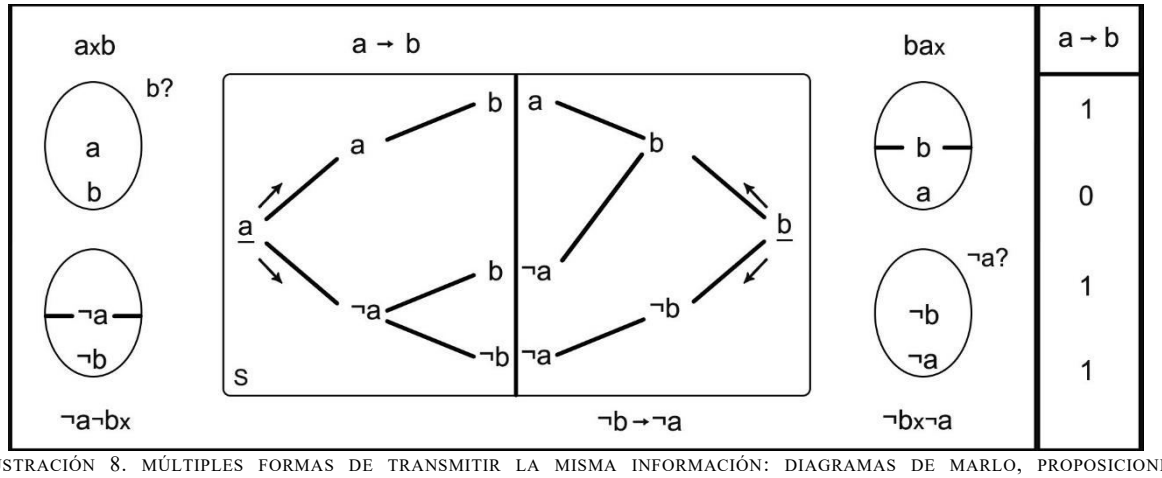


ILUSTRACIÓN 8. MÚLTIPLES FORMAS DE TRANSMITIR LA MISMA INFORMACIÓN: DIAGRAMAS DE MARLO, PROPOSICIONES CONDICIONALES CON NUESTRA PROPUESTA DE NOTACIÓN EMPLEANDO EL SUBÍNDICE X COMO GENERALIZADOR Y EN LA NOTACIÓN CLÁSICA USANDO EL CONDICIONAL. DIAGRAMAS DE ÁRBOL DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS CRITERIOS A Y B Y TABLAS DE VERDAD.

Como podemos apreciar en la figura anterior, la codificación de posibilidades puede ser costosa y detallada como en los diagramas de árbol o económica y sin matices como en las proposiciones formales, aunque solo en función de los objetivos que tengamos en mente podremos calificar un sistema u otro como más eficiente. Será a medida que nos familiaricemos con la información implícita cuando podamos reducir los códigos encapsulando mensajes, de modo que señales sencillas y baratas puedan actuar como claves de recuperación que permitan reconstruir el estado global de la situación. Nos referimos a los símbolos lógicos como claves de codificación-recuperación (Ruiz, 2004) que permiten desarrollar los diagramas al margen de la teoría del signo formulada por Charles S. Peirce, la cual incluía su conocida clasificación de los signos en índices, iconos y símbolos.

En resumen, imágenes o letras sirven como claves de codificación-recuperación de la información en dispositivos de memoria externa cuya interpretación debe ser consensuada, aunque únicamente podrá ser consensuada la interpretación de un código con vistas a darle un uso eficiente, si se elabora respetando la lógica de las posibilidades que es compartida *a priori* por la comunidad en la que será empleado para la transmisión de la información. Imágenes y proposiciones tienen la capacidad de transmitir información indicando qué vías seguir y cuáles eliminar a la hora de dirigir nuestro pensamiento o nuestra conducta cuando queremos llegar al lugar adecuado. La información contenida en una imagen puede ser condensada en una proposición, pero en todo caso, la interpretación de ambas pasa por su traducción a movimiento o, si se prefiere, por su capacidad para influir o guiar la toma de decisiones del organismo en el medio físico, social o psicológico, incluso cuando se resuelve un problema de lógica o de matemáticas mentalmente o sobre el papel. Malinowski (1970) afirmaba que: "el punto de vista funcional nos permite determinar el contenido práctico de un símbolo y probar que en la realidad cultural una palabra o cualquier otro acto simbólico cobra existencia solo a través del efecto que produce" (p.30).

Afirmar que los signos, las señales, las palabras o los componentes de un diagrama desatan, inhiben o coordinan algún tipo de movimiento puede parecer una afirmación radical, pero se comprende perfectamente al analizar el modo en el que los niños ciegos son capaces de aprender a dibujar mapas del espacio cuando relacionan los giros en el ambiente de su cuerpo con giros de sus manos sobre el papel.

> Resultó que el problema principal para estos niños fue que inicialmente no relacionaron sus movimientos cuando caminaron alrededor del cuadrado con los movimientos de las manos y los brazos. Así, los niños ciegos más pequeños no incluyeron los giros en sus mapas porque no relacionaron los movimientos manuales con la locomoción. Sabían que habían girado pero no sabían que podían representar tales movimientos corporales haciendo el mismo tipo de movimiento con sus manos y que podían marcar de este modo el papel. Un ejemplo fue una niña ciega de ocho años que dibujó una línea recta continua, como hicieron otros, pero dijo que había girado durante su recorrido. Le pedí simplemente que "mostrara eso en el papel". Esta información fue suficiente para que dibujara un cuadrado bastante razonable (aunque no perfecto) con juguetes señalando las esquinas. En otras palabras, la niña infirió cuando pedí que "mostrara el giro" que podía utilizar sus movimientos del dibujo para representar los movimientos corporales, incluidos los giros (Millar, 1997, p. 307).

A pesar de que para Susana Millar (1997) es un error de categoría comparar "imágenes", como fenómenos empíricos de los que informan los sujetos, con "proposiciones", que son constituyentes formales en un metalenguaje, creemos que es posible afirmar que las imágenes de un diagrama lógico, las proposiciones que formalizan el lenguaje natural o las tablas de verdad, transmiten la misma estructura proposicional, el mismo pensamiento que diría Frege, tal y como se muestra en la ilustración anterior, siendo un error privilegiar o identificar un código u otro con la proposición en sí, sobre todo si es a costa de renunciar al potencial de la imagen.

> De lo dicho resulta que todo concepto, justamente porque es una representación abstracta y no intuitiva, y por ello no completamente determinada, tiene lo que se denomina una extensión o esfera incluso en el caso de que solo exista un objeto real que corresponda a él. Mas siempre encontramos que la esfera de cada concepto tiene algo en común con las de otros, es decir, que en él se piensa en parte lo mismo que en aquellos otros y en estos a su vez se piensa en parte lo mismo que en el primero; si bien cuando se trata de conceptos realmente distintos, cada uno de ellos, o al menos uno de los dos, contiene algo que no tiene el otro: en esa relación se halla todo sujeto con su predicado. Conocer esa relación se llama juzgar. La representación de aquellas esferas mediante figuras espaciales es una feliz idea. El primero en tenerla fue Gottfried Ploucquet, que empleó cuadrados; Lambert, aunque con posterioridad a él, se sirvió de simples líneas que colocaba unas debajo de otras. Euler fue el primero en perfeccionarla con círculos. No sé indicar en qué se basa esa analogía tan exacta entre las relaciones de los conceptos y las de las figuras espaciales. Pero es una circunstancia favorable para la lógica que todas las relaciones de los conceptos puedan exponerse intuitivamente incluso según su posibilidad, es decir, a priori, por medio de tales figuras del siguiente modo (Schopenhauer, Trad. 2009, p. 42).

No obstante, y como hemos indicado ya, Schopenhauer (Trad. 2009) afirmaba que una de las ventajas de lo abstracto sobre la imagen es su carácter transmisible, del mismo modo que también Susana Millar (1997) mantiene que la ventaja de las palabras es que pueden ser pronunciadas. Y es obvio que si necesitamos escribir una gran cantidad de código el espacio físico ocupado es importante, ganando en este sentido ventaja la proposición formal sobre los diagramas. Sin embargo, la comprensión se facilita con la intuición, lo cual implica que la evidencia de la imagen puede aportar nuevos puntos de vista sobre los procesos implicados en la inferencia (Allwein & Barwise, 1996).

4.4 Aproximación al concepto de diagramas lógicos

> El diagrama lógico es una figura geométrica bidimensional que muestra relaciones espaciales isomórficas con la estructura de un enunciado lógico. Estas relaciones espaciales son usualmente de carácter topológico, lo cual no es sorprendente en vista del hecho de que las relaciones lógicas son las relaciones primitivas subyacentes en todo razonamiento deductivo, y de que las propiedades topológicas son, en cierto sentido, las propiedades más fundamentales de las estructuras espaciales. Los diagramas lógicos se hallan con respecto a las álgebras lógicas en la misma relación en que los gráficos de curvas se hallan con respecto a sus fórmulas algébricas; se trata simplemente de otros modos de simbolizar la misma estructura básica (Gardner, 1958, p.28. Traducción de Ferrater Mora, 1965, p.440).

Según Giardino (2015) los diagramas son algo más que imágenes, las cuales se limitan a describir el mundo en relación con algún punto de vista o perspectiva espacial, y no son más que imágenes por el hecho de que haya o no texto en el diagrama, sino porque los diagramas hacen uso de los elementos simbólicos de un modo distinto. Sin embargo, de acuerdo con Ferrero (2016), es difícil definir el concepto de diagrama por la polisemia en su uso y por la discusión que hay acerca de su estatus epistémico como artefacto cognitivo "producido por y productor de prácticas de pensamiento" (p.31). También Moktefi y Shin (2013) afirman que no siempre hay acuerdo acerca de lo que es un diagrama tal y como encontramos nosotros al revisar la bibliografía. Así, explica Giardino (2015) que los diagramas para Tversky (2011) se realizan no solo con tinta en papel, sino con gestos, señales de tráfico, botones, marcas de senderos, incluso con acciones corporales, sirviendo a una gama igualmente diversa de funciones cognitivas. Hegarty y Kozhevnikov (1999), por su parte, distinguen dos tipos de representaciones espaciales visuales: representaciones esquemáticas que codifican las relaciones espaciales descritas en un problema y representaciones pictóricas que codifican la apariencia visual de los objetos descritos en el problema. Dada la diversidad de perspectivas al entender qué son los diagramas en sentido amplio, nos centraremos en la definición de los diagramas lógicos, en la que es posible encontrar mayor consenso.

4.4.1 Diagramas lógicos y la estructura de las proposiciones

Aunque podemos encontrar definiciones complejas de los diagramas lógicos en el campo de la informática (Weik, 2000), nosotros concebimos un diagrama lógico como representaciones esquemáticas o imágenes externas que son construidas por un agente en un medio del mundo externo (Chandrasekaran, Glasgow, & Narayanan, 1995) sobre el papel, la pizarra, la pantalla del ordenador o cualquier otra superficie bidimensional, que permiten representar la estructura lógica que subyace a las proposiciones lógicas y sirve de base a la inferencia sin intervención de una sintaxis compleja (Stenning & Lemon, 2001), una característica que ya fue puesta de manifiesto por Schopenhauer (Trad. 2009) cuando señaló que los diagramas lógicos permiten expresar intuitivamente la analogía exacta que existe entre las relaciones de los conceptos y las de las figuras espaciales. Y esa parecía ser también la idea que Euler (1843) tenía de sus diagramas (Hammer & Shin, 1998).

Precisamente, la capacidad de expresar visualmente las relaciones que mantienen los conceptos se relaciona con el hecho de que, en la literatura especializada, los diagramas caigan bajo la categoría de iconos, siguiendo la clasificación semiótica de Peirce, ampliamente difundida, que distingue entre iconos, índices y símbolos. Y se argumenta que es así porque la idea que se tiene de un icono es, en general, la de un signo que se refiere a su objeto mediante una relación de similaridad (Legris, 2012). Esta noción de similaridad es la base de algunas de las definiciones clásicas que se han dado sobre los diagramas lógicos.

Macbeth (2009) sostiene que la habilidad perceptual que se requiere en el razonamiento diagramático permite captar relaciones que no estaban mencionadas explícitamente en las premisas, de modo que la demostración no está en las oraciones sino en lo que ellas nos permiten ver, tal y como ocurre en la *Begriffsschrift* de Frege. El diagrama puede representar mediante semejanza justamente por el hecho de que sus convenciones serían semejantes a relaciones u operaciones entre los objetos representados (Legris, 2012; Shultz, 2013).

> Bajo la idea de que hay una similaridad estructural entre el diagrama y aquello representado, se considera que la función del diagrama es exhibir, a través de su estructura (i.e., hacer ''visible'' a través de las relaciones entre las partes del diagrama) relaciones no advertidas o implícitas entre las partes de lo representado. En particular, el uso de diagramas en la representación del razonamiento deductivo nos permite percibir relaciones que no estaban mencionadas explícitamente en las premisas, y ello sería imposible si, en cambio, lo representamos mediante un lenguaje secuencial. (Valiño, 2013, p. 87).

En Legris (2012) encontramos que para Peirce un diagrama es un icono de un conjunto de objetos racionalmente relacionados y en una primera aproximación al concepto de diagrama lógico podemos afirmar que, en un sentido amplio, es una representación geométrica de relaciones entre entidades que pretende ser similar estructuralmente con aquello que representa (Allwein & Barwise, 1996). Mientras que los lenguajes secuenciales de la lógica simbólica y el lenguaje natural se centran en las relaciones de concatenación, la representación de los diagramas es directa e intuitiva, aunque no exenta de peligros (Shin et al., 2018).

> A Diagram is mainly an Icon, and an Icon of intelligible relations. It is true that what must be is not to be learned by simple inspection of anything. But when we talk of deductive reasoning being necessary, we do not mean, of course, that it is infallible. But precisely what we do mean is that the conclusion follows from the form of the relations set forth in the premiss (Peirce, 1906, p. 497)

Y en Peirce (1933) encontramos:

> A diagram composed of dots, lines, etc., in which logical relations are signified by such spatial relations that the necessary consequences of these logical relations are at the same time signified, or can, at least, be made evident by transforming the diagram in certain ways which conventional 'rules' permit [CP 4.347][4]

Estas relaciones son espaciales y tienen un carácter topológico (Legris, 2012). Es decir, que un diagrama es un conjunto de objetos en el plano que denotan objetos en una situación, estructura, cuyas mutuas relaciones espaciales y gráficas denotan relaciones en aquella estructura (Lemon & Pratt, 1977). Las relaciones espaciales que se dan entre los objetos de un diagrama pueden emplearse para mostrar las relaciones entre objetos de cualquier dominio (Russell, 1923), lo cual no siempre supone una ventaja, tal y como veremos al discutir los límites de los diagramas basados en el concepto de pertenencia o inclusión.

4.4.2 El diagrama se ajusta a normas e interpretaciones consensuadas

Aunque afirmemos que los diagramas muestran relaciones lógicas de forma intuitiva, lo cierto es que, por simples que nos parezcan, es necesario aprender a interpretarlos en todos los casos (De Toffoli & Giardino, 2014). Como afirmaba Bruner (2006) desde S. Peirce "reconocemos que el significado depende no sólo de un signo y de su referente, sino también de un interpretante: una representación mediadora del mundo en función de la cual se establece la relación entre signo y referente" (p.83). Esta necesidad de interpretación convencionalmente establecida es asumida por cualquier teoría de la comunicación. Así, Fiske (Trad. 1985) nos recordaba que la convención es la dimensión social de los signos y que es necesario el acuerdo entre los usuarios sobre los usos y las respuestas apropiadas, porque signos sin dimensión convencional son puramente privados y no comunican, aunque se trate de fotografías o esculturas en cera de tamaño natural. En el caso de los diagramas lógicos, que poseen un carácter normativo, es necesario aprender las reglas para su uso que garantizan la consistencia lógica en la interpretación de sus representaciones (Legg, 2013), aunque nosotros pensamos que las normas que permiten interpretar un diagrama no son consistentes por ser aprendidas, sino que pueden ser aprendidas por ser consistentes.

> Así, un diagrama, siendo un signo particular, expresa la regla contenida en el concepto, y por ende expresa una conexión universal. Esta conexión esencial del diagrama con el concepto, define una propiedad más de los diagramas que me interesa resaltar, su aspecto esencialmente normativo. Está más allá del alcance de cualquier diagramatización representar símbolos inconsistentes: la regla conceptual representada por el símbolo, el cual a su vez constituye la regla para la construcción de sus instancias diagramáticas constituye una demanda necesaria y universal de la mente. Así, por ejemplo, el símbolo gramaticalmente correcto "cuadrado redondo", que implica una regla para conectar las dos cualidades icónicas "cuadrado" y "redondo", se revela como inconsistente en tanto intentamos construir un diagrama para expresar las propiedades en una y la misma figura. En otras palabras, el diagrama, en la medida en que es posible, en el sentido de que es consistente, expresa la norma contenida en el concepto (Peláez, 2014, p. 163).

4.4.3 Los diagramas lógicos poseen rigor y validez lógica

Para muchos de nosotros resulta obvio que procesos como pensar, razonar o hablar están íntimamente relacionados con el proceso de construir lo que vemos y de hecho, pocas personas habrían puesto nunca en duda la utilidad de las imágenes como ayuda en los procesos de aprendizaje ligados al pensamiento abstracto (Hurley & Novick, 2006; Laird & Philip, 1995; McAllister & Brock, 1990; Valiño, 2013), sobre todo cuando son varias las

[4] Con CP nos referiremos a los *Collected papers of Charles Sanders Peirce* en Peirce, Hartshorne, Weiss (1933).

investigaciones que han demostrado que las actividades que promueven la construcción de las imágenes pueden mejorar el aprendizaje de las matemáticas (Mumma & Panza, 2012) e incrementar las herramientas lógicas de los estudiantes (Lozano, 2015; Baron, 1969; San Ginés, 2011).

No obstante, resulta interesante advertir que la vieja disputa entorno al valor epistemológico de las imágenes sigue teniendo eco en la investigación de la didáctica más adecuada para las materias abstractas. Así, según las investigaciones en el campo de la resolución de problemas de Krutetskii (1976) a las que se refiere Meavilla (2005) los alumnos se pueden clasificar en tres grandes grupos a la hora de aprender y hacer Matemáticas: El "visual o geométrico", compuesto por alumnos con una marcada inclinación hacia los aspectos visuales de las Matemáticas y que, consecuentemente, hacen uso del razonamiento visual; el "no visual o analítico", formado por estudiantes que no tienen necesidad de recurrir a ningún tipo de soporte visual para trabajar con esquemas abstractos y el grupo "intermedio o armónico", formado por alumnos que hacen un uso equilibrado del razonamiento visual y analítico.

Tal vez eran pensadores no visuales o analíticos los críticos que, según Gardner (1958), afirmaban que los diagramas lógicos solo fueron en sus inicios una herramienta auxiliar para estudiantes lentos y tal vez forman parte del grupo de los visuales o geométricos los que mantienen que son instrumentos utilizados por reformadores didácticos desde los inicios de la lógica moderna (Lemanski, 2016). Lo que no se discute es que muchos matemáticos y filósofos han propuesto sus sistemas diagramáticos con una motivación didáctica, como Lewis Carroll en *The Game of Logic* (1896) y es generalmente admitido que son dispositivos pedagógicos extremadamente valiosos, "porque cuando son buenos permiten visualizar pictóricamente un razonamiento facilitando la comprensión de cuestiones que se hubieran comprendido con más dificultad en forma verbal o algebraica" (Gardner, 1958, p. 29)[5].

> The diagrams and circles aid the understanding by making it easy to visualize the elements of a given argument. They have considerable mnemonic value, an aspect of his Art that appealed strongly to Lull's Renaissance admirers. They have rhetorical value, not only arousing interest by their picturesque, cabalistic character, but also aiding in the demonstration of proofs and the teaching of doctrines (Gardner, 1958, p. 17).

El valor de los diagramas ha fluctuado en base a la importancia concedida a la intuición en las demostraciones formales (Greaves, 2002). De hecho, para la concepción lingüística del razonamiento que ha sido denominada por Legris (2012) *logocentrismo* o por Seoane (2016) *dogma logocéntrico*, las representaciones como diagramas, figuras, etc., cumplen únicamente un papel auxiliar y tienen una finalidad heurística o pedagógica. Y para ilustrarlo, ofrece Legris (2012) un pasaje de Neil Tennant, frecuentemente citado como ejemplo de la posición que minusvalora los diagramas y que es responsable, como señala Casas Cañas (2012), de que durante varias décadas del siglo XX que llegaron hasta los años ochenta, los diagramas lógicos pasaran a un segundo plano:

> [El diagrama] es tan sólo una heurística para sugerir determinadas cadenas de inferencia (...), es prescindible como recurso de la teoría de la demostración; más aún no tiene un lugar propio en la demostración como tal. Pues la demostración es un objeto sintáctico que consiste únicamente en enunciados organizados en un conjunto finito e inspeccionable (Tennant, 1986, p. 304).

Pero aunque durante años se impusieron las representaciones lingüísticas convencionales algebraicas o verbales por considerarse engañosas las intuiciones geométricas (Mancosu & Jorgensen, 2005) es posible seguir la pista a una tradición que se remonta, como mínimo, a los comienzos de la lógica moderna con Peirce, Venn y aún más atrás con Euler, que ha buscado en las representaciones gráficas patrones de inferencia deductiva (Alemany, 1998). Pensemos, por ejemplo, que se ha comprobado que los *Grafos Existenciales* son equivalentes a la lógica de predicados (Peirce, 1933; Roberts, 1973; Zeman, 1964). Y actualmente, tras numerosos esfuerzos para tratar mecánicamente las relaciones lógicas y evaluar la validez de los argumentos o para calcular las combinaciones de las posibles relaciones de términos o conceptos (Anellis & Abeles, 2016), los diagramas lógicos reclaman su capacidad para convertirse en herramientas capaces de realizar demostraciones con rigor y precisión, libres de la ambigüedad de la que han sido tradicionalmente acusados (Allwein & Barwise, 1996; Shin, 1995; Nakatsu, 2009; Shin, Lemon, & Mumma, 2018)

Los diagramas lógicos no son meros dibujos que sirven como una ayuda al razonamiento, sino instrumentos que llevan a cabo el razonamiento lógico de forma independiente. Para no pocos autores, los diagramas pueden ser tan

[5] Todas las citaciones de Gardner (1958) han sido traducidas por el autor.

lógicos como la lógica simbólica, aunque la complejidad de usar reglas de inferencia en una lógica simbólica sea reemplazada ahora por el problema de dibujar correctamente los diagramas (Grigni, Papadias, & Papadimitriou, 1995; Lemon & Pratt, 1977). Y aunque la lógica matemática presupone una concepción lingüística de la lógica, el razonamiento diagramático es, antes que nada, un método de deducción (Legris, 2012). Incluso, en los últimos años, han surgido diversas lecturas que señalan que la *Begriffsschrift* de Frege debe ser concebida como un sistema diagramático, en oposición a la concepción tradicional que la considera un sistema semiótico, aunque fundamentalmente lingüístico (Valiño, 2013).

Los defensores de la representación visual como componente de la trama inferencial y del uso de figuras como pruebas matemáticas rebaten las críticas sobre la falta de rigor de los diagramas lógicos apelando al sistema formal que construyó N. Miller (2007) a partir de pruebas euclidianas y a los trabajos de autores como Barwise y Etchemendy (1991a, 1991b, 1996), que demuestran las propiedades metalógicas de los diagramas de Venn, Euler y Peirce. Dice Legris (2012) en este sentido, que si se acepta que existen deducciones sustantivamente diagramáticas, entonces debe desarrollarse una teoría lógica que considere a los diagramas como una representación admisible de inferencias deductivas al mismo nivel que las representaciones lingüísticas. Para Legris (2012), Peirce proporciona un marco conceptual útil y apropiado, según el cual la deducción consiste en la construcción de un icono o diagrama, cuyas relaciones son análogas a las existentes en el "objeto del razonamiento. De esta forma es posible generar sistemas diagramáticos que pueden presentarse a la manera de un cálculo formal, introduciendo en los diagramas reglas sintácticas y semánticas que determinen cuándo un símbolo complejo es aceptado como diagrama, es decir, está "bien formado" y qué transformaciones pueden tener lugar dentro de los diagramas o entre diagramas. Por tanto, afirma Javier Legris que es posible establecer una relación de consecuencia lógica en los sistemas diagramáticos aplicando reglas semánticas.

También Alemany (1998), hace más de dos décadas, reivindicaba el valor y el rigor del razonamiento visual.

> Por razonamiento visual entiendo cualquier actividad mental, neuronal o mecánica capaz de generar información disciplinadamente a partir de cuerpos de información visual, de acuerdo a patrones o reglas a los que haya asociados criterios lógicos, computacionales o heurísticos de validez (...) el estudio de sistemas formales capaces de codificar sistemáticamente inferencias visuales surge de modo natural al reconocer que las capacidades inferenciales humanas no se reducen al procesamiento de información codificada lingüísticamente de modo convencional y al reconocer al mismo tiempo que tales inferencias visuales son canonizables o que es posible encontrar algún tipo de disciplina lógica en ellas. Programas de investigación en curso en inteligencia artificial muestran cómo algunas de tales estrategias son reproducibles mediante rutinas o procedimientos automáticos sin necesidad de transcribir lingüísticamente la información visual. Además de haberse desarrollado modelos computacionales para la simulación simbólica de imaginería mental basados en la codificación digital de imágenes, existen modelos, arquitecturas, diseños y programas basados en la visualización "directa" de algoritmos. La llamada "lógica visual" surge de necesidades prácticas en inteligencia artificial y debido acaso a su inmadurez, ha sido escasa y poco rigurosa la atención prestada a los fundamentos conceptuales de la propia relación de consecuencia lógica que se pretende capturar. La dificultad es la siguiente: está profundamente arraigada la convicción de que razonar es una actividad lingüística o que al menos supone la manipulación de información lingüísticamente codificada. (p. 283)

La representación diagramática, siendo rigurosa y consistente, permite demostrar e incluso descubrir (Knoespel, 2001) y no debería haberse separado nunca del concepto de relevancia lógica (Dejnožka, 2010), siendo posible encontrar una perspectiva histórica que valida los diagramas como una forma más de razonamiento (Moktefi & Shin, 2013). De hecho, ya en torno a 1820 los diagramas lógicos eran valorados en las conferencias de Arthur Schopenhauer sobre lógica, especialmente en teoría de la prueba (Lemanski, 2016). Podemos afirmar que es posible generar sistemas diagramáticos sólidos y con poder expresivo (Sowa, 1984). Y como vemos en Alemany (1998), es posible generar plásticamente secuencias sintácticamente regladas de expresiones bien formadas y procesar deductivamente con total rigor y criterios de validez la información así codificada, al menos por lo que se refiere al proceso puramente formal de ejecución de reglas sintácticas de inferencia. Son posibles una semántica y una sintaxis precisas para los diagramas que respondan a los cánones estándar de rigor para lenguajes formales y que optimicen la efectividad del medio gráfico, tal y como muestran las propuestas por Shin y Hammer (1998), en las que existe una elaboración para cada lenguaje diagramático, una teoría de pruebas y un cálculo deductivo que estipula reglas de inferencia para manipular sintácticamente cada tipo de diagramas. También es posible, prosigue Alemany, dar una definición clásica de relaciones de consecuencia lógica en aplicación de la semántica modelista adecuada para cada lenguaje diagramático y ofrecer una demostración de resultados metalógicos de corrección, consistencia, completud y decidibilidad. Por eso, la citada obra de Sun-Joo Shin y Eric Hammer (1998)

nos ofrece la primera definición completa y rigurosa de sistemas formales de lógica diagramática, aunque no son los únicos que han mostrado la consistencia de las representaciones diagramáticas (Barwise & Shimojima, 1995).

4.4.4 Ilación o eliminación

En un sistema dicotómico puedo afirmar que partiendo de *B* llegaremos hasta *A* de dos modos: diciendo que es necesario *A* o afirmando que es imposible ¬*A*. Por ello es fácil observar en las redes de expectativas cómo las proposiciones que codifican nuestro conocimiento informan al mismo tiempo señalando y/o descartando posibilidades correctas e incorrectas, necesarias e imposibles, permitiendo que la inferencia tenga lugar, indistintamente, por la vía de la identidad y la vía de la no contradicción.

Como ya sabemos, hay distintos sentidos psicológicos, ontológicos y lógicos de la identidad que se pueden rastrear desde Parménides. En todo caso y dado que es obvio que supera los objetivos de esta tesis dilucidar qué sea la identidad en ninguno de sus sentidos, nosotros nos limitaremos a señalar que parece evidente que alguna clase de síntesis o percepción de la identidad es lo que nos permite concluir que *si A es B y B es C,* entonces *A es C.* Pues inferimos en este caso gracias a la percepción de la conexión o ilación de los extremos del argumento A y C que se establece a través del término medio *B*, siendo el caso que *B* debe ser considerado el mismo que se liga con A y con *C* para poder servir como engarce de la cadena ABC. Es decir, que es imposible tal engarce o ilación sin presuponer la identidad de *B* en ambas proposiciones. En su *Ensayo sobre el entendimiento humano,* IV. XVII, 2, afirma Locke:

> En qué consiste razonar: (...) auxilia a todas nuestras facultades y contiene a dos de ellas, es decir, a la sagacidad y la ilación. Mediante la primera, encuentran las que están fuera, y a través de la otra ordenan las ideas intermedias de manera que puedan descubrir qué conexiones existen en cada eslabón de la cadena que une los dos extremos, y así presenta a la vista la verdad pretendida, que es lo que llamamos ilación o inferencia, que no consiste en otra cosa que en la percepción de la conexión que hay entre las ideas en cada paso de la deducción. (Locke, Trad. 1980)

Sin el principio de identidad que permite la ilación, tampoco sería posible concebir el principio *dictum de omni et nullo*, definido como "una proposición cuya verdad se hace patente con sólo entender los términos de que consta, pues no cabe concebir sin contradicción su falsedad" (Oriol & Gambra, 2015, p. 186). Explican Oriol y Gambra que este es el principio en el que se basa toda la silogística categórica, pues, según Aristóteles, un predicado se dice de todos cuando en el sujeto no cabe hallar ninguna parte de la que no se diga el predicado, y un predicado no se dice de ninguno si no cabe hallar parte alguna del sujeto de la que se diga el predicado. En otras palabras: lo que se dice o se niega de un sujeto universalmente, se dice o se niega de cuanto está contenido bajo él. De esta manera "El razonamiento o silogismo consiste en un encadenamiento de proposiciones, de manera tal que una se sigue necesariamente de otras" (p.36), es decir, que la inferencia se da cuando "hay entre aquello de lo que se parte y aquello a lo que se llega una ilación tal que necesariamente es verdadero lo segundo si lo primero lo es"(p.174).

En las representaciones diagramáticas la ilación aparece claramente expresada en el trabajo de autores como Juan Filopón en el *Pons Asinorum*, en Giordano Bruno, Arnold Geulincx, y será clave, como veremos, de los diagramas de Peirce (Legris & Rodrigues, 2018; Moktefi, 2018). De hecho, Peirce (1880) afirma que la ilación es la relación primitiva de la lógica cuando dice "The general type of inference is P ∴ C where ∴ is the sign of illation" (p.17). Así, la ilación será fundamental tanto en la notación de la lógica algebraica como en la notación gráfica (Bellucci, Moktefi, & Pietarinen, 2014).

> For Peirce, the fundamental law of thought is to be found, not in the traditional principles of identity, contradiction, or excluded middle, but in the principle of illation as expressed in such commonplaces as 'follows,' 'therefore,' or ergo. (CP, 2.593; 2.599; 3.175; 3:440; 3.450) Put simply, all inference in its most basic, fundamental sense is illative. (Rose & Woods, 2011, p.4)

También en los más modernos y actuales modelos de redes neuronales que analizaremos posteriormente, es evidente que la inferencia se apoya directa, o al menos gráficamente, en la ilación, siendo considerado ilógico en matemáticas el pensamiento que carece de ilación interna (García, Ordóñez, & Ruíz, 2006). Así, parece haber ilación en el perceptrón de McCulloch-Pitts y Frank Rossenblant, las redes de Jhon Hopfield, las redes semánticas o las Redes Lógicas de Markov (Richardson & Domingos, 2006) por citar solo algunos ejemplos. Del mismo modo, se apoyan en la ilación las redes de expectativas Marlo (Aznar, 2016a, 2017a, 2017b, 2018b, 2018f), los diagramas de Marlo cuando operamos por síntesis (Aznar, 2014a, 2015, 2016b, 2016c, 2018a, 2018d, 2018g) y

otras propuestas recientes de cálculo diagramático muy semejantes a la nuestra en sus fundamentos, como la de Pagnan (2012), de las que hemos tenido conocimiento durante el transcurso de la realización de esta tesis.

Sin embargo, también es posible informar dando prioridad al hecho de que el razonamiento progresa descartando caminos, vías, conexiones, asociaciones imposibles o afirmaciones que son prohibidas por las proposiciones en base al principio de no contradicción. De este principio afirma Boole en su obra de 1854 que es por naturaleza "la fuente de todos los demás axiomas" (Boole, 2017, p.35), el más cierto de todos los principios, el cual había sido descrito por Aristóteles como axioma fundamental de la filosofía y había sido colocado por Leibniz "en un lugar fundamental de la lógica" (p.185). Todo esto significa que para Boole es posible llegar a las conclusiones correctas mediante el proceso de eliminación de las posibilidades que descartan las proposiciones en base al principio de no contradicción, aunque no todo razonamiento puede ser reducido a un mero proceso de eliminación

> (…) reasoning cannot, except by an arbitrary restriction of its meaning, be confined to the process of elimination. No definition can suffice which makes it less than the aggregate of the methods which are founded upon the laws of thought, as exercised upon propositions; and among those methods, the process of elimination, eminently important as it is, occupies only a place (Boole G., 2017, p. 185)**.**

El álgebra de Boole permite resolver las inferencias aplicando lo que llama *principio de dualidad*, conforme al cual los miembros de una determinada clase pueden pertenecer a otras clases, generando combinaciones que son delimitadas por las relaciones incompatibles que no pueden mantener entre sí los términos contrarios que definen cada una de las clases. Es decir, que si un elemento pertenece a la clase *xy*, entonces no puede estar incluido, por ejemplo, en *(1-x)y* [6].Venn (1881) define la eliminación como "el proceso de deshacerse, dentro de los límites de nuestra investigación, de uno o más de los símbolos que nos conciernen" (p.285)[7] y considera el *dictum* de Aristóteles "como una fórmula de eliminación para los grupos simples de proposiciones a los que se aplica"(p.286).

> Again, the syllogism is a case of Elimination as well as of inference; that is, we know that we thus get rid, in our conclusion, of one term out of the three involved in our premises. Here the corresponding general problem would be to ascertain whether there is any limit to the number of terms which can be thus eliminated from one proposition, or from any assigned group of propositions; and to give general rules for such a process of elimination (Venn, 1881, pág. xx).

Cuando eliminamos una parte de todas las combinaciones posibles las convertimos en formalmente imposibles, de modo que se establece que las combinaciones que permanecen son formalmente verdaderas de forma necesaria. La eliminación de opciones es la estrategia fundamental de los diagramas circulares de Leibniz y en consecuencia, de los diagramas tipo Euler y los diagramas de Venn, que pueden ser interpretados desde el paradigma del álgebra de Boole (Burton & Stapleton, 2015; Petersen & Arbenz, 2004) incluso con afirmaciones de existencia (Moktefi & Pietarinen, 2015).

También los diagramas de Lewis Carroll se basan primeramente en la eliminación (Moktefi, 2013). No obstante, toda representación formal diagramática o algebraica de la inferencia es necesariamente mixta, por lo que es posible, llegar a combinar los diagramas de Venn y los de Peirce (Molina, 2001), tal y como se muestra en la siguiente ilustración.

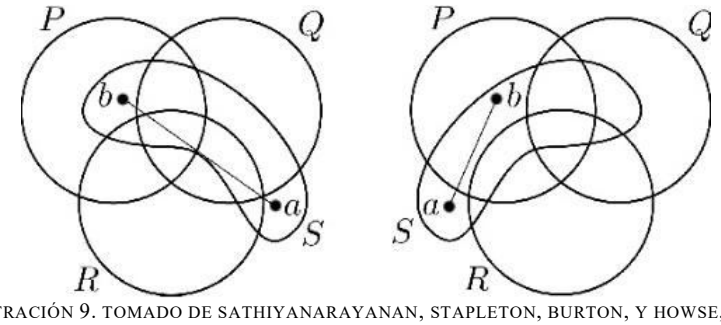


ILUSTRACIÓN 9. TOMADO DE SATHIYANARAYANAN, STAPLETON, BURTON, Y HOWSE, 2014.

[6] (1-x) puede ser traducido por ¬x

[7] Todas las traducciones de las citas de Venn (1881) han sido realizadas por el autor.

Incluso pueden concebirse diagramas de Venn en los que la ilación ha sido destacada de un modo muy similar a como lo haremos nosotros conectando en los diagramas de árbol los nodos objeto a sus correspondientes nodos *Or*, los cuales se explican en el capítulo cinco de esta tesis.

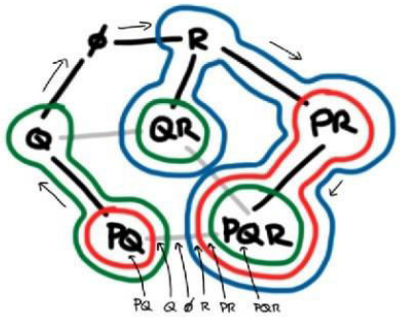


ILUSTRACIÓN 10. IMAGEN TOMADA DE FLOWER, STAPLETON, Y RODGERS, 2014.

Por eso son posibles formas de codificación como *Truth Diagrams*, *TDs y Category Pattern Diagrams*, *CPDs* (Cheng, 2012), que buscan principios epistémicos comunes a las formas de representación.

Quizás los diagramas lineales, aún hoy propuestas de interés en las ciencias de la computación (Rodgers, Stapleton, & Chapman, 2015) y que pueden rastrearse al menos hasta Leibniz, Lambert, Mellin o De Morgan entre otros, pueden considerarse estrategias de visualización esencialmente mixtas, ya que en todas ellas se busca representar la posible ilación de los extremos que provoca el término medio, pero sin tener en cuenta las combinaciones que son eliminadas por las premisas, que es exactamente lo que hacen los diagramas de Marlo.

Vemos pues, que aunque eliminar y sintetizar son procesos tan inseparables como lo son los principios de identidad y no contradicción, distintas formas de codificación algebraica y diagramática parecen reivindicar la primacía de uno u otro. La lógica matemática de Boole y su representación en los diagramas de Venn consisten en elimar posibilidades. La lógica aristotélica y el sentido común persisten en la necesidad de conexión como base de los argumentos.

4.5 Genealogía de los diagramas lógicos

Nos dice Coumet & De Mora (2002) que aún quedan muchos materiales por reunir para poder reconstruir con rigor la historia de los diagramas lógicos, la cual cuenta con grandes nombres como el de Leibniz, Euler, Lambert, Bolzano, Schrôder, o Peirce y está estrechamente a la historia más general de la lógica. Según Coumet y De Mora hay diagramas geométricos de círculo, de árbol, lineales, de tablas, etc. y no queda ya ninguna duda de que son capaces de soportar el razonamiento silogístico (Sato & Mineshima, 2015). Según Lemanski (2017) la cuestión de si se utilizaron por primera vez en la Antigüedad, la Edad Media o los comienzos de la Modernidad es controvertida y cita los trabajos de Stekeler-Weithofer (1986), Edwards (2006) y Macbeth (2014) en este sentido. Sin embargo, según Casas Cañas (2012) desde Aristóteles hasta comienzos del siglo XVIII podemos encontrar las primeras representaciones gráficas, muy simples, emparentadas con las proposiciones categóricas y el silogismo aristotélico, destacando el llamado “cuadrado de oposición”, algunas representaciones de las figuras silogísticas aristotélicas, el “Pons Asinorum”, el“Árbol de Porfirio” y los gráficos de Ramón Llull, siendo éste último el autor que Gardner (1958) toma como punto de inicio en su estudio clásico *Diagramas y máquinas lógicas*. Además, algunos investigadores argumentan que existen diagramas lógicos antes y después de Venn similares en la antigüedad y la época medieval y que después de Venn, estos diagramas analíticos en lógica se desarrollaron en forma de diagramas de autores como Carroll y Randolph, con algunas similitudes con los mapas de Karnaugh, *Eikosograms*, *Spider diagrams* y muchos otros (Lemanski J. , 2018).

Por otra parte, y aunque es una obviedad que no pueden existir diagramas lógicos al margen de la Lógica, no resulta fácil determinar qué sea exactamente la Lógica. Dicen Bochenski y Bravo (1985) que ocuparse de todo lo que en Occidente ha sido denominado Lógica supondría escribir una Historia general de la Filosofía y como todos sabemos, no es fácil siempre separar las cuestiones propiamente lógicas del resto de las cuestiones que influyen en el razonamiento. Nosotros, siguiendo a Bochenski, vamos a restringir el ámbito de las cuestiones lógicas implicadas en nuestro trabajo a los problemas que trata Aristóteles en el *Órganon*, y más concretamente al tipo de

problemas abordado en los *Analíticos Primeros*, que son los que han ejercido mayor influencia en la Historia de la Lógica, finalizando nuestro estudio en la interpretación diagramática que hace Frege de estos problemas.

> El tercer paso, nos lleva, por tanto, a considerar "Lógica" en sentido estricto, lo que se mantiene dentro del tipo de problemática de los Analíticos Primeros. Los llamados Analíticos Primeros tratan del llamado Silogismo, que se define como un λόγος, en el cual, dada una cosa, se sigue necesariamente otra. Mas tales λόγοι se tratan allí a manera de fórmulas en las que, en lugar de palabras con significado constante aparecen variables. Un ejemplo es "A conviene a todo A". El problema que Aristóteles se plantea claramente, si bien no de una manera explícita en esta obra que ha hecho época podría, por tanto, formularse de la siguiente manera: ¿Cuáles son las fórmulas de esta índole que, caso que se sustituyan en ellas constantes por variables, resultan enunciados condicionales tales que, puesto el antecedente, ha de seguirse el consecuente? Tales fórmulas se denominan "proposiciones lógicas". A tales proposiciones las vamos a considerar, por consiguiente, como el objeto principal de la Lógica (Bochenski & Bravo, 1985, p. 12).

Con el fin de que puedan ser comparados nuestros diagramas con los que ya forman parte de la tradición, revisaremos la historia de los diagramas lógicos, aunque solo después de haber explicado nuestro propio trabajo. Esperamos que así resulte más fácil situar y valorar las posibles aportaciones didácticas de los diagramas y redes de expectativas Marlo respecto a los sistemas clásicos de representación. No pretendemos otra cosa que mostrar en qué sentido pueden resultar útiles las herramientas que hemos creado en el aula para facilitar la comprensión del *Lekta*, concebido como estructura o forma en base a la cual un enunciado es lógicamente verdadero, así como al resto de las cuestiones más elementales de la Lógica que han sido permanente discutidas desde el comienzo de esta disciplina a las que se referían Bochenski y Bravo (1985):

> Constituyen, por tanto, el objeto de la presente obra, aquellos problemas que se refieren a la estructura de las proposiciones "lógico-formales" semejantes a los silogismos aristotélicos; a sus relaciones mutuas y a su verdad. ¿Se sigue o no se sigue? ¿Y por qué? ¿Cómo puede probarse la validez de tal o cual proposición lógico formal? ¿Cómo se definen estas o aquellas constantes lógicas del tipo más o menos de "y", "o", "si…entonces…", "todo", etc. Estas son las cuestiones cuya historia se trata aquí. (p.13)

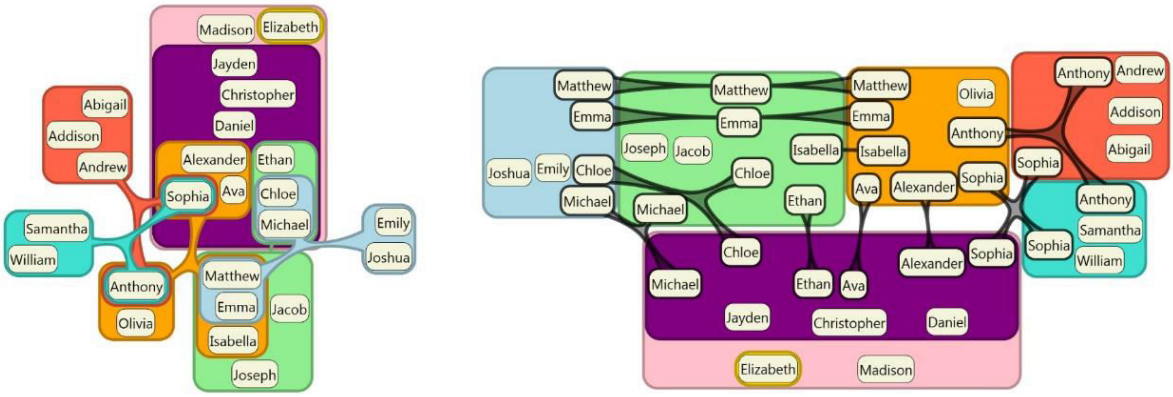
Los diagramas que presentamos y que utilizamos en el aula desde el año 2013, así como el lenguaje formal que los acompaña, tienen como intención fundamental iniciar a los estudiantes en algunos de estos problemas, facilitándoles la comprensión. Las leyes y principios que hemos formulado para la construcción de nuestros diagramas y proposiciones lógicas permiten representar por las vías gráfica y lingüística los pasos mediante los cuales podemos alcanzar una consecuencia o conclusión a partir de la aceptación de unas premisas. Pero ninguna de las leyes de la inferencia a las que hemos llegado desarrollando nuestros diagramas es en absoluto original, dado que, como veremos, las leyes de la síntesis y de la exclusión que sirven de base a nuestras representaciones diagramáticas fueron claramente enunciadas por Aristóteles y reconocidas por Boole de forma casi idéntica a como lo hicimos nosotros.

En esta tesis no pretendemos aportar nada a la historia de los diagramas lógicos y mucho menos a la historia de la Lógica. Nuestra intención no va a ser otra que mostrar antecedentes en nuestra forma de comprender la estructura elemental de las proposiciones y de las conexiones que subyacen a la inferencia, haciendo hincapié únicamente en aquellos problemas a los que nosotros mismos nos enfrentamos en el desarrollo de nuestros diagramas y que, de algún modo, han condicionado nuestra forma de representación gráfica y proposicional. En todo caso, y antes de explicar nuestra contribución, trataremos de situar nuestro trabajo en el contexto de las representaciones que han tenido lugar en el último siglo.

4.6 Desde comienzos del siglo XX hasta la actualidad

Nuestra pretensión en esta tesis se limita, pues, a confrontar nuestros diagramas con sistemas de representación históricamente consolidados como los de Venn, Carroll o Peirce y probar su capacidad para servir de modelos gráficos en la ilustración de los principios más básicos del razonamiento lógico que ya fueron puestos de manifiesto por algunas de las grandes figuras de la historia de esta disciplina como Aristóteles o Boole.

Hoy es posible desarrollar algoritmos para dibujar diagramas de Euler y de Venn usando círculos, rectángulos y polígonos (Chow & Ruskey, 2004) y se producen algoritmos con programas como Java para la generación automatizada de diagramas de Euler con la finalidad de que los usuarios generen, editen y razonen con diagramas (Flower & Howse, 2002).



Compact Rectangular Euler Diagram(left) and Euler Diagram with Duplications(right)

ILUSTRACIÓN 11. DIAGRAMAS DE EULER RECTANGULARES. TOMADA DE RICHE Y DWYER, 2010.

Así, a pesar de que durante buena parte del siglo XX predominó lo que Legris (2012) llama *logocentrismo*, no han dejado de desarrollarse sistemas de representación diagramática que han ido cobrando cada vez mayor importancia en los últimos tiempos, como los de Barwise y Etchemendy, Richard Bosley, Ruggero Pagnan, Ferdinando Cavaliere, Jorgen Fischer Nilsson, Peter Cheng, Maurice Karnaugh, los *Spider diagrams* (Howse, Molina, Taylor, Kent, & Gil, 2001; Howse, Stapleton, & Taylor, 2005) o los trabajos citados por Shin et al. (2018) del Grupo de Modelado Visual de la Universidad de Brighton relacionados con aplicaciones de herramientas visuales en el desarrollo de *software*.

Ya en 1987 y dentro del Proyecto del Razonamiento Heterogéneo, Barwise y Etchemendy (1991b) crearon un programa de ordenador llamado "El mundo de Tarski" que combina información visual y verbal para la resolución de problemas lógicos. Un año antes, y en la misma dirección, habían creado "El mundo de Turing" (1986) para la enseñanza de la computabilidad. En 1991, Barwise y Etchemendy habían publicado "Visual information and valid reasoning" (Barwise & Etchemendy, 1996), haciendo hincapié en que la investigación del razonamiento debe incluir formas de representación no simbólicas.

También en este sentido, Jorgen Fischer Nilsson (2103) ideó una propuesta que pretende compaginar la expresividad de los diagramas lógicos con las capacidades de cálculo y resolución computacional, de modo que, como señalan Moktefi y Shin (2013), se desarrolla un lenguaje de visualización y razonamiento diagramático prestando atención a las necesidades del razonamiento asistido por computadora.

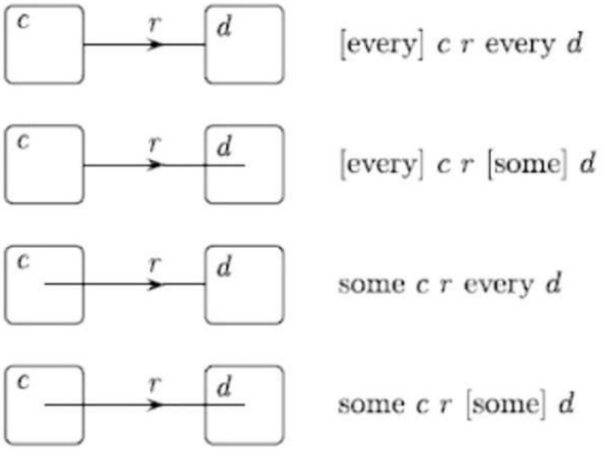


ILUSTRACIÓN 12. TOMADA DE FISCHER NILSSON, 2013, P. 124.

Por su parte, Maurice Karnaugh, nacido en 1924, creó “los mapas de Karnaugh” (Karnaugh, 1953), un método para la simplificación de los circuitos lógicos.

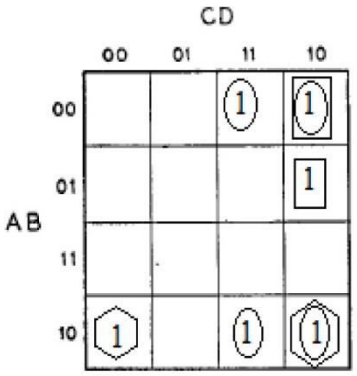


ILUSTRACIÓN 13. MAPA DE KARNAUGH, TOMADO DE CASAS CAÑAS, 2012.

David Harel inventó *Higraphs* (Harel, 1988), una herramienta para representar especificaciones de sistemas en informática que ha sido retomada en aplicaciones industriales (Shin et al., 2018).

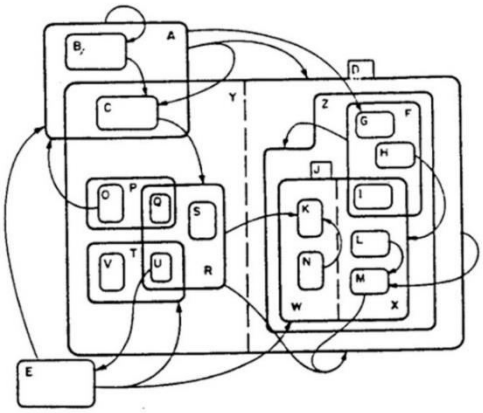


ILUSTRACIÓN 14. HIGRAPH. TOMADA DE HAREL, 1988.

Otra de las representaciones gráficas más actuales del razonamiento lógico son Los *Eikosograms* (Oldford & Cherry, 2006) citados por Lemanski (2018a), que son imágenes en las que se divide visualmente una unidad cuadrada en regiones rectangulares cuyas áreas dan los valores numéricos de varias probabilidades. De este modo, cada región rectangular se identifica con el valor de una o más variables categóricas, de manera muy semejante a lo que ocurre en los nodos de nuestras redes de expectativas.

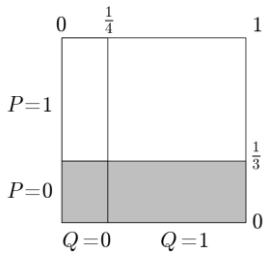


ILUSTRACIÓN 15. EIKOSOGRAMS. TOMADA DE LEMANSKI J., 2018.

Estas herramientas y programas informáticos preceden a las infografías que nosotros mismos hemos desarrollado y aplicado en el aula con alumnos de cuarto de la ESO con la intención de convertir la didáctica de la Lógica en algo más tangible, aunque incluso en este sentido de búsqueda de un apoyo sensible para la inferencia, también han surgido otros diagramas antes que los nuestros como *Sylloid*, un aparato tridimensional que permite validar silogismos a personas invidentes (Goldstein, 2011).

Otro de los sistemas diagramáticos alternativos al nuestro es el *sistema lineal de Rugero Pagnan* que incorpora tanto una apariencia gráfica como una naturaleza algebraica (Moktefi & Shin 2013) y que consiste según su autor en representaciones esquemáticas lineales de las proposiciones categóricas aristotélicas que se ajustan al canon de la inferencia silogística como eliminación del término medio, de modo que el formalismo tiene apariencia gráfica y una naturaleza algorítmica sencilla por la que "no se necesita ningún conocimiento específico o habilidad particular para entenderlo y usarlo" (Pagnan, 2013, p. 347). Pagnan da un enfoque formal al razonamiento lógico con diagramas introduciendo el sistema formal SYLL, y demuestra que un El silogismo es válido, incluso con contenido existencial, si y solo si es demostrable en SYLL, de modo que en este sentido el cálculo es correcto y completo.

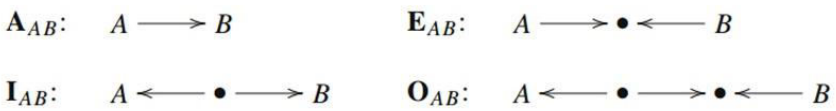


ILUSTRACIÓN 16. A, E, I, O EN SYLL. TOMADA DE PAGNAN, 2013, P. 352.

Este sistema tiene semejanzas con la notación *Spicular* de De Morgan, que pone de manifiesto el propio autor en el trabajo citado y aunque no entra en el análisis a fondo de las relaciones de ambos sistemas, reconoce que, al igual que en De Morgan, y como ocurre en nuestros diagramas, es importante considerar no solo si el término medio es afirmado o negado, sino también si está distribuido o no, lo cual nos lleva a la cuantificación del predicado de la que hablaremos repetidas veces a lo largo de nuestra tesis.

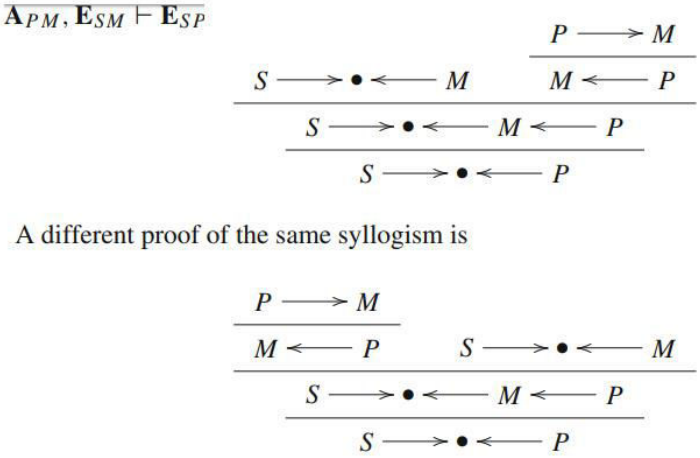


ILUSTRACIÓN 17. SILOGISMO EAE. TOMADO DE PAGNAN, 2013.

Otra forma de representación alternativa a nuestra propuesta son los *Category Pattern Diagrams* (CPD) de Peter Cheng (Cheng, 2012), que configuran diferentes estilos de segmentos de línea para asignar simultáneamente valores de cuantificación a variables categóricas y relaciones entre ellas. Según su autor, el diseño de CPD intenta que se pueda visualizar de manera coherente la estructura de los silogismos en varios niveles conceptuales y en comparación con los diagramas de Venn y las expresiones verbales convencionales de los silogismos, los beneficios potenciales de la CPD pueden incluir un método de inferencia relativamente sencillo, "reglas simples para evaluar la validez y aplicabilidad a silogismos de premisa múltiples" (Cheng, 2012, pág. 32).

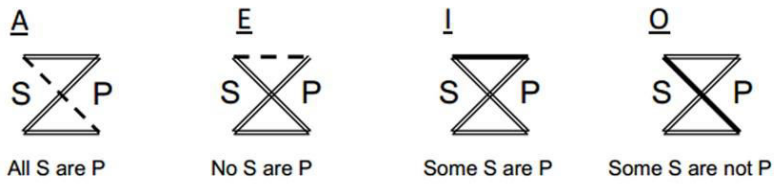


ILUSTRACIÓN 18. PROPOSICIONES CLÁSICAS DEL SILOGISMO EN CPD. TOMADA DE CHENG, 2012, P. 37.

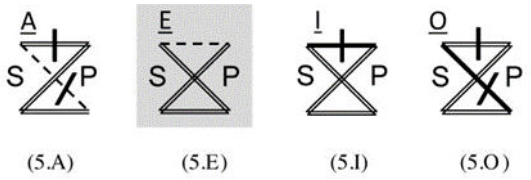


ILUSTRACIÓN 19. SILOGISMO EAE EN CATEGORY PATTERN DIAGRAMS, CPDS. TOMADA DE CHENG, 2012.

Otro ejemplo de alternativa a nuestros diagramas son los *Sophie diagrams* de Richard Bosley (Bosley, 2013), que representan figuras silogísticas en lugar de silogismos específicos propiamente dichos (Moktefi & Shin, 2013) y que son dibujados utilizando puntos y líneas como se muestra en la siguiente imagen de un silogismo de la primera figura.

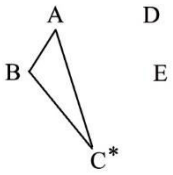


ILUSTRACIÓN 20. TOMADA DE BOSLEY, 2013, P. 44.

Por último mencionaremos el *Segmento Numérico* NS de Ferdinando Cavaliere (Cavaliere, 2013), que tiene en cuenta consideraciones cuantitativas como se encuentran en las lógicas no clásicas (Moktefi & Shin, 2013) y que ha empleado antes que nosotros códigos de colores en sus diagramas asociándolos a un valor numérico. Así ha creado una herramienta original para el razonamiento diagramático que, según el propio autor, se puede aplicar con un nivel n de segmentos numéricos y que trasciende la antinomia teórica entre las lógicas de no contradicción y las lógicas no estándar, constituyendo un diagrama simple con capacidad de expresar diversos tipos de predicados categóricos, singulares, numéricos, difusos y paraconsistentes con una iconicidad simple que puede abrir el camino a otros métodos visuales para el razonamiento estándar o no estándar.

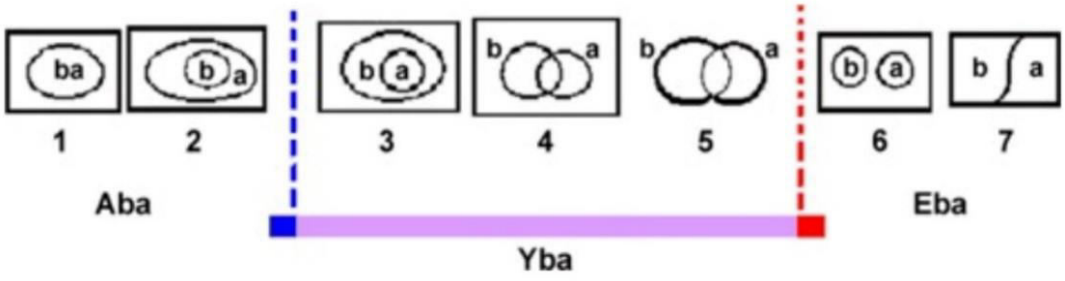


ILUSTRACIÓN 21. TOMADA DE CAVALIERE, 2013, P. 107.

Existen otros diagramas aparte de los que mencionamos aquí, pero una investigación exhaustiva de todos ellos excedería ampliamente nuestro objetivo más modesto de presentar al diagrama de Marlo y las redes de expectativas como sistemas de representación diagramática que, constituyendo un punto de vista solo parcialmente original, pueden ser empleados en la didáctica de los principios elementales del razonamiento como alternativa o complemento a los sistemas clásicos de representación visual de la inferencia lógica.

4.7 Diagramas de árbol y circuitos lógicos

Nos gustaría mencionar y situar en este apartado las influencias más importantes que han condicionado la génesis de nuestras redes de expectativas con estructura de diagramas de árbol lógicos, las cuales explicaremos detalladamente en el siguiente capítulo.

Como señala Gardner (1958), los diagramas de árbol son conocidos desde Aristóteles y no solo se aplican en la actualidad para describir estructuras como la historia evolutiva de plantas y animales o las relaciones genealógicas, sino que siguen siendo utilizados para resolver cierto tipo de problemas lógicos.

Nuestras redes de expectativas fueron diseñadas con posterioridad a los diagramas de Marlo con la intención de poder mostrar de forma exhaustiva las relaciones que, con distinto grado de certeza y ajustándose a la información contenida en las premisas, pueden establecerse entre las variables que forman parte de un sistema de conocimiento. Las redes han sido definidas por nosotros desde el primer momento como redes bayesianas (Aznar, 2016a, 2017a, 2017b) por lo que no es casualidad que un alumno de segundo de Bachillerato que había cursado filosofía con nosotros el curso pasado nos dijera recientemente que estaba estudiando en Matemáticas, en los árboles de probabilidad, exactamente lo mismo que vimos nosotros con las redes en Lógica.

Según Moktefi y Shin (2013), los diagramas de árbol han resultado durante siglos familiares a los estudiantes y como muestra Lemanski (2018a) ya fueron empleados para mostrar inferencias lógicas en 1714 en el *Inventum* de Johann Christian Lang. También es obvio que los diagramas de árbol son empleados por los profesores de Matemáticas para enseñar probabilidad y que existen relaciones entre el razonamiento probabilístico y la inferencia necesaria, tal y como mantenía, entre muchos otros, Wittgenstein en el *Tractatus* (Wittgenstein, Trad. 1922):

> Dos proposiciones elementales se confieren mutuamente la probabilidad ½. Si p se sigue de q, entonces la proposición "q" confiere a la proposición "p" la probabilidad 1. La certeza de la deducción lógica es un caso límite de la probabilidad. (5.152)

Como sabemos, todavía Boole relacionaba lógica y probabilidad.

> We see that in these cases the probability of the compound event represented by a constituent is the same function of *p* and *q* as the logical expression of that event is of *x* and *y*; and it is obvious that this remark applies, whatever may be the number of the simple events whose probabilities are given, and whose *joint existence or failure* is involved in the compound event of which we seek the probability (Boole G., 2017, p. 198)

Así distinguía por un lado, la posesión o la privación que define a las clases contrarias "*x"* y "*(1-x)",* y por otro lado, la probabilidad o grado de certeza que podemos tener acerca de que un juicio que afirma que un objeto o evento cae bajo una determinada clase es verdadero. Esta distinción se corresponde bien con la diferencia que hay en las redes entre lo que nosotros llamamos grados de ser o ajuste a un criterio y el grado de verdad o falsedad asignado a cada uno de los nodos de la red. Por eso, cuando Boole utiliza la notación matemática *(1-x)* para nombrar una clase, no le da el mismo sentido que cuando utiliza los valores 0 y 1. Así, es posible que la clase *(1-x),* lo mismo que la clase *x*, tenga el valor *1* o tenga el valor *0* en función de que dicha clase esté o no vacía.

Cuando Boole afirma, apoyándose en el principio de dualidad, que si $x = 1$, entonces $(1-x) = 0$, está sentando las bases de la lógica matemática, pero en el marco de lo que hemos llamado una lógica del objeto (Aznar, 2016b). Pues es cierto que si pregunto *qué es esto*, no es posible que *esto* posea una cualidad y esté privada de ella al mismo tiempo; pero no podemos aplicar el mismo principio cuando me pregunto acerca de las cosas que hay en un conjunto, pues pueden ser ciertas al mismo tiempo las proposiciones I y O. Por ejemplo, puede ser cierto que algunos de mis amigos son alemanes y puede ser cierto que algunos no lo son. Por eso dentro de una lógica del objeto bivalente se justifica la fusión entre *grados de ser* y *grados de verdad*, de modo que en las tablas de verdad A y $\neg A$ no puedan ser al mismo tiempo verdaderas y que, en consecuencia, si es falso que tengo una, entonces es verdadero que tengo la otra. Pero los diagramas y redes de expectativas Marlo permiten otro enfoque de las cuestiones lógicas que, no siendo ortodoxo del todo con la lógica matemática actual, es compatible con el sentido común y la obra de Boole en muchos aspectos.

Como vemos, el diseño fundamental de las redes de expectativas en un diagrama de árbol no es novedoso en absoluto y resulta ser una consecuencia natural de la relación que existe entre la lógica y la probabilidad (Böcherer-Linder, Eichler, Vogel, 2018). Por ello creemos que las redes ofrecen un modelo de razonamiento simple que, a

pesar de sus muchas limitaciones, puede resultar útil y valioso en programas de enseñanza de la lógica basados en el razonamiento heterogéneo.

Nuestras redes no son más que circuitos bayesianos inspirados en los actuales modelos de razonamiento que son encarnados especialmente en redes conexionistas o redes neuronales por los que se propaga la activación y la inhibición y que son, a su vez, herederos de los modelos de asociación descritos por William James a finales del siglo XIX: "Cuando dos procesos cerebrales se activan simultáneamente o en inmediata sucesión, y ello sucede de forma reiterada, uno de ellos tiende a propagar su excitación sobre el otro" (James, 1890, p. 256).

También es necesario comprender el intento de facilitar la comprensión de los aspectos más básicos del razonamiento con nuestros diagramas y redes bajo la influencia de la Psicología cognitiva, la cual, según Crespo (2006), se define desde mediados de los años cincuenta del siglo XX como una perspectiva interdisciplinar que engloba aportaciones de la psicología, la inteligencia artificial (IA), neurociencia, antropología, lingüística y filosofía en el análisis de la actividad de los sistemas inteligentes (naturales o artificiales, cerebros o máquinas). Entendemos que estos sistemas manejan la información realizando tareas de cómputo sobre ella (Turing, 1936; Simon & Kaplan, 1989; Villalobos & Dewhurst, 2016).

Nos dice Crespo (2006) que las primeras teorías y modelos se inspiraron en los ordenadores seriales y que sus debilidades se intentaron superar con la introducción de una nueva visión de la mente como sistema computacional en paralelo, lo que dio origen a "la nueva revolución: del conexionismo" (p.35). Feldman y Ballard (1982) utilizan por primera vez el término conexionismo para referirse a las propiedades representacionales de los sistemas basados en RNAs. Frente a las arquitecturas simbólicas, los conexionistas se inspiraron en el funcionamiento cerebral para elaborar teorías y modelos explicativos de la mente y así, desde esta perspectiva conexionista, nos dice Crespo, la mente no se contempla como un sistema análogo funcionalmente a un ordenador, sino como un sistema constituido por multitud de unidades simples, análogas a las neuronas, que funcionan al unísono procesando la información de forma distribuida en paralelo y que son las denominadas redes neuronales artificiales.

Nuestras redes de expectativas han sido diseñadas después de tener conocimiento de los modelos denominados arquitecturas conexionistas de la mente, cuyo fundamento se localiza en las múltiples conexiones que pueden establecer entre sí las unidades de procesamiento y que nosotros tratamos de emular conectando los nodos objeto, los nodos *Or* y los nodos *And* en nuestro sistema Alfa. Y es interesante que nuestras redes, que funcionan claramente en paralelo, sean fruto de la evolución de los diagramas de Marlo, que parecen depender en mayor grado del procesamiento en serie, del mismo modo que, como vemos en Crespo (2006), los conexionistas han sustituido la metáfora del ordenador por la metáfora cerebral de la mente y han abandonado la computación de estilo simbólico por una computación inspirada en el funcionamiento cerebral (*brain-style* computación) que nos lleva a hoy a hablar de *wetware* o "sustancia húmeda" (p.120).

Siguiendo a Crespo (2006) debemos situar los orígenes del conexionismo en conceptos neurofisiológicos como la teoría de la acción de masa y la equipotencialidad de Lashley o la propuesta de circuitos neuronales transitorios y permanentes de Hebb, siendo de gran impacto la propuesta de McCulloch y Pitts sobre la posibilidad de entender las neuronas como sistemas de computación binarios que se activan si los *inputs* ingresados superaban un umbral determinado, así como la aplicación de este principio a una de las primeras redes neuronales más conocidas: *el perceptrón***.**

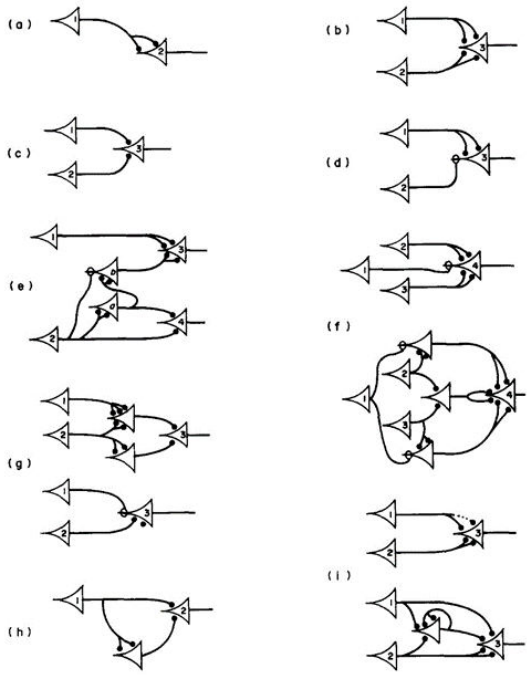


ILUSTRACIÓN 22. CIRCUITOS LÓGICOS NEURONALES. TOMADA DE MCCULLOCH Y PITTS, 1990, P. 105.

También nos dice Crespo (2006) que Warren McCulloch, en su ponencia "¿Por qué la mente está en la cabeza?", planteó entender el cerebro como un sistema de procesamiento. Junto a Walter Pitts proponía entender la mente en términos neurofisiológicos inspirados en el funcionamiento neuronal: si la actividad neuronal es un proceso del tipo todo o nada (se activa o permanece desactivada), entonces es posible representarla formalmente utilizando lógica binaria.

Surge así la neurona de McCulloch-Pitts, que se activa cuando el conjunto de valores supera un determinado umbral. Por nuestra parte, debemos insistir en que el hecho de que los nodos de nuestras redes puedan adquirir cualquier valor entre menos uno y uno no es incompatible con la noción de umbral, como ya señalamos en Aznar (2016b).

En 1943, McCulloch y Pitts publicaron un artículo en el Bulletin of Mathematical Biophisycs titulado "A logical cálculus of the ideas inmanent in nervous activity" en el que llegaron a afirmar que en sus redes «the unknowable object of knowledge, the "thing in itself," ceases to be unknowable» (p.131). En dicho trabajo, de gran relevancia histórica, se reclamaba la conveniencia del simbolismo de Carnap (Carnap, 1938), con añadidos de los *Principia* (Russell & Whitehead, 1925) cuyos fundamentos básicos creemos que están presentes en nuestras herramientas didácticas.

> The "allor-none" law of nervous activity is sufficient to insure that the activity of any neuron may be represented as a proposition. Physiological relations existing among nervous activities correspond, of course, to relations among the propositions; and the utility of the representation depends upon the identity of these relations with those of the logic of propositions. To each reaction of any neuron there is a corresponding assertion of a simple proposition. This, in turn, implies either some other simple proposition or the disjunction or the conjunction, with or without negation, of similar propositions, according to the configuration of the synapses upon and the threshold of the neuron in question. (McCulloch & Pitts, 1943, p. 117)

Según Crespo (2006) la idea de la neurona de McCulloch-Pitts fue recogida por Frank Rossenblant en 1958 en la revista Psychological Review (Rosenblatt, 1958) en uno de los primeros modelos de computación neuronal denominado *Perceptrón*, una red histórica en el mundo del conexionismo. El *Perceptrón* demostraba cómo la información recogida por el sistema visual podía almacenarse en forma de red neuronal y cómo esta era capaz de manipular dicha información mediante sistemas de computación, haciendo alusión a los diagramas de Venn en su descripción.

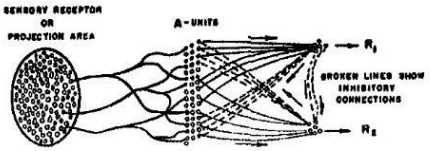


FIG. 2A. Schematic representation of connections in a simple perceptron.

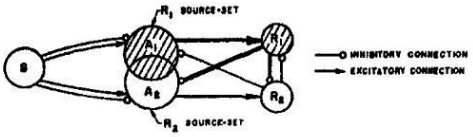


FIG. 2B. Venn diagram of the same perceptron (shading shows active sets for R_1 response).

ILUSTRACIÓN 23. PERCEPTRÓN. TOMADA DE ROSENBLATT, 1958.

Nos dice Crespo (2006) que el *Perceptrón* generó investigación aplicando técnicas de simulación por ordenador, pero que el clima de euforia se paró en 1969 con el trabajo de Minsky y Papert titulado *Perceptrons* (Minsky & Papert, 1969), un libro que discutía los límites de estos sistemas como mecanismos de computación, a raíz de lo cual los modelos de RNAs se dejaron de lado, aunque como dicen Montavon, Orr y Müller (2012) el *Perceptrón* sigue siendo utilizado hoy en los modelos de redes.

Lo cierto es que el *Perceptrón* tenía algunas limitaciones que no están presentes en nuestras redes, como la dificultad de expresar conectores lógicos en los que se elimina más de una posibilidad, y la esencia de la crítica de Minsky y Papert a los *perceptrones* -y por extensión a todos los sistemas inspirados en su concepción- es, nos dice Crespo (2006), que "dichos formalismos sólo pueden solucionar problemas clasificatorios que son linealmente separables" (p. 134), y prosigue:

> Si bien las posibilidades de resolución de tareas lógicas resulta sorprendente, no lo es menos comprobar cómo estos sistemas de computación unicapa, constituidos por unidades de entrada y salida, eran a veces incapaces de realizar una simple tarea como la disyunción exclusiva XOR (voy al cine o con Juan, o con Pedro, pero no con ambos). (p.132)

Siguiendo a Crespo (2006) sabemos que una crítica añadida de Minsky y Papert (1969) fue considerar que las limitaciones del *Perceptrón* no eran superables por el simple hecho de añadir unidades ocultas a una RNA con las que ampliar los límites de la computación, una afirmación fundamentada entonces en las principales reglas de aprendizaje que se manejaban en aquella época, especialmente la regla *Widrow-Hoff* (Widrow, 1960). Frente a esto, Zerpa Morloy (2001) afirma que el problema de representar una disyunción exclusiva X-*Or* sí se soluciona con capas ocultas, aunque él mismo reconoce que los problemas de la linealidad requieran soluciones complejas.

En todo caso, según Crespo (2006), en el declive de los modelos de redes neuronales influyeron también aspectos políticos que pretendían imponer un *establishment* científico y el hecho de que la idea de construir un sistema que emulase un pedazo de cerebro artificial generaba, como Widrow había afirmado en alguna conferencia, ciertas reticencias entre la comunidad científica. Sin embargo, prosigue Crespo, en torno a los años ochenta comenzó de nuevo el interés por este tipo de redes mediante la introducción de nuevas reglas de aprendizaje y la organización de los sistemas neuronales en redes multicapa, redes interactivas y competitivas y redes recurrentes.

En 1982 Jhon Hopfield, en un artículo breve que se convertirá en todo un clásico (Hopfield, 1982), describe determinados principios de funcionamiento de la computación biológica que pueden ser aplicables tanto a sistemas físicos (circuitos impresos) como a RNAs. Hopfield retoma las RNAs utilizando por primera vez el término *conexionismo* para referirse a los modelos de RNAs como sistemas de procesamiento de la información que ejecutan sofisticadas computaciones ante tareas complejas. En ellas se simplifican las redes multicapa y la información no se representa de un modo simbólico, sino distribuidamente entre las unidades que componen la red.

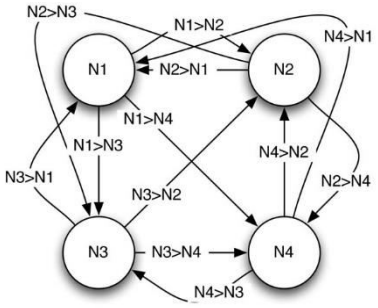


ILUSTRACIÓN 24. HOPFIELD. TOMADA DE HOPFIELD, 1982.

Finalmente, en 1986, Rumelhart, McCelland y el denominado Grupo PDP publican la denominada "Biblia del Conexionismo" titulada *Parallel Distributed Processing: Explorations in the microestructure of cognition* (Rumelhart, MacClelland, & PDP Research Group, 1986). Se habla de revolución conexionista y no dejan de surgir desde entonces circuitos lógicos como *Circuitproof* con puertas lógicas *Or* y *And* (Allwein & Barwise, 1996).

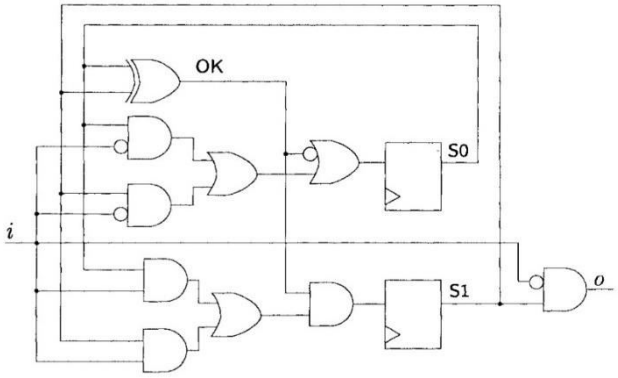


ILUSTRACIÓN 25. TOMADA DE ALLWEIN Y BARWISE, 1996.

Otro antecedente claro de nuestras redes de expectativas son las redes semánticas diseñadas por un informático, Quillian, junto al psicólogo Collins (Collins & Quillian, 1969). Explica Crespo (2006) que como formalismos proposicionales las redes semánticas pueden ser descritas recurriendo al cálculo de predicados y a la lógica simbólica y que describen el conocimiento de nuestra memoria recurriendo a estructuras gráficas jerárquicas constituidas por nodos y líneas relacionales en las que las tareas de verificación de sentencias, como decidir si el enunciado *un canario es un animal* es verdadero o falso, conlleva activar el nodo canario y el nodo animal y averiguar, partiendo del primer nodo y siguiendo las flechas, si existe una conexión entre ambos. Nos dice Crespo en su manual que la plausibilidad de estas redes como modelo psicológico del conocimiento fue comprobada experimentalmente demostrando que el tiempo necesario para establecer una conexión entre dos nodos estaba en relación directa con la distancia jerárquica existente entre ambos, y que aunque pronto surgieron resultados difíciles de interpretar se solucionaron recurriendo al concepto de *distancia semántica***.** Así es mayor la distancia avestruz-ave que canario-ave y por eso se remodelaron las estructuras creando redes no jerárquicas cuyo funcionamiento se basa en la activación de los nodos con un sencillo procedimiento denominado *propagación de la activación.* La activación de un determinado concepto se propaga hacia los nodos más próximos, de modo que la activación de un nodo supone la activación de los inmediatamente vinculados, que a su vez se propagarán a otros nodos de la red. Un supuesto es que la fuerza de la activación disminuirá al alejarse del original, es decir, cuanto mayor sea la distancia semántica.

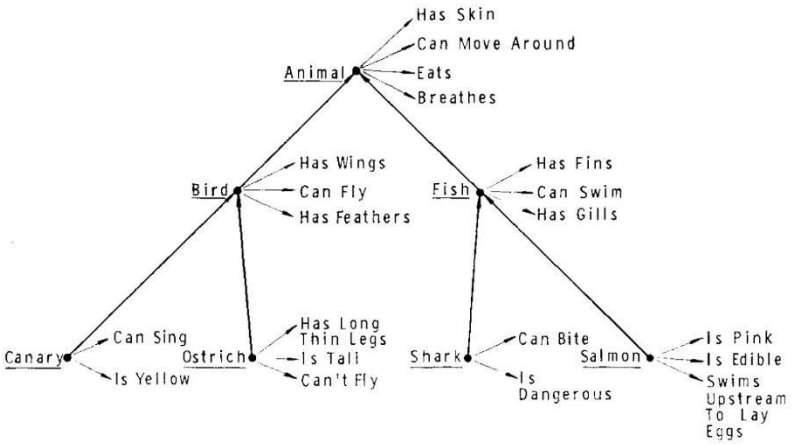


Illustration of the hypothetical memory structure for a 3-level hierarchy.

ILUSTRACIÓN 26. REDES SEMÁNTICAS. TOMADO DE COLLINS Y QUILLIAN, 1969, P. 241.

Aunque es obvio que las redes semánticas explican fenómenos complejos que van mucho más allá de nuestros diagramas, algunos de sus principios, como el de propagación de la activación, inspiran sin duda nuestras redes. Igualmente, nuestra forma de entender el conocimiento humano como una base de datos interrelacionada donde los contenidos mantienen relaciones entre sí, está tomada de las explicaciones de Crespo (2006) sobre los *Modelos de Rasgos* que Smith, Shoben y Rips propusieron en 1974 (Smith, Shoben, & Rips, 1974). En ellos se considera que el conocimiento que una persona tiene de una determinada categoría es el conjunto total de rasgos que la definen; por ejemplo la categoría ave se describe con rasgos como animal, tiene plumas, vuela, ovíparo, etc., distinguiendo entre rasgos definitorios entendidos como los que se deben poseer para ser considerado sin lugar a dudas miembro, generalmente poseídos por todos los miembros, y rasgos característicos más o menos habituales que no son estrictamente necesarios. Así, tener plumas o poner huevos define, mientras que es característico volar o construir nidos.

Nuestras redes solo permiten afrontar inferencias que, conforme a la distinción que se establece en psicología cognitiva, solo se refieren al conocimiento declarativo, el cual se contrapone al conocimiento procedimental, siendo esta disociación originada en la IA y fundamentada en la distinción entre conocer qué vs. conocer cómo. Como ya sabemos, el conocimiento declarativo se refiere a hechos o eventos fácilmente verbalizables mientras lo procedimental se refiere a usos, habilidades, destrezas, difíciles de verbalizar y que suelen manifestarse a través de la ejecución (López de Mántaras Badía, 2015), por más que sea posible en cierto modo traducir el conocimiento procedimental a conocimiento declarativo haciendo explícitos los esquemas de acción mediante estructuras condicionales que asocian un estímulo a una respuesta.

Hoy afloran multitud de diseños conexionistas en el campo de la psicología con respaldo empírico que deberíamos tener en cuenta si quisiéramos convertir nuestras redes en auténticos modelos de pensamiento con capacidad de aprendizaje. Entonces tendría que ser posible integrar el peso de la experiencia en el valor de los nodos de nuestra red, tal y como ocurre en las redes de aprendizaje que están siendo aplicadas en distintos ámbitos de investigación (Bell, 2011; Downes, 2010; Kop & Hill, 2008).

Por ello, debemos insistir nuevamente en que lo que nosotros intentamos representar no son más que procesos básicos y elementales del razonamiento con una intención didáctica, por más que situemos su génesis en el paradigma conexionista de la psicología. No podemos pretender ir más allá cuando incluso los modelos más potentes de la cognición aún tienen sus limitaciones. Así, y según López de Mántaras Badía (2015), los modelos conexionistas que conciben la actividad eléctrica de las neuronas biológicas y que se pueden entrenar cambiando los pesos son, en el mejor de los casos incompletos, y en el peor, erróneos; primero porque ningún modelo conexionista tiene en cuenta las células gliales y segundo porque las células tienen propiedades químicas no triviales, conductancias iónicas no lineales y puede haber millones de sinapsis variando en posición, polaridad, y magnitud.

Además, insiste López de Mántaras, hoy se habla de cognición situada, de modo que sin un cuerpo las codificaciones semánticas no tienen sentido para la máquina y las capacidades cognitivas no se deben estudiar haciendo abstracción del sistema sensor y el sistema motor.

Así pues, y una vez que hemos hecho explícitas las principales influencias que han condicionado la génesis de nuestras redes de expectativas, así como las limitaciones del paradigma en el que nos situamos, podemos pasar a explicar con detalle nuestros diagramas lógicos, los cuales suponen el cuerpo central de esta tesis y la única aportación original que presentamos.

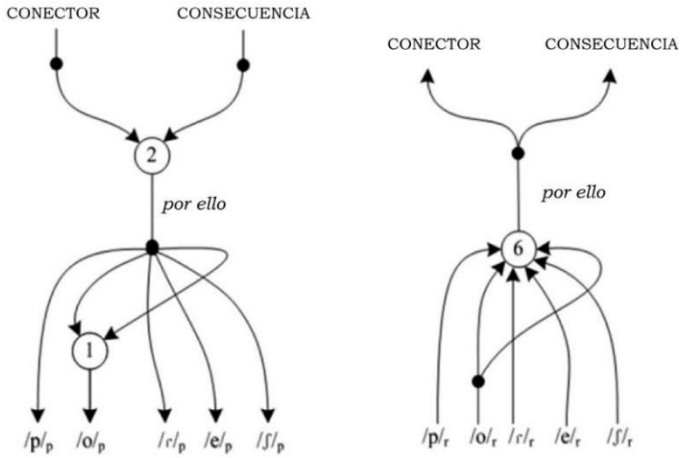


ILUSTRACIÓN 27. REDES CAPACES DE APRENDER. TOMADO DE MARTÍN GARCÍA, 2012.

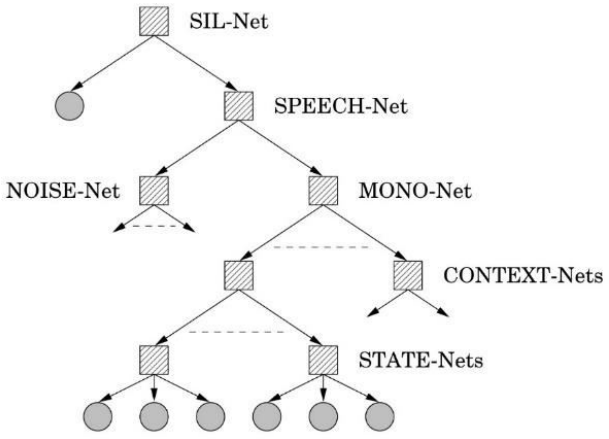


Fig. 15.4. Topology of a Hierarchy of Neural Networks (HNN) to estimate context-dependent posteriors, factored based on a-priori phonetic knowledge

ILUSTRACIÓN 28. EJEMPLO DE REDES NEURONALES. TOMADO DE MONTAVON, ORR, Y MŰLLER, 2012, P. 323.

REDES DE EXPECTATIVAS MARLO

> Thought is surrounded by a halo. —Its essence, logic, presents an order, in fact the a priori order of the world: that is, the order of possibilities, which must be common to both world and thought. (Wittgenstein, 1958, p. 26)

4.8 El conjunto como base de la inferencia

Los circuitos lógicos-bayesianos, o redes de expectativas Marlo, combinan principios de la inferencia lógica y matemática para generar un modelo en el que las proposiciones, así como las conclusiones que se siguen durante los procesos de razonamiento, pueden ser verdaderas, falsas, probables o inciertas en distinto grado.

Se presenta así una herramienta para la didáctica del razonamiento argumentativo que incorpora a los árboles bayesianos nodos lógicos *Or* y *And*, permitiendo resolver de un modo gráfico e intuitivo las relaciones lógicas que se establecen entre un número ilimitado de variables. Se pretende compartir una herramienta útil y eficaz en la didáctica de las bases lógicas elementales que subyacen a la inferencia matemática y científica. Se trata de difundir un método que puede ser empleado en la escuela para resolver problemas de lógica de proposiciones, de predicados y distintos ejercicios relacionados con la probabilidad matemática. Con ello se espera contribuir a mejorar la didáctica del razonamiento lógico, donde hoy se emplean, desde nuestro punto de vista, instrumentos que resultan a buena parte del alumnado excesivamente complejos y abstractos (Aznar, 2016b, 2016c).

Como ya sabemos, un sistema cognitivo codifica la experiencia generando representaciones y expectativas teóricas que le permiten anticipar la presencia o ausencia de un objeto a partir de la constatación empírica o teórica de la presencia o ausencia de otros objetos. Para ello, los sistemas requieren identificar los objetos mediante definiciones teóricas que permitan distinguirlos, clasificarlos y compararlos. Los objetos son así definidos en base a criterios relevantes, en parte innatos y en parte adquiridos, utilizando escalas de medida convencionales que permiten determinar en qué grado un estímulo se ajusta o no a un criterio.

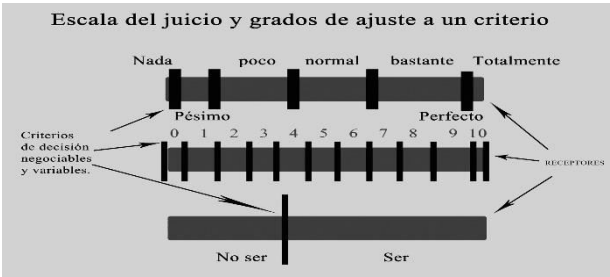


ILUSTRACIÓN 29. ESCALAS DE MEDIDA Y GRADOS DE SER.

Llamaremos *variable* a cada una de las divisiones de una escala. Por ejemplo, en relación a lo amenazante podemos distinguir estímulos desde nada amenazantes a totalmente amenazantes. Si, por ejemplo, clasificamos los restaurantes de una ciudad en base al criterio *elegancia* podemos emplear un sistema dicotómico en el que *e* signifique elegante y ¬*e* signifique no elegante. Así pues, las variables expresan cualidades en escalas de medida que pueden graduar el ajuste a un criterio desde nada a totalmente (Trillas, 2015) y pueden hacerlo con tantas divisiones como sea conveniente. Si graduamos la *elegancia* en escalas decimales podemos obtener, en teoría, infinitas variables entre *0e* y *1e*, pasando por *0.1e*, *0,2e*, *0,3e*, etc. Más divisiones en la escala significa una representación del medio con más matices, pero también supone un mayor coste cognitivo. Es por eso que las redes suelen limitarse a sistemas dicotómicos de clasificación en los que ser significa ajustarse a un criterio y no ser no ajustarse (Aznar, 2017a). Aunque sistemas dicotómicos resultan baratos de procesar, lo barato no es necesariamente rentable para el organismo.

Cualquier combinación de variables constituye un posible objeto teórico. Hablamos de objetos teóricos en un sentido muy próximo a los objetos que, como encontramos en Bochenski y Bravo (1985) ya fueron llamados *ens rationis* en la teoría tomista o seres con existencia lógica por autores como Russell (Russell, 1905) o Meinong en su famoso *Über Annahmen* (Meinong, 1910). *A priori* ninguna combinación es imposible, salvo las que incluyan dos grados excluyentes de una misma escala[8]. Por ejemplo, no podemos definir una mesa con 70 cm y 50 cm de largo. Lo contrario haría el conocimiento imposible e incomunicable, aunque conforme al espíritu de las lógicas difusas (Morales Luna, 2002), podemos modificar la escala, por ejemplo, de dicotómica a tricotómica, haciendo que un estímulo pueda cambiar de etiqueta y pasar, en nuestras redes, de ser grande a ser mediano. Si cambiamos la escala, cambia el objeto teórico.

Como ya indicamos en Aznar (2016b), nosotros partimos de que los sistemas generan representaciones del mundo en red que pretenden ser cognitivamente rentables. Así, cada sistema cognitivo integra como universo la información de sus subsistemas α, β, γ, …ω. Cada subsistema es considerado una red de nodos organizados en conjuntos de objetos que a su vez son definidos por asociaciones de variables únicas y distintas. Cuando las diferencias entre los objetos de un conjunto no sean relevantes, el conjunto puede convertirse en el objeto de consideración. Y del análisis de un objeto puede surgir un conjunto. De este modo tenemos en cuenta en la red los principios más básicos y más generales del aprendizaje: la generalización y la discriminación (Tarpy, 2000).

Las redes así consideradas difunden por los nodos verdades exclusivamente lógicas empleando marcadores del tipo nada, parte, todo, cualquiera, etc. También es posible añadir información cuantitativa precisa relativa al número de nodos verificados, los cuales pueden servir como antecedentes de un esquema de acción. Por ejemplo, *Si hay alumnos da la clase*; *Si faltan dos, pasa lista*, etc. Las redes combinan la información presente en sus receptores con las expectativas teóricas generadas mediante la codificación de la experiencia pasada propia o ajena. Esto les permite predecir y anticiparse mediante creencias no siempre adaptadas. No obstante, al tomar nuestras decisiones debemos distinguir la seguridad basada en el peso del conocimiento adquirido de la mera probabilidad. Un alumno sin conocimientos previos responderá un examen tipo test al azar, considerando que todas las opciones tienen las mismas probabilidades de ser ciertas. Sin embargo, en el alumno que ha estudiado, cada opción genera una seguridad subjetiva con un peso distinto que será el que incline la balanza de sus elecciones. Las redes distribuyen ese peso tratando de anticiparse de forma adaptada y para ello agrupan los nodos lógicos formando conjuntos permanentemente recodificados mediante procesos de síntesis y análisis. La síntesis permite convertir en unidad una pluralidad de objetos gracias a la captación de sus semejanzas. El análisis permite la operación inversa atendiendo a sus diferencias. Así pues, el conjunto es la estructura elemental de los sistemas y sirve como base de la inferencia. Un conjunto, como apreciamos en la ilustración 30, se compone en nuestras redes de nodos *Or*, nodos *Objeto* y nodos *And*. Así puede ser cierto que hay en clase algún alumno sin importar quién es (*Or*), puede ser cierto que está en clase el alumno José García (*Objeto*) y puede ser cierto que están todos los alumnos (*And*). Para que sea cierto el nodo *Or* bastará que al menos haya uno, y para que sea cierto el nodo *And* será necesario que no falte ninguno.

[8] Como lo que se defiende ahora es una herramienta didáctica y no una postura onto-epistemológica, evitaremos en esta sección la vieja discusión del estatus del "círculo cuadrado".

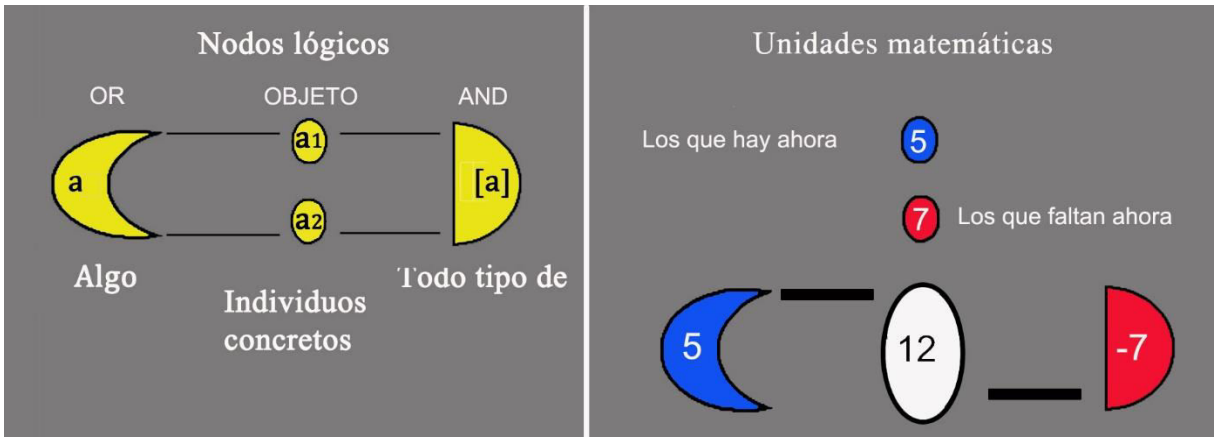


ILUSTRACIÓN 30. EL CONJUNTO COMO UNIDAD LÓGICA ELEMENTAL DE LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

Un nodo lógico *Or* queda definido por una o varias cualidades que son compartidas por los elementos de un conjunto, siendo nombrado de forma indeterminada con los términos "algún", "alguno", "uno cualquiera", "algo del tipo…". El nodo *Or* es activado por cualquier elemento del conjunto, representando a la vez a todos en general pero a ninguno en concreto. Por su parte, un nodo *Objeto* designa una combinación única y distinta de cualidades que le permiten diferenciarse del resto y constituirse como unidad dentro del conjunto. Cuando las diferencias entre objetos no son relevantes, el conjunto puede convertirse en el objeto en cuestión. Así, en una excursión puede que nos interese tomar como unidades a los grupos en lugar de a los alumnos, como cuando quiero informar al director de qué grupos han subido al autobús y cuáles siguen en el hotel.

Podemos añadir a los nodos *Or* un procesador matemático que permita establecer la proporción de objetos centrales con los que contamos como presentes durante una acción en curso. Cada objeto central es una de las partes del todo a la que podemos llamar unidad. Las unidades pueden ser contadas y su número es igual a N. La ilustración anterior pretende decir que de los doce objetos que constituyen N hay ausentes siete.

Basta la presencia de un objeto central cualquiera del conjunto para que sea cierto el nodo *Or*. Cuando el nodo *Or* es falso, el número de objetos presente es cero y el número de ausentes es igual a N. Es decir, que si es cierto que hay algo presente es faso que falte todo y si es falso que hay algo ahora es cierto que falta todo. No puede estar o faltar algo que no existe.

Los nodos *And* de las redes que hemos diseñado y publicado hasta ahora designaban síntesis cuantitativas del conjunto que podían ser teóricas o numéricas y así se ha mantenido en la mayor parte de las ilustraciones que presentamos en esta tesis. En la última versión de las redes de expectativas reservamos el nodo *And* para señalar en él el número de objetos ausente y acumulamos por el contrario los objetos presentes en los nodos *Or*. De este modo podemos saber el valor de N sumando los valores absolutos acumulados en *Or* y *And*.

Hay que percatarse de que las redes representan conjuntos en los que es posible que sea verdad al mismo tiempo, por ejemplo hablando de los alumnos, que los hay aplicados (A) y no aplicados ($\neg A$), aunque no pueda ser verdad al mismo tiempo que uno de ellos sea en un mismo momento y en el mismo sentido A y $\neg A$.

También habremos de tener en cuenta que podemos eliminar el componente fáctico de las proposiciones, que las sitúa en relación a nosotros mismos en algún momento del tiempo como presentes o ausentes, para referirnos a ellas genéricamente. Es decir, que las redes pueden tener un uso plenamente teórico en el que contamos con existencias sin importar su presencia/ausencia, y un uso fáctico en el que ser verdadero es lo mismo que estar disponible o presente. En este sentido, Carlson (1977) afirmaba:«The chief distinction to be dealt with is that between the 'generic' use of the bare plural (as in 'figs bark') and its existential or 'indefinite plural' use (as in 'He threw oranges at Alice')» (p.413).

4.8.1 Propagación de la certeza en la red. Primera inferencia

Una vez que comprendemos cómo se forman los conjuntos, podemos observar cómo se transmiten las certezas en todas las direcciones de un sistema teórico. Hablamos de certeza en un sentido muy similar al que empleaban

Boole y otros lógicos del siglo XIX para los que no existía una diferencia clara entre lógica y probabilidad. Nos referimos a la seguridad subjetiva que resulta de leyes objetivas. Por ejemplo, si veo entrar a mi mujer en casa, mi certeza subjetiva de que está en casa aumenta, mientras que si la veo salir, aumenta mi certeza de que no está. De la certeza de que sí y de que no depende lo que estamos dispuestos a arriesgar. Observemos que la propagación depende del nodo en el que se inicie la inferencia. Las inferencias son resultado de la mezcla de los tres colores tierra básicos, los cuales representan la certeza de que sí, de que no y la duda. Debe notarse que empleamos el sistema sustractivo del círculo cromático tradicional RYB (del inglés *Red*, *Yellow*, *Blue*) en el que se consideran primarios los colores rojo, amarillo y azul y secundarios al naranja, verde y morado (Bartolotta, 2017).

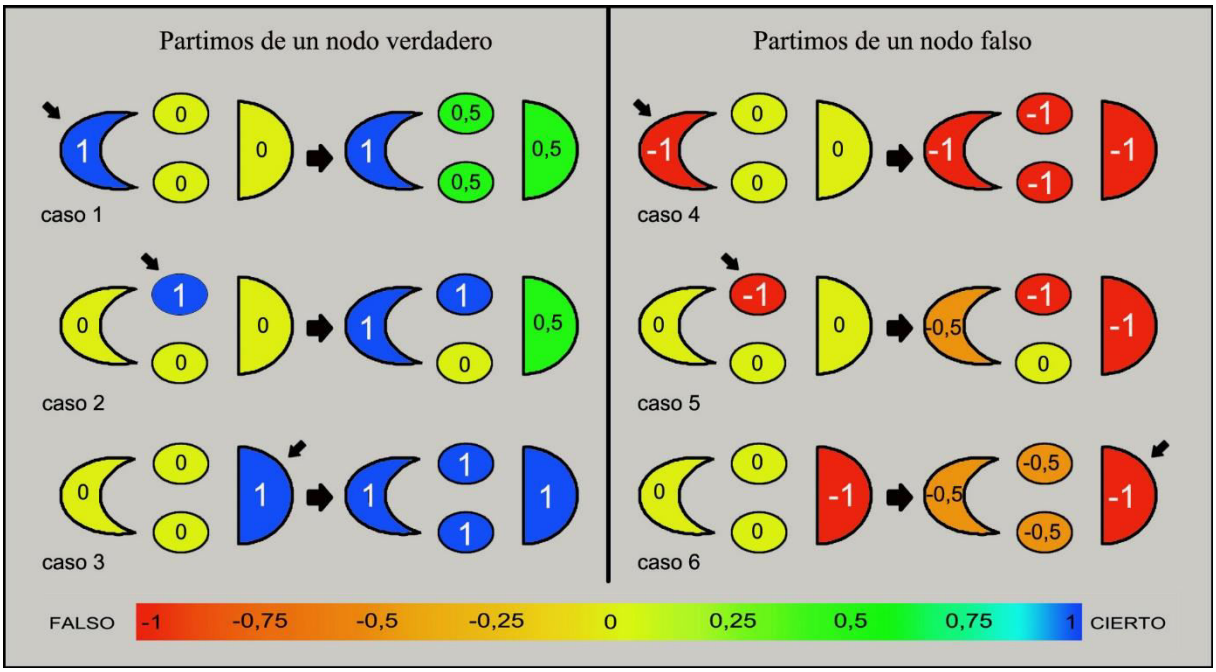


ILUSTRACIÓN 31. PROPAGACIÓN DE LA ACTIVACIÓN POR LOS NODOS DE UN CONJUNTO.

Podemos considerar todos los nodos de la red inicialmente inciertos, con un valor numérico igual a cero o cromático igual a amarillo. Los códigos de colores tienen una traducción directa a códigos numéricos que van desde -1 seguro que no está, pasando por 0, incierto a 1, seguro que la presencia es verdadera. Naranja adquiere un valor de -0,5 y verde de 0,5, significando respectivamente probablemente falso y probablemente verdadero. Las conexiones entre nodos producen conjuntos y las conexiones de los conjuntos sistemas.

Para comprender las leyes de la propagación de la certeza podemos suponer que hablamos del conjunto formado por mis dos primos gemelos Juan y Pedro. El nodo *Or* será cierto cuando esté presente cualquiera de ellos. El nodo *Objeto* central superior será verdadero cuando sea seguro que está Juan y el nodo *Objeto* central inferior será cierto cuando sea seguro que está Pedro. El nodo *And* será cierto cuando sea seguro que están los dos.

En el caso uno de la ilustración anterior el punto de partida de la inferencia es la afirmación del nodo *Or*, es decir, que decimos que es seguro que hay algún objeto, aunque no sabemos si más de uno ni cuál en concreto. Por eso la certeza se reparte entre los objetos o nodos centrales, que adquieren un valor igual a 0,5. Al mismo tiempo, el nodo *And* adquiere un valor de verdad igual al promedio de la verdad de los nodos *Objetos*, en este caso igual a 0,5. Podría ser el caso si a lo lejos vemos entrar de espaldas en nuestra casa a uno de los gemelos sin poder decir si se trata de Pedro o de Juan y sin saber si el otro está dentro o no. En ese momento tenemos motivos para asegurar que hay algún gemelo en nuestra casa (*Or*= 1= azul). Esos motivos se reparten por igual entre Juan y Pedro (nodos objeto = 0,5 y 0,5= verde) y aún tenemos motivos para pensar que es probable que estén los dos (*And* = 0,5)

En el caso dos partimos de afirmar un nodo central u objeto concreto. Por ejemplo, vemos entrar en casa a Juan sin saber si dentro está Pedro. De ahí deducimos que es cierto que hay alguno (*Or*= 1= azul) y deducimos que el peso de la certeza de que es cierto que está todo (*And*) es igual a 0,5, que es el promedio de uno y cero. [9]

En el caso tres una fuente de confianza nos asegura que están todos los gemelos en casa (*And*= 1= azul). Entonces sabemos que Juan está (nodo *Objeto* central superior = 1) y Pedro está (nodo *Objeto* central inferior = 1). Además sabemos seguro que es cierto que hay alguno, o lo que es lo mismo, podemos asegurar que es cierta la disyunción inclusiva Pedro o Juan están en casa (*Or* = 1= azul).

En los casos cuatro, cinco y seis partimos de situaciones en las que solo tenemos motivos para pensar que los nodos son falsos.

En el caso cuatro, una fuente de confianza nos asegura que es falso que haya alguno (*Or* = -1= rojo). Entonces podemos inferir que son falsos los nodos *Objetos* centrales y que es falso el nodo *And*. Recordemos que la falsedad de *Or* informa más que la de *And*, pues da más información decir que no hay ninguno (*Or* = -1) que afirmar que no están todos (*And* = -1).

En el caso cinco, la única información que tenemos es la que nos da ver salir de casa a Juan sin saber si Pedro está dentro. En ese momento es seguro que el nodo *Objeto* central superior que representa a Pedro en casa es falso (objeto superior central= -1= rojo). En consecuencia es seguro que es falso que están todos en casa (*And*= -1= rojo). El nodo central de Juan permanece incierto (objeto inferior = 0= amarillo). Por su parte, el nodo *Or* adquiere un valor de -0,5 = naranja, que se interpreta como probablemente es falso que haya alguno, y que resulta de promediar el valor de falsedad de los nodos centrales *Objeto*. Es decir, que lo mismo que el nodo *And* promedia la verdad de los objetos, el nodo *Or* promedia su falsedad. Si lo pensamos bien la única información segura que tenemos en el caso cinco es que Juan no está. ¿Hay alguno? Probablemente no, y aunque puede que finalmente esté Juan en casa, en este momento lo que sabemos nos inclina a pensar que no.

En el caso seis, el punto de partida es la seguridad de que es falso que todos (*And*=-1= rojo). Por ejemplo, queremos hacer una visita inesperada a uno de nuestros dos primos gemelos y al llegar cerca de su portal vemos que sale uno de los gemelos sin poder distinguir de cuál se trata. En ese momento solo sabemos que no están los dos en casa, por lo que solo tenemos motivos para pensar que probablemente el que buscamos no está. Es decir, que tenemos -0,5 en contra de la presencia de uno y -0,5 en contra de la presencia del otro (nodos centrales *Objeto* = -0,5= naranja). Al mismo tiempo solo tenemos evidencia para pensar que no hay ninguno, es decir, solo tenemos motivos para considerar el nodo *Or* como probablemente falso y por eso adquiere un peso para nosotros de -0,5, que resulta de promediar la falsedad de los objetos. *Es probable que no haya ninguno.*

¿Puede una fuente de información generar una entrada en la falsedad de un nodo igual a -0,25, -0,5 o -0,75? Pensamos que sí y de hecho, así daremos valor nosotros en la calculadora lógica a proposiciones del tipo *Es algo/bastante probable que no haya nadie en casa*; *Creo que Juan no está, pero no estoy seguro*, etc.

Es fácil observar que la certeza de que sí (activación) y de que no (inhibición) siguen principios opuestos en su propagación.

Por ejemplo, partiendo de un nodo verdadero el caso que menos incertidumbre nos deja es el caso tres. Si todo es cierto (*And*= 1= azul), es cierto cada uno (objeto = 1) y es cierto alguno (*Or* = 1). Sin embargo, partiendo de un nodo falso el más informativo es el caso cuatro: si ninguno (*Or*=-1), nada es cierto, ni los objetos ni el nodo *And*.

[9] Hasta ahora, pensando en la probabilidad conjunta, habíamos otorgado un valor al nodo AND igual al producto del peso de verdad de los objetos, pero se generaban al menos dos inconsistencias muy agudamente advertidas por nuestro antiguo alumno Guillermo Címbora Acosta: la primera consiste en que el nodo AND del caso dos sea más incierto que el nodo AND del caso uno, cuando en ambos casos sabemos lo mismo sobre la totalidad. La segunda consistente en que el orden de las premisas alteraría el valor del nodo AND. Así, tendría menos valor de certeza el nodo AND si afirmamos primero que es cierto A (nodo *Objeto*) y deducimos luego de ello que es cierto $A \vee B$ (nodo OR) que si afirmamos primero que es cierto $A \vee B$.

La verdad se propaga de los nodos *And* hacia los nodos objeto manteniendo el valor.

Lo mismo ocurre con la falsedad desde *Or* hacia los objetos, mantiene su valor.

La verdad de los objetos a los nodos *Or* se suma, lo mismo que su falsedad hacia los nodos *And*.

La verdad de los objetos hacia los nodos *And* se promedia, lo mismo que su falsedad hacia los nodos *Or*.

Cuando mediante la conexión de dos nodos *And* [*P*] y [*Q*] formemos un tercer nodo *And* [*R*] ,o mediante la conexión de dos nodos *Or P* y *Q* formemos un tercer nodo *Or R*, la verdad y la falsedad de los nodos R y [R] dependerá del promedio o las sumas de todos los nodos *Objetos* que alimentan a los nodos *Or* P, Q, o los nodos *And* [P] y [Q] y no directamente del promedio de dichos nodos *Or* y *And*, los cuales, en sí mismos, no significan matemáticamente nada al margen de los valores de sus nodos objeto asociados.

Es fácil ver que en las redes de expectativas las leyes de la inferencia se basan fundamentalmente en la teoría de la probabilidad del matemático inglés Thomas Baye**s** (Bayes, 1763), aunque nosotros, como ya hiciera Boole en 1854, pretendemos darle un peso mayor a la incertidumbre dentro del sistema, de modo que los problemas en los que todos los datos son conocidos de forma precisa son únicamente un caso particular de aquellos a los que nos enfrentamos tratando de hacer pronósticos razonables. En la siguiente ilustración podemos observar cómo en los casos uno y dos, en los que todos los datos son conocidos, el peso de la certeza en las redes puede interpretarse desde la probabilidad clásica con valores iguales a 0,25 y 0,5 respectivamente. Sin embargo, los casos tres y cuatro, en los que desconocemos el valor exacto de los nodos *Or* y de los nodos *And*, no podemos dar un equivalente en la teoría de la probabilidad clásica. Por eso llamamos a estos valores peso de certeza y no probabilidad.

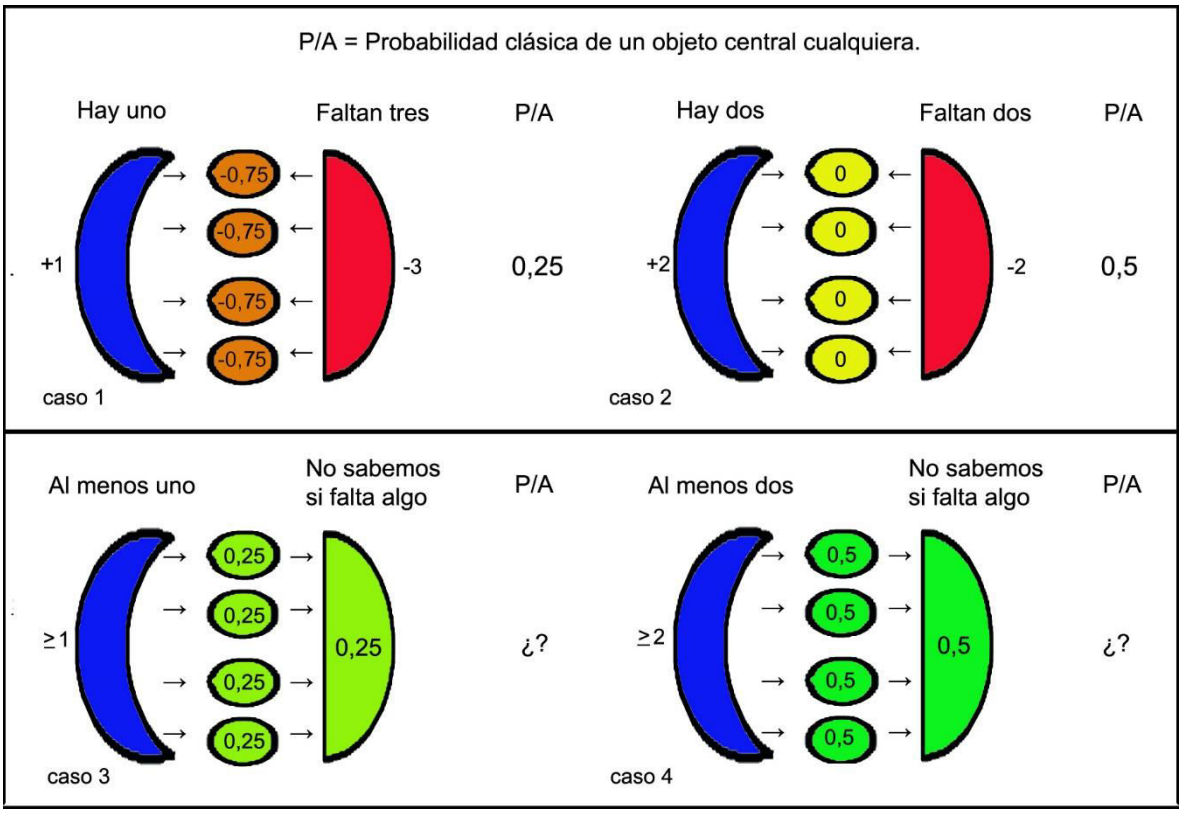


ILUSTRACIÓN 32. REDES CON Y SIN TRADUCCIÓN A LA PROBABILIDAD CLÁSICA.

El valor de un nodo resulta de sumar los motivos a favor y en contra que tenemos para pensar que es verdadero. Así se explica que en el caso uno lo que sabemos de *Or* y *And* nos haga pensar que si elegimos un nodo central cualquiera al azar probablemente será falso, pues cada nodo *Objeto* recibe parte de una sola carga de verdad desde *Or* y parte de las tres cargas de falsedad que se propagan desde *And*.

En el caso dos cada nodo *Objeto* recibe tantos motivos a favor desde *Or* como motivos en contra desde *And*, siendo el resultado igual a cero, incierto. Sabemos que hay dos y que faltan dos, pero en relación a cada uno de los objetos no tenemos motivos para decantar nuestra apuesta. La probabilidad clásica se centra en los motivos a favor y le da a cualquiera de los objetos una probabilidad igual a 0,5. Nosotros les damos un peso igual a cero.

En los casos tres y cuatro no podemos aplicar la probabilidad clásica porque el número de casos a favor y en contra está indeterminado. Sin embargo, tenemos motivos para pensar que sí, pero no pensar que no. Por eso el peso de nuestros nodos centrales y del nodo *And* es positivo en ambos casos. Es decir, que podemos apostar de forma razonable con lo que sabemos, aunque la incertidumbre forme parte de los datos. Y aunque es cierto que la apuesta es más fiable en los casos uno y dos, no son pocas las situaciones en las que preferiríamos el camino marcado por las situaciones tres y cuatro.

Desde esta perspectiva y siguiendo la idea manifestada ya por Łukasiewicz en *Elementos de la lógica matemática* (Łukasiewicz, Trad. 1991), podemos atribuir a los valores de verdad de las proposiciones, o nodos de la red, un número ilimitado de valores situados entre la verdad y la falsedad seguras, obteniendo así una analogía con el cálculo de probabilidades, en el que a diversos sucesos les asignamos un número ilimitado de grados de probabilidad. Seguimos pues, lo que Peirce llamaba una *concepción métrica de la verdad* [CP 3.365], que puede relacionarse con las lógicas polivalentes descubiertas, según Bochenski y Bravo (1985), al mismo tiempo en 1920 por J. Łukasiewicz (Łukasiewicz, Trad.1991) y E.L. Post (Post, 1921), siendo la bivalencia un caso particular en el que los nodos de nuestras redes adquieren valores extremos.

> 365. According to ordinary logic, a proposition is either true or false, and no further distinction is recognized. This is the descriptive conception, as the geometers say; the metric conception would be that every proposition is more or less false, and that the question is one of amount (Peirce: CP 3.365).

Más adelante mostramos que si queremos trabajar con valores bivalentes en nuestra calculadora lógica, solo tenemos que limitarnos a introducir valores enteros como se muestra en los dos únicos casos admitidos en la siguiente tabla:

> Si A es verdadero el *input* será 1 para certeza de que sí y 0 para certeza de que no, con lo que la diferencia será 1: seguro que sí.
>
> Si A es falso introduciremos 0 en la celda motivos a favor y -1 en la celda motivos en contra, de modo que la diferencia sea -1: seguro que no.

Luego solo tenemos que convertir -1 en 0 y ya estamos operando con valores bivalentes 1,0. También podríamos establecer valores umbral que determinen en los *outputs* a partir de qué decimal se considera la salida verdadera y a partir de cuál falsa, una capacidad de la que dispondría un sistema con capacidad de aprender aplicando la Teoría de Detección de Señales (ver *Marco-filosófico teórico*) para optimizar sus respuestas ante los estímulos del ambiente en función de las ganancias y las pérdidas asociadas a los falsos positivos, los falsos negativos y los aciertos (Aznar, 2016b).

	"HAY A"	
	CASO 1 Seguro que sí	*CASO 2* Seguro que no
Peso motivos verdad	1	0
Peso motivos falsedad	0	-1
Resultado redes	1	-1
Traducción bivalente	1	0

TABLA 2. CÓMO TRABAJAR CON VALORES BIVALENTES EN LA CALCULADORA LÓGICA.

Utilizando la concepción métrica de la verdad nos toparemos con que en algunos casos no podemos considerar los valores de salida definitivos. Así, cuando vamos de la verdad de *And* a la de *Objeto* o de la falsedad de *Or* a la de *Objeto*, los valores de *Objeto* son otorgados de forma aproximada. Por ejemplo, si un nodo *And* compuesto de dos elementos tiene un peso de verdad de 0,25, el valor aproximado de verdad de cada uno de sus componentes será de 0,25. Sin embargo, nada impide que el valor 0,25 del nodo *And* sea resultado del promedio del valor de dos nodos objeto igual a 0,5 y cero respectivamente. Eso significa que debería establecerse una función para los procesos de reparto en estos casos, aunque nos parece que la solución del promedio es más económica en términos

de procesamiento de la información y genera valores que son razonables dentro del rango de los que admitiría dicha función. Además, estos valores pueden corregirse a partir de los datos del resto de la red.

El hecho de que las salidas sean valores aproximados no le resta rigor al cómputo en la red. Pensemos que cuando partimos de los nodos *Objeto* para asignar valor a los nodos genéricos *Or* y *And* el cálculo es exacto. Sin embargo, si partimos de que *Es probable que sea falso que hay algo* (es probable que no haya ninguno) o partimos de que *Es probable que está todo*, es imposible determinar de manera unívoca cuál sea el peso de los nodos *Objeto* que nos hace pensar así. Si digo que *Probablemente están todos mis alumnos en clase*, puede ser cierto que estoy casi seguro de cada uno de ellos y puede ser cierto que no estoy casi seguro de algunos y totalmente seguro de otros. Es necesario implementar en la calculadora lógica con sumatorios cuantitativos en los nodos *Or* y *And* para poder asignar un valor matemático preciso a la certeza de que sí y de que no en estos casos. Por ejemplo, la proposición matemática *Hay 29 de 30 seguros y el último probablemente está también* ofrece información más precisa que la contenida en la proposición meramente lógica *Probablemente están todos.* Y más preciso aún es decir *Hay 29 de 30 seguros y del que no estamos seguros no sabemos nada* que decir *No sabemos si están todos*.

La precisión numérica conlleva costes de procesamiento adicionales, pero creemos que no será difícil implementarla en la siguiente versión de nuestra calculadora lógica, una vez diseñada la arquitectura elemental de las conexiones lógico-matemáticas de la aritmética en las redes de expectativas.

4.8.2 Segunda inferencia: Intuición y expectativa en los nodos

Las conexiones permitidas transmitirán la activación provocada por un estímulo en el circuito en todas las direcciones. Cuando solo haya una conexión permitida, esa conexión será obligada. Si hay varias, tendremos una disyunción, es decir, una serie de conexiones probables. En las disyunciones, la energía de activación tendrá que repartirse según el peso de los nodos de la disyuntiva, un peso que solo es el mismo a priori. Dado que los sistemas cognitivos están al servicio de la vida y que la vida requiere tomar decisiones aquí y ahora, el peso de los nodos debe ser circunstancial. Es fácil suponer que los nodos con más peso deberían ser los activados con mayor frecuencia, que los intereses pre-activan algunos nodos y que cuanto más reciente fue la última activación más peso se conserva. Por ejemplo, ¿en quién pensamos al escuchar el portal?: si espero una carta pensaré que entró el cartero, y si no que es la vecina de siempre o el hombre al que vi entrar ayer por la tarde (Aznar, 2016b). En todo caso, nosotros solo describiremos en esta tesis formalmente los sistemas al margen de factores contextuales.

No obstante, en su versión compleja, los nodos de las redes de expectativas estarían divididos en un componente teórico y otro fáctico. El componente teórico se puede señalar como un cerco o borde exterior en el nodo que aumenta de grosor a medida que se acumula experiencia, aumentando a su vez el peso en la expectativa de que dicho nodo vuelva a activarse. El componente fáctico se representa en el núcleo del nodo y solo puede ser directamente activado por los receptores del sistema cuando detecten la presencia o ausencia de un tipo de objeto. Recordemos que, como Hume y Ortega nos dirían, aunque estemos muy seguros de la existencia de algo que acabamos de ver hace un instante, nada nos asegura que dicho objeto siga existiendo ahora.

A pesar de que nunca hemos empleado esta complejidad en nuestras clases de Lógica, separar en los nodos un componente teórico externo de un núcleo interior intuitivo fue una conclusión consensuada con nuestros alumnos/as tras varias clases discutiendo cómo expresar en las redes la diferencia que hay entre confiar en que el ordenanza está en conserjería porque lo viste hace un minuto (o porque yo te digo que está allí ahora) y saber que el ordenanza está en conserjería porque le estás viendo tú en este preciso momento. La siguiente ilustración muestra cómo expresamos gráficamente la diferencia entre percibir algo y pensar que debe haberlo. La parte interior de cada nodo recoge la experiencia directa e inmediata de los sistemas captada por sus receptores exteroceptivos o interoceptivos. La parte externa codifica expectativas. Los sistemas que confunden suposiciones con evidencias carecen de sentido crítico

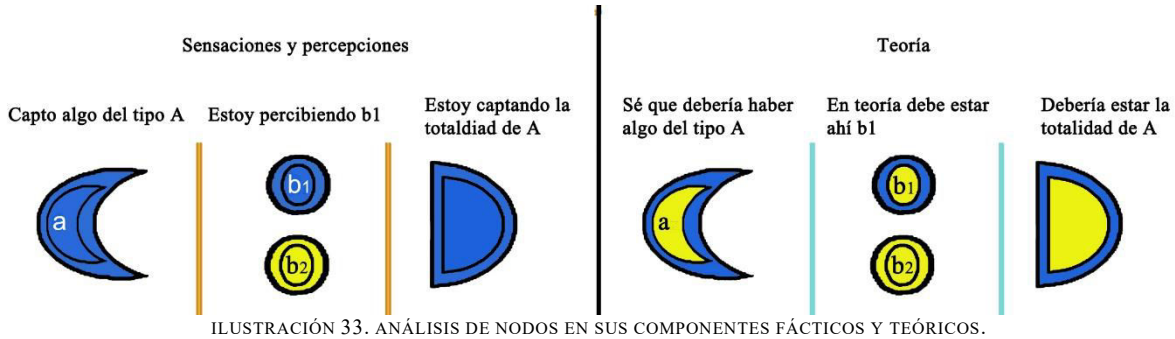


ILUSTRACIÓN 33. ANÁLISIS DE NODOS EN SUS COMPONENTES FÁCTICOS Y TEÓRICOS.

Descomponer en los nodos el componente intuitivo del teórico nos permite diferenciar en las redes entre inferencias basadas en la intuición e inferencias teóricas.

Recordemos las leyes de la propagación de la activación que determinan la primera inferencia en el sistema. Como vemos en la siguiente imagen, partiendo de un nodo central *Objeto* verdadero tenemos que es verdadero su nodo *Or* y probablemente verdadero su nodo *And*. Partiendo de un nodo *Objeto* central falso, tenemos que el nodo *And* es falso y el nodo *Or* probablemente falso. Al final de la primera inferencia quedan nodos centrales con incertidumbre. Sin embargo, sabemos que los nodos *And* reparten a cada uno los nodos *Objetos* centrales el equivalente a su verdad, lo mismo que los nodos *Or* propagan su falsedad a los objetos. Igualmente, cada uno de los nodos *Or* reparte su verdad promediando su valor entre los nodos objeto y del mismo modo, los nodos *And* reparten su falsedad promediando su valor entre los objetos. Todo ello significa que las leyes de propagación de la red permiten realizar una segunda inferencia que dote de valor a todos los nodos objeto teniendo en cuenta los valores de los nodos *And* y *Or*. Hemos discutido en el aula y fuera del aula en muchas ocasiones cómo debería representarse en la red esta segunda inferencia. Imaginemos que preguntamos a diez jóvenes si saben quién es Eva Perón. Cuando nueve hayan contestado ya que no, podremos concluir que el décimo probablemente no la conoce tampoco. Nosotros pensamos que es conveniente distinguir la expectativa de que el décimo no la conoce de los valores obtenidos mediante evidencia directa. Este valor nos parece más teórico, más mental y es por ello que lo representaremos como un cerco que bordea el núcleo del nodo, separando lo que sabemos de lo que suponemos.

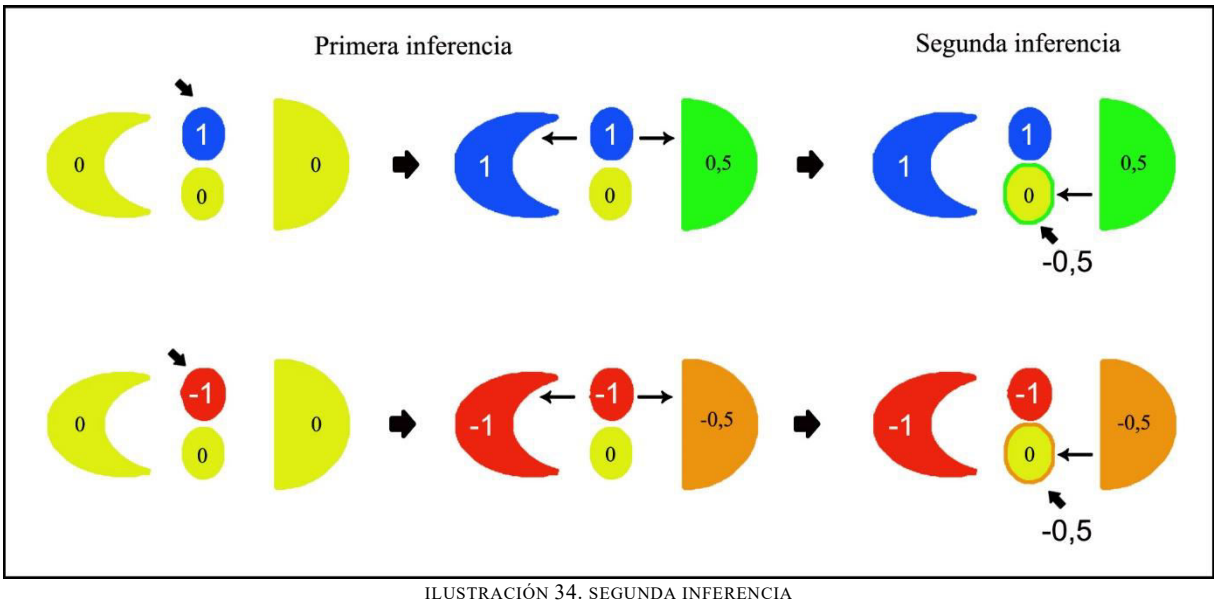


ILUSTRACIÓN 34. SEGUNDA INFERENCIA

El primer caso de la siguiente ilustración que expresa inferencias con intuición directa puede ejemplificar lo que ocurre cuando veo a una gemela en el instituto sin poder concretar quién es. Para mí, entonces, es seguro que hay alguna gemela en el centro. A partir de ahí tengo motivos para inferir que se trata de la gemela *b1* y tengo los mismos motivos para inferir que es la gemela *b2*. La miramos sin poder concretar quién es y por ello hemos tintado los núcleos de ambos nodos con "verde probable" representando el hecho de que veo a una y veo a la otra al mismo tiempo sin poder determinar exactamente de cuál se trata. También podemos afirmar que es probable que las dos

gemelas se encuentren en el instituto, lo cual expresamos en el nodo *And*. La certeza subjetiva de que habiendo algo está todo será inversamente proporcional al número de elementos en juego, y sería, por tanto, menor si fueran trillizos o cuatrillizos. Recordemos que el nodo *And* se obtiene promediando el valor de todos sus objetos.

En el caso dos partimos de la verificación empírica de un objeto concreto. Si reconozco a la gemela *b1* entrando en un portal, puedo inferir y afirmar con certeza que hay alguna gemela en dicho portal y tengo algún motivo para esperar que estén las dos gemelas ahí. La inferencia de que estando una es esperable que esté la otra depende en buena medida de nuestra creencia en la regularidad del devenir y en la homogeneidad de los hechos, y aunque no elimina la incertidumbre puede ayudarnos a tomar decisiones. Así, si organizamos una fiesta para cien personas y llamamos al azar a diez de ellas para saber si van a venir y nos dicen las diez que no ¿sería razonable comprar comida para noventa? Un estadístico podría especificar las leyes de lo esperable, lo cual solo se expresa vagamente en la red en los valores promedios de los nodos *And* para las presencias y de los nodos *Or* para las ausencias.

En el caso tres tenemos a las dos gemelas delante de nosotros en hora de clase en la cafetería. Si la jefa de estudios nos dijo que avisáramos si veíamos a alguna gemela, se cumple la condición. También podemos decir al profesor de *b1* que *b1* está en la cafetería y lo mismo al profesor de *b2*. En todo caso, y aunque puede discutirse que tengamos una intuición directa de ambas como unidad o todo, no es menos cierto que en ocasiones tenemos delante dos gemelas y sabemos que están todas antes sin saber cuál es cada una, quizá porque sea inmediata la intuición de que no falta ninguna.

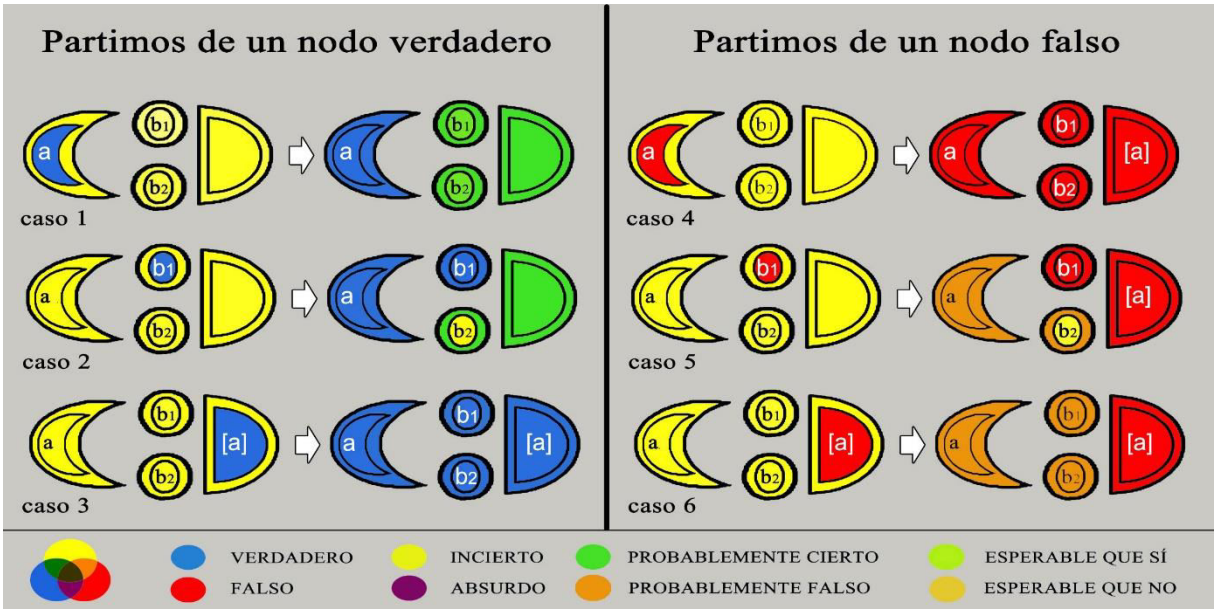


ILUSTRACIÓN 35. PROPAGACIÓN DE LA VERDAD PARTIENDO DE LA VERIFICACIÓN EMPÍRICA DE UN NODO.

Los motivos para esperar que sí son independientes de las razones para pensar que no y de hecho ocurre que solemos tener motivos en ambos sentidos.

En el caso cuatro partimos de la confirmación empírica de que es falso que haya alguna en clase. Luego no hay ninguna. Y será falso cada objeto y será falsa la totalidad. También ahora podemos afirmar sin ninguna duda razonable que están ausentes. En el caso cinco comprobamos por nosotros mismos que *b1* no está en su mesa. En ese instante podemos afirmar que es falso que *b1* esté en su mesa y podemos afirmar con certeza que sería falso afirmar que las dos gemelas están sentadas en sus mesas. Además, tenemos motivos para sospechar que *b2* tampoco esté en su mesa, y pueden ser suficientes para que tratemos de comprobarlo mirando en aquella dirección. Debemos advertir que nos acompaña la duda, ya que no tenemos evidencia de la ausencia de *b2*.

En el caso seis partimos de la única certeza de que no están las dos en el instituto porque hemos visto salir a una sin reconocerla sin saber nada de la otra. Ahora es probablemente falso afirmar que está *b1* y es probablemente falso afirmar que está *b2* en clase.

La siguiente ilustración nos muestra las mismas inferencias partiendo de confirmaciones teóricas que pueden ser obtenidas de terceras personas. Como norma general establecemos que los valores de los núcleos de los nodos se propagan hacia los cercos, pero no al revés. Por eso todos los núcleos permanecen en amarillo.

En el caso uno, el conserje nos informa de que él ha visto pasar al menos a una de las gemelas. Ahora podemos inferir, si confiamos en la fuente, que en teoría hay alguna gemela en el centro. Por eso es azul el exterior del nodo *Or*. En tal caso podríamos inferir también que teóricamente el peso de la evidencia se reparte por igual entre *b1* y *b2*. Por eso el verde exterior de los objetos *b1* y *b2*. También tenemos motivos para esperar que estén las dos, y por eso es verde el borde exterior del nodo *And*.

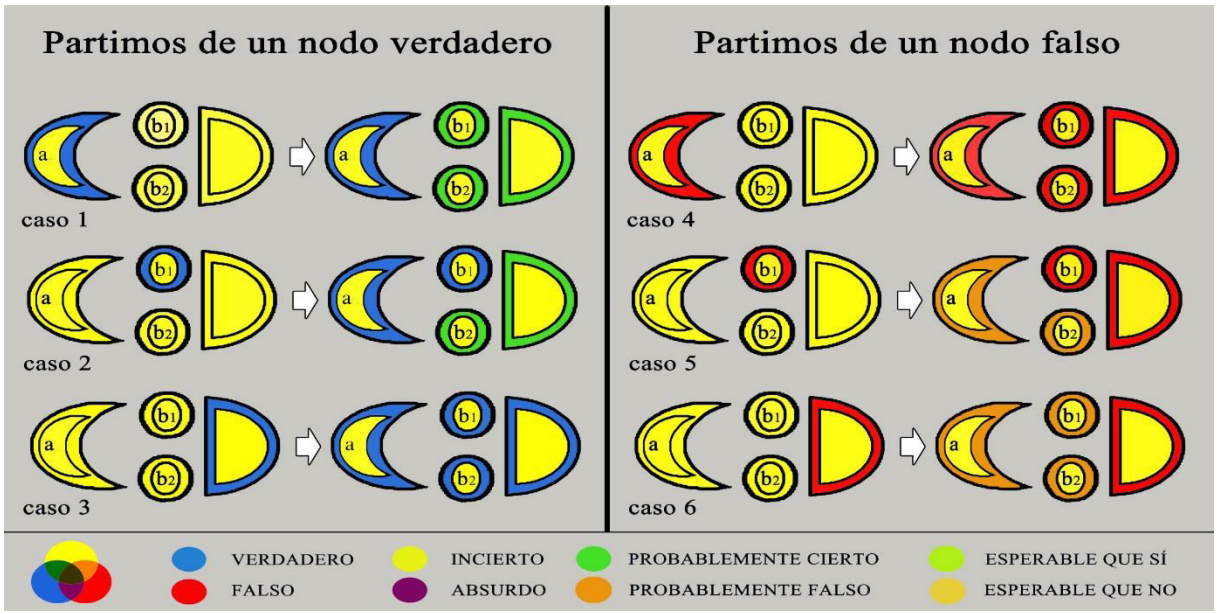


ILUSTRACIÓN 36. LEYES DE INFERENCIA TEÓRICA EN LOS NODOS DE UN CONJUNTO.

La misma lógica se sigue en el resto de casos de esta última ilustración. Debemos advertir que en dicha figura no podemos eliminar la incertidumbre de ningún nodo, máxime cuando los sistemas intercambian información con fines manipulativos. Es decir, que si no lo veo, no lo creo del todo…

En el primer ejercicio del capítulo nueve hemos representado las conclusiones de la primera inferencia en el núcleo de los nodos y las segundas inferencias en los contornos. En este y otros ejercicios podemos observar que los contornos de las segundas inferencias obtenidas tras afirmar o negar un nodo *Or* concreto no han tenido en cuenta los contornos que empleamos para destacar los sujetos y predicados explícitamente mencionados en las premisas. Cómo integrar los valores iniciales de los términos que se desprenden de las premisas con los valores de la segunda inferencia es algo en lo que no hemos pensado todavía. En todo caso, la complicación de la segunda inferencia representada en los contornos de los nodos puede ser omitida en secundaria, aunque también puede ser objeto de una interesante discusión filosófica en el aula.

Podemos intentar una clasificación de los tipos de razonamiento que se producen en las redes en base a la fuerza de la inferencia. La deducción en la red propaga valores de certeza absolutos de uno y menos uno. En la inducción el valor de falsedad que reciben los nodos *Or* y de verdad que llega a los nodos *And* solo alcanza valores absolutos cuando se conocen todos los valores de los nodos centrales. En el razonamiento probable los valores que recibe los nodos *Objetos* de la falsedad de *And* y la verdad de *Or* solo son aproximados como ya explicamos, pues un nodo *And* con valor +0,8 o un nodo *Or* con un valor de -0,6 puede ser el promedio de muchas combinaciones de valores entre sus nodos. Por último, en el razonamiento estadístico generado en la segunda inferencia, el valor del nodo solo se sostiene mediante la evidencia directa del resto de nodos del conjunto. Así, si nueve de diez chicas a las que pedimos bailar nos dicen que no, es razonable suponer que lo más probable es que la décima tampoco quiera bailar con nosotros, aunque no sabemos absolutamente nada de sus intenciones.

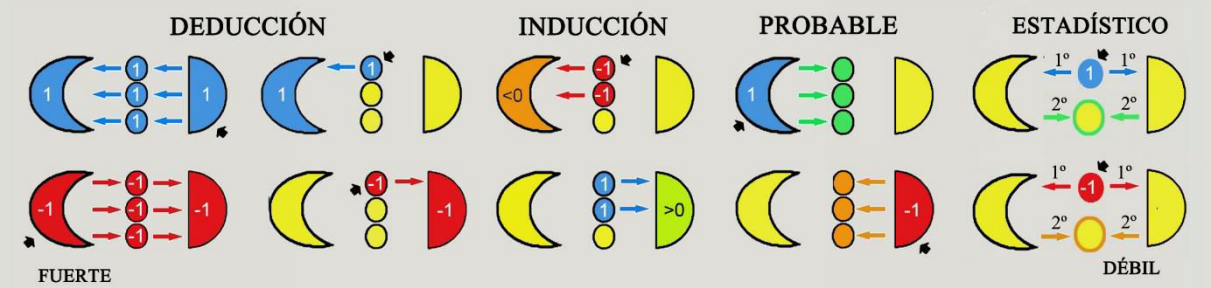


ILUSTRACIÓN 37. CLASIFICACIÓN DE LA INFERENCIA EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS DE FUERTE A DÉBIL.

4.9 Base del sistema Alfa

La siguiente ilustración nos muestra la red teórica de un subsistema α de información que juzga los estímulos en base a tres criterios: a, b, c, siendo a el criterio de referencia. Cada criterio se ha dividido en dos variables dicotómicas. La mitad significan ser o ajustarse al criterio: a, b, c. El resto significa no ser o no ajustarse al criterio: ¬a, ¬b, ¬c.

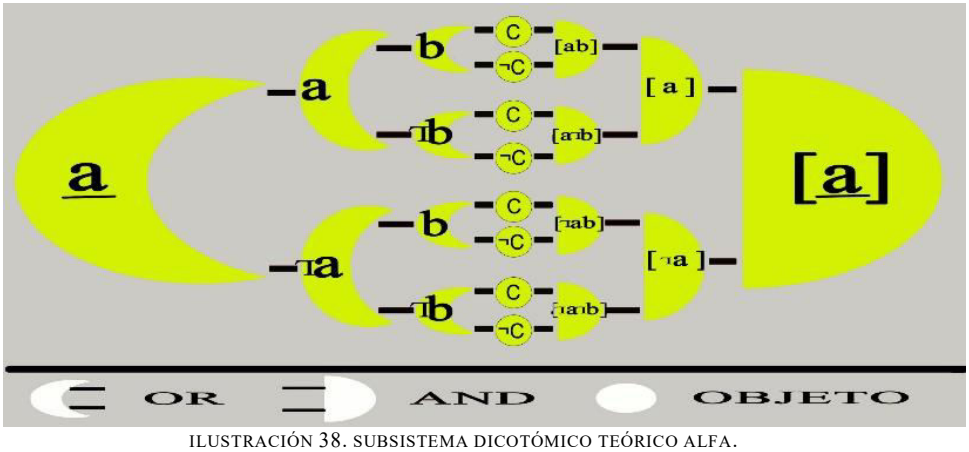


ILUSTRACIÓN 38. SUBSISTEMA DICOTÓMICO TEÓRICO ALFA.

El primer nodo de la izquierda es un super nodo *Criterio* que podemos convenir que sea verdadero cuando haya algo, sea lo que sea y falso cuando no haya nada de nada. Para comprender el significado de la representación podemos imaginar un sistema cognitivo que busca en el medio objetos con los que satisfacer las necesidades del organismo. Cuando inicia la búsqueda se activan los nodos *Criterio*, de modo que sin ellos sería imposible juzgar y decidir nuestras conductas de orientación y evitación: ¿Hay algo que pueda ser juzgado como nutritivo o no nutritivo? ¿Hay algo amenazante-no amenazante?, etc. Así, los nodos *Criterio* están activos cuando pretendemos detectar tipos de cosas o cualidades, aunque se puede utilizar, siguiendo a Macfarlane, el término "carácter" en lugar de "cualidad", pues él lo consideraba más general. El sistema Alfa de la ilustración anterior es la base de cualquier sistema de información genérico o teórico que pretenda ser representado en nuestras redes.

Señalamos los criterios en la red utilizando el subrayado, de modo que distinguimos entre el criterio $\underline{a}$ y las variables *a* y ¬*a*. La siguiente columna de células *Or* en Alfa son nodos teóricos ya susceptibles de ser verdaderos o falsos en tanto afirman que *Hay algún tipo de a* y que *Hay algún tipo de no a* respectivamente.

Lo mismo ocurre con la siguiente columna de nodos *Or* surgidos de combinar $\underline{a}$ con $\underline{b}$: $\underline{a}*\underline{b}$ = (*ab*, *a*¬*b*, ¬*ab*, ¬*a*¬*b*).

En el medio de la figura tenemos los ocho objetos teóricos posibles o nodos *Objeto* que surgen de combinar sin repetición todas las variables de $\underline{a}$, $\underline{b}$ y $\underline{c}$. (*abc, ab*¬*c, a*¬*bc, a*¬*b*¬*c,* ¬*abc,* ¬*ab*¬*c,* ¬*a*¬*bc,* ¬*a*¬*b*¬*c*).

Los nodos objeto representan concreciones y son los primeros elementos del sistema, pues de ellos dependen en último término los nodos abstractos *Or* y *And*, y no al revés, como veremos más adelante al distribuir la verdad y la falsedad matemáticamente en la red.

A la derecha de los objetos tenemos la primera columna de nodos *And*. Cada nodo *And* completa al conjunto que se abre a su izquierda con el nodo cualitativo *Or*. Así, si es cierto el nodo *And* $[ab]$ es cierto que son verdaderos todos los tipos de *ab* admitidos en la red. En esta caso *abc* y *ab*¬*c*. Lógicamente, también serán ciertos los nodos mínimos *Or*: *a, b, c,*¬*c*.

La siguiente columna de nodos *And* cierra al conjunto de todas las posibilidades de *a* y de todas las posibilidades de ¬*a*. Si, por ejemplo, $[a]$ es verdadero significará que son verdaderas todas las posibles combinaciones de la variable *a* que son admitidas.

Por último, el súper-nodo *And* de la derecha nos indica que todo es verdadero. A diferencia de las redes teóricas o genéricas, en las redes completas o fácticas de un ecosistema de aves el súper-nodo *And* será verdadero cuando estén materialmente presentes todos los tipos de aves que cabe esperar en dicho ecosistema. Pero en el sistema Alfa teórico *And* solo puede significar que existen aves de todos los tipos en dicho ecosistema, sin precisar si parte de esas aves están allí o han emigrado temporalmente, lo cual supone menos información para el turista interesado en visitarlo.

4.10 Notación elemental

Nosotros designamos los conectores con una notación asociativa que, siendo compatible con la notación convencional, no significa exactamente lo mismo.

- Todo *p* se asocia con todo *a*. Bicondicional. (1)

$$p_x a_x \tag{1}$$

- Todo *p* se asocia con parte de *a.* Condicional. (2)

$$p_x a \tag{2}$$

- Parte de lo que es *p* se asocia con todo lo que es *a*. Es la estructura que subyace a expresiones del tipo “solo en p tenemos a”. Condicional inverso o exclusiva. (3)

$$p a_x \tag{3}$$

- Parte de *p* se asocia con parte de *a.* Conjunción parcial. (4)

$$pa \tag{4}$$

Como dato histórico diremos que el uso de x para expresar en las fórmulas cualquiera o todo ya fue utilizado antes de nosotros por Solomon Maimon (1753-1800) en su obra *Versuch einer neuen Logik oder Theorie des Denkens*, formalizando *Toda A es B*, *luego toda* ¬*B es* ¬*A* como: *ax = b*, luego *(-bx)=-a* (Maimon, 1794, p. 80). Nosotros decimos $a_x b$, luego $\neg b_x \neg a$. En Maimon, *a* significa lo determinable, *b* la determinación dada, y *x* significa cualquier posible determinación (p. 59).

4.11 Los conectores en las redes de expectativas

Los circuitos lógicos bayesianos nos permiten comprender que la inferencia se produce por la conexión entre nodos, y como ya hemos podido intuir al resolver los ejercicios lógico-matemáticos, los conectores se limitan a comunicar la eliminación de determinados nodos de las disyuntivas, estableciendo la necesidad de sus alternativas. (Se puede consultar el vídeo explicativo ‘Anexo 1: Cap. 5, Conectores en la red’). Podemos observar los nodos eliminados por cada conectiva en la siguiente ilustración.

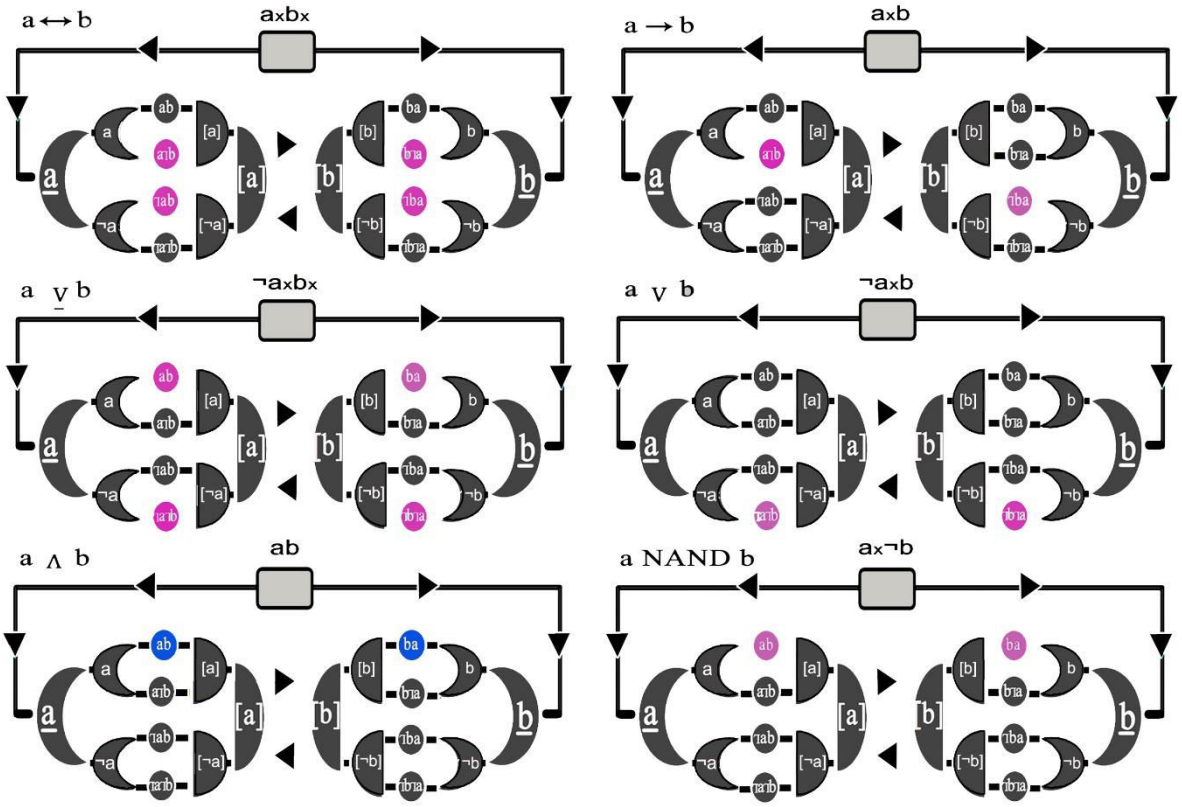


ILUSTRACIÓN 39. DEFINICIÓN DE LOS CONECTORES EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS MARLO. MORADO SIGNIFICA POSIBILIDAD ELIMINADA Y AZUL NODO ACTIVO.

Siguiendo la tradición de la lógica matemática excepto para la conjunción por los motivos ya explicados que se siguen de la lógica del conjunto, definimos los conectores lógicos por las combinaciones que eliminan de forma teórica en la red, aunque nosotros sí podemos asumir que las proposiciones universales contengan una carga existencial teórica. Por ejemplo, si defino la variable *A* como equivalente a la variable *B*, no es posible encontrar objetos definidos por *A* y ¬*B* o por ¬*A* y *B*. Las posibilidades eliminadas se representan en morado y no ponderan en la consideración de la verdad de los nodos *And*.

Al codificar y/o comunicar información con los conectores también se dejan posibilidades inciertas, algo que ya era afirmado por Venn en su famosa *Symbolic Logic* y que discutiremos detalladamente en la siguiente sección dedicada a la historia de los diagramas. Por ejemplo, si afirmo que *teniendo A, entonces tengo B*, las posibilidades *B*¬*A* y ¬*AB* permanece inciertas en la red. En nuestras figuras un nodo amarillo significa una posibilidad no eliminada ni confirmada por el enunciado. En las redes, un nodo amarillo por un conector puede ser eliminado sin incurrir en contradicción, pero no ocurre lo mismo con los nodos implicados en la transposición de las proposiciones. Por ejemplo, si digo que *Toda A es B* el nodo *B*¬*A* queda en amarillo porque es aceptable finalmente que *Toda B sea A*, con lo cual eliminaremos dicho nodo, siendo igualmente aceptable que dicho nodo permanezca. Sin embargo, el nodo ¬*B*¬*A* debe mantenerse como posible necesariamente, pues si no existe la posibilidad ¬*B*¬*A* y no existe la posibilidad ¬*BA* inicialmente eliminada por la universal afirmativa, entonces no puede existir nada en la red que sea ¬*B*, dado que todo estímulo en un sistema dicotómico, en este caso algo juzgado como ¬*B*, debe ser juzgado necesariamente como *A* o ¬*A*. Como veremos con más detalle en la sección de la historia de los diagramas, esta división entre lo incierto eliminable y lo incierto no eliminable resulta hoy irrelevante para la lógica matemática porque es coherente desde su paradigma afirmar al mismo tiempo que *Toda A es B* y que no hay A, pero fue objeto de un interesante debate entre los lógicos del XIX y sigue siendo de interés hoy para los aristotélicos determinar en qué condiciones pueden ser ciertas la universal afirmativa y/o la condicional y en qué condiciones carecen de sentido (Oriol & Gambra, 2015).

En la sección dedicada a la historia de los diagramas y sus bases lógicas discutiremos el problema del contenido existencial de las proposiciones, aunque queremos insistir que nuestras redes resolverán lo mismo formalizando con las convenciones de la lógica matemática, con las de la lógica aristotélica o con las que proponemos nosotros. Como ya hemos dicho antes (Aznar, 2016b), a la hora de asignar la carga existencial de una proposición no atendemos al hecho de que sea universal o particular, sino al hecho de que se proponga de forma teórica o de forma fáctica, es decir, con razón suficiente para ser tenida en cuenta aquí y ahora. Así aceptamos que la proposición *Ningún estudiante sabe alemán* informa de que existen estudiantes, siendo distinta su carga de la proposición *No hay estudiantes que sepan alemán*.

4.11.1 La conjunción no elimina posibilidades en la lógica del conjunto

En relación a la conjunción, De Morgan distinguió composición (XY) y agregación (X, Y) y en el mismo sentido nosotros podemos interpretar la conjunción A y B como composición cuando se afirma el nodo AB y como agregación cuando se afirman por separado los nodos "*Or* A" y "*Or* B". En el segundo caso el objeto *AB* solo es probable porque es admisible el objeto $B\neg A$ aunque sea cierto el carácter *A*. Esta compatibilidad de *A* y $\neg A$ ocurre en la lógica del conjunto pero no en la del objeto. Recordemos que en la lógica de proposiciones que enseñamos en el aula, si afirmamos que es cierto *A* y que es cierto *B*, entonces es cierto A ⋀ B, lo cual elimina el resto de las combinaciones $A\neg B$, $\neg AB$, $\neg A\neg B$. En la red de expectativas la conjunción no elimina posibilidades en el sentido en el que lo hacen el resto de los conectores.

Afirmar la conjunción teórica de dos variables *AB* deja inciertas el resto de las posibilidades. Por ejemplo, si afirmo que tengo lápices caros, afirmo la conjunción de las variables ser lápiz y ser caro, pero no elimino la incertidumbre respecto a si tengo o no otros objetos caros que no sean lápices, ni la incertidumbre de si tengo o no lápices baratos. Observemos que hablamos de la conjunción dentro de un conjunto de elementos, siendo posible tener a la vez *A* y $\neg A$. Luego no nos referimos a ella como en lógica de proposiciones, donde se la trata como conjunción de propiedades en un mismo objeto. En un mismo objeto es imposible tener a la vez *A* y $\neg A$.

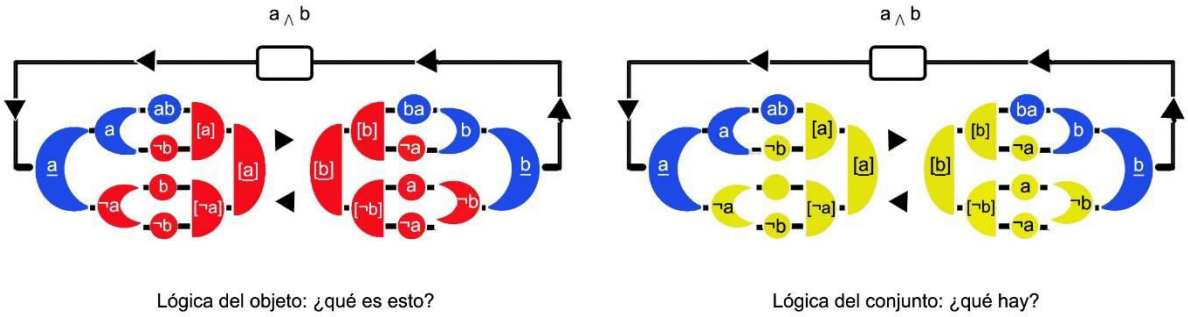


ILUSTRACIÓN 40. DIFERENCIAS EN LA CONJUNCIÓN ENTRE LA LÓGICA DEL OBJETO Y DEL CONJUNTO.

La conjunción en las tablas de verdad clásicas se refiere a la determinación de lo que el objeto en cuestión es de hecho, mientras que el resto de los conectores se refieren a las posibilidades teóricas o esenciales que están permitidas en un conjunto de objetos (Aznar, 2016b).

Supongamos que afirmo que en mi bolsa de la compra todas las peras están maduras $p_x m$, $(p \rightarrow m)$. Si metes la mano en la bolsa y sacas una manzana, esté o no madura, mi afirmación sigue siendo cierta. En una proposición condicional, "cierto" significa que los hechos están permitidos o no contradicen mi afirmación. Pero supongamos que ahora afirmo que tengo peras maduras. En este momento solo afirmo la conjunción pera y madura en mi bolsa $pm = p \wedge m$. Y si tratáramos a la conjunción como a la condicional deberían estar igualmente permitidas en una tabla de verdad las posibilidades $\cdot\neg p\neg m$, $\neg pm$, $p\neg m$, hasta que se agotaran las opciones de llegar a sacar de la bolsa *pm* (es pera, es madura).

Por eso en la lógica del conjunto no podemos admitir la introducción de la conjunción partiendo de dos variables. Es decir, si es cierto *A* y es cierto *B*, la conjunción *AB* en un mismo objeto solo es probable. Tampoco podemos

asumir en la lógica del conjunto que *Si tengo A, entonces tengo que B→A*. Ambas reglas solo se cumplen en la lógica del conjunto cuando el número de elementos de Alfa es igual a uno:

$$\frac{\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}}{ab}$$

$$\frac{a}{b \rightarrow a}$$

4.12 Ejemplos de inferencias teóricas en la red de expectativas

Con los principios enunciados hasta ahora es posible proponer a los alumnos ejercicios de inferencias lógicas como los que se muestran a continuación empleando o bien números o bien la mezcla matemática de los colores tierra como apoyo de las inferencias lingüísticas.

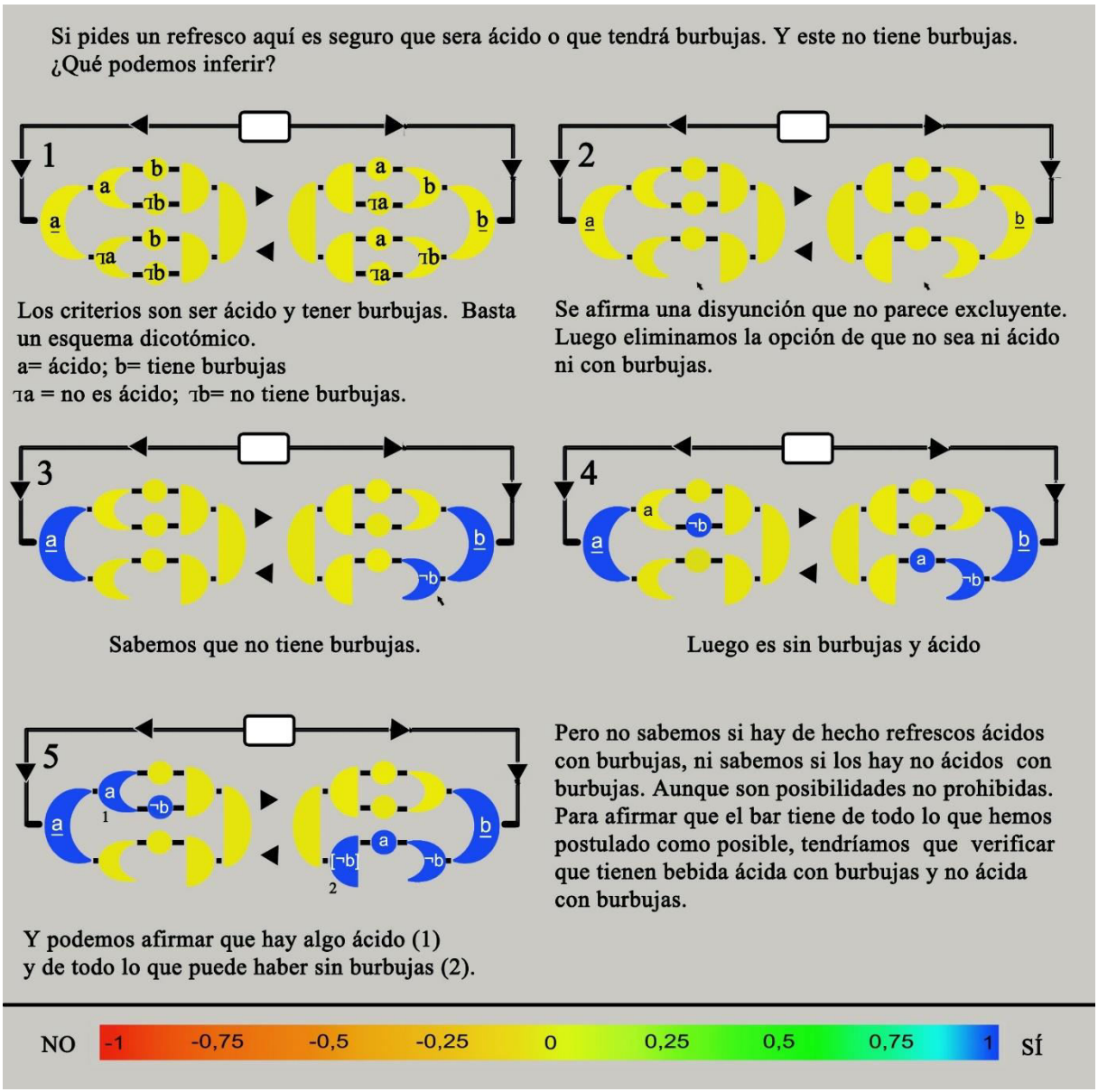


ILUSTRACIÓN 41. EJEMPLO BÁSICO DE PROPAGACIÓN DE LA VERDAD Y LA FALSEDAD EN LAS REDES.

Como vemos, la función de los conectores clásicos (iff, if, or, xor, *Nand*) no es otra que la de comunicar la eliminación de posibilidades del sistema Alfa. Así, la bicondicional del tipo *a↔b* significa en la red que si atendemos a cualquiera de las posibilidades generadas por combinación que resultan admisibles, no encontraremos

ninguna combinación de *a* que no contenga *b*, ni combinaciones de *b* exentas de *a*. Por su parte, una disyunción inclusiva del tipo *a* ⋁ *b* se debe interpretar como que al revisar una por una todas las combinaciones admitidas en la red, no encontraremos ninguna en la que no haya al mismo tiempo ni *a* ni *b*.

El siguiente ejemplo muestra el estado de creencias de una red para la proposición *Solo está verificado que tenemos todo tipo de A* partiendo primero de la asunción de una disyunción exclusiva y luego de una disyunción inclusiva. En el caso en que la red se ajusta a la estructura comunicada por la exclusiva debemos percatarnos de que se han eliminado los nodos *ab* y ¬*a*¬*b* y en el caso de la inclusiva el nodo ¬*a*¬*b*. En segundo lugar la ilustración muestra la inferencia cromática y numérica para la proposición *No hay todo tipo de* ¬*A pero hay algo*, partiendo primero de una estructura condicional y luego de las condiciones establecidas por la conectiva *Nand*, las cuales eliminan nodos distintos. Debemos advertir que *Nand* equivale a afirmar que *Ningún A es B*, lo que significa que no puede haber nodos conteniendo *A* y *B* al mismo tiempo.

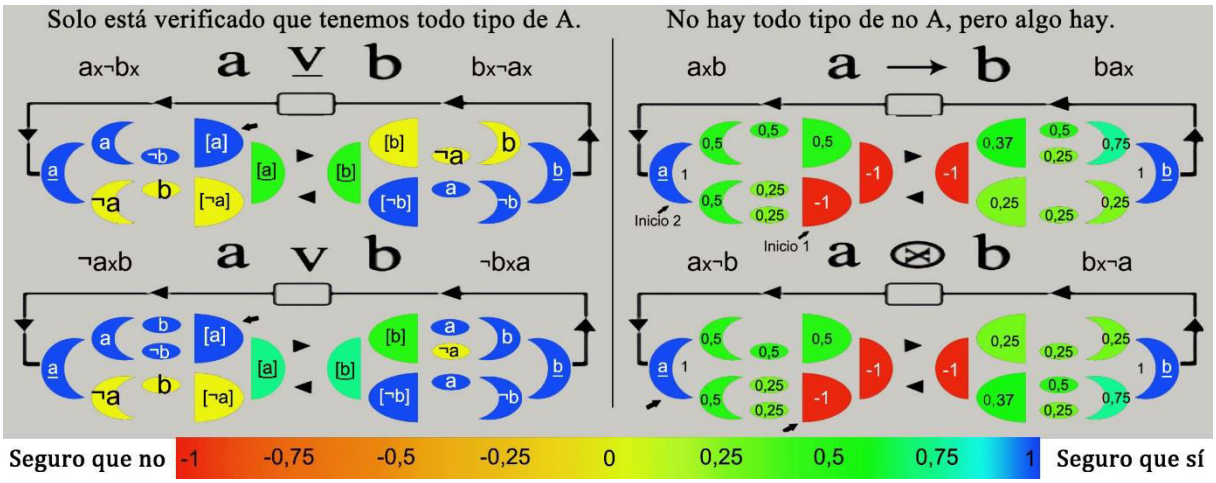


ILUSTRACIÓN 42. EJEMPLOS DE INFERENCIA CROMÁTICA Y NUMÉRICA EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS MARLO.

Como explicaremos más adelante con más detalle, nosotros expresamos los conectores interpretándolos con el espíritu de la doctrina de la cuantificación del predicado. Como hemos dicho ya, al cuantificar las variables ponemos un subíndice *x* en las que son tomadas de forma universal y no lo ponemos en las que son tomadas de forma particular. Así, la expresión $a_x b_x$ se puede leer como "cualquier nodo *Objeto* de la red definido por el carácter *a*, siempre es definido por el carácter *b* y cualquier objeto de la red definido por *b* siempre es definido por *a*". La expresión $\neg a_x b$ se interpreta como "cualquier objeto definido por ¬*a* se define por *b* y parte de los objetos definidos por *b* se definen por ¬*a*".

Esto significa que el significado de los conectores está en función de las conjunciones que podemos encontrar al considerar la totalidad de las posibilidades combinatorias que son admisibles en el sistema Alfa. Por ello no se debe confundir el conector de la disyunción exclusiva llamado *or* con el nodo *Or* de un conjunto de dicho sistema.

En el conector or "⋁" el universo del discurso es el sistema Alfa al completo y se representa eliminado todos los nodos que no contengan al menos uno de sus argumentos.

En el nodo *Or* de las redes el universo se reduce a los elementos del conjunto a los que alimenta y de los que se alimenta. Este nodo *Or* se representa en el circuito con una media luna en cuarto creciente o menguante que no elimina nada.

En el siguiente ejemplo de inferencia en la red vemos que hay tres premisas. La disyunción en la primera elimina de la red la posibilidad de tener ¬*a*¬*b* y la condicional de la segunda premisa elimina el nodo *c*¬*b,* de modo que dichos nodos y todos los que dependen de ellos ya no contarán en el reparto de la verdad o la falsedad que carga la red en la tercera premisa.

En este caso, siguiendo la convención de la lógica matemática, asumimos que las premisas uno y dos no suponen carga existencial de ningún nodo, de modo que simplemente se eliminan posibilidades como absurdas, las cuales adquieren el color morado de absurdo, negro de no existencia o simplemente desaparecen.

Recordemos que el morado es la combinación de azul y rojo, de verdadero y falso en el modelo de color RYB

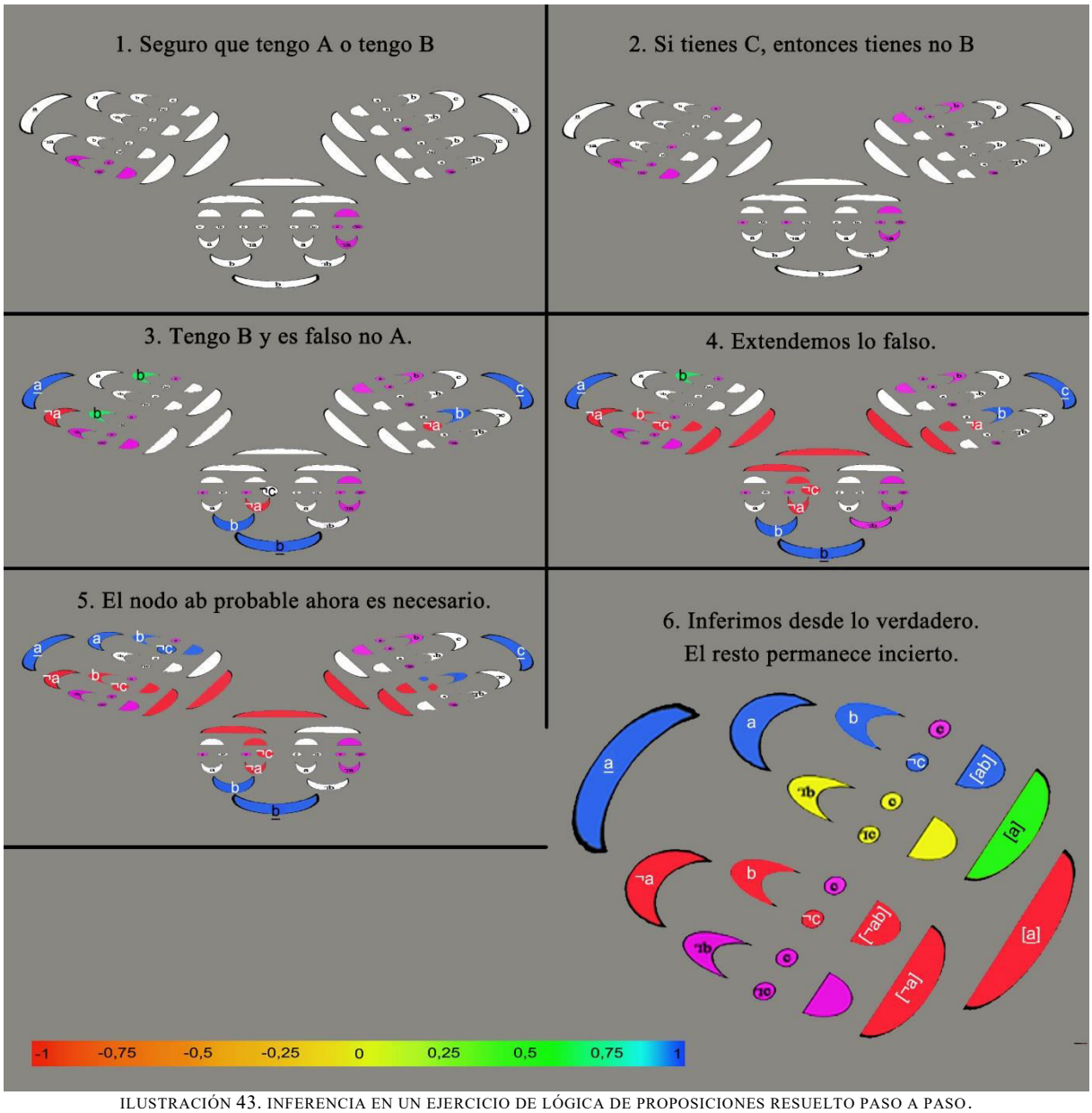


ILUSTRACIÓN 43. INFERENCIA EN UN EJERCICIO DE LÓGICA DE PROPOSICIONES RESUELTO PASO A PASO.

La siguiente ilustración (44) muestra un silogismo tipo Bárbara que ha sido resuelto eliminando nodos (morado) pero también asignando carga existencial a las proposiciones universales. Esto, evidentemente, complica la resolución del problema porque al afirmar que *Toda B es C* queda como probable *bc¬a*, que significa en este caso que haya primates mamíferos no humanos. Dicha conclusión probable nunca la hemos exigido en el aula, pero nos parece perfectamente razonable.

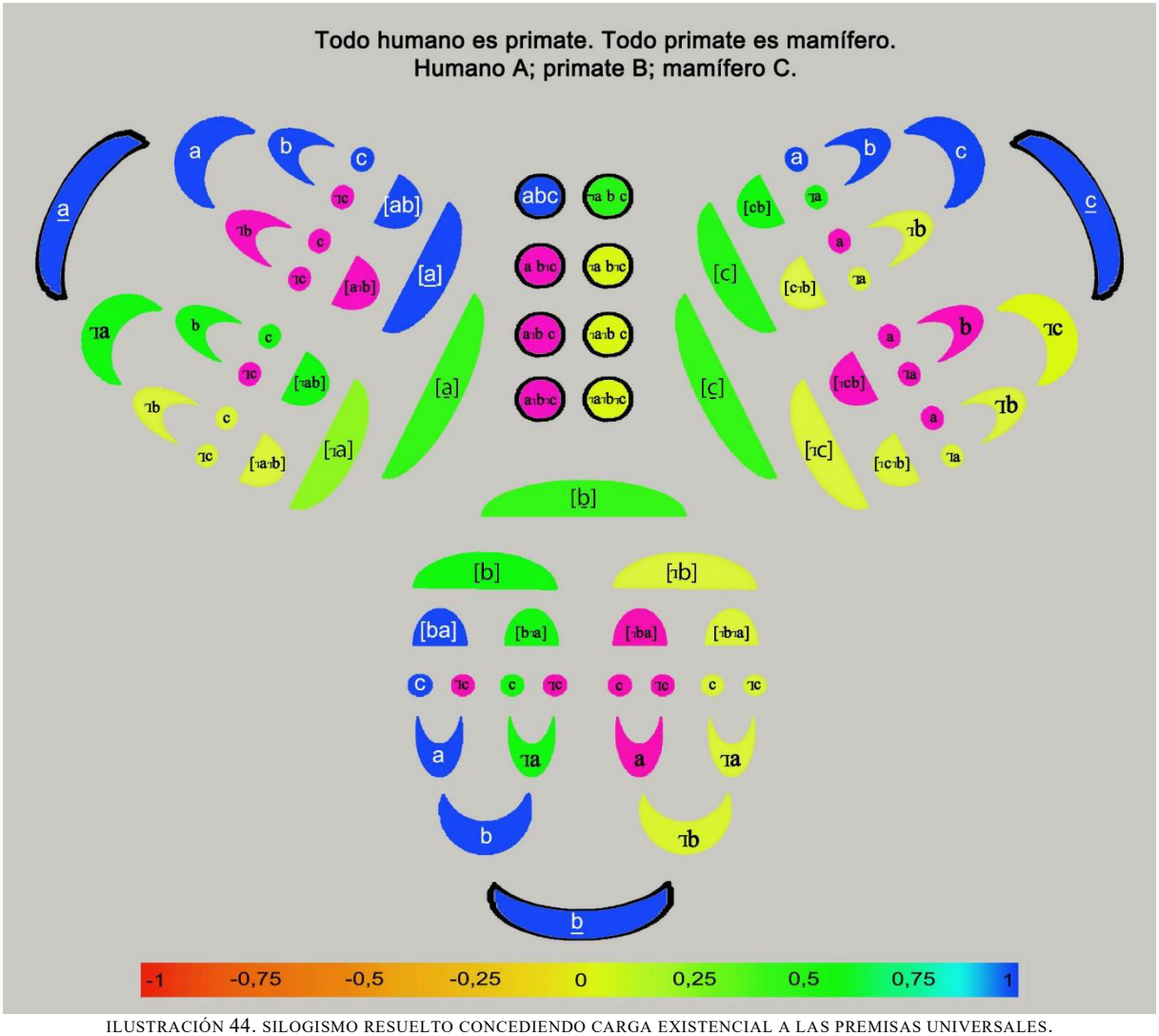


ILUSTRACIÓN 44. SILOGISMO RESUELTO CONCEDIENDO CARGA EXISTENCIAL A LAS PREMISAS UNIVERSALES.

4.13 Relaciones entre clases y elementos: Alfa logo-numérico

Como señalan Bochenski y Bravo (1985) la lógica matemática se benefició de la distinción de Peano entre ∈ y ⊃, porque no son la misma relación, la relación de estar incluido, que mantiene un elemento respecto a la clase, que la relación de una clase de estar incluida en otra clase. En las redes de expectativas nosotros no diferenciamos con claridad clases de elementos. Para nosotros, un elemento es un nodo *Objeto* central del que dependen los nodos *Or* y los nodos *And*. Cada elemento u objeto central es resultado de combinar todos los criterios que conforman el sistema Alfa y ejerce de unidad mientras siga siendo el centro de atención de la red. Si en una red contamos los nodos *Or*, entonces estamos convirtiendo los nodos *Or* en objetos centrales del universo del discurso.

Es fácil obtener en la tabla de verdad de un sistema dicotómico los 2^n elementos u objetos teóricamente posibles. Así, en el sistema Alfa dicotómico generado con los criterios $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, el objeto $a\neg bc$ es uno de los ocho nodos centrales u objetos portadores de la última diferencia que identifica y distingue del resto. En ese mismo sistema $a\neg b$ es uno de los nodos *Or* o subconjuntos que pueden ser obtenidos recombinando los elementos en función de sus caracteres comunes. Podemos llamar subclase, tipo o categoría a cada uno de los nodos *Or*, o podemos llamar clase al objeto teórico central no activado por un estímulo. Desde una perspectiva exclusivamente lógica, para nosotros, como antes para William Stanley Jevons (1835-1882), creador de una de las primeras máquinas lógicas, un objeto individual es una combinación única de caracteres que no difiere en este sentido de un término general, que es otra combinación de caracteres.

La distinción importante para nosotros en lo relativo a secuencias de caracteres es que el nodo central *Objeto* no se puede analizar o descomponer sin modificar el universo del discurso, mientras que los nodos *Or* pueden analizarse y descomponerse para reagrupar a los nodos *Objetos* en conjuntos cada vez mayores sin modificar el universo del discurso. Es decir, que si descomponemos los nodos centrales *Objeto* teniendo en cuenta nuevos caracteres, el número de objetos centrales aumentará, pero no si los reagrupamos en función de los caracteres que ya les atribuimos. Así, en un sistema dicotómico Alfa con tres criterios tenemos ocho y solo ocho tipos de objetos con los que podemos formar distintas agrupaciones *Or*.

Pensemos en el siguiente ejemplo para aclarar lo que pretendemos decir. En función de nuestros intereses podemos tomar la clase hombre como nodo *Or* o como nodo *Objeto*. En una taxonomía de especies el nodo "hombre" opera como objeto ligado al nodo *Or* mamífero. Pero si analizamos "hombre" añadiendo a la definición de los objetos los caracteres que se desprenden del criterio bondad, tendremos ahora como objeto o nodo central la clase hombre bueno y la clase hombre malo, dejando a la clase hombre como nodo *Or*. El nodo central "hombre bueno" se convertiría a su vez en nodo *Objeto* si lo descomponemos en tantos elementos como personas con nombres y apellidos hay. Cada persona sería ahora en la red un nodo *Objeto* central. Sin embargo, estas personas pueden descomponerse a su vez en función de sus actividades. Así, Juan García nadando y Juan García estudiando serían los nuevos objetos centrales, quedando Juan García como nodo *Or*. Es decir, que para nosotros es la función que se realiza como nodo OR o como nodo *Objeto* lo que distingue lógicamente a dos términos o secuencias de caracteres y no ninguna otra consideración sustancialista, metafísica o psicológica.

Nosotros pretendemos eliminar toda metafísica de nuestra definición de objeto para identificarlos exclusivamente con el nodo central de nuestras redes. Ese objeto o nodo central, que representamos en una circunferencia, es lo que llamaremos unidad y es lo que podemos contar, de modo que el número de objetos centrales no puede ser nunca superado por el número de objetos contenidos en las distintas agrupaciones que podemos hacer con ellos reagrupándolos en nodos *Or*.

Cada uno de los objetos o nodos centrales es un tipo de objeto teórico resultado de combinar caracteres. Si un objeto teórico nunca ha sido percibido-reconocido por los receptores del sistema, se le dará a la existencia teórica de dicho objeto un valor igual a cero, sin afirmar de ella que sea verdadera o falsa. Cuando interese al sistema dejar de contar con la posibilidad de dicho objeto, podrá eliminarlo de forma convencional y provisionalmente definitiva del conjunto de posibilidades que conforman la realidad que condiciona su conducta. Así, puedo eliminar de mi lista a un alumno absentista para no tener que esperarle en el autobús el día de la excursión, lo mismo que no cuento con la posibilidad de encontrarme con un maletín con cinco millones de euros cuando me voy a la cama.

Es fácil aceptar que no podemos reconocer un estímulo (materia) con nuestros receptores si no se corresponde con un tipo de objeto teórico (forma), aunque puede haber tipos teóricos que nunca han ocurrido en nuestros receptores externos o internos y que quedan como meras posibilidades ni confirmadas ni refutadas.

En la siguiente ilustración (45) observamos un sistema formado por la combinación de tres criterios $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, considerados dicotómicamente, a los que hemos implementado una última diferencia numérica para identificar los objetos o nodos centrales. En el sistema no contamos con objetos de la clase *Or* $a\neg b\neg c$, pero tenemos 3 elementos en *Or abc*, 3 en *Or* $ab\neg c$ y 2 en *Or* $a\neg bc$, que suman un total de 8 elementos de la clase *Or a*. También tenemos 11 elementos de la clase *Or* $\neg a$, repartidos en 2 de la clase *Or* $\neg a\neg bc$ y 3 de cada una de las clases *Or* restantes de $\neg a$.

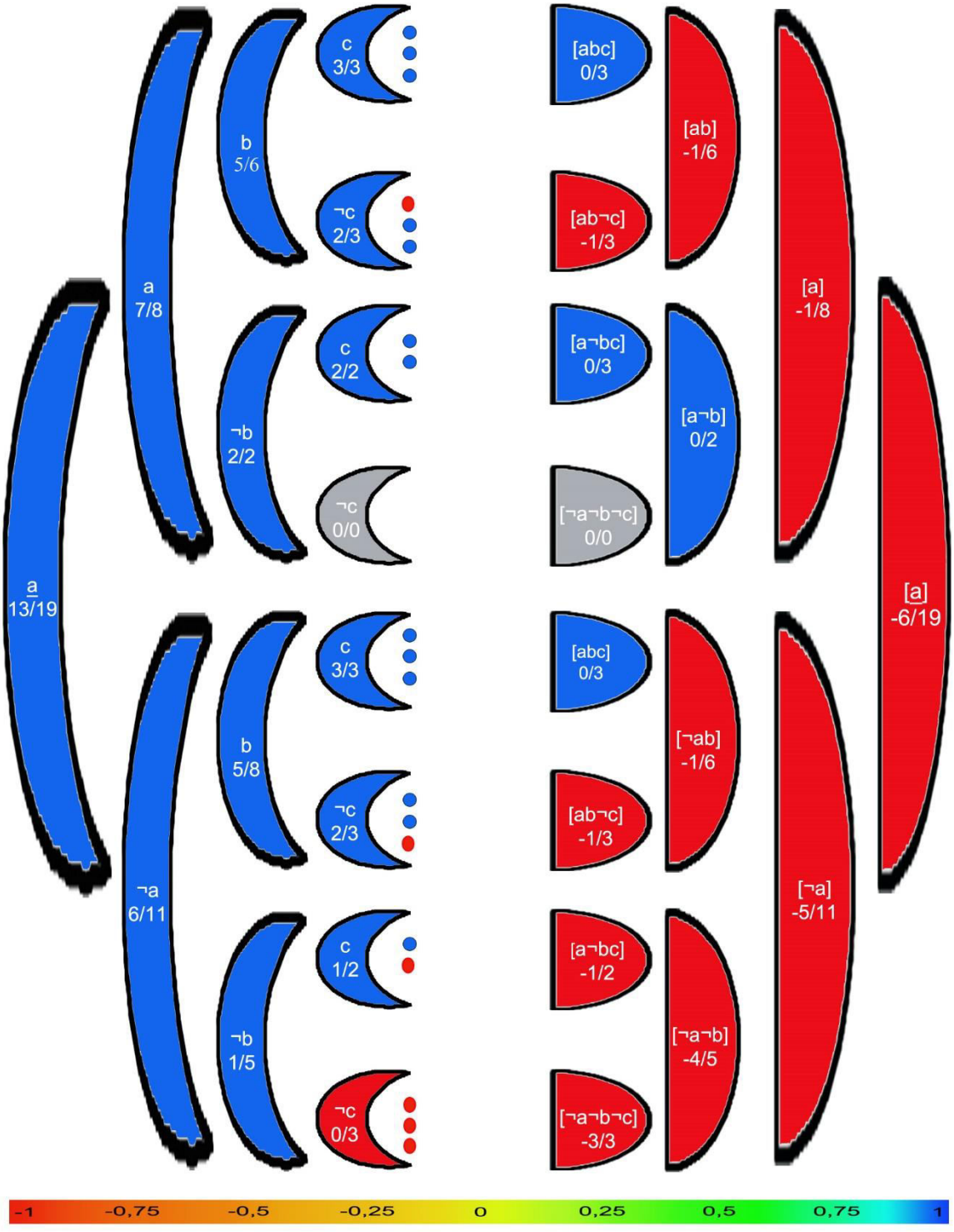


ILUSTRACIÓN 45. INFERENCIA EN ALFA LOGO-NUMÉRICO PARTIENDO DE LOS INDIVIDUOS.

En total hay 19 unidades u objetos centrales en Alfa que se pueden agrupar en siete nodos *Or*. Debemos tener en cuenta que la inferencia ha comenzado en todos los casos en los nodos *Objeto* para extenderse luego desde ellos hacia los nodos *Or* de su izquierda y hacia los nodos *And* de su derecha.

Podemos observar también en la ilustración que los nodos o células *And* a la derecha de los objetos computan las ausencias de las unidades lógicas. Es interesante advertir como conjetura, que si estas células tuvieran correlato neuronal, su ausencia o defecto estaría implicada en la acalculia, un deterioro de la habilidad de calcular que

sabemos relacionada con habilidades verbales, espaciales, de memoria, de conocimiento corporal y de función ejecutiva (Ardila & Rosselli, 2002), pues se hace evidente que no puede haber cálculo matemático sin una comprensión cabal de lo que es un objeto, ni sin flexibilidad mental para cambiar la perspectiva de los conjuntos o para convertir un conjunto en objeto, siendo también necesaria una interpretación del correcto significado de las proposiciones lógicas que componen el enunciado y del modo en que se propagan la verdad y la falsedad por los nodos de la red, aspectos todos ellos que podrían trabajarse en el aula con las redes de expectativas a nuestro juicio.

Al margen de especulaciones neuro-pedagógicas, podemos observar que en nuestro modelo de red los objetos centrales pueden estar aquí y ahora presentes (azul = 1) o ausentes (rojo = -1). Debemos darnos cuenta de que el nodo *And* será negativo (rojo) cuando falte alguno de los elementos con los que contamos y será verdadero o azul (valor = 1) solo si el número objetos ausentes en su conjunto es cero. Si *And* es verdadero, entonces la proporción de ausentes será igual a 0/N y podremos inferir que están todos y cada uno de los objetos, siendo en consecuencia también verdadero el nodo *Or* de dicho conjunto.

La proporción de lo que está más la proporción de lo que no está es siempre igual a la unidad considerada como totalidad de elementos que teóricamente componen el sistema Alfa.

Podemos ver en la imagen que el hecho de que falte algo en un nodo *Or* no impide que sea verdad que haya algo de ese tipo, como en los casos de ¬*a*¬*bc* y de ¬*ab*¬*c*. También vemos que nos faltan cinco de los once elementos tipo *Or* ¬*a*, pero no podemos echar en falta nada del tipo *Or a*¬*b*¬*c*. Y aunque no estén todos los objetos de la clase *Or* ¬*ab* sí que hay de todo en la clase de *Or* ¬*abc*, por lo que el nodo *And* [¬*abc*] es azul y tiene un valor de 1.

Si elimin——ramos a los objetos marcados con puntos rojos y azules de la ilustración, los nodos *Or* que representan ahora a los objetos teóricos ¬*abc* y ¬*ab*¬*c* pasarían ahora a ser los nodos centrales *Objeto* y el nodo *And* [a¬b] seria ahora verdadero por ser cierto que hay de toda clase de ¬*ab*. Por ejemplo, tal vez no estén todos los coches en el garaje, pero en un nivel de análisis más general puede haber todo tipo de coches en el garaje.

La ilustración trata de evidenciar el hecho de que las redes lógico-lingüísticas y lógico matemáticas corren en paralelo con interconexiones mutuas, siendo evidente la ambigüedad que se da entre la afirmación-negación de la existencia material y teórica de las cosas. Así, en el lenguaje natural las expresiones *No hay nada* y *No hay de nada* son literalmente equivalentes, y podríamos ver fácilmente en las redes que partiendo de la falsedad de una cualquiera de ellas, llegamos a la falsedad de la otra, por más que la primera parece aludir a la falsedad de los objetos centrales y la segunda a la falsedad del nodo *Or* más inclusivo. También deberían ser equivalentes las expresiones *hay de todo* y *están todos* si no cambiamos en el curso de la argumentación el universo del discurso. Por ejemplo, un padre que lleva al zoo a su hijo y le dice “Vas a ver de todo, pero no están todos los animales” cambia el universo del discurso en la segunda parte de su sentencia. En la primera parte los nodos objeto centrales de las redes son las especies. En la segunda los nodos centrales son los animales particulares.

No obstante, insistimos en que la diferencia entre género, especie e individuo nos parece psicológica y ontológica, pero no lógica, dependiendo la propagación de la verdad y la falsedad no del tránsito de la especie al género o al individuo, sino del hecho de que fluya la activación o la inhibición entre nodos *Or*, nodos objeto o nodos *And*, sea lo que sea lo que ocupa el lugar del nodo *Objeto* o del nodo *Or*.

En la siguiente ilustración partiremos en la inferencia de la activación, inhibición o eliminación de distintos nodos *Or* y *And* cuando codifiquemos en la red las siguientes premisas. Hemos generado un sistema Alfa dicotómico con tres criterios que hemos implementado nuevamente con una diferencia numérica para dotar de identidad a los objetos centrales, cuyo número exacto desconocemos. Seguimos ahora la convención de la lógica matemática al no atribuir valor existencial a las premisas universales.

-1 Ninguna C es A. -2 Si A, entonces B. -3 Hay ahora algo que es A. -4 Están aquí todos los que son ¬*abc.* -5 Falta algo que es ¬*cb*¬*a.* -6 No hay ahora ningún ¬*a*¬*b*¬*c*

Después de representar las premisas en la red y aplicar los principios de la transmisión de la activación entre los nodos de un conjunto, sabemos que existen o tenemos que contar al menos con cuatro nodos objeto de tres clases *Or* distintas. Hemos señalado con una flecha los nodos afectados por las premisas. Los nodos en gris han sido eliminados y ya no cuentan ni descuentan para ninguno de los nodos *Or* o *And*.

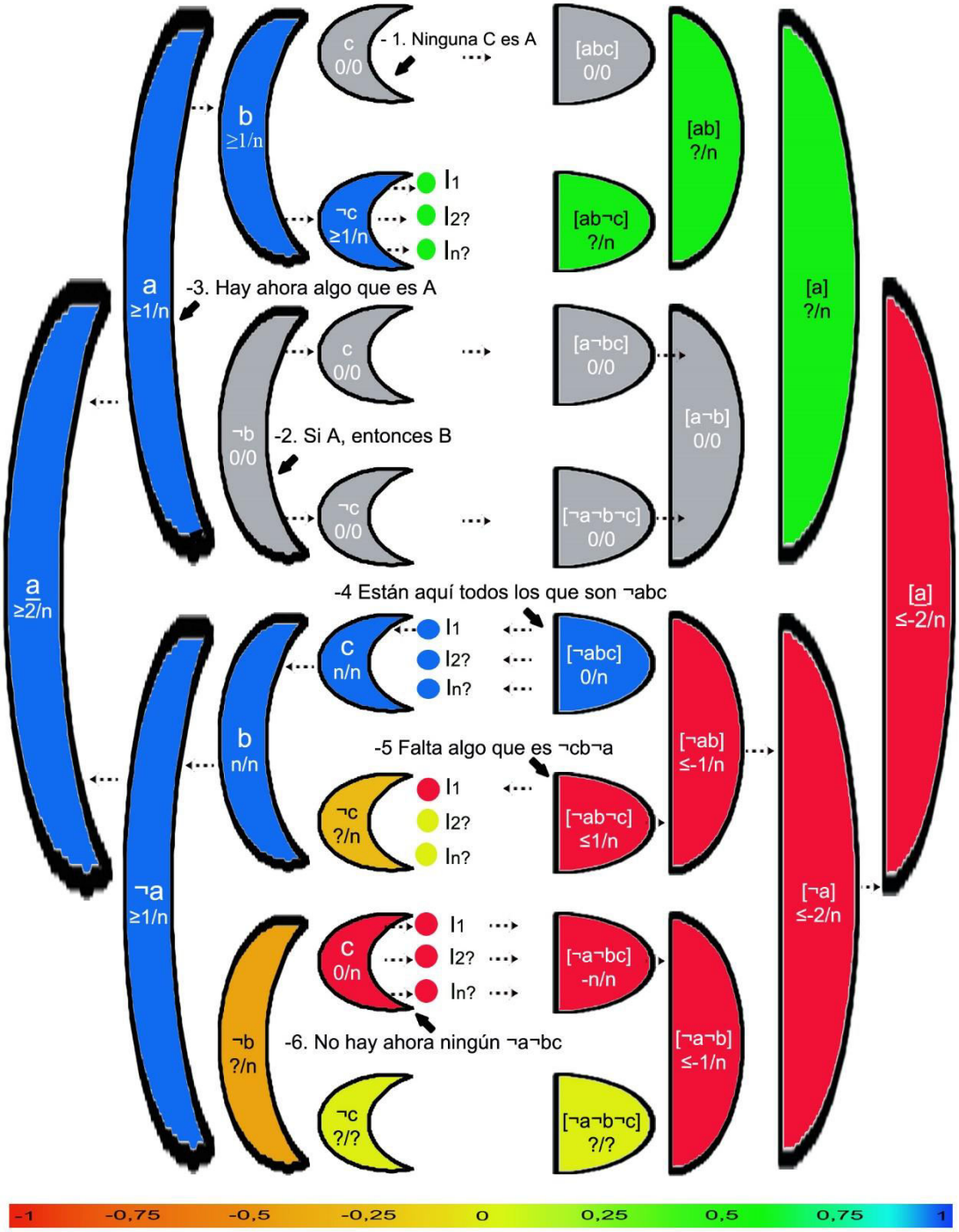


ILUSTRACIÓN 46. INFERENCIA LOGO-NUMÉRICA EN LAS REDES.

Como podemos observar, ahora la incertidumbre del sistema es mucho mayor que antes y ni sabemos cuántos objetos hay en total, ni sabemos nada acerca de la clase *Or ¬a¬b¬c* que se mantiene al nivel de absoluta conjetura: podría haber objetos en ella, pero no los sabemos y por eso tampoco sabemos sí es cierto o falso el nodo *Or ¬a¬b* cuyo peso es igual a la suma de los valores de verdad de los objetos contenidos en *¬a¬bc (0) y ¬a¬b¬c (0)* más el promedio de sus valores de falsedad. En este caso solo tenemos motivos para pensar que dicho nodo *Or ¬a¬b* es falso, aunque reconocemos que no somos capaces de ofrecer un valor exacto para dicho nodo *Or ¬a¬b* que combina la ausencia verificada de los objetos tipo *¬a¬bc* con la posible presencia de los objetos no verificados ni falsados que podrían estar contenidos en el nodo *Or ¬a¬b¬c*.

Quizás en casos como el del nodo *Or* ¬*a*¬*b* conteniendo objetos meramente posibles, lo mismo que en casos en los que tenemos que integrar informaciones contradictorias, el peso que le demos finalmente a los nodos en la red dependa, más que de cuestiones lógicas, de decisiones basadas en los pros y contras que supone para la supervivencia la comisión de errores de falso negativo o de falso positivo en cada caso. Si fuera así, sabemos que estrategias distintas pueden ser igualmente válidas a largo plazo, tal y como establece la Teoría de Juegos (Maynard Smith, 1982; Von Neumann & Morgenstern, 1944).

En esta tesis no profundizaremos en las relaciones entre lógica y matemática y mucho menos en las relaciones entre la lógica y la Teoría de Detección de Señales que ya mencionamos en el marco teórico. Por el contrario, nos limitaremos a señalar algunas relaciones entre lógica y aritmética elemental con las que nos topamos al trabajar con las redes una serie de ejercicios cuya resolución combina información de ambos tipos, ofreciendo algunas ideas que atisbamos al tratar de llevar las redes a una hoja de cálculo en Excel. No obstante, la mayor parte de nuestras representaciones, y sobre todo los diagramas de Marlo, que veremos en la siguiente sección, tienen un alcance limitado a clases de objetos. Es decir, siguiendo la distinción tradicional que encontramos en la historia de la lógica de Bochenski traducida por Bravo (1985), trabajaremos lógica de clases casi todo el tiempo y no con lógica de predicados propiamente, la cual solo apuntaremos al hablar de las proposiciones de segundo grado o secundarias. Así, solo en dicho apartado veremos de qué manera el valor de cada nodo *Or* conlleva la posible existencia de un objeto distinto. Es decir, que si una fuente nos informa de que hay algo de la clase *A* y otra fuente nos informa de que hay algo de la clase *AB*, debemos considerar la opción de que se haya verificado la existencia de *AB* y de *A*¬*B*, dos objetos distintos, o bien solo se trata de *AB*.

De momento, baste decir que para nosotros el nodo *Objeto* se configura a partir de la consideración de la última diferencia relevante en las cualidades del estímulo fáctico o de su huella teórica, siendo una decisión convencional qué tomemos por objeto y qué por conjunto o nodo *Or*: ¿Es el objeto el electrón, el átomo, la célula, la hoja, el árbol, el bosque, la tierra…?

En los objetos materiales, esta última diferencia pueden ser sus coordenadas espaciotemporales, dado que un mismo percepto no puede referirse al mismo tiempo a dos lugares o momentos distintos. En todo caso, supera los objetivos de esta sección establecer las relaciones entre la codificación de los objetos que tiene lugar en la corteza cerebral durante su percepción y la codificación teórica de dichos perceptos en la memoria, por lo que nos limitamos a lo dicho en el marco teórico y filosófico, donde asumimos las críticas que desde el empirismo han sufrido los conceptos de sustancia e identidad.

Si consideramos ahora que por objeto entendemos cualquier cosa capaz de ser representada en el nodo central de la red, será fácil deducir las discrepancias con la noción de objeto de la ortodoxia aristotélica (Oriol & Gambra, 2015) y con la tradición de Frege (Díez Martínez, 2005).

4.14 Ejercicios resueltos en redes lógico-matemáticas

Presentamos a continuación una serie de ejercicios presentados en distintos congresos en los que la solución exige combinar principios lógicos y matemáticos.

Debemos notar que los sumatorios de objetos fueron codificados en los nodos *And* y no en los nodos *Or* como anteriormente hemos hecho en este capítulo. En los tres ejercicios se parte de un sistema compuesto por los criterios *a*, *b*, *c* que han sido divididos en una escala tricotómica generando 27 objetos teóricos producto de combinar las siguientes variables: 0a= nada a, 0b= nada b, 0c= nada c. 0,5 a = medio a; 0,5 b = medio b; 0,5c = medio c. 1a = totalmente a; 1b = totalmente b; 1c = totalmente c.

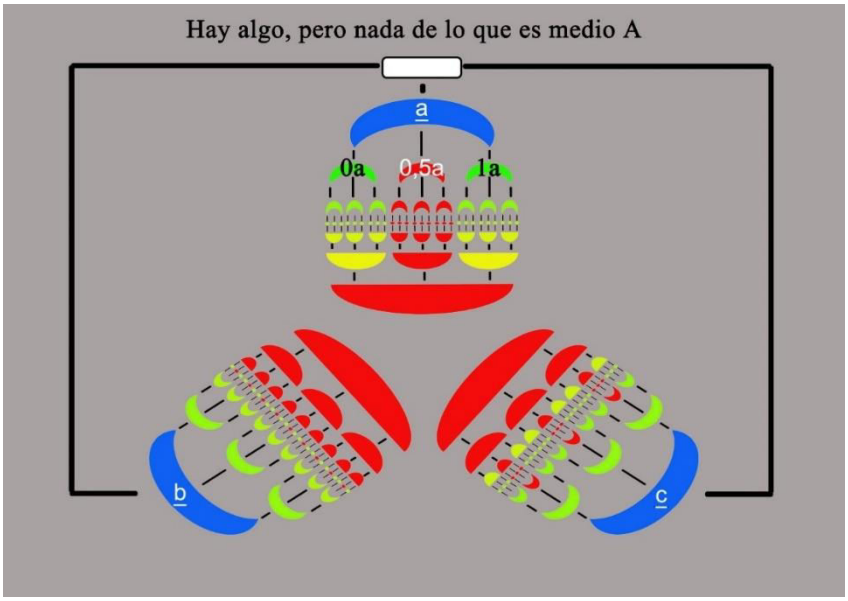


ILUSTRACIÓN 47. SISTEMA ALFA CON TRES CRITERIOS TRICOTÓMICOS.

4.14.1 Ejercicio lógico-matemático presentado en el VIII CIBEM

Mi prima colgó en las redes sociales las condiciones para poder presentarse a un casting de actores para personajes muy concretos. Utilizaría como criterios la altura, la belleza y la calvicie de los candidatos. Cada criterio generaría una escala de juicio con tres variables: no ser nada (0), estar en la media (0.5) y ser totalmente (1). Estas fueron sus indicaciones: Primero, si no estás nada calvo, entonces es necesario para presentarte que no seas nada bello. Segundo, los que estén medio calvos tienen que ser totalmente bellos. Tercero, si eres totalmente alto, no puedes ser medio bello. Cuarto, no se permiten personas que sean a la vez totalmente calvas y totalmente altas. Quinto, los que sean medio calvos y totalmente altos no pueden ser totalmente bellos. Sexta, los que sean medio altos deben ser o totalmente bajos o medio bajos. Finalmente, el día del casting se presentaron un total de veintitrés personas. No se presentó nadie que fuera totalmente calvo, aunque sí se presentaron siete personas medio calvas. Personas totalmente bellas se contaron trece. Personas medio altas fueron dieciséis.

Sin modificar las condiciones, los nodos azules y rojos podrían intercambiar sus colores en un segundo día de casting. En la imagen el violeta expresa imposible, absurdo, eliminado por el enunciado.

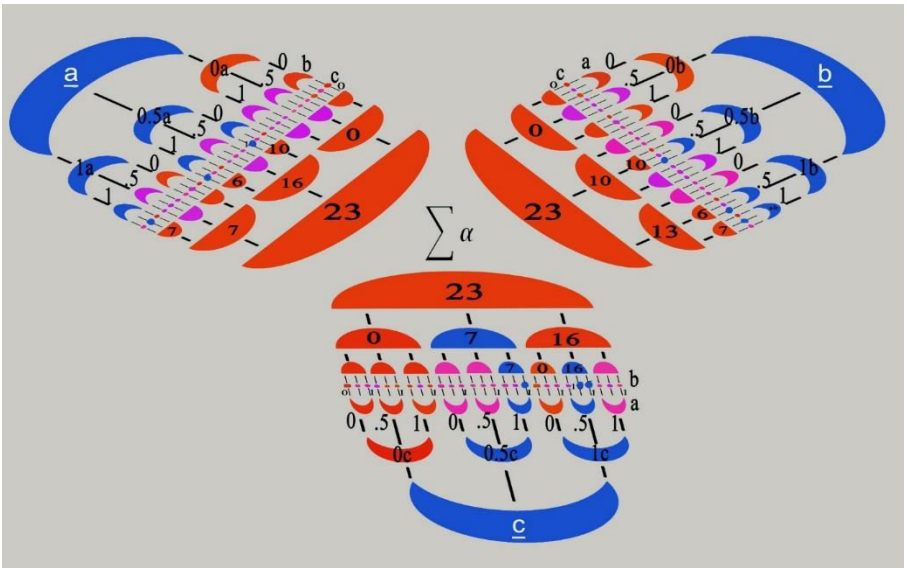


ILUSTRACIÓN 48. SOLUCIÓN GRÁFICA DEL EJERCICIO CIBEM EN LOS CIRCUITOS LÓGICO-BAYESIANOS.

Cuestiones: ¿Cuántos aspirantes hubo que fueran medio altos, nada bellos y totalmente calvos? ¿Y cuántos hubo nada altos, nada bellos y totalmente calvos? Por otra parte, de las nueve categorías generales resultantes de aplicar un criterio: 0a, 0.5a, 1a, 0b, 0,5b, 1b, 0c, 0,5c, 1b, ¿cuáles había totalmente prohibidas? ¿cuál fue la única de estas categorías en la que afirmar que hubo de todo lo permitido sería cierto?

Al resolver el problema en los circuitos el color violeta significa imposible en teoría, prohibido por las condiciones; el azul significa nodo empíricamente verificado y el rojo nodo empíricamente falsado.

4.14.2 Ejercicio propuesto en el IV CIFYCT

Hicimos un taller con niveles bajo (0), medio (0,5) y alto (1) en tres materias a, b, c, y con estas condiciones para apuntarse:

No puede venir nadie con nivel medio en a. Solo los 0,5c pueden ser 1a. Si eres 0,5c tienes que ser 1b. Si eres 0,5 b debes ser 1a. A la postre se apuntaron diez personas con nivel 1a. Nivel 0c eran tres. Nivel 0,5b eran dos.

Cuántas personas y tipos de personas asistieron? ¿Qué probabilidad hay de que hubiera alguien del tipo 0a-1b-1c? ¿Cuál es la probabilidad condicionada de que alguien tipo 0a fuera del tipo 0b?, etc.

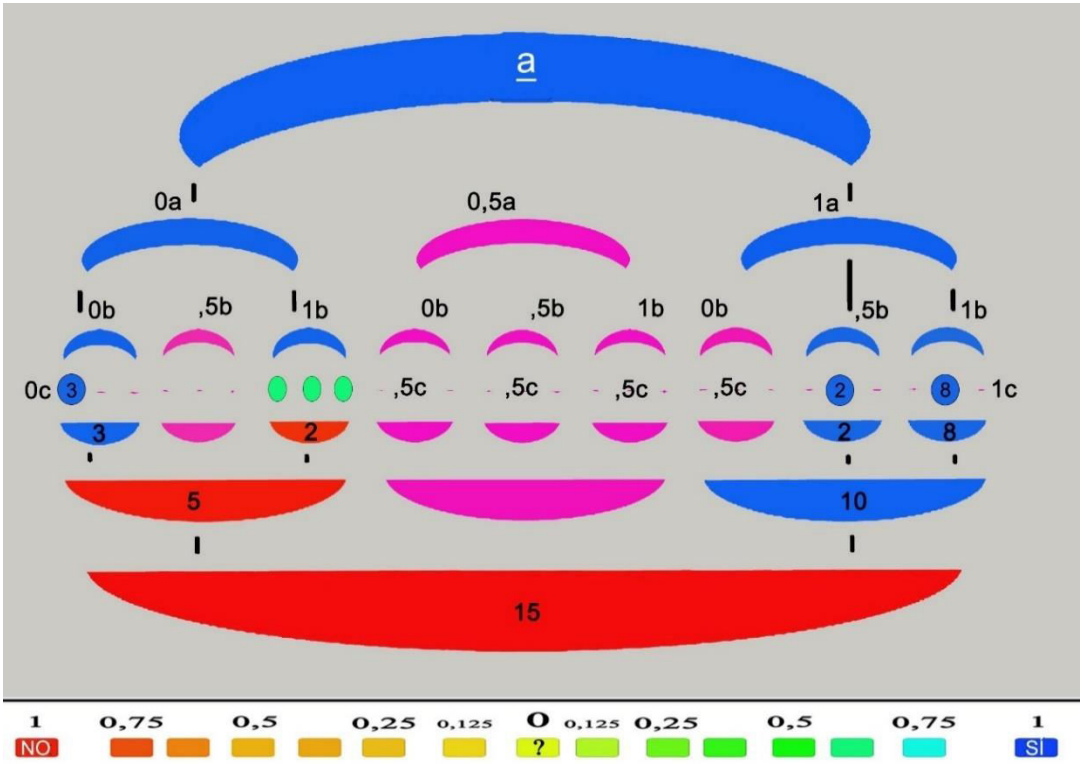


ILUSTRACIÓN 49. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA PRESENTADO EN EL VIII CIBEM.

4.14.3 Problema que formó parte del Taller impartido en el II Congreso REF

Planteamiento: Mi hermano puso en las redes un anuncio buscando candidatos para un puesto de trabajo muy específico. Para realizar la selección utilizaría tres criterios: los conocimientos de cocina, los conocimientos de alemán y los conocimientos de búlgaro. Cada criterio se dividía en tres categorías: no tener ningún conocimiento, tener un conocimiento medio y tener un conocimiento completo. Estas fueron sus condiciones para poder presentarse a la entrevista. Primera, todos los que tengan un conocimiento completo de cocina deben tener un conocimiento completo de alemán. Segunda, excepto para los que tengan un conocimiento completo de alemán, para todos los demás es obligatorio que si saben cocinar a medias, sepan búlgaro también exactamente a medias. Tercera, para los que tengan un búlgaro perfecto es obligatorio no saber nada de cocina. Finalmente vinieron ocho personas que sabían alemán a medias, repartidas a partes iguales entre los cuatro tipos de candidaturas permitidas

por las condiciones para dicha categoría. Sabemos también que no se presentó nadie que supiera búlgaro a medias y tuviera al mismo tiempo un nivel nulo o absoluto de alemán. Por otra parte, con un nivel cero de alemán hubo seis candidatos. También sabemos que hubo dos personas con un nivel absoluto de alemán y un nivel nulo de búlgaro al mismo tiempo. Y sabemos igualmente que de la categoría alemán y búlgaro perfectos pero nada de cocina fueron tres personas.

¿Cuántos candidatos hubo en total? ¿Qué probabilidad hubo de que algún candidato supiera alemán perfecto, nada de búlgaro y nada de cocina? De los ventisiete tipos de candidatos posibles *a priori*, ¿cuántos estaban prohibidos por las condiciones? ¿De cuántos podemos decir con certeza que se presentó alguien? ¿De cuántos sabemos que no hubo nadie? ¿Cuántas otras preguntas podemos establecer y responder con los datos enunciados?

En la figura podemos diferenciar entre lo que es seguro que sí, lo que es seguro que no y lo probable en distinto grado, a pesar de que nada ha quedado como totalmente incierto. El estado final de la red de expectativas que muestra la figura nos permite como mínimo enunciar cincuenta y tres proposiciones acerca de la entrevista, que podríamos multiplicar por seis perspectivas resultantes de reordenar los criterios de más a menos relevantes.

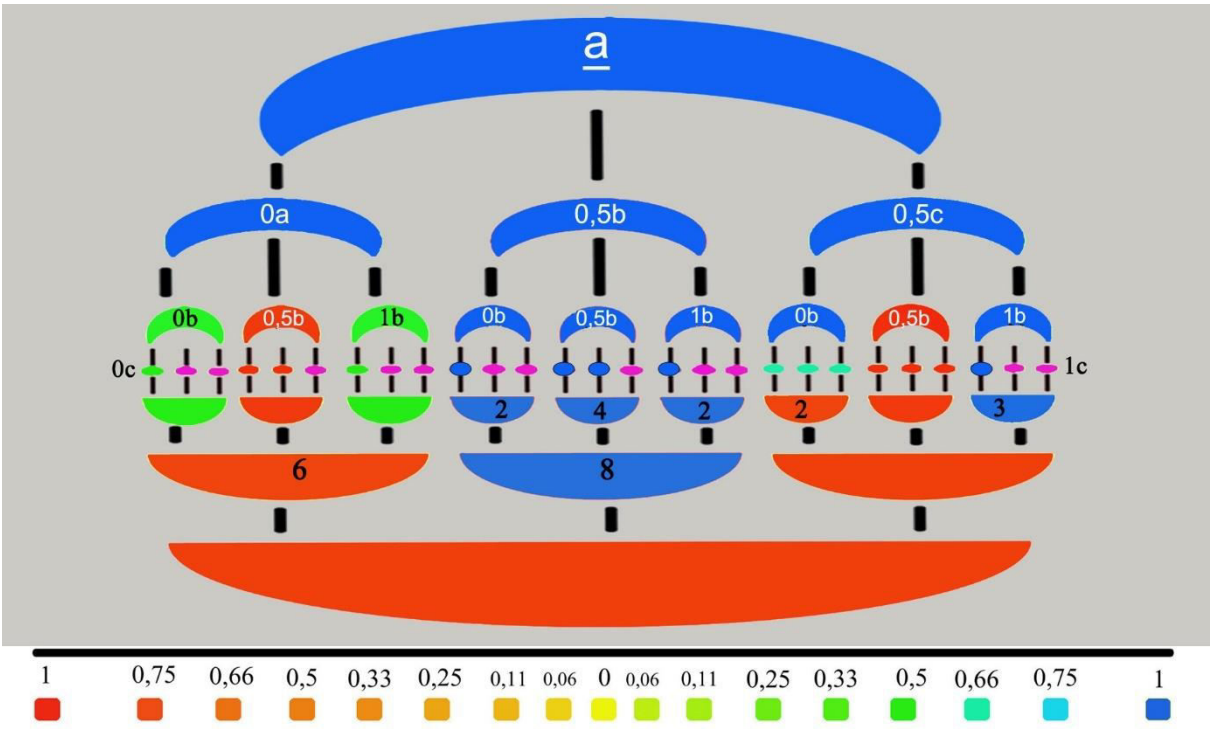


ILUSTRACIÓN 50. SOLUCIÓN AL PROBLEMA LÓGICO-MATEMÁTICO PRESENTADO ANTE LA REF.

4.15 Relaciones contrarias de activación presencia-ausencia

En el transcurso de las situaciones concretas a las que nos enfrentamos no podríamos tomar decisiones distinguiendo simplemente lo que las cosas son de lo que no son: necesitamos saber las presencias y ausencias con las que contamos. Dicho de otra forma, no bastan redes teóricas, necesitamos redes fácticas. Los sistemas cognitivos de mis alumnos/as distinguen perfectamente entre la teoría abstracta que alude a cualquier hipotética situación y las proposiciones prácticas que condicionan nuestras decisiones durante la acción en curso. El ser ahí no es lo mismo que el ser de las teorías. La filosofía ha establecido tradicionalmente diferencias entre potencia y acto, entre ser y estar, entre esencia y existencia, cuestiones aparentemente metafísicas pero que no pueden ser omitidas a la hora de establecer modelos de cómo razonamos destinados a enseñar a razonar.

Las diferencias entre esencia y existencia son fáciles de comprender en un circuito eléctrico. El cableado que conecta unas lámparas con otras configura la definición esencial del circuito, al margen de que las lámparas estén "existencialmente" encendidas o apagadas. Los cables no son razón suficiente para encender las lámparas si no hay energía circulando, pero una vez encendida una lámpara, el diseño o definición esencial del cableado determinará qué otras lámparas deberían encenderse y pasar de la potencia al acto (Aznar, 2016b).

Se ha dicho desde el principio de la filosofía que la presencia y la ausencia de recursos y amenazas para la vida es la base de toda decisión de aproximación o evitación que toman los organismos. Así, los primeros esquemas de acción estarían condicionados por las reacciones de miedo o deseo desencadenadas por los estímulos del medio. Resulta vital tener conocimiento acerca de las propias necesidades y de las circunstancias. La ausencia de alimento y de amenaza pueden ser suficientes para salir de la madriguera. La presencia de cualquiera de ellos podría hacerlo innecesario o poco rentable. Debemos recordar que los sistemas cognitivos generan, mediante procesos asociativos, esquemas de acción que puedan llegar a ser adaptados y comunicables. Así, un sistema cognitivo que ha aprendido que el crujir de las hojas precede a la presencia del depredador puede anticipar su reacción de huida. En sus redes cognitivas se han asociado el crujido y la reacción de huida, de manera que potencialmente dicho estímulo desatará la huida. Si oyes un crujir corre. Es decir, que cuando el crujido esté presente, en acto, escapará.

Un objeto puede, por tanto, estar codificado en los sistemas de creencias como presente o ausente, siendo ambos modos de existir contrarios. Aunque afrontamos las disputas ontológicas en el *Marco-filosófico teórico*, podemos afirmar desde ahora que, siguiendo en parte a Hume y Peirce, consideraremos que un objeto es real para un sistema cognitivo cuando su presencia o su ausencia sean capaces de influir en sus redes, ya sea modificando sus emociones, sus pensamientos o su conducta. Es obvio que puede haber distintos grados de realidad, del mismo modo que puede haber distintos grados de presencia y ausencia, infinitos en teoría. Sin embargo, por cuestiones de economía presentaremos los objetos en las redes solo con dos modos: presente y ausente.

A partir de aquí, los conjuntos de los circuitos de expectativas definidos anteriormente se vuelven más complejos. Sin embargo, la distinción facilita la comprensión, evitando confusiones entre la negación de un grado de ser y la negación de una presencia. Tener $\neg B$ no significa lo mismo que no tener B. Como veremos, es posible que algo que no es no esté presente, como cuando digo que los que no son repetidores no están en el aula.

La siguiente figura nos muestra las relaciones contrarias de activación en un conjunto. Hemos tomado como base para la explicación el conjunto de lo que se ajusta al criterio a en un sistema dicotómico que distingue *a* de $\neg a$, es decir, lo que es de lo que no es. Recordemos que el primer significado de ser en las redes es ajustarse a un criterio. El segundo estar asociado con.

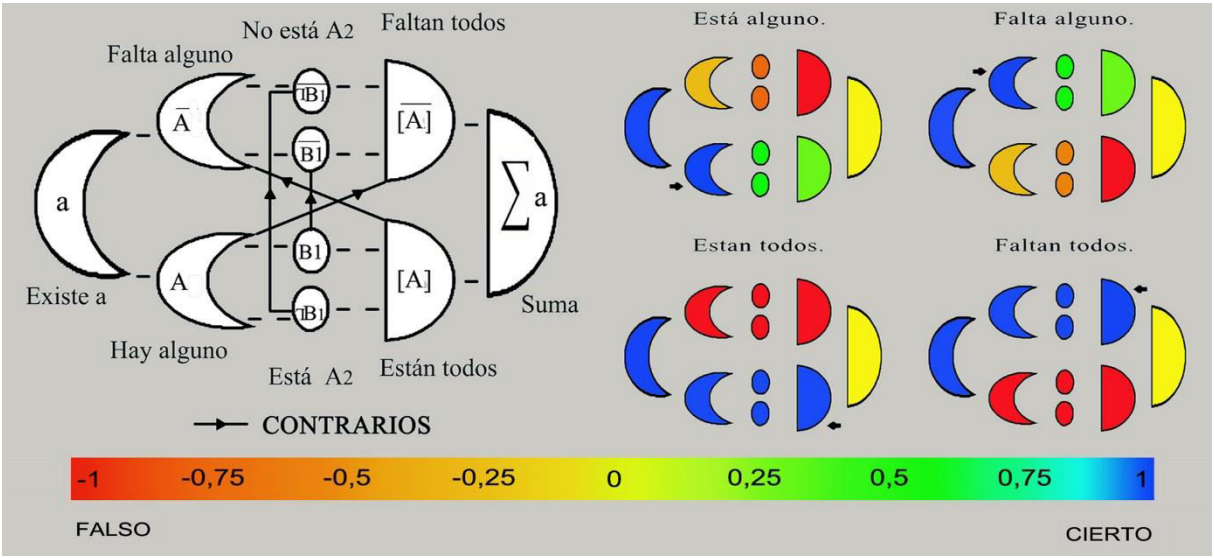


ILUSTRACIÓN 51. RELACIONES CONTRARIAS DE ACTIVACIÓN PRESENCIA-AUSENCIA.

El primer nodo *Or* de la izquierda representa a cualquier objeto con la cualidad *a* y con capacidad para estar presente o ausente. Por eso se lee como *existe a*, es decir, que hay algo que se ajusta al criterio a cuya presencia o ausencia podemos percibir. Aquí no pretendemos dar respuesta al problema de lo real, simplemente diferenciamos redes teóricas limitadas al ser, de redes prácticas que incluyen estar.

El siguiente nodo *Or A* sintetiza todo objeto que tenga la cualidad *a* y esté presente y será cierto cuando, por

ejemplo, sea cierto que *Algún alumno matriculado en alemán está en clase*.

El nodo *Or* $\bar{A}$ será verdadero cuando sea verdad que está ausente algún objeto del conjunto de *a*. Por ejemplo, cuando *Algún alumno matriculado en alemán falte a clase*.

La siguiente columna de nodos centrales representa los tipos de objeto concretos *ab* y *a*¬*b*, que son designados respectivamente como B_1 y $\neg B_1$. Pensemos que B_2 sería en el sistema Alfa ¬*ab*, mientras que $\neg B_2$ sería ¬*a*¬*b*.

B_1 mantiene una relación contraria con $\overline{B_1}$, del mismo modo que B_2 la mantiene con $\overline{B_2}$. Una relación contraria no debe confundirse con una complementaria. Las relaciones complementarias suman uno, las contrarias suman cero. En las relaciones contrarias, la seguridad de una presencia equivale a la seguridad de que no hay ausencia. Es decir, que la certeza de que es verdad que algo está ausente equivale a la certeza de que es falso que está presente.

La siguiente columna de la figura anterior se compone de nodos *And*. $[\bar{A}]$ será verdadero cuando todos los objetos del conjunto *a* estén ausentes. $[A]$ será cierto cuando estén presentes todos los elementos del conjunto *a*, siendo los elementos los tipos de *a*.

El último nodo de la imagen "$\sum a$" es un súper nodo *Sumatorio And* que no admite síntesis cualitativas. Por eso tiene el símbolo de sumatorio. Podemos interpretarlo como la totalidad de los objetos que son *a,* y es igual a la suma de lo que es *a* y está presente, más lo que es *a* y está ausente. Podemos suprimir dicho súper nodo *And* implementando los nodos *Or* con la capacidad de acumular presencias y los nodos *And* con la capacidad de computar ausencias, como ya vimos.

En la ilustración anterior se muestran a la derecha y en colores cuatro ejemplos de inferencia en un conjunto a partir de sus relaciones contrarias de presencia ausencia. Se señala el inicio de la deducción en cada caso. Así, por ejemplo, podemos ver que si es falso que están todos, es verdad que falta alguno, aunque no podemos concretar qué elemento concreto es el que está ausente. También debemos observar que es posible al mismo tiempo que *algún alumno de alemán esté en clase y que alguno falte*, con lo cual será falso que están todos y que será falso que faltan todos. Y si en este caso nos preguntamos por cada uno de los tipos de alumnos en particular (*ab* y *a*¬*b*) veremos que es probable para cada uno de ellos estar en clase (+0,5) y no estar (-0,5), con lo cual los cuatro nodos centrales quedan con un valor = 0 de absoluta incertidumbre, es decir, que no hay más motivos para afirmar que *ab* está ausente de los que tenemos para afirmar que está presente.

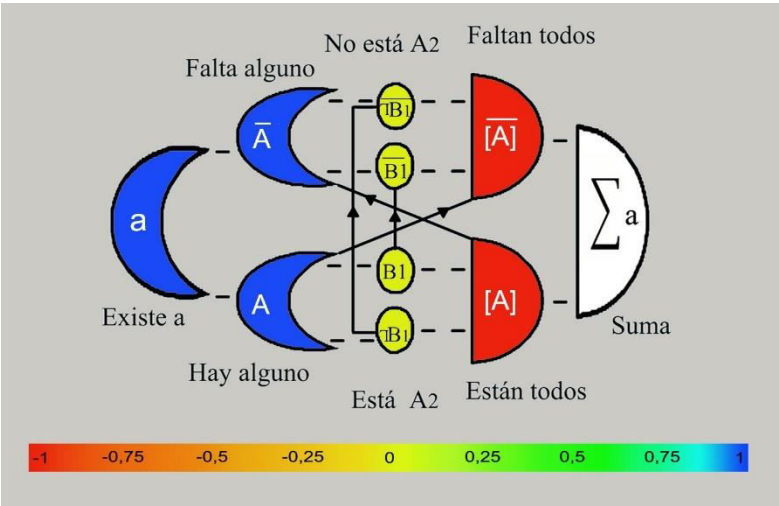


ILUSTRACIÓN 52. HAY ALGUNO Y FALTA ALGUNO. I Y O VERDADERAS.

Se puede simplificar la representación de las relaciones contrarias de activación como ya hicimos anteriormente distinguiendo los nodos objeto presentes de los ausentes. Si entendemos ahora que la expresión "Alguno" se refiere no a un nodo *Or* sino a un nodo *Objeto* central, fácilmente se verá que si algún nodo *Objeto* es falso, es falso que todos son verdaderos, y se verá también que es posible afirmar al mismo tiempo *Alguno está* y *Alguno no está*.

Luego en la lógica de las relaciones de presencia-ausencia de los objetos de un conjunto es posible que sean verdaderas al mismo tiempo la particular afirmativa I y la particular negativa O.

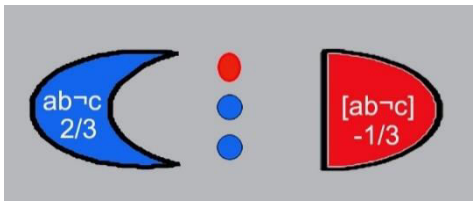


ILUSTRACIÓN 53. RELACIONES CONTRARIAS DE ACTIVACIÓN SIMPLIFICADAS.

4.16 Sistema Alfa diferenciando ser de estar

Para construir el sistema Alfa al completo añadiremos al conjunto *a* con relaciones de presencia ausencia, el conjunto ¬*a*, y entonces podremos postular que la totalidad de cuanto hay en relación con un criterio es igual a la suma de todo cuanto esté presente, sea o no sea y todo cuanto esté ausente, sea o no sea (5).

$$\underline{[a]} = [A]+[\bar{A}]+[\neg A]+[\overline{\neg A}] \qquad (5)$$

Si reconocemos el uso cuantitativo de los nodos, comprenderemos fácilmente la siguiente imagen. En ella se describe un sistema α que combina los criterios a y b en escalas dicotómicas para los grados de ser/esencia y estar/existencia. En la figura *a* = ser; ¬*a*= no ser. Y para los grados de existencia: $\exists^{+}$= estar y $\exists^{-}$= no estar.

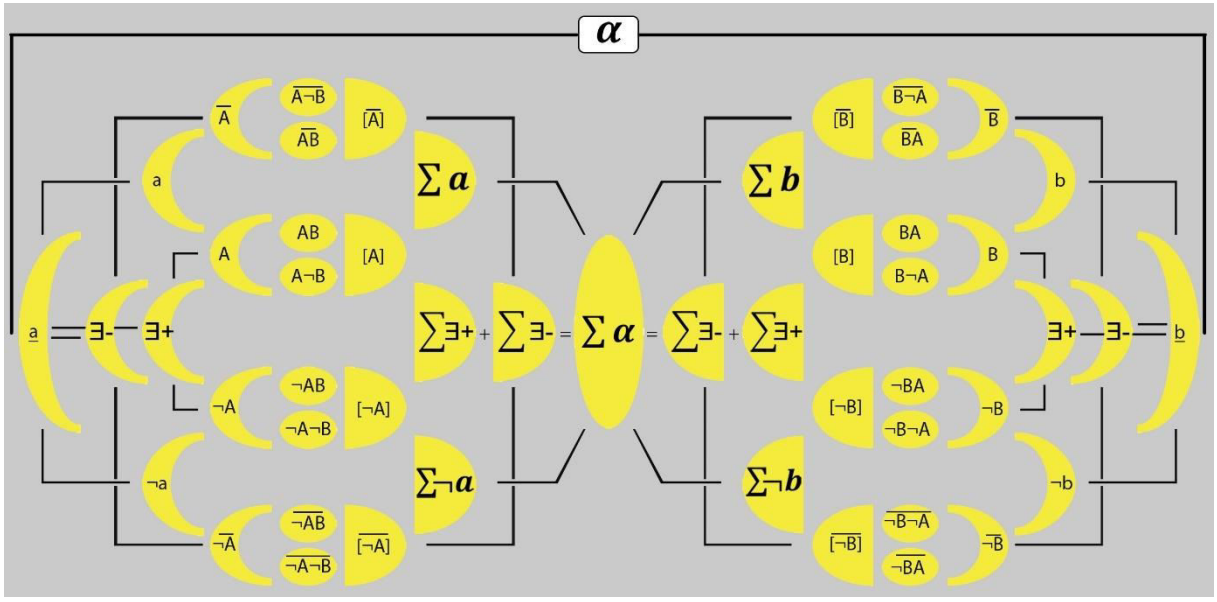


ILUSTRACIÓN 54. SISTEMA ALFA COMPLETO CON RELACIONES CONTRARIAS Y COMPLEMENTARIAS.

El sistema podría complicarse con infinitos grados de ser e infinitos grados de presencia, pero por economía se reducen a dos y dos. Lo que existe siendo *a* y lo que existe siendo ¬*a*. Existir significa en las redes poder estar presente o ausente, sin más pretensiones ontológicas.

Si observamos el circuito, veremos que puede ser activado por su derecha desde el criterio a o por su izquierda desde el criterio b. Si recordamos lo que ya dijimos antes, la totalidad de objetos que puede haber desde la perspectiva de un criterio equivale a la totalidad de objetos que puede haber desde la perspectiva de cualquiera de los otros criterios. Por eso el sumatorio de Alfa es el mismo desde ambas perspectivas. Luego nos da lo mismo considerar qué hay desde a o desde b. Los ocho nodos centrales son idénticos para a y b. La siguiente tabla recoge las leyes básicas que permiten realizar operaciones aritméticas elementales en el sistema Alfa.

$\sum \alpha = \sum \exists^{+} + \sum \exists^{-} = \sum a + \sum \neg a$	Todo cuanto hay es igual a la suma de todo lo que está más todo lo que no está, y es igual así mismo a la suma de todo lo que es más la suma de todo lo que no es. Es decir, que lo que hay respecto a los grados de ser es igual a lo que hay respecto a los grados de existencia.
$\sum \exists^{+} = \sum A + \sum \neg A$	Todo lo que está es igual a la suma de todo lo que es A y está más todo lo que es ¬A y está.
$\sum \exists^{-} = \sum \bar{A} + \sum \overline{\neg A}$	Todo cuanto no está es igual a todo lo que es A y está ausente más todo lo que es ¬A y está ausente.
$\sum A = n\,AB + n\,A\neg B$	Todo lo que está presente siendo A es igual a la suma del número de objetos presentes en cada una de las categorías de A.
$n\,\exists a = \sum a = \sum A + \sum \bar{A}$	El número de objetos que existe ajustado al criterio a es igual a la suma de los que son A y están más lo que son A y no están.
$n\,\exists \neg a = \sum \neg a = \sum \neg A + \sum \overline{\neg A}$	El número de objetos que existe y no se ajusta al criterio a es igual a la suma de los que son ¬A y están más lo que son ¬A y no están.

TABLA 3. PRINCIPIOS CUANTITATIVOS DEL SISTEMA.

La siguiente imagen nos la representación de la afirmación *Ni son (A) todos los que están ni están todos los que son (A)*. Se trata de un sistema compuesto por criterios dicotómicos para designar los grados de ser y estar sin considerar aspectos cuantitativos.

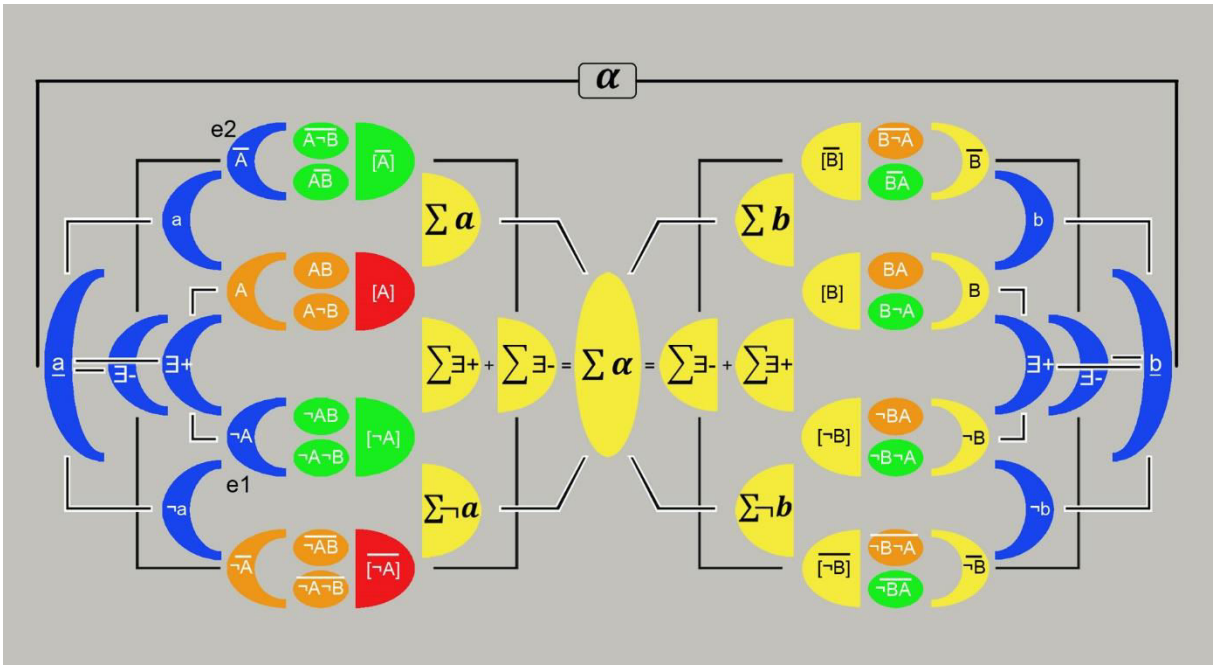


ILUSTRACIÓN 55. NI ESTÁN TODOS LOS QUE SON (A) NI SON TODOS LOS QUE ESTÁN.

El punto de partida para llegar a la ilustración anterior sería la incertidumbre total. Podríamos decir en el inicio que *solo sé que no sé nada, excepto la estructura del ser con la que vamos a investigar*. Luego incluimos la información contenida en la afirmación de que no están todos los que son (e2), convirtiendo en azul el nodo *Or* $\bar{A}$ que indica que está ausente algo que es *a:* Al mismo tiempo se incluye la información contenida en la afirmación de que no son todos los que están (e1) que convierte en azul el nodo *Or* ¬A que indica que está presente algo que no es *a*. A partir de ahí solo hay que seguir las reglas de la inferencia incluyendo las relaciones contrarias de activación. Hay que insistir en que la verdad y la falsedad siguen reglas opuestas en su propagación. Un nodo *Or*

con una carga de verdad tiene que repartirla entre todos sus elementos concretos asociados. Un nodo *Or* con una carga falsa la transmite por entero a todos sus nodos asociados. Podemos afirmar que el nodo *Or* falso cierra un camino, anulando provisionalmente las posibilidades que dependen de él. Un nodo *And* verdadero comunica toda su carga a los elementos asociados, porque de alguna manera ya acumula la carga de verdad de todos los elementos del conjunto. Sin embargo, un nodo *And* falso debe repartir ponderadamente la carga de falsedad entre los elementos del conjunto, lo mismo que un nodo *Or* verdadero.

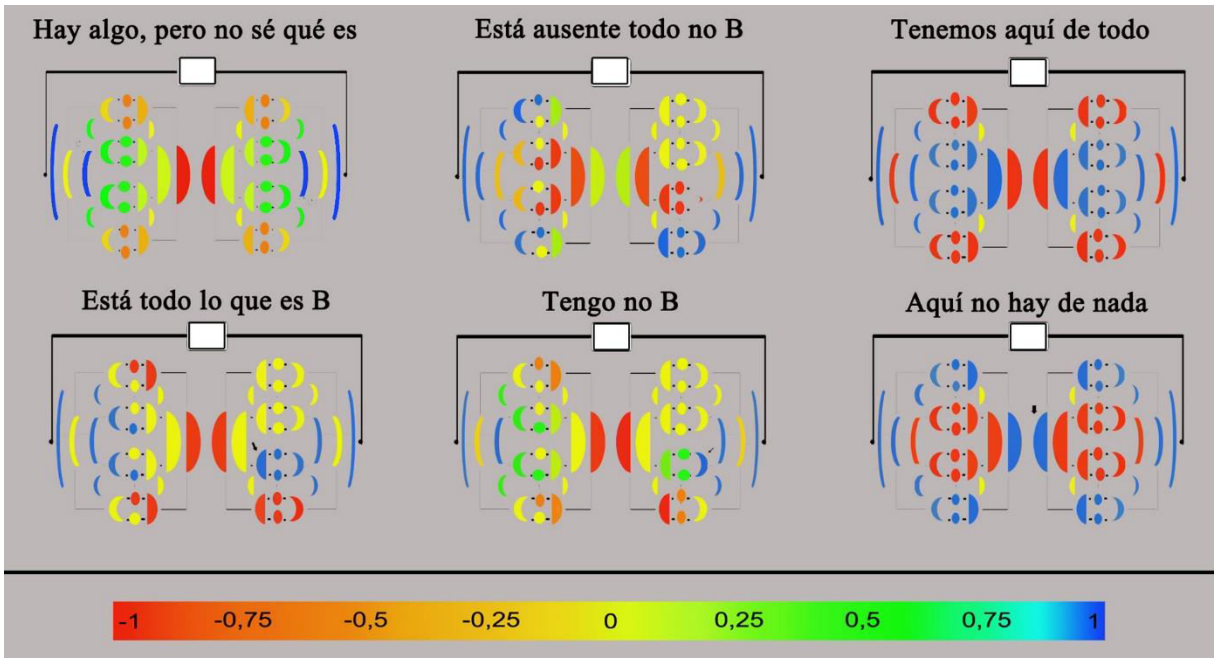


ILUSTRACIÓN 56. DISTINTAS PROPOSICIONES EN REDES SER-ESTAR.

Como podemos observar, estamos realizando inferencias sin necesidad de emplear los conectores. La inferencia se produce en las redes por la comunicación de la activación entre los asociados de un conjunto. Estar asociado es razón suficiente para recibir la influencia de los nodos vecinos.

Las redes nos permiten mostrar la diferencia entre los nodos que se consideran falsos de forma temporal y los que se considera imposibles porque han sido eliminados de la red definitivamente. Pues no es lo mismo que un alumno esté ausente que un alumno se haya dado de baja de forma definitiva. De hecho, solo mientras exista en mi lista tiene la capacidad de estar presente o ausente. En el segundo caso jamás le esperaré para comenzar la clase.

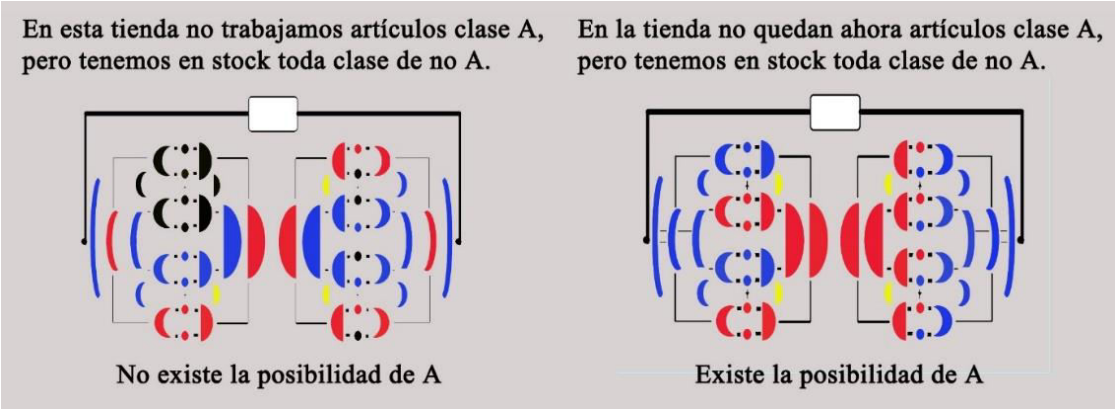


ILUSTRACIÓN 57. DIFERENCIA ENTRE NO EXISTIR Y SER FALSO DE FORMA TEMPORAL (AUSENTE).

Podríamos afirmar que en la tienda donde no existe *A* no tienen de todo lo que podrían tener. Sin embargo, sí tienen de todo lo que pueden tener en base a la definición que dan de sí mismos. Mientras no cambien las reglas del comercio es imposible en teoría que tengan *A*. Si buscáramos certeza metafísica en términos cartesianos, ninguna de las posibilidades eliminadas es imposible. Sin embargo, no sería razonable volver al día siguiente a la

misma tienda en busca de *A* cuando te han dicho que no lo venden. Es cierto que el progreso no sería posible sin considerar posibilidades antes imposibles, pero del ajuste matemático de los circuitos se desprende que no es lo mismo en las redes no ser en términos relativos que no ser en términos absolutos. También los conectores pueden eliminar en Alfa completo nodos o posibilidades de forma definitiva. Podemos ver ejemplos de proposiciones asumiendo la reducción de posibilidades que comunican los conectores. Así, para construir la siguiente figura hemos clasificado primero teóricamente a los alumnos según estudien o no alemán y búlgaro, y fácticamente por el hecho de que estén en clase o no. Luego en cada caso hemos asumido una estructura en las posibilidades del sistema ajustada a cada conector. En el caso de la bicondicional, es obvio que si no están los que estudian alemán no están los que estudian búlgaro y viceversa. En la condicional hemos pintado de negro todos los nodos que contienen A¬B, luego cuando faltan los de alemán faltan parte de los que estudian búlgaro. En la disyunción exclusiva que falten los de alemán conlleva que falten los que no estudian búlgaro. Y así con lo demás. En el caso de la conjunción no se elimina ninguna posibilidad, luego faltan alumnos que estudian búlgaro y alumnos que no estudian búlgaro.

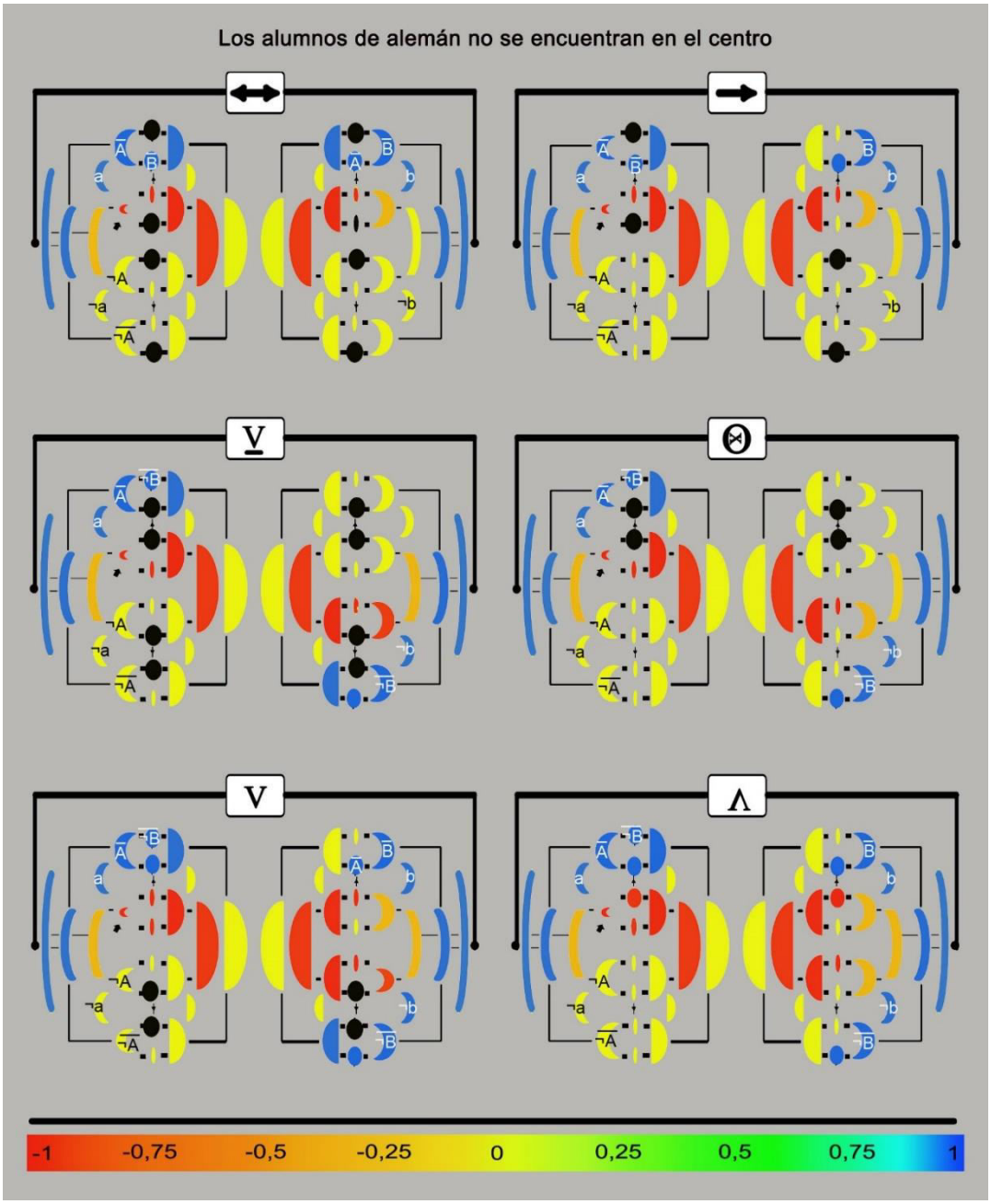


ILUSTRACIÓN 58. UNA MISMA PROPOSICIÓN ASUMIENDO DE INICIO CONECTORES DISTINTOS.

4.17 Principios generales de las redes de expectativas bayesianas

A partir del análisis de las redes de expectativas, las cuales basan su arquitectura en los árboles bayesianos, podemos enunciar algunos de sus principios elementales.

- Todo sistema de información α, β, γ… resulta de la combinación de criterios a, b, c, etc., que permite a los sistemas cognitivos juzgar los estímulos (6).

$$\boldsymbol{\alpha} = \underline{a}^* \underline{b} *\underline{c}\ldots*\underline{z}. \tag{6}$$

- La totalidad de lo que podemos juzgar en α es la misma desde la perspectiva de cualquiera de los criterios del sistema (7):

$$[\underline{a}]=[\underline{b}]=[\underline{c}] \tag{7}$$

- Entre no ajustarse en absoluto a un criterio y ajustarse perfectamente, el número de variables o grados de ser es infinito en teoría, pero se debe adaptar a la capacidad de discriminar del sistema y debe permitir optimizar la toma de decisiones. Más variables significan más matices, pero también un coste mayor en el procesamiento de la información (8):

$$[\underline{a}] = 0.0a,\ 0.1a,\ 0.2a,\ 0.3a,\ldots 1,0a \tag{8}$$

- La totalidad de estados posibles en α resulta de combinar todas las categorías o grados de ser y estar en los que hayamos dividido cada uno de los criterios.

- La totalidad de las posibilidades teóricas de una variable puede ser definida por la totalidad de las variables de cualquier criterio. En un sistema dicotómico se cumple el principio de dualidad de Jevons: (9)(10):

$$[a] = [ab] + [a\neg b] \tag{9}$$

$$[b] = [ba] + [b\neg a] \tag{10}$$

- Un objeto puede permutar sus perspectivas (11):

$$bac = cab = cba \tag{11}$$

- El espacio y el tiempo u otras etiquetas numéricas pueden servir para identificar objetos. Sin ellos no se cumpliría la propiedad conmutativa. ¿Entró y lloró = Lloró y entró? (12)

$$t_1\mathrm{e}.t_2l{=}t_2l.t_1\mathrm{e} \tag{12}$$

- Cada objeto genera perspectivas parciales mediante la combinación y permutación de sus elementos. Dichas perspectivas parciales se corresponden con los subconjuntos o nodos *Or* de la red (13):

$$\neg abc \rightarrow \neg a,\ b,\ c,\ \neg ab,\ \neg ac,\ bc,\ b\neg a,\ c\neg a \tag{13}$$

- La diferencia entre la información contenida en una perspectiva global y otra parcial del mismo objeto es incertidumbre.

- Una proposición que expresa presencia o ausencia puede ser verdadera, falsa probable o incierta en distinto grado.

- El sistema puede recombinarse desde la perspectiva de cualquier criterio, permitiendo una adaptación flexible a las circunstancias.

- Cualquier combinación de variables constituye una secuencia de información. Dichas secuencias pueden tener el rango de suposiciones o conjeturas (14) no confirmadas ni verificadas cuando el número de sus elementos es incierto, hechos en curso (15), teorías (16) e implicaciones teóricas (17). En la inferencia los

hechos se imponen a las teorías y estas a las suposiciones. En relación a una asociación condicional de *a* y *b* tendríamos:

$$ab? \tag{14}$$

$$AB \tag{15}$$

$$a_x b \tag{16}$$

Si tengo *AB* y $a_x b$, entonces ¬ (a¬b), luego $\neg b_x \neg a$ y ∃?(*A*¬*B)* (17)

- La totalidad del mundo, *Aleph*, para un sistema cognitivo, es constituida por el conjunto de subsistemas de información *Alfa*, *Beta*… *Omega* que lo componen. (18)

$$\aleph = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega\}; \tag{18}$$

4.17.1 Expresión de proposiciones elementales

Podemos anticipar el significado de algunas expresiones frecuentes para facilitar la comprensión de la sección, dejando para más adelante su explicación más detallada.

- Está presente algo que se ajusta al criterio a. (19).

$$\mathrm{A} \tag{19}$$

- Está presente la totalidad de los tipos teóricos que se ajustan al criterio a (20).

$$[\mathrm{A}] \tag{20}$$

- Está ausente algo que se ajusta al criterio a. (21) Está ausente la totalidad de todo lo que es a (22)

$$\bar{A} \tag{21}$$

$$[\bar{A}] \tag{22}$$

- Si la variable *a* es activada por un único estímulo e_1, entonces o cuento con la presencia de *a* o cuento con su ausencia de forma excluyente. (23)

$$e_1 * a = A \veebar \bar{A} \tag{23}$$

- Es imposible la asociación de a y b. (24)

$$\neg\, (ab) = \nexists\, ab \tag{24}$$

4.17.2 Algunos principios lógicos básicos de la inferencia

La llamada lógica de proposiciones parece determinar el qué de un objeto concreto en cuestión, siendo imposible la convivencia de dos grados de ser excluyentes durante la inferencia, pues "esto" no puede ser *A* y ¬*A* al mismo tiempo. Sin embargo las redes de expectativas y los diagramas de Marlo permiten trabajar con lo que puede haber en un sistema sin limitarse necesariamente al objeto. En todo caso, cuando el número de elementos en el sistema es igual a uno, nuestros diagramas se ajustan perfectamente a las leyes de la lógica de proposiciones (Russell & Whitehead, 1925). Mostramos a continuación algunas leyes que nos permiten resolver inferencias propias de la lógica de predicados empleando las redes de expectativas. Advertimos que a veces mezclamos nuestra notación con la convencional. Así, para señalar una disyunción con existencia garantizada podemos decir "%A, %B" que significa es probable A y es probable B y también podemos escribir "A ∨ B". También podemos usar la conjunción "∧" para asociar dos objetos, pero no para señalar la conjunción de variables que determina al objeto. Así decimos

normalmente "*ABC ∧ ¬ABC"*, o bien usamos la coma "*ABC, ¬ABC*", pero no decimos "*(A∧B∧C) ∧ (¬A∧B∧C)"*. Además, nosotros podemos concluir "A ∧ ¬A" considerándolos dos objetos distintos, pero no podemos decir "*A¬A"*. Recordemos lo dicho sobre composición y agregación.

Debemos advertir que es nuestro propósito coordinar la justificación de las inferencias en las redes, los diagramas de Marlo y el sistema de notación formal que proponemos, alejándonos lo menos posible de la ortodoxia lógica que domina nuestros centros de enseñanza secundaria actualmente. Sin embargo, este proyecto no ha sido concluido definitivamente por las diferencias intrínsecas que separan las redes de los diagramas.

Las redes podrían ser modelos aproximados de lo que ocurre en un sistema cognitivo Alfa cuando procesa información en paralelo, codificando matemáticamente sus expectativas. Los diagramas, sin embargo, parecen reflejar mejor los principios lógicos de la comunicación por los cuales dicho sistema Alfa transmite en serie los estados de su red.

Es evidente que hay una correspondencia entre redes, diagramas de Marlo y notación formal, pero lo que en la notación formal nos parece adecuado llamar *generalizar* nos parece mejor llamarlo *síntesis* de modelos en los diagramas de Marlo y *propagación de la activación* en las redes, aunque podríamos referirnos también a todo ello como *Modus Ponens* siendo más conservadores. Como principios generalmente admitidos podemos señalar los siguientes:

- Eliminación o Principio de Tercio Excluso (P.T.E.): en los sucesos, un estímulo juzgado desde la escala de un criterio es necesariamente categorizado por un y solo un rango determinado. Luego si no lo es por uno, lo es por alguno de los otros. Cuando las escalas no son dicotómicas hay muchos modos de no ser *A*. Complementa al principio de no contradicción.

- Exclusión: definido un objeto como secuencia de información, la ausencia de cualquiera de sus segmentos hace imposible la presencia del objeto. Se corresponde parcialmente con el *Modus tollens*. Es decir, que si no tenemos ¬*a*, no podemos tener nada que la contenga como ¬*ab*, ¬*a*¬*b*, ¬*abc*, etc. Entendemos que la parte es necesaria para el todo. En las redes se observa que al eliminar un nodo se elimina toda la rama que depende de él, y lo mismo al dar un valor de -1 a un nodo *Or*, pues dicho valor se extiende anulando toda su rama.

- Generalización: lo que se predica de cualquiera se predica de cada uno. Se corresponde parcialmente con el clásico *Modus Ponens*. En los diagramas de Marlo solemos llamarla *Síntesis*. En las redes se muestra que si dos objetos están conectados el estado de activación de uno modifica el del otro provocando la propagación de la verdad y la falsedad por las ramas de la red.

- Razón suficiente para existir (R.S.∃.): en un segmento de información definido como objeto, la activación de cualquiera de sus elementos es suficiente y necesaria en la activación del resto. Eso significa que son expresiones incorrectas las fórmulas *ABc*, *Abc*, *aBc*, *aBC*. Solo pueden ser correctas *abc* o *ABC*.

- Los elementos de un conjunto mantienen una relación probable. Si es cierto que parte de *a* se asocia con *b* y es cierto que parte de *a* se asocia con *c*, entonces es probable la secuencia *abc*. (25)

$$a_x(\%b,\%c) = \%abc \tag{25}$$

- Absurdo: se aplica sabiendo que los hechos se imponen a las teorías y estas a las suposiciones. Ejemplo: Al introducir en la red $a_x b$ el nodo $b\neg a$ aún es posible como conjetura, pero si añadimos que *Todo ¬A es ¬B*, entonces tenemos que eliminar el nodo conjetura $b\neg a$ por las implicaciones teóricas de $\neg a_x \neg b$ que se imponen. En la calculadora lógica las proposiciones absurdas se anulan devolviendo una salida igual a 0, es decir, incertidumbre. En todo caso, podría ser rentable adoptar otra convención en caso de contradicción, como quedarnos con lo que nos interesa afirmar.

- Principio de no contradicción, repulsión o exclusión: es imposible asociar en un mismo objeto dos variables asociadas respectivamente con variables excluyentes entre sí. Luego si a_1 se asocia con c y b_1 se asocia con ¬c, entonces es imposible asociar a_1 con b_1 (26).

$$a_1 c \wedge b_1 \neg c \rightarrow \neg (a_1 b_1) \tag{26}$$

- Principio de incertidumbre: lo que es incierto en las premisas debe permanecer incierto en las conclusiones si no hay razón suficiente para lo contrario.

- Introducción de la implicación (I.I): las consecuencias teóricas de cualquier suposición pueden ser consideradas teóricamente verdaderas. Las redes en estado inicial donde todos sus nodos valen cero permiten observar fácilmente las consecuencias de suponer un determinado valor de verdad o falsedad en uno o varios nodos teniendo en cuenta las conexiones que la definen.

- Relaciones probables, definición de la particular como probabilidad condicionada o introducción del generalizador: si parte de *a* se asocia con parte de *b* porque *Alguna A es B*, entonces, en el caso de tener una *A* cualquiera es probable tener *B*. (27)

$$AB \rightarrow a_x\%b \tag{27}$$

- Relaciones contradictorias: si parte de *a* se asocia con parte de *b*, es imposible que la totalidad de *a* se asocie con ¬*b*. (28).

$$ab = \neg([a]\neg b) \tag{28}$$

- Si parte de *a* se asocia con ¬*b*, entonces es imposible que todos los tipos de *a* se asocien con *b*. (29).

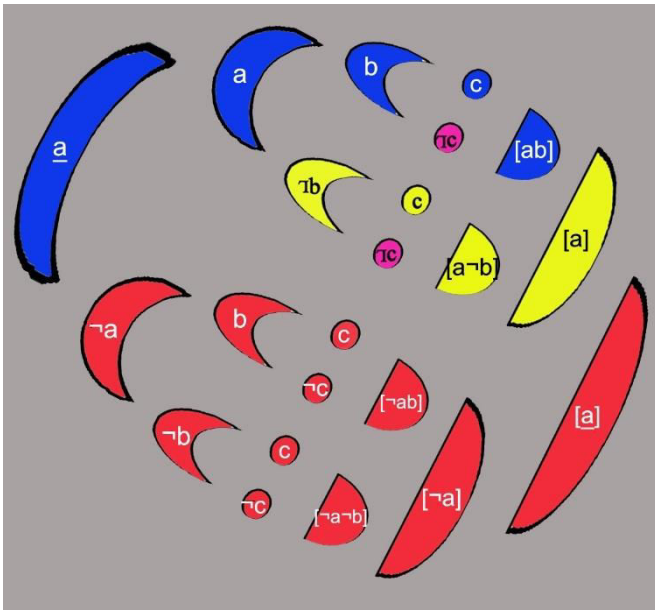
$$a\neg b = \neg([a]b) \tag{29}$$

El lenguaje está lleno de ambigüedades. Cuando afirmamos que *hay A* podemos decir que existe la posibilidad de *A* o bien que *A* está presente durante la situación en curso. Del mismo modo, si un tendero nos dice *No tengo el perfume de la marca X* puede no quedar claro si no lo vende o si no lo tiene en ese momento.

Podemos ver cómo se resolvería gráfica y formalmente el siguiente ejercicio de lógica de predicados (ilustración 59):

Toda A es C. Alguna C es B y está presente. No hay ninguna ¬A presente. Luego podemos afirmar, entre otras cosas, que A está presente.

En la figura azul significa presente y rojo ausente. Amarillo incierto. Debemos notar que usamos redes teóricas con el supuesto de que no hay clases vacías, de modo que falso significa ahora estar ausente y verdadero estar presente.



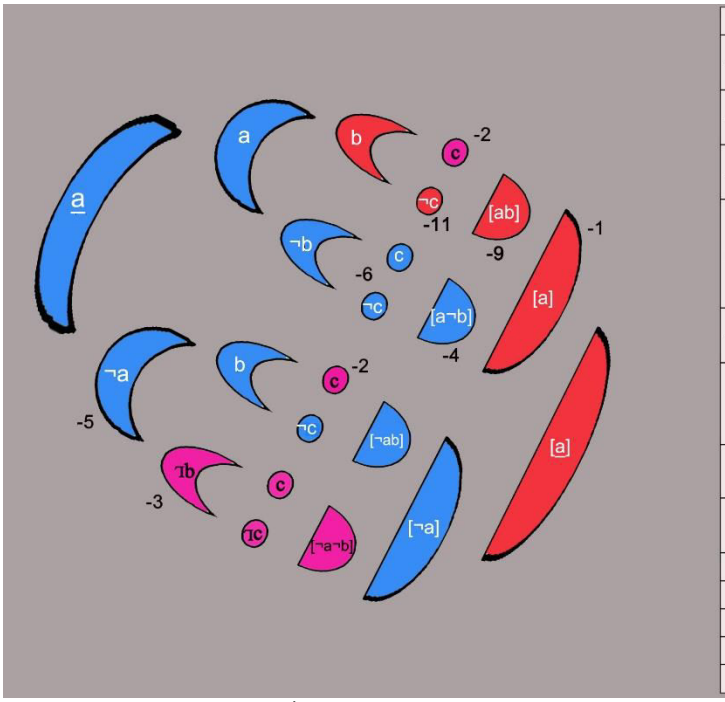
	Formalización	Justificación
-1	$a_x c$	No se afirma que estén presentes A ni C, pero cuando haya A habrá C.
-2	CB	Se afirma existencia en la premisa
-3	¬ (¬A)	Es imposible que esté presente ¬A
4	CB¬A V CBA	Posibilidades del objeto 2 en el sistema α
5	CBA	**Eliminación** del objeto CB¬A **Exclus.** considerando 3
6	A	Contenido en 5. Podemos afirmar la presencia de A

ILUSTRACIÓN 59. EJERCICIO DE LÓGICA DE PREDICADOS RESUELTO GRÁFICA Y FORMALMENTE.

Veamos otro ejercicio (ilustración 60):

No están presentes todos los que son A. *Ninguna C es B*. *Ninguna no B es no A*. Están presentes todos los tipos de $A\neg B$. Está presente algo que es $\neg A$. Luego $\neg C$ está presente y ausente al mismo tiempo.

Hay que observar que estas inferencias cromáticas tienen correlato matemático, como veremos en la calculadora lógica, y correlato formal, como observamos a la derecha de la ilustración. Además pueden expresarse con los diagramas de Marlo utilizando un procesamiento más en serie. Hemos señalado en la red qué premisa justifica el color del nodo como verdadero, falso o eliminado.



	Formalización	Justificación
-1	$\neg[A]$	No está presente todo lo que es **a**.
-2	$\neg(cb)$	No está permitida la secuencia **cb,** ni **bc**
-3	$\neg\ (\neg b\neg a)$	No es posible tener ¬b y **¬a**
4	$[A\neg B]$	Tenemos aquí la totalidad de tipos **a¬b** permitidos.
-5	$\neg A$	Hay presente algo que es **no ¬a**.
6	$A\neg BC \wedge A\neg B\neg C$	Definición de las posibilidades de 4 en α
7	$[a]\ =[ab]+[a\neg b]$	Definición de $[a_n]$ en α
8	$\neg[A_b] \vee \neg[A_{\neg b}]$	Posibilidades de 1 en α
9	$\neg[A_b]$	Eliminación 4, 8
10	$\overline{ABC} \vee \overline{AB\neg C}$	Definición de 9
11	$\overline{AB\neg C}$	Eliminación 2, 9
12	$\overline{\neg C}$	Contenido en 11
13	$\neg C \wedge \overline{\neg C}$	Contenido 6 y 12

ILUSTRACIÓN 60. EJERCICIO DE REDES DONDE SE DIFERENCIA AUSENCIA Y NO EXISTENCIA.

La observación de la ilustración 60 nos permite enunciar múltiples proposiciones. Sabemos, por ejemplo, que es falso que haya de todo; sabemos que hay algo, que hay algo que es *A* y que hay algo que no es *A*; sabemos que tenemos todo lo que no es *A* y que tenemos todo tipo de $A\neg B$.

Si nos preguntamos en la misma ilustración (60) por los objetos centrales podemos realizar las siguientes afirmaciones:

Son teóricamente imposibles los objetos $ab\neg c$, $\neg abc$, $\neg a\neg bc$ y $\neg a\neg b\neg c$.

Es posible, pero falso que esté disponible ahora, el objeto $ab\neg c$.

Son verdaderos materialmente los objetos $a\neg b\neg c$, $a\neg b\neg c$, $\neg ab\neg c$.

La calculadora lógica que presentamos a continuación nos permitirá llegar a las mismas conclusiones matemáticamente. De este modo veremos como es posible integrar en un mismo razonamiento heterogéneo las inferencias lingüísticas, numéricas, cromáticas y diagramáticas.

4.18 Calculadora lógica en Excel basada en las redes

¬b¬c	abc	ab¬c	a¬bc	a¬b¬c		¬abc	¬ab¬c	¬a¬bc	¬a¬b¬c		[ab]
0,80	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		0,50
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		0,00
0,80	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		0,50
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		0,00
1,00	abc	ab¬c	a¬bc	a¬b¬c	POSITIVO	¬abc	¬ab¬c	¬a¬bc	¬a¬b¬c		2,00
1,00											2
2,00											
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Verdad inicial objetos	
	abc	ab¬c	a¬bc	a¬b¬c	NEGATIVO	¬abc	¬ab¬c	¬a¬bc	¬a¬b¬c	NEGATIVO	
	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay nada	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay nada	
	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay a	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay ¬a	
	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay ab:a¬b	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay ¬ab,¬a¬b	
	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay: ac; a¬c	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay ¬ac,¬a¬c	
	0,00	0,00	-0,71	0,00	No hay:bc;b¬c;¬bc;¬b¬c	0,00	0,00	-0,71	0,00	ay:bc;b¬c;¬bc;¬b¬c	
	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay:b, ¬b	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay:b, ¬b	
	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay c,¬c	0,00	0,00	0,00	0,00	No hay c,¬c	[¬ab]
	0,00	0,00	-0,71	0,00	INTEGRACIÓN FALSEDAD OR	0,00	0,00	-0,71	0,00	INTEGRACIÓ	0,00
											0,00
¬b¬c											0,00
1,00	abc	ab¬c	a¬bc	a¬b¬c		¬abc	¬ab¬c	¬a¬bc	¬a¬b¬c		0,00
1,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	INTEGRA VEF	2,00
2,00	0,00	0,00	-0,71	0,00		0,00	0,00	-0,71	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	Hay algo	0,00	0,00	0,00	0,00	Hay algo	2
	0,00	0,00	0,00	0,00	Hay a	0,00	0,00	0,00	0,00	Hay ¬a	
	0,00	0,00	0,00	0,00	Hay ab, ¬ab	0,00	0,00	0,00	0,00	Hay ¬ab, ¬a¬b	
	0,00	0,40	0,00	0,40	Hay ac, a¬c	0,00	0,00	0,00	0,00	Hay ¬ac,¬a¬c	
	0,35	0,00	0,00	0,40	Hay bc, b¬c,¬bc,¬b¬c	0,35	0,00	0,00	0,40	Hay bc, b¬c,¬bc,¬b¬c	
	0,00	0,00	0,00	0,00	Hay b, ¬b	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	Hay c, ¬c	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,35	0,40	0,00	0,64	INTEGRACIÓN VERDAD OR	0,35	0,00	0,00	0,40	INTEGRACIÓN	
	0,35	0,40	0,00	0,64	INTEGRA VERDAD OR OBJETO CON VERDAD OBJETO CENTRAL TRAS CORREGIRLO CON FALSEDAD OR	0,35	0,00	0,00	0,40		
	abc	ab¬c	a¬bc	a¬b¬c		¬abc	¬ab¬c	¬a¬bc	¬a¬b¬c		
¬b¬c	0,35	0,40	0,00	0,64	ALGO	0,35	0,00	0,00	0,40		
1,00	0,00	0,00	-0,71	0,00	OBJETOS REAJUSTADOS SOLO A LA	0,00	0,00	-0,71	0,00		
0,00	0,35	0,40	-0,71	0,64	sional desde Algo: se impone la fal	0,35	0,00	-0,71	0,40		
1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	VALOR INICIAL FALSEDAD OBJETO	0,00	0,00	0,00	0,00		
¬c	0,00	0,00	0,00	0,00	*NO EXISTE*	0,00	0,00	0,00	0,00		
1,00	0,71	0,71	0,00	0,00	Todo ab, a¬b,¬ab,¬a¬b	0,00	0,00	0,00	0,00		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo ac, a¬c,¬ac,¬a¬c	0,00	0,00	0,00	0,00		
1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo bc, b¬c,¬bc,¬b¬c	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo a, ¬a	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo b, ¬b,	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo c, ¬c	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo a	0,00	0,00	0,00	0,00		
TODO INTEG	0,71	0,71	0,00	0,00	TODO	0,00	0,00	0,00	0,00		
	abc	ab¬c	a¬bc	a¬b¬c		¬abc	¬ab¬c	¬a¬bc	¬a¬b¬c		
L VERDAD OI	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
EXISTENCIA	0,00	0,00	0,00	0,00	NO EXISTE	0,00	0,00	0,00	0,00	FALSO QUE TODO	
	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo ab, a¬b,¬ab,¬a¬b	0,00	0,00	0,00	0,00		
	-0,15	0,00	-0,15	0,00	Todo ac, a¬c,¬ac,¬a¬c	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo bc, b¬c,¬bc,¬b¬c	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo a, ¬a	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo b, ¬b,	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo c, ¬c	0,00	0,00	0,00	0,00		
	0,00	0,00	0,00	0,00	Todo a	0,00	0,00	0,00	0,00		
NTEGRADO	-0,15	0,00	-0,15	0,00	TODO	0,00	0,00	0,00	0,00		
	abc	ab¬c	a¬bc	a¬b¬c		¬abc	¬ab¬c	¬a¬bc	¬a¬b¬c		
	0,71	0,71	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
	-0,15	0,00	-0,15	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00		
odo	0,81	0,82	0,00	0,64		0,35	0,00	0,00	0,40		
	-0,15	0,00	-0,75	0,00		0,00	0,00	-0,71	0,00		
	abc	ab¬c	a¬bc	a¬b¬c	FINAL	¬abc	¬ab¬c	¬a¬bc	¬a¬b¬c		
¬b¬c	0,81	0,82	0,00	0,64		0,35	0,00	0,00	0,40	[ab]	[a¬b]
1,00	-0,15	0,00	-0,75	0,00		0,00	0,00	-0,71	0,00	0,67	0,00
0,00	0,66	0,82	-0,75	0,64		0,35	0,00	-0,71	0,40	-0,15	-0,75
1,00										0,52	-0,75

ILUSTRACIÓN 61. DETALLE DE LA CALCULADORA LÓGICA BASADA EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

Durante la presentación que hicimos en el VIII Congreso Cibem de Educación Matemática de nuestros circuitos lógicos bayesianos una de las participantes nos hizo la observación de que podrían materializarse en una hoja de cálculo fácilmente. Siguiendo su idea trabajamos durante varios meses en el proyecto y, finalmente, después de corregir más de 50 versiones, llegamos a lo que puede considerarse una calculadora lógica en Excel que igualmente puede resolver problemas de lógica utilizando valores bivalentes, trivalentes o ilimitados, integrando además la información recibida de *inputs* contradictorios. Dado que será difícil seguir la lectura de este apartado, recomendamos hacerlo al tiempo que se manipula la calculadora lógica que presentamos como anexo (ver 'Anexo 2: Cap. 5 Calculadora lógica'.

La calculadora ha sido construida considerando tres criterios *a*, *b*, *c* tomados dicotómicamente, aunque los mismos principios servirían para trabajar con cualquier otro número mayor de divisiones. Limitándonos a ser o no ser, obtenemos ocho nodos objeto centrales que han sido destacados en color gris en la ilustración anterior. A la izquierda de los nodos objeto se sitúan los nodos *Or*, de los cuales solo aparece en la imagen el nodo que corresponde a la proposición *Hay algo que es ¬b¬c*. A la derecha de los nodos objeto se sitúan los nodos *And*, de los cuales solo aparece en la imagen, por cuestiones de espacio, el nodo *Hay todo tipo de ab*. Cada nodo *Or* tiene su homólogo *And*, aunque las conexiones entre ambos están mediadas por los valores de los nodos objeto, a los que hemos dado un rango superior. Si nos fijamos en la imagen, debajo de los nodos *Or* y *And* se computa el número de nodos objeto centrales que los conforman. En los nodos *Or* se computan los objetos candidatos justo debajo de los valores de verdad y falsedad corregidos, tintando los números de azul oscuro primero y en negro después de la primera revisión. Hay que pensar que si un nodo *Or* tiene un valor uno, dicho valor se reparte entre los candidatos, siendo esencial llevar siempre la cuenta de los nodos que participan en el reparto. Lo mismo ocurre con los nodos *And*. Debajo de ellos se lleva la cuenta en verde y rojo de los nodos objeto que siguen activos tras las decisiones de eliminación existencial que tienen lugar en las filas 41 y 52. Pensemos que si *a¬bc* es eliminado bastará tener *a¬b¬c* para que *And* [a¬b] sea verdadero, pero si a¬bc solo es falso, *And* [a¬b] será falso.

A efectos prácticos tenemos un total de cuarenta y seis nodos entre nodos *Or*, *Objeto* y *And*. Cada nodo tiene una celda que admite valores de entrada entre 0 y 1 para reflejar el grado de certeza que tenemos acerca de su verdad y una celda que admite valores de entrada entre 0 y -1 para reflejar la certeza de su falsedad. Las celdas que procesan los valores positivos se señalan en azul y las que procesan valores negativos en rojo. Hay pues, 92 celdas para *inputs* en la red. Cada una de estas dos celdas tiene un valor inicial igual a cero que debe interpretarse como *No sé nada acerca de si esto es verdadero o falso.*

Si observamos la ilustración anterior veremos que cada nodo inicial tiene cuatro celdas para calcular la expectativa. Si nos fijamos, por ejemplo, en el nodo *Or ¬b¬c*, que es el primero de la parte superior izquierda, veremos que introdujimos en él un valor de 0,8 en los motivos del sí. Podemos introducir un valor entre 1 y 0 en esa primera fila de la verdad, y entre -1 y 0 en la segunda de falsedad. La tercera fila (azul) corrige el valor de verdad inicial de la primera fila teniendo en cuenta el valor de falsedad inicial de la segunda. La cuarta fila (rojo) corrige el valor inicial de la segunda teniendo en cuenta el valor de la primera. Si ambos valores son decimales, no hay correcciones, pero el valor absoluto o necesario de uno elimina el valor probable del otro convirtiéndolo en 0. En la siguiente tabla ejemplificamos cinco casos del modo en el que se integra la información para dar un valor de salida o valor carga.

	HAY A				
Verdad inicial	1	0	0,8	1	1
Falsedad inicial	0	-1	-0,5	-1	-0,9
Verdad corregida	1	0	0,8	0	1
Falsedad corregida	0	-1	-0,5	0	0
Valor carga	1	-1	0,3	0	1

TABLA 4. EJEMPLOS DE CORRECCIÓN DE LOS VALORES DE ENTRADA INICIALES.

Como principio general establecemos que lo necesario anula a lo probable: Si el padre de Ana me dice que Ana muy probablemente está en casa (+0,8), pero su madre me dice que es seguro que no está (-1), yo contaré con que es seguro que no está. Y lo mismo si uno me dice que está casi seguro de que no está en casa (-0,9) pero el otro me asegura firmemente que sí (+1): ahora le daríamos al hecho de estar Ana en casa un valor 1 y al hecho de no estar un valor 0 (ver caso 4 de la tabla anterior).

Esta decisión puede parecer convencional, pero nos parece razonable que lo necesario se imponga si ambas fuentes de información gozan del mismo grado de credibilidad y confiamos en que el que afirma con absoluta seguridad lo hace basándose en la evidencia. En cualquier caso, todos los valores iniciales quedan registrados y podrían ser tenidos en cuenta para modificar nuestros criterios de salida ajustando nuestras decisiones a sus consecuencias.

Es muy importante tener en cuenta que cada *input* en las celdas de la calculadora lógica se considera independiente de los demás: por ejemplo, si uno me dice que *En el zoo hay animales que lavan la fruta* y otra fuente me informa de que *Hay monos en el zoo*, entonces mis expectativas de ver en el zoo monos que lavan la fruta son mayores considerando ambas fuentes. El valor matemático de esas expectativas sería: la probabilidad de que esos animales de los que hablaba el que dijo que vio animales que lavan fruta fueran los monos que quiero ver más (uno menos la probabilidad de que el primero no hablara de los monos que quiero ver) multiplicado por (la probabilidad de que el segundo sí se refiriese a los monos que quiero ver). La fórmula probabilística deriva de la idea de que las dos personas que nos informan de los animales que han visto en el zoo son fuentes distintas de información cuyos *inputs* vamos a considerar sucesos independientes.

Otro ejemplo de cómo el número de fuentes aumenta la confianza en un suceso es el siguiente: Con la intención de montar una empresa de alquiler de Cadillac en mi ciudad pregunto a varias personas distintas si han visto por la calle circular algún Cadillac. A medida que el número de personas que han visto alguno aumente, mis expectativas de que ya exista más de un Cadillac en la ciudad aumentarán también, siendo la diversidad de fuentes de información un elemento a favor de la confianza en dicho suceso, el cual me desanima a montar mi empresa de alquiler. En todo caso, por más personas distintas que vieran un Cadillac blanco circulando por la ciudad en distintos momentos, nunca podría estar seguro de que la competencia posea realmente más de uno.

Dado que cada nodo recibe información de fuentes independientes, hemos programado la calculadora lógica para que pueda procesar las contradicciones proporcionando una salida razonable. Por ejemplo, en la columna cuatro de la tabla anterior las entradas iniciales aseguran con absoluta certeza que *A* está y que no está respectivamente, por lo que el sistema determina que la verdad y la falsedad son inciertas en las filas tres y cuatro, lo cual genera a su vez un valor final de carga igual a cero en la fila cinco. En todo caso queda registro de las entradas, no siendo lo mismo para determinados efectos la incertidumbre final producto de la ignorancia que la que es producto de la contradicción.

Una alternativa a la corrección de los valores de entrada en la calculadora sería no aceptar contradicciones en los *inputs* de entrada, o aceptar que de una contradicción se sigue cualquier cosa, como afirmaba por ejemplo Alberto de Sajonia (Bochenski & Bravo, 1985) y que es lo que hacemos en los ejercicios de lógica de proposiciones. Sin embargo, no nos parece una solución razonable para un sistema inteligente que toma decisiones contar con que Elvis Presley está en casa de Ana porque el padre de Ana dice que Ana está y la madre dice que Ana no está. Nos parece más verosímil que el sistema busque información complementaria. Por ejemplo, podemos resolver el conflicto preguntando a la abuela de Ana y si ella nos dice que *Todas sus nietas están en casa*, entonces la calculadora devolverá como salida que lo razonable es pensar que Ana está en casa porque el padre dice que sí, la madre que no y la abuela dice que sí están todas sus nietas.

La calculadora lógica va integrando la información que recibe la red desde los nodos *Or* y *And* en los nodos *Objeto*, de modo que puede ir corrigiendo sus valores haciendo recorridos sucesivos de fuera adentro y de dentro a afuera. Primero elimina posibilidades integrando en los nodos objeto la información de lo que es falso. Si nos fijamos en el nodo *Or* $\neg b\neg c$ de la ilustración que inicia este apartado con un detalle de la calculadora lógica, veremos que debajo de la fila 4, que contiene un cero rojo, aparece en la fila 5 un 1, en la fila 6 un 1 y en la fila 7 un dos. Los unos de la fila cinco y seis de esa columna *Or* $\neg b\neg c$ indican que hay que contar con los nodos objeto $a\neg b\neg c$ y $\neg a\neg b\neg c$ respectivamente y por eso en la fila 7 aparece un 2, indicando dos componentes de *Or*. Si le damos a la verdad de *Or* $\neg b\neg c$ un uno como seguro que sí, ese uno se divide por el dos de su fila 7 para dar 0,5 a los nodos objeto vinculados $a\neg b\neg c$ y $\neg a\neg b\neg c$; pero si el nodo *Objeto* $a\neg b\neg c$ se eliminara con un -1 en la fila cuatro de su columna, ahora la certeza de que es cierto $\neg b\neg c$ se dividiría por uno y no por dos, e iría en su totalidad para la alternativa $\neg a\neg b\neg c$. Así el sistema va computando las opciones asociadas a todos los nodos *Or* y los nodos *And* después de cada barrido, pues puede ocurrir que el nodo ¬b¬c tenga dos opciones en el primer barrido de *Or* →*Objeto* pero que tales opciones se reduzcan a una después de considerar la información de *And*.

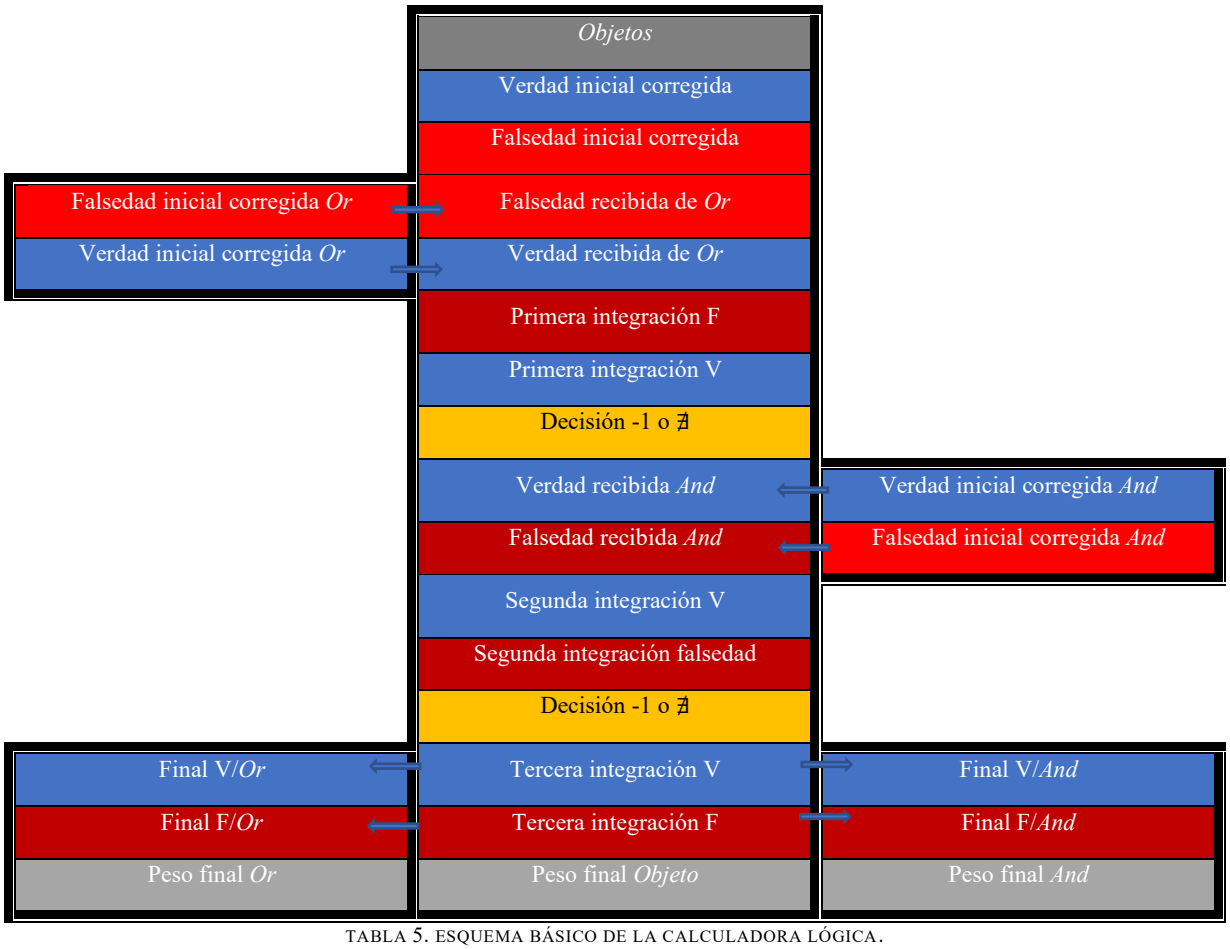


TABLA 5. ESQUEMA BÁSICO DE LA CALCULADORA LÓGICA.

4.18.1 Primera integración de la falsedad de *Or* con la de sus nodos objeto asociados

> REGLA: La carga de inhibición o falsedad que recibe un nodo *Or* de los nodos *Objeto* que lo componen es igual al promedio de la falsedad de dichos nodos *Objeto*. Luego el valor aproximado de falsedad que recibe un nodo *Objeto* de un nodo *Or* es el propio valor de inhibición de *Or*.

Durante el primer barrido *Or*→*Objeto* la red envía la información de la falsedad de los nodos *Or* a los nodos objeto, pero teniendo en cuenta que los nodos objeto considerados verdaderos necesariamente desde el inicio quedan excluidos del reparto de la falsedad. Así, el nodo *Objeto* necesariamente verdadero no puede recibir ninguna probabilidad de ser falso. Por ejemplo, el valor de falsedad del nodo *Objeto abc* depende de la información inmediata que tenemos acerca de su falsedad en las celdas centrales *abc* y depende de la información de la falsedad contenida en los nodos *Or*: *a*, *b*, *c, ab, ac* y *bc*, pues todos ellos le afectan. Pero si la verdad del nodo *Objeto abc* en la casilla central ya es igual a uno, dicho nodo será excluido del reparto de las cargas de falsedad contenidas en los mencionados nodos *a*, *b*, *c*, *ab*, *bc* y *ac*. De hecho, si la verdad del nodo *abc* es 1, entonces, después de integrar todos los datos, la falsedad de los nodos *a*, *b*, *c*, *ab*, *bc* y *ac* será igual a cero. Pero antes de integrarlo todo, lo primero será que los valores de falsedad de los nodos *Or* corran hacia los nodos objeto cuyo valor de verdad no sea igual a uno.

Como la falsedad de los nodos *Or* resulta del promedio de falsedad de sus componentes, al eliminar alguno de ellos del reparto de la falsedad, cambiará el valor aproximado que recibe el resto.

Por ejemplo, si damos -0,25 al valor del nodo *Or ab* en su casilla de falsedad, entonces *abc* y *ab*¬*c* reciben un valor aproximado en falsedad de -0,25 cada uno. Pero si el valor de verdad de *abc* fuera uno desde el inicio, ya no contaría en el reparto de la falsedad del *Or ab,* de modo que solo el nodo *ab*¬*c* sería afectado. Olvidamos por el momento que el nodo *ab* no puede ser falso si *abc* es verdadero con certeza, confiando en que las futuras integraciones pondrán cada cosa en su sito.

Como cada una de las informaciones que recibe el nodo *Objeto* de sus nodos *Or* se considera un suceso independiente, podemos calcular el peso que acumula la falsedad del nodo *Objeto* por la falsedad de sus nodos *Or* asociados. Caigamos en la cuenta de que el peso de la falsedad de un nodo prácticamente equivale a la probabilidad de que sea verdad que es falso, por lo que operamos siempre con los valores absolutos de las celdas de falsedad y luego multiplicamos el resultado por -1. Si tenemos en cuenta que hablamos de valores absolutos considerados como la probabilidad de que sea verdad que es falso, tenemos que el peso de falsedad acumulado por un nodo *Objeto* de la falsedad de sus nodos *Or* es igual al peso de la falsedad del primero más (uno menos el peso del primero por el peso del segundo) más (uno menos el peso del primero por el peso del segundo) multiplicado por el peso del tercero) y así sucesivamente. Y la misma fórmula de probabilidades acumuladas para sucesos independientes, que pacientemente nos han explicado una y otra vez nuestras compañeras de Matemáticas del centro, tendremos para la verdad.

También hay que tener en cuenta que optamos convencionalmente en la versión de la calculadora que presentamos por dar prioridad a los valores de los *Objetos* sobre el de sus nodos *Or* y *And*. Así, cuando los valores de los nodos *Objetos* son necesarios (verdad igual a uno o falsedad igual a menos uno), dichos valores se imponen a los de los nodos *Or* y *And*. En todo caso, no somos los primeros que afirmamos que quien conoce al objeto individual y concreto y nos habla de él nos ofrece mayor confianza que quién nos habla de algo indeterminado o genérico, existiendo cierto paralelismo con la actitud de Venn (1881) hacia las proposiciones particulares, aunque nosotros no valoramos más la abstracción de “alguno” que la de “todos”. Ejemplo: Si la fuente 1 me dice que no hay nadie en el instituto y la fuente 2 me dice que está Juan, entonces las redes tomarán lo segundo por verdadero y anularán lo primero.

En síntesis, la fila 19 de la calculadora lógica en el archivo Excel (‘Anexo 2’), nos da un valor aproximado y provisional de falsedad de los nodos objeto integrando su valor inicial con el valor de falsedad de sus nodos *Or* asociados.

4.18.2 Segunda integración de la verdad de los nodos Objeto con las de sus nodos *Or*

Una vez que obtenemos los valores de falsedad de los objetos integrando sus valores iniciales con la falsedad de sus nodos *Or*, filas 22 de K a S del archivo Excel (‘Anexo 2’), podemos corregir también los valores iniciales de verdad de los objetos con los valores de verdad de los nodos *Or*.

> REGLA: El valor de verdad que recibe un nodo *Objeto* de un nodo *Or* es igual al valor de verdad de dicho nodo *Or* dividido por el número de sus nodos objeto asociados que aún optan a ser verdaderos.

La fila 33 de las columnas K a S nos ofrece los valores de verdad de los nodos objeto ya integrados con la información de falsedad y de verdad acumulada en sus nodos *Or*. Pensemos que si *Or ab* es verdadero y el nodo *Objeto abc* es falso seguro, entonces todo el valor positivo de *Or ab* pasará al nodo *Objeto ab¬c*.

La fila 37 recoge el valor de verdad de los objetos integrado con el valor de verdad de los nodos *Or*. La fila 38 corrige el valor de falsedad de la fila 19 con el valor de verdad de la fila 33 bajo el principio que llamamos *el ganador se lo lleva todo*. Sumando los valores integrados y corregidos de verdad y falsedad de los nodos objeto de las filas 37 y 38 obtenemos sus valores provisionales en la fila 39, los cuales son suficientes para resolver los problemas de lógica de proposiciones que planteamos en el aula, pues en dicha lógica no se contemplan nodos *And*.

Para dar con el valor provisional de la fila 39 hemos dado prioridad a lo falso porque partimos de ello en el primer barrido de *Or* hacia *Objeto* y lo hacemos así porque la falsedad de *Or* es más restrictiva o informativa que su verdad y porque de este modo, al repartir en el segundo barrido la verdad de *Or*, la repartimos solo entre los candidatos no eliminados. Por ejemplo, si es cierto el nodo *Or a* pero es falso el nodo *Or b*, entonces es obvio que la verdad de *a* se debe repartir solo ente los nodos objeto *a¬bc* y *a¬b¬c.* Esto lo conseguimos eliminando primero los nodos objeto que contienen *b*, es decir, priorizando la falsedad *Or* sobre su verdad.

4.18.3 Primera integración de la verdad *And*

> REGLA: La carga de activación o verdad de un nodo *And* es igual al promedio de las cargas de verdad de sus componentes. Luego el valor aproximado de la carga de activación o verdad que recibe un nodo *Objeto* de su asociado *And* es igual a la carga de *And*.

Para poder operar con nodos *And* hay que establecer el número de nodos objeto que lo componen, siendo necesario eliminar de la red las posibilidades con las que no contamos. Así pues, para poder integrar la verdad de los nodos *And* en los nodos *Objeto*, antes debemos tomar la decisión de qué nodos vamos a considerar que no existen, que no cuentan para el reparto de lo contenido en *Todos*. La carga de verdad de los nodos *And* se repartirá entre todas las posibilidades no eliminadas manualmente en la fila 41. Ya hemos dicho que no es lo mismo no existir que ser falso ahora, aunque en la lógica matemática que usamos en el aula sean lo mismo, tal y como podemos comprobar en la tabla de verdad de cualquier conectiva.

Imaginemos un valor de falsedad igual a menos uno para *Hay alguna C.* Mientras no eliminemos los nodos que contienen *c*, todo nodo *Objeto* que contenga *c* tendrá una falsedad de menos uno y todo nodo *And* que tenga entre sus elementos *c* también será completamente falso. Pensemos que mientras no eliminemos al absentista de la lista de clase nunca podremos decir que estamos todos o será confuso decirlo.

Supongamos que el nodo *Or c* recibe un *input* de menos uno que afirma que es seguro que no hay ningún tipo de *c*. Para operar con los valores de *And* tenemos que tomar la decisión de si mantenemos en la red los nodos objeto que contienen *c* con un valor menos uno que hará falso todos sus *And* asociados, o bien si eliminamos dichos nodos que contienen *c* de la red para que no cuenten en el reparto de las cargas *And*, haciendo posible que sea verdadero que están todos los objetos con los que aún contamos.

Sin eliminar las posibilidades permanentemente ausentes nuestro mundo sería absolutamente irracional, del mismo modo que lo sería sin esperanza. Por eso dejamos la decisión de eliminar o no un nodo en la calculadora lógica en manos del usuario, que debe copiar manualmente en estas celdas amarillas el valor de la celda anterior o bien escribir “No existe” para que ya no cuenten en los totales. De no ser así, aparecerán mensajes de error en las celdas posteriores.

Así, en la fila 41 teníamos un valor provisional de falsedad para cada nodo *Objeto* que habíamos obtenido integrando la información de los *inputs* centrales con la de los nodos *Or*. Ahora, en la fila 42 debemos decidir si eliminamos a los ausentes de la lista o no. Incluso podríamos eliminar a los inciertos.

Si eliminamos a los ausentes, la carga de verdad, por ejemplo de la proposición *Hay todo tipo de AB,* se repartirá solo entre los candidatos que subsisten, de modo que si el nodo *And* [ab] vale 1, y el nodo *abc* ha sido eliminado, entonces el nodo *Objeto ab¬c* valdrá uno. Obviamente, el nodo *abc* eliminado no entra en el reparto de verdad del nodo *And* [ab] y todo le toca a la alternativa *ab¬c*.

Hay que advertir que al integrar los valores de verdad y falsedad de *And* en los del *Objeto* ahora comenzamos por computar los de verdad porque estos son más informativos o restrictivos que los valores de inhibición o falsedad *And*.

4.18.4 Integración de la falsedad *And* en la inhibición del nodo *Objeto*

La fila 60 de las columnas K a la S del archivo Excel ‘Anexo 2’ nos ofrece el valor de falsedad de los nodos objeto integrando la información directa que inicialmente teníamos de su falsedad (fila 6 de K a S) con la información de su falsedad obtenida a partir de los datos contenidos en los nodos *And* (filas 53 a 59 de K a S). Debemos observar que la falsedad *And* y *Or* son procesadas por separado, de modo que solo se influyen mutuamente a través de los nodos *Objeto*.

Las filas 62 y 63 corrigen los valores de verdad y falsedad *And* bajo el principio de que lo necesario anula lo probable, es decir, nuevamente la certeza de que sí anula cualquier probabilidad de que no y viceversa.

4.18.5 Integración *Or* y *And* en los nodos *Objeto*

La fila 65 del archivo Excel 'Anexo 2' combina las cargas de verdad de los nodos *And* y *Or* en sus *Objetos* comunes considerando la información de ambos *inputs* sucesos independientes.

Las filas 68 y 69 (de K a S) vuelven a corregir los valores de verdad y falsedad de los nodos *Objeto* obtenidos tras integrar *Or* y *And* con el principio de que lo necesario anula lo probable.

4.18.6 Reparto de los nodos *Objeto* a los nodos *Or* y *And*

Una vez que hemos integrado y corregido los valores iniciales de verdad y falsedad de los nodos *Objeto* con los valores asignados a sus nodos *Or* y *And*, obtenemos un valor de falsedad y otro de verdad que podemos considerar razonablemente definitivo. A partir de estos valores de los nodos *Objeto* (filas 68 y 69 de Ka S), la red genera en las filas 68 a 75 todos los valores integrados *Or* (filas A a J) y *And* (filas T-AC) también definitivos. De esta forma no es posible que *And* y *Or* sean contradictorios ni inconsistentes entre sí o con los *Objetos*, referencia última de todos los valores de *Algo* y *Todo*.

4.18.7 Traducción a proposiciones en el lenguaje natural

Una vez que tenemos valores resultado para todos los nodos *Objeto*, *Or* y *And* podemos trasladarlos fácilmente a proposiciones del lenguaje natural que incluyan expresiones del tipo probablemente falso, probablemente verdadero, incierto, seguro que sí, casi seguro que no, etc. Solo tenemos que asignar umbrales numéricos que distingan las afirmaciones verbales. Y lo mismo si queremos limitar nuestro resultado a SÍ y NO o VERDADERO y FALSO. Estas correspondencias son extra-lógicas, pues el grado de confianza que se requiere en la presencia o ausencia del antecedente en un esquema de acción para que se modifique una respuesta es variable. Por ejemplo, dado el esquema de acción *Si hay una amenaza no salgas de la madriguera*, el grado de confianza en que haya o no amenaza que llegará finalmente a influir en el hecho de salir o no de la madriguera dependerá, también sin duda, de la necesidad que tengamos de salir para otros menesteres y, como dice el refrán, *No hay más ciego que el que no quiere ver.*

4.18.8 Traducción a conectores lógicos para proposiciones de primer grado

La información contenida en una proposición está en relación con el número de alternativas o diferencias que elimina del espacio mental. Y comunicar información es función de los conectores lógicos.

> Information on level A is a measure of the predictability of the signal, that is the number of choices open to its sender. It has nothing to do with its content. A signal, we remember, is the physical form of a message—sound waves in the air, light waves, electrical impulses, touchings, or whatever. So, I may have a code that consists of two signals—a single flash of a light bulb, or a double flash. The information contained by either of these signals is identical—50 per cent predictability. (Fiske, 2002, p. 9)

Una vez que tenemos asignado un valor definitivo a todos los nodos podemos comunicar el estado de la red utilizando proposiciones con conectores lógicos. Debemos observar que es muy distinto que haya algo o que no haya nada presente con certeza en la red. Si hay algo, entonces el valor del criterio a será uno, que es lo mismo que decir que el número de objetos en la red será igual o mayor que uno, y si no es el caso un nodo *Objeto*, entonces será el caso alguna de sus alternativas. Pero si no es seguro que haya algo presente en la red, o si es seguro que no hay nada, el principio de tercio excluso no puede afirmar la existencia actual de ninguna alternativa. También podemos discutir si es legítimo afirmar *Si A entonces B* cuando $a \neg b$ solo es falso provisionalmente sin haber sido eliminado, siguiendo una discusión que podemos rastrear, cuando menos, hasta el Pseudo Escoto o Buridano (Bochenski & Bravo, 1985). Tal vez, en el caso en que $a \neg b$ vale menos uno deberíamos decir que *Ahora y considerando el estado actual de la red es cierto que si algo es A, entonces ese algo será B.* Por el contrario, si hemos tomado la decisión de eliminarlo ($a \neg b = \nexists$) entonces podremos decir que *lo razonable en cualquier momento es esperar de algo que sea A que sea B*. Los siguientes ejemplos muestran las combinaciones de valores que pueden generar conectivas como salida.

	a → b Condicional material	A ⇒ B Implicación lógica	a↔b Sin carga existencial	a ∨ b Inclusiva sin carga existencial	a ∨ b Inclusiva con carga existencial
	$a_x b$	$(a_x b) \wedge$ AB	$a_x b_x$	$\neg a_x b$	$(\neg a_x b) \wedge \neg$A
ab	0	1	0	0	0
a¬b	∄ o -1	∄ o -1	∄ o -1	0	0
¬a¬b	0	0	0	∄ o -1	∄ o -1
¬ab	0	0	∄ o -1	0	∄ o -1
a: ¿Algo?	0	1	0	0	1

TABLA 6. RELACIÓN ENTRE CONECTORES LÓGICOS Y ACTIVACIÓN DE LOS NODOS.

Comunicar el estado de la red de la forma más precisa debería ser nuestro objetivo a la hora de convenir el significado de los conectores. Si el valor del nodo *Or a* es menos uno o no existe, afirmar que es verdadero que *Si A entonces B* nos parece que no se ajusta al principio de cooperación de Grice que debe regir el intercambio de información (Grice, 1975). Mejor sería poner simplemente de manifiesto el valor de *a* afirmando "No existe A". Por lo mismo, tampoco programaríamos nunca la red para que partiendo de que "*a* es cierto" se produjera la salida "$A \vee B = 1$" a pesar de ser lógicamente verdadera, pues la información contenida en la proposición "*A ∨ B"* es menor que la contenida en la proposición *Tengo A*.

4.19 Recapitulación: principios y elementos de la red de expectativas

Una vez que hemos mostrado cómo funcionan las redes propagando la activación y la inhibición por sus nodos utilizando colores, principios lógicos y fórmulas matemáticas, podemos intentar condensar todos sus elementos y principios de inferencia de forma algo más precisa.

4.19.1 Nodos: las células de la red

Un nodo es una unidad o célula lógica de la red de expectativas. Dicha célula está cargada de información que puede llegar a ser relevante en las decisiones del sistema. En ella se respeta el principio de no contradicción. Los nodos tienen capacidad de activación, inhibición y pueden ser implementados con memoria. Un nodo que señala algo con cuya presencia es seguro que contamos toma como valor '1' y como color 'azul'. Si señala algo con cuya ausencia contamos toma como valor '-1' y como color 'rojo'. Y si es incierto su valor es '0' y su color 'amarillo'. La influencia mutua que ejercen entre sí los nodos de la red al propagar su activación entre sus asociados es la base de la inferencia. Esta influencia se propaga por caminos que pueden ser recorridos de forma hipotética cuando los valores de activación de los nodos de la red son igual a cero.

Podemos representar la memoria de las células lógicas de la red acumulando valores de verdad en su perímetro exterior, por ejemplo, marcando con una línea azul el exterior de un nodo lógico cuyo contenido ha sido verificado antes por alguna ocurrencia, o con una línea roja en el nodo inhibido. Así vamos ajustando las expectativas a la experiencia, pero sin llegar nunca a confundir lo que pasa con lo que suponemos que va a pasar. Por ejemplo, que mi primo nunca venga a cenar hace razonable no contar con él cuando hacemos la compra, pero mientras siga siendo posible que se presente en casa, el núcleo del nodo que lo representa debe permanecer en amarillo sin llegar a ser consumido totalmente por el perímetro rojo exterior que va aumentando a medida que pasan los días sin venir. Aunque en esta tesis apenas consideramos la memoria, es evidente que la frecuencia en la activación-inhibición de los nodos cambia su peso en la red de expectativas.

A los nodos les podemos asignar un número de ocurrencias igual a '*n?*' cuando no hayan sido nunca falsados ni verificados por los receptores del sistema. Los nodos con ocurrencia no falsada ni verificada tendrán también un valor inicial de presencia igual a cero significando incertidumbre absoluta. Convencionalmente podemos eliminar las células conjetura y los nodos permanentemente ausentes para contar solo con la información contenida en nodos verificados por las fuentes de información del sistema.

Los tipos de nodos que establecemos en las redes pueden observarse fácilmente en las ilustraciones del sistema que se han presentado. Hay nodos *Criterio*, nodos *Or*, nodos centrales *Objeto* y nodos *And* y, en algunos diagramas, también hay nodos *Sumatorio* de objetos con significado matemático ($\sum i$).

4.19.1.1 Nodos *Criterio*

Un criterio es un concepto, idea o patrón de referencia que hace posible juzgar-comparar el grado de ajuste de un estímulo a dicho criterio. El criterio se divide en variables que expresan distintos grados de ajuste entre nada a totalmente. Si definimos los criterios a, b, c, dicotómicamente tendremos las variables o caracteres a, ¬a, b, ¬b y c,¬c que pueden combinarse formando ocho tipos teóricos de objetos únicos y distintos. Podemos afirmar que la totalidad de lo que hay en relación a un criterio necesariamente se refiere a la totalidad de nodos *Objetos* centrales o unidades que juzgamos desde dicho criterio, sea lo que sea lo que ocupe dicho nodo central (30).

$$\sum \alpha \supset \sum a \supset \sum ab \supset \sum abc \supset \sum abc_1 \quad (30)$$

La totalidad de objetos de Alfa es la misma vista de cualquier criterio. El número de objetos centrales o unidades del sistema es igual a m^n siendo m el número de divisiones del criterio y n el número de criterios. Podemos aumentar el número de objetos centrales o unidades ilimitadamente añadiendo a las combinaciones de caracteres una etiqueta numérica para identificarlas como nuevos objetos centrales (31).

$$[\alpha] \supset [a] \supset [ab] \supset [abc] \supset abc_1 \quad (31)$$

Para poder establecer puentes entre las inferencias lógicas y matemáticas, recordemos que tener la totalidad de unidades (nodos centrales) supone tener la totalidad de las subclases, subconjuntos o nodos *Or* que son posibles partiendo del conjunto de los nodos objeto, pero no al revés. Por ejemplo, si tomamos en el universo del discurso a la especie como nodo *Or* y al individuo como nodo *Objeto*, afirmar que sea cierto que el domingo están visibles todas las especies que hay en el zoo no significa que estén visibles todos sus animales, pero sí al contrario (32).

$$[a] \supset [ab] \quad (32)$$

4.19.1.2 Nodos *Objeto*

> We have observ'd, that whatever objects are different are distinguishable, and that whatever objects are distinguishable are separable by the thought and imagination. And we may here add, that these propositions are equally true in the inverse, and that whatever objects are separable are also distinguishable, and that whatever objects are distinguishable are also different (Hume, 1896, p. 16).

Encontramos en la versión digital *online* de la RAE (2019) que "objeto" se define en primer lugar como "todo lo que puede ser materia de conocimiento o sensibilidad de parte del sujeto, incluso este mismo" y en segundo lugar como "aquello que sirve de materia o asunto al ejercicio de las facultades mentales", encajando ambas definiciones a la perfección con el sentido que nosotros pretendemos dar a los nodos *Objeto* de las redes como aquello que sirve de centro de atención en los procesos de conocimiento. Frente a la postura aristotélica, nosotros pensamos que desde una perspectiva lógica no existe diferencia entre clases de objetos y que los mismos procesos de análisis racional tienen lugar cuando el *Objeto* central de la red es ocupado por aquello que psicológica y/o ontológicamente consideramos género, especie o individuo. Por otra parte, y frente a la lógica matemática, consideramos que la distinción relevante no es la que tiene lugar entre universal y particular, pues para nosotros, en el conjunto, son igual de dependientes de los nodos centrales tanto los nodos *And* (todo) como los nodos *Or* (alguno), siendo exclusivamente el nodo *Objeto* lo que puede ser tomado como unidad. Nosotros consideramos un grave error pretender identificar las unidades lógico-matemáticas que se expresan en los nodos centrales de la red con los llamados términos singulares. Las leyes de la aritmética son las mismas cuando sumamos especies, géneros, individuos, términos universales, términos particulares, colores, sentimientos, números, letras o cualesquiera otros objetos que son situados en un determinado momento como centro de atención en las redes de nuestros sistemas cognitivos.

Sin determinar objetos con identidad nuestro mundo sería caótico: "La necesidad de construir una escena coherente y consciente a partir de elementos aparentemente dispares se puede apreciar a todos los niveles y en todas las modalidades de la conciencia" (Edelman & Tononi, 2005, p. 38). En todo caso, al funcionamiento de las

redes de expectativas no le concierne la naturaleza de los objetos que ejercen como unidades en los nodos centrales. Que estas unidades se inventen, se convengan o se descubran no afecta a los principios de la inferencia lógica.

Sí está justificado, considerando el principio de razón suficiente, distinguir dos tipos de nodos: nodos teóricos y nodos fácticos. Un nodo teórico es una combinación posible de caracteres. Un nodo fáctico es una ocurrencia de dicha combinación, ya sea como presencia o ausencia, la cual tiene capacidad para alterar los valores de sus nodos asociados. Cualquier cosa del tipo que sea puede estar codificada en los nodos de la red de expectativas de modo que su presencia-activación o su ausencia-inhibición modifique el valor de nodos relacionados.

4.19.1.2.1 Nodos *Objeto* teóricos verificados y no verificados.

Un nodo teórico *Or* es una secuencia formada por al menos una variable de uno de los criterios del sistema que determinan el universo del discurso. Por su parte, un objeto teórico es una combinación con variables de todos los criterios que definen el sistema de conocimiento en la determinación del estímulo, por lo que su número es finito si no añadimos etiquetas numéricas. Solo el nodo *Objeto* central ejerce las funciones de unidad dentro del sistema. En un sistema dicotómico formado por n criterios su número es igual a 2^n. Así, en el sistema dicotómico definido los criterios a*b*c tendríamos ocho objetos teóricos o clases (33) aplicando el viejo arte combinatorio de LLul (Cornelius, 1998):

$$\underline{a}*\underline{b}*\underline{c} = abc,\ \neg abc,\ ab\neg c,\ \neg ab\neg c,\ a\neg bc,\ \neg a\neg bc,\ a\neg b\neg c,\ \neg a\neg b\neg c \quad (33)$$

En un sistema tricotómico, el número de objetos teóricos o clases completas sería igual a 3^n, siendo en general igual a m^n donde m es el número de divisiones del criterio y n el número de criterios. Los objetos teóricos expresan posibilidades de forma general a modo de engramas o patrones considerados al margen de cualquier situación que los pueda dotar de valores concretos presencia/ausencia.

A veces otorgamos a los nodos teóricos un valor de existencia señalando que en ellos el número de ocurrencias es igual a mayor que uno. Podemos llamar ocurrencia a cada uno de los casos en los que dentro de un estado de cosas el valor de presencia es igual a uno o el de ausencia igual a menos uno. El número de ocurrencias lo hemos señalado como "n". Así pues, en un nodo con existencia verificada el valor de n será igual o mayor a uno. En un nodo cuya existencia no ha sido verificada ni falsada el número de ocurrencias es señalado como "n?". En un nodo cuya existencia ha sido falsada, el valor de n es igual a cero.

En una red considerada solo a nivel teórico o general, podemos contar el número de objetos centrales verificados sin tener en cuenta su valor actual de presencia/ausencia, como cuando un domingo contamos el número de alumnos que tenemos en la lista de clase.

4.19.1.2.2 Nodos fácticos

La estimulación de un nodo teórico *abc* genera un nodo fáctico ABC o $\overline{ABC}$ con un valor de presencia/ausencia distinta de cero. No debemos confundir el valor de presencia ($0 \geq 1$) o ausencia ($-1 \geq 0$) que determina la propagación de la inferencia en la red fáctica con el número de ocurrencias que determina la existencia cuando es igual o mayor que uno. En una versión más sofisticada de las redes que la que presenta esta tesis, el número de ocurrencias podría emplearse para dar un peso mayor o menor a la expectativa de los nodos.

En las redes de expectativas es condición necesaria para que exista un nodo fáctico, una carga de energía provocada por los receptores externos o internos que estimule o inhiba la activación de un nodo teórico.

El número total de nodos que podemos generar es el mismo desde la perspectiva de cualquier criterio (34).

$$\sum \alpha = \sum \underline{a} = \sum \underline{b} = \sum \underline{c} \quad (34)$$

Para un platónico, la activación de un nodo solo puede tener lugar si previamente existe un criterio que sirva de guía a los receptores del sistema. Para un aristotélico no podría haber criterios sin la huella previa dejada por una activación. Para nosotros es una cuestión irresoluble, pues aunque nos parece evidente que los criterios se ajustan a la experiencia, no es menos cierto que no puede haber experiencia sin criterio (35), (36).

$$abc_{1_1} \supset abc_1 \supset abc \supset ab \supset a \supset \underline{a} \quad (35)$$

$$\neg abc_{1_1} \supset \neg abc_1 \supset \neg abc \supset \neg ab \supset \neg a \supset \underline{a} \quad (35)$$

Podemos contar objetos centrales presentes o ausentes cuando contamos con los valores de activación de los nodos centrales, como cuando pasamos lista de asistencia en clase el lunes a primera hora.

4.19.1.3 Nodos *Or* teóricos. Clases y subclases.

Un nodo *Or* es cualquier carácter o conjunto de caracteres común a una combinación formada por un número mayor de caracteres. En un sistema dicotómico con tres criterios a, b, c, un nodo mínimo *Or* abre un subconjunto desde la perspectiva de las variables *a, ¬a, b, ¬b, c, ¬c.*

En un sistema formado con n criterios no puede haber nodos *Or* formados por más de n-1 variables, dado que el nodo *Or* es una perspectiva parcial del nodo *Objeto* (13). Como las variables se combinan, en un sistema dicotómico con los criterios *a*, *b*, *c* puede haber nodos *Or* constituidos con una o dos variables (37):

$$Or\ \underline{a}*\underline{b}*\underline{c} = a, \neg a, b, \neg b, c, \neg c, ab, a\neg b, ac, a\neg c, \neg ab, \neg a\neg b, \neg ac, \neg a\neg c, \ldots\ b\neg c, \neg b\neg c \quad (37)$$

Desde nuestra perspectiva, los nodos *Or* son subclases de los nodos centrales *Objetos*, los cuales consideramos clases exhaustivas dentro del sistema (38).

$$abc \supset ab \supset a \quad (38)$$

La seguridad de que es verdadero un nodo lógico *Or* oscila entre 0 y 1 y es igual a la suma de la verdad de los nodos de los que depende (39).

$$P\ (a+) = (P(ab+) + P(a\neg b+)) \quad (39)$$

La expectativa de falsedad o peso negativo de un nodo lógico *Or* oscila entre 0 y -1, y es igual al promedio de los valores de falsedad de los nodos que lo componen (40).

$$P\ (a-) = \left(\frac{P(ab-) + P(a\neg b-)}{2}\right) \quad (40)$$

Cuando los nodos *Objetos* reciben carga positiva de un nodo *Or* debemos tener en cuenta que la carga *Or* se reparte *a priori* entre todos sus componentes por igual. Si el nodo *Or* dispara más de una carga los pesos se irán acumulando entre los objetos. Por ejemplo, si hay cuatro unidades que son cuatro tipos de pelota distintos: *ab*, *a¬b*, *¬ab* y *¬a¬b* en una caja cerrada de la que voy sacando aleatoriamente unidades-pelota que vuelvo a meter en la caja en cada ensayo, la probabilidad de que saque al menos una pelota del tipo *ab* aumenta y tiende a uno a medida que aumenta el número de ensayos.

Si al pasar de un nodo *Or* a un nodo *Objeto* solo hay una categoría de objeto como posible receptora, esta recibirá la carga completa de *Or*. Pero si la carga *Or* se debe repartir entre cuatro categorías o clases teóricas de objeto, cada categoría tendría en el primer ensayo un peso igual a 0,25 de ser cierta. Si en esa misma situación con cuatro clases de objeto candidatas tenemos el disparo de dos nodos *Or*, cada categoría o nodo relacionada con ambos pasaría a tener un peso de 0,44 y si hubiera tres nodos *Or* activos, el peso de cada uno de los nodos *Objeto* centrales vinculado con los tres nodos sería:

$$0{,}25+(0{,}75*0{,}25) + (0{,}75*0{,}75*0{,}25) = 0{,}58$$

Es decir, que la activación que recibe un nodo *Objeto* partiendo de la carga o estimulación de los nodos *Or* es inversamente proporcional al número de nodos *Objeto* con los que compite para recibir dicha carga *Or* y directamente proporcional al número de cargas *Or* a las que opta. Podemos llamar ensayo a cada una de las cargas *Or* que hacen probable la ocurrencia de un nodo *Objeto* central. Así, el peso P de la confianza en que es cierto un nodo *Objeto abc,* al que llamaremos *I,* recibido desde los nodos *Or* es en general:

> =P(I) en el primer ensayo + ((1- P(I) en el primer ensayo)*P(I) en el segundo ensayo)+ ((1-P(I) en el primer ensayo)*(1-P(I) en el segundo ensayo*P(I) en el tercer ensayo))+((1-P(I) en el primer ensayo)*(1-P(I) en el segundo ensayo)*(1-P(I) en el tercer ensayo *P(I) en el cuarto ensayo))… y así hasta el ensayo n.

Estamos afirmando que cada disparo o carga *Or* puede interpretarse como la posible ocurrencia fáctica de un nodo *Objeto* central o unidad contable en la red. Por ejemplo, en un sistema dicotómico con dos criterios a, b, el universo del discurso actual está limitado a las cuatro posibles unidades *ab*, *a*¬*b*, ¬*ab* y ¬*a*¬*b,* por lo que el número total de unidades activas no puede ser mayor que cuatro. Imaginemos que un informante nos asegura que hay *A* y otro nos asegura que hay *B*, activando en nuestras redes el nodo *A* y el nodo *B* al mismo tiempo.

Siendo así, el número de objetos centrales activo puede oscilar entre uno y tres. Uno si ambos informantes se referían al mismo nodo *Objeto* central *AB* y tres si el que dijo *A* se refería a los objetos *AB* y *A*¬*B* y el que dijo *B* se refería al objeto *B*¬*A*. En ese momento solo el nodo central ¬*A*¬*B,* siendo posible, carecería de activación probable. Pero ninguno de los nodos tendría un valor de ocurrencia necesario, aunque el más probable sería el nodo *AB*.

Solo el número final de nodos centrales *Objeto* con un valor de activación igual a uno y/o menos uno determina el número de unidades existentes con las que cuenta el sistema en cada caso. Así, si hay presentes tres alumnos y ausentes dos, el número de alumnos que existe en mi lista es igual a cinco.

Como veremos al considerar las proposiciones secundarias, la lógica de predicados que nosotros concebimos debería ocuparse de hacer llegar las cargas existenciales de los nodos *Or* a los nodos *Objeto* centrales adecuados cuando el número de unidades candidatas a recibir tales cargas puede ser mayor que uno. Es obvio que si cuando las fuentes activaron *Or A* y *Or B* solo existía un único objeto, dicho objeto debía ser el objeto central *AB*. La dificultad viene cuando admitimos que podría tratarse al mismo tiempo de los objetos centrales *A*¬*B* y *B*¬*A*.

4.19.1.4 Nodos And teóricos. Todo tipo de.

Existen en las redes nodos *And* de caracteres [*a*] que permiten afirmar si es verdadero o falso que hay de todo, es decir, que son lógicamente verdaderas todas las clases representadas en los nodos centrales *Objeto* del conjunto que cierra *And*. Por ejemplo, si alguien dice *Es cierto que tengo loros de todas las especies* y confiamos en él, entonces es razonable esperar que tenga 398 especies de loros en su casa. Podemos pensar que desconocemos cuántos loros tiene en concreto, pero dicha cantidad queda fuera del universo del discurso de su afirmación, la cual sitúa como objetos centrales de la red a las especies, dejando fuera a los loros concretos. No debemos olvidar que el universo del discurso puede expandirse o contraerse a voluntad en función de la información que consideramos relevante comunicar. Luego es importante no juzgar la verdad de un nodo *And* en una red en función de los nodos que quedan fuera del universo del discurso y de los que podemos tomar conciencia al expandir la red al conjunto de todo lo conocido.

El super nodo *And* [a] que cierra el conjunto abierto por el super nodo *Or* criterio a significa cuando es verdadero [A] que hay de todo de lo que no ha sido eliminado, es decir, representa la totalidad de las combinaciones de caracteres, cualidades o variables con las que contamos (41).

$$[\,\underline{A}] \supset [A] \supset [AB] \supset ABC \wedge AB\neg C \qquad (41)$$

4.19.1.5 Nodos *Sumatorios*: Todos los objetos.

Los nodos *And-Sumatorio* que aparecen en algunas ilustraciones han sido integrados en las últimas versiones de las redes dentro de los nodos *Or* (computan presencias) y de los nodos *And* (computan ausencias). Las relaciones entre los componentes lógicos de los nodos que señalan cualidades o tipos de cosas y sus componentes matemáticos que señalan número de ocurrencias nos permiten hacer inferencias en ambas direcciones (Aznar, 2017a, 2017b, 2018b,2018c 2018e). En nuestra opinión, deberíamos conceder que es tan elemental en las redes resolver silogismos mediante la combinación y eliminación de caracteres como lo es contar unidades en general o contar unidades presentes o ausentes.

En todo caso, no profundizaremos en esta tesis en la codificación de proporciones ni en otras cuestiones aritméticas que van más allá de las cuestiones lógicas elementales.

La carga de verdad lógica de un nodo *And* equivale al promedio de los pesos de verdad de los nodos *Objetos* que lo componen y oscila entre 0 y 1. (42). Por ejemplo:

$$\mathrm{P[a+]} = \frac{\mathrm{P(abc+) + P(ab\neg c+) + P(a\neg bc+)+P(a\neg b\neg c+)}}{4} \tag{42}$$

Luego no será lo mismo saber que hay 99 de 100 desconociendo 1, que saber que hay 1 de 100 desconociendo 99. Por otra parte, bastará con que una de las opciones sea falsa para que la totalidad sea falsa.

De la fórmula de la verdad de *And* como promedio de la verdad de sus elementos se sigue que el valor de la certeza de *And* sirve como valor aproximado del peso de la verdad en cada uno los nodos *Objetos* del conjunto (43).

$$P\ a+ \cong\ P[a+] \tag{43}$$

Por otra parte, la carga de falsedad lógica del nodo *And* es igual a la suma de las cargas de inhibición o falsedad de sus componentes (44).

$$P[ab\ -] = (abc\ -) + (ab\neg c-) \tag{44}$$

De la fórmula anterior se sigue que la carga de inhibición aproximada que reciben los objetos teóricos y/o los individuos de los nodos lógicos *And* de sus conjuntos es igual al valor del peso de la certeza de que dicho nodo *And* es falso dividida por el número de sus componentes (45).

$$P(i\ -) \cong \frac{[i-]}{n} \tag{45}$$

4.19.1.5.1 Nodos eliminados ∄

Un nodo puede ser eliminado cuando no es razonable esperar que exista la posibilidad de que aparezca algún estímulo con tales caracteres. La eliminación de un nodo conlleva la eliminación de todos los nodos que dependen de él (46). Y mientras no exista en las redes un tipo de cosas, el número de individuos que se ajusta a tal tipo de cosas debe ser igual a cero (47). Así, tengo 0 alumnos de sociología porque nadie se matriculó en sociología, de modo que ni viene ni falta nadie a tal materia porque no existe nadie en tal materia.

$$\nexists a \supset \nexists ab \supset \nexists \mathrm{abc} \supset \nexists\ abc_n \tag{46}$$

$$\nexists a\ \leftrightarrow (na = 0) \tag{47}$$

4.19.2 Principios de propagación del peso de verdad y falsedad

- Cada nodo *Or*, *Objeto* o *And* de la red tiene, como si de un átomo se tratara, una carga de activación positiva de verdad ≥ 0 y ≤ 1, y una carga negativa de inhibición o falsedad ≤ 0 y ≥ -1 que son inicialmente procesadas por separado hasta que su unión genera una carga resultado que puede ser positiva, negativa o neutra cuando la suma es cero. Cero en la red equivale a incierto.

- La carga lógica de activación positiva de un nodo *Or* es igual a la suma de las cargas lógicas positivas de sus componentes, siendo +1 el límite superior de dicha carga. Luego el valor aproximado de la carga positiva que recibe un nodo *Objeto* partiendo de la activación conocida de un nodo *Or* asociado es igual a la carga positiva del nodo *Or* dividida por el número de competidores por la carga en el nodo *Objeto* de los que se nutre y a los que nutre dicho nodo *Or*.

- La carga de inhibición o falsedad que recibe un nodo *Or* de los nodos *Objeto* que lo componen es igual al promedio de la falsedad de dichos nodos *Objeto*. Luego el valor aproximado de falsedad que recibe un nodo *Objeto* de un nodo *Or* es igual al valor de falsedad de *Or*.

- La carga de activación o verdad de un nodo *And* es igual al promedio de las cargas de verdad de sus componentes. Luego el valor aproximado de la carga de activación o verdad que recibe un nodo *Objeto* de su asociado *And* es igual al valor de la carga *And*.

- La carga lógica de falsedad de un nodo *And* es igual a la suma de las cargas lógicas negativas de sus componentes, siendo -1 el límite inferior de dicha carga. Luego el valor aproximado de la carga negativa que recibe un nodo *Objeto* partiendo de la inhibición de un nodo *And* es igual a la carga negativa del nodo *And* dividida por el número de competidores del nodo *Objeto* en dicho nodo *And*.

- De la presencia o ausencia de un nodo *Objeto* no se puede inferir la presencia o ausencia de otro nodo *Objeto* del mismo conjunto, pero pueden establecerse matemáticamente valores estadísticos para generar expectativas razonables basadas en la experiencia. A falta de valores estadísticos precisos, los promedios de falsedad de *And* y de verdad *And* pueden servir a estos fines. Así, si pregunto a nueve personas si han leído mi libro y dicen que no, la expectativa de que una décima lo haya leído será igual a -0,9.

Estas fórmulas elementales de la propagación de la activación entre nodos pueden comprobarse en la hoja de cálculo que se presenta en el "Anexo 2". Será fácil percatarse manipulando las entradas de la calculadora de que puede establecerse una relación directa entre las cargas lógicas de verdad y falsedad que se registran en las redes fácticas como presencias y ausencias y el número matemático de objetos con los que opera la red a nivel teórico si en lugar de limitar el valor máximo de los nodos *Or* a uno y de *And* a menos uno, creamos celdas que tengan en cuenta la suma total de los valores totales de presencia-ausencia generados a partir del registro de los valores de los nodos *Objeto* centrales.

Por ejemplo, supongamos que como salida lógica en la calculadora tenemos que son verdaderas la presencia de los objetos *abc* y *ab¬c* porque en sus celdas de salida aparece el valor uno y que tenemos también que son verdaderas las ausencias de los objetos *¬abc*, *¬a¬b¬c* y *¬ab¬c* porque en sus celdas resultado aparece el valor menos uno. Entonces, en base a la obligación lógica de la unidad de respetar el principio de identidad que le impide ser al mismo tiempo *a* y *¬a* o bien *A* y $\bar{A}$, el número de elementos o unidades matemáticas con los que sabe ya que cuenta el sistema será como mínimo igual a cinco.

Ampliar la calculadora lógica con un número mayor de objetos centrales es una tarea costosa para nosotros con nuestros medios y capacidades actuales, pero quizás sea más sencillo para un programador, si estamos en lo cierto al considerar fractal la estructura básica de la inferencia en un conjunto.

4.19.3 Inferencias presencia-ausencia. Estar en las redes

4.19.3.1 Estímulos

Entendemos por estímulo una carga de energía que activa o inhibe una célula de la red de modo que su estado de presencia-activación o ausencia-inhibición pueda afectar a los valores del resto de las células o nodos de la red (23).

$$e_1 * a = A \ \trianglerighteq \ \bar{A} \tag{23}$$

Pensamos que los estímulos (internos o externos) que energizan o inhiben posibilidades y las convierten en nodos con los que contamos o no aquí y ahora son la base de las redes fácticas con las que actuamos, las cuales sirven de base a su vez a las redes teóricas con las que pensamos y que determinan el mundo en el que vivimos.

El objeto fáctico en la red es un compuesto indisoluble de materia (energía estimular con un valor distinto de cero entre -1 y 1) y forma (engramas teóricos o conjuntos de caracteres) con capacidad de adaptación, como diría Ortega, a la evolución de los marcos teóricos en los que se concibe (ver marco filosófico).

Basta que sea cierta la presencia o ausencia de un nodo *Objeto* central para que sea considerada como cierta la existencia de tal tipo de cosa en las redes. Si comunico la falta injustificada de un alumno a mi clase, entonces existe al menos un alumno en mis listas de clase.

4.19.3.2 Objetos presentes

Recordemos que cualquier estudiante de Secundaria en nuestro país es instruido, no solo por sus profesores de Filosofía sino también por sus profesores de Lengua Española, en que no es lo mismo el carácter copulativo del verbo ser que su carácter predicativo, aunque nosotros lo que queremos resaltar es la diferencia de la información teórica disponible para cualquier momento y la que cuenta aquí y ahora.

Decimos de un nodo *Objeto* cuyo valor de presencia alcanzó alguna vez un valor igual a uno que existe en las redes teóricas de nuestro conocimiento, al margen de cuál sea ahora su valor de activación en las redes fácticas. Así, una proposición teórica del tipo *Existen cachalotes*, es verdadera mientras mantenemos, basándonos en la experiencia anterior acumulada por las fuentes, el nodo *cachalote* en la red teórica de expectativas por la que se distribuyen cargas de presencia-ausencia durante una acción en curso relacionada con determinados dominios de conocimiento.

A la hora de establecer la verdad en redes teóricas no importa cuál sea el estado actual de presencia ausencia de los individuos que se determina en las redes fácticas. Solo importa si tales nodos *Objeto* fueron alguna vez activados y pueden volver a serlo.

A veces es difícil distinguir el sentido de las proposiciones, pues incluso en las particulares, si afirmo delante de alguien sediento que *Alguno de mis amigos tiene una cantimplora*, puede que al sediento lo que le importe no sea si existe mi amigo con cantimplora, sino si tal amigo está aquí y ahora para darle ya de beber. En todo caso, las leyes de la propagación de la activación y la inhibición se basan en ambos casos en los mismos principios, aunque debamos interpretar de modo distinto la verdad teórica atemporal de la temporal.

Al nodo *Objeto* central considerado teóricamente lo designamos como abc o bien como i_n. Cuando contemos con la presencia aquí y ahora de dicho individuo lo designaremos como ABC o bien como I_n. La verdad lógica de la presencia conlleva la de la existencia, pero no al revés. Y lo mismo la ausencia. Luego si de alguna clase de objeto podemos decir que está, entonces es que tal clase existe, es decir, que su número de ocurrencias es igual o mayor que uno (48).

$$\mathrm{ABC}_1 \supset \exists\ \mathrm{abc} \supset (\ n\ de\ abc \geq 1) \tag{48}$$

La propagación del peso de la activación positiva que supone una presencia segura corre sin disminución desde el nodo individuo estimulado a todos los *Or* que dependen de él (49), e igualmente se propaga sin disminución desde un nodo *And* a todos los nodos objeto centrales a él vinculados. Si está Juan, que ha sido definido en la red como hombre joven y listo, entonces es cierto que hay ahora algún hombre y algún listo y algún joven.

$$(\mathrm{ABC}_1+) \supset (\mathrm{ABC}+) \supset ((\mathrm{AB}+) \wedge (\mathrm{BC}+) \wedge (\mathrm{AC}+)) \supset (\mathrm{A}+ \wedge \mathrm{B}+ \wedge \mathrm{C}+) \tag{49}$$

Por otro lado, el grado de activación o de verdad como presencia de un objeto concreto que puede ser inferido a partir de la activación de un nodo *Or* al que está conectado, es consecuencia del reparto de la activación de *Or* entre dicho nodo *Objeto* y sus competidores o alternativos. Así, si hay dos gemelos y sé que al menos hay uno en clase, ambos tendrán una activación de 0,5 (probablemente verdadero) acompañada de un valor del nodo *And* igual a 0,5 (probablemente verdadero).

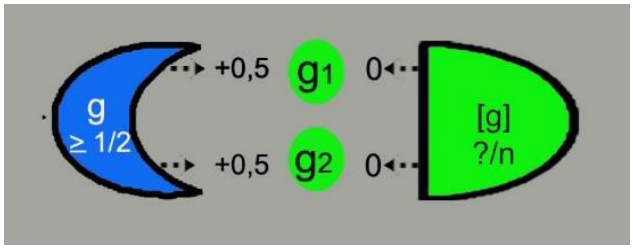


ILUSTRACIÓN 62. HAY AL MENOS UN GEMELO.

Sin embargo, si en la misma situación supiera seguro que solo hay un gemelo, cada uno de los nodos objeto centrales ahora tendría un valor de presencia igual a cero, resultado de restar a los motivos que tenemos para pensar que está los motivos que tenemos para pensar que no está. Porque hay uno (+1/2) y falta uno (-1/2). En este segundo caso, el valor de *Or* seguiría siendo uno y el de *And* sería ahora menos uno.

ILUSTRACIÓN 63. ESTÁ PRESENTE UN GEMELO Y OTRO AUSENTE.

La ilustración anterior nos permite comprobar y recordar que, si nos olvidamos del nodo *And*, los valores de las redes se ajustan exactamente a las convenciones de la probabilidad matemática cuando los datos son bien conocidos.

Que sea lógicamente verdadero un nodo *And* conlleva que sea verdadera la presencia de cada uno de sus elementos o nodos *Objeto* centrales, lo mismo que de cada uno de los subconjuntos *Or* que pueden formarse con dichos nodos centrales, lo que a su vez conlleva que existen elementos del conjunto (50).

$$[A] \supset [AB] \supset ABC \supset ABC_n \supset ABC \supset AB \supset A \supset \exists a \supset (na \geq 1) \tag{50}$$

Matemáticamente, el número de los individuos presente en un sistema es igual a la suma del número de individuos presentes en las clases complementarias (51)

$$\sum \exists^{+} = \sum A + \sum \neg A \tag{51}$$

4.19.3.3 Objetos ausentes

En las redes fácticas los objetos pueden estar presentes o ausentes. La ausencia de un nodo es real en la medida en que condiciona las respuestas del sistema, como cuando la ausencia de amenazas o de recursos saca al ratón de su madriguera. Matemáticamente podemos decir que un nodo es real cuando la modificación de sus valores de presencia/ausencia altera los valores de sus nodos asociados. Un objeto no puede estar ausente sin existir (39), ni puede existir sin la capacidad de estar presente o ausente en las situaciones en las que se cuenta con él. Cuando no se cuenta con él es indiferente que no esté o que no exista. Así pues, la ausencia de un individuo conlleva la existencia de la clase lógica que se le atribuye, lo cual supone a su vez que el número de ocurrencias de dicha clase considerada matemáticamente es igual o mayor que uno (52).

$$\overline{ABC_1} \supset \exists \text{ abc} \supset (n\ de\ abc \geq 1) \tag{52}$$

Hay que saber qué estamos tomando por nodos centrales de la red y qué por nodos *Or*. Los nodos centrales son las verdaderas unidades del sistema. Si luego incluimos dentro de esos nodos centrales otras unidades con las que operar matemáticamente, entonces debemos tener en cuenta que hemos convertido a los objetos centrales en nodos *Or*.

Debemos reconocer que cuando pensamos por primera vez en los ejercicios lógico-matemáticos que presentamos en distintos congresos y que han sido reproducidos en esta tesis, aún no teníamos suficientemente claras las relaciones entre individuos, objetos, clases de objetos y unidades, siendo posible que, a pesar de constantes revisiones, la confusión persista de alguna manera en alguno de los apartados de esta tesis.

Matemáticamente, el número de objetos ausentes en un sistema es igual a la suma de objetos ausentes en cada una de las clases complementarias *Or* del sistema (53).

$$\sum \exists^{-} = \sum \bar{A} + \sum \overline{\neg A} \tag{53}$$

Lógicamente, la totalidad de los ausentes en Alfa incluye la totalidad de los ausentes en cualquier subconjunto *Or* posible del Alfa. De este modo, si es verdad que están ausentes todos los individuos con la característica *a*, es verdad que están ausentes todos los nodos objeto con los caracteres abc. Pero no al revés. Se entiende al decir que "-5" incluye a "-3" que a su vez incluye a "-1", pero no al revés (54).

$$\sum \exists^{-} \supset \sum \bar{A} \supset \sum \overline{AB} \supset \sum_i^k \overline{ABC} \tag{54}$$

Lógicamente, si es verdad que está ausente la totalidad de las clases de Alfa, entonces es cierto matemáticamente que están ausentes todos los nodos objeto de Alfa. Eso implica además que sea cierta la ausencia de al menos un objeto central concreto, lo que conlleva a su vez que dicho objeto existe y que podamos afirmar que el número matemático de objetos en la red es mayor o igual que uno (55).

$$[\bar{A}] \supset [\overline{AB}] \supset [\overline{AB}] \supset [\overline{ABC}] \supset \overline{ABC}_{\,n} \supset \overline{ABC} \supset \overline{AB} \supset \bar{A} \supset \text{a} \supset (\text{na} \geq 1) \quad (55)$$

En conjunto, el número total de objetos centrales que existen a nivel teórico en un sistema Alfa es igual a la suma de los objetos presentes y ausentes en un momento determinado en sus redes fácticas (56).

$$\sum \alpha = \sum \exists^{+} + \sum \exists^{-} \quad (56)$$

Hay una gran dificultad en distinguir nodos teóricos verificados de no verificados. En los nodos verificados el número de ocurrencias de estímulos ajustados a sus caracteres se supone mayor o igual que uno, como los contenidos en la proposición *Todo lo sensible es extenso* ($d_x e$). Sin embargo, es difícil determinar la validez material o existencial de los nodos contenidos en sus implicaciones teóricas: *Si algo no es extenso no es divisible* ($\neg e_x \neg d$), pues es más difícil afirmar que se ha constatado la conjunción de las variables no extenso-no divisible. Por ello parece recomendable seguir la tradición de la lógica matemática eliminando la distinción entre términos verificados empíricamente y términos que son consecuencias teóricas de las teorías que contienen términos verificados. Si asumimos esta medida preventiva, entonces de la afirmación teórica de *a* no se seguirá la existencia de *a* (57). Sin embargo, sí podremos inferir la existencia de *a* desde la afirmación de su presencia o su ausencia (58).

$$\neg\, (\text{a} \rightarrow \exists \text{a}) = \nexists \text{a} \veebar \exists \text{a} \quad (57)$$

$$\text{A} \vee \overline{A} \rightarrow \exists \text{a} \rightarrow \text{a} \quad (58)$$

Aunque en la sección dedicada a la genealogía de los diagramas discutiremos estas cuestiones con perspectiva histórica, ahora podemos prestar atención a la siguiente ilustración para comprender algunas diferencias en el condicional a las que nos referimos nosotros y que son relativas al estatus teórico y/o fáctico de las proposiciones.

En la ilustración 64, que mostramos al final del apartado, el estado de la red nos indica que consideramos que no existe nada que sea *a* y sea¬*b*, luego $\nexists a \neg b$ y por eso son grises los nodos *Or* y *And* a¬b. Por lo mismo n es igual a cero en dichos nodos *Or* y *And*. Pero tampoco sabemos si existe algún individuo que sea *a* y *b*. El nodo *ab* no tiene ningún contenido verificado y a pesar de ello es cierto que *Si hay A, entonces es B*. Es decir, podemos afirmar, partiendo exclusivamente de la información contenida en la rama de *a*, que es cierto $a_x b$ sin afirmar que existe *a*, siendo *ab* solo una posibilidad teórica, aunque necesaria en tanto sabemos que *a*¬*b* es imposible en nuestra red. Pero que de *ab* sea esencialmente necesaria, no se sigue que exista un objeto *ab* necesariamente y de hecho, en la red el número de ocurrencias de *ab* es absolutamente incierto. N de *ab* podría ser cero, pero lo importante es que aún contamos con que puede ser también distinto de cero.

También observamos en la ilustración 64 que al afirmar $a_x b$ se sigue la consecuencia teórica $\neg b_x \neg a$. Pero si además de afirmar $a_x b$ eliminamos la posibilidad ¬*b*¬*a*, entonces lo mejor sería cambiar la proposición inicial $a_x b$ por la proposición "$\nexists \neg b$", la cual informaría mejor del estado de la red.

La red de la ilustración 64 también indica que no existe la posibilidad de *c*. Si por ello afirmáramos, como hace la lógica matemática, que es cierto que *Si C, entonces A*, estaríamos desinformando más que informando del verdadero estado de cosas que muestra la red. Lo correcto sería para nosotros decir $\nexists c$.

Por último, la red de la ilustración 64 informa de que es falso ahora que estén presentes los objetos de la clase *Or* ¬*a*¬*b*¬*c*. No sabemos cuántos son, pero existen y es uno de los motivos por los que la "n" de los nodos *Or* y *And* del subconjunto ¬*a* no tiene una interrogación. El otro motivo por el que la "n" del nodo *Or* ¬*a* carece de interrogación es que contamos con que existen objetos de la clase *Or* ¬*ab*, aunque ahora no sabemos nada de su presencia o ausencia. Considerando la información que ofrece la rama de ¬*a* podemos decir que es verdadero decir que *Si hubiera algo ahora en la red que fuera* ¬*a sería necesariamente b*¬*c*, por más que esta condicional sea solo temporalmente verdadera, ya que teóricamente hay objetos en el nodo *Or* ¬*a*¬*b*¬*c*.

La ilustración 64 nos muestra distintos sentidos en los que podemos decir que algo es necesario. Sabemos sobre los objetos que al menos existe uno ausente del subconjunto *Or* ¬*a*¬*b*¬*c* y al menos uno de la clase *Or* fácticamente incierta ¬*ab*¬*c*, y sabemos más cosas sobre relaciones entre clases *Or* de cuyos objetos no sabemos si existen. También sabemos a nivel teórico que no contamos con algunas clases *Or*.

Pero ¿cómo distinguir entre las afirmaciones $a_x b$ y $\neg a_x b$ para dejar claro que contamos con evidencia de que puede haber ahora objetos de la clase *Or* ¬*ab* mientras que lo único que sabemos de la clase *Or ab* es que su alternativa *a*¬*b* es imposible? Para nuestros propósitos sería suficiente añadir a las proposiciones $a_x b$ y $\neg a_x b$ que ∃¬*a*, de donde se seguirá, dado que ∄*c,* que ∃¬*ab*¬*c*, aunque no sabemos si como ¬AB¬C presente o $\overline{\neg AB \neg C}$ ausente. La fórmula 58 nos dice que aunque sepamos que es cierta y teóricamente necesaria mientras no sea falsada la combinación *ab* por no existir *a*¬*b*, no se sigue de ello que existan *a* o *b*.

Las redes nos han permitido construir un modelo que hace visible que no es lo mismo tener teóricamente que tener de hecho aquí y ahora, que es muy diferente ser de estar. También debemos distinguir dos tipos al menos de proposiciones condicionales en la red. Tenemos, por un lado, una condicional basada exclusivamente en la negación de la existencia de las alternativas del consecuente, pero sin haber verificado ni falsado nunca la existencia de los objetos referidos por el consecuente. Es el caso de $a_x b$ en la ilustración 64, donde ni se afirma ni se niega que exista nada de la subclase *ab*. Por otra parte, tenemos proposiciones condicionales basadas al mismo tiempo en la negación de la existencia de alternativas al consecuente y la afirmación de la existencia de objetos ajustados a la conjunción contenida en la proposición. Es el caso de $\neg a_x b \wedge \exists(\neg ab)$ en la ilustración 64. Ambas condicionales son hipotéticas en lo relativo a la presencia actual de objetos que se ajusten a la subclase del antecedente y del consecuente. Pero solo la primero es hipotética en lo relativo a la existencia de las clases. De aquí se sigue que afirmemos como proposición distinta [A]B que significa: 1º que *La totalidad de A está presente ahora*; 2º que *está presente parte de B*, la parte que se asocia con *A*; 3º que *Si algo es A es B*; y 4º que *existen objetos de la clase ab* (59).

$$[A]B \supset a_x b \wedge AB \wedge \exists ab \tag{59}$$

Tenemos que distinguir en el sistema Alfa los estados fácticos de la red en los que algún estímulo activa o inhibe la presencia de algún nodo desencadenando inferencias temporalmente verdaderas, de los estados teóricos que solo permiten a la razón repasar caminos que, si bien fueron trazados por medio de la experiencia, solo están energizados ahora por acción de la memoria.

Así tenemos nodos necesarios por su activación actual y conexiones necesarias basadas en la eliminación de alternativas.

Es decir, que para todo conjunto definido en Alfa incluyendo un nodo *Or*, o bien existe un estímulo aquí y ahora o bien no hay nada (60). En el segundo caso, las conclusiones solo pueden ser teóricas.

$$\forall\, a \rightarrow \exists e_1 \trianglerighteq \emptyset \tag{60}$$

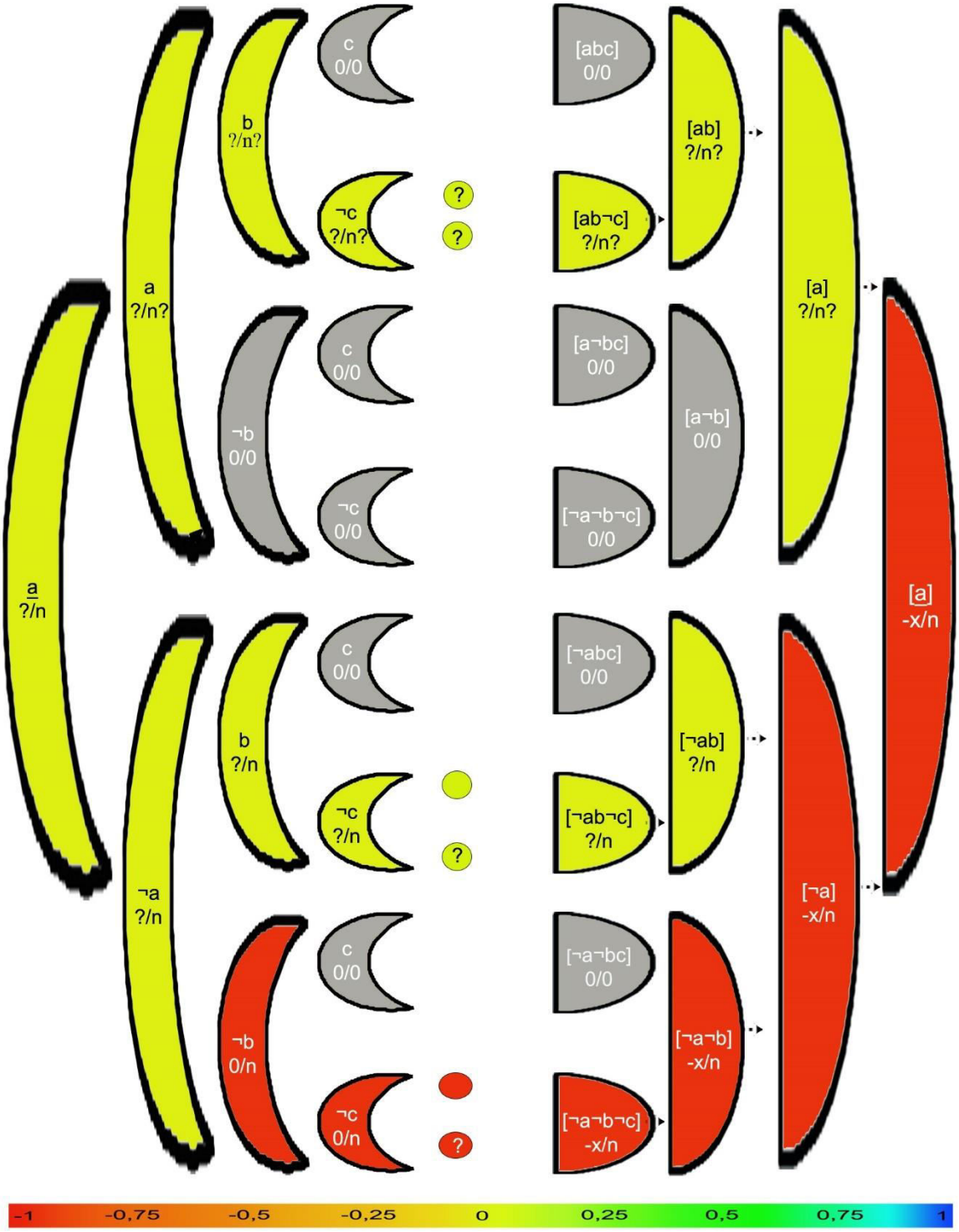


ILUSTRACIÓN 64. DISTINTOS TIPOS DE CONDICIONAL EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

5 EL DIAGRAMA DE MARLO

5.1 Algunas consideraciones históricas de interés

En esta sección describimos los diagramas de Marlo, los cuales fueron desarrollados antes que las redes de expectativas. No será difícil ver que los modelos proposicionales que presentamos reproducen la misma arquitectura de objetos, conjuntos y sistema que determina la propagación de la verdad y la falsedad por los nodos asociados de nuestros circuitos lógicos-bayesianos. Los diagramas de Marlo permiten comunicar los estados de las células lógicas del sistema con menos matices que las redes, pero también con costes menores en el procesamiento cognitivo y en la generación material de la señal, todo ello gracias a que solo se atiende a la información relevante para la inferencia en curso.

Tal vez las redes puedan llegar a ser algún día un modelo útil de cómo procesan nuestras neuronas ciertos tipos de información en paralelo, mientras que los diagramas de Marlo podrían ayudarnos a comprender parte de los procesos lógicos en serie que subyacen a la comunicación, aunque en esta tesis nos limitaremos a defender su validez como herramientas pedagógicas. Su utilidad en la instrucción del razonamiento, concebido ahora desde la perspectiva de la ilación, dependerá de nuestro acierto al comprender, en primer lugar, la estructura de las proposiciones que hace posibles las conexiones durante los procesos de inferencia, así como las clases de términos que pueden ser conectadas por tales estructuras

Los diagramas de Marlo se componen de modelos proposicionales que, de algún modo, condensan la información contenida en las redes de expectativas. Así, debemos interpretarlos considerando que en su arquitectura está implícita la misma estructura combinatoria que subyace a los diagramas de árbol que se emplean en el cálculo de probabilidades. Además, como todos sabemos, el lenguaje descriptivo nos muestra las distintas asociaciones que se pueden dar entre los elementos de un sistema o dominio de conocimiento. Las asociaciones se producen en la red con la finalidad de generar y comunicar expectativas adaptadas, de modo que sea posible a partir de la presencia o ausencia de uno o varios de los elementos del sistema, anticipar o predecir con distintos grados de certeza. Esta es la base de las clásicas tablas de presencia-ausencia que permiten a la ciencia establecer conexiones entre variables más allá de las relaciones situacionales y espurias que cada punto de vista particular o grupal establece para vérselas con su mundo (Bacon, 1620). Nosotros inventamos el diagrama de Marlo para representar gráficamente las proposiciones clásicas A, E, I y O y los silogismos aristotélicos que se valen de ellas (Aznar, 2015). En Aznar (2014a) ya habíamos establecido gráficamente los mismos principios generales de la inferencia que fueron descubiertos y enunciados, mucho antes que por nosotros, por Aristóteles y Boole; pero no éramos capaces de formalizar gráficamente todas las proposiciones con las que trabajan la lógica de clases, de predicados o de enunciados.

Como todos sabemos, el paso desde el silogismo aristotélico a la lógica de clases significó en el siglo XIX el cisma de la lógica matemática. La estructura de las proposiciones que Venn teorizaba en sus diagramas permitía una nueva fundamentación de los principios de la razón al margen de cualquier consideración metafísica que pudiera relacionarse con las diferencias que se establecen en la sentencia entre sujetos y predicados.

En Aznar (2016b) propusimos modelos proposicionales de todos los conectores lógicos que nos permitían resolver en el aula los ejercicios de lógica de enunciados con los principios del silogismo. Al hacer esto estábamos retrocediendo más de un siglo para recuperar, sin darnos cuenta, las doctrinas sobre la cuantificación del predicado con las que Venn rivalizó en su tiempo, hasta el punto de negarles que hubieran tenido ninguna influencia en la obra de Boole y las nuevas formas simbólicas de la lógica (Venn, 1881), cuando en realidad sabemos que las discusiones entre Hamilton y De Morgan hicieran retomar a Boole su interés por la lógica (de Ledesma, Pérez, Borrajo, & Laita, 1997).

Utilizar en el aula los mismos modelos gráficos para resolver indistintamente silogismos categóricos o problemas de lógica de clases y de enunciados estará justificado en la medida en que seamos capaces de interpretar el significado de nuestros diagramas de una manera que sea compatible, al mismo tiempo, con las distintas posturas que han mantenido lógicos aristotélicos y matemáticos al definir los aspectos más elementales de la proposición implicados en la inferencia: ¿qué tipo de términos o variables pueden formar parte de la proposición? ¿Qué términos o variables convenimos que se afirman cuando otros se niegan? ¿Cómo se enuncia algo de algo, es decir, cuál es la estructura esencial de las proposiciones y en qué sentido las podemos convertir o transformar sin adulterar la información existencial contenida en ellas? Así, aunque está muy lejos de los objetivos de esta tesis realizar una revisión de la historia de la lógica, nos resulta inevitable hacer alusión a la doctrina de la cuantificación del predicado y a algunos problemas clásicos como el de la obversión, la validez de los términos infinitos y el gran avance que supuso adoptar el concepto de universo del discurso para incluir en las ecuaciones lógicas expresiones del tipo $\neg a$.

Entendemos por proposición un pensamiento, *Lekta* o estructura ideal de la sentencia en el sentido en el que, siguiendo a Bochenski & Bravo (1985), se entendía en la doctrina estoica, en la tercera concepción de la escolástica y en la semántica de Frege. Solo así podemos asumir que, gracias a los procesos de conversión y transformación de las sentencias, se generan en un sistema dicotómico que combina dos criterios a y b, cuatro representaciones idénticas del mismo pensamiento. Nos parece significativa la siguiente afirmación de Frege (1914):

> Una proposición la podemos traducir a otro idioma, siendo en él distinta de la original por constar de elementos (sonidos) [*Lauten*] distintos, y combinados de forma diferente; sin embargo, el sentido que expresa es el mismo si la traducción es correcta. Y el sentido es desde luego lo que propiamente nos interesa. Una proposición tiene para nosotros un valor debido al sentido que en ella captamos, y que es el mismo que volvemos a conocer en la traducción. A este sentido llamo pensamiento (Gedanke). Lo que demostramos no es la sentencia, sino el "pensamiento", siendo indiferente la lengua que en él empleemos (…) El pensamiento no se pude percibir sensorialmente, pero en la "sentencia" le damos una representación audible o visible. (Citado en Bochenski y Bravo, 1985, p. 302)

Nosotros no tenemos ninguna duda de que los diagramas de Venn comparten lo elemental de la estructura ideal de las proposiciones o *Lekta* que tienen lugar en el pensamiento y que son de interés para la lógica matemática, pero también creemos que no reflejan ni comprenden las estructuras que permiten la comunicación verbal, exacta y rigurosa del pensamiento, cuyo descubrimiento parece haber sido el interés fundamental de Aristóteles en los *Analíticos Primeros* cuando investigaba el silogismo categórico como única forma de demostración materialmente válida.

En los diagramas de Venn desaparecen las figuras del silogismo, reduciendo todo razonamiento a un proceso de eliminación de compartimentos que representan combinaciones de clases. Nosotros estamos de acuerdo con Venn en que razonar formalmente es eliminar posibilidades. Sin embargo, creemos que el razonamiento consiste también en ser capaz de comunicar y comprender con qué grado de confianza deberíamos eliminar o tener en cuenta las posibilidades que componen nuestras redes de expectativas sin necesidad de referirnos de forma explícita y exhaustiva a todas y cada una de ellas. El desarrollo de la inteligencia pasa por aumentar nuestra capacidad de decir cada vez más con menos, y es el caso que los diagramas de Venn lo dicen todo.

5.1.1 Las proposiciones clásicas del silogismo

Recordemos que para Aristóteles el silogismo conecta proposiciones, las cuales constan de términos, siendo la proposición un *logos* que afirma o niega algo de algo, donde *logos* puede significar palabra, pensamiento o incluso contenido objetivo (Bochenski & Bravo, 1985, pág. 58). En *Analíticos Primeros* I, 1, 24a1015-25 encontramos:

> Así, pues, la proposición es un enunciado afirmativo o negativo de algo acerca de algo: este enunciado, a su vez, < puede ser> universal o particular o indefinido. Llamo universal a darse en todos o en ninguno, particular a darse en alguno o no darse en alguno o no darse en todos, e indefinido a darse o no darse sin < indicar> lo universal ni lo particular, v.g.: que es una misma la ciencia de los contrarios o que el placer no es el bien (Aristóteles, Trad. 1995, p. 94)

Según Miguel Candel (1995), el término "indefinido" (*adióriston*) en la cita anterior se refiere a proposiciones en las que el sujeto va desprovisto de cuantificador. Tomamos de Oriol y Gambra (2015) la división de las proposiciones categóricas que establece Aristóteles atendiendo a la determinación de la cantidad del sujeto:

- Singulares: *Sócrates es hombre.*
- Indefinidas, que los lógicos asimilan generalmente a proposiciones particulares: *El hombre canta*.
- Universales: *Todos los hombres cantan*.
- Particulares: *Algún hombre canta.*

La representación de las proposiciones en diagramas lineales, de Venn o de Marlo, permite expresar con claridad las cuatro proposiciones que han sido consideradas de forma clásica combinando cantidad y cualidad y que se corresponden con las formas sentenciales de cuya unión resulta el silogismo (Bochenski & Bravo, 1985). Debemos recordar, siguiendo a Bochenski y Bravo, que el silogismo científico en Aristóteles no admite el uso de términos singulares, y que será solo a partir de Ockham cuando se emplee la premisa *Sócrates es hombre*. Por su parte, aunque en el diagrama de Marlo los términos singulares pueden ser expresados formalmente como i_1, i_2, i_3, etc., la fórmula que suelen elegir libremente los alumnos con mayor frecuencia al formalizar este tipo de proposiciones es la que se corresponde con su consideración universal. Y, de hecho, así se expresa diagramáticamente.

		Proposición	Diagrama de Marlo
			Teórico
A	Universal Afirmativa	*A conviene a toda B*	$b_x a$
E	Universal Negativa	*A no conviene a ninguna B*	$b_x \neg a$
I	Particular afirmativa	*A conviene al menos a un B*	ba
O	Particular negativa	*A no conviene, al menos, a un B* *A no conviene a toda B*	b¬a
A	Singular	*Sócrates es hombre*	s_xh i_sh

TABLA7. FORMALIZACIÓN DE LAS PROPOSICIONES CLÁSICAS EN LA NOTACIÓN DEL DIAGRAMA DE MARLO.

5.1.2 Proposiciones de identidad

No existe ningún motivo que nos obligue a limitar las proposiciones de la lógica aristotélica a las cuatro famosas A, E I, O. Aristóteles también se ocupó de la identidad. Así, en *Tópicos* I, 7,103a15-20 nos dice Aristóteles:

> Son *idénticas en especie* todas las cosas que, siendo múltiples, resultan indiferenciadas en especie, como, por ejemplo, un hombre respecto a otro hombre y un caballo respecto a otro caballo: en efecto, todas las cosas de un tipo tal que se hallan

> bajo la misma especie se llaman *idénticas en especie;* de manera semejante, son *idénticas en género* todas las cosas que están bajo el mismo género, v.g.: caballo respecto a hombre. (Aristóteles, Trad. 1982, p. 100)

En Bochenski y Bravo (1985) se formulan con ayuda de variables las leyes relativas a la identidad que encuentran en Aristóteles y que, según estos autores, son más que las que aparecen en los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead:

1. Si B es idéntico a A, y C no es idéntico a A, entonces B y C no son idénticos.

2, Si A y B son idénticos, entonces (para todo C): si C conviene a A, conviene también a B.

3, Si A y B son idénticos, entonces (para todo C): si A conviene a C, conviene también a B.

4, Si hay un C tal que conviene a A, pero no a B, entonces A y B no son idénticos.

5, Si hay un C tal que le conviene A, pero no B, entonces A y B no son idénticos.

Inmediatamente después de formular estas leyes, Bochenski dice estar sorprendido por no haber encontrado la simple formulación: Si A es idéntico a B y B a C, entonces A es idéntico a C, aunque tal vez, pensamos nosotros, no la expuso por ser elementalmente obvia.

En todo caso, no hay ningún motivo para sospechar que Aristóteles no hubiera empleado diagramas lineales en el desarrollo de estos principios exactamente igual que pudo hacer con los silogismos categóricos, siendo evidente que su lógica iba más allá de las cuatro proposiciones clásicas A, E, I, O. Por ejemplo, en *Tópicos* VI,151b30-35, en el capítulo titulado “Lugares de la identidad” dice Aristóteles:

> En efecto, si la justicia es lo mismo que la valentía, también el justo será lo mismo que el valiente, y *justamente* lo mismo que *valientemente.* De manera semejante también en el caso de los opuestos: en efecto, si esto y esto son lo mismo, también sus opuestos serán lo mismo en cualquiera de las oposiciones mencionadas. (Aristóteles, Trad. 1982, p. 262)

5.1.3 Proposiciones indefinidas

Las redes de expectativas formadas dicotómicamente permiten afirmar que si hay algo en la red, y ese algo, x, no es *A*, entonces es ¬*A*. Aunque si establecemos varios grados de ser el hecho de que *B* no sea A no se corresponde con que sea *B*¬*A*, sino con *B* ¬ *(A).* Esta misma idea podría ser la base, siguiendo a Correia (2006), de la objeción que se puede encontrar en Aristóteles a la obversión (*Categorías* 11b38-12a5), cuando afirma que puede haber intermedios entre lo blanco y lo negro, de tal modo que no ser blanco no significaría lo mismo que ser negro. Si dijéramos de un número que no es el 10, ¿diríamos qué número es? Igualmente se pregunta Correia si es lo mismo no ser justo que ser injusto.

Hemos visto que Aristóteles afirma en *Analíticos Primeros* que la proposición es un enunciado afirmativo o negativo de algo acerca de algo y que este enunciado puede ser universal, particular o indefinido. Si empleamos la palabra “juicio” en su acepción de afirmación o negación de algo (de un predicado) con respecto a algo (un sujeto), entonces la proposición puede ser considerada como el contenido del acto mental del juzgar. Así, en el juicio *Todos los hombres son mortales*, *Todos los hombres* es la expresión que designa el concepto-sujeto, *'mortales'* es la expresión que designa el concepto-predicado, y '*son*' es la cópula que los enlaza. Desde esta perspectiva, Kant, para quién la Lógica no había realizado ningún avance desde Aristóteles, clasifica los juicios según su cualidad en afirmativos, negativos e indefinidos, que no es exactamente lo mismo que clasificar las proposiciones en universales, particulares e indefinidas según la determinación del sujeto. Así escribe en su *Lógica* II, 4-5:

> 22. *Cualidad de los juicios: afirmativos, negativos, e indefinidos* (limitativos). *En cuanto a la cualidad, pueden ser los juicios, afirmativos, negativos o limitativos,* es decir, indirectamente afirmativos. Por ejemplo el alma es inmortal, el vicio, no es laudable, el alma, es no mortal. En los juicios *afirmativos,* el sujeto está comprendido en la esfera del predicado; en los *negativos,* el sujeto está fuera de la esfera del predicado, y en los *limitativos,* el sujeto está colocado en la esfera de una noción, que está fuera de la esfera de otra noción. *Observaciones.* 1.ª El juicio limitativo no solo indica que un sujeto no está contenido en la esfera de un predicado, sino que está fuera de la esfera de éste, y en otra esfera indefinida. Por consiguiente, esta clase de juicios representan la esfera del predicado, *como limitada.* Todo lo posible es o A, o no A. Si yo digo que una cosa no es A, por ejemplo, que el alma humana es o no mortal, que algunos hombres son no sabios, etc., estos juicios son limitativos o indefinidos; porque yo no determino de este modo a qué noción pertenece el objeto fuera

> de la esfera finita de A, sino solamente que está en una esfera extraña a la de A; lo cual no es propiamente una esfera determinada, sino solo la *contigüidad de una esfera indefinida, o la limitación misma.* (Kant, Trad. s./f., p.85)

Aristóteles expone en *Tópicos* B8, 113b17 la contraposición cuando afirma que *Si el hombre es animal el no-animal será no-hombre*. Por su parte, Parsons (2017) indica que la contraposición se discute en varios textos anónimos del siglo XII y principios del XIII editados en De Rijk 1967 (de Rijk, 1967) y que algunos autores de esta época adoptaron, nos dice Parsons, la llamada "conversión por contraposición", según la cual *Todo S es P* se corresponde con *Todo no-P es no-S y Algún S no es P* es equivalente con *Algún no-P es S*. Parsons nos dice que el problema de la contraposición ya estaba presente en el siglo XII, que fue respaldada en el siglo XIII por Pedro de España, tratada por Buridán en el XIV y que en el siglo XIV los problemas asociados con la contraposición eran bien conocidos y que solo se tomaba el principio como válido con un supuesto adicional de existencia de cosas que caen bajo el término sujeto. Parsons señala que la doctrina de la contraposición terminó siendo generalmente aceptada, aunque seguía pendiente de resolver el problema de la afirmación de la existencia como límite de la validez de las proposiciones así convertidas: "Una quimera no es un hombre; entonces una quimera es un no-hombre".

Siguiendo a Parsons (2017), hay que distinguir en el S. XIV la contraposición y obversión de términos negativos y afirmativos que señalan clases vacías. Así, respecto a las proposiciones negativas, podemos decir que a finales del siglo XIV estaban permitidas en la teoría, porque la forma O no tenía importancia existencial y la teoría lógica, despojada de los casos especiales incorrectos de contraposición y obversión, era coherente e inmune a la crítica del siglo XX. Sin embargo, nos dice Parsons, que las afirmaciones universales con términos de sujeto vacíos sean falsas se encuentra con un problema en relación a la teoría científica aristotélica, porque Aristóteles sostuvo que *Todo ser humano es un animal* es una verdad necesaria por ser cierto en todo momento; pero la teología dominante sostenía que antes del último día de la creación no había humanos, lo cual generaba una contradicción. Esta contradicción, prosigue Parsons, podría desaparecer de la teoría científica si las afirmaciones universales se entienden como condicionales universalizados, tal y como se entienden hoy. De este modo la contraposición se aceptará como inferencia válida en siglos posteriores cuando se complemente con la premisa adicional de que los términos en cuestión no están vacíos. Indica Parsons que en el siglo XIX Whately (1853) admitirá la contraposición que llamó "conversión por negación", además de respaldar la obversión:

- *Todo S es P = Todo no-P es no-S*
- *Alguna A no es B*, luego *alguna no B es A*

El problema de la contraposición, para nosotros transformación, y el problema de la obversión, radica pues en que no es legítimo transmitir la predicación de existencia a términos que no tenían reconocida dicha existencia en la proposición inicial. Y en este sentido, es el mismo problema que veremos que lleva a Venn a eliminar la carga existencial de las proposiciones universales.

5.1.4 Términos vacíos e infinitos

Recientemente ha señalado Correia (2017) que incorporar términos indefinidos en la silogística clásica, categórica e hipotética, le otorga una expresividad comparable a la lógica de primer orden de predicado monádico. También en este sentido, trabajar con términos negativos en el diagrama de Marlo es fundamental, y no solo porque aumenta el rango de razonamientos que pueden ser expresados sino porque, como veremos, la conversión de la universal negativa *Ningún A es B*, en la proposición exclusiva *solo ¬B puede ser A*, cuyo sujeto es un término negativo, es fundamental para comprender que lo esencial en la inferencia silogística es que la cualidad del término medio sea la misma o no en las premisas, y no el hecho de que las premisas sean afirmativas o negativas, tal como captó y enunció explícitamente Boole (1854).

Sin embargo, las representaciones diagramáticas se decantarán por la transformación de *Ningún A es B* en la proposición *Ninguna B es A*, aceptada como válida en la tradición aristotélica y muy fácilmente diagramable mediante esferas tipo Leibniz-Euler que se excluyen.

5.1.5 Verdad formal y material

Un problema relacionado con la cuestión del estatus ontológico de los términos de la obversión o que resultan de la contraposición es el de la diferencia entre verdad formal y material, el cual afecta también de un modo directo a nuestros diagramas.

Aunque queda fuera del objetivo de esta tesis analizar en profundidad los tipos de silogismo postulados por Aristóteles, parece claro que hay una estructura de conexión formal entre términos capaz de producir ciencia, creencia u opinión plausible. Y a pesar de que tenemos que reconocer que se escapan a nuestros diagramas cuestiones que conciernen al silogismo tan importantes como las categorías, los predicables, la identidad, las clases de oposición etc., no podemos pasar por alto, atendiendo a Johnson-Laird (1995), la distinción entre silogismos científicos con validez formal y material y aquellos silogismos que solo poseen validez formal

En general, se explica en Bochenski y Bravo (1985), un silogismo puede ser una demostración, un silogismo dialéctico o erístico, siendo la demostración un silogismo con premisas especiales y con una conclusión en la que se expresa una propiedad de un género, lo cual solo se consigue mediante un silogismo de la primera figura. En *Analíticos Primeros* I, 4, 25b30-35 leemos:

> Ahora bien, hay que hablar del razonamiento antes que de la demostración por ser el razonamiento más universal que la demostración: en efecto, la demostración es un cierto <tipo de> razonamiento pero los razonamientos no son todos demostraciones. (Aristóteles. Trad. 1995, p. 101)

Y en Analíticos Segundos I, 2,71b10-25 nos dice:

> Creemos que sabemos cada cosa sin más, pero no del modo sofístico, accidental, cuando creemos conocer la causa por la que es la cosa, que es la causa de aquella cosa y que no cabe que sea de otra manera […] A la demostración la llamo razonamiento científico; y llamo científico a aquel < razonamiento> en virtud de cuya posesión sabemos. Si, pues, el saber es como estipulamos, es necesario también que la ciencia demostrativa se base en cosas verdaderas, primeras, inmediatas, más conocidas, anteriores y causales respecto de la conclusión: pues así los principios serán también apropiados a la demostración. En efecto, razonamiento lo habrá también sin esas cosas, pero demostración no: pues no producirá ciencia (Aristóteles. Trad. 1995, p. 316)

En los silogismos dialécticos parece que no hay compromiso con la verdad de las proposiciones. Así, en la demostración se toma postura a favor o en contra, por ejemplo, de la proposición: *todo placer es bueno.* En la discusión dialéctica, en cambio, se preguntaría: *¿es todo placer bueno* o *no?* En *Analíticos Primeros* I,1,24a1020-25 leemos:

> La proposición demostrativa difiere de la dialéctica en que la demostrativa es la asunción de una de las dos partes de la contradicción (pues el que demuestra no pregunta, sino que asume), en cambio la dialéctica es la pregunta respecto de la contradicción. (Aristóteles, Trad. 1995, p.94)

Finalmente, el silogismo erístico no produce ni siquiera un conocimiento plausible, y es definido en *Tópicos* I, 1,100b20-25 del siguiente modo: "Y un razonamiento *erístico* es el que parte de cosas que parecen plausibles pero no lo son, y también el que, pareciendo un razonamiento (y no siéndolo), parte de cosas plausibles o de cosas que lo parecen" (Aristóteles, Trad. 1982, pp. 90,91). Solo la demostración es un tipo de silogismo con validez formal y material.

<table>
<tr><td rowspan="6">Lógica</td><td colspan="3">De la primera operación</td></tr>
<tr><td colspan="3">De la segunda operación</td></tr>
<tr><td rowspan="4">De la tercera operación (silogizar)</td><td colspan="2">Sin más (Formal)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">aplicada</td><td>Demostrativa (Material)</td></tr>
<tr><td>Dialéctica</td></tr>
<tr><td>Retórica</td></tr>
<tr><td>Sofística</td></tr>
</table>

TABLA 8. DIVISIÓN MÁS ACORDE DE LA LÓGICA CON ARISTÓTELES Y SANTO TOMÁS. ADAPTADO DE ORIOL Y GAMBRA, 2015, P. 41.

Los problemas relacionados con la distinción entre validez formal y material alcanzan no solo al significado existencial que concedemos a nuestras premisas, sino también a la validez de las conversiones, y está muy estrechamente relacionada con la división obvia de términos que hacemos en el diagrama entre hechos, teorías respaldadas por los hechos y suposiciones. En todo caso, la distinción verdad material-formal implica el

reconocimiento de que la conexión que permite pasar de las premisas a la conclusión transmite la expectativa de que, de hecho, hay algo que se ajusta a lo que decimos. Y aunque Oriol afirme que la distinción no está tal cual en Aristóteles, es evidente que Aristóteles la reconoce cuando en *Tópicos* admite la validez de razonamientos cuyas conversiones sabe muy bien que son inválidas (Bochenski & Bravo, 1985), y, como veremos, también la lógica matemática tendrá que afrontar el problema de las conversiones, llegando a eliminar el contenido existencial de las proposiciones universales para solventarlo.

En un silogismo científico hay validez formal y material, como en el clásico ejemplo de Barbara que reproduce Correia (2006) para mostrar que en un silogismo científico sus premisas son necesariamente verdaderas según la ciencia de Aristóteles, aunque también es simplemente un silogismo lógico en el que la verdad de la conclusión puede ser correctamente deducida de las premisas a partir de ciertas reglas y principios.

Todos los hombres son mamíferos.

Todos los griegos son hombres.

Luego, todos los griegos son mamíferos

El silogismo categórico tiene como premisas proposiciones que son categóricas, al igual que la conclusión que se sigue de ellas. En su forma más simple las premisas son dos proposiciones categóricas formadas por tres términos, uno de los cuales aparece en ambas premisas, y se concluye una proposición donde se componen los otros términos no repetidos en las premisas.

En el diagrama de Marlo, mantener la validez material de los términos a lo largo de un razonamiento en el que es necesario convertir y/o transformar las premisas, no se muestra como un problema diferente al de no afirmar clases vacías en lógica matemática. En ambos casos parece necesario respetar el principio de razón suficiente para no afirmar en la conclusión más de lo que teníamos en las premisas.

Un materialista que afirmara que *Todo lo material es divisible*, no aceptaría, legítimamente, que alguien concluyera que él mantiene, en consecuencia, que *lo indivisible es inmaterial*. Pues el materialista siente que solo otorgó existencia a lo material y lo divisible, y negará que, partiendo de sus palabras, haya razón suficiente para transmitir dicha existencia ni a lo inmaterial, ni a lo indivisible.

5.1.6 La existencia de la quimera

No hay duda de que desde que se mencionan por fuentes de confianza seres de ficción como las brujas, los unicornios o los nomos, dichos seres son concebidos como posibilidades confirmadas. Siendo así, es su no existencia lo que debe ser aprendido por los jóvenes sistemas cognitivos.

La facilidad con la que podemos engañar a los niños en relación a las cosas que existen, no puede hacernos dudar de la precisión que podemos alcanzar en el lenguaje para no conceder, en la transformación de las premisas, tal existencia a objetos no mencionados en las premisas.

Parsons (2017) nos muestra con un ejemplo los problemas de la contraposición y la obversión con términos de clases vacías si seguimos la doctrina de Strawson (Strawson, 1952, pp. 176–78). En la tabla 9 veremos que si formalizamos el ejemplo de Parsons en el diagrama de Marlo, podemos salvar el inconveniente de afirmar clases vacías. En el diagrama, la atribución de existencia solo se mantiene al convertir proposiciones de sistemas dicotómicos, mientras que al transformar los términos que nombran hechos empleando mayúsculas, pasan a minúscula para expresar meras consecuencias teóricas. Así evitaremos afirmar la existencia de las quimeras. También podemos observar en la ilustración 65 cómo expresamos la proposición *Ningún hombre es una quimera* en las redes de expectativas

Como señala Parsons (2017), los pasos validados por la doctrina de Strawson terminan en una conclusión falsa, porque no hay quimeras, de modo que Strawson alcanza su objetivo de preservar ciertos patrones comúnmente identificados como constitutivos de la lógica tradicional, pero a costa de sacrificar la aplicación de la lógica al razonamiento extendido. Sin embargo, si nos fijamos en las inferencias permitidas en el diagrama de Marlo, la afirmación de la existencia sólo se mantiene en lo que nosotros llamamos conversión, mientras que se pierde en lo

que llamamos transformación. La subalternación es referida como "contenido" en nuestro diagrama, dado que si tengo que *la totalidad de A es B*, *[A]B*, es evidente que tengo que *algún es B*, *AB,* contenido en tal afirmación.

Lo primero que debemos observar en la ilustración 65 es que el universo del discurso se organiza en torno a dos criterios h y q considerados dicotómicamente, lo cual genera cuatro clases teóricas de objetos: hq, $h\neg q$, $\neg hq$ y $\neg h\neg q$. Inicialmente la proposición elimina la clase $h\neg q$, que queda en color gris y con un número n de elementos atribuidos igual a cero.

Ningún hombre es una quimera		
Strawson	Diagrama de Marlo	
Ningún hombre es una quimera	-1 [H]¬Q Es el caso que hay hombres y que la totalidad de ellos son "no quimeras", es decir, que hay hombres y no se ajustan al criterio que permite afirmar que algo es una quimera.	2 $h_x\neg q$ **Contenido en 1**: Si eres hombre, entonces no eres una quimera. Hemos sacado una conclusión teórica de los hechos.
Por **conversión** Ninguna quimera es un hombre.	3 ¬Q[H] **Conversión de 1.** Es decir, que hay cosas que no son quimeras y al menos parte de ellas son la totalidad de los hombres. Se mantiene la predicación existencial.	4 $\neg q\ h_x$ **Conversión de 2**: Sólo si no eres una quimera puedes ser un hombre. Es decir, que al menos en teoría, parte de los tipos de ¬q contiene a la totalidad de los tipos posibles de hombre.
Por **obversión**: Toda quimera es un no-hombre	5 $q_x\neg$h **Transformación de 4**. Si algo fuera una quimera, no sería humano. No hay predicación existencial de q.	6 q¬h **Contenido en 5.** Es cierto afirmar que al menos una parte de los tipos teóricos de quimera está asociada con al menos uno de los tipos teóricos de lo no humano. No hay predicación existencial de q.
Por **subalternación:** Alguna quimera es no humana	7 ¬QH **Contenido** en 3. Alguna cosa que no es quimera es hombre. Se mantiene la predicación existencial.	8 ¬qh **Contenido en 4**. Hay en teoría, al menos una parte del concepto "no quimera" asociado con al menos una parte del concepto "humano".
Por **conversión**: Algún no humano es una quimera.	9 ¬hq **Conversión de 6** Es cierto teóricamente que al menos una parte de los tipos de no humano se asocia con lo que conceptualmente se ajusta a la definición de quimera. No hay atribución de existencia.	

TABLA 9 "NINGÚN HOMBRE ES UNA QUIMERA" POR OBVERSIÓN Y CONTRAPOSICIÓN.

Además, entendemos que la proposición comunica que existen hombres que no son quimeras, por lo que se indica en el nodo central dentro de la clase *Or* $h\neg q$ que existe un número n de objetos en él. Hemos querido indicar, en la ilustarción 65, escribiendo "?/n" que desconocemos el número de individuos $h\neg q$ presentes ahora, pero que existe al menos uno en teoría con capacidad de estar presente o ausente. Si nos fijamos en el resto de nodos *Or* escribimos "?/n?" indicando que además de no saber si están presentes desconocemos si existen. Es decir, que es una verdad teórica que nos asegura que hay al menos un objeto i_1 tal que es hombre y no es quimera. Luego ese individuo garantiza que al menos existe algo que no es quimera, que existe algo que es hombre y que existe algo en la red. Por eso en todos los nodos afectados por esa verdad existencial, aunque no sabemos el valor exacto de n, n carece de interrogación.

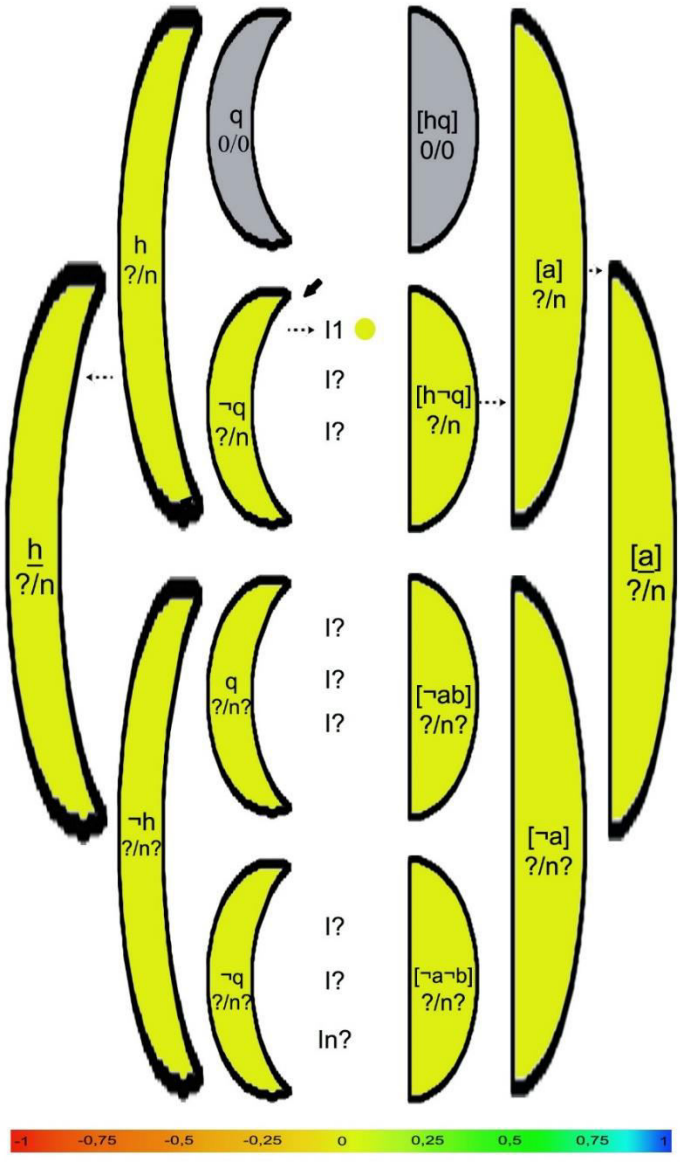


ILUSTRACIÓN 65. LA QUIMERA EN LAS REDES.

Como nos parece que la emisión de la proposición fue con intención teórica, hemos dejado el objeto i_1 con un valor de presencia/ausencia igual a cero o incierto (ilustración 65). Por eso el único objeto de la red existencialmente verificado está en color amarillo. En sentido fáctico no sabemos si ese hombre está presente o no.

Podemos ver en la ilustración 65 que la contraposición en las redes de expectativas supone una pérdida de la razón suficiente de la afirmación de existencia, la cual solo afecta a los nodos *hombre* y *no quimera.* Quedan

inciertos los nodos *no hombre* y *quimera en* cuanto al valor de existencia y de presencia. Por eso no hay objetos afirmados ni negados en la rama de lo que no es hombre. No obstante, es una consecuencia teórica de la eliminación del nodo *hombre-quimera* la afirmación condicional de que *si algo fuera una quimera, ese algo no es un hombre*. Podemos ver en la red que la única *q* que permanece está asociada a ¬*h*.

Igualmente, siguiendo la doctrina de la cuantificación del predicado, podremos evitar transmitir existencia de forma ilegítima en los diagramas de Marlo al considerar que solo una parte de ¬*q* y la totalidad de *h* son mencionadas en la premisa, y que, en consecuencia, todo lo que digamos de *q* o ¬*h* habrá que considerarlo ni verificados ni refutado por la experiencia.

5.1.7 El universo del discurso

Cuando analicemos los silogismos categóricos aristotélicos con el diagrama de Marlo veremos que no aparecen proposiciones ni en las premisas ni en la conclusión, con un sujeto negativo del tipo ¬*A*, llamados por Aristóteles nombres indefinidos. En *Tópicos* I, 9, 103b30-35 leemos: "En efecto, cuando dice de un hombre tomado como ejemplo que lo tomado como ejemplo es hombre o animal, dice *qué es* y significa una entidad" (Aristóteles. Trad. 1982, p. 104). Y en *Sobre la Interpretación* 2, 16a30-35 afirma Aristóteles: "No-hombre no es un nombre; ni siquiera hay un nombre con el que llamarlo —pues no es un enunciado ni una negación—; pero digamos que es un nombre indefinido" (Aristóteles, Trad. 1995, p. 38)

Nosotros convertimos la particular negativa *Algún mamífero no es hombre* en *Alguno que es no-hombre es mamífero.* Sin embargo, *no-hombre* es considerado como un término indefinido o infinito en lógica aristotélica. Afirma Melendo (1981) que en *Sobre la Interpretación*, Aristóteles califica los sustantivos precedidos de una negación como nombres indeterminados, indefinidos o infinitos, dado que pueden convenir tanto al ser como al no ser. Y en el mismo sentido se manifiestan Oriol y Gambra (2015):

> Por ejemplo, no-hombre engloba tanto el caballo que existe como la quimera que no existe (en lo cual difiere de los términos finitos, que significan determinada naturaleza real y sólo se dicen con verdad de lo que existe: por ejemplo, animal es verdad del hombre, pero no de la quimera. (p.83)

No obstante, y como ya hemos dicho anteriormente, Aristóteles reconoce la validez de razonamientos cuyas conversiones sabe que son inválidas porque generan proposiciones con sujeto negativo. Así, encontramos en *Tópicos* II, 113b15-30:

> Si el hombre es animal el no-animal será no-hombre […] si lo bello es agradable, lo no-agradable será no-bello, y si esto no es así, tampoco aquello. De manera semejante también, si lo no-agradable es no-bello, lo bello será agradable. Es evidente, pues, que vale en ambos sentidos la implicación de acuerdo con la contradicción realizada a la inversa. (Aristóteles, Trad. 1982, p. 138)

Podemos afirmar, pues, que aunque en la demostración Aristóteles no acepte los términos negativos, sí los utilizó en otros tipos de razonamiento. Sin embargo, insistir en lo inadecuado de los términos indefinidos o infinitos será importante para Santo Tomás de Aquino, pues, como señala Muñoz Delgado (1977), en el S. XIII, en la filosofía griega y medieval el lenguaje representa el mundo, lo cual lleva a plantear agudamente en el Medievo cuestiones como: ¿hay significación, connotación, denotación y verdad, si no hay individuos existentes? ¿En qué sentido hay suposición cuando hablamos de cosas que no tienen existencia actual? Y como ejemplo de estas inquietudes encontramos significativa la siguiente cita atribuida a Santo Tomás:

> Por ejemplo, no-hombre engloba tanto el caballo que existe como la quimera que no existe (en lo cual difiere de los términos finitos, que significan determinada naturaleza real y sólo se dicen con verdad de lo que existe: por ejemplo, animal es verdad del hombre, pero no de la quimera. (Citado en Oriol & Gambra, 2015, p.83)

Sin embargo, como señalan Oriol y Gambra (2015), la lógica matemática iguala los términos finitos (hombre) e infinito (no-hombre) porque entiende que las cosas significadas por un término son siempre cosas individuales que están englobadas en un solo conjunto que llama universo del discurso.

De Morgan afirma: "Contrary names are those one of which must belong to every object of thought, but never both: and they are denoted by large and small letters. Thus x means not-X, and everything is either X or x" (De Morgan, 1847a, p.9)

Es obvio que en el diagrama, cuando empleamos sistemas dicotómicos, nos decantamos en este aspecto por la lógica matemática siguiendo a Boole y a De Morgan, que al referirse a objetos, ideas y nombres nos dice que *B* es no b[10]; es decir, que *B* es lo mismo que ¬¬*B*.

> Whatever completely does one of the two, include or exclude, also does the other. If I say that 'no A is B,' then, b being the name of every thing not B in the universe of the proposition, I say that 'every A is b' and if I say that 'every A is B,' I say that ' no A is b.' Whether a language will happen to possess the name B, or b, or both, depends on circumstances of which logical preference is never one, except in treatises of science. (De Morgan, 1847b, p. 40)

En el diagrama de Marlo la idea de *universo del discurso* es, como para De Morgan y Boole, la suma de todas las posibilidades que podemos concebir en la teoría de la probabilidad. En De Morgan, siguiendo la tradición, son nombres contrarios aquellos que no pueden aplicarse a la vez, aunque uno u otro de ellos siempre se aplica. Para De Morgan (1847a), no-británico no es término infinito que puede ser sustituido por cualquier cosa, sino algo cuyo significado está limitado por el universo del discurso, es decir, algo como un francés, un español, un alemán, etc.

El uso que del concepto de *universo del discurso* hizo Boole en 1854 en *The Laws of Thought* sirvió para legitimar la validez del uso de lo que los aristotélicos llaman *términos infinitos*:

> Again, these classes together make up the universe, for there is no object which may not be described by the presence or the absence of a proposed quality, and thus each individual thing in the universe may be referred to some one or other of the four classes made by the possible combination of the two given classes x and y, and their contraries (Boole, 2017, p. 60)

Boole comprende el concepto de *universo del discurso* de una forma semejante a De Morgan, quien lo definía de la siguiente manera en De Morgan (1860): "The whole extent of matter of thought under consideration I call the universe. In common logic, hitherto, the universe has always been the whole universe of possible thought"(p.39). Boole comprende que el lenguaje permite representar clases de objetos que poseen o no poseen una cualidad, y determina el universo del discurso como el conjunto de las combinaciones posibles que pueden establecerse a partir de la posesión o la privación de las cualidades que estemos considerando, lo cual podría expresarse en un sistema de redes dicotómico. Señala Boole que la categoría de los objetos que poseen una determinada cualidad es llamada *x*, la categoría de los objetos que no la poseen es llamada *(1-x)*, luego a partir de dos criterios *x* e *y* se establece un universo del discurso que estaría formado por las siguientes cuatro clases de objetos *(es x, es y)(es x, no es y)(no es x, es y)(no es x no es y).*

> *Definition.* —Any algebraic expression involving a symbol *x* is termed a function of *x*, and may be represented under the abbreviated general form *f* (*x*). Any expression involving two symbols, *x* and *y*, is similarly termed a function of *x* and *y*, and may be represented under the general form *f* (*x, y*), and so on for any other case
>
> *xy, x* (1 − *y*) (1 − *x*) *y,* (1 − *x*) (1 − *y*). (Boole G., 2017, p. 51)
>
> Of these it is evident, that the first *xy* represents that class of objects which at the same time possess both the elementary qualities expressed by *x* and *y*, and that the second *x* (1 − *y*) represents the class possessing the property *x*, but not the property *y*. In like manner the third constituent represents the class of objects which possess the property represented by *y*, but not that represented by *x*; and the fourth constituent (1 − *x*) (1 − *y*), represents that class of objects, the members of which possess neither of the qualities in question […] (Boole G., 2017, p. 60)

Boole trabaja con clases de objetos, lo cual le permite plantear el siguiente silogismo en el que aparecen proposiciones con términos negativos. Encontramos en Boole (2017) que:

> All *Y*'s are *X*'s.
>
> All not-*Y*'s are *Z*'s.
>
> ∴ All not-*X*'s are *Z*'s (p.183)

También Venn (1881) se beneficia del concepto de universo del discurso para poder emplear términos negativos como etiquetas de clases y rechazar la vieja doctrina de los términos infinitos: "we may reject the old doctrine as to the infinitude of a negative term, which still survives in so many quarters" (p.364) y afirma también: "British

[10] La b minúscula está en lugar de ¬B.

and alien are equivalent to British and not-British, provided we understand that we are talking only of human beings" (p.182). Y también dice:

> But what does 'not-black 'include? Does it apply to all things without exception to which the colour black cannot be applied; including, say, the Geological Glacial Period, the sources of the Nile, the claims of the Papacy, the last letter of Clarissa Harlowe, and the wishes of our remote posterity ? Clearly not: some kind of limit, more or less restricted, is generally understood to be drawn. (p.180)

Y ello a pesar de reconocer lo poco natural en el lenguaje de su uso: "True negative names of the type 'not X' are not very frequent in popular speech, but are mainly an invention of the logician" (p. 180).

Según Venn (1881), en el universo del discurso las divisiones que realicemos deben ser mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivas. La única suposición en cuanto a las relaciones mutuas de x y $\bar{x}$[11] es que, independientemente de lo que *x* representara, y podría significar casi todo lo que quisiéramos, $\bar{x}$ debería representar el resto, que constituía el "todo" de lo que es tenido en cuenta. Además, el universo del discurso depende de los datos y de la intención con la que sean empleados: "As to the nature of this universe we said nothing; or rather we gave it to be understood that this depended entirely upon the data, and the intention of those who employ the data" (p 363).

5.1.8 La conversión de la universal negativa

Una vez aceptado el universo del discurso, De Morgan convierte sin problema *Alguna A no es B* en *Alguna A es no B*. También *Ningún A es B* puede ser formalizada como *Toda A es ¬B,* siendo igualmente informativas ambas proposiciones en sistemas dicotómicos. Y Boole (2017) nos dice: "To express any proposition of the form "No x's are y's," convert it into the form "All x's are not y's," (p.45).

Sin embargo, y a pesar de trabajar con aparente naturalidad con los términos negativos, la conversión de la universal negativa *Ningún A es B*[12] que será empleada en el siglo XIX por Bentham, Hamilton y los diagramas de Venn, va a ser *Ninguna B es A* en lugar de convertirla en *Solo ¬B es A,* tal y como proponía la teoría escolástica de los exponibles, como si la vieja teoría de los términos infinitos hubiera condicionado la preferencia a la hora de convertir la universal negativa E.

George Bentham, William Hamilton y otros, ya sabían en el XIX que cualquier proposición en lógica clásica puede ser interpretada como una afirmación de identidad, de modo que la proposición *Ningún cisne es verde* significa que "la clase de todos los cisnes es idéntica a una parte de la clase de todas las cosas no verdes" (Gardner, 1958, p. 83). De Morgan, igual que Boole, vio que la universal negativa se podía formalizar como *Toda A es ¬B*. Encontramos en Boole (2017): «Rule.—*To express any proposition of the form "No x's are y's," convert it into the form "All x's are not y's," and then proceed as in the previous case*» (p.45). Pero Boole no dio entonces el paso de convertir dicha proposición en *Solo ¬B es A*, o lo que es lo mismo, no la convirtió en *Parte de ¬B contiene a todo A*.

Quizá, De Morgan no hizo esta conversión porque se empeñaba en afirmar que los predicados de una proposición negativa son siempre universales (De Morgan 1847b), pero de haberlo hecho, seguramente, habría reforzado las tesis de Boole (1854) de que la clave para comprender las leyes fundamentales de la inferencia en el silogismo está en el hecho de que el término medio comparta o no la misma cualidad en las premisas, una clave fundamental para nosotros cuando operamos por síntesis o exclusión en los diagramas (Címbora Acosta, 2017; Aznar, 2015, 2016, 2018a, 2016, 2018b).

Sin embargo, como explica Cardenete (2002), desde los medievales se ha discutido el significado de los exponibles, términos como *sólo*, *excepto*, *en tanto*, *en cuanto* y otros cuya presencia hace oscuro el significado de algunas proposiciones, haciendo necesario explicar el sentido de las mismas para descubrir que, en la mayoría de los casos, hay una mezcla de afirmación y negación. La cuestión es que *Solo A es B* tenía generalmente como segundo exponente *Ninguna No A es B,* lo cual no resulta una afirmación extraña para el lector moderno, pero sí

[11] No x
[12] $a_x \neg b$ en el diagrama de Marlo

para los lógicos medievales (Ashworth, 1973), mientras que nos dice Horn (2009) que era reconocido que la proposición equivalente de *Sólo A es B* es *Toda B es A*, tal y como ocurre en el diagrama de Marlo.

La conversión de la universal negativa, como aparece en la doctrina de los exponibles que hemos citado, podría ser la clave de la facilitación del diagrama de Marlo en la comprensión de las inferencias. Recordemos, simplificando la cuestión, que una proposición escrita con mayúscula en el diagrama de Marlo es categórica, mientras que en minúscula es hipotética, teórica. Debemos observar que la afirmación de existencia se mantiene solo en la conversión, pero se pierde en la transformación, siendo evidente por qué en las redes de expectativas.

	CONVERSIÓN	TRANSFORMACIÓN	CONVERSIÓN
Toda A es B A_xB	Solo A es B $B\ A_x$	Si no es B, no es A $\neg b_x \neg a$	Solo ¬A es ¬B $\neg a\ \neg b_x$
Ningún A es B $A_x \neg B$	Solo ¬B es A $\neg B\ A_x$	Si es B, no es A $b_x \neg a$	Solo ¬A es B $\neg a\ b_x$
Alguna A es B AB	Alguna B es A BA	Si no es B, no puede ser cierta clase de A $\neg b_x \neg a_1$	Solo cierto tipo de ¬A puede ser no ¬B $\neg a_1\ \neg b_x$
Alguna A no es B A¬B	Alguna ¬B es A ¬BA	Si es B, no puede ser cierto tipo de A $b_x \neg a_1$	Solo cierto tipo de ¬A puede ser B $\neg a_1\ b_x$

TABLA 10. EJEMPLOS DE CONVERSIÓN Y TRANSFORMACIÓN EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

En el aula no está permitido transformar las particulares, pero aquí podemos proponer, tratando de imitar el discurrir de los exponibles escolásticos, que si es cierto que *Algún A es B*, entonces es cierto que *al menos una parte de los tipos de A, que llamaremos* a_1*, no puede ser* ¬*B*, luego al transformar tenemos que *cualquiera que sea* ¬*B no puede ser ese tipo de A que llamamos* a_1. Por ejemplo, si digo que *mi hermano Juan es fumador y bebedor*, es cierto que alguno fuma y bebe. Y de ahí se sigue que *cualquiera que no fume no puede ser de esa clase de fumadores que fuma y bebe a la que pertenece mi hermano Juan.*

Podemos ver la diferencia en el modo de concebir la cantidad del predicado de la tradición que sigue De Morgan y del diagrama de Marlo en la conversión de las negativas.

	CONVERSIÓN	
Proposición	De Morgan	Diagrama de Marlo
Ningún caballo es humano	Ningún caballo es ningún humano C)·(H se convierte en H)·(C	*Parte de los tipos de no humano son la totalidad de los caballos*. Es decir: *solo los no humanos pueden ser caballo*: $c_x \neg h = \neg hc_x$
Algún primate no es humano	La totalidad de los humanos no son una parte de los primates P (· (H se convierte en H) ·) P	Algunos no humanos son parte de los primates = Algunos no humanos son primates: $p \neg h = \neg hp$

TABLA 11. CONVERSIÓN DE NEGATIVAS EN DE MORGAN-MARLO.

Al convertir nosotros tomamos como sujeto de la proposición a los *no humanos*, lo cual nos permite percatarnos de que tales *no humanos* eran el predicado de la premisa original *Ningún caballo es hombre.* No caballo, no hombre, no británico, etc. son concebidos como términos infinitos o indefinidos para la tradición aristotélica, y tal vez esa es la causa del empeño en convertir las negativas empleando términos definidos, es decir, afirmativos

En el siglo XIX la conversión de la universal negativa *Ningún A es B* en solo ¬*A es B* se acepta a nivel teórico, pero se prefiere la contraposición *Ninguna B es A*, tal vez por los problemas tradicionales de la obversión, tal vez porque la última parecía una estructura más intuitiva, simple y sin ambigüedad.

> Attention has been already called to the general fact of the perplexing variety of symbolic forms which have been proposed from time to time by various writers, but probably few persons have any adequate conception of the extent to which this license of invention has been carried. I have therefore thought it well to put together into one list the principal forms, so far as I have observed them, in which one and the same proposition has 'thus been expressed 1 For this purpose the Universal Negative has been selected, as being about the simplest and least ambiguous of all forms of statement. This arrangement has not been drawn up with a mere wish to make a collection. (Venn, 1881, p. 405)

Pensemos que la formalización diagramática de *Ningún A es B* como *Solo ¬A es B*, se facilita si la igualamos primero con la proposición *Toda A es ¬B,* como hacía De Morgan, y sin embargo, parece inmediato el paso a *Ninguna B es A*.

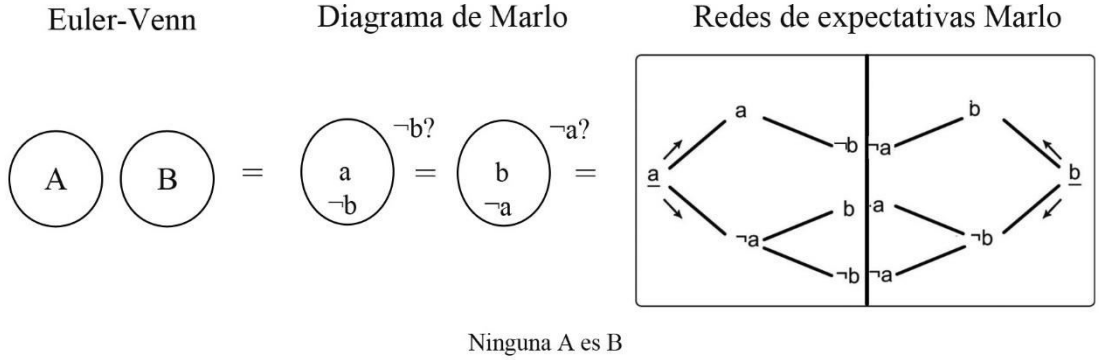


ILUSTRACIÓN 66. REPRESENTACIÓN DIAGRAMÁTICA DE *NINGUNA A ES B* EN EULER, DIAGRAMAS DE MARLO Y REDES DE EXPECTATIVAS.

Durante la celebración en Edimburgo de la *Conferencia Internacional Diagrams 2018*, el profesor Amirouche Moktefi, experto en diagramas lógicos, me señaló, en el transcurso de una conversación informal que tuvo lugar en presencia del doctor Castro Manzano, que mi formalización diagramática le parecía mucho menos clara que la de los diagramas de Euler-Venn. Lo interesante es que la proposición que utilizó para comparar ambos diagramas fue la universal negativa. Para el doctor Moktefi, era mucho más evidente en el diagrama de Euler-Venn que, partiendo de *Ningún A es B*, es cierto que *Ninguna B es A.* Señaló primero con el dedo la representación de la premisa y su transformación en el diagrama de Marlo insistiendo en que no se veía la igualdad de ambas y luego me señaló la representación en los diagramas tipo Euler para subrayar que gracias a la separación de los conjuntos de A y B, era evidente que ni A era B, ni B era A.

Amirouche Moktefi señalaba una ventaja clara de los diagramas tipo Euler: la facilidad con la que muestran las relaciones de exclusión que se dan entre la *totalidad de A* y la *totalidad de B*. Pero a cambio ocultan las posibles relaciones de identidad a partir de ¬*B*. Recordemos que para que haya inferencia lógica a partir de las relaciones de exclusión basta que uno de los extremos sea considerado universalmente, algo que dejan claro tanto Aristóteles en *Analíticos Primeros* al definir la segunda figura, como Boole (1854). Por eso pensamos que los diagramas de Venn ponen el acento en un aspecto que nos parece distractor cuando se trata de comprender cuál es la estructura lógica que subyace a la segunda figura del silogismo aristotélico, que no es otra que la estructura que subyace a toda inferencia por exclusión.

Por eso nosotros mantenemos la ventaja de complicar la representación de la universal negativa diagramáticamente convirtiéndola en *Toda A es ¬B*, ya reconocida por Aristóteles, y en su conversa *Solo ¬B es A*, ya reconocida como válida desde la escolástica y aceptada por todos los precursores de la lógica matemática. Este modo de representar nos permitirá percatarnos de que hay inferencias que se basan en lo que llamamos síntesis

de términos negativos, lo cual, a su vez, resulta fundamental para sostener nuestro enfoque de los conectores lógicos desde el espíritu del *Dictum de omni et nullo* de la lógica aristotélica.

La forma que nosotros preferimos en nuestros diagramas se corresponde, según la pista que encontramos en Gardner (1958) con la forma que ya utilizó Stanhope para formalizar la universal negativa en la obra no publicada *The Science of Reasoning clearly explained upon new principles* y que estaba datada en 1800 (Harley, 1879):

All A = Some not-B

No obstante, ya Ploucquet debería haber formalizado de este modo según Venn (1881). Lenzen (2008) explica que Ploucquet utilizaba los cuantificadores Q y O, que significan respectivamente Alguno (*Quidam*) y Todo (*Omni*), y que a partir de 1763 introdujo la convención de expresar la universalidad y la particularidad de un término no con cuantificadores, sino mediante el uso de mayúsculas y minúsculas; por otra parte, utilizaba el signo "–" para expresar la afirmación y ">" la negación. Así representaba las conversiones:

Conv l (Q(S) − Q(P)) ↔ (Q(P) − Q(S))

Conv 2 (O(S) > O(P)) ↔ (O(P) > O(S))

Conv 3 (O(S) − Q(P)) ↔ (Q(P) − O(S))

Conv 4 (Q(S) > O(P)) ↔ (O(P) > Q(S)).

Lo interesante es que Venn (1881) critica a Ploucquet que al cuantificar el predicado de la universal negativa no lo hubiera hecho convirtiéndola en *Toda S es parte de ¬P*: «his expression for 'No S is P' might have been S$\bar{p}$, viz. 'All S is some not-P', in better accordance with the familiar symbolic view at the present time, and as illustrated in group (II.) » (pp.416,417).

A pesar de ello, es posible que la conversión de *Ningún A es B* en *Parte de ¬B se asocia con la totalidad de A*, le pareciera a Venn una forma de perder la precisión que le otorgaba "la única forma de representación no ambigua de las proposiciones" (p.7).

Además, para Venn, igual que antes para Boole, lo esencial de la universal negativa *Ningún A es B* se expresa, lo mismo que en el resto de proposiciones, otorgando un valor 0 a la combinación que elimina:

xy = 0 No x is y

$\bar{x}y$ = 0 All x is y

Por otra parte, entender *Ningún A es B* como *Parte de ¬B es todo A*, no encajaba con el concepto de relaciones entre clases que Venn proponía, y era una expresión propia de la doctrina de la cuantificación del predicado, que él percibía como rival a la suya.

Si ahora observamos de nuevo la ilustración 66, en la que comparamos la representación diagramática de la proposición *Ningún A es B* en los diagramas de Euler-Venn y los de Marlo, podremos percatarnos de que los diagramas tipo Euler expresan de forma explícita que no existe intersección entre las clases *A* y *B*, quedando implícito que *A* debe ser *¬B* y *B* debe ser *¬A*. Por el contrario, lo explícito en los diagramas de Marlo es el hecho de que *todo A es ¬B* y *toda B es ¬A*.

El caso es que los diagramas de Euler focalizan en que *Toda A se excluye con toda B*, mientras que el diagrama de Marlo focaliza en que *Toda de A se asocia con parte de ¬B y/o Toda B se asocia con parte de ¬A,* empleando una representación que consideramos heredera de la doctrina de la cuantificación del predicado.

Venn (1881) presenta las distintas notaciones que ha encontrado para la Universal negativa, y dice de las Wundt, De Morgan, Ploucquet, Bentham y Hamilton que son convertibles. Las de Bentham y Hamilton se basan en la doctrina de la cuantificación del predicado.

DIAGRAMA DE MARLO

Al trabajar con las proposiciones negativas del tipo *Ningún A es B* o *Alguna A no es B* en el siglo XIX, el acento se ponía en la exclusión de las clases que se predica, más que en la asociación de una parte de $\neg B$ con parte o la totalidad de *A*.

> No Negative Judgment can hold good unless it cuts off the whole of the Predicate from the subject. Thus, if we say, " some men are not poets," the whole of the class of poets is cut off from these "some men." " No men are perfect," cuts off the whole of the class "perfect" from the class men. (Atwatek, 1867, p. 91)

Distintas notaciones de la proposición Ningún A es B		
Plouquect		S>P
Stanhope	1800	All A = Some not-B
De Morgan	1856	X) · (Y S.P
Wundt		S)(P
Bentham	1827	t S || t P
Hamilton (Hamilton, 1860, p. 277)	1859	
Boole (1978, p. 45)	1854	$y = v\,(1 - x)$[13] xy = 0[14]
Jevons (1864, p. 57)	1864	A=Ub or A= Ab
Lo que debería haber hecho Ploucquet según Venn	1881	S$\bar{p}$
Venn	1881	xy = 0
Venn	1894	a . b = 0

TABLA 12. FORMALIZACIÓN DE LA UNIVERSAL NEGATIVA EN EL S. XIX. ADAPTADO DE VENN, 1881.

La consideración del predicado no distribuido en proposiciones negativas que impulsaba la doctrina de Hamilton era considerado entonces posible, pero inútil e insignificante, incluso por algunos de los que respetaban a Hamilton.

> But undistributed negative predicates are so contrary to all normal thought and language, that, at best, they are useless, and need not claim our attention, The Judgments, " No men are some animals," and some men are not some animals," are awkward, insignificant, and worthless, being nearly, if not quite incapable of real contradiction. (Atwatek, 1867, p. 98)

> Though such a negative judgment is conceivable, it is useless; and feeling this, men ic their daily conversation, as well as logicians in their treatise, have proscribed it. — But the fruitlessness of a negative judgment where both terms are particular is even more manifest (Thomson W., 1871, p. 168)

[13] P 45 "Some men are not-wise." Putting, then, *y* for "men," *x* for "wise," i. e. "wise beings," and introducing *v* as the symbol of a class indefinite in all respects but this, that it contains some individuals of the class to whose expression it is prefixed

[14] P 61 No individuals belonging at once to the class represented by *x*, and the class represented by *y*, exist

5.1.9 Cuantificación del predicado y la aparición de la lógica matemática

El diagrama de Marlo trata de recrear los procesos de inferencia implicados en la lógica de primer orden, devolviendo centralidad a la ilación del término medio como base de todo razonamiento deductivo; y lo hace gracias a la representación de las proposiciones cuantificando el predicado (Címbora Acosta, 2017). Inicialmente, la idea de representar las posibilidades implícitas de una proposición nos sobrevino cuando, siendo estudiantes de psicología, tuvimos contacto a través de González Labra (2011) con la representación de premisas en la Teoría de los modelos mentales de (Johnson-Laird & Byrne, 1991). De la siguiente ilustración solo nos interesa destacar la similitud de la estructura de la proposición con la de nuestros modelos.

Todos los A son B (A)	Algunos A son B (I)	Ningún A es B (E)	Algunos A no son B (O)
[a] b	a b	[a]	a
[a] b	a b	[a]	a
…	…	[b]	a
		[b]	[b]
		…	[b]
			…

TABLA 13. REPRESENTACIÓN DE LOS MODELOS MENTALES PARA LOS CUATRO MODOS DEL SILOGISMO. TOMADO DE GONZÁLEZ LABRA, 2011, P. 252.

Combinando esta idea de hacer explícito lo implícito con los diagramas de Venn (Aznar, 2018g) podríamos tratar de prevenir en el aula la falacia de la afirmación del consecuente en la resolución de silogismos (Aznar, 2014a). El desarrollo posterior del diagrama, gracias la investigación realizada con alumnos de Bachillerato nos permitió representar y resolver del mismo modo las inferencias de la lógica de proposiciones y de clases. El desconocimiento de la historia de la lógica nos hizo pensar que nuestra forma de representar las premisas cuantificando el predicado era original, pues no habíamos tenido noticia de nada parecido ni durante nuestros años de formación en la Facultad de Filosofía, ni mientras preparábamos las oposiciones de profesor de Secundaria, ni como estudiantes de Psicología. Resultaba tan simple y evidente la mejora a la hora de explicar los procesos de inferencia que nos resultaba imposible concebir que algo así hubiera pasado desapercibido, hasta que el profesor Manuel Oriol, que en su libro *Lógica Aristotélica* niega que tal cuantificación sea aceptable (Oriol & Gambra, 2015), nos puso sobre la pista de quienes mucho antes que nosotros ya se habían percatado de las ventajas de cuantificar el predicado, influyendo, ni más ni menos, que en la aparición de la lógica matemática en el siglo XIX.

> It is true that common language generally makes an ellipsis of the quantification of the predicate in the proposition; but it does the like in respect of many other things which are unambiguous in thought, more especially in inference and argumentation, and yet in all such cases the postulate applies, that for all purposes of logic everything that is contained, however implicitly, in thought, shall have a determinate expression in language. We conclude, then, that in all propositions both the subject and the predicate ought to be quantified. (Ingleby, 1856, p. 17)

Aunque supera los objetivos de esta tesis desentrañar con rigor las causas que impidieron que se desarrollara antes la perspectiva de la cuantificación del predicado, del mismo modo que no podemos profundizar en el análisis de los motivos que limitaron su desarrollo dentro de la lógica matemática, sí nos vemos obligados a mencionar algunas cuestiones que podrían poner de manifiesto el hecho de que los diagramas de Marlo adoptan una perspectiva en la interpretación de la estructura de las proposiciones totalmente diferente a la mantenida por la tradición aristotélica y de la perspectiva de relaciones entre clases de la lógica matemática que soportan los diagramas de Venn, que consideraba falsa la afirmación de que el sistema de Boole se basara de alguna manera en la doctrina de la cuantificación del predicado. Exactamente, afirma Venn (1881) que tal idea: "is so astonishing that one is inclined to suspect some lurking confusion of meaning" (p.174). Sin embargo, y frente a la opinión de Venn, hoy sabemos de la importancia que tuvo, desde el punto de vista histórico, la doctrina de la cuantificación del predicado en el desarrollo de la lógica moderna y ella nos referiremos de nuevo en la historia comparada de los diagramas que exponemos más adelante.

5.2 Construcción de modelos proposicionales.

5.2.1 Isomorfismo de los modelos proposicionales con las redes de expectativas.

Un modelo proposicional es una figura geométrica en cuyo centro situamos una variable que ejerce las mismas funciones que un nodo *Or* en las redes de expectativas. Cada uno de los lados, secciones o compartimentos en los que dividamos la figura contendrá características que son potencialmente combinables unas con otras para formar los posibles objetos teóricos de la red. Así, podemos representar, en primer lugar, cualquier conjunto de objetos teóricos que comparten alguna característica en común en el sistema Alfa, sin necesidad de hacer explícitas todas las combinaciones de las variables.

Por ejemplo, ya vimos que en un sistema dicotómico formado con tres criterios tenemos ocho clases de objetos teóricos resultado de combinar *a*b*c*: *abc, ab¬c, a¬bc, a¬b¬c*, *¬abc, ¬ab¬c, ¬a¬bc, ¬a¬b¬c*. Estos ocho objetos pueden agruparse en subconjuntos tomando como referencia central o nodo *Or* cualquier variable o combinación de variables compartida por las distintas clases de objeto, siendo la mayor agrupación que puede realizarse la que se organiza en torno a una variable simple. Así los conjuntos de *a* y *¬a, que constituyen ramas distintas y excluyentes de la red cuando partimos del criterio a,* tiene cuatro objetos cada uno. Vemos en la siguiente ilustración que podemos eliminar en el paso dos la variable *a* de en cada lado del conjunto bajo el supuesto de que todo lo que está incluido en el conjunto de *a* es *a*. Y lo mismo para *¬a*. Posteriormente, podemos seleccionar parte de la información contenida en los conjuntos de *a* y *¬a* generando modelos proposicionales que podemos volver a recombinar mediante procesos de síntesis. La unión de los modelos excluyentes de *a* y *¬a* representa la totalidad de un sistema dicotómico.

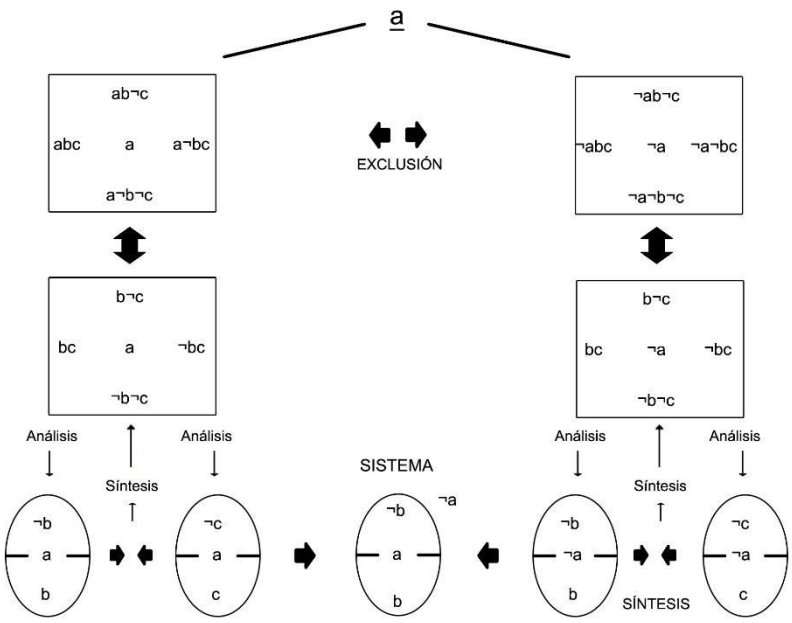


ILUSTRACIÓN 67. ISOMORFISMO DIAGRAMAS DE MARLO Y REDES DE EXPECTATIVAS.

Podemos apreciar en la siguiente ilustración que un modelo proposicional se constituye siempre en torno a un conjunto representado por una figura cerrada. Cada una de las áreas, lados o compartimentos que distinguimos dentro de la figura cerrada representa tipos de objetos del conjunto.

El exterior del conjunto representa al complementario del conjunto, de modo que interior y exterior expresan la totalidad del sistema. Por ejemplo, Si el conjunto fuera *cd*, el exterior sería ¬*(cd)*. Cuando las áreas del conjunto no contienen variables excluyentes de forma explícita, consideraremos que son combinables, aunque no es el caso en la siguiente ilustración, pues *ab* no es combinable con *a¬b*.

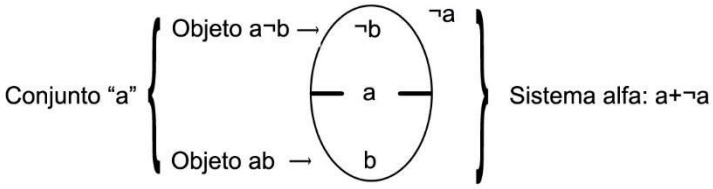


ILUSTRACIÓN 68. OBJETOS, CONJUNTOS Y SISTEMA EN EL MODELO PROPOSICIONAL.

Cuando más tarde conectemos unos modelos con otros tendremos en mente los mismos principios que empleamos al construir las redes de expectativas y que regulan las combinaciones que podemos, o no podemos, y que tenemos, o no tenemos, que establecer entre los elementos del conocimiento.

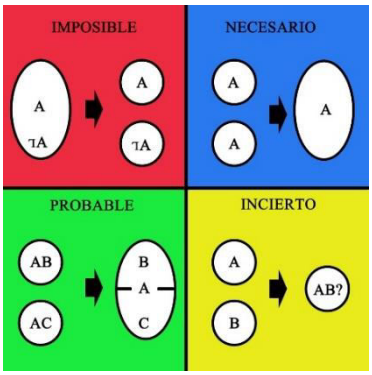


ILUSTRACIÓN 69. MODOS DE RELACIÓN EN EL DIAGRAMA.

5.2.2 Construcción de los modelos proposicionales en el diagrama de Marlo

Una vez que conocemos los antecedentes en los que fundamentamos teóricamente los aspectos más relevantes de nuestros diagramas podemos pasar a explicar cómo construirlos e interpretarlos. (Se pude consultar el vídeo 'Anexo 3: Cap. 7: Formalizar proposiciones', donde explciamos las nociones fundamentales de la interpretación de nuestros diagramas).

En el diagrama de Marlo representaremos gráficamente los procesos de razonamiento con la intención de mostrar al alumno cómo las conexiones lógicas que sirven de base a la inferencia dependen de la estructura de las proposiciones, la cual a su vez depende de las relaciones que establecemos entre los términos. Estas relaciones que permiten las conexiones se muestran en lo que hemos llamado a conciencia *modelos proposicionales*, sabedores de que estamos reduciendo la lógica de sentencias a los mismos principios que la lógica de clases.

5.2.3 La cuantificación del predicado en los diagramas de Marlo

Nuestros diagramas expresan en todas sus formas convertidas y transformadas las relaciones profundas de exclusión e inclusión que comunica la proposición para determinar qué conexiones están permitidas en el estado de un sistema de conocimiento, pero sin eliminar el matiz que las sentencias establecen al distinguir entre sujeto y predicado. Es cierto que cuando contemplamos la inferencia en las redes de expectativas, la propagación en paralelo de los valores de activación elimina cualquier diferencia que se pueda pensar entre sujeto y predicado y parece justificar la postura al respecto de la lógica matemática.

> Estas discrepancias con lo tradicional encuentran su justificación en que la lógica, hasta ahora, siempre se ha ajustado muy estrechamente al lenguaje y a la gramática. En especial, creo que la sustitución de los conceptos de *sujeto* y *predicado* por los de *argumento* y *función,* se acreditará con el tiempo. (Frege, Trad. 1972, p. 4)

Sin embargo, cuando consideramos las proposiciones verbales desde la perspectiva de los procesos en serie de la comunicación, nos vemos obligados permanentemente a reproducir algo semejante a la estructura sujeto-predicado. Pues incluso al resolver una ecuación matemática con dos premisas como (2x = 3y – 9 + x) y (2y + 3 = 3x +2) primero necesitamos reordenar los datos que se encuentran a la izquierda y a la derecha de las igualdades para facilitar las operaciones del pensamiento.

Para comprender cómo se construyen los diagramas de Marlo podemos comenzar por observar en la siguiente ilustración las relaciones elementales que puede comunicar una proposición en un sistema dicotómico considerando la cuantificación de las variables que ejercen como sujeto (S) y predicado (P): bicondicional, condicional, condicional inversa o exclusiva y conjunción. Debemos observar atentamente que, en estos modelos, cuando el sujeto se toma de forma universal, no dividimos el área de su conjunto, pero sí cuando lo tomamos de forma particular. Por otra parte, vemos que cuando el predicado se toma de forma universal, dicho predicado se agota dentro del modelo del sujeto, pero no cuando es particular, pues en este último caso lo debemos señalar también fuera del modelo del sujeto.

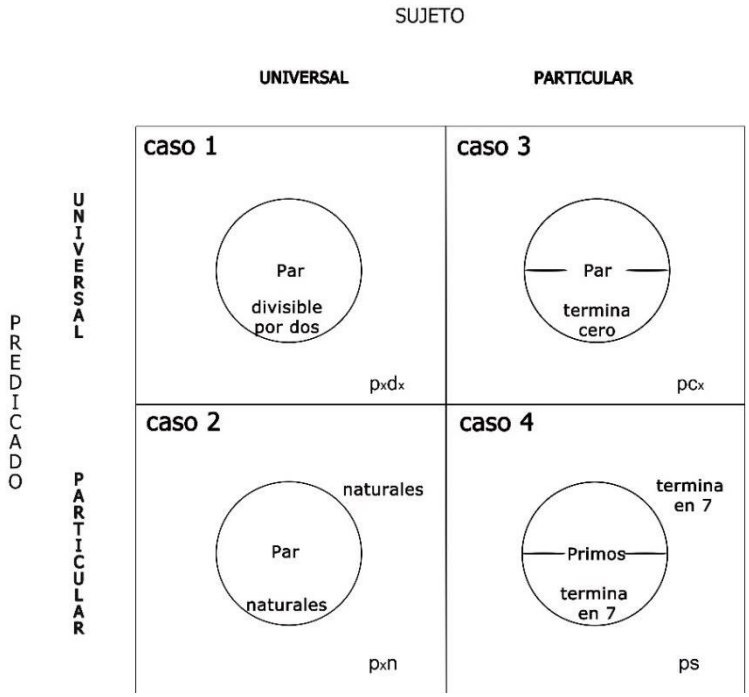


ILUSTRACIÓN 70. ESTRUCTURA ELEMENTAL DE LAS PROPOSICIONES EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

- En el caso uno, S y P son tomados ambos de forma universal, porque ni parte de los números pares puede no ser divisible por dos, ni parte de los números divisibles por dos puede concebirse al margen de los pares. Formalizamos como $p_x d_x$ acompañando ambas variables con el subíndice x que indica universalidad. Podemos leer que *Siempre que p, entonces d y siempre que d, entonces p*.

  Llamaremos a este caso Bicondicional: *padecer esquizofrenia (S) equivale a tener alucinaciones auditivas imperativas (P*). Al margen de la esquizofrenia no aceptamos la posibilidad de dichas alucinaciones, ni aceptamos dentro de la esquizofrenia la posibilidad de no padecerlas. Advertimos ya que todo lo que queda fuera del modelo de *S* es ¬*S*, de modo que interior y exterior del modelo equivalen en las redes a ramas excluyentes.

- En el caso dos, S es tomado de forma universal y P de forma particular porque aunque todos los números pares son naturales, no todos los naturales son pares. Precisamente, esos números naturales que no son pares se sitúan al margen del conjunto de los pares, es decir, en el espacio de los no pares. Formalizamos como $p_x n$ acompañando solo el sujeto del subíndice x de universalidad. Podemos leer que *Si algo es par, entonces es un número natural.*

Podemos llamar a este caso Condicional*: Si padeces esquizofrenia (S) tienes alucinaciones auditivas imperativas (P). Ahora podemos suponer alucinaciones auditivas imperativas sin padecer esquizofrenia, posibilidad representada por la P? al margen de S.*

- En el caso tres, solo el predicado es tomado de forma universal. Por eso vemos que terminar en cero está contenido totalmente en el conjunto de lo par, sin ser representado al margen de lo par. Sin embargo, una parte de los pares está indeterminada, en blanco, lo cual significa que no necesariamente es par. Formalizamos como pc_x acompañando solo el predicado con el subíndice x de universalidad. Podemos leer que *Solo entre los pares hay números terminados en cero.*

  Podemos referirnos a esta estructura ya conocida por la escolástica como Exclusiva (ver sección historia de los diagramas): *solo los que padecen esquizofrenia (S) escuchan voces imperativas (P)*. Explícitamente se niega que sea posible escuchar voces sin padecer esquizofrenia, por lo que no hay P al margen del sujeto. También se afirma que es seguro que parte de los que padecen esquizofrenia escuchan voces. Implícitamente se deja abierta la posibilidad de padecer esquizofrenia sin escuchar voces (?).

- En el caso cuatro, tanto S como P se toman de forma particular. El sujeto porque podemos concebir dentro del conjunto de los números primos un espacio para números que no terminen en siete. El predicado porque podemos concebir fuera del conjunto de los primos números que terminen en siete. Por eso formalizamos *ps* sin ninguna x*,* señalando que *Parte de p es s* y *Parte de s es p*.

  Podemos denominar esta estructura Conjunción: *Los pacientes con esquizofrenia que conozco (S) escuchan voces imperativas (P)*. Explícitamente expresa que tenemos base para afirmar que alguien con esquizofrenia probablemente escuchará voces y que, probablemente, alguien que escucha voces padecerá esquizofrenia. No obstante, no eliminamos otras posibilidades, siendo posible la existencia al mismo tiempo de objetos ab y objetos a¬b en el conjunto. De la consideración global de una conjunción surge la disyunción.

Nuestros diagramas muestran la inclusión o exclusión entre la totalidad o parte de los tipos que puede haber de una variable con la totalidad o parte de los tipos que puede haber de otras. Consideramos la identidad como asociación entre conceptos, en un sentido próximo al de ser predicado. Y consideramos la exclusión como asociación incompatible entre dos términos o variables basada, en último extremo, en el principio de no contradicción. En un sistema dicotómico *si A no es B, entonces A es ¬B*. En las redes mantienen relaciones de identidad todos los nodos situados en una misma vía y mantienen relaciones de exclusión todos los nodos situados en vías que parten de ramas incompatibles.

Hemos visto antes los problemas que tuvo Venn para justificar y expresar diagramáticamente las relaciones disyuntivas como estructuras fundamentales de la proposición. Sin embargo, en el diagrama de Marlo estas estructuras no suponen ningún problema, porque se expresan gráficamente cuantificando el predicado en términos de identidad entre la totalidad de ¬*A* y una parte de *B*, de modo que siempre que tengamos ¬*A* podremos inferir *B*. Y es obvio que no hacemos otra cosa que expresar la disyunción en su forma condicional, tal y como ya hacía Boecio (Correia, 2017).

$a \vee b$ $\qquad$ *toto* ¬*A* = *parte B* $\qquad$ $\neg A \rightarrow B$ $\qquad$ $\neg a_x b$

Podría discutirse si las relaciones bicondicionales *toto = toto* forman parte de la estructura elemental de las proposiciones, o bien pueden descomponerse en la combinación de las relaciones condicionales *toto A = parte B* y *toto B = parte de A*.

Si eliminamos la diferencia que, según Oriol y Gambra (2015), establecían los escolásticos entre la negación infinitante (no hombre) y la negación negante que expresa la división o separación de sujeto y predicado, desaparecen en un sistema dicotómico las diferencias entre las relaciones de exclusión y de inclusión. De hecho, en los diagramas de Marlo las proposiciones que indican exclusión pueden verse como idénticas a las que señalan identidad. Así ocurre si en lugar de formalizar "*En el modelo de A no tengo B*" (negación negante) formalizamos "*En el modelo de A tengo ¬B*" (negación infinitante). En tal caso simplificamos y reducimos la estructura diagramática a tres esquemas fundamentales, donde X e Y pueden estar en el lugar de cualquier variable (a, ¬a,

0.1a, 0.2a., … 1a). El subíndice x significa en la ilustración que viene a continuación que todos los tipos de una variable se ven afectados por la relación con la otra. La ausencia de subíndice en una variable significa que la relación solo afecta necesariamente a una parte de los tipos de dicha variable.

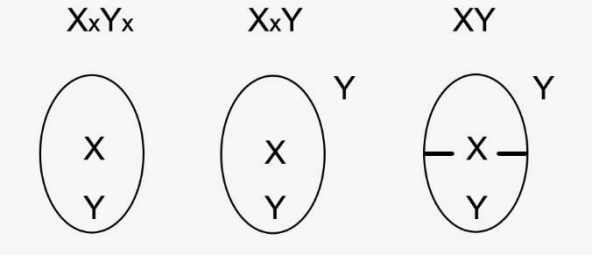


ILUSTRACIÓN 71. TRES ESQUEMAS ESENCIALES EN LA ESTRUCTURA DE LA PROPOSICIÓN

5.2.4 Modelos proposicionales considerando la cualidad de la cópula

Una vez que hemos llevado los modelos proposicionales más allá de las cuatro proposiciones clásicas A, E, I, O, podemos centrarnos en mostrar la estructura de los modelos proposicionales recogiendo los matices del lenguaje que permiten focalizar el pensamiento sobre una variable u otra en base a sus funciones como sujeto y predicado de las sentencias. Y si a esto añadimos la consideración de si la cópula afirma o niega la relación, entonces tenemos algo muy parecido a las ocho proposiciones básicas de Hamilton.

Tal vez estas proposiciones serían exactamente lo mismo si Hamilton se hubiera percatado de que el predicado que debe ser considerado particular o universalmente en las proposiciones exclusivas no es *B* sino ¬*B*, como ya explicamos antes.

La siguiente ilustración muestra las proposiciones elementales en base a la cantidad de sujeto y predicado y de sus relaciones de inclusión y exclusión. Se señala la correspondencia con las proposiciones clásicas del silogismo aristotélico: universal afirmativa A, universal negativa E, particular afirmativa I y particular negativa O, que en todos los casos contienen un predicado particular.

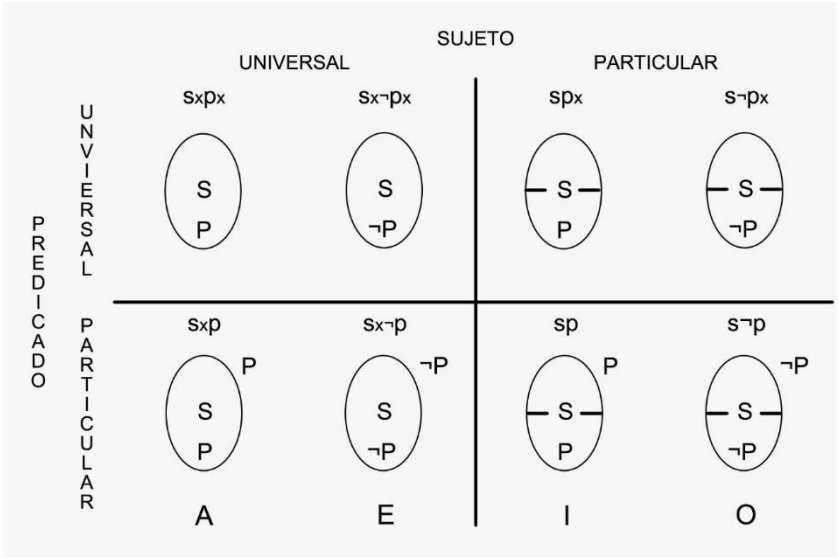


ILUSTRACIÓN 72. ESTRUCTURA DE LOS MODELOS CONSIDERANDO LA CUALIDAD DE LA CÓPULA.

Si observamos en los ocho modelos proposicionales cuándo el modelo del sujeto S se muestra universal y cuándo se muestra partido o particular, será fácil decidir al formalizar en qué casos añadirle el subíndice x. Y lo mismo si nos fijamos en el predicado.

Al considerar la validez de los ejemplos con los que ilustramos los casos, debemos situarnos en un sistema dicotómico (ver discusión en `historia de los diagramas´ de la equivalencia entre no ser *A* y ser ¬*A*). En estas ocho proposiciones tanto *p* como ¬*p* pueden estar en lugar de S y/o P.

En el segundo ejemplo de cada uno de los casos que exponemos a continuación (tabla 14), sustituimos por términos negativos el sujeto y el predicado de los modelos de la ilustración anterior (72).

Caso	Formal.	Ejemplo con variables positivas	Ejemplo con términos negativos
1	$s_x p_x$	Ser burro es lo mismo que ser asno	Para mí: Ser no creyente es lo mismo que ser no practicante
2	$s_x \neg p_x$	Ser par es lo mismo que no ser impar	En lógica matemática: no verdadero es igual que no ser no falso.
3	sp_x	Solo entre los griegos hay atenienses	Solo entre los que no se rinden hay no fracasados.
4	$s\neg p_x$	Solo en los que siguen conscientes podríamos descartar la presencia del patógeno.	Solo algunos no absentistas no son no aptos.
5	$s_x p$	Todos los humanos son mortales.	Todos los no fumadores son no bebedores
6	$s_x \neg p$	Ningún humano es inmortal.	Ningún no repetidor es no bebedor.
7	sp	Parte de los filósofos son atenienses	Algún no iniciado es no fumador.
8	$s\neg p$	Algunos filósofos no son atenienses	Algunos que no son adictos no son no bebedores.

TABLA 14. EJEMPLOS DE PROPOSICIONES CONSIDERANDO LA CUALIDAD DE LA CÓPULA, PRIMERO CON TÉRMINOS POSITIVOS Y LUEGO CON NEGATIVOS.

Una proposición que niega la cópula no es lo mismo que una proposición con términos negativos, de modo que la proposición tengo $\neg A$ y $\neg B$ es, mantiene García (2005), afirmativa. Por ello podemos considerar los modelos proposicionales no desde la cualidad de la cópula sino de los términos o variables.

5.2.5 Modelos proposicionales considerando la cualidad de las variables o términos asociados

El parentesco de nuestros modelos proposicionales con la notación de Hamilton y De Morgan nos permite obtener dieciséis modelos proposicionales teniendo en cuenta la cualidad de las variables que ejercen como sujeto y predicado.

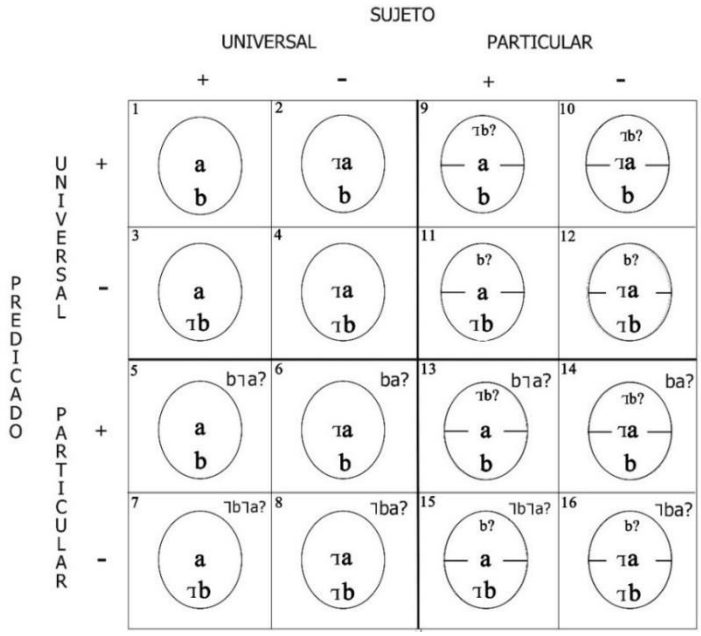


ILUSTRACIÓN 73. DIECISÉIS MODELOS PROPOSICIONALES SEGÚN LA CUALIDAD Y LA CANTIDAD DE SUJETO Y PREDICADO

DIAGRAMA DE MARLO

caso	Formalización teórica	Ejemplo de proposiciones contenidas en libros de texto	Formalización fáctica	Ejemplo de proposiciones emitidas o implícitas en una sala de urgencias
1	$a_x b_x$	Un delirio equivale a una creencia irracional incuestionable. a: ser delirio. b: ser una creencia irracional incuestionable.	$a_x b_x \wedge B$	Este hombre asegura por completo que le leen el pensamiento. Hay que ingresarle por delirios.
2	$\neg a_x b_x$	En relación con lo conocido: Si y solo si algo no es consciente, entonces está reprimido. a: ser consciente. b: ser reprimido.	$\neg a_x \neg b_x \wedge \neg$A	Ha sido violada y dice que no es consciente de lo que ha pasado. Está reprimiendo. Pregúntale ya por su entorno próximo.
3	$a_x \neg b_x$	Si y solo si un contenido de la memoria se puede narrar, no es un contenido inconsciente. a: ser narrado. b: ser inconsciente.	$a_x \neg b_x \wedge A$	Descartamos que lo sucedido se haya quedado a nivel inconsciente porque lo está contando, luego no hay amnesia por trauma.
4	$\neg a_x \neg b_x$	Si y solo si un contenido de la memoria no se puede narrar, no es un contenido consciente. a: ser narrado. b: ser consciente.	$\neg a_x \neg b_x \wedge \neg A$	No ha contado nada. Tenemos que hipnotizarlo para que sea consciente de lo que ha pasado.
5	$a_x b$	Los pensamientos obsesivos se asocian con malestar. a: tener pensamientos obsesivos. b: tener malestar.	$a_x b \wedge A$	Tome esta pastilla ahora, le aliviará ante esas idas obsesivas.
6	$\neg a_x b$	En relación con los pensamientos que se repiten: Si no es obsesivo, es sobrevalorado. a: ser obsesivo. b: ser sobrevalorado.	$\neg a_x b \wedge \neg$A	Ese pensamiento repetitivo no es obsesivo, pero sí sobrevalora usted el problema que suponen esas fotos en internet.
7	$a_x \neg b$	Nadie con anorexia alcanza su peso mínimo. a: tener anorexia. b: alcanzar el peso mínimo.	$a_x \neg b \wedge$ B	Su hija no tiene anorexia porque su índice de masa corporal es adecuado, alcanza el peso mínimo.
8	$\neg a_x \neg b$	Si el paciente no tiene ansiedad, debemos descartar TOC. a: tener ansiedad. b: padecer TOC.	$\neg a_x \neg b \wedge \neg$A	No voy a poner en el informe que tiene usted un trastorno obsesivo compulsivo porque no tiene usted ansiedad.
9	$a b_x$	Solo pacientes con preocupación excesiva pueden tener TAG. a: tener preocupación excesiva. b: padecer TAG.	$a b_x \wedge \neg$A	No creo que sea un Trastorno de Ansiedad Generalizada porque no tiene usted ninguna preocupación exagerada. Mejor le hacemos un electro.

caso	Formalización teórica	Ejemplo de proposiciones contenidas en libros de texto	Formalización fáctica	Ejemplo de proposiciones emitidas o implícitas en una sala de urgencias
10	$\neg ab_x$	Solo entre los que no alcanzan su peso mínimo hay anorexia. a: tener anorexia. b: Alcanzar el peso mínimo.	$\neg ab_x \wedge \neg A$	Es cierto que su hija no alcanza el peso mínimo, pero no necesariamente padece anorexia. En todo caso es probable que sí la tenga y haya que ingresarla.
11	$a\neg b_x$	En relación a la depresión: Solo si tiene motivos para estar triste podemos descartar una depresión endógena. a: tener motivos reales de tristeza. b: padecer depresión endógena.	$a\neg b_x \wedge A$	A pesar de que su mujer se ha marchado de casa, no podemos descartar que su depresión se deba a motivos orgánicos. Le voy a hacer un análisis de sangre, aunque lo más probables es que no se trate de una depresión endógena.
12	$\neg a\neg b_x$	Solo en pacientes sin antecedentes familiares de su enfermedad podemos descartar un origen genético. a: tener antecedentes familiares. b: origen genético.	$\neg a\neg b_x \wedge A$	¿Dice que su abuelo padeció la enfermedad? Entonces será mejor hacerle unas pruebas de ADN y ya veremos…
13	ab $a_x\%b$ $b_x\%a$	Si se tiene doble personalidad, la estadística dice que es probable que se padecieran abusos sexuales porque existen casos así. a: padecer de doble personalidad. b: haber sufrido abusos sexuales.	AB	- Los pacientes con doble personalidad de esta ala han sufrido abusos sexuales. Puede obtener datos para su investigación con ellos. Ahí los tiene. - Disculpe, ¿Hay otros con doble personalidad sin abusos o con abusos sin doble personalidad? Me interesan todos.
14	¬ab $\neg a_x\%b$ $b_x\%\neg a$	Si alguien no tiene habilidades sociales, entonces es probable que no tome la iniciativa en la comunicación. a: tener habilidades sociales. b: tomar la iniciativa en la comunicación.	¬A	Veo que no tiene usted habilidades sociales. ¿Quiere que lo pregunte yo a la doctora si tendrá su informe terminado hoy o se lo preguntará usted mismo?
15	a¬b $a_x\%\neg b$ $\neg b_x\%a$	Hay algunas personas con depresión que sin embargo no están tristes. a: padecer depresión. b: sentir tristeza	A¬B	Tiene usted suficientes síntomas para diagnosticarle depresión aunque no sienta tristeza. Le voy a dar la baja.
			¬B	No está triste, pero aún así es probable que esa ira se deba a una depresión.
16	¬a¬b $\neg a_x\%\neg b$ $\neg b_x\%\neg a$	Si un paciente no tiene diagnosticada somnolencia diurna, es probable que no tenga apnea del sueño. a: padecer somnolencia diurna. b: padecer apnea	¬A	Es cierto que no tiene usted somnolencia diurna, pero es pronto para descartar la apnea.

TABLA 15. EJEMPLOS DE LAS DIECISÉIS PROPOSICIONES BÁSICAS CONSIDERANDO LA CUALIDAD DE LAS VARIABLES.

DIAGRAMA DE MARLO

Como ya sabemos, por lo que dijimos en las redes de expectativas y por lo que acabamos de ver, todas y cada una de las proposiciones pueden expresarse con intención teórica afirmando la conjunción de variables al margen del tiempo y pueden afirmarse de forma fáctica para influir durante una situación en curso en la que se requiere tener en cuenta la presencia o ausencia actual de los objetos o tipos de objeto mencionados. Por ello, mostramos en la tabla 15 ejemplos de los dieciséis modelos proposicionales diferenciando el caso en el que claramente serían proposiciones teóricas del caso en el que estarían hablando de lo que se tiene delante aquí y ahora. Hemos obtenido dieciséis estructuras considerando la cualidad de sujeto y predicado además de su cantidad. Si ahora distinguiéramos el caso en que la cópula niega la relación del caso en el que la afirma, obtendríamos treinta y dos proposiciones igual que De Morgan.

> De Morgan also quantified the predicate in a system even more elaborate than Hamilton's. By allowing subject and predicate terms to have both positive and negative forms, he arrived at thirty-two basic statements, though many of them are merely different ways of saying the same thing. (Gardner, 1958, p. 37).

Así podríamos obtener una proposición del tipo *Ningún <u>no fumador</u> es <u>no bebedor</u>* que podríamos traducir a *Todo <u>no fumador</u> es no <u>no bebedor</u>*, la cual traducimos, si aceptamos que en un sistema dicotómico no ser no bebedor es lo mismo que ser bebedor, como *Ningún no fumador bebe,* $\neg f_x$b, una estructura que ya está presente entre las dieciséis vistas anteriormente.

Una vez que comprendemos los fundamentos más básicos de la representación de proposiciones en el diagrama de Marlo, y antes de seguir avanzando, podemos familiarizarnos con la interpretación de modelos complejos estudiando la siguiente ilustración.

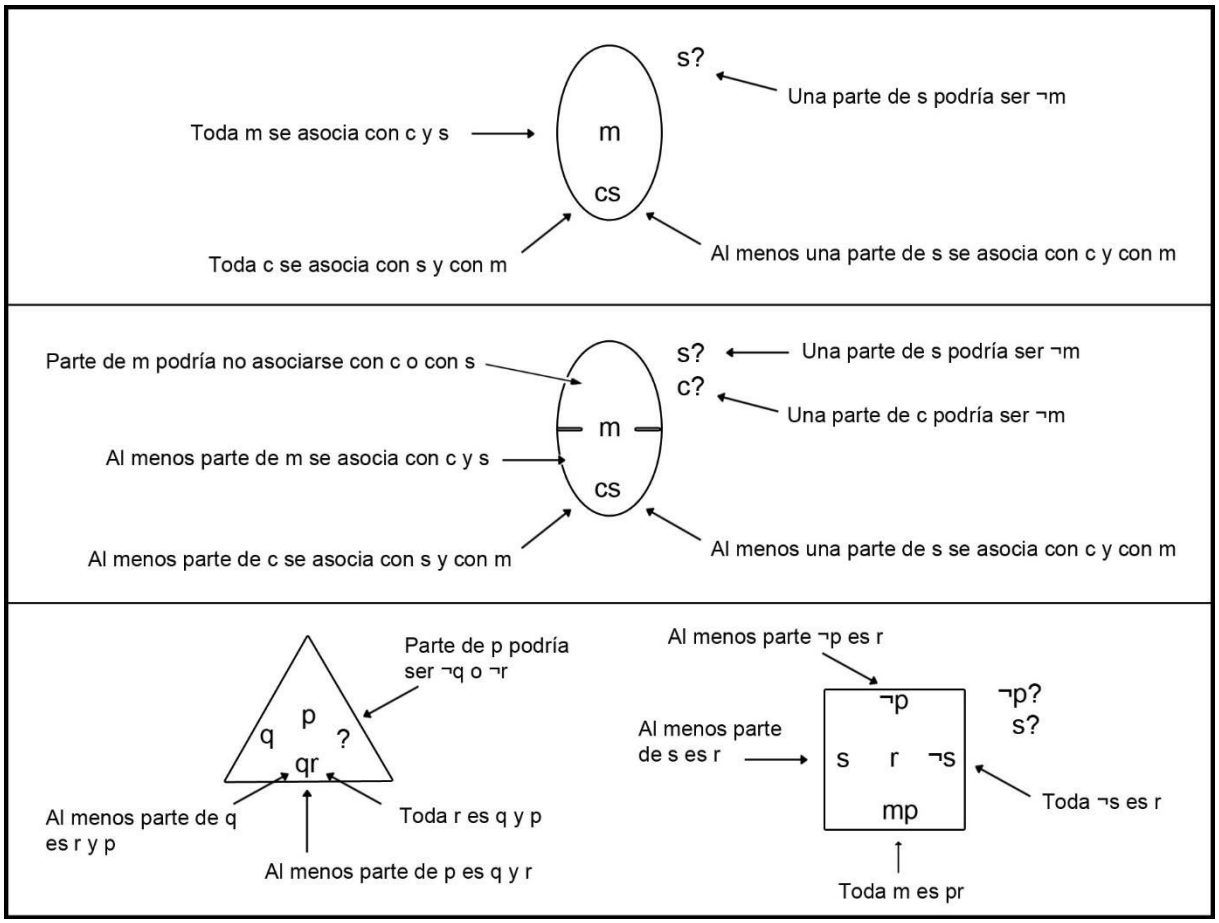


ILUSTRACIÓN 74. EJEMPLOS DE INTERPRETACIÓN DE MODELOS COMPLEJOS.

5.2.6 Afirmación teórica o fáctica en los diagramas de Marlo

Ya hemos insistido en las redes en que una proposición puede ser codificada y/o emitida con carácter teórico cuando es deshistorizada, esto es, cuando se elimina de ella el componente temporal y puede ser comunicada sin desencadenar esquemas de acción inoportunamente. Por ejemplo, si digo en el aula que *Algunas serpientes son muy venenosas*, no pretendo asustar a mis alumnos, sino que tomen nota para que no intenten coger una cuando la vean en el campo. Si digo lo mismo mientras mi hermano pequeño sujeta una en la piscina del chalet, seguramente la soltará sobresaltado, consciente de que es probable que esa serpiente en concreto que agarra es venenosa. La diferencia entre lo que teóricamente existe y lo que hay que tener en cuenta aquí y ahora no siempre es fácil de apreciar. Sin embargo, no nos parece lo mismo ser verdadero en un sentido y en otro. Así pues, los elementos de una conjunción teórica los escribiremos en minúscula. Los elementos de una conjunción fáctica en mayúscula. Normalmente las proposiciones universales parecen tener carácter teórico y de hecho, siempre escribiremos el subíndice x en expresiones en minúscula.

Ser teórico o fáctico es independiente de ser universal o particular. Si entro en clase de mi compañera de Historia cuando está en la sala de profesores y le digo *Todos mis alumnos copian*, no tendría sentido que ella les suspendiera por copiar. Pero si entrara en su aula cuando está realizando un examen algo distraída y le dijera que *Todos mis alumnos están copiando*, en este caso sí sería justo suspender a todos mis alumnos. Y lo mismo habría ocurrido si, en vez de con proposiciones universales, ponemos el mismo ejemplo con proposiciones particulares. La ilustración muestra los modelos proposicionales de tres casos relacionados con el ejemplo.

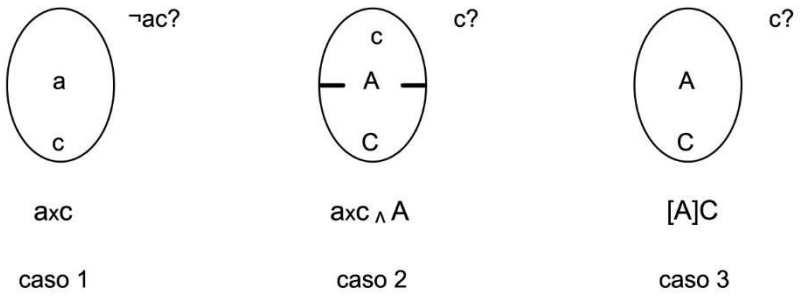


ILUSTRACIÓN 75. MODELOS TEÓRICOS Y FÁCTICOS DE PROPOSICIONES UNIVERSALES.

- Caso uno. *Todos los alumnos copian*. Es emitida con carácter atemporal, es teórica y universal. Es una advertencia para cuando llegue el momento.
- Caso dos. Todos los alumnos copian y de hecho algunos están copiando ahora. Emitido con carácter fáctico. Se pretende que actúe ya. Formalizamos como "$a_x c \wedge$ A →AC".
- Caso tres. Todos los alumnos están copiando. Emitido con carácter fáctico. Se pretende que la profesora actúe ya, si es que le importa que copien. Si todos los alumnos están copiando ahora, entonces está copiando ahora cada uno de los alumnos, desde el primero al último (63).

$$[\mathrm{A}]\mathrm{C} \rightarrow A_1C, A_2C, A_3C \ldots A_nC \tag{63}$$

5.2.7 Conjunciones verificadas y posibles

Además de informar acerca de la universalidad o no de la relación entre dos variables, un modelo proposicional puede señalar el grado de certeza que acompaña a las distintas conjunciones que explícita e implícitamente son consideradas en una sentencia. Por ello vemos en los modelos proposicionales asociaciones de variables interrogadas y sin interrogación.

Supongamos que un niño descubre por primera vez que el número diez, del que ya sabe que es par, es también divisible por cinco. En ese momento sabe seguro que parte de los números pares es divisible por cinco y puede escribir *pd*, significando *p* ser par *y d* ser divisible por cinco. La conjunción *pd* aparece en el modelo como teoría confirmada por la evidencia, pero solo en una parte del conjunto de los pares*: Algunos pares son divisibles por cinco*. Sin embargo, no puede afirmar ni negar que el resto de los pares (*p*) sea divisible por cinco (*d*). En este

momento hay una parte de los pares desconocida e incierta para él respecto a su divisibilidad por cinco. Por eso mantiene la incertidumbre en el compartimento superior del modelo de los pares acerca de si son o no son divisibles por cinco. Eso es lo que significamos dejando en blanco o indeterminada un área del modelo de lo par. También podemos escribir en ella la expresión *`d?´* sabiendo que en el nivel de conjeturas, si es posible *d*, entonces es igualmente posible ¬*d* (61).

$$d? = \neg d? \quad (61)$$

Por otra parte, en la mente del niño es posible aún suponer que al margen de los números pares haya números divisibles por cinco. Por eso se expresa en el margen del círculo de lo par la variable *d?*. Las variables o conjunciones de variables con interrogación significan posibilidades no confirmadas ni refutadas y ya han sido expresadas en las redes de expectativas en nodos inciertos o amarillos con un valor de verdad lógica igual a cero. Estas variables inciertas existencialmente han sido definidas también por contener matemáticamente un número incierto de individuos (n?). No obstante, y a pesar de que estos nodos o conjunciones no pasan de ser meramente posibles, debemos contar con ellas para limitar el alcance de nuestras conclusiones. Así el niño puede concluir que si parte de los números pares es divisible por cinco, es seguro que algunos números divisibles por cinco (*d*) son pares (*p*). Pero no puede concluir que todos los números divisibles por cinco sean pares porque estaba implícita en la premisa inicial la posible existencia de números divisibles por cinco que no son pares.

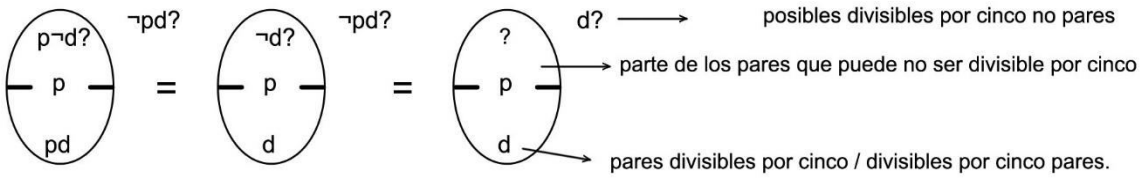


ILUSTRACIÓN 76. PROCESO DE SIMPLIFICACIÓN DEL MODELO PARTICULAR-PARTICULAR "ALGUNOS PARES SON DIVISIBLES POR CINCO".

Es decir, que la sentencia comunica explícitamente relaciones confirmadas, pero también deja implícitamente abierta o no la posibilidad de otras conjunciones. Las posibilidades inciertas o indeterminadas pueden aparecer como compartimento en blanco o con una interrogación. Debemos fijarnos en que el significado del área en blanco o interrogada es contextual. Así, en el modelo de la derecha de *P*, lo único que puede significar la interrogación es algo distinto de *d*, luego tiene que estar en lugar de ¬*d*. Por otra parte, la d? exterior solo podría ser ¬*p*, pues está fuera del modelo de *p*.

Es importante señalar también que al formalizar los modelos proposicionales adoptamos una actitud investigadora según la cual, afirmar una parte no significa negar la otra. Es decir, si digo que *Algunos de mis hermanos son deportistas,* la otra parte de mis hermanos queda incierta, indeterminada, a pesar de que en el lenguaje natural si afirmamos que unos sí implícitamente damos a entender que otros no.

Veamos otro ejemplo. Si un niño escucha que todos los homínidos son primates, explícitamente genera un modelo universal para los homínidos, pero debería dejar abierta la posibilidad de que existan primates no homínidos. Si no lo hiciera, caería en la falacia de afirmar que también todos los primates son homínidos.

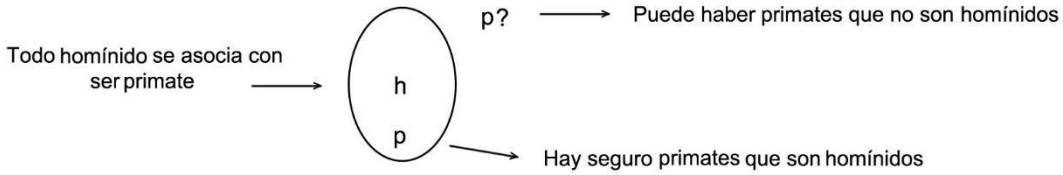


ILUSTRACIÓN 77. EXPLICACIÓN DE UN MODELO CONDICIONAL EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

Es evidente que el estatus epistemológico de una asociación verificada y una posible no es el mismo, pero lo interesante es remarcar que tampoco lo es su estatus lógico, pues ya vimos que al añadir una nueva premisa al

cálculo se puede eliminar lo incierto sin contradicción formal, pero no así lo afirmado como necesario. En *Sobre la Interpretación* 9, 19a5-25 leemos:

> […] En general, en las cosas que no siempre se realizan existen la posibilidad de que sean y de que no sean, de modo que también puede que lleguen o que no lleguen a ser […] Así, pues, es necesario que lo que es, cuando es, sea, y que lo que no es, cuando no es, no sea; sin embargo, no es necesario ni que todo lo que es sea ni que todo lo que no es no sea. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 54)

La siguiente ilustración nos muestra el proceso por el que lo imposible elimina lo meramente posible sin incurrir en contradicción. Supongamos que un niño escucha que *los sapiens de las cavernas eran cromañones*. Entonces construye un modelo en el que *s* (sapiens de las cavernas) es universal y *c* particular, incluyendo c? al margen de *s: c¬s?* (ver ilustración). Luego le dicen que *todos los cromañones son sapiens de las cavernas*. Esta segunda premisa le informa de que es imposible tener *c* no asociada con *s:* ∄(*c¬s*). Entonces, lo imposible se impondrá a lo posible, de manera que eliminará la posibilidad de c al margen de s construyendo un modelo bicondicional.

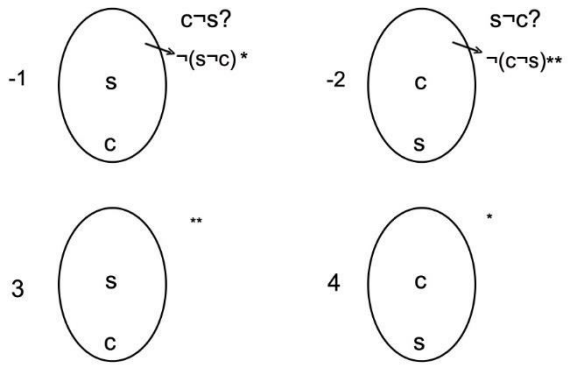


ILUSTRACIÓN 78. LO IMPOSIBLE ELIMINA LO MERAMENTE POSIBLE.

Vemos en la ilustración que al construir el primer modelo universal de sapiens de las cavernas está afirmando implícitamente que es imposible que alguna de sus partes contenga ¬*c* (*). Esa restricción no solemos hacerla explícita en el aula, pero debería aparecer en ejercicios complejos donde no haya que perderla de vista. Lo mismo ocurre al construir el modelo universal de cromañón, pues implícitamente decimos que es imposible situar dentro de él nada que no sea *s* (**). Cuando el niño reconsidere el modelo del primer paso desde la restricción impuesta en el paso dos (**) tendrá que eliminar la posibilidad de c al margen de *s*, lo que nos dará el modelo bicondicional del paso tres. Y cuando, tras aplicar los procesos de síntesis que explicaremos más tarde, reconsidere el modelo de la premisa dos aplicando la restricción contenida en la primera premisa (*) obtendrá otro modelo bicondicional, pero ahora desde la perspectiva de *c*. En tres y cuatro se puede leer que *Sapiens de las cavernas es lo mismo que cromañón* o que *si y solo si es cromañón, entonces es sapiens de las cavernas.*

5.2.8 Información explícita e implícita

Si observamos el modelo bicondicional o universal-universal que afirma que C es lo mismo que *S* en el paso cuatro de la ilustración anterior nos daremos cuenta de que solo nos informa explícitamente de las relaciones entre las variables c y s, que son las variables que mencionamos en la proposición inicial y que aparecen en el diagrama, aparentemente sin decir nada sobre las variables ¬c y ¬s, las cuales, sin embargo, están implícitamente en los modelos

Recordemos que en un sistema dicotómico hay cuatro posibles combinaciones de los crirterios c*s: *cs*, *c¬s*, *¬cs* y *¬c¬s*.

- *cs* es afirmada explícitamente en el núcleo del modelo.

- *c*¬*s* es imposible porque en el modelo solo aparece una *c*, la cual está universalmente unida a s, de modo que es imposible incluir una ¬*s* en su conjunto. Si hubiera alguna parte indeterminada en el modelo de *c*, sí sería posible *c*¬*s*, pero la totalidad de *c* está determinada ya como *s*.
- ¬*cs* es imposible en base al modelo, porque solo aparece una *s* y está en el modelo de *c*. Es decir, no es posible concebir *s*¬*c* sin añadir una *s* de forma ilegítima al modelo.
- ¬*s*¬*c* es una posibilidad que no es incompatible con lo afirmado explícitamente en el modelo, aunque solo puede ser concebida al margen de c, donde no hay nada que le impida subsistir como conjetura.

5.2.9 Notación con y sin omisión

Cuando más adelante veamos y expliquemos las proposiciones secundarias, mostraremos detalladamente cómo la información contenida explícita e implícitamente en los modelos proposicionales que obtenemos como conclusión del cálculo lógico se corresponde perfectamente con la información que podemos obtener de una tabla de verdad. Como ya sabemos, las tablas de verdad informan de la compatibilidad de todas y cada una de las combinaciones de variables posibles *a priori* con las restricciones impuestas en las premisas.

Podemos optar por emplear una notación con o sin omisiones para señalar las combinaciones que permanecen en juego, aunque solo recomendamos la notación sin omisiones en problemas con proposiciones complejas.

En la notación sin omisiones señalaremos al margen del núcleo de los modelos todas las combinaciones que deben ser tenidas en cuenta y que han sido prohibidas. Por ejemplo, supongamos que afirmo que *Siempre que tengo c y d, entonces tengo h y j*. En el núcleo del modelo, ejerciendo como sujeto situamos *cd* y ejerciendo de predicado *hp*. Al margen del modelo tendremos todas las combinaciones que surgen de asociar lo que no es *cd* con *h*, ¬*h*, *p*, ¬*p*. Como h y ¬h forman h y p y ¬*p* forman *p*, entonces podemos simplificar escribiendo ¬(cd)*h**p.

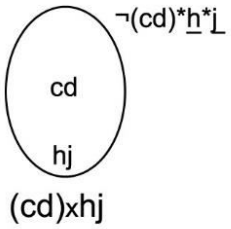


ILUSTRACIÓN 79. NOTACIÓN SIN OMISIÓN DE VARIABLES AL MARGEN.

a*b	ab,a¬b,¬ab,¬a¬b
a*b	ab, ¬ab
a*b	ab, a¬b
a*b	ab

TABLA 16. NOTACIÓN EXHAUSTIVA.

Al trabajar con modelos simples o cuando no necesitemos ir más allá de las conclusiones necesarias, podemos trabajar empleando la notación con omisiones, que es la que empleamos en el aula. Así, para conceder que son posibles las combinaciones de ¬h bastará con omitir cualquier determinación explícita de ¬*h* en los modelos, siguiendo la regla "El que calla otorga".

Podemos convenir algunas reglas sobre la interpretación de los modelos para dejar claro que todas las combinaciones posibles están contenidas de forma exhaustiva sin necesidad de hacerlas explícitas.

- Una variable o conjunción de variables puede estar determinada o indeterminada.

- Una variable o conjunción de variables pueden determinarse de forma particular o universal.
- Una variable o conjunción de variables pueden ejercer de sujeto o predicado.
- Una variable que ejerce como como sujeto del modelo está determinada universalmente si su modelo no está dividido. Se determina de forma particular cuando el modelo está dividido, pues si solo parte del conjunto *a* se establece necesariamente asociado con *b*, la otra parte del conjunto de *a* queda incierta, siendo posible suponer $a\neg b$.
- Cuando el sujeto de un modelo proposicional es una conjunción de variables *ab*, ninguna de tales variables se agota en dicha conjunción, pues se determina a la conjunción y no a ninguna de las variables por separado. Luego al margen del modelo de *ab* debemos señalar que contamos con todo lo que no es *ab*, es decir, con las combinaciones de $a\neg b$, $\neg ab$ y $\neg a\neg b$. Si utilizamos la notación sin omisión escribiremos al margen [¬(ab)*variables no agotadas en el predicado del modelo].
- Para expresar que la combinación de variables *ab* que ejerce de sujeto se agota dentro del modelo tendríamos que escribir al margen $\nexists a$, $\nexists b$ o bien $\nexists[a, b]$.
- Cuando tenemos una conjunción de variables *cd* predicada en el modelo de *b*, no señalar una de dichas variables *c* o *d* fuera de *b* significará que es imposible concebirla asociada con $\neg b$.
- Una variable que solo aparece en el modelo interrogada sigue indeterminada.
- Una variable solo es determinada cuando se la nombra explícitamente asociada a otra. Es decir, que una variable no nombrada explícitamente permanece incierta, posible, excepto por el hecho de estar prohibida en las áreas ya determinadas por cualquiera de sus complementarias. Así, *a* no puede incluirse en el área de $\neg a$ en un sistema dicotómico, pero tampoco en un sistema tricotómico puede incluirse *0a* en áreas ocupadas por *0,5a* o *1a*.
- Al escribir por primera vez una variable no interrogada como predicado, esta queda determinada de forma universal o particular en el área en el que se inscribe. Está determinada de forma universal si no la señalamos al margen de dicha área y está determinada de forma particular si la señalamos al margen. Es importante no olvidar señalar las posibilidades al margen, porque el hecho de no hacerlo significa de forma irreversible que son imposibles al margen. Luego una posibilidad no señalada al margen de un compartimento no puede ser posteriormente incluida fuera de dicho compartimento sin contradecir la decisión de no haberla incluido inicialmente.
- Una posibilidad señalada al margen como meramente posible puede ser eliminada posteriormente sin contradicción.
- Si el núcleo del modelo es particular, están implícitamente contenidas como conjeturas en su área indeterminada todas las combinaciones del sujeto complementarias a las ya determinadas. Así, si en un modelo triangular del conjunto *a* un lado contiene *b*, otro *c* y otro una interrogación, es posible concebir en la interrogación combinaciones $\neg bc$, $c\neg b$ y $\neg b\neg c$.
- El exterior del núcleo de un modelo representa siempre el conjunto de combinaciones complementarias del conjunto que forma el núcleo del diagrama. Es decir, que el margen del conjunto *a* tenemos siempre $\neg a$.

	Prop. Form.	Núcleo		Predi. Intern	Predicado margen conjunto del sujeto ¿Omisión?		Nece-sario	Combinaciones implícitas		Combina. eliminada
		Sujeto	Parti?		No	Sí	*p*	Dentro	Fuera	Ver núcleo
1	$p_x q_x$	*p*	NO	*q*	¬*p**¬*q*	-	*pq*	*Ø*	¬*p*¬*q*	*p*¬*q; q*¬*p*
2	$a_x b$	*a*	NO	*b*	¬*a**$\underline{b}$	*b?*	*ab*	*Ø*	¬*ab,* ¬*a*¬*b*	*a*¬*b*
3	$\neg b \neg a_x$	¬*b*	SÍ	¬*a*	b*a	-	¬*b*¬*a*	¬*ba*	*ab*	¬*ab*
4	*pqr*	*p*	SÍ	*qr*	¬p*$\underline{q}$*$\underline{r}$	*q?* *r?*	*pqr*	*pq*¬*r* *p*¬*qr* *p*¬*q*¬*r*	¬*pqr;* ¬*pq*¬*r;* ¬*p*¬*qr;* ¬*p*¬*q*¬*r*	*Ø*
5	$p_x q_x r$	*p*	NO	*qr*	¬*p**¬*q**$\underline{r}$*	*r?*	*pqr*	*Ø*	*r*¬*p*¬*q;* ¬*r*¬*p*¬*q;*	*pq*¬*r;* *p*¬*qr;p*¬*q*¬*r;* ¬*pqr;* ¬*pq*¬*r*
6	$(ab)_x pt$	*ab*	NO	pt	¬(ab)*$\underline{p}$*$\underline{t}$	¬(ab)? p? t?	*abpt*	*Ø*	¬abpt; ¬abp¬t; ¬ab¬pt; ¬ab¬p¬t; a¬bpt; a¬bp¬t; a¬b¬pt; a¬b¬p¬t; ¬a¬bpt; ¬a¬bp¬t; ¬a¬b¬pt; ¬a¬b¬p¬t	abp¬t; ab¬pt; ab¬p¬t
7	$(cm)_x s_x$	cm	NO	s	¬(cm)*¬s	¬(cm)	*cms*	*Ø*	¬cm¬s; c¬m¬s; ¬c¬m¬s	cm¬s; ¬cms; c¬ms; ¬c¬ms

TABLA 17. NOTACIÓN CON Y SIN OMISIONES.

La primera columna de la tabla anterior nos muestra la proposición en lenguaje formal. La segunda columna nos dice qué variables ejercen de sujeto. En la tercera se indica si el modelo del sujeto está dividido o no. En la cuarta se indicia qué variables ejercerían de predicado dentro del modelo. La quinta columna nos muestra el predicado al margen del modelo empleando la notación sin omisión. La sexta columna muestra cómo sería la notación con omisiones. La columna siete indica las combinaciones necesarias en el modelo, las cuales se afirman en el núcleo. La columna ocho enumera las combinaciones implícitas en el interior del modelo del sujeto cuando está dividido. La columna nueve enumera las combinaciones implícitas al margen, que son las mismas con independencia de que usemos la notación con o sin omisiones. Finalmente, la última columna enumera las combinaciones imposibles, las cuales hay que buscar siempre en el núcleo del modelo.

5.3 Convertir y transformar en el diagrama de Marlo

Tras convertir el diagrama de una proposición obtenemos un modelo con la misma estructura proposicional, pero distintos matices que se desprenden de la estructura superficial de la sentencia al intercambiar las funciones de sujeto y predicado (Se puede consultar un vídeo explicativo de las conversiones en 'Anexo 4: Cap. 7: conversión de proposiciones'). Por otra parte, mediante los procesos de transformación se generan también modelos equivalentes de la estructura profunda de la proposición, pero siendo ahora el matiz relevante el cambio de perspectiva que se produce al considerar el sistema desde el punto de vista de los contrarios de las variables. Sobre la conversión de las proposiciones dice Aristóteles en *Analíticos Primeros* I, 2, 25a1-15:

> Puesto que toda proposición consiste en el < hecho de que algo> se dé, se dé por necesidad o sea admisible que se dé y, de éstas, unas son afirmativas y otras negativas, según cada < tipo de> atribución , Y a su vez, de las afirmativas y negativas, unas son universales, otras particulares y otras indefinidas, es necesario que, en el caso de la <aserción> privativa universal, se puedan invertir los términos, v.g.: si ningún placer <es> un bien, tampoco ningún bien será un

> placer; en cambio, la predicativa es necesario que se invierta, pero no < tomada> universalmente, sino particularmente, v.g.: si todo placer <es> un bien, también algún bien es un placer; en cuanto a las particulares, la afirmativa es necesario que se invierta < tornada> particularmente (pues, si algún placer <es> un bien, también algún bien será un placer), en cambio la privativa no es necesario <que se invierta>; (pues, si hombre no se da en algún animal, no por ello animal no <ha de> darse en algún hombre). (Aristóteles, Trad. 1995, pp. 96,97)

Dado que, como afirma Manuel Candel en la introducción que hace a su traducción del *Órganon* (Aristóteles, Trad. 1995), Aristóteles concibe la verdad como existencia, la legitimidad de las conversiones de las sentencias debe ser considerada no solo desde un aspecto meramente formal o teórico, sino también desde la perspectiva de la atribución de la existencia que se hace a los términos.

Nosotros nos ocuparemos primero de la validez formal de las proposiciones convertidas y transformadas y luego de la cuestión de la existencia que ha preocupado tanto a la lógica aristotélica como a la matemática.

5.3.1 Validez formal de los procesos de conversión y transformación.

Aristóteles coincidiría con nosotros y con la lógica matemática en la validez formal de la conversión de las proposiciones si no media ninguna atribución de existencia en las universales, aunque sería discutible la conversión de la particular negativa cuando tenemos en cuenta las limitaciones de la obversión.

	Proposición	Diagrama de Marlo	Inversión Aristóteles	Diagrama de Marlo	Conversión Marlo
A	*Todo placer es un bien*	$p_x b$	*Algún bien es un placer*	bp_x	Solo algo bueno puede ser un placer
E	*Ningún placer es un bien*	$p_x \neg b$	*Ningún bien es un placer*	$\neg bp_x$	*Ningún bien es un placer*
I	*Algún placer es un bien*	pb	*Algún bien es un placer*	bp	*Algún bien es un placer*
O	*Algún placer no es un bien*	$p\neg b$	*No necesaria*	$\neg bp$	Algo no bueno es un placer

TABLA 18. INVERSIÓN DE LAS PROPOSICIONES EN ARISTÓTELES. LA CONVERSIÓN DE LA UNIVERSAL AFIRMATIVA NO SE CORRESPONDE EN EL DIAGRAMA DE MARLO, DONDE CONVERTIMOS *TODO A ES B* EN *SOLO B ES A*.

Señala Manuel Candel, en la introducción al tomo II de su traducción del *Órganon*, que Aristóteles explica las relaciones de obversión como relaciones de consecución o implicación en *Sobre la interpretación* 10, 20a20-30. Y escribe Candel:

- [A] ser todo hombre no-justo /vs/ [B] no ser ningún hombre justo,
- [C] ser algún hombre justo /vs/ [O] no ser todo hombre no-justo (Aristóteles, Trad. 1995, p.32)

También encontramos en Bochenski y Bravo (1985) que respecto a la obversión Aristóteles encontró varias leyes relacionadas con la negación y que expone en *Hermenia* y *Analíticos Primeros*, citando el *Hermeneia* para sostenerlo: «De la proposición "Todo hombre es no justo" se sigue "Ningún hombre es justo"; la contradictoria de "Un hombre es justo" es "No todo hombre es no justo", pues ha de haber alguno (justo)» (p72).

La obversión, no obstante, parece válida solo en sistemas dicotómicos y no para las proposiciones indefinidas. Según Correia (2006), el llamado *Canon de Proclo*, actualmente llamado obversión en lógica aristotélica, es el método para probar que es lo mismo *Algún hombre no es bueno* que *Algún hombre es no bueno*, y afirma Correia que, para el comentarista de Aristóteles Alejandro de Afrodisia (siglo II d.C.), hay ciertas consecuencias contrapositivas que son válidas, pero solo bajo el supuesto de una cierta materia de la proposición, y pone como ejemplo: *Si es propio del hombre ser capaz de reír, entonces el no-hombre no es capaz de reír*. Cree Correia que en *Categorías* 11b38-12a5 Aristóteles establece una distinción fundamental al reconocer dos tipos de predicados para un sujeto cualquiera. Por una parte, el predicado "par" se dice del número de un modo esencial porque entre par y su contrario impar no hay estado intermedio, como consecuencia de lo cual el término privativo "impar"

significa lo mismo que el término indefinido "no par", haciendo que las proposiciones "el 2 es un número par" y "el 2 no es un número impar" sean equivalentes y también las proposiciones "el 2 es impar" y "el 2 es no-par"; pero para malo y bueno o para negro y blanco no ocurre lo mismo, ya que hay algo intermedio, como lo gris.

Es decir, que de acuerdo con Correia (2006), la obversión sería aceptable según Aristóteles solo cuando trabajamos con lo que en las redes y los diagramas de Marlo llamamos sistemas dicotómicos, pero no cuando establecemos un número mayor de divisiones en los grados de ajuste a un criterio y nos encontramos con proposiciones indefinidas del tipo "*1.a no es 1.b"*. Y en esto estamos de acuerdo con Aristóteles al diseñar nuestras redes de expectativas.

Podemos observar las relaciones de obversión que sirven de base a la formalización de las proposiciones en los diagramas de Marlo en la siguiente tabla

A	**contrariedad**	E
Toda A es B Ningún A es no B		Ningún A es B Toda A es no-B
subalternancia	**contradictoriedad**	**subalternancia**
I		**O**
Algún A es B. Algún A no es no-B.	**subcontrariedad**	Algún A no es B Algún A es no-B

TABLA 19. CUADRADO DE OPOSICIÓN ENTRE PROPOSICIONES. TOMADO DE ORIOL Y GAMBRA, 2015, P. 152.

A pesar de que consideramos que nuestros procesos de conversión respetan las bases de la tradición y/o el sentido común, el diagrama de Marlo difiere, dejando ahora al margen los problemas de la existencia, en dos aspectos formales de la conversión de proposiciones que ofrece Aristóteles en *Analíticos Primeros*.

En primer lugar, la universal afirmativa no se convierte en nuestro diagrama exactamente en una particular, sino que es una exclusiva, lo mismo que la universal negativa, siguiendo en esto la doctrina de los *exponibilia* escolástica (Horn, 2009) que pasa desapercibida incluso a Kant en su *Lógica*, en cuyo capítulo III, 6 leemos:

> *Observaciones.* 1.ª En los juicios universales afirmativos se considera al sujeto como un *contenido* del predicado, puesto que está comprendido en su esfera. Puedo, pues, concluir solamente de la manera siguiente: Todos los hombres son mortales; por tanto, algunos de los seres comprendidos en la clase de mortales son hombres. (Kant, Trad. s./f., p.96)

La conversión de *Toda A es B* en una particular afirmativa del tipo *Alguna B es A,* hace que se pierda el matiz de que no hay más que un tipo de A que está siempre incluido en *B* (Thomson, 1842). Si eliminamos ese matiz de la exclusividad *Solo B es A*, se hace del todo imposible calcular de un modo sencillo teniendo en cuenta las posibilidades que han sido eliminadas implícitamente en la sentencia. Nosotros nos percatamos del matiz (Aznar, 2014) porque al representar cuantificamos el predicado.

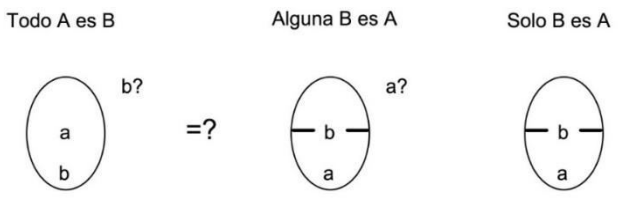


ILUSTRACIÓN 80. REPRESENTACIÓN Y CONVERSIÓN ILEGÍTIMA Y LEGÍTIMA DE LA UNIVERSAL AFIRMATIVA.

Si observamos la conversión legítima de la condicional a la derecha de la ilustración, veremos que en ella solo hay un tipo de *a* que está contenido en una parte de *b*. No existe, ni puede existir, la posibilidad de tener *a* al margen de *b*. Y si nos fijamos en *b* nos percataremos de que mantiene una parte indeterminada en la que podría haber tanto *a* como ¬*a*. Esa parte indeterminada de *b* recoge la *b?* conjeturada al margen del modelo inicial de *a*.

La segunda diferencia manifiesta de nuestros diagramas con la tradición aristotélica reside en la transformación de las universales negativas, aunque en los casos en los que nosotros no reconocemos carga existencial de los términos no existe ninguna diferencia. Así, sabemos que Aristóteles admite en *Tópicos* B8, 113b17 la validez de razonamientos cuyas conversiones sabe muy bien que son existencialmente inválidas (Bochenski & Bravo, 1985).

Ningún A conviene a B ($b_x\neg a$) sería invertida por Aristóteles en *Ninguna B conviene a A*, lo cual se corresponde formalmente con nuestra transformación ($b_x\neg a$) $\leftrightarrow$ ($a_x\neg b$).

Por otra parte, resultará extraña a la lógica aristotélica la transformación que aceptamos de las proposiciones particulares después de introducir en ellas el generalizador en base a lo que podríamos llamar una probabilidad condicionada. En todo caso, y dado que nos movemos a un nivel formal o teórico y sin llegar a establecer afirmaciones necesarias de existencia, creemos que son de sentido común y que podrán ser comprobadas en las redes un poco más adelante. Así, si fuera verdad que uno de mis hermanos es policía y fuera verdad que está ausente uno de mis hermanos, entonces sería probable y más que posible la ausencia de un policía.

		Diagrama de Marlo			Aristóteles
	Proposición	Formaliz.	Transform.	Proposición	
A	*Todo placer es un bien*	p_xb	$\neg b_x\neg p$	*Si no es bueno no es un placer*	*Si no es bueno no es un placer*
E	*Ningún placer es un bien*	$p_x\neg b$	$b_x\neg p$	*Si es bueno, no puede ser placer*	*Si es bueno, no puede ser placer*
I	*Algún placer es un bien*	pb		No es necesaria	No es necesaria
	Si algo es un placer es probable que sea un bien	$p_x\%b$	$\bar{b}_x\%\bar{p}$	*Si está ausente un bien, es probable que lo que está ausente sea un placer*	
O	*Algún placer no es un bien*	p¬b		No es necesaria	No es necesaria
	Si algo es un placer es probable que no sea un bien	$p_x\%\neg b$	$\bar{b}_x\%\bar{p}$	*Si está ausente un bien, es probable que lo que está ausente sea un placer*	

TABLA 20. TRANSFORMACIÓN DE PROPOSICIONES EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

Podemos ver mejor qué significan para nosotros convertir y transformar observando la siguiente ilustración (81) que nos muestra en diagramas de árbol bayesianos, diagramas de Marlo y tablas de verdad los distintos modelos de una proposición bicondicional que elimina de la red de expectativas las posibilidades $a\neg b$ y $\neg ab$. Pretendemos mostrar que un modelo proposicional puede ser convertido simplemente intercambiando los papeles de sujeto y predicado de las variables, del mismo modo que las redes de expectativas pueden reorganizarse desde la perspectiva de cualquier criterio.

Primero podemos ver en la red central que desde la perspectiva del criterio $\underline{a}$ y partiendo de la variable *a* solo podemos llegar hasta *b*. Lo mismo dice el modelo proposicional a_xb_x, que tomando *a* como sujeto siempre encontramos *b*. Desde la perspectiva del criterio $\underline{b}$ tenemos que partiendo de la variable *b* en la red solo podemos llegar hasta la variable *a*, que es lo mismo que dice el modelo proposicional b_xa_x.

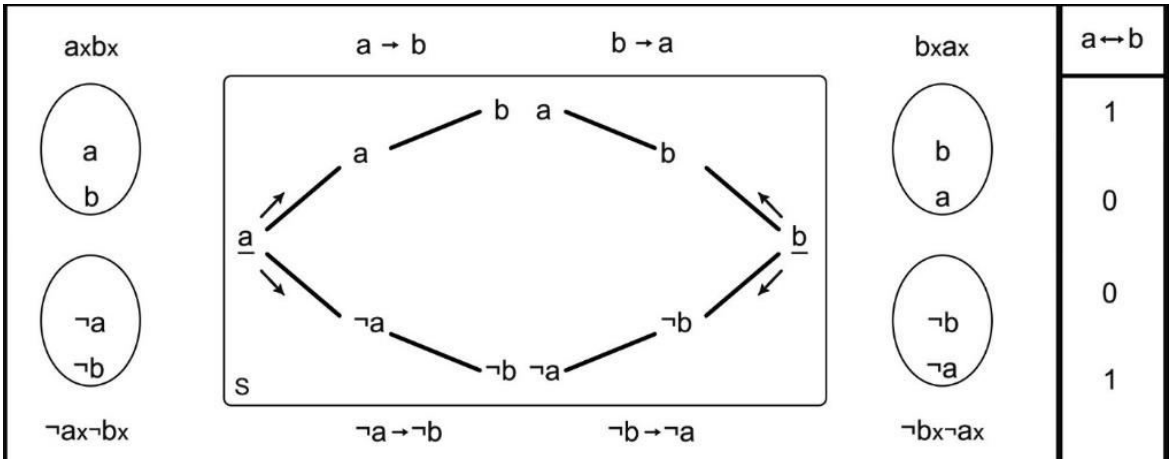


ILUSTRACIÓN 81. DISTINTAS REPRESENTACIONES DE UN MODELO BICONDICIONAL.

Podemos convertir $a_x b_x$ en $b_x a_x$ dado que nos dicen lo mismo, que todo *a* se agota en *b* porque no existe $a\neg b$ y que todo *b* se agota en *a* porque no existe $b\neg a$. Podemos comprobar estos valores en la tabla de verdad del bicondicional. Veamos ahora la base de la transformación a nivel meramente formal sobre la misma imagen (81).

Partiendo de que no existe $a\neg b$, podemos deducir que no existe $\neg ba$, porque obviamente $\nexists a\neg b$ es igual que $\nexists \neg ba$. Y si no existe $\neg ba$, entonces siempre que $\neg b$ tendremos $\neg a$. Luego $\neg b_x \neg a_x$. Eso es lo que apreciamos en la red y en los modelos desde $\neg b$. Y podemos comprobar que es correcto en la tabla de verdad, pues el bicondicional es verdadero cuando *a* y *b* son falsos. Ocurre lo mismo al considerar que no es posible $b\neg a$, es decir, $\neg ab$. Y si no es posible $\neg ab$, entonces teniendo $\neg a$ tiene que ser $\neg b$. Luego $\neg a_x \neg b_x$.

Podemos transformar cualquier proposición $p_x q$ en $\neg p \neg q_x$, donde simplemente hemos permutado los subíndices de generalidad x al mismo tiempo que cambiamos el valor de ambas variables. Así, en el bicondicional obtendremos al transformar $a_x b_x$ que $\neg a_x \neg b_x$ o bien que $\neg b_x \neg a_x$ si también cambiamos el orden de las variables.

Podemos familiarizarnos con los procesos de conversión y transformación en la siguiente ilustración (82) de la estructura lógica de una disyunción exclusiva.

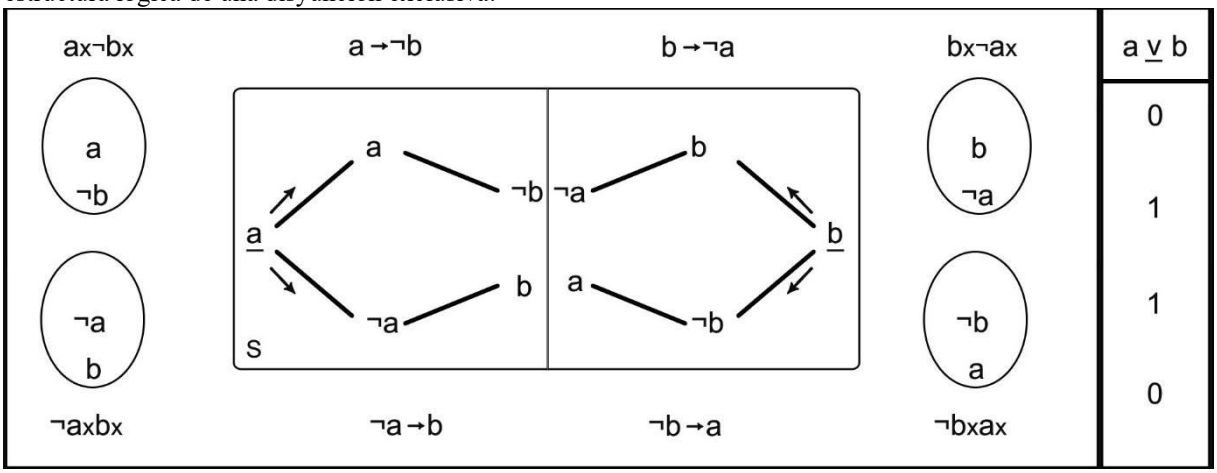


ILUSTRACIÓN 82. ESTRUCTURA LÓGICA DE LA DISYUNCIÓN EXCLUSIVA DESDE VARIAS PERSPECTIVAS.

La siguiente imagen (83) representa en diagramas de Marlo, redes de expectativas y tabla de verdad la proposición universal *Toda A es B*, que tienen una estructura condicional. Si observamos la imagen siguiente, veremos que, partiendo del criterio *a*, todo lo que se ajuste a dicho criterio, es decir, todo *a*, se ajustará necesariamente a *b*. Podemos ver desde la perspectiva del criterio *b*, que la única vía necesaria es la que parte de $\neg b$, pues nos lleva necesariamente hasta $\neg a$ (Aznar, 2017a, 2018g).

DIAGRAMA DE MARLO

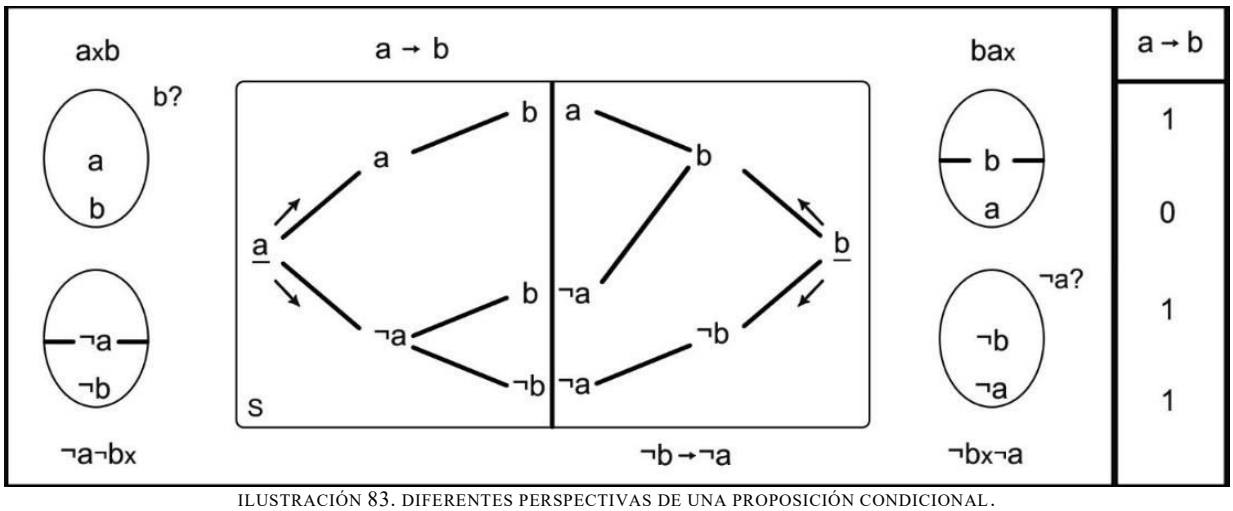


ILUSTRACIÓN 83. DIFERENTES PERSPECTIVAS DE UNA PROPOSICIÓN CONDICIONAL.

Los cuatro modelos proposicionales en la ilustración que nos informan de la eliminación de la posibilidad *a¬b* en la red, pero cada uno tomando una variable distinta como sujeto o punto de partida. *Si a, entonces b* se convierte en *Solo b es a*. Y *Si ¬b, entonces ¬a* se convierte en *Solo ¬a es ¬b*. Si *a* entonces *b* se transforma en *Solo ¬a es ¬b* o en *Si ¬b, entonces ¬a*. *Solo ¬a es ¬b* se transforma en *Solo b es a*.

Podemos ver en la siguiente ilustración un ejemplo en el lenguaje natural de lo que supone convertir y transformar.

Si eres zaragozano eres aragonés
z a

CONVERSIÓN

Entre los aragoneses están los zaragozanos
a z

TRANSFORMACIÓN

Sin ser aragonés no eres zaragozano
¬a ¬z

CONVERSIÓN

Parte de los no zaragozanos son los no aragoneses
¬z ¬a

TABLA 21. DIFERENCIA ENTRE CONVERTIR Y TRANSFORMAR.

Recomendamos a nuestros alumnos convertir y/o transformar la notación formal antes de convertir los diagramas. Al convertir la notación solo conmuto el orden de las variables. Al transformar intercambio los subíndices x y cambiamos la cualidad de las dos variables. Una vez que tenemos la notación es sencillo representar los modelos con la siguiente regla: Si la variable que ejerce de sujeto tiene x el núcleo del modelo no se divide. Si el sujeto no tiene x, su modelo se divide. Si la variable que ejerce de predicado tiene x no se expresa al margen, si no tiene x sí se expresa al margen con la interrogación. Podemos comprobar lo dicho en las diferentes representaciones diagramáticas de la proposición conocida como disyunción inclusiva (84).

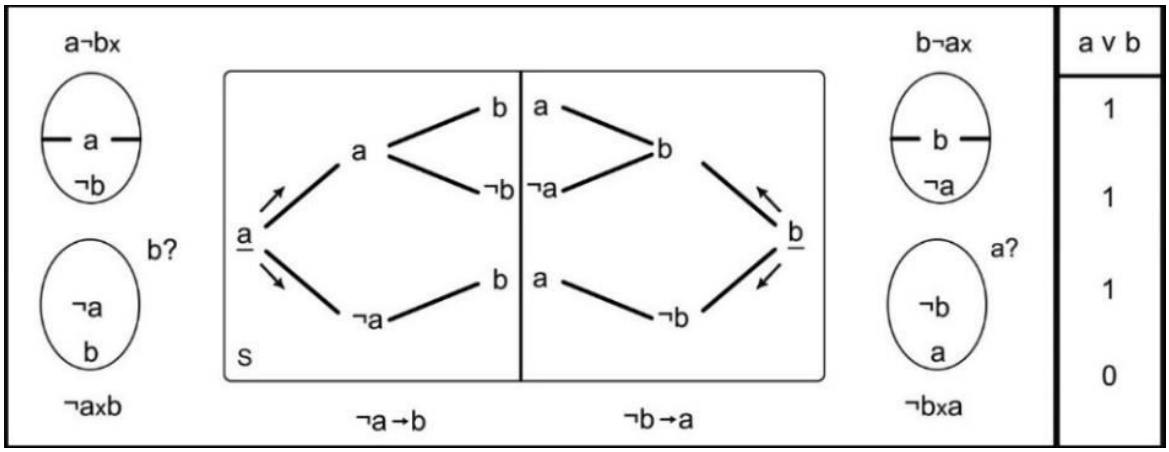


ILUSTRACIÓN 84. DIFERENTES PERSPECTIVAS DE LA DISYUNCIÓN INCLUSIVA.

Podemos ver también las conversiones y transformaciones que podemos realizar partiendo de una proposición universal negativa, cuya estructura se corresponde con la puerta lógica *Nand* (85).

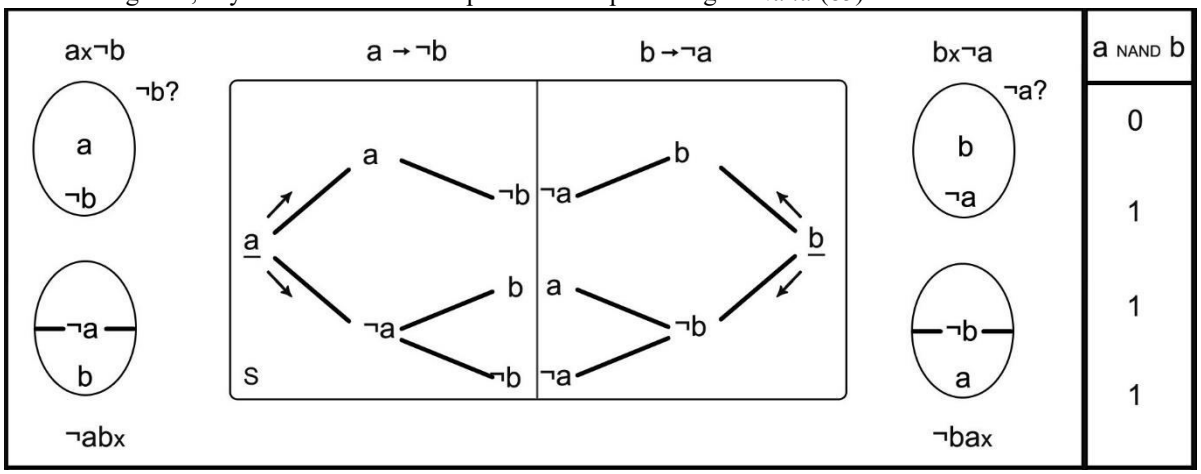


ILUSTRACIÓN 85. UNIVERSAL NEGATIVA O PUERTA NAND DESDE DIFERENTES PERSPECTIVAS.

Es evidente que podríamos definir más conectores en base a las posibilidades eliminadas de la red, los cuales podrían ser expresados a su vez en modelos proposicionales cuantificando las variables tanto al tomarlas como sujeto como al tomarlas como predicado. Aunque la forma más sencilla de comunicar las posibilidades de la red de expectativas de la siguiente ilustración (86), mejor que inventando un nuevo conector, sería simplemente afirmar: *No existe ¬b*.

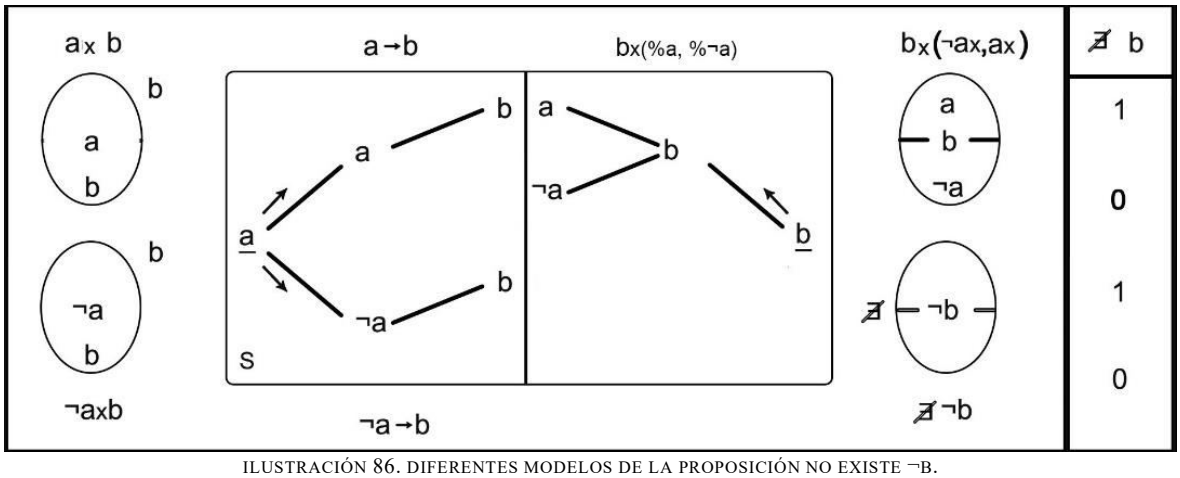


ILUSTRACIÓN 86. DIFERENTES MODELOS DE LA PROPOSICIÓN NO EXISTE ¬B.

5.3.2 Representación y conversión de los conectores

Hemos podido comprobar que podemos reinterpretar la información que nos ofrecen los conectores desde la perspectiva de la cuantificación del predicado. Es decir, que el significado que tiene para la lógica matemática, por ejemplo, una disyunción inclusiva "*a* ∨ *b*" como eliminación del caso en el que no se da ni lo uno ni lo otro, puede expresarse igualmente como el caso en el que la totalidad de ¬*a* se asocia en parte de *b*. En la siguiente ilustración resumimos en primer lugar la formalización, conversión y transformación en diagramas de Marlo de los modelos del bicondicional, de la disyunción exclusiva, del condicional o modelo de la universal afirmativa A, de la disyunción inclusiva y de la puerta *Nand* o modelo de la universal negativa E. También incluimos los modelos particulares con intención teórica y fáctica distinguiendo entre minúsculas y mayúsculas.

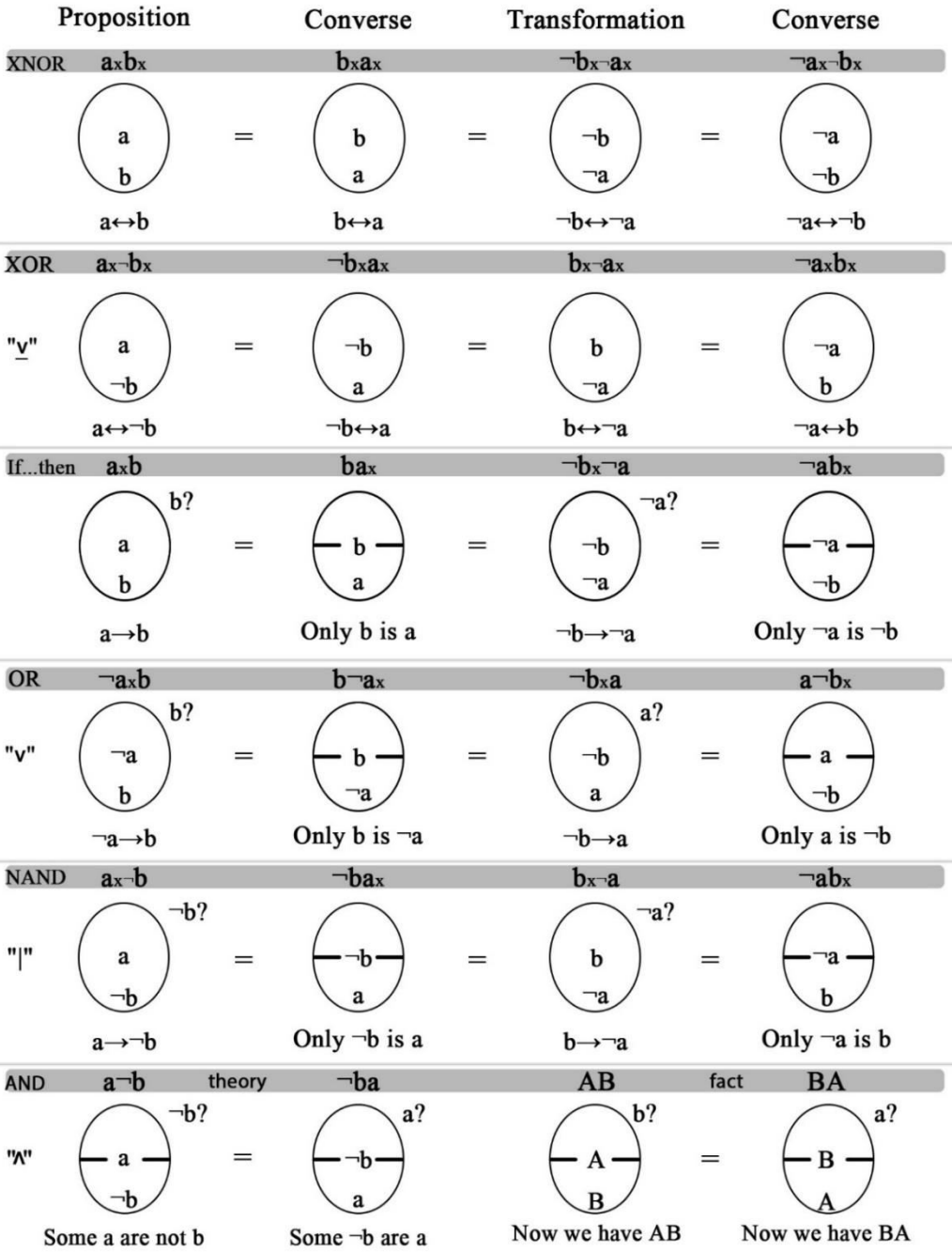


ILUSTRACIÓN 87. CONECTORES LÓGICOS EN EL DIAGRAMA DE MARLO. TOMADO DE AZNAR, 2018G.

5.3.3 Conversiones de modelos complejos

Al convertir las proposiciones complejas que relacionan más de dos conceptos debemos asegurarnos de representar los mismos tipos de categorías en el modelo inicial y final. Cambiaremos la perspectiva considerando al predicado como sujeto de la nueva proposición. Después trasladaremos ordenadamente cada tipo de letra de un modelo a otro. Hay que considerar que, si un concepto que operó como predicado en el modelo inicial solo fue representado allí con una letra, en el modelo convertido, cuando este concepto funcione como sujeto, solo se requerirá la etiqueta central para representarlo. Si partimos de dos tipos, dividiremos el círculo; si tenemos necesidad de expresar modelos con tres tipos distintos de categorías, emplearemos un triángulo; si queremos expresar un modelo con cuatro divisiones, usaremos un cuadrado, etc. Cada predicado particular supone la creación de una nueva extensión dentro del modelo que permita distinguirlo del resto de predicados.

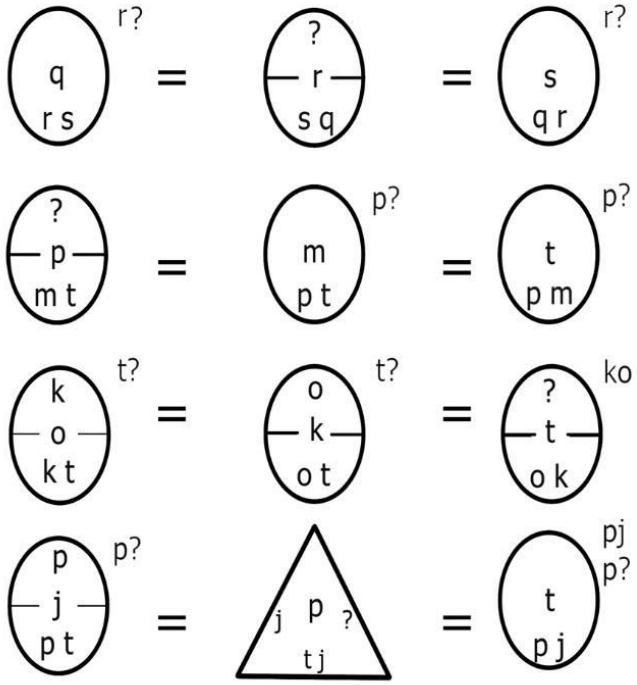


ILUSTRACIÓN 88. EJEMPLOS DE CONVERSIÓN DE MODELOS.

En la imagen anterior observamos un ejercicio típico de los que se realizan en el aula para aprender el manejo del diagrama. En la primera fila podemos ver las conversiones que sufre el modelo $q_x s_x r$. Así el diagrama superior izquierdo podría interpretarse del siguiente modo: "Si tenemos *q*, entonces tenemos seguro la totalidad de *s* y seguro también, al menos una parte de *r*". Lo cual es lo mismo que convertir a $rs_x q_x$ y afirmar que "si tenemos *r*, existe la posibilidad confirmada de tener la totalidad de *s* y *q*, aunque no se ha descartado que podamos no tenerlas. Este modelo, a su vez, equivale al modelo $s_x q_x r$ que afirma que cualquier parte de *s* se asocia con la totalidad de *q* y parte de *r*, siendo posible suponer que hay una parte de *r* no asociada con *s*.

En la última fila tenemos el modelo proposicional de $t_x pj$, aunque también se lee que $j_x p$ y $t_x j$. Al convertirlo desde la perspectiva de *p* tenemos que contar con al menos tres tipos posibles: una p asociada necesariamente a *t* y *j*; una *p* solo asociada con *j* que podría ser o no *t* y una *p* que podría no ser ni *t* ni *j* y que es representada con la interrogación dentro del modelo de *p*. Desde la perspectiva de *t* siempre hay *p* y *j*, pero también puede haber *p* o *j* con ¬*t*.

La conversión no supone ninguna pérdida de activación existencial, pues, si es cierto *AB*, es cierto *BA*, si es cierto [*A*]*B* es cierto *B*[*A*], etc. En la transformación sí perdemos la activación existencial porque nos movemos de una región de la red a otra no conectada con la anterior por las leyes de la propagación de la inferencia.

5.3.4 La existencia en las proposiciones transformadas

El problema histórico que acompaña a la transformación o transposición de las proposiciones es el problema de la existencia, el cual separa a aristotélicos y lógicos matemáticos dado que no puede dejar de atribuirse o no cierta carga existencial en el análisis de las proposiciones.

> La lógica matemática común asocia la existencia, no a la afirmación sino a las proposiciones particulares, llamadas por eso existenciales. De ese modo resulta que, por ejemplo una proposición afirmativa como "todos los centauros son cuadrúpedos" puede ser verdadera, mientras que su correspondiente particular "algún centauro es cuadrúpedo" no lo es, pues esta última proposición viene a decir lo mismo que "existe al menos una cosa que es centauro y que es cuadrúpedo", lo cual es evidentemente falso. De ahí surge una de las disparidades más notables entre la lógica matemática y la aristotélica. (Oriol & Gambra, 2015, p. 124)

De Morgan (1847b) afirmaba que la existencia de los objetos e ideas es tácitamente reclamada por los términos de todo silogismo, siendo así que en una proposición afirmativa deben existir ambos y en las negativas al menos uno. Y el propio Venn (1881) reconocía que en la mayoría de los casos, cuando afirmamos que 'Todo x es c', es porque estamos convencidos de la existencia de X y que en la mayoría de los casos se asume que hay garantía de la existencia del sujeto y el predicado. Sin embargo, Venn cree que tal garantía es difícil de justificar en el caso del compuesto XY, por lo que consideraba que era mejor asumir una interpretación hipotética de los términos.

Nosotros podemos tomar, como hace la lógica matemática, la universal sin carga existencial simplemente expresando nuestros diagramas con minúsculas. Así indicamos que se trata de una estructura condicional hipotética definida por no existir la posibilidad de que algo sea *a¬b.* Por eso dicha combinación tiene un valor cero en las tablas de verdad. Pero si hubiera un x tal que x fuera *A*, ese x sería *B*, como vemos claramente en las redes. En nuestros diagramas podemos expresar la presencia empleando la mayúscula.

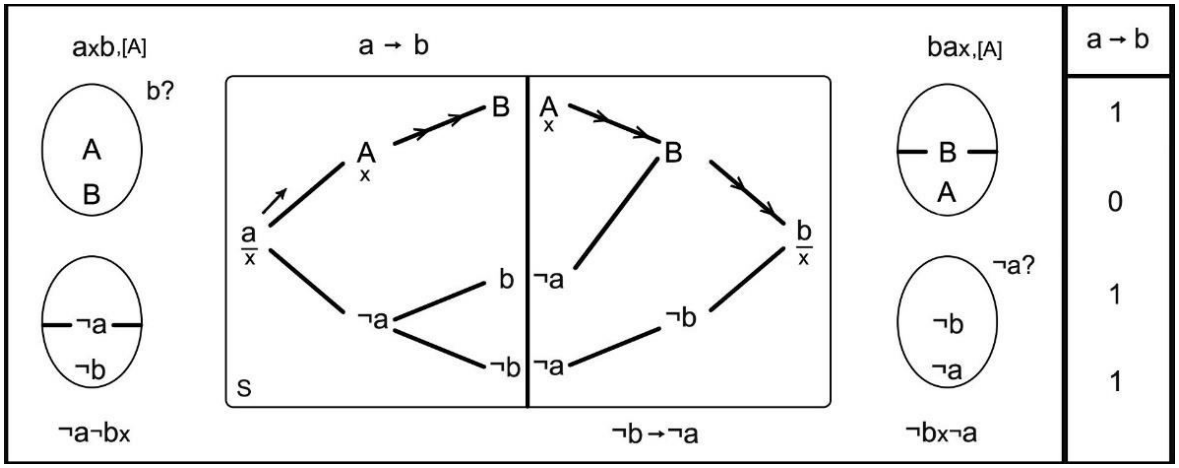


ILUSTRACIÓN 89. TODO A ES B Y TENGO LA TOTALIDAD DE A.

Es fácil observar en las redes que la presencia que garantiza la existencia de A y de B en este caso no garantiza la existencia de ¬*a* ni de ¬*b*, que siguen en minúsculas en la red, sin razón suficiente para ser afirmadas de un modo distinto del hipotético, por más que sea necesario que si hay ¬b, este sea ¬a.

La ilustración anterior (89) deja claro que no hay razón suficiente para afirmar que tenemos ¬*B*¬*A* a partir de la afirmación de que tenemos *AB*. Sin embargo, mientras permanezcamos en la misma rama de la red, tenemos razón suficiente para afirmar la validez existencial en la conversión de la proposición. Así, si el contenido existencial de *AB* es cierto, es cierto el contenido existencial de *BA*. Y lo mismo ocurriría con la universal negativa: Si hay razón suficiente para afirmar *A*¬*B*, entonces hay razón suficiente para afirmar ¬*BA*, pero no para decir nada sobre la existencia de *b*¬*a* o de ¬*b*¬*a*.

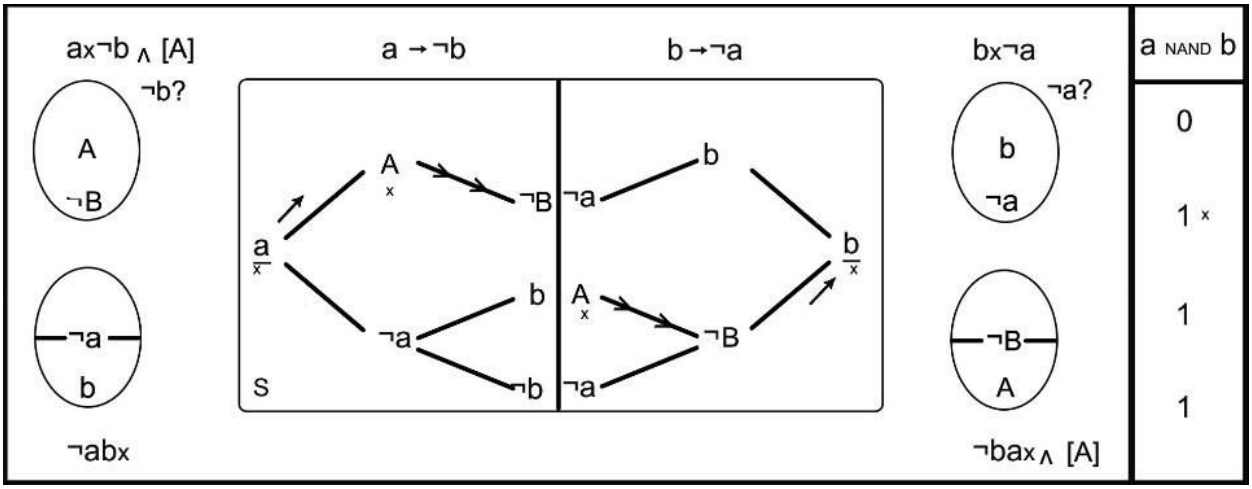


ILUSTRACIÓN 90. NINGUNA A ES B. DIAGRAMA DE MARLO, REDES DE EXPECTATIVAS Y TABLAS DE VERDAD.

Como vemos, separamos en las redes las conexiones que esencialmente se establecen entre caracterizaciones, variables o términos y la activación de dichas variables. De este modo es fácil explicar por qué el hecho de que sea cierta la afirmación *No tengo hijos guapos*, no hace verdadera la afirmación *Tengo hijos no guapos*, pues es posible que no tenga hijos de ningún tipo. Otra cosa es que sea seguro que tengo hijos y afirme que es falso que sean guapos. En ese caso sería verdad que son no-guapos, aunque siendo exigentes con la verdad, aún quedaría indeterminado si son normalitos, feos, muy feos o monstruosamente feos.

Es difícil separar en el lenguaje cuando afirmamos que existe un x en el que tiene o no lugar necesariamente la conjunción de dos cualidades y cuando no afirmamos que exista tal x.

No parece haber afirmación existencial	Parece haber afirmación existencial
No es cierto que tenga hijos guapos	*Ninguno de mis hijos es guapo*
No hay ninguna planta ilegal aquí	*Ninguna de estas plantas es ilegal*
No tenemos carne de vaca, señor	*Ninguna de nuestras carnes es de vaca*

TABLA 22. EJEMPLOS DE UNIVERSAL NEGATIVA CON Y SIN CARGA EXISTENCIAL.

5.3.4.1 Conversión y transformación de las particulares

Actualmente, para la lógica matemática una proposición universal no expresa existencia, pero sí una proposición particular, de modo que A*lgún A* significa que existe al menos un *A*, mientras que *Toda A*, no afirma existencia. Además hay toda una discusión acerca de los tipos de objetos de los que se puede o no predicar existencia "∃" (Díez Martínez, 2005). Pero la afirmación *Alguno de mis hijos es rubio*, no es menos falsa que la proposición *Todos mis hijos son rubios*, y pueden ser ambas igual de falsas porque no sea el caso que tenga hijos (falsedad de la predicación existencial) o porque ninguno de ellos sea rubio (falsedad de la atribución de la cualidad): "tanto Rocinante es caballo como Rocinante es no caballo son ambas falsas, puesto que se trata de proposiciones afirmativas de sujeto inexistente" (Oriol & Gambra, 2015, p. 152).

Como señala Manuel Candel en su introducción al *Órganon* de Aristóteles (Trad. 1995), las relaciones de contrariedad, implicación y obversión se dan en Aristóteles en un sentido diferente al que ocurre en la lógica moderna, como consecuencia de la interpretación del functor asertivo o veritativo como existencial, por lo que, de la afirmación *Es todo hombre no-justo* puede inferirse la negación *No es ningún hombre justo,* pero no viceversa: pues en este último caso cabe interpretar la aserción en el sentido de que no haya siquiera hombres, ni justos ni de ninguna otra clase, y partiendo de esa posibilidad nunca podrá inferirse que haya hombres, del tipo que sean.

Siguiendo la tradición formal de la lógica, el diagrama no se ocupa de la confianza metafísica que tenemos en la verdad sintética o empírica de las proposiciones que permite afirmar que una clase no es vacía, sino del modo

en el que dicha existencia se transmite entre los términos una vez que ha sido concedida, ya sea por la propia experiencia o por el testimonio de un tercero de confianza.

Al resolver silogismos en las redes nos encontramos con que las proposiciones particulares solo pueden contribuir a la inferencia aportando cargas de existencia que propagar, mientras que las proposiciones universales contribuyen eliminando alternativas que convierten ciertas rutas en necesarias. Sin embargo, una vez que las reglas de la transformación nos permiten superar los inconvenientes de la transposición, no hay ningún motivo para mantener las diferencias en el uso de la particular y la universal a la hora de sugerir existencia. Luego en este aspecto nos decantamos por la postura de la lógica aristotélica.

> Que el sujeto se tome universal o particularmente no entraña compromiso alguno sobre la existencia actual de las cosas de que se trata, al menos tomado por sí mismo. Por otro lado, es de notar que el uso vulgar de "algún" es a veces enfático y viene a entenderse como si expresara lo mismo que "sólo algún", de manera que la verdad de la particular excluiría la verdad de la universal. En el uso que haremos aquí de las oraciones con cantidad, la verdad de la particular ni excluye ni conlleva la universal, mientras que, como veremos, la verdad del universal implica la del correspondiente particular. (Oriol, 2015, p. 133)

Podemos ver en la siguiente ilustración la validez de la conversión existencial de la particular *AB en BA.* Ya hemos dicho antes que en la lógica del conjunto, donde el número n de individuos investigado puede ser igual o mayor que uno, la verdad de una conjunción no falsa el resto de las posibilidades En este caso hay algo que es *B* y A pero puede haber otros tipos de *b* que no son *a*, y otros tipos de *a* que no sean *b*, aunque de esos tipos $b\neg a$, $a\neg b$ y $\neg a\neg b$ no sabemos nada. . Por ello permanecen inciertos en las tablas de verdad y en los modelos proposicionales. En las redes simplemente permanecen inactivos, aunque su valor n sería incierto también.

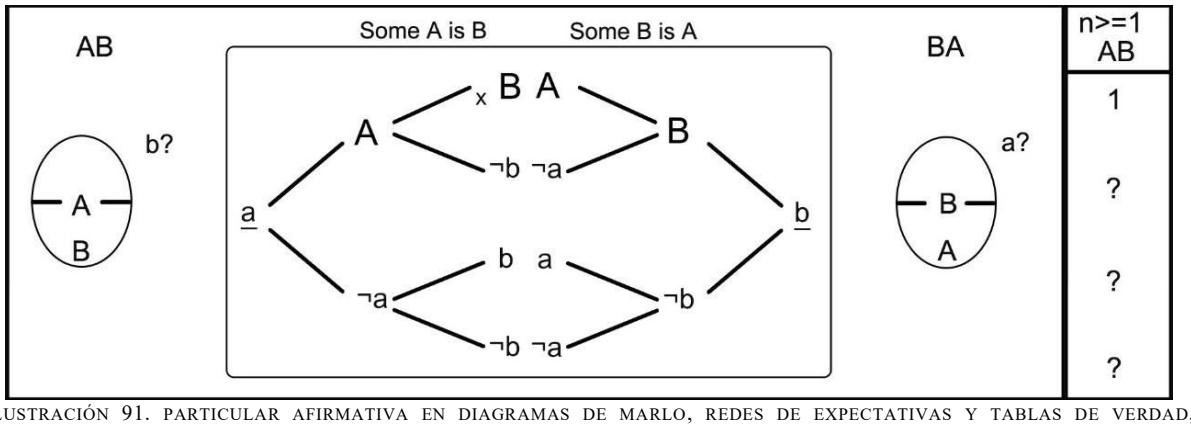


ILUSTRACIÓN 91. PARTICULAR AFIRMATIVA EN DIAGRAMAS DE MARLO, REDES DE EXPECTATIVAS Y TABLAS DE VERDAD, CONSIDERANDO QUE ES POSIBLE QUE HAYA OTROS TIPOS DE OBJETOS QUE NO SON A EN EL UNIVERSO DEL DISCURSO. LA MAYÚSCULA Y LA X EN EL TIPO DE OBJETO *AB* REPRESENTAN QUE EXISTE UN ESTÍMULO X QUE ACTIVA EL NODO.

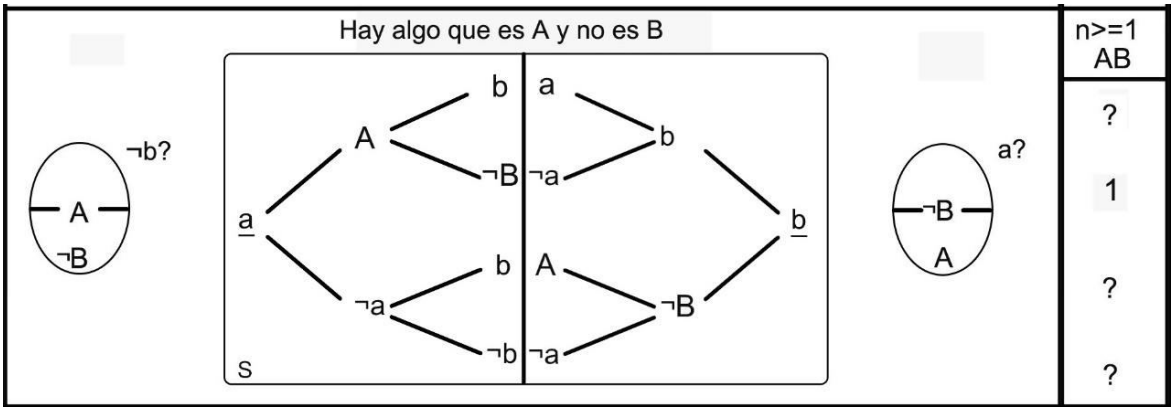


ILUSTRACIÓN 92. PARTICULAR NEGATIVA CON VALOR EXISTENCIAL EN DIAGRAMAS DE MARLO, REDES DE EXPECTATIVAS Y TABLAS DE VERDAD, CONSIDERANDO QUE ES POSIBLE QUE HAYA OTROS TIPOS DE OBJETOS QUE SON B EN EL UNIVERSO DEL DISCURSO. LA MAYÚSCULA REPRESENTA QUE EXISTE UN ESTÍMULO X QUE ACTIVA EL NODO.

Las particulares no se pueden transformar o transponer en el sentido convencional, pero sí podemos afirmar que si una parte de p, a la que llamaremos p_1, se asocia con una parte de q, a la que llamaremos q_1, entonces cualquier cosa que no sea q_1 no podrá ser p_1. Y desde un punto de vista fáctico será cierto también que cuando esté ausente la totalidad de q, entonces estará ausente p_1.

5.3.4.2 Conversión de las proposiciones indefinidas

Distinguir los grados de ser de los grados de verdad nos permite ampliar el universo del discurso todo lo que se requiera para considerar las proposiciones indefinidas como definidas. Una vez hecho esto, es fácil convertir siguiendo los caminos de la activación y es fácil transformar observando los caminos que han sido eliminados. Incrementar el número de divisiones en los grados de ajuste a un criterio nos parece razonablemente compatible con la posición aristotélica.

> Entre los opuestos privativamente no hay término medio positivo, pero puede haber término medio negativo, por lo cual ha de entenderse que hay cosas que ni tienen la privación ni la posesión. Así, suele decirse que, entre el ciego y el que ve, se da lo que ni es ciego ni ve, como una piedra o un topo. (Oriol & Gambra, 2015, p. 87)

Aunque nosotros nos decantemos por el universo del discurso de la lógica matemática como único marco que permite la inferencia, asumimos al mismo tiempo que diferentes subsistemas de conocimiento α, β, γ… se ocupan del juicio de realidades distintas ligadas a necesidades distintas, por lo que convenimos que el criterio nutritivo no concierne, pongamos por caso, al campo de los trastornos mentales. Luego estamos de acuerdo con la siguiente cita porque nos parece que el ser-no ser de las cosas a las que nos enfrentamos no se agota en sistemas dicotómicos, pero no estamos de acuerdo porque nos parece necesario al mismo tiempo acotarlas en el ámbito del pensamiento.

> Sólo los seres vivientes están necesariamente sanos o enfermos, mientras que las estrellas o las montañas no están ni una cosa ni la otra. Pero para los contradictorios cualquier cosa, viviente o inerte, está sana o está no sana, con tal de que sea una cosa existente. Los contrarios admiten a veces términos intermedios. Por ejemplo, entre el blanco y el negro los restantes colores. (Oriol & Gambra, 2015, p. 90)

En cualquier caso, el diagrama de Marlo puede representar y resolver inferencias que vayan más allá de los sistemas dicotómicos. En la siguiente ilustración observamos una red compuesta por dos criterios tricotómicos $\underline{a}$ y $\underline{b}$ de los que resultan nueve combinaciones que van desde *1a1b* y pasando por *0,5a0,5b* hasta *0a0b*. Así, por ejemplo, podríamos juzgar a nuestros alumnos de nueve formas con los criterios trabajar ($\underline{a}$) y ser inteligente ($\underline{b}$) si los dividimos en tres grados: totalmente, algo, nada. Si supiéramos que entre nuestros alumnos no hay ninguno que sea totalmente trabajador y totalmente inteligente eliminaríamos de las redes bayesianas la combinación 1a1b. Luego, podríamos comunicarlo con los modelos proposicionales que se encuentran a la derecha y a la izquierda de las redes.

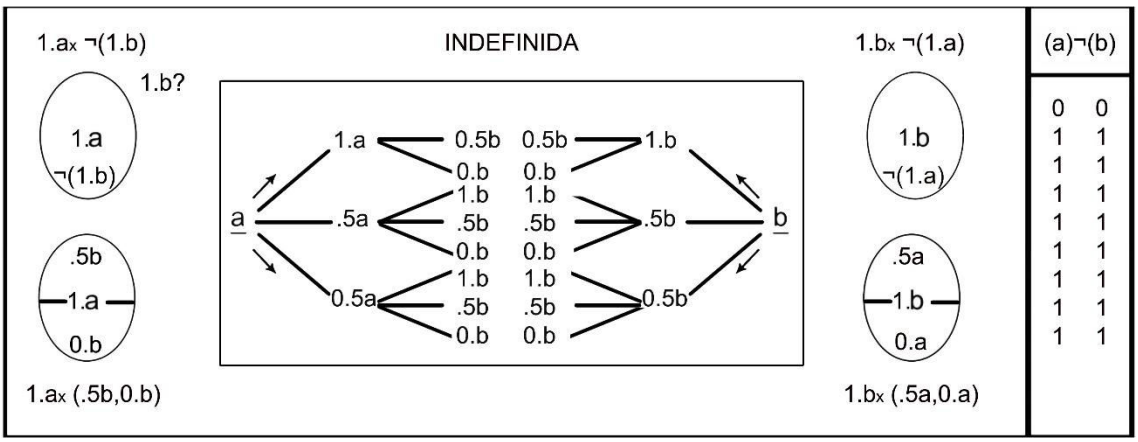


ILUSTRACIÓN 93. PROPOSICIÓN INDEFINIDA *A NO ES B* EN DIAGRAMAS DE MARLO, REDES Y TABLAS DE VERDAD.

Es fácil observar en las redes que podemos convertir *1A0B* en 0B1A y también es fácil imaginar estados de la red en los que la eliminación de nodos fuera suficiente como para transformar las proposiciones. Así, si no existiera el nodo *1a1b* ni el nodo 0,5a1b, entonces sería cierta la transformación que afirma que *Si algo no es 0a, entonces no es 1b*.

5.3.4.3 Ejemplos de conversión y transformación de modelos con carga existencial

En la siguiente ilustración (94) podemos observar cómo la inclusión de unos modelos en otros permite la conversión, de modo que si, en el contexto de mis relaciones personales, partimos de la afirmación de que *Están aquí todos mis amigos* (*a*), *los cuales son de Barcelona* (*b*), entonces podemos inferir que *es cierto que eres mi amigo y que aquí y ahora hay alguien de Barcelona*. Y si es cierto lo dicho es cierta la condicional teórica, a la cual podemos llegar del mismo modo partiendo de afirmaciones fácticas de ausencia. Si digo que *no está aquí ninguno de mis amigos*, *los cuales son de Barcelona*, entonces es cierto que *si eres mi amigo eres de Barcelona*.

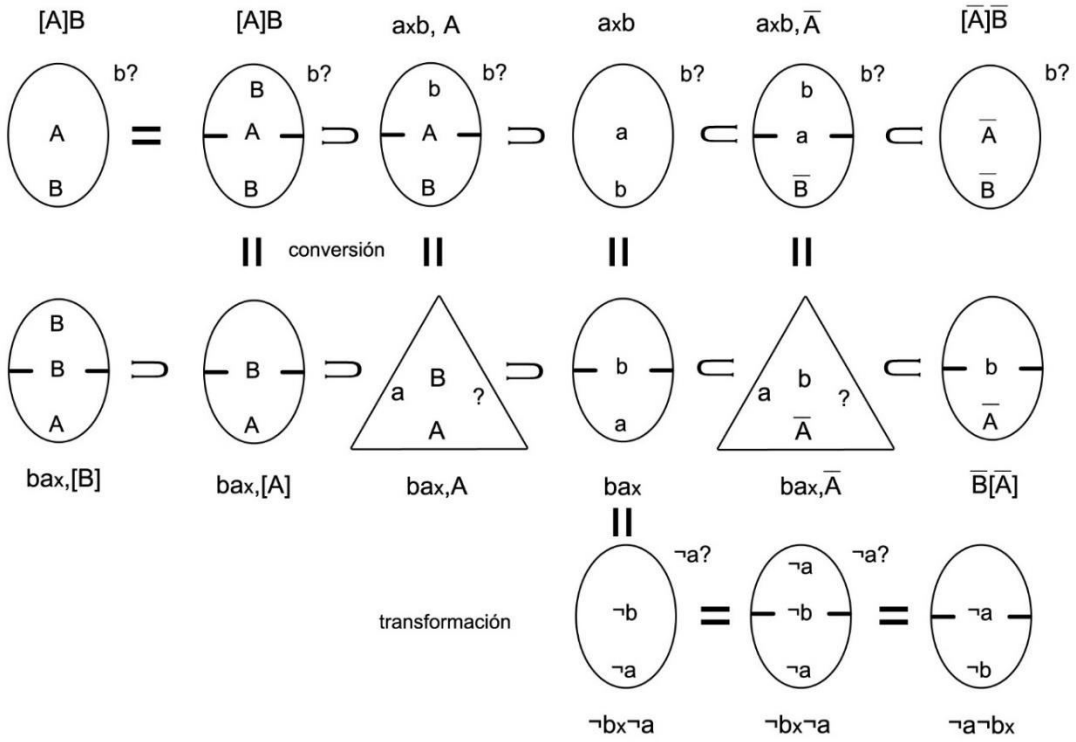


ILUSTRACIÓN 94. EJEMPLO DE CONVERSIÓN Y TRANSFORMACIÓN DE MODELOS CON CARGA EXISTENCIAL.

En la segunda fila hemos representado la proposición *Solo B es A y está presente toda B* dividiendo el modelo de *B*, de modo que nos dice que todas sus partes están presentes, aunque solo sabemos seguro que una de ellas es A. La otra es igualmente combinable con *A* y ¬*A*. En este modelo está incluido el siguiente, que nos dice que es *Seguro que una parte de B que contiene la totalidad de A está presente*.

La conversión al modelo triangular tiene lugar cuando decimos que *Si a, entonces b y tenemos algún A*. En este caso sabemos que una parte de *B* que es *A* está presente, sabemos que es posible suponer una parte de B que es *a* pero de la que no se afirma ni se niega su presencia y sabemos que es posible suponer una parte de B de la que no sabemos nada ni sobre su ser ni su presencia, que es la que se afirma en el lado con la interrogación.

El principio que seguimos al generar los modelos es que cada premisa particular, ya sea acerca del ser o de la presencia/ausencia, requiere añadir un lado o extensión al modelo que sea al mismo tiempo distinto y potencialmente combinable.

La ilustración anterior nos muestra que la transformación de los modelos conserva las relaciones esenciales o determinaciones del ser, mientras se pierde toda carga existencial.

5.4 Formalizar el grado de certeza y la información implícita

Para nosotros, las proposiciones que nos hablan de las relaciones entre *A* y *B* pueden ser en primer lugar meras conjunciones parciales como ocurre en las expresiones particulares *Alguna A es B*, *Tenemos C y D*, *Parte de los marineros son piratas*, etc. En segundo lugar, las relaciones pueden mostrarse como generalizaciones cuando incluyen al menos la totalidad de individuos asociados a una de las variables, como ocurre en las sentencias universales del tipo *Ser par es lo mismo que ser divisible por dos*, *Toda A es B*, *Si C, entonces D*, o *Solo los españoles pueden ser madrileños*, en la que la totalidad de los madrileños ha quedado asociada con ser español.

Como ya vimos al describir las redes de expectativas, las proposiciones particulares del tipo *Algunas personas con ansiedad sufren depresión* pueden ser convertidas en generales ajustándonos a la fórmula *Dada una persona cualquiera con depresión, es probable que padezca ansiedad* (27).

$$\mathrm{AB} \rightarrow a_x\%\mathrm{b} \tag{27}$$

Además de la generalidad de las conjunciones que en las redes se traduce en la eliminación definitiva o no de nodos alternativos, todas las proposiciones pueden ser expresadas con distintos grados de certeza subjetiva. Al mismo tiempo las proposiciones puedan ser emitidas de forma genérica o teórica y de forma fáctica para ser tenidas en cuenta aquí y ahora en el curso de una situación en marcha. De esta forma ya distinguimos en las redes:

- Suposiciones, conjeturas o hipótesis: cualquier combinación bayesiana de variables es posible *a priori.* Se trata de posibilidades no confirmada ni refutadas por los hechos y se expresarán gráficamente en el diagrama con una interrogación. Por ejemplo, *b¬a?* significa que es posible suponer que una parte de los tipos de *b* se asocia con una parte de los tipos de ¬*a*, lo cual, en caso de ser cierto, supondría que hay individuos, estén o no presentes ahora, en el nodo *b¬a*. En las redes eran conjeturas los nodos amarillos inciertos no solo en cuanto a su valor de verdad actual en las redes fácticas, sino también en cuanto al valor en las redes teóricas de su número de individuos, el cual podría ser finalmente también igual a cero.

- Hechos: señalan presencias y ausencias con las que contar durante una situación en curso. Son interpretaciones de la experiencia socialmente compartidas. Se expresarán en mayúscula. Por ejemplo *B¬A* significa que podemos afirmar que está presente aquí y ahora un objeto x tal que x es *B* y x es ¬*A*. También consideramos un hecho la ausencia de algo relevante durante la situación en curso, como cuando decidimos repostar porque no tenemos gasolina: $\bar{G}$.

- Teoría: combinación de variables basada en hechos. Señalan expectativas razonables. Pueden tener más o menos evidencias a su favor. Requieren creer en la regularidad del devenir. Las teorías se expresan con minúscula. Ejemplo: *b¬a* significa que es razonable que parte de lo que es *b* se asocia con parte de lo que es ¬*a*. Por su parte, b_x¬*a* significa que todo lo que sea *b* debería ser ¬*a*. El punto de partida de una teoría que afirma la conjunción parcial o universal de las subclases *a* y *b* siempre debería ser la presencia de un hecho definido como *AB*. Por ejemplo, si le digo a mi compañera de departamento que *todas las alumnas que se han presentado a subir nota han sacado un diez en el examen* lo podría formalizar como [*A*]*D*, de donde se sigue que $a_x d \wedge AD$. Es decir, que además de la generalización hipotética o teórica *Si es chica tiene un diez*, basada en la constatación de que no existe ninguna alumna que se haya presentado y no tenga un diez, se da también por hecho que existe al menos una alumna que se ha presentado y ha sacado un diez. La generalización teórica basada en lo que no existe elimina el nodo *a¬d* en las redes como ya sabemos. La afirmación existencial *AD* afirma una carga de presencia en el nodo *ad*. Podemos observar una explicación diagramática del ejemplo en la siguiente ilustración.

- Implicaciones teóricas: postulan qué es imposible en base a las teorías aceptadas. Partiendo de que todas las alumnas presentadas a subir nota tienen un diez, mi compañera sabe que *si hay exámenes con menos de un diez, entonces esos exámenes no serán de una chica sino de un chico*, siempre que confíe en mi palabra y en que no cometí un error al poner las notas. Es decir, que cuenta con que partiendo de $a_x d$ es cierto que $\neg d_x \neg a$: *Si no es un diez no es de una alumna*. La implicación teórica es deducida mediante procesos de transformación que, como hemos explicado, no suponen una razón suficiente para afirmar que existan ni exámenes sin un diez ni exámenes de alumnos, tengan o no tengan un diez. Si observamos la red de la ilustración veremos que la afirmación del nodo *AD* no afecta a la verdad fáctica del nodo $\neg d \neg a$. Pero sí es el caso que desde que eliminamos el nodo $a \neg d$ la única y necesaria conexión que podemos establecer partiendo de $\neg d$ será el nodo todavía posible $\neg a$. Es decir, que $\neg d_x \neg$a es formalmente necesario en el sentido de que partiendo de $\neg d$ lo único posible es llegar a $\neg a$, aunque no tenemos razones para afirmar que haya ni $\neg a$ (chicos examinados) ni haya $\neg d$ (exámenes que no tienen un diez).

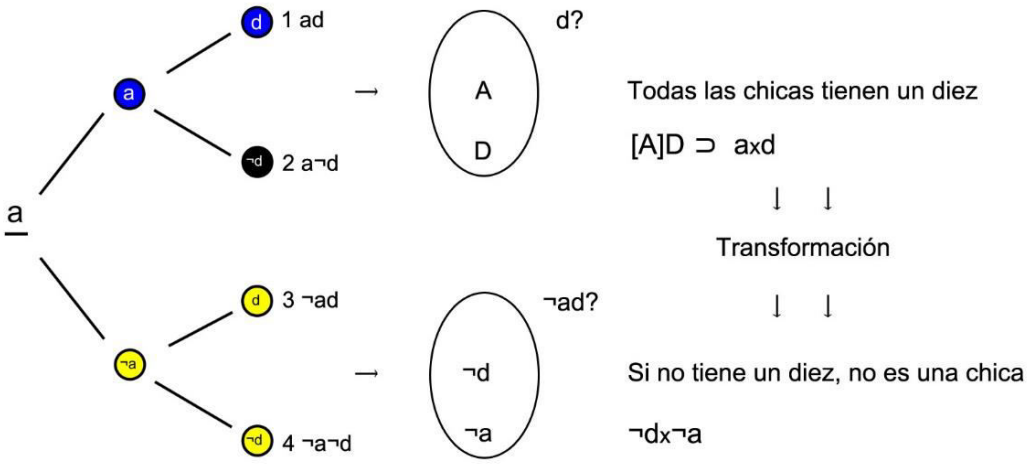


ILUSTRACIÓN 95. PÉRDIDA DE LA RAZÓN SUFICIENTE DE EXISTIR EN LA TRANSFORMACIÓN.

Se observa claramente en la ilustración que las implicaciones teóricas que se siguen del hecho verificado en la parte superior de la red de que todas las chicas tienen un diez (nodos 1 y 2), no incluyen nada sobre la existencia de $\neg d$ o $\neg a$ (nodos tres y cuatro). Pero sí que observamos en la parte inferior de la red que nace en $\neg a$, que la única $\neg d$ posible, tras eliminar el nodo dos, es la $\neg d$ asociada con $\neg a$ (nodo cuatro). Por eso el modelo proposicional de *Todas las chicas tienen un diez* tiene sus términos en mayúscula, pero no así el modelo transformado o implicación teórica de *Si no tiene un diez, no es una chica*.

Tal y como representamos la información en las redes parece que el estatus lógico de las conjeturas del nodo tres y de las implicaciones teóricas del nodo cuatro es el mismo y, ciertamente, nada de lo que pase en estos nodos afecta a la verdad de las premisas confirmadas *Todas las chicas tienen un diez, Al menos parte de los dieces son de chicas*.

Sin embargo, la entropía ligada a los procesos de comunicación nos obliga a ver de un modo distinto los nodos teóricos y los nodos conjetura en los modelos proposicionales. Veamos.

Si durante los procesos de comunicación afirmamos que es falsa la proposición *Toda* $\neg d$ *es* $\neg a$, sin matizar que es falsa porque no existe $\neg d$, entonces damos a entender que hay $\neg da$, negando al mismo tiempo que sea verdadero que *Toda a es d*. Luego afirmar la falsedad de las implicaciones teóricas, que se siguen de la transformación o transposición de las proposiciones universales, necesariamente tiene que afectar a la existencia de las variables si no quereemos contradecir a las teorías aceptadas.

Por el contrario, nada de lo que digamos sobre la verdad o falsedad de la conjunción conjeturada *d*¬*a* afecta a la verdad de *Toda a es d*. Luego las conjunciones conjeturadas pueden eliminarse sin afectar la existencia de ninguna variable.

Es razonable suponer que durante los procesos de comunicación los sistemas cognitivos dan por supuesta la existencia de todo aquello a lo que se alude de forma directa en la proposición, a no ser que se niegue explícitamente. Al mismo tiempo, la regla nos obliga a abstenernos de afirmar la existencia de las posibilidades no mencionadas explícitamente, de modo que aquello de lo que no se habla ni se afirma ni se niega. Sin embargo, esta regla no basta para justificar que la conjunción ¬*ad* tenga una interrogación y carezca de ella ¬*a*¬*d*.

Tenemos que añadir para justificar la diferencia que de la conjetura no sabemos nada ni formal ni existencialmente, pero que de la implicación teórica, aunque no sabemos nada existencialmente, sí sabemos algo formalmente, y esta diferencia nos basta para distinguir con una interrogación aquello de lo que no sabemos absolutamente nada de aquello acerca de lo cual tenemos motivos, aunque sean indirectos, para creer que tiene que ser de un determinado modo.

¿Por qué mantener entonces la diferencia entre la notación de "¬*d*¬*a"* y "¬*ad*?" en un caso como el de los exámenes de chicas con diez? Quizás porque $\neg d_x \neg a$, a pesar de ser una hipótesis existencial, es equivalente formalmente a la proposición empíricamente verificada $a_x d$. Por eso tiene mayor valor para nosotros $\neg d_x \neg a$ que la conjunción hipotética ¬*ad*, la cual no informa de nada. Y es por eso que a la primera le damos el rango de teoría en el diagrama y a la segunda de conjetura.

Si observamos los modelos de ¬*a*, *d* y ¬*d* en la siguiente ilustración veremos que solo el objeto DA es afirmado existencialmente.

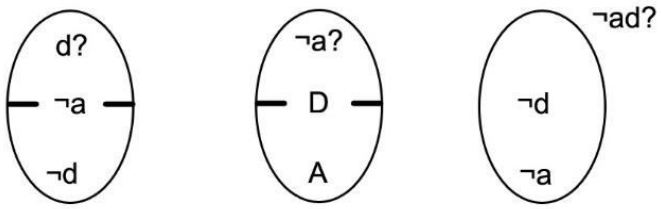


ILUSTRACIÓN 96. CONJUNCIONES CONJETURADAS, CONFIRMADAS Y MERAMENTE TEÓRICAS.

El problema con el que nos encontramos al tratar de acoplar los modelos proposicionales con lo que vimos en las redes es que allí era fácil distinguir cuando un nodo inactivo había sido confirmado previamente por la experiencia, pues aunque en el estado actual de la red se encontrara con un valor de activación igual cero, la memoria del número n de individuos podría señalar que n era igual o mayor que uno, es decir, existente. Pero esa sutil diferencia entre lo que sabemos seguro que es posible volver a presenciar y lo que suponemos que es posible presenciar por primera vez no es fácil mostrarla en los diagramas de Marlo. Y por ello debemos insistir en que la afirmación de *ab* no supone la existencia de *ab* si no hemos afirmado *AB*, $\overline{AB}$ o ∃*ab* explícitamente.

Los hechos se imponen a las teorías y obligan a su actualización permanente. Las teorías se imponen a las suposiciones. Así, premisas sin carga existencial pero con valor teórico por su carácter universal son suficiente razón para eliminar de la red todas las posibilidades incompatibles con ellas, al menos mientras los hechos no desmientan a las teorías.

5.4.1 Inferencia probable más que posible

En la Lengua Española, decir de algo que es *probable* significa que es razonablemente verosímil, que existen motivos para pensar que sucederá, mientras que cuando decimos de algo que es *posible*, solo afirmamos que puede suceder. Encontramos pues, que a pesar de ser casi sinónimos, hay diferencias en el significado de ambos términos, siendo lo probable entendido, por lo general, como algo más seguro que lo posible. Conscientes, no obstante, de la complejidad del significado de lo probable y de la diversidad de puntos de vista que existen respecto a su interpretación más filosófica, podemos aceptar con Batanero (2006) que la probabilidad es una percepción o grado de creencia sobre la plausibilidad de la ocurrencia de un suceso más que una propiedad dada como el peso o el volumen.

Como ya sabemos, una proposición del tipo *Si tengo A, entonces tengo B*, expresa de forma explícita que es razonable esperar *B* a partir de *A*. Pero también tendemos a pensar que se expresa de forma implícita que es razonable esperar *A* a partir de *B.* De hecho, la falacia de la afirmación del consecuente es una constante a la que nos enfrentamos permanentemente en el aula no solo los profesores de lógica, sino también de matemáticas cuando comprobamos que partiendo de "$p \rightarrow q$" la afirmación de *q* conlleva la de *p* (Monroy & Astudillo, 2010).

Pero supongan que su vida dependiera de acertar qué vía tomar. Hay varios caminos de arena y varios caminos que no son de arena y alguien de confianza les dice que el que ha pasado antes que usted se ha salvado tomando un camino de arena. Nadie le asegura que todos los caminos de arena sean seguros y no se niega en absoluto que haya caminos que no son de arena y son seguros. Incluso todos los caminos que no son de arena podrían ser seguros. ¿Pero qué camino tomar?

Es evidente que, así las cosas y con esa información disponible, lo razonable sería tomar un camino de arena. Ese camino de arena que tome es probable que sea seguro porque está confirmado que hay al menos un camino de arena seguro. Salvarse tomando un camino que no sea de arena solo es posible.

Para convencer a nuestros alumnos de la diferencia entre probable y posible hicimos un pequeño experimento en clase. Hice sonar mi mochila y les mostré de este modo que estaba llena de monedas, aunque les dije que ni yo mismo sabía qué tipos de monedas tenía en ella. Entonces les dije que iba a sacar dos monedas y que pondría varios positivos a quienes acertaran qué conjunción saldría. Las monedas posibles eran de un euro, de dos, de un céntimo, de dos, de cinco, de diez, de veinte y de cincuenta céntimos. Ellos escribieron sus pronósticos. Entonces saqué dos monedas, se las mostré y las volví a meter dentro, a la vista de todos, para que supieran que esos tipos de moneda ya eran seguros dentro de la mochila.

Repetimos el experimento. Y ahora ¿qué va a salir? Hicieron sus pronósticos y volví a sacar dos nuevas monedas y las volví a meter en la mochila. Así varias veces.

Lo interesante llegó cuando analizamos las estrategias que habían seguido para acertar lo que iba a salir. Hubo un grupo que siempre apostaba combinando monedas cuya presencia ya había sido confirmada en alguna sacada. Hubo otro grupo que combinaba confirmadas, que eran las probables, con posibles tipos de moneda que aún no habían salido. Un tercer grupo solo apostaba por monedas que no habían salido. El grupo que se llevó más positivos fue el primero y el que menos el último.

Podríamos haber formalizado las premisas progresivamente del siguiente modo. Tras sacar por primera vez y volver a meter una moneda de un euro y otra de cinco céntimos, ya podríamos decir que dentro de la mochila *Algunas monedas son de un euro* y *Algunas monedas son de cinco céntimos*. Entonces la combinación "un euro-cinco céntimos" sería probable, mientras el resto de las combinaciones solo sería posible.

Veamos otro ejemplo. Si alguien nos dice que es seguro que *Pedro tiene al menos un hermano que caza* y otra persona nos dice que *Seguro que Pedro tiene al menos un hermano electricista*, entonces, que Pedro tenga un hermano electricista que caza es probable y que tenga hermanos que ni pintan ni cazan solo es posible. En la ilustración vemos que el primer modelo nos dice que dentro del conjunto de los hermanos de Pedro está verificado el tipo *cazador* y si cogemos algo de ese conjunto es probable que sea *c* y posible que sea $\neg c$. También es probable *e*. Luego si partiendo de *p* es probable *c* y es probable *e*, entonces es probable *pce* (%pce) (25).

$$p_x(\%c\%e) \rightarrow \%\ \text{pce} \tag{25}$$

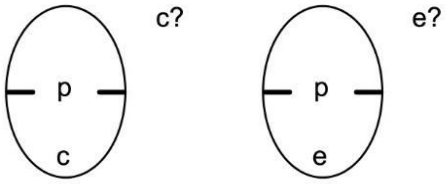


ILUSTRACIÓN 97. MODELOS PARTICULARES DE LOS QUE SE SIGUE UNA RELACIÓN PROBABLE Y VARIAS POSIBLES.

Insistiremos en ello al ver las leyes de la síntesis. Obviamente, en la lógica del objeto, si tengo *A* y tengo *B*, entonces tengo seguro *A* y *B* en el mismo objeto. Pero en la lógica del conjunto, si hemos verificado *A* por un lado y hemos verificado *B* por otro, entonces es probable *AB* (62).

$$A, B \rightarrow \%AB \tag{62}$$

Partir de proposiciones particulares fácticas solo nos permite realizar inferencias existencialmente probables. Es el caso cuando afirmamos la condicional $a_x b$ y además afirmamos $\neg A$, lo mismo que cuando afirmamos $a_x b$ y *B*. El primer caso se representa en la parte izquierda de la siguiente ilustración. El segundo caso en la parte derecha, tanto en las redes como en los modelos.

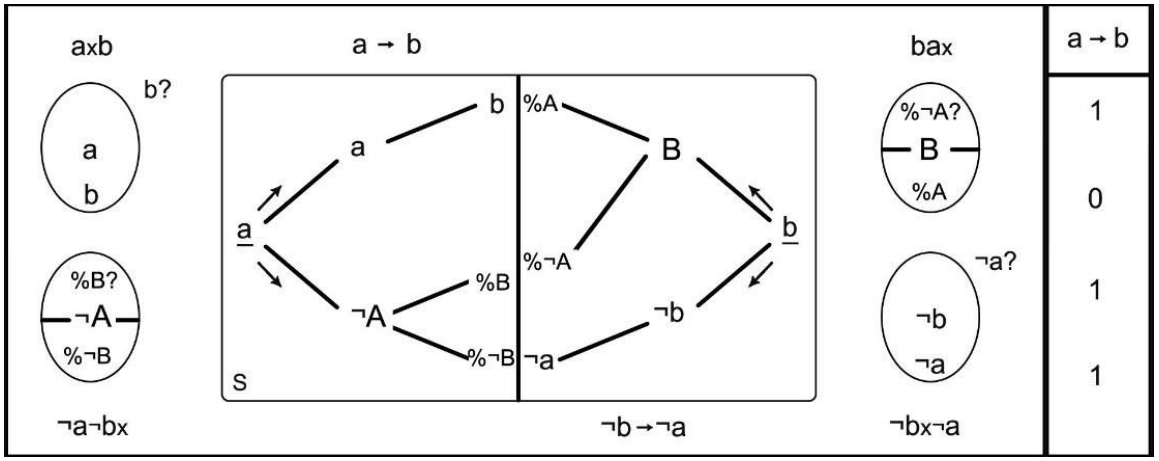


ILUSTRACIÓN 98. MODELO CONDICIONAL EN EL QUE AFIRMAMOS ¬A Y LUEGO B.

Insistimos nuevamente en que en las redes simples que maneja la lógica matemática, aceptando que *Si A, entonces B* y afirmando que *B*, ocurre que *A* y ¬*A* pueden ser consideradas matemáticamente igual de probables. Pero en los modelos de los diagramas de Marlo, si en el contexto de mi familia sabes que *Todos mis hermanos son beatos* y te presentan un beato que es parte mi familia, entonces el hecho de que sea mi hermano es para ti probable y que no lo sea meramente posible, lo cual justifica que sea razonable, hasta cierto punto caer en la falacia de la afirmación del consecuente.

Este modo de entender la inferencia nos permite explicar formalmente porqué la psicología considera adaptativas las falacias más corrientes (González Labra, 2011; Sutherland, 1996) y puede llegar a ser objeto de una interesante discusión filosófica la idea de que tal vez no sea más irracional el modo habitual de razonar de las personas que los sistemas lógicos vigentes en los que lo posible pesa tanto como lo probable (Aznar, 2016b).

5.4.2 Incertidumbre en los diagramas. Razonamiento plausible

Una de las formas en las que podemos simplificar el razonamiento lógico en nuestros diagramas es eliminar matices en la certidumbre existencial que acompaña a las clases que son formalmente compatibles con la información de las premisas. Podemos eliminar la denotación existencial de las sentencias universales, e incluso de las particulares suprimiendo la diferencia que establecemos al escribir en mayúsculas o minúsculas nuestras variables; basta con asumir que no hay clases vacías y nos ahorramos afrontar la compleja cuestión de las conversiones ilícitas y los inconvenientes que surgen al manejar los signos de interrogación en las variables solo posibles. De este modo reducimos la amplia gama de grados de verdad a dos y solo dos: 1 y 0, definiendo como verdadero todo aquello que no es falso. ¿Para qué distinguir entre posible, probable y existente? ¿Por qué distinguir entre probable 0,6 y 0,7? Aunque si optamos por complicarnos la vida, entonces podemos añadir en nuestros diagramas la sutileza de diferenciar entre lo que existe en teoría y lo que condiciona nuestras decisiones aquí y ahora por estar presente o ausente[15]. Sea como sea, creemos que estas sutilezas, más o menos prescindibles didácticamente, se pueden implementar igualmente en los diagramas de Venn, pero solo hasta cierto punto y sin alcanzar nunca la capacidad expresiva de los diagramas de Marlo y mucho menos de las redes de expectativas.

La forma de notación de nuestros diagramas, ligando la información existencial a las variables y no al área en el que se inscriben, nos permite liberar los términos del compartimento que ocupan en pro de un sistema de representación diagramática de los pasos de la inferencia más dinámico y flexible que nos permite, además, establecer un paralelismo mayor con las fases de la demostración algebraica y las que tienen lugar en el lenguaje natural.

Nosotros buscamos el encuentro del lenguaje simbólico y diagramático con el lenguaje natural del sentido común, convencidos, por una parte, de que lo contrario fomenta parte de las dificultades a las que, según Moktefi (2015) se ha enfrentado la lógica simbólica para ser reconocida como una necesidad científica y social desde sus inicios, y por otra, que de ningún otro modo pueden resultar útiles a nuestros estudiantes las abstracciones del lógico en su vida cotidiana

> (...) La lógica fue desarrollada por seres humanos en respuesta a necesidades humanas. La necesidad que dio origen a la lógica fue probablemente la de ser capaces distinguir pruebas (genuinas) de "pruebas" aparentes: de distinguir argumentaciones contundentes de argumentaciones falaces. (Corcoran, 2010)

> Tan incomprensible sería una demostracion geométrica ó metafísica exteriorizada por la gesticulacion ó el movimiento de los brazos, como inútil el trabajo de un orador que emplease un lenguaje geométrico para pintar á sus conciudadanos los peligros de la patria, y lanzarlos á pelear y á morir por ella. (Monlau & Rey, 1856, p. 177)

Recordemos que Venn (1881) muchas veces menosprecia las formas de pensamiento convencional, admitiendo en repetidas ocasiones que su representación simbólica de las proposiciones no es la más natural, pero que surge de una "necesidad simbólica", reconocida también entre otros por Mccoll y Frege que justifica la hostilidad del lógico a las nociones comunes o habituales, como en el caso de la implicación cuando se representa «'Todo x es y' por $x\bar{y} = 0$» (p. 341).

> My contention is that the really characteristic elements of the hypothetical of common life and of Inductive Logic are of a non-formal nature. Those characteristics are partly material and partly psychological, and therefore the determination to force these propositions through the forms of our system will naturally, so to say, crush all the life out of them. (Venn, 1881, p.341)

Aunque nosotros creemos que Boole no habría estado de acuerdo en el concepto de necesidad simbólica, pues consideraba el uso de símbolos un medio y no un fin en sí mismo.

> The necessity that the fixed result should be in such a form as to admit of that interpretation being applied, is founded on the obvious principle, that the use of symbols is a means towards an end, that end being the knowledge of some intelligible fact or truth. (Boole G., Trad. 2017, p. 49)

[15] Una sutileza que mis alumnos afirman comprender perfectamente, aunque nunca les he obligado a diferenciar en sus exámenes entre la negación de una cualidad (¬x) y la negación de la presencia ($\bar{x}$) que podemos combinar para generar $\overline{\neg x}$

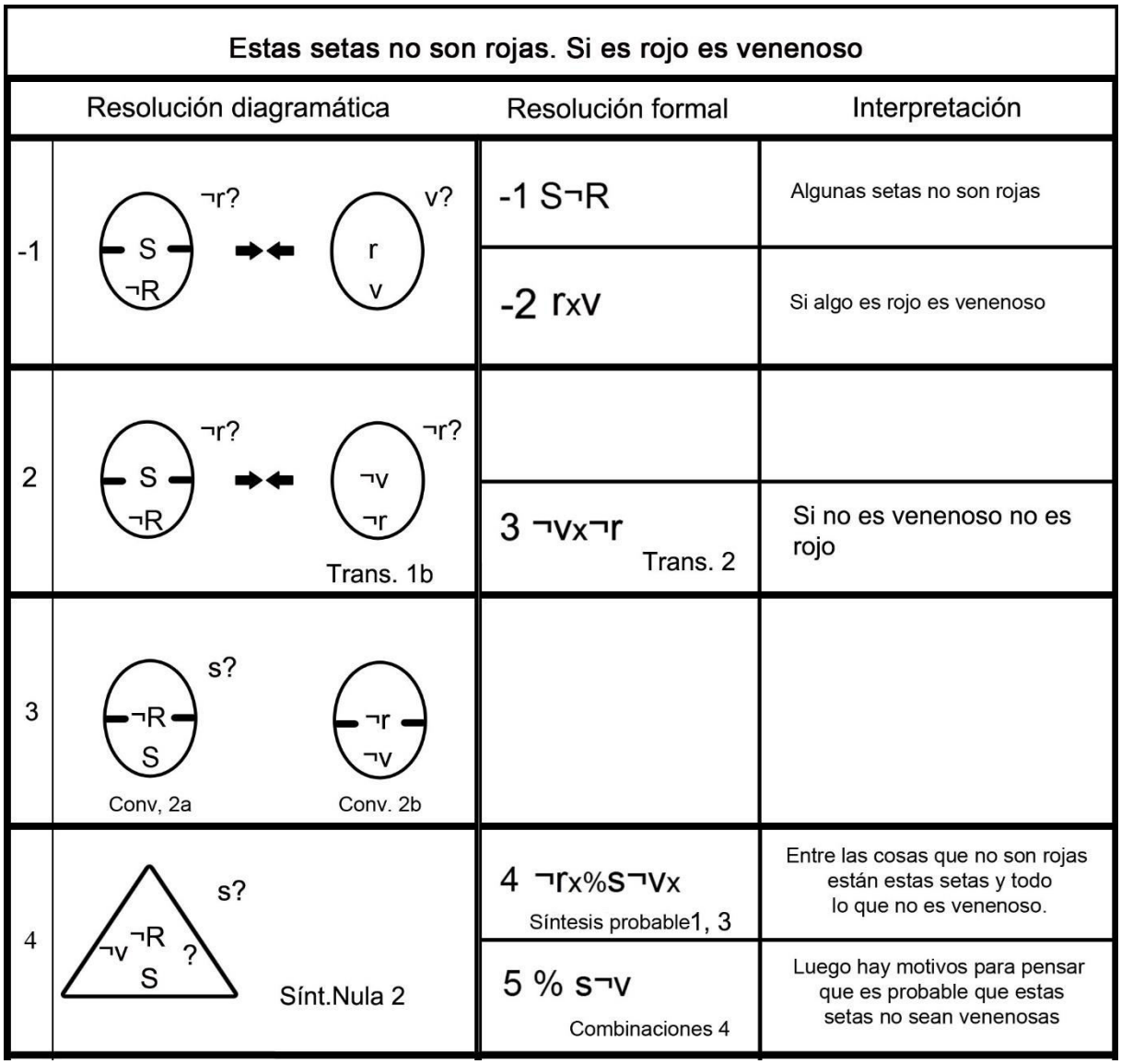


ILUSTRACIÓN 99. RAZONAMIENTO PLAUSIBLE EN EL DIAGRAMA DE MARLO CON SÍNTESIS PROBABLE Y MÁS QUE POSIBLE, AUNQUE NO NECESARIA.

Aceptar en los diagramas de Marlo y las redes de expectativas distintos grados de certeza existencial nos permite, como vemos en la ilustración 99, asumir aspectos del razonamiento plausible como el cálculo de probabilidades, la provisionalidad de las conclusiones, la credibilidad de la conjetura o la fuerza de la evidencia claramente definidos en (Polya, 1954).

> Según Pólya, aunque la verificación de la veracidad de B no prueba que la conjetura A es verdadera, sí la hace más digna de crédito. Esto sigue un patrón de inferencia plausible: A implica B. B es verdadera. A es más digna de crédito. Esto quiere decir que si, en un principio, tenemos la conjetura A que implica una proposición B y luego probamos que B es verdadera, entonces, después de esa prueba, la conjetura A tiene que parecernos más creíble que antes de la prueba de B. A este patrón lo llama patrón fundamental inductivo. (Barrantes, 2006, p.3)

Recordemos que Boole elaboró principalmente su sistema con el propósito de mejorar el cálculo de probabilidades Venn (1881) y nosotros creemos que incluir en nuestros diagramas y redes de expectativas razonamientos plausibles o abductivos, históricamente incluidos, nos dicen Visokolskis y Carrión (2017), bajo el concepto general de "argumento probable", nos permite acercarnos a una didáctica de la lógica para el ejercicio de la razonabilidad (Henao & Moreno-Torres, 2016). Aclaramos que, siguiendo a Visokolskis y Carrión (2013), entendemos por razonamiento abductivo aquel que, a diferencia de la deducción, no pretende ofrecer una garantía lógica absoluta, sino un determinado grado de confianza basado en una amplia gama de situaciones.

El diagrama anterior (ilustración 99), en el que hemos representado el razonamiento plausible, se ajusta claramente al patrón fundamental inductivo de Polya (1954), aunque se nutre de la idea del sentido común de que inferir *A* partiendo de *"A→B y es cierto que B"*, no es exactamente ni falso ni verdadero, ni 1 ni 0, mientras permanezcamos en la ignorancia de qué proporción de B es A.

Al repasar la obra de Boole, Venn y la de otros como Lambert a través de ellos, nos encontramos con que la lógica simbólica reconoce en sus inicios lo incierto como algo con lo que hay que contar en el curso de las demostraciones. Así, para Lambert (1771) "algo" es una fracción que cae entre 1 y 0, pero se deja indefinida.

Boole y Venn atribuyeron el signo (υ) y la expresión $\frac{y}{x}$ a lo incierto o indefinido, afirmando que al hacer la fracción confesamos nuestra ignorancia de cuáles deberían ser los límites de la extensión: "If we like to put A peculiar symbol (υ) to represent perfect uncertainty, we should write down the class symbolically as x + $\upsilon\bar{x}\bar{y}$". (Venn, 1881, pág. 71)

$$\begin{array}{lll} xy=0, & xy=v, & xy=1, \\ x\bar{y}=0, & x\bar{y}=v, & x\bar{y}=1, \\ \bar{x}y=0, & \bar{x}y=v, & \bar{x}y=1, \\ \bar{x}\bar{y}=0, & \bar{x}\bar{y}=v, & \bar{x}\bar{y}=1. \end{array}$$

ILUSTRACIÓN 100. PROPOSICIONES TOMADAS DE VENN, 1881, P. 170.

La dificultad que encontramos a veces al interpretar estos símbolos en la obra de Venn y Boole puede provenir del hecho de que Venn (1881) reconocía que se podían definir libremente de acuerdo a su juicio, pues casi no había asociaciones adquiridas que atender en ellos y que siendo así, lo mejor sería establecer que υ, en la segunda columna de la imagen anterior, fuera perfectamente indefinido, pero excluyendo 0 y 1, «haciendo que la segunda columna fuera intermedia entre la primera y la tercera» (p.171).

> It must be clearly understood therefore that if we put υ as an equivalent for , this υ is by no means a substitute for the 'some' of ordinary logic, since it includes 'nothing'; still less for the 'some' of ordinary language, since it includes 'all.' It is the more necessary to call attention to this since Boole himself has repeatedly treated this υ as equivalent to 'some', which I can only regard as an oversight. (Venn, 1881, p. 156)

Nos dice Venn (1881) que el signo υ indica «cierto grado de indeterminación» (p.76), que υ no es ni 0 ni 1 y significa que "There is A which is not B" o "A$\bar{B}$ is something" (p.30). También Boole había utilizado la misma notación y aunque supera los objetivos de esta tesis analizar la interpretación que hacían ambos autores de tal signo, es evidente que lo indefinido jugaba un papel en sus cálculos.

> "Some men are not-wise." Putting, then, *y* for "men," *x* for "wise," i. e. "wise beings," and introducing υ as the symbol of a class indefinite in all respects but this, that it contains some individuals of the class to whose expression it is prefixed, we have $vy = v(1 - x)$. (Boole, 2017, p. 45)

Nosotros creemos encontrar motivos para pensar que Boole entendía de forma muy similar a la nuestra lo indeterminado cuando afirmaba, por ejemplo, que tras la conversión de la proposición *Toda Y es X* se obtiene que *X* es igual a todo *Y* más una parte indefinida de ¬*Y*, la cual en diagramas de Marlo se expresa como ¬*y?* y en las redes de expectativas con el valor numérico "0" o el color amarillo que significan incierto. Encontramos en Boole (Trad.2017): "Things that are *X*'s include all things that are *Y*'s, and an indefinite remainder of things that are not*Y*'s. $x = y + \frac{0}{0}(1 - y)$" (p. 117).

La afirmación *Todo S es P* solo nos informa de que es seguro que una parte de *P* es *S*, pero conlleva la incertidumbre de no saber qué pasa con la otra parte de *P*, que bien podría ser *S* o no serlo. Y algo parecido ocurre con el resto de las sentencias. Ahora bien, cuando nos preguntamos por esa parte incierta de *P* podría surgir la duda añadida de si nos estamos preguntando por la incertidumbre acerca de la verdad de la mera posibilidad *P*¬*S* o bien por las dudas que tenemos acerca de si existen objetos que son *P*¬*S*. Un aristotélico podría reformular la cuestión del siguiente modo: ¿nos preguntamos por la forma de las cosas o por el compuesto de materia y forma? Es evidente que afirmar que *Todo S es P* no elimina la posibilidad *P*¬*S*, pero tampoco la afirma. Eso significa que como posibilidad formal sigue estando en juego y hay que contar con ella, pues como ha dicho Venn, todas las

clases que surgen de la combinación de clases existen formalmente, aunque otra cosa bien distinta es que exista algo en sus compartimentos, que bien podrían estar vacíos. La convención de Venn de suprimir el contenido existencial de las sentencias universales elimina buena parte de los problemas relativos a la incertidumbre y lo indefinido de un plumazo, equiparando, igual que Frege en su *Conceptografía*, el significado de la proposición universal al de las combinaciones que permite y prohíbe. De este modo se amputaba, desde nuestro punto de vista, la riqueza de matices que se perciben en Boole y su concepción de la lógica más ligada al razonamiento probable.

Venn atribuye otros significados a lo incierto, que no tienen que ver con la interpretación del valor de confianza de la clase $x\neg y$ partiendo de $Y \rightarrow X$, sino con la certeza de la conexión entre dos hechos que expresamos en juicios como *A una caída del barómetro le seguirá la lluvia,* pues, aunque esa sea la regularidad general, nos queda la duda de no saber si caerá mañana el barómetro

> But it is when I entertain a vague degree of doubt as to what the barometer will do, that I naturally take to using an 'if to indicate my state of mind. I express myself by saying ' If the glass falls it will rain'. (Venn, 1881, p. 333)

Desde nuestro punto de vista, la cuestión no es el hecho incuestionable de que no sabemos si mañana caerá el barómetro, que podemos representar con un valor 0 en nuestras redes. La cuestión es si somos capaces de dar un valor razonable a la expectativa de que caerá, o a la de que no caerá, partiendo de la presencia o ausencia de otras variables con las que podamos haberlo relacionado gracias a nuestra experiencia previa. Y diremos que nuestro proceder es razonable solo si a medida que aumente nuestra experiencia somos capaces de predecir con mayor acierto las ocasiones en las que efectivamente lo hará o no. Aunque solo si es lógico será razonable.

> Probability is expectation founded upon partial knowledge. A perfect acquaintance with all the circumstances affecting the occurrence of an event would change expectation into certainty and leave neither room nor demand for a theory of probabilities (...) So also the theory of probabilities contemplates the numerical measure of the circumstances upon which expectation is founded; and this object embraces the whole range of its legitimate applications. (Boole, 2017, p. 188)

Si ya afirmamos que Boole se había anticipado al enunciar las leyes de la inferencia silogística a las que nosotros llegamos analizando diagramas, también sostiene claramente en *An Investigation of the Laws of Thought* el punto de partida de las redes de expectativas lógico-bayesianas.

> Thus, instead of considering the numerical fraction p as expressing the probability of the occurrence of an event E, let it be viewed as representing the probability of the truth of the proposition X, which asserts that the event E will occur (...) Though the new application thus assigned to probability is a necessary concomitant of the old one, its adoption will be attended with a practical advantage drawn from the circumstance that we have already discussed the theory of propositions, have defined their principal varieties, and established methods for determining, in every case, the amount and character of their mutual dependence. Upon this, or upon some equivalent basis, any general theory of probabilities must rest. (Boole, 2017, p. 190)

Afirmar que la probabilidad de un evento E no se distingue de la probabilidad de que la proposición que afirma dicho evento sea verdadera no supone asumir ningún tipo de relativismo, porque las leyes que determinan la probabilidad de que sea cierta la proposición *Saldrá la fecha de nacimiento de mi hijo este año en la lotería* son ajenas por completo a la convicción que siento. Las leyes de la razón, a pesar de operar dentro de los límites del conocimiento humano, son independientes del miedo, el deseo y de toda otra circunstancia particular que pueda tener lugar en la determinación concreta de nuestras expectativas.

> The rules which we employ in life-assurance, and in the other statistical applications of the theory of probabilities, are altogether independent of the mental phænomena of expectation. They are founded upon the assumption that the future will bear a resemblance to the past; that under the same circumstances the same event will tend to recur with a definite numerical frequency; not upon any attempt to submit to calculation the strength of human hopes and fears. Now experience actually testifies that events of a given species do, under given circumstances, tend to recur with definite frequency, whether their true causes be known to us or unknown. Of course, this tendency is, in general, only manifested when the area of observation is sufficiently large. (Boole, 2017, p. 188)

5.5 La tabla de oposición del juicio

En *Sobre la interpretación* 10, 19b10-15 Aristóteles dice sobre la oposición entre aserciones de verbo predicativo y de verbo atributivo, con sujeto definido o indefinido que "sin verbo no hay afirmación ni negación alguna, pues *es,* o *será,* o *era,* o *llega a ser,* o todos los demás por el estilo, son verbos con arreglo a lo ya establecido y que, en efecto, cosignifican tiempo". Y pone a continuación como ejemplos de afirmación y negación: "*hay hombre - no hay hombre, hay no-hombre - no hay no-hombre, está todo hombre - no está todo hombre, está todo no-hombre - no está todo no-hombre*" (Aristóteles, Trad. 1995, p.56).

Por nuestra parte, las redes de expectativas permiten generar una representación diagramática de la clásica tabla de oposición del juicio (Aznar, 2016b, 2017b) que consideramos compatible con la versión aristotélica, que también en esto mantiene sus diferencias con la lógica matemática. Pensamos, siguiendo a Correia (2006), que la lógica matemática no atrapa el valor semántico de las inferencias entre universales contrarias (A y E) y entre subcontrarias (I y O) de la lógica de Aristóteles, y que perdemos matices al preservar solamente la verdad de las contradictorias (A y O, E e I).

Nosotros creemos que las redes de expectativas son capaces de atrapar el valor semántico de las contrarias y las subcontrarias en Aristóteles. En las redes fácticas de Alfa no pueden ni ser verdaderas ni falsas al mismo tiempo las contradictorias A-O y EI. Las contrarias E y A sí podrían ser falsas a la vez, pero no pueden ser verdaderas al mismo tiempo. Además vimos que sí es posible que las particulares I y O sean ambas verdaderas al mismo tiempo, pero no falsas a la vez.

Los mismos principios tendremos que expresar en los modelos proposicionales. El problema es que hay distintas formas de negar una proposición que simplemente afirma que tengo A.

- Puedo negar la presencia, afirmando su ausencia. Si es falso que está presente A, entonces está ausente A (64).

$$\neg (A) \rightarrow \bar{A} \tag{64}$$

- Puedo negar la esencia o cualidad. Si no es cierto que sea a, entonces es $\neg a$ (65).

$$\neg (a) \rightarrow \neg a \tag{65}$$

- Puedo negar la existencia. Si no existe a, entonces, para todo x se cumple que si x existe, entonces existe $\neg a$ (66).

$$\nexists a \rightarrow (\forall x, \exists x \rightarrow \exists \neg a) \tag{66}$$

- Podemos negar simplemente la afirmación devolviendo cualquier nodo a su estado de incertidumbre inicial, como cuando a la pregunta *¿Tengo A?* respondemos *No sé* (67).

$$¿(A)? \rightarrow a? \tag{67}$$

La negación se complica cuando negamos proposiciones que expresan conjunciones. ¿Qué negamos al negar un modelo proposicional?

Supongamos que afirmo que es falsa la proposición *Están aquí todos mis primos, los cuales son licenciados*. "No es cierto que [*P*]*L"*. El modelo proposicional [P]L expresa *Si P, entonces L y tengo L aquí y ahora*, luego al negarlo podemos estar negando cosas muy distintas.

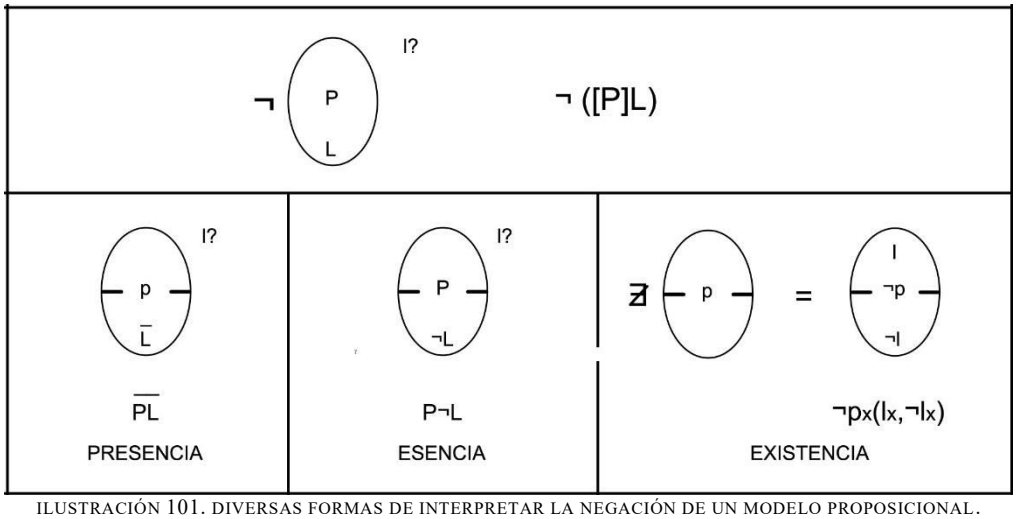


ILUSTRACIÓN 101. DIVERSAS FORMAS DE INTERPRETAR LA NEGACIÓN DE UN MODELO PROPOSICIONAL.

- Podemos negar que sea cierto que estén presentes todos mis primos, afirmando así que alguno está ausente (64).

$$\neg [P] \leftrightarrow \bar{P} \tag{68}$$

- Podemos negar que sea cierto que todos sean licenciados, de modo que afirmamos que hay que contar en teoría con que al menos algunos no son licenciados (69).

$$\neg (p_x l) \leftrightarrow p\neg l \tag{69}$$

- Podemos negar que existan mis primos, con lo cual afirmamos que si hay alguien no será primo mío. (66).

$$\nexists p \rightarrow (\forall x, \exists x \rightarrow \exists \neg p) \tag{66}$$

La relación jerárquica de inclusión entre los tres tipos de negación mencionados nos parece la siguiente: Negar la existencia niega la asociación universal y negar la asociación universal hace imposible la presencia de la totalidad universalmente asociada, pero no al revés (70).

$$\nexists p \supset \neg (p_x l) \supset \neg([P]L) \tag{70}$$

En nuestra opinión, las reglas de la comunicación aconsejan conservar la información que no se ha negado explícitamente. Luego si decimos sin más que es falso que estén aquí todos mis primos que son licenciados primero deberíamos entender que hay primos ausentes. Si no es por eso, entonces deberíamos entender que no todos son licenciados. Y solo una vez que descartemos este motivo y el anterior, podremos entender que no tenemos primos.

Nosotros resolveremos la negación de los modelos teóricos en los sistemas dicotómicos cambiando la cualidad del predicado y modificando el cuantificador del sujeto. Es decir, que al negar un modelo universal obtendremos uno particular y viceversa, aunque en todos los casos mantendremos la cualidad del sujeto y cambiaremos la del predicado. En todos los casos debemos recordar colocar los componentes del predicado al margen para no expresar que se agotan en el modelo del sujeto.

- Decir que es imposible que alguna *a* sea *b*, equivale a decir si hay *a* será ¬*b* y si hay *b* será ¬*a* (71).

$$\neg\,(\mathrm{ab}) \leftrightarrow (a_x \neg b) \wedge (b_x \neg a) \qquad (71)$$

- Decir que es imposible que toda *a* sea ¬*b*, equivale a decir que si existe *a*, al menos parte de ella es *b* (72).

$$\neg\,(a_x \neg b) \leftrightarrow ab \qquad (72)$$

- Decir que es imposible que *a* sea *b* o *c*, es afirmar que si existe *a*, entonces *a* no es ni *b* ni *c*. Y podemos deducir que toda b será ¬a, lo mismo que c (73).

$$(\neg\,(a_x(b,c)) \leftrightarrow a_x \neg b \neg c) \wedge (a_x \neg b \;\leftrightarrow\; b_x \neg a) \qquad (73)$$

De la correcta construcción de modelos que reflejen solo posibilidades admitidas por las premisas dependerá la validez de nuestras inferencias.

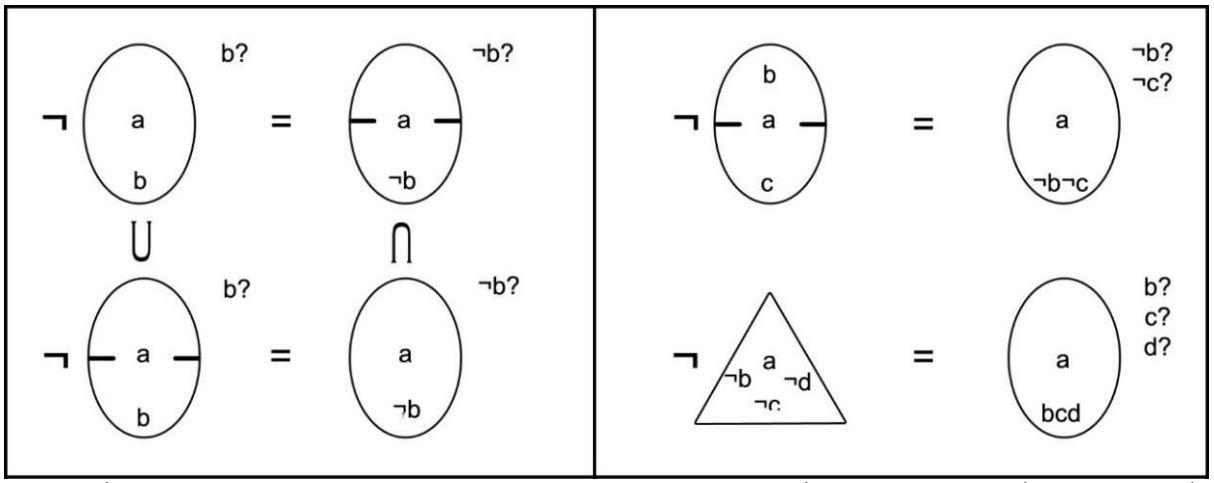


ILUSTRACIÓN 102. A) MODELOS CONTRARIOS RESPETANDO EL CUADRADO DE OPOSICIÓN DEL JUICIO ARISTOTÉLICO. B) NEGACIÓN DE MODELOS DISYUNTIVOS.

5.6 Leyes de la síntesis y exclusión de modelos proposicionales

Nosotros no vamos a proponer leyes de la inferencia distintas a las que ya fueron enunciadas por Boole y antes por Aristóteles. Pero antes de demostrar que no decimos nada nuevo, presentaremos estas leyes de la síntesis y la exclusión de forma resumida, tal y como se han publicado en (Címbora Acosta, 2017; Aznar, 2014, 2015, 2016b, 2018a, 2018b, 2018e). Se pueden consultar los vídeos explicativos 'Anexo 5: Cap. 7 Síntesis de modelos' y 'Anexo 6: Cap. 7 exclusión de modelos'.

5.6.1 Reglas de la síntesis de modelos por identidad.

Las proposiciones que comparten la misma variable como sujeto pueden sintetizarse en un único modelo proposicional. Al sintetizar nos encontraremos con dos modelos universales, con dos particulares, o con uno universal y otro particular.

Hay que tener en cuenta que las variables al margen de los modelos no influyen en el hecho de que la síntesis sea universal, parcial o probable, aunque sí van a influir en el hecho de que las conclusiones sean particulares o universales.

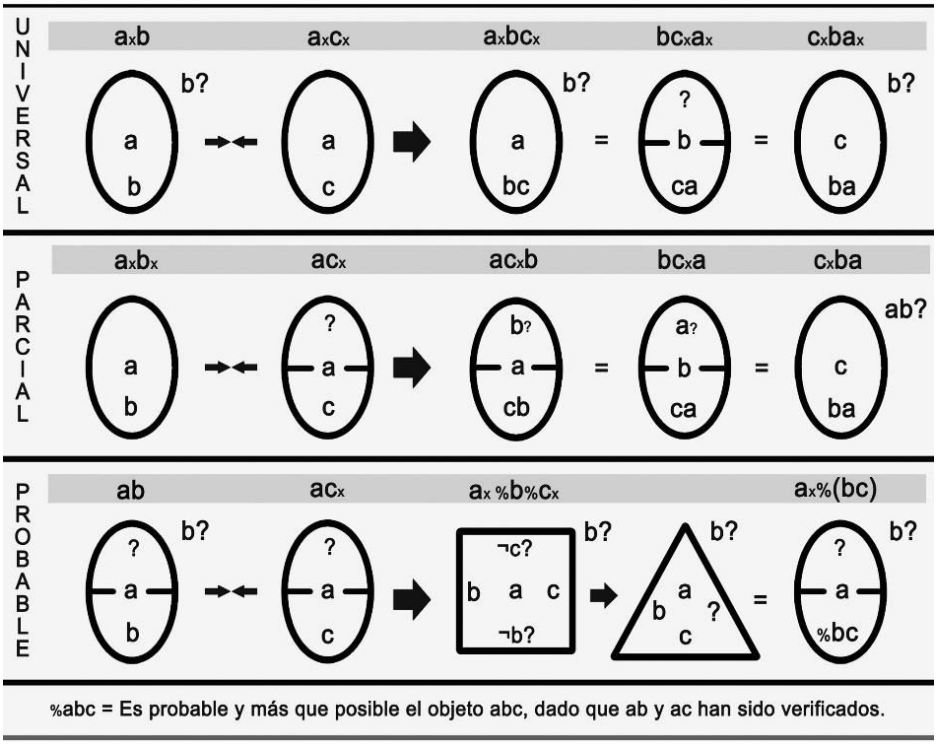


ILUSTRACIÓN 103. LEYES EN LA SÍNTESIS DE MODELOS PROPOSICIONALES.

En la síntesis universal, los modelos que se sintetizan son ambos universales, lo cual conlleva que la asociación de al menos parte de los extremos sea necesaria dentro del modelo resultado de la síntesis. Recordemos que según el principio de identidad, dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí. Luego si todos mis amigos beben vino y todos mis amigos cantan, entonces beber vino y cantar se dan necesariamente juntos en el interior del conjunto de mis amigos.

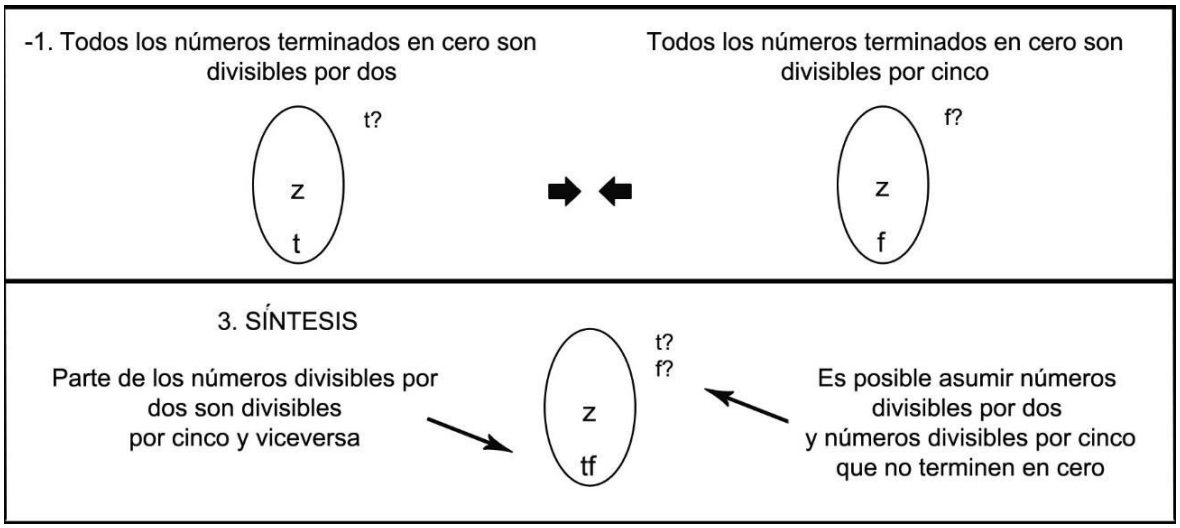


ILUSTRACIÓN 104. EJEMPLO DE SÍNTESIS UNIVERSAL. Z TERMINADO EN CERO; T DIVISIBLE POR DOS; F DIVISIBLE POR CINCO.

En la síntesis particular, un modelo es universal y el otro particular. Si todos mis amigos beben vino y seguro algunos cantan, es necesario que en la parte de los algunos que cantan también se beba vino. En la parte de los que no dijimos que cantan, aplicaremos el principio de incertidumbre, dejando incierto si en ella se canta o no.

En la síntesis probable, ambos modelos son particulares, de modo que no hay asociación necesaria. El principio de distinción nos obliga a separar provisionalmente en un mismo modelo las variables cuando no existe una razón suficiente para asociarlas como unidad. Por ello, al sintetizar modelos particulares, como no es necesario unir las variables, estas ocuparán lados distintos del modelo. Pero, si no se expresa explícitamente que esas variables

señalan objetos incompatibles, su combinación es probable. Por ejemplo, si nos informan de un primate que caza pequeños monos en Borneo y nos informan de un primate que limpia la fruta en Borneo, es probable, que se trate de una única especie que caza y limpia fruta. Es una creencia más que posible, pero no llega a ser necesaria. En los modelos complejos, cualquier combinación de sus partes es probable, mientras no se incurra en asociaciones imposibles.

5.6.2 Reglas del análisis de modelos por contradicción o exclusión

Cuando la cualidad del término medio es contraria en dos modelos, de modo que en uno es *A* y en otro ¬*A*, entonces los modelos se excluyen. En la exclusión nos fijaremos primero en el hecho de que los extremos se consideren universalmente o no. Si no se toma al menos uno de los extremos de forma universal no habrá inferencia, excepto cuando esto concurra con el hecho de que los medios excluyentes sean universales.

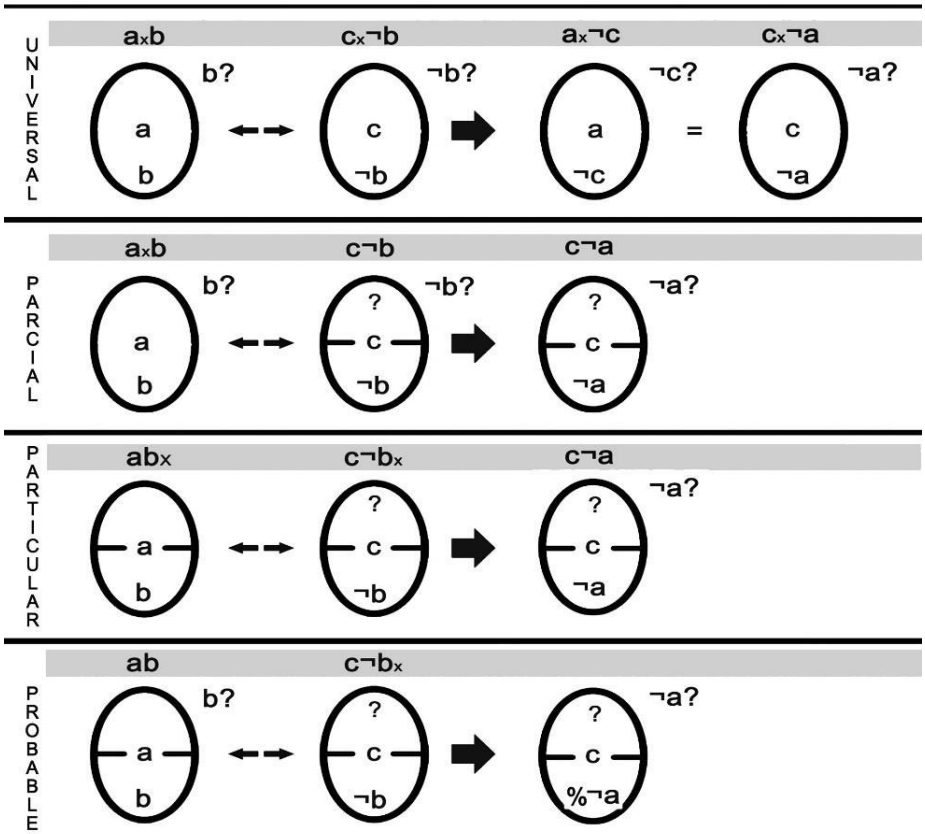


ILUSTRACIÓN 105. LEYES DE LA INFERENCIA POR EXCLUSIÓN.

Luego, si dos variables mantienen respectivamente relaciones con variables incompatibles entre sí, la relación entre ellas es imposible. Así, al enfrentar dos conjuntos definidos con alguna variable excluyente, obtenemos tres tipos de inferencia:

- Ninguna parte de *A* es *C* y ninguna parte de *C* es *A*. Llamaremos a este caso exclusión universal. Ocurre cuando ambos extremos se toman de forma universal con independencia de la cantidad del medio.

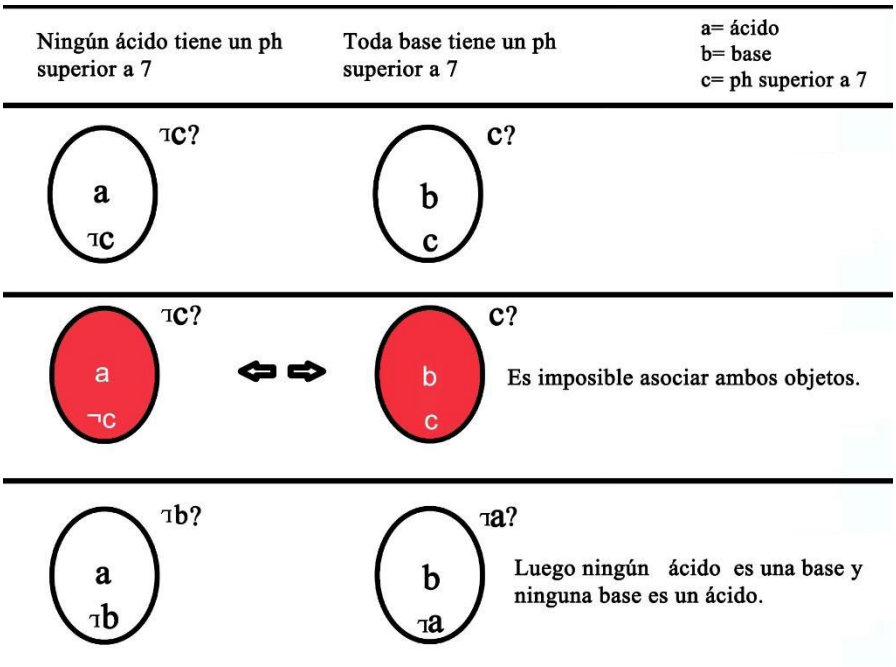


ILUSTRACIÓN 106. EJEMPLO DE EXCLUSIÓN UNIVERSAL.

- Una parte de *C* no es *A*, aunque toda *A* podría asociarse con una posible parte de C compatible. Llamaremos a este caso exclusión particular o parcial. Ocurre cuando solo un extremo es universal, o bien cuando ambos son particulares pero el término medio es universal en ambas proposiciones.

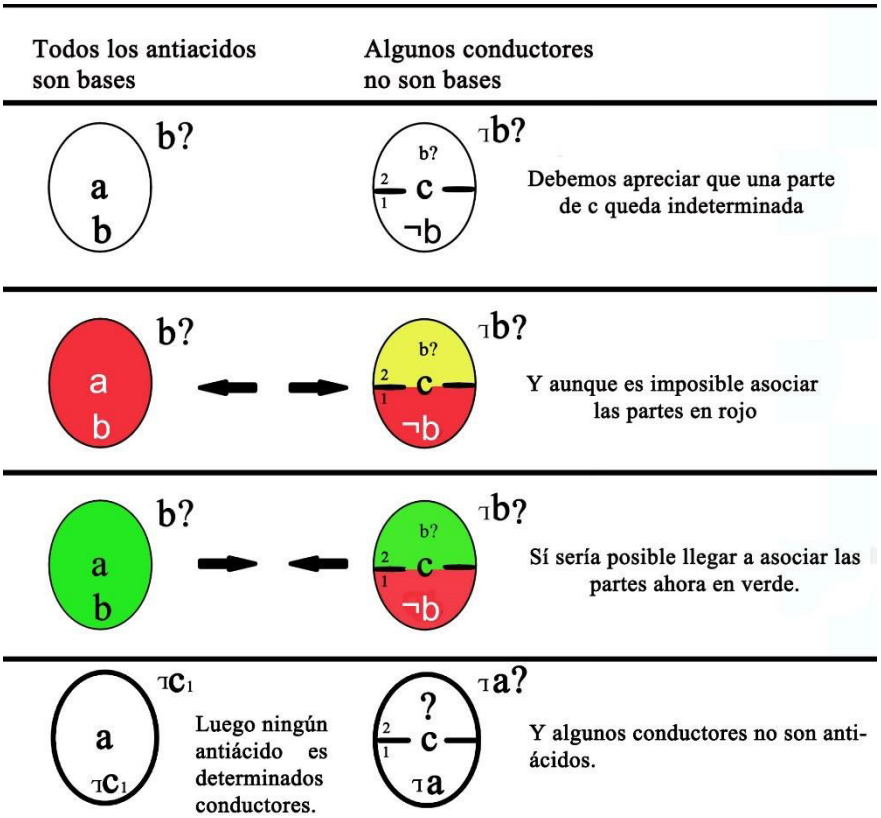


ILUSTRACIÓN 107. EJEMPLO DE EXCLUSIÓN PARCIAL.

Un ejemplo de exclusión particular cuando ambos extremos son particulares y el medio es universal sería el que mostramos en la siguiente ilustración.

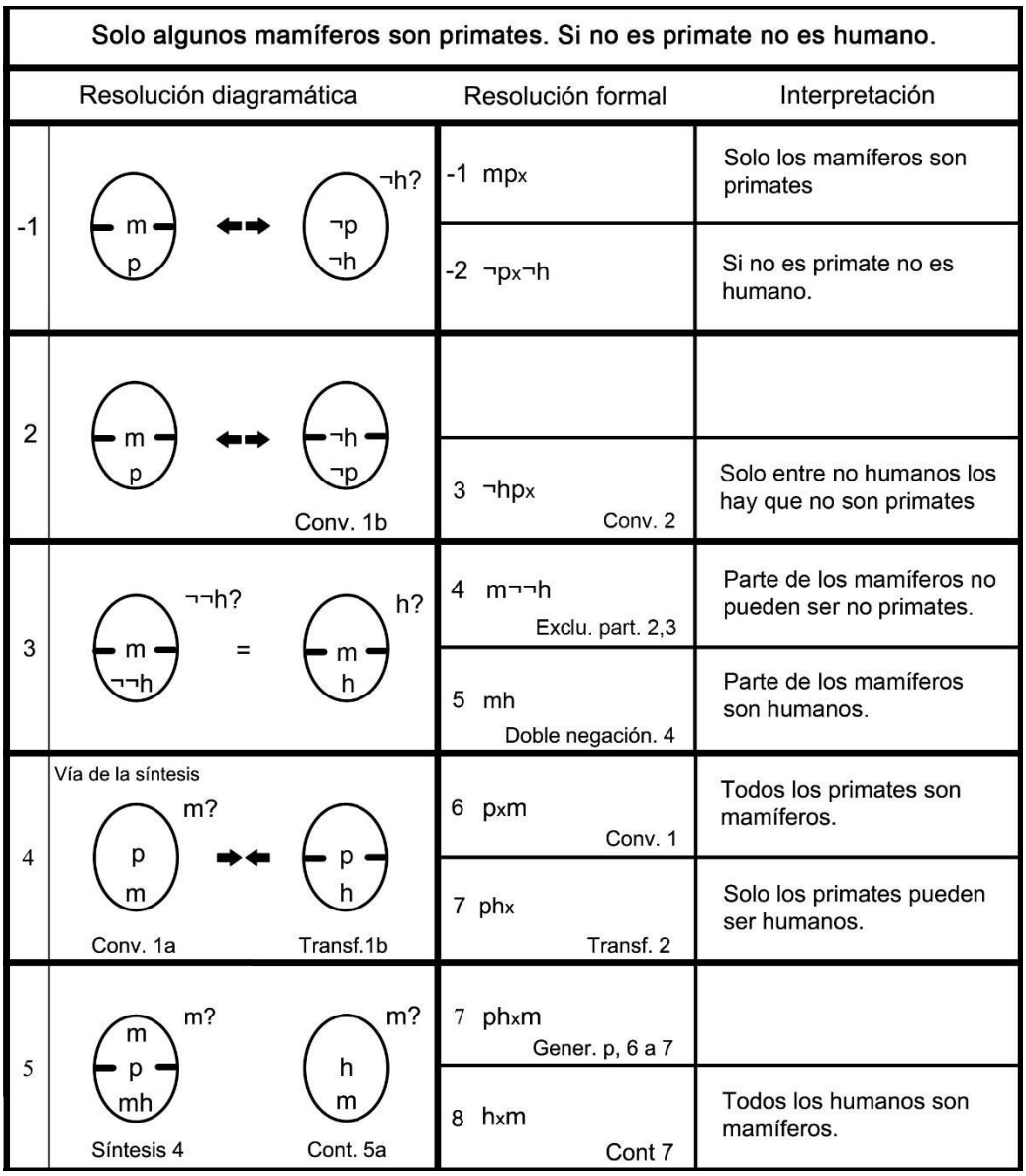


ILUSTRACIÓN 108. EJEMPLO DE EXCLUSIÓN PARTICULAR CON DOS EXTREMOS PARTICULARES Y UN MEDIO UNIVERSAL RESUELTO POR LA VÍA DE LA REPULSIÓN Y DE LA SÍNTESIS.

En el ejemplo anterior observamos que la conclusión del paso ocho es más precisa por la vía de la síntesis después de transformar la segunda premisa que la conclusión del paso cinco obtenida por exclusión. Nosotros hemos evitado hasta ahora admitir el caso de dos extremos particulares con medio universal entre los modos válidos de la exclusión, pues al transformar una de las premisas obtenemos un caso de síntesis particular. Sin embargo, debido al hecho de que Boole lo enuncie literalmente en 1854, nos hemos visto en parte obligados a reconocerlo.

En todo caso, la forma de notación de nuestros diagramas, ligando la información existencial a las variables y no al área en el que se inscriben, liberará los términos del compartimento que ocupan en pro de un sistema de representación diagramática de los pasos de la inferencia más dinámico y flexible que nos permite, además, establecer un paralelismo mayor entre las fases de la demostración gráfica, algebraica, y las que tienen lugar en el lenguaje natural, tal y como podemos comprobar en la ilustración anterior.

- No hay conclusión necesaria. Determinados tipos de *A* y *C* se excluyen, aunque toda *A* podría asociarse con algún tipo de *C*, o bien, toda *C* podría asociarse con un tipo de *A* no excluyente. Así, si A_1 es *B* y C_2 es ¬*B*, entonces es imposible que A_1 se asocie con C_2, quedan inciertas las relaciones de otros tipos de *A* con otros tipos de *C*. Ocurre cuando ambos extremos son particulares y no es el caso que el medio sea universal en ambas proposiciones.

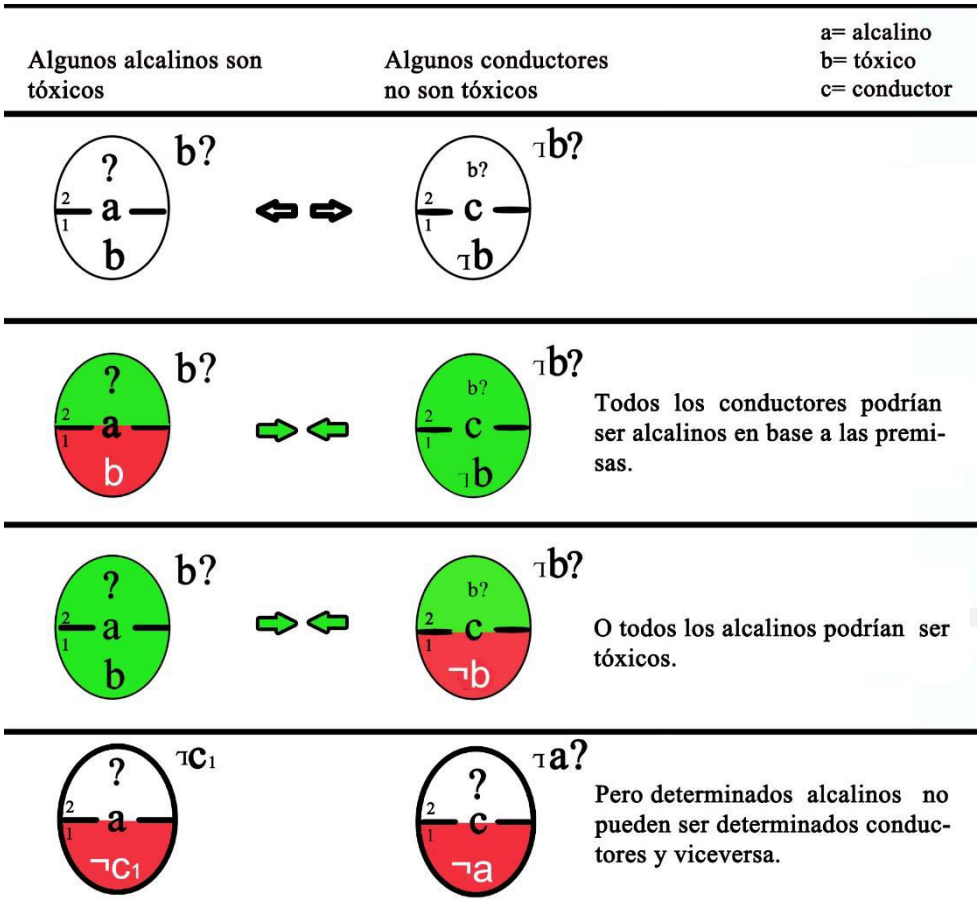


ILUSTRACIÓN 109. EJEMPLO DE EXCLUSIÓN NULA O PROBABLE.

Aunque las conclusiones por exclusión se hacen evidentes con la práctica, son las más difíciles de trabajar en el aula, y es que exigen atención, orden y flexibilidad en la consideración de las relaciones imposibles y posibles establecidas por los enunciados. Una capacidad que se mejora al corregir los movimientos oculares erráticos del alumno.

Toda inferencia silogística puede reducirse a procesos de síntesis y exclusión, incluyendo la lógica de proposiciones y de predicados. Sabemos que la transformación de una premisa nos permitirá resolver las inferencias por exclusión mediante síntesis o al contrario, resolver las inferencias por exclusión.

Al fin y al cabo, no estamos proponiendo nada distinto de las figuras formales del silogismo aristotélico adoptando las convenciones de la lógica matemática que permiten el uso de términos infinitos. Y lo resolvemos todo gracias también a que nos sumamos, sin saberlo en un primer momento, a la doctrina de la cuantificación del predicado.

Para encontrar silogismos categóricos válidos solo hay que aplicar a la razón suficiente las leyes de la síntesis, sin olvidar todo lo que sabemos acerca del objeto teórico. Es decir, que cuando al sintetizar tengamos que combinar necesariamente una variable cuya existencia es reconocida con otra variable validada teóricamente, la teórica asumirá la existencia.

Así, el principio de razón suficiente nos obliga a igualar el modo de existencia de todos los componentes de un objeto, siendo imposible que uno esté presente y otro ausente, o que uno exista y otro no. Pues si es posible

concebir una parte presente y otra ausente, el objeto ha dejado de ser considerado un objeto con identidad y pasa a formar un conjunto con partes numéricamente diferenciables.

5.7 Figuras de la estructura superficial de las sentencias

Miguel Candel define el silogismo como un esquema de enlace de tres términos (hóroi) llamados, respectivamente, «término primero» o «extremo mayor», «medio» y «término último» o «extremo menor:

> Enlace que, a través de dos enlaces binarios de cada uno de los extremos con el medio, enlaces conocidos como «premisas» o «proposiciones», permite establecer entre los extremos una relación no dada inicialmente (las relaciones inicialmente dadas son sólo las existentes por separado entre cada uno de los extremos y el medio). (Aristóteles, Trad. 1995, p. 86)

Nos dice Miguel Candel en la misma obra que Aristóteles intenta crear un mecanismo de convicción que, más allá de la semántica de los términos concretos, haga patente por su misma estructura, por su *figura,* la concatenación entre los extremos. Y, en el mismo sentido, en Johnson-Laird (1995) se afirma que el razonamiento o silogismo consiste en un encadenamiento de proposiciones, de manera tal que una se sigue necesariamente de otras y se citan la definiciones que da Aristóteles en *Tópicos* I, 1, y *Analíticos Primeros* I, 24b17: "un discurso en que puestas ciertas cosas otra cosa diferente de las puestas se sigue necesariamente por el hecho de que aquellas han sido puestas" (p. 177).

Así pues, una primera aproximación al concepto de silogismo lo señala como una estructura que subyace al discurso, que se puede identificar con lo que suele llamarse razonamiento deductivo (Johnson-Laird, 1995), permitiendo enlazar dos extremos gracias a la mediación de un término Medio.

P-M, M-S: P-S (donde P = término primero; M = término medio; S = término último).

En todo caso, debemos recordar que no todas las inferencias son silogismos. Las inferencias de una sola premisa se denominan inferencias inmediatas por carecer de término medio, como cuando se concluye la subalterna o la conversa (Johnson-Laird, 1995). Por ejemplo: *Todos los hombres son mortales* permite inferir en lógica aristotélica que A*lgún hombre es mortal*.

Este "mecanismo de convicción" denominado silogismo nos dice Miguel Candel (Aristóteles, Trad.1995) que está ya muy próximo al formalismo lógico, y también en Bochenski y Bravo (1985) se afirma que Aristóteles busca una conexión tal que le permita concluir con necesidad, estableciendo una aguda distinción entre la validez de esa conexión y la clase o verdad de las premisas, lo cual constituye la primera formulación histórica de una lógica formal de validez universal independiente de la materia.

Se afirma en Johnson-Laird (1995) que los principios en que se basa toda la silogística categórica se han denominado el *dictum de omni* y *dictum de nullo* porque, según Aristóteles, un predicado se dice de todos cuando en el sujeto no cabe hallar ninguna parte de la que no se diga el predicado; y un predicado no se dice de ninguno si no cabe hallar parte alguna del sujeto de la que se diga el predicado. En otras palabras: lo que se dice o se niega de un sujeto universalmente, se dice o se niega de cuanto está contenido bajo él.

Ya hemos dicho que para Aristóteles el silogismo conecta proposiciones en las que se afirma o se niega algo de algo. De una manera sencilla podemos definir el silogismo como un razonamiento que consta de al menos dos premisas de las que se sigue necesariamente una conclusión. Cada premisa es una proposición que se compone de dos términos unidos por una cópula que puede ser traducida al verbo ser. Por ejemplo,

Ladrar conviene a todo perro = Los perros ladran = Todos los perros son ladradores

Diremos de dos premisas que están encadenadas siempre que compartan un término que se repite en ambas y que servirá como base de la ilación o razonamiento. Como señalan Oriol y Gambra (2015) los escolásticos distinguían entre la materia próxima y la remota del silogismo es decir, los tres términos, llamando extremos a los que no se repiten y término medio el que se repite, que el que posee toda la fuerza conclusiva del silogismo, "por cuanto sirve para conectar a los otros dos en la conclusión" (p.179).

En el silogismo clásico la premisa mayor contiene al término mayor que ejercerá como predicado de la conclusión. El ejemplo más sencillo de silogismo es:

DIAGRAMA DE MARLO

Toda B es A

Toda C es B

Luego toda C es A

que utilizando la terminología aristotélica sería:

Si A es predicado (es verdadero) de todo B

y B es predicado (es verdadero) de todo C,

entonces A es predicado (es verdadero) de todo C.

En cualquier caso, la primera estructura formal patente que subyace a la terminología moderna y a la aristotélica puede ser expresada como

P-M

S-M

∴ S-P

De cada silogismo se desprende para Aristóteles una única conclusión en la que el término menor ejerce como sujeto y el mayor como predicado. Si aceptamos la hipótesis de Einarson (1936) de que Aristóteles trabajaba con diagramas lineales comprenderemos que la conclusión válida de cada silogismo se obtiene al comparar, siempre de abajo a arriba y en el mismo sentido, la línea que representa al término menor, más próximo al que dibuja, con la línea que representa al término mayor, que queda más alejado.

Para obtener una segunda conclusión del tipo P-S habría que invertir el orden de las premisas, lo cual no siempre es compatible con las restricciones que impone Aristóteles al silogismo demostrativo. Pensemos que los términos infinitos que estaban prohibidos en las premisas siguen estando prohibidos en las conclusiones, luego será inválida cualquier conclusión con la forma ¬A es B

Si ahora nos fijamos en la posición que ocupa el término medio en las premisas, obtenemos las cuatro figuras clásicas del silogismo determinadas por la tradición escolástica.

Primera	Segunda	Tercera	Cuarta
M-P	P-M	M-P	P-M
S-M	S-M	M-S	M-S

Sin embargo, Aristóteles define en *Analíticos Primeros* tres figuras, no cuatro. Afirma Ross (Aristóteles & Ross, 1957): “Aristotle examines five special types of argument with a view to showing that all methods of producing conviction by argument are reducible to one or other of the three figures of syllogism” (p.5).

También en Bochenski y Bravo (1985) se apoya esta postura:

> Que Aristóteles no quiere admitirla [la cuarta figura] se desprende del hecho de que define teóricamente los términos no por su posición en el silogismo, sino por su extensión, es decir, no de una manera formal, sino según su significado (...) En todo caso, Aristóteles solo propuso de la supuesta cuarta figura explícitamente el mencionado Fresison y Fesapo, mientras que solo llegó a insinuar Dimaris, Bamalip y Camenes. (p. 84)

Para los escolásticos, las figuras del silogismo se generan de la manera en que los términos silogísticos se disponen en las premisas (Oriol & Gambra, 2015, pág. 180). A su vez la clase de las premisas (A, E, I, O) determina los modos silogísticos. Modos y figuras constituyen lo que los escolásticos han llamado la forma del silogismo. Así, como indican (Oriol & Gambra, 2015, pág. 198), en el s.XIII los escolásticos medievales denominaron los modos válidos con un nombre para recordarlos y señalar la manera en que los modos imperfectos se reducen a los perfectos. Las de la cuarta figura son Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison aunque a veces se emplean otras.

DIAGRAMA DE MARLO

1ª figura: Barbara, Celarent, Darii, Ferio

2ª figura: Cesare, Camestres, Festino, Baroco

3ª figura: Darapti, Felapton, Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison

4ª figura: Baralipton, Celantes, Dabitis, Fapesmo, Frisesomorum

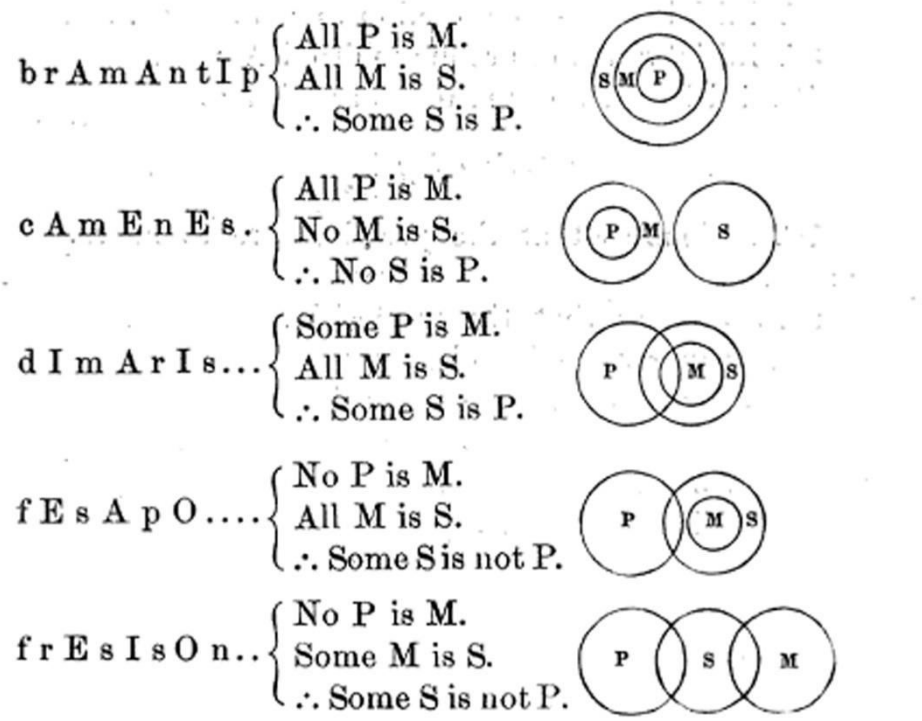


ILUSTRACIÓN 110. DIAGRAMAS PARA LA CUARTA FIGURA. TOMADOS DE SCHUYLER, 1869, P. 71.

No obstante, y según Bochenski y Bravo (1985), no puede decirse que Aristóteles ofreciera ningún principio sistemático para determinar si el número de silogismos es 14, 19 o 24, pues él solo trabajó 19 por extenso[16]: de la cuarta figura y con precisión Fesapo y Fresison; sugeridos con claridad Dimaris, Bamalip, Camenes e indirectamente indicados los cinco modos subalternos.

Nos dicen Oriol y Gambra (2015) que Aristóteles distingue tres figuras silogísticas dependiendo del lugar que ocupe el término medio y que no cabe una cuarta figura, pues en la primera no distingue si lo que se predica del medio es predicado o sujeto en la conclusión. El criterio de Aristóteles no tiene en cuenta las posibles conclusiones, ni si los extremos ejercen en la conclusión el papel de sujetos o predicados y tampoco qué premisa va delante. En todo caso, según Oriol y Gambra, Aristóteles sí trató separadamente el caso en la primera figura «en que el predicado de la conclusión es lo que, en las premisas, se predica *del* medio, y el caso en que el predicado de la conclusión es aquello de lo que, en las premisas, se predica *el* medio» (p. 181). Luego sí cabe según estos autores diferenciar en este sentido una cuarta figura, aunque no constituya una diferencia esencial en la estructura del silogismo.

Henle (1949) afirma que Aristóteles dividió las figuras en función de que el término medio fuera sujeto en una y predicado en otra, o bien el predicado de ambas, o bien sujeto de ambas, siendo sus discípulos Teofrasto y Eudemo los que dividieron la primera figura según fuera el caso que el término medio ejerciera de predicado de la mayor o de sujeto de la mayor; cuando Galeno afirmó que la cuarta era una figura distinta empezó la controversia. Afirma Henle que la discusión acerca de la existencia de esta cuarta figura ha girado erróneamente en torno a la cuestión de si representa un curso de pensamiento distinto al de la primera figura, que es errónea porque el

[16] (1ª Barbara, Celarent, Darii, Ferio), (2ª Cesare, Camestres, Festino, Baroco), (3ª Darapti, Felapton, Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison).

problema que trataba de resolver Aristóteles era el de validar formalmente ciertas formas de argumentación, siendo ajenas para él las cuestiones psicológicas. El motivo de incluir la cuarta figura no fue otro que el de dar simetría al silogismo para ganar elegancia.

> When, later, Galen appeared on the scene, there was no problem of the syllogism in the sense that there had been for Aristotle or even for Theophrastus. The problem was solved. It was known what conclusion could be drawn from every combination of premisses. All that remained was to arrange the results in the most elegant form. From this point of view there is no doubt of the propriety of adding a fourth figure. It represents a distinctive arrangement of premisses and gives a symmetry to the scheme of figures that was lacking in Aristotle's treatment. (Henle, 1949, p. 104)

Encontramos también en Bochenski y Bravo (1985) que Aristóteles no quiso establecer una cuarta figura para Fresison y que también Galeno afirmó categóricamente que no hay más que tres figuras, aunque Anmonio le atribuya haber afirmado en su *Apodíctica* que, atendiendo a los silogismos compuestos que constan de cuatro términos, hay cuatro figuras (Łukasiewicz, 1951).

> I have inspected the Dialectic of Galen, published for the first time at Paris in 1844, by Minoideg Mynas, a Greek, from a MS. of the eleventh century found in the East ; and am of opinion — that Galen did not adopt the fourth- figure, and that an occasional transposition of the premisses in the 1st figure may have led to the erroneous belief that he did. (Thomson W., 1871, p. 206)

Ya en el siglo XIX, Hamilton (1860) afirma que no hay diferencias entre la primera y cuarta figura del silogismo y hoy encontramos en la *Enciclopedia de Standford* (Bobzien, 2016), que se afirma que las figuras del silogismo dependen de la posición del término medio en la sentencia, tal y como reproducimos a continuación.

> Based on the position of the middle term, Aristotle classified all possible premise combinations into three figures (*schêmata*): the first figure has the middle term (*B*) as subject in the first premise and predicated in the second; the second figure has it predicated in both premises, the third has it as subject in both premises:

I	II	III
A holds of *B*	*B* holds of *A*	*A* holds of *B*
B holds of *C*	*B* holds of *C*	*C* holds of *B*

TABLA 23. FIGURAS DEL SILOGISMO EN LA *ENCICLOPEDIA DE STANDFORD*. TOMADAS DE BOBZIEN, 2016.

5.8 Figuras lógicas por la estructura profunda

En lugar de prestar atención a la estructura superficial de la sentencia determinada por el lugar que ocupa el término medio en las premisas podemos ir en busca del *Lekton* o estructura ideal de la proposición como ya hicieron antes, se nos dice en Bochenski y Bravo (1985), Aristóteles, los estoicos, la escolástica y Frege. El diagrama de Marlo reduce todas las formas de inferencia silogística a dos clases fundamentales: la Síntesis y la Exclusión. Cuando al formalizar dos premisas el término medio mantenga en ambas la misma cualidad, ya sea afirmativa o negativa, procederemos a la síntesis de modelos en base al principio de identidad. Sin embargo, si al formalizar las premisas el término medio adquiere una cualidad contraria, procederemos por exclusión en base al principio de no contradicción (Aznar, 2014).

Síntesis por identidad		Exclusión por no contradicción
P-M S-M	P-¬M S-¬M	P-M S-¬M
M →← M ¬M →← ¬M		M←→¬M
→← atracción		←→ repulsión
Primera y tercera figura aristotélica		Segunda figura: Cesare, Camestres, Festino, Baroco

TABLA 24. CORRESPONDENCIA DE LAS FIGURAS ARISTOTÉLICAS CON EL DIAGRAMA DE MARLO.

Esta división elemental de las figuras del silogismo basada en la compatibilidad del término medio en ambas premisas, con total independencia de su posición en las sentencias, de su función en las mismas como sujeto o predicado o de su extensión respecto a los extremos, no es una idea original en ningún modo. Nosotros llegamos a ella trabajando gráficamente con los modelos proposicionales de nuestro diagrama, pero ya fue propuesta por Boole y Hamilton como división fundamental de toda inferencia silogística a mediados del siglo XIX.

Hamilton propone un silogismo *No-figurado* que subyace a las tres figuras del silogismo aristotélico, afirmando que es absurdo reducir las figuras dos y tres a la primera porque todas ellas son únicamente una variación accidental del silogismo (Ueberweg, 2001, Uerberweg & Lindsay, 1871). La cuarta figura, nos dice Atwatek (1867) se identifica en Hamilton con los modos indirectos de la primera: "All other figures may be similarly reduced. It is thus apparent that the Unfigured Syllogism expresses nakedly the essential principle which under lies reasoning in all the Figures" (p.143)

> The diagram truly represents, by its various concentric triangles, the Unfigured Syllogism, as involving the Figured, and, of the latter, the First Figure as involving the two others. (In fact, the whole differences of Figure and Figures are accidental; Moods alone are essential, and in any Figure and in none, these are always the same and the same in number). (...) Figure and the differences of Figures all depending upon the difference of the mutual contrast of Subject and Predicate between the syllogistic terms; consequently, if this relation be abolished, — if these terms be made all Subjects, (or it may be all Predicates), the distinction of Figure will be abolished also. (We do not abolish, be it noted, the Syllogism, but we recall it to one simple form.) — And this is represented in the diagram. (Hamilton, 1860, pp. 470, 471)

> The Unfigured Syllogism is properly represented as including all the others, as any Syllogism of either Figure may be easily expressed in this form. In like manner the triangle representing the First Figure is made to include the two typifying respectively the Second and Third, as either of the latter may be readily reduced to the former. And again, the essential unity of the Syllogistic process, and the unessential nature of variation by Figure, are appropriately signified by a single triangle comprehending all the varieties of form. (Atwatek, 1867, p. 239)

Las leyes o cánones de este silogismo *No-figurado* se corresponden con los principios del razonamiento mismo: "In as far as two notions, (notions proper or individuals,) either both agree, or one agreeing, the other does not, with a common third notion, in so far, these notions do or not do agree with each other" (Baynes, 1850, p. 154). Aunque cabe preguntarse, como hace Thompson W. (1871), qué diferencia hay entre los cánones de Hamilton y el dictum aristotélico: "But the question was raised — is the dictum the sole law of perfect inference? Is it not simply an account of the process of the first figure, and might not each of the other figures have its dictum- too?" (p. 202).

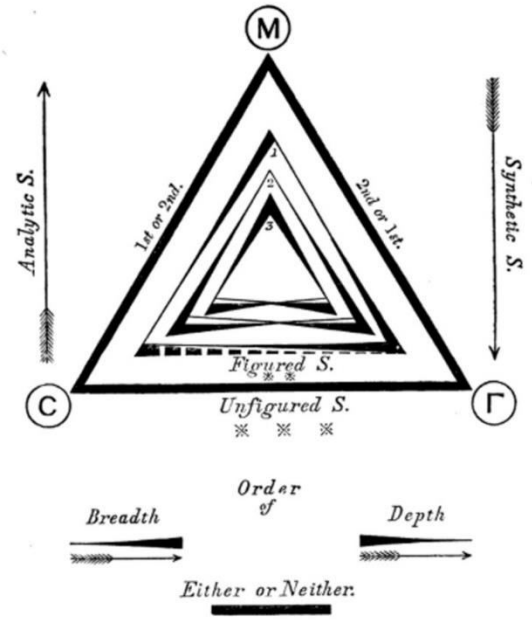


ILUSTRACIÓN 111. SILOGISMO *NO-FIGURADO* CONTENIENDO A LAS TRES FIGURAS ARISTOTÉLICAS. TOMADA DE HAMILTON, 1860, P. 469.

En Baynes (1850) Hamilton afirma que mentalmente, el silogismo categórico, según su orden de anuncio, es analítico o sintético. Analítico si la conclusión se expresa primero y las premisas son las que se exponen como sus razones. Sintético si las premisas preceden y, por así decirlo, ejecutan (*effectuate*) la conclusión. El silogismo sintético lo divide en el "*Figured*" y el "*Unfigured*". En el "*Unfigured*", o *No-figurado*, que ha sido tradicionalmente desatendido por los lógicos según Hamilton, los términos no mantienen entre sí una relación de sujeto y predicado: "the terms compared do no stand to each other in the reciprocal relation of subject and predicate, being in the same proposition either both subjects or both predicates" (Baynes, 1850, p. 153).

En el silogismo *No-figurado* los términos mantienen relaciones de igualdad (Mahan, 2009; McCosh, 1867, 1880; Croke, 1906; Thomson W., 1871) y es por ello que, nos dice Atwatek (1867), ambos extremos, de las líneas que conectan los términos tienen la misma amplitud. Y añade Atwatek: "After the explicit quantification of both terms of a judgment, the relation between them may be expressed by the sign of equality, and either of them may become indifferently subject or predicate" (p.142). Un ejemplo tomado de Schuyler (1869) es el siguiente: «A y B coexisten, B y C coexisten; Luego A y C coexisten» (p. 90).

Nos dice Hamilton en Baynes (1850) que el canon por el que se regula el silogismo *No-figurado* ha sido tenido como principio del razonamiento durante cinco siglos sin que se llegara a generalizar como forma misma del razonamiento afirmando que: en la medida en la que dos nociones coinciden ambas, o una coincide y la otra no, con una tercera noción, dichas nociones coinciden o no entre sí: "In as far as two notions, (notions proper or individuals,) either both agree, or one agreeing, the other does not, with a common third notion, in so far, these notions do or not do agree with each other" (p.154). Y en Schuyler (1869) leemos: «1st. As far as two terms agree with a third, so far they agree with each other. 2d. As far as one term agrees and another disagrees with a third, so far they disagree with each other» (p. 90).

El orden de las premisas es arbitrario en el silogismo *No-figurado* que se representa en el diagrama anterior conectando los términos con líneas de igual amplitud, dado que en él desaparecen la dependencia de amplitud o extensión (*breadth*) y profundidad o intensión-comprensión (*deapth*) que se relacionan en las tres figuras aristotélicas con sujeto y predicado. En la ilustración anterior vemos que el silogismo *No-figurado* encierra a las tres figuras aristotélicas del silogismo.

> For as the opposition of Subject and Predicate, of Depth and Breadth, is shown in the opposition of the thick and thin ends of the same tapering line ; so where, (as in the outmost triangle), the prepositional lines are of uniform breadth, it is hereby shown, that all such opposition is sublated. (Hamilton, 1860, p. 471)

También nosotros hemos considerado que la clave fundamental para desentrañar la conexión entre la estructura profunda y superficial de las figuras del silogismo, "a key to the hole mystery of syllogism" (Baynes, 1850, p. 154), es el hecho evidente, señalado por Boole en 1854, de que la coincidencia o disparidad de la cualidad del término medio en las premisas determina el modo de la inferencia, pues si el término medio es equivalente en cualidad en ambas premisas se afirma que los extremos coinciden y si no, que no coinciden.

Hamilton considerará que existe algún tipo de relación en el silogismo entre las funciones de sujeto y predicado y el modo en el que interaccionan la extensión y la comprensión en el razonamiento dando amplitud y profundidad a las premisas.

Cuatro años más tarde afirmará Boole que el primer punto de referencia al considerar una inferencia sería la equivalencia o contrariedad del término medio de las premisas, un principio que deducía de la constitución del lenguaje y que creía confirmado por el estudio de las operaciones de la mente humana:

> Let *X* and *Y* be the elements or things entering into the first premiss, *Z* and *Y* those involved in the second. Two cases, fundamentally different in character, will then present themselves. The terms involving *Y* will either be of *like* or of *unlike quality*, those terms being regarded as of like quality when they both speak of "*Y*'s," or both of "Not-*Y*'s," as of unlike quality when one of them speaks of "*Y*'s," and the other of "Not-*Y*'s." Any pair of premises, in which the former condition is satisfied, may be represented by the equations. (Boole, 2017, p. 179)

> We have seen that in each of its two great divisions the entire discussion is reducible, so far, at least, as concerns the determination of rules and methods, to the analysis of a pair of equations (...) when the premises have like middle terms, and of the system (...) when the middle terms are unlike. Moreover, that analysis has been actually conducted by a method founded upon certain general laws deduced immediately from the constitution of language, (...) confirmed by the study of

> the operations of the human mind (...) and proved to be applicable to the analysis of all systems of equations whatever, by which propositions, or combinations of propositions, can be represented. (Boole, 2017, p. 184)

Como vemos, Boole reduce toda la discusión sobre la determinación de las reglas y métodos del silogismo al análisis de las ecuaciones en las que las premisas tienen términos medios similares y de las premisas con términos medios diferentes, anticipando los principios de la inferencia por síntesis y por exclusión mostrados diagramáticamente en Aznar, (2014, 2015, 2016b, 2018b). Es interesante destacar que pudimos llegar a las mismas conclusiones que Boole formalizando las proposiciones en el diagrama de Marlo de un modo compatible con la doctrina de la cuantificación del predicado (Aznar, 2018g) y que nunca nos hubiéramos percatado de algo tan elemental de haber formalizado la universal negativa como se hace en los diagramas de Venn, es decir, haciendo hincapié en la exclusión entre *A* y *B*. Nuestro diagrama pone el énfasis en el hecho de que *A* se asocia con ¬*B*, y no en el hecho de que *A* no se asocia con *B*. Esto nos permitirá captar posteriormente la asociación que pueda establecer un silogismo entre dos variables asociadas al mismo tiempo con ¬*B*. Es decir, que si tengo ¬*B* en la primera premisa y tengo ¬*B* en la segunda podré inferir por síntesis de ¬*B,* si es que ¬*B* es considerada universalmente al menos en una de las premisas.

En cualquier caso, podríamos afirmar que Boole reduce a dos las figuras del silogismo, aquella en la que la inferencia se legitima por el principio de identidad y aquella en la que se legitima en base al principio de no contradicción. Y también en Aristóteles creemos encontrar esta diferenciación básica, aunque no expresada de un modo tan explícito. Primero porque lo que define a la segunda figura aristotélica del silogismo es que en ella, y solo en ella, las inferencias se producen por exclusión. Y segundo, porque la primera figura y la tercera figura se corresponden con el caso en el que el término medio es igual en ambas premisas, ajustándose la definición de la primera figura a lo que nosotros llamamos síntesis particular, mientras la definición de la tercera se corresponde con lo que llamamos síntesis universal.

Es obvio que la consideración del silogismo demostrativo que hace Aristóteles se realiza desde una perspectiva diferente a la de Boole y a la que nosotros hacemos en el diagrama de Marlo, fundamentalmente porque nuestra única preocupación al establecer las figuras del silogismo ha sido la verdad formal de las conclusiones. Sin embargo, tenemos la sensación al leer los *Analíticos Primeros* de que no decimos nada nuevo al respecto, ni nosotros ni Boole antes que nosotros.

Sin duda, Aristóteles tuvo que partir de la estructura superficial de las premisas para poder realizar exhaustivamente el análisis de todos los silogismos posibles y sabemos que los silogismos imperfectos pueden llegar a ser perfectos (Lear, 2010). En todo caso, es evidente que distinguió las tres figuras, como indica Henle (1949), en función de que el término medio fuera predicado en ambas premisas, en una o en ninguna, siendo lo mismo para él la primera figura y la cuarta: sujeto en una y predicado en la otra. Parece lo más probable que analizara una por una todas las posibles combinaciones, distinguiendo *a priori* dentro de los casos en los que el término medio ejerce de sujeto en una premisa y de predicado en otra, entre silogismos en los que en la premisa mayor el medio ejerce de sujeto (primera figura) y aquellos en los que en la premisa mayor el medio ejerce de predicado (cuarta figura). Pero después de realizar el análisis tuvo que observar que subyace la misma figura lógica profunda en ambos casos.

Así pues, Aristóteles debió analizar uno por uno todos los silogismos posibles reduciendo las cuatro posibles figuras superficiales del silogismo en función del lugar que ocupa el término medio en ambas premisas a solo tres. Encontramos en *Analíticos Primeros* I, 23, 41a12-20:

> Si, pues, necesariamente hay que tomar algo común a ambas cosas, cabe < hacer> esto de tres maneras (en efecto, o predicando A de C y C de B, o C de ambos, o ambos de C), y ésas son las figuras explicadas. Es evidente que por fuerza se formará todo razonamiento mediante alguna de esas figuras. En efecto, el mismo argumento < vale> también si < lo otro> se pone en contacto con B a través de varias cosas más: pues la figura será la misma aun en el caso de muchos <términos medios>. (Aristóteles, Trad. 1995, pp. 173-174)

A la misma cita de Aristóteles apelan Bochenski & Bravo (1985) para afirmar que solo hay tres figuras:

> Si pues, hay que tomar una cosa común a ambas, y esto puede suceder de tres maneras- Bien, en efecto, se predica 1, A de C y C de B; bien 2, C de los otros dos, bien, 3, ambos de C-, y éstas son precisamente las (tres) figuras aludidas, es claro que todo silogismo ha de realizarse mediante una de estas figuras. (p. 83)

DIAGRAMA DE MARLO

También es evidente que Aristóteles, suponemos que apoyándose en diagramas lineales al estilo de los geómetras, llegó a la comprensión de que no todos los modos del silogismo son válidos desde el punto de vista formal, pues no siempre la expresión gráfica de las premisas conducía a una única representación concluyente en cuanto a la necesidad de excluir o incluir parte o la totalidad del término menor en el mayor. En *Analíticos Primeros* I, 7, 29a15-20 leemos: "Está claro también que, en todas las figuras, cuando no se produce razonamiento, siendo ambos términos predicativos o ambos privativos, no se produce en absoluto ninguna <conclusión> necesaria" (Aristóteles, Trad. 1995, p. 123). Si analizamos *a posteriori* los silogismos de las figuras que se establecen superficialmente, veremos que en todos los casos subyace una única figura lógica para todos sus modos válidos. Lo que nosotros llamamos síntesis particular para la primera figura, exclusión para la segunda y síntesis universal para la tercera. Pensamos que Aristóteles deja entrever en *Analíticos Primeros* esta definición formal de cada una de las figuras profundas en los capítulos 4, 5 y 6, que dedica a los razonamientos asertóricos. Hay fragmentos que parecen encajar a la perfección con nuestras definiciones de síntesis particular, exclusión y síntesis universal.

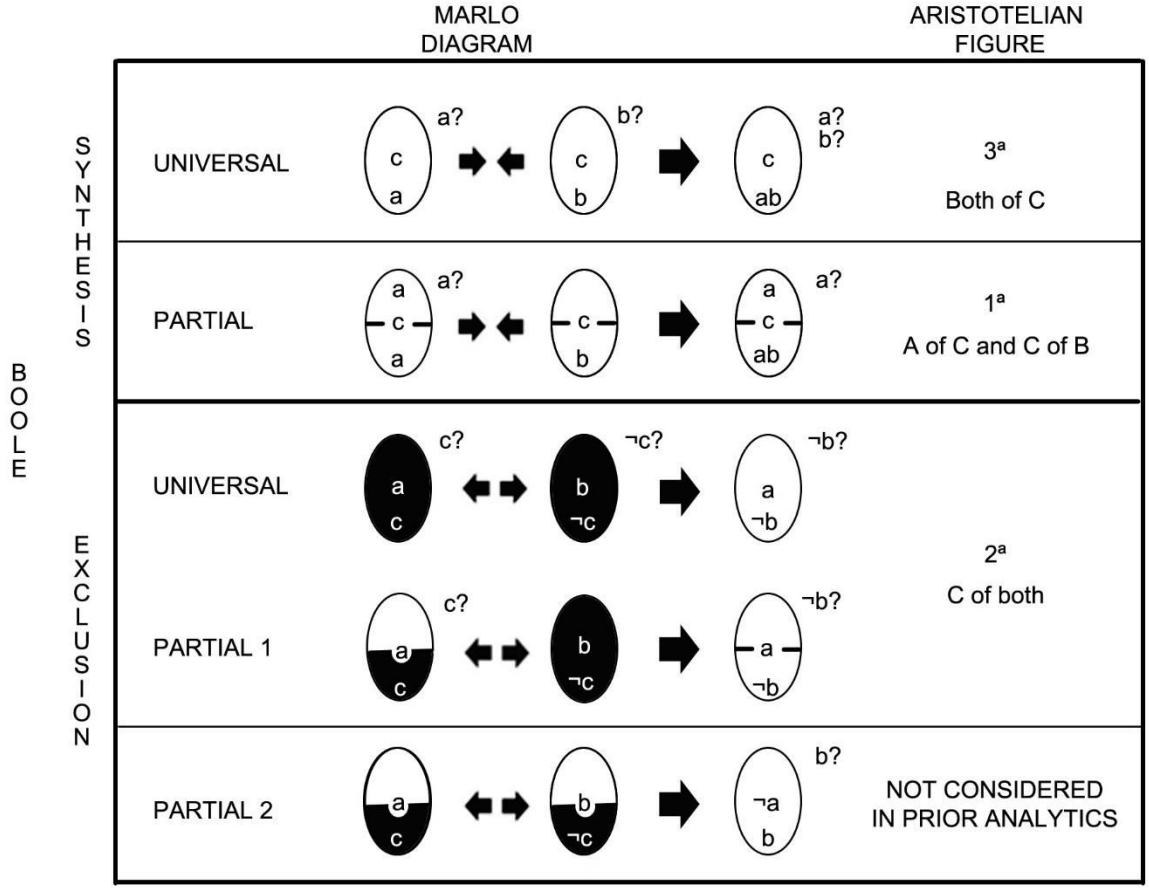


ILUSTRACIÓN 112. CORRESPONDENCIA FIGURAS ARISTÓTELES, BOOLE Y DIAGRAMA DE MARLO.

Tampoco sabemos hasta qué punto Aristóteles tenía en mente la división de las figuras lógicas que estableció Boole, ni hasta qué punto coincidía con las que establecemos en el diagrama de Marlo. De la correspondencia de sus definiciones de las figuras con las de Boole en 1854 y las nuestras nos ocupamos en el siguiente apartado, conscientes de la divergencia de nuestros puntos de vista, pero convencidos también de la correspondencia de los principios fundamentales que legitiman formalmente la inferencia. En *Analíticos Primeros* I, 3, 25b30 leemos: "la demostración es un cierto tipo de razonamiento pero los razonamientos no son todos demostraciones" (Aristóteles, Trad. 1995, p. 101). En la siguiente tabla (26), son señaladas en verde las casillas que nombran modos válidos para la tradición aristotélica, los cuales se organizan en función de las figuras superficiales. En el centro de la tabla señalamos la estructura profunda de los silogismos del siguiente modo: SP significará síntesis particular; SU significará síntesis universal; S% significará síntesis nula o solo probable; EP debe interpretarse como exclusión particular; EU significa exclusión universal y EN significa exclusión nula.

	FIGURAS		
MODOS	PRIMERA	CUARTA	MODOS
AA	SP		AA
AE	EP		EA
AI	SP		IA
AO	EN		OA
EA	SP		AE
EE	EP		EE
EI	SP		IE
EO	EN		OE
IA	S%		AI
IE	EP		EI
II	S%		II
IO	EN		OI
OA	S%		AO
OE	EP		EO
OI	EN		IO
OO	EN		OO

	FIGURAS		
MODOS	SEGUNDA	TERCERA	MODOS
AA	S%	SU	AA
AE	EU	SU	EA
AI	S%	SP	IA
AO	EP	SP	OA
EA	EU	SU	AE
EE	S%	SU	EE
EI	EP	SP	IE
EO	SP	SP	OE
IA	S%	SP	AI
IE	EP	SP	EI
II	S%	S%	II
IO	EN	S%	OI
OA	EP	SP	AO
OE	S%	SP	EO
OI	EN	S%	IO
OO	S%	S%	OO

TABLA 25. FIGURAS SUPERFICIALES Y PROFUNDAS DEL SILOGISMO EN EL DIAGRAMA DE MARLO (SEGUNDA PARTE).

Las exigencias que Aristóteles impone a la verdad material en el silogismo demostrativo, el rechazo de términos infinitos y su forma de entender las proposiciones negativas le impedía aceptar como silogismos demostrativos buena parte de los silogismos que nosotros consideramos formalmente válidos en la tabla anterior.

Sin embargo, y dejando a un lado el análisis de sus complejos y difíciles silogismos modales, las condiciones formales para la validez o invalidez de todo razonamiento silogístico han sido expresadas por Aristóteles del mismo modo que fueron expresadas por Boole.

La primera y la tercera figura comparten en esencia el mismo principio de la inferencia en los diagramas de Marlo: la síntesis del término medio que garantiza que al menos una parte de uno de los términos quede asociada (o excluida) de una parte del otro extremo, siempre que al menos el término medio haya sido tomado universalmente en una de las premisas. Formalmente:

	Particular. Primera Figura	Universal. Tercera figura
Premisa mayor	$s_x p$	$s_x p$
Premisa menor	sr	$s_x r$
Conclusión garantizada	rp/ r¬p	rp/ r¬p

TABLA 26. SÍNTESIS PARTICULAR Y UNIVERSAL EN LAS FIGURAS PRIMERA Y TERCERA.

Aristóteles comprendía perfectamente las bases formales de la inferencia que hacen posible el razonamiento silogístico. Esa es la impresión que tenemos nosotros al leer *Analíticos Primeros* a la luz de nuestro diagrama. Nos parece como si todo lo que hemos descubierto sobre la figura lógica ya lo supiera él; como si él fuera muchos pasos por delante de nosotros y no le preocupara en absoluto sistematizar algo tan básico, sino afrontar retos mucho más complejos como determinar qué silogismos son científicos o la cuestión de la modalidad. El desinterés por lo básico le habría impedido profundizar en la distinción entre lo que hemos llamado figura superficial del silogismo y figura profunda.

Parece como si, para estudiar el problema del silogismo científico, Aristóteles hubiera analizado uno por uno todos los silogismos que se generan a partir de la estructura superficial, del mismo modo que tuvimos que hacer gráficamente nosotros.

Define los modos válidos de las tres figuras de tal forma que encajan con nuestra distinción entre síntesis particular (1ª figura), exclusión (2ª figura) y síntesis universal (3ª figura), pero prosigue sistemáticamente con el análisis de qué inferencias son demostrativas ordenando los silogismos en función de su figura superficial. Al fin y al cabo, ordenar los silogismos en función de su estructura lógica profunda solo puede hacerse *a posteriori* y le habría obligado a reorganizar todo su trabajo dedicando tiempo a algo que no parece que fuera en absoluto una preocupación para él.

Tal vez Boole tuvo una comprensión más profunda de la estructura lógica que Aristóteles cuando afirmó que lo esencial del silogismo es que la cualidad del medio coincida o no coincida en las premisas y explicitó las condiciones de la inferencia anticipando las leyes de la síntesis y la exclusión a las que llegamos mediante análisis diagramático de las proposiciones. O tal vez no, si aceptamos que dichos principios ya han sido explícitamente formulados en *Analíticos Primeros*, aunque no de forma sistemática ni siempre precisa, quizás porque como afirma Miguel Candel: “Esta forma imprecisa de exposición parece motivada por el prurito de concisión que caracteriza casi toda la obra aristotélica” (Aristóteles, Trad. 1995, p.119).

A pesar de todo, es un hecho que Aristóteles no sigue en *Analíticos Primeros* el orden que se sigue de la clasificación de las leyes de la inferencia que evidencia Boole en 1854 y que sirve para clasificar las leyes de la inferencia en el diagrama de Marlo.

5.9 Primera figura: Síntesis Particular

Aristóteles define en *Analíticos Primeros* I, 4, 25b30-35 la primera figura del siguiente modo:

> Así, pues, cuando tres términos se relacionan entre sí de tal manera que el último esté < contenido> en el conjunto del <término> medio y el <término> medio esté o no esté <contenido> en el conjunto del <término> primero, habrá necesariamente un razonamiento perfecto entre los < términos> extremos. Llamo < término> medio a aquel que está <contenido> en otro y otro está <contenido> en él, y que también resulta ser intermedio por la posición; llamo extremos tanto al que está < contenido> en otro como a aquel en que otro está < contenido>. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 102)

Y añade un poco más adelante en 26a30-35: «Llamo extremo mayor a aquel en el que está <contenido> el medio, y menor el que está subordinado al medio» (Aristóteles, Trad. 1995, p. 104).

Lo que en el diagrama de Marlo se denomina síntesis particular o parcial se corresponde exactamente con la primera figura que establece Aristóteles para el silogismo, que es además priorizada como aquella en la que tienen lugar los razonamientos perfectos. Si empleamos primero un diagrama lineal, como el que pensamos que pudo usar Aristóteles, tenemos dos representaciones de la estructura lógica de la inferencia en la primera figura (ilustración 113).

Aristóteles afirma que debe haber tres términos (A, B, C) que se relacionan entre sí. Dice que llama medio a aquel que:

1º Está o no está contenido en otro. Vemos claramente en la ilustración 113 que la línea de B está contenida en A en Barbara y que no lo está en Celarent.

2º Otro está contenido en él. Es evidente que C está contenido en B tanto en Barbara como en Celarent, y lo mismo ocurre en Darii y Ferio. En Darii y Ferio se dan las mismas premisas y las mismas conclusiones

3º Resulta ser intermedio por la posición.

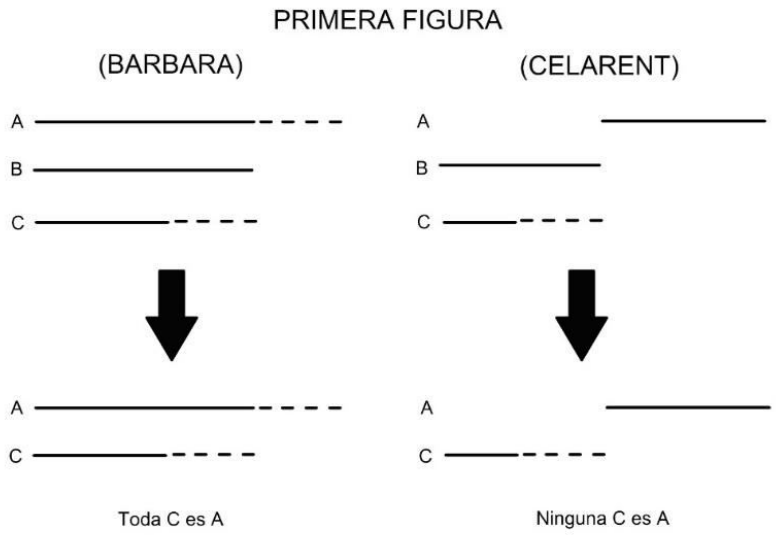


ILUSTRACIÓN 113. PRIMERA FIGURA ARISTOTÉLICA EN DIAGRAMA LINEAL.

Esta primera figura le parece a Aristóteles que permite un razonamiento perfecto. En el diagrama lineal de Barbara se ve cómo efectivamente los tres términos se relacionan de modo que el último C está contenido en B, mientras que el término medio B está contenido o no en el primero, esto es, en A. Hay que tener en cuenta que Aristóteles escribe el texto como si leyera los diagramas lineales de arriba abajo. Así, en Barbara, como vemos en la figura anterior, B se predica de todo C. Nosotros diríamos que *Todo C es B*.

La síntesis particular del diagrama de Marlo se ajusta exactamente a esta primera figura del silogismo, mostrando de un modo evidente que las inferencias de Barbara, Celarent, Darii y Ferio comparten la misma estructura lógica en cuanto a la relación de las proposiciones que ejercen como premisas.

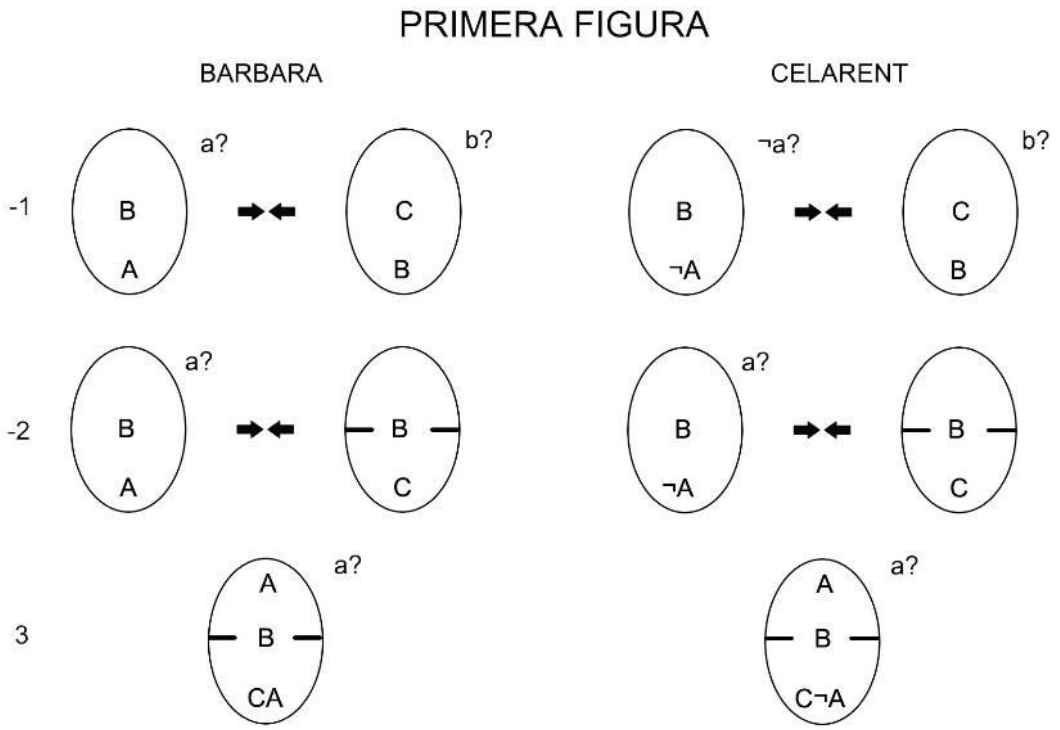


ILUSTRACIÓN 114 ESTRUCTURA FORMAL DE LA SÍNTESIS PARTICULAR EN EL DIAGRAMA DE MARLO PARA BARBARA Y CELARENT.

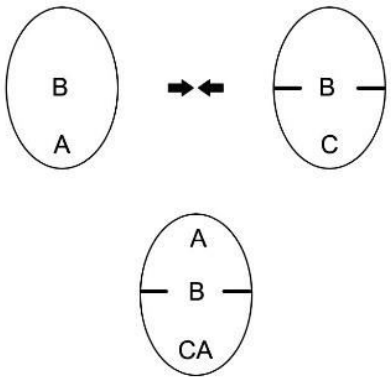


ILUSTRACIÓN 115 ESTRUCTURA FORMAL DE DARII Y FERIO EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

Si nos fijamos en la primera fila de cualquiera de los diagramas de Marlo de la primera figura, veremos que el último término A, está contenido en el conjunto del término medio B y que el término medio B está contenido en C en Barbara y Darii; mientras que no está contenido en el conjunto del término primero B en Celarent y Ferio.

Es decir, que la disposición de los términos en los diagramas con los que representamos la síntesis particular se ajusta perfectamente a la definición de la primera figura que ha dado Aristóteles.

Como nosotros basamos en la identidad del término medio la inferencia en los diagramas, convertimos la segunda premisa para que sea manifiesto que concluimos por síntesis del término medio B unificando los modelos de las dos premisas en uno solo. Esta conversión resultaría innecesaria en la disposición de los diagramas lineales. No obstante, desde nuestra perspectiva, podemos sintetizar la figura lógica que subyace a la figura superficial de los cuatro modos válidos de la primera figura afirmando que en ella tiene lugar la asociación entre aquello que se predica en toda la extensión del medio y aquello que se predica en parte, siendo esta asociación necesaria. Si A está en toda B, será imposible no asociar con ella C.

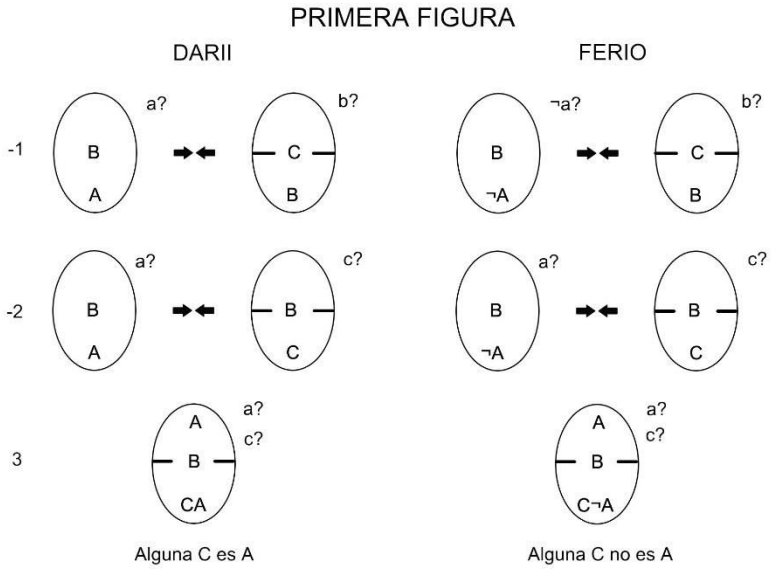


ILUSTRACIÓN 116. ESTRUCTURA ESENCIAL DE LA SÍNTESIS PARTICULAR. PRIMERA FIGURA.

Debemos hacer hincapié en que no es determinante en la primera figura que el raciocinio sea negativo, pues esto no cambia la base de la inferencia.

Como indica Boole en 1854, en las inferencias por síntesis (término medio con la misma cualidad) y con independencia de que la cualidad del medio sea afirmativa (predicativa) o negativa (privativa), la condición de inferencia es que el término medio se tome universalmente una vez, ya que de cualquier otra forma no habrá inferencia:

> Condition of Inference. —One middle term, at least, universal. Rule of Inference. —Equate the extremes. From an analysis of the equations (I.) and (II.), it will further appear, that the above is the only condition of syllogistic inference when the middle terms are of like quality. (Boole, 2017, p. 180)

Por su parte, así se refiere a Barbara y Celarent Aristóteles en *Analíticos Primeros* I, 4, 25b35-40 a 26a1-5:

> En efecto, si A se predica acerca de toda B y B se predica acerca de todo C, es necesario que A se predique de todo C, pues anteriormente se ha explicado cómo decimos *acerca de todo*. De manera semejante, si A < no se predica> acerca de ninguna B y B <se predica> acerca de todo C, A no se dará en ninguna C. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 102).

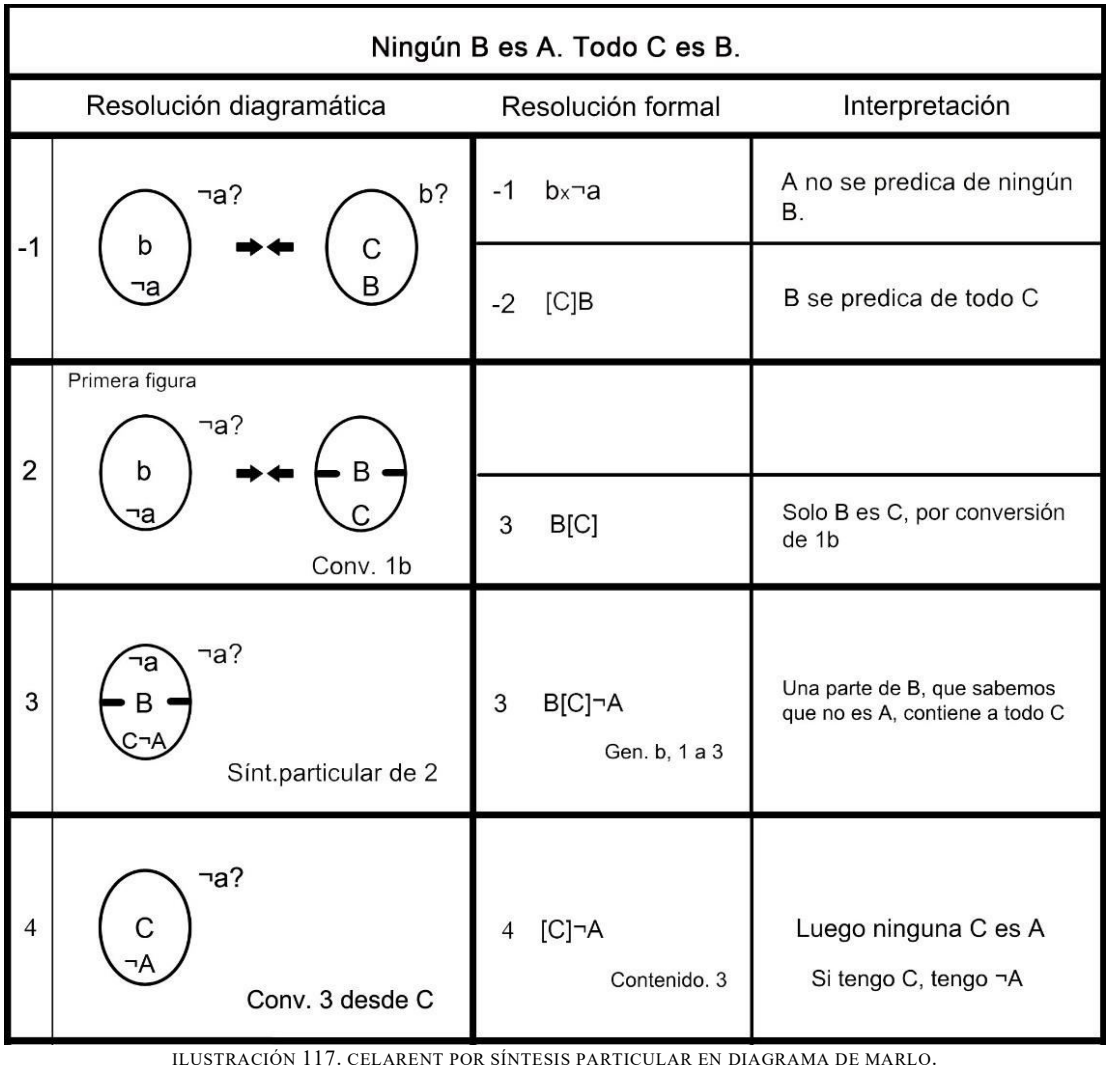


ILUSTRACIÓN 117. CELARENT POR SÍNTESIS PARTICULAR EN DIAGRAMA DE MARLO.

No parece del todo claro por qué Aristóteles da prioridad a la primera figura. Tal vez lo hizo por el orden de los términos. Así lo afirma Miguel Candel en su traducción del *Órganon* de Aristóteles de 1995:

> Aristóteles considera con razón esta figura como perfecta por el hecho de que las relaciones de inclusión o implicación, responsables de la ilación del razonamiento, siguen un orden perfectamente rectilíneo: descendente o ascendente en la misma secuencia en que se enuncian los términos, por lo cual la concatenación necesaria entre los extremos (así situados físicamente) a través del medio (en posición realmente intermedia) resulta del todo transparente. (p. 108)

O tal vez fue porque la primera figura es la única que responde a las formulaciones lógicas de Platón en el *Fedón*:

> 'Whenever three terms are so related to one another that the last is contained in the middle as in a whole, and the middle is either contained in or excluded from' (the same alternatives of which the Phaedo takes account) 'the first as in or from a whole, the extremes must be related by a perfect syllogism.' And the fact that only the first figure answers to Plato's formula is the reason why Aristotle puts it in the forefront, describes only first-figure arguments as perfect (i.e. self-sufficient), and insists on justifying all others by reduction to that figure. Aristotle's translation of Plato's metaphysical doctrine into a doctrine from which the whole of formal logic was to develop is a most remarkable example of the fertilization of one brilliant mind by another. (Aristóteles & Ross, 1957, p. 27)

Tal vez, debería ser señalado que, además del orden de los términos y de su herencia platónica, toda inferencia en la primera figura se produce por síntesis, es decir, en base al principio de identidad. Eso significa que en un diagrama de árbol como las redes de expectativas las premisas activan nodos de la misma rama.

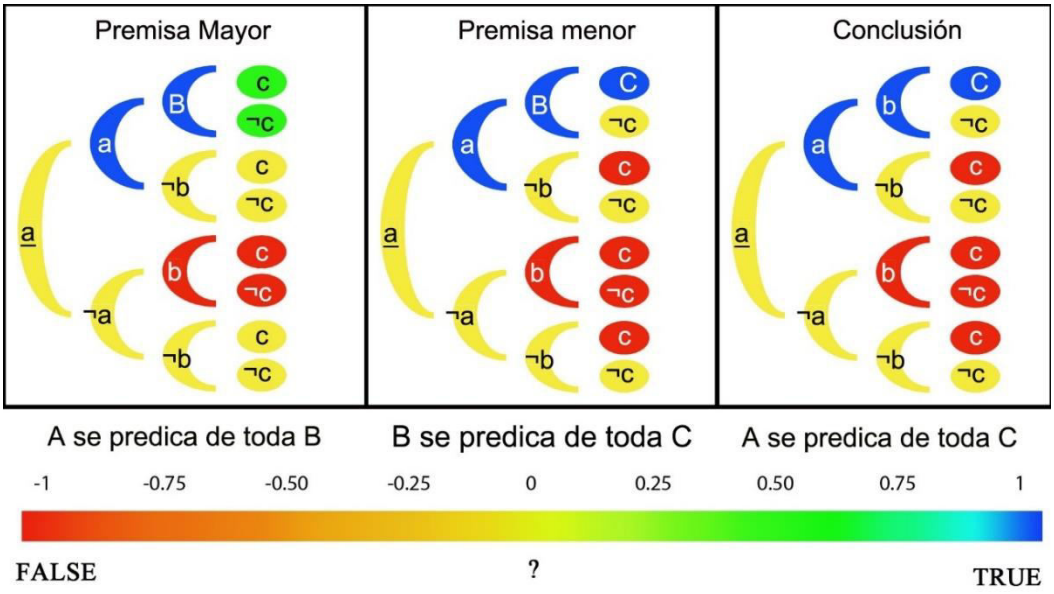


ILUSTRACIÓN 118. BARBARA EN REDES DE EXPECTATIVAS.

Cuando representamos el silogismo aristotélico, la mayúscula en el término que hace de sujeto en las afirmativas expresa su verdad material, su existencia. Azul representa una verdad necesaria. Así vemos en la conclusión que toda *C*, la única que no ha sido eliminada, es *A*. Aquí *A* ejerce solo como predicado en las premisas y por eso aparece en minúscula.

Si representamos Barbara con la convención existencial de la lógica matemática, veremos que se trata de un silogismo hipotético.

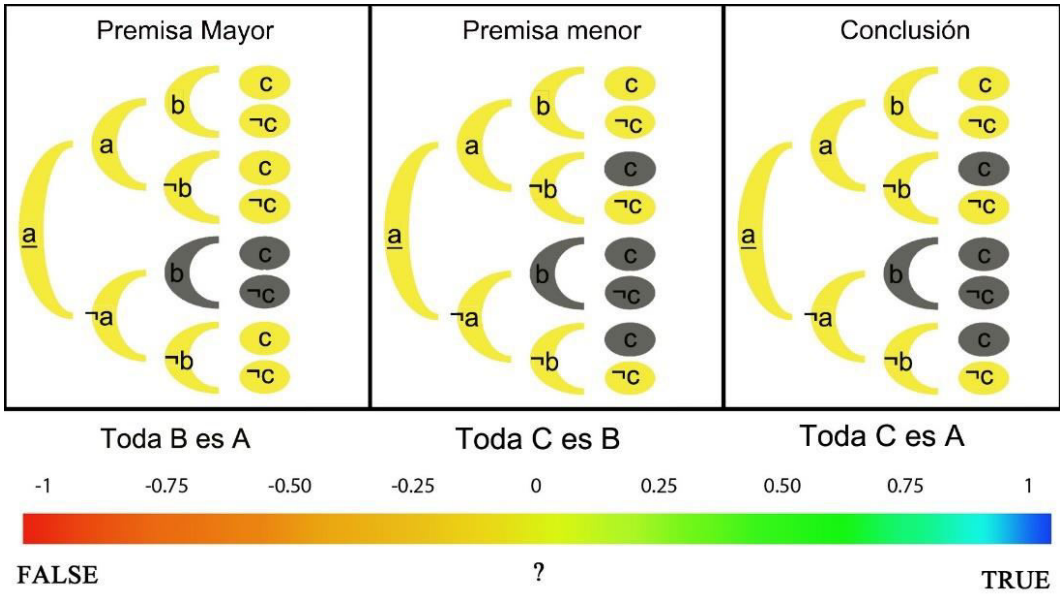


ILUSTRACIÓN 119. BARBARA EN LÓGICA MATEMÁTICA EN LAS REDES.

En el diagrama de Marlo no distinguimos, como Aristóteles, entre el término que ejerce como sujeto y el que ejerce como predicado. Pero, al contrario que la lógica matemática, sí concedemos existencia a los términos explícitamente nombrados por las premisas, incluso en las negativas. A no ser que se diga "*No existe ningún A que sea B*".

Celarent sería en las redes desde la perspectiva aristotélica del siguiente modo:

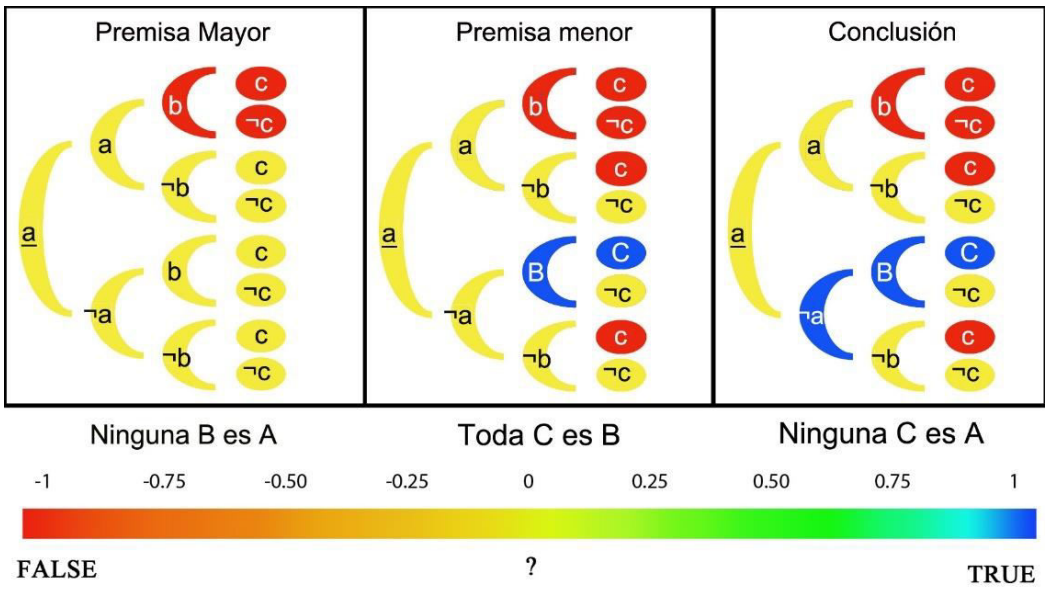


ILUSTRACIÓN 120. CELARENT EN REDES DE EXPECTATIVAS CON LA CONVENCIÓN ARISTOTÉLICA.

Comprobamos que de la primera premisa no se sigue ninguna verdad material. No hemos dicho de ninguna sustancia que exista. Lo que afirmamos es que no existen seres que sean *b* y de ellos se predique *a*. En la segunda premisa confirmamos que existe *C* y de él se dice *b*, que sigue en minúscula porque solo ha aparecido como predicado. En la conclusión vemos que de *C*, que existe, no se predica *a*, sino ¬*a*, que no aparece en mayúscula porque ni es ni puede ser una sustancia. Observamos que también en Celarent la conexión se produce, como en Barbara en la misma rama de la red, por síntesis. Celarent desde la lógica matemática implica sustituir el rojo por gris para expresar que tales posibilidades no existen, pero sin darle a nada un tono azul de existencia, pues todas las premisas son universales. Luego sería lo mismo que en Aristóteles pero todo minúscula y amarillo o gris. Sin embargo, con nuestras convenciones:

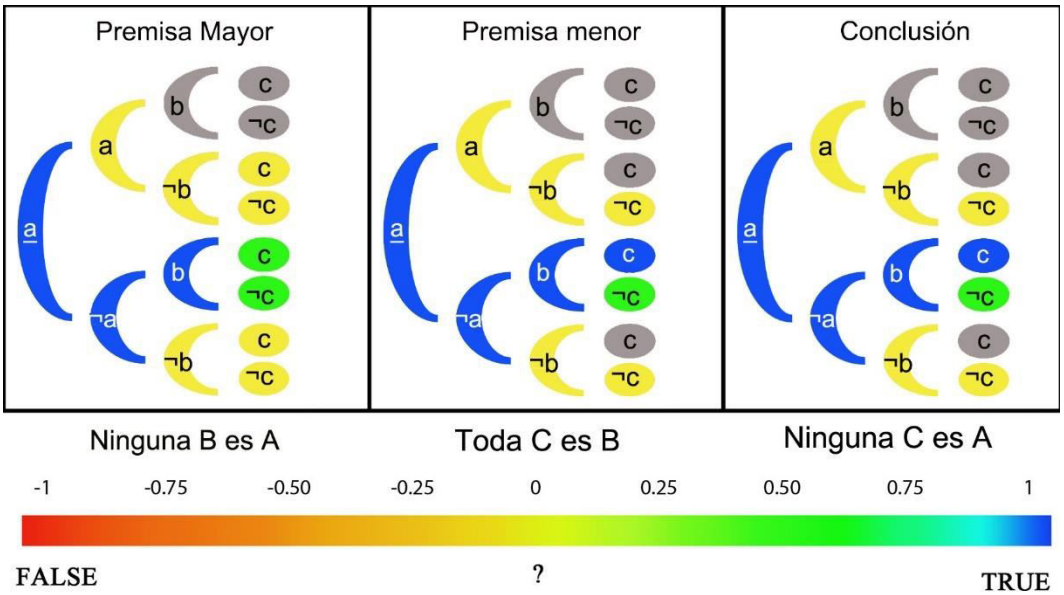


ILUSTRACIÓN 121. CELARENT EN LAS REDES CON LA CONVENCIÓN MARLO.

Podemos apreciar que concedemos existencia a todos los términos nombrados explícitamente, sin distinguir entre sujetos y predicados. En las premisas de Celarent ha sido confirmado como hecho el objeto ¬*ABC*. Es un hecho que todo tipo de *C* es ¬*A*. Al mismo tiempo, si nos fijamos en la red, veremos que en amarillo queda como única posibilidad de la vía de *A*, el objeto *a*¬*b*¬*c*. Por ello podemos afirmar condicionalmente que si hubiera *A*,

sería *C*. También vemos que nosotros consideramos el objeto $\neg ab\neg c$ como probable a partir de la información que nos dio la fuente en las premisas, mientras que el objeto $\neg a\neg b\neg c$ y el objeto $a\neg b\neg c$ son simplemente posibles, pues no hay ningún indicio en las premisas de su existencia.

En todo caso, las redes de expectativas que proponemos pueden ajustarse a las tres convenciones. Lo importante es que pueden expresar la verdad formal, en forma de conexiones necesarias que surgen de eliminar nodos u opciones, tanto como la verdad material, que está ligada al principio de razón suficiente. Así podemos distinguir qué tipos de cosas es razonable esperar en la red y con qué grado de certeza. Formalicemos como Aristóteles, la lógica matemática o según nuestros principios, se hace evidente que la inferencia es posible por la necesidad que se establece en determinadas conexiones que pertenecen a la misma rama.

5.9.1.1 Modos no válidos de la primera figura

Que dos premisas se adecúen a la primera figura superficial del silogismo no garantizan que sea posible razonamiento alguno. Hay algunos modos que son formalmente válidos para nosotros, pero no constituyen una demostración para Aristóteles, y hay modos que no son válidos ni para él ni para nosotros (ver tabla 25 modos del silogismo y figura lógica). Podemos ejemplificar los modos inválidos con el diagrama de Marlo. En *Analíticos Primeros* I, 4, 26a1-10 leemos:

> Si el <término> primero acompaña a todo el medio, pero el medio no se da en ningún último, no habrá razonamiento entre los extremos; pues nada se desprende necesariamente de que ello sea así: en efecto, es admisible tanto que el primero se dé en todo el último como que no se dé en ninguno, de modo que ni lo particular ni lo universal surgen necesariamente; ahora bien, no habiendo nada necesario en virtud de esos <términos>, no habrá razonamiento. en efecto, es admisible tanto que el primero se dé en todo el último como que no se dé en ninguno, de modo que ni lo particular ni lo universal surgen necesariamente; Términos de darse en cada uno: *animal - hombre - caballo,* y de no darse en ninguno: *animal hombre - piedra*. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 102)

Podemos tratar de imaginar cómo pudo haber demostrado gráficamente Aristóteles la invalidez de un silogismo trazando dos diagramas distintos para representar las mismas premisas. Si es posible representar las premisas de modo que el término menor caiga y no caiga bajo el mayor, entonces no hay demostración concluyente.

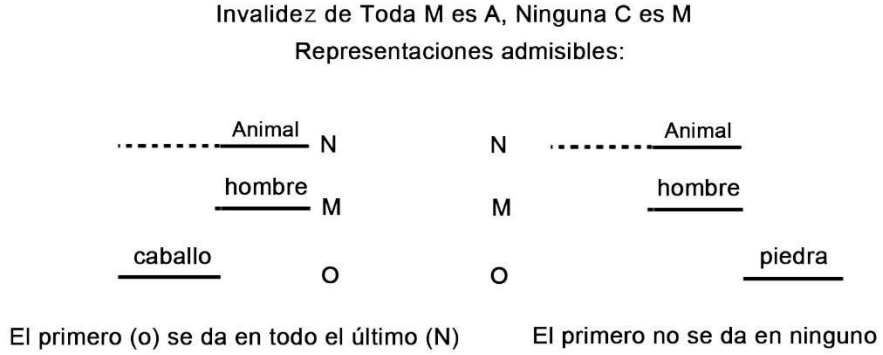
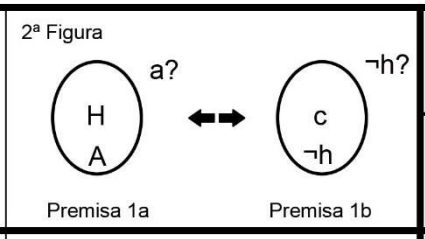
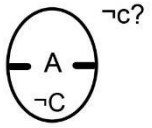
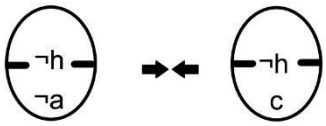
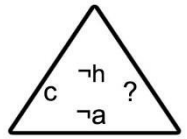


ILUSTRACIÓN 122. MODO INCONCLUYENTE. BASADO EN ARISTÓTELES, TRAD. 1995, P. 102.

Nosotros en el diagrama de Marlo obtendríamos la conclusión *Algún animal no es (caballo o piedra*), aunque eso violaría la forma de leer la figura que propone Aristóteles tomando como sujeto al término menor, que es el más próximo en la representación. Cambiando el orden de las premisas habría conclusión necesaria para Aristóteles también. En el diagrama de la ilustración 123 vemos la conclusión válida *Algún animal no es caballo* que obtenemos por la vía de la segunda figura y la invalidez de cualquier otra conclusión que tome caballo como sujeto, pues todo caballo puede ser animal.

DIAGRAMA DE MARLO

<table>
<tr><th colspan="4">Todo hombre es animal. Ningún caballo es hombre.</th></tr>
<tr><th colspan="2">Resolución diagramática</th><th>Resolución formal</th><th>Interpretación</th></tr>
<tr><td>-1</td><td rowspan="2"> 
</td><td>-1 [H]A</td><td>Animal se predica de todo hombre</td></tr>
<tr><td></td><td>-2 c_x¬h</td><td>Caballo no se predica de ningún hombre</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="2"> 

Exclu. Particular 1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>3 A¬C
Exclu. particular 1, 2</td><td>Algún animal no es caballo.</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2"> 
</td><td>4 ¬h¬a_x
Transf. 1</td><td>Solo los no humanos pueden no ser animales...</td></tr>
<tr><td></td><td>5 ¬hc_x
conve. 1b</td><td>que unido a: sólo los que no son humanos pueden ser caballos, daría</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="2"> 

Sínt. Nula 3</td><td>6 c_xa?
Combinaciones 4a</td><td>Es admisible que todo caballo sea animal...</td></tr>
<tr><td></td><td>7 % (c_x¬a)
Combinaciones 4a</td><td>pero también es admisible que no lo sea ninguno. Cambia animal por piedra y verás</td></tr>
</table>

ILUSTRACIÓN 123. MODO AE DE LA PRIMERA FIGURA SUPERFICIAL QUE SE CORRESPONDE CON LA SEGUNDA FIGURA LÓGICA.

5.10 Segunda Figura: Exclusión universal y particular

En *Analíticos Primeros* I, 5,26b34-40 dice Aristóteles:

> Cuando lo mismo se da, por una parte, en cada uno y, por otra, en ninguno, o cuando en ambos casos se da en cada uno o en ninguno, llamo a ésta la *segunda figura,* y llamo en ella < término> medio al predicado de ambas < proposiciones> y extremos a aquellos acerca de los cuales se dice éste, extremo mayor al que se halla inmediato al medio, y menor al más alejado del medio. El medio se coloca fuera de los extremos, en primera posición. (Aristóteles, Trad. 1995, pp. 108-109)

Aristóteles se refiere en esta cita a la figura superficial del silogismo, que se produce al considerar el término medio como predicado de ambos extremos. Sin embargo, rápidamente elimina los casos en los que el término medio tiene la misma cualidad en las premisas. Una y solo una ha de ser negativa para que la conclusión sea negativa. En *Analíticos Primeros* I, 5, 28a5-10 nos dice que: "por medio de esta figura no se producen razonamientos afirmativos, sino que todos son privativos, tanto los universales como los particulares" (Aristóteles, Trad. 1995, p.116).

Para resolver los silogismos por exclusión en el diagrama situamos a los extremos como sujetos de la proposición. Así podemos comprobar si lo mismo, el término medio, se da en uno y no en el otro. Ahora los extremos se toman como sujetos y el término medio *B* es el predicado de ambas proposiciones, como claramente ha dicho Aristóteles y cómo claramente se observa en el diagrama de Marlo.

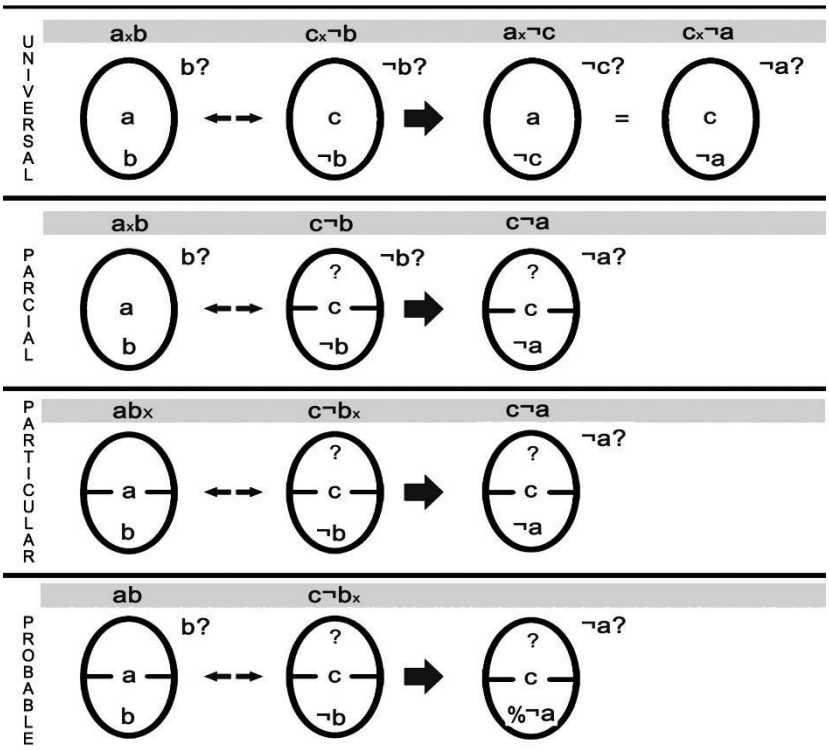


ILUSTRACIÓN 124. LEYES DE LA EXCLUSIÓN EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

Primero observamos en el diagrama que se ajusta a las condiciones de la segunda figura aristotélica: El término medio *B*, "lo mismo", se da en un extremo y no en el otro. Segundo, se observa cómo en el diagrama hemos situado al término medio *B* como predicado de ambas proposiciones exactamente como indica Aristóteles en su cita: "se llama término medio al predicado de ambas proposiciones", aunque él debía trabajar con diagramas lineales y nosotros lo hacemos con circulares.

Cesare, Camestres, Festino y Baroco, que son los silogismos válidos de la segunda figura, se resuelven en el diagrama de Marlo por exclusión y se corresponden exactamente con el caso que establece Boole de que los términos medios de un silogismo tengan una cualidad diferente. Estas inferencias tienen dos condiciones para Boole, siendo la primera, en *An Investigation of the Laws of Thougth* (2017):

> Consider, secondly, the case in which the middle terms are of unlike quality (...) Hence we deduce the following law of inference in the case of like middle terms: First Condition of Inference. —*At least one universal extreme.* Rule of Inference. —*Change the quantity and quality of that extreme and equate the result to the other extreme.* (p.181)

Cuando el término medio es en una premisa afirmativo *B* y en la otra negativo ¬*B*, la primera condición que afirma Boole es que al menos uno de los términos extremos sea universal. Ahora lo decisivo en primer lugar no es la cantidad del medio, sino la de los extremos, siendo posible la inferencia aunque el término medio sea particular en ambas premisas. En la segunda figura el predicado es el término medio, luego en *Analíticos Primeros* I, 5, 27a1 tiene que referirse a los términos extremos cuando afirma: "Así, pues, el razonamiento dentro de esta figura no será en modo alguno perfecto, pero será posible, tanto si los términos son universales como si no" (Aristóteles, Trad. 1995, p. 109).

Por eso en el diagrama de Marlo cuando exponemos las leyes de la exclusión situamos a los extremos como sujetos de los modelos que se oponen. En el diagrama de Marlo como en Boole, para poder concluir que existe una relación imposible entre los extremos que están asociados a términos medios contrarios, al menos uno de los extremos debe ser universal. Aristóteles, por su parte se refiere así a Baroco de la segunda figura en *Analíticos Primeros* I, 7, 29a20-25:

> (...) En cambio, siendo uno predicativo y el otro privativo, al tomar el privativo como universal, siempre se produce razonamiento del extremo menor respecto del mayor, V.g.: si A se da en todo o en alguna B y B no se da en ninguna C,

> pues al invertir las proposiciones, es forzoso que C no se dé en algún A. De manera semejante también en las demás figuras: pues mediante la inversión siempre se produce razonamiento. (Aristóteles, Trad. 1995, pp. 123,124)

Es seguro que Aristóteles no está pensando, como Boole o nosotros, en que el término medio es *B* en una premisa y ¬*B* en la otra, pero tiene conciencia de que la inferencia sigue sus propias leyes cuando el medio establece relaciones privativas en un sentido y predicativas en otro. Y sabe que en el primer caso la condición es que la premisa privativa sea universal, pues es la garantía de que su conversión permitirá la inferencia por síntesis. Así, cuando Aristóteles afirma que gracias a la inversión se produce razonamiento está poniendo de manifiesto que desde *Ninguna C es B*, `$c_x$¬$b$´, podemos obtener *Ninguna B es C*, `b_x¬c´, de modo que ya estamos predicando de toda B algo que podremos predicar de cualquier cosa que se diga a su vez de toda B o de alguno.

Nosotros llamamos exclusión particular al caso en el que el término medio es contrario en ambas premisas, siendo uno de los extremos universal y el otro particular. La conclusión de la exclusión particular es una particular negativa. Aristóteles la define así en *Analíticos Primeros* I, 5, 26a25-30

> Si el medio se relaciona universalmente con uno de los dos < extremos>, cuando se relaciona de manera universal con el mayor, predicativa o privativamente, y con el menor de manera particular y de modo opuesto a la <proposición> universal (digo de modo opuesto cuando la < proposición> universal es privativa y la particular afirmativa, y cuando la universal es predicativa y la particular privativa), < entonces> es forzoso que se produzca un razonamiento privativo particular (Aristóteles, Trad. 1995, pp. 111-112).

En el mismo capítulo sobre los razonamientos asertóricos de la segunda figura afirma en 27a30-35: "En efecto, si M no se da en ningún N y se da en algún O, necesariamente N no se dará en algún O". Y más adelante en 27b5 dice: "En cambio, si < M > se predica de todo O pero no se predica de todo N, no habrá razonamiento. Términos: *animal - entidad - cuervo, animal - blanco – cuervo*" (p.113)

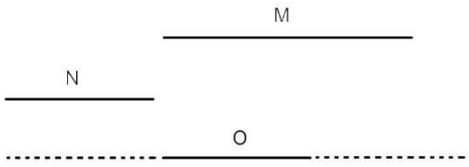


ILUSTRACIÓN 125. EXCLUSIÓN PARTICULAR EN DIAGRAMA LINEAL CORRESPONDIENTE A FESTINO.

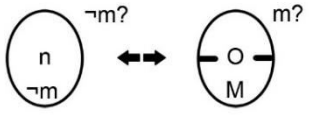
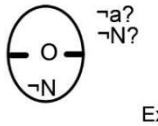
Ningún N es M. Alguna O es M.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 n_x¬m	La totalidad de N se asocia con parte de ¬M
		-2 OM	Alguna O se asocia con parte de M
2	 Exclu. Part. 1	3 O¬N Exclu.Parti. m,¬n, 1	Parte de O es imposible asociarla con N Luego alguna O no es N

ILUSTRACIÓN 126. FESTINO, DE LA SEGUNDA FIGURA, RESUELTO DIRECTAMENTE POR EXCLUSIÓN PARTICULAR.

Nosotros llamamos exclusión universal al caso en el que siendo contraria la cualidad del medio en las premisas ambos extremos son universales. Aristóteles afirma en *Analíticos Primeros* I, 5, 27a1-10:

> Si son, pues, universales, habrá razonamiento cuando el medio se dé en todos los casos en uno < de los extremos> y en ningún caso en el otro, sea cual sea < la proposición> privativa: de otra manera < no habrá razonamiento> en modo alguno (…) En efecto, supóngase que no se predica M de ningún N, pero que se predica de todo O. Comoquiera que la privativa se puede invertir, N no se dará en ningún M; ahora bien, M se supuso <ya que se daba> en todo O: de modo que N no se dará en ningún O; pues esto se ha demostrado ya anteriormente (Aristóteles, Trad. 1995, p. 109)

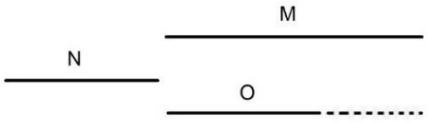


ILUSTRACIÓN 127. EXCLUSIÓN UNIVERSAL EN CESARE, EN UN DIAGRAMA LINEAL QUE PODRÍA HABER SIDO USADO ARISTÓTELES.

Cuando Aristóteles afirma, en la cita anterior, que la privativa se puede invertir, se refiere a que es posible permutar el orden de las líneas sobre el diagrama de modo que podamos leer *Ninguna M es N*. Al invertir el silogismo se ajusta a la primera figura, al modo Celarent que se resuelve por síntesis particular.

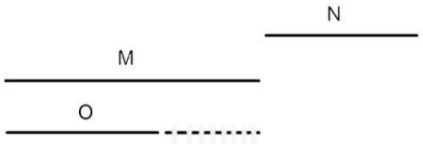


ILUSTRACIÓN 128. REDUCCIÓN DE CESARE, DE LA SEGUNDA FIGURA, A CELARENT DE LA PRIMERA INVIRTIENDO LA PREMISA UNIVERSAL NEGATIVA. AHORA EL MEDIO ES EL SUJETO DE LA PRIMERA PREMISA.

Si ahora representamos en las redes de expectativas Cesare de la segunda figura, veremos que la representación es exactamente idéntica a la de Celarent de la primera. También observamos que podemos concluir solo tomando a *C* como sujeto, que es el único término materialmente validado. Podríamos decir que si hubiera *A* no sería *C*.

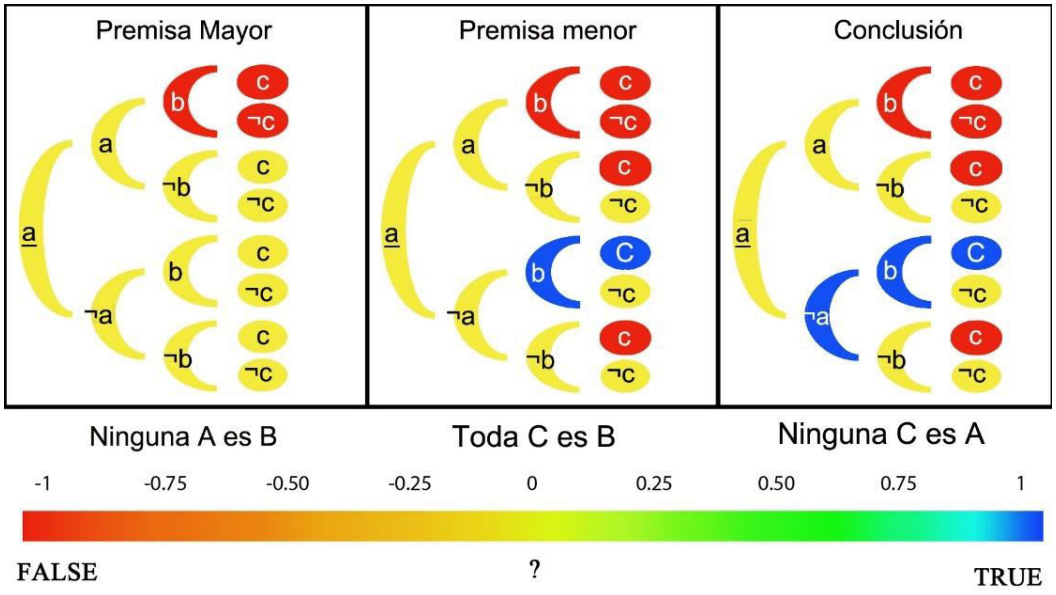


ILUSTRACIÓN 129. CESARE EN LAS REDES CON LA CONVENCIÓN ARISTOTÉLICA.

La segunda condición que constata Boole para que sea posible la inferencia cuando el término medio tiene una cualidad distinta en las premisas es que sea universal en ambas premisas, lo que llamaremos exclusión parcial tipo 2, un caso que no puede darse de modo directo en los silogismos demostrativos aristotélicos, pues no puede ser el caso que se considere universalmente a toda B y a toda ¬B en las premisas.

> Second Condition of Inference. —*Two universal middle terms.* Rule of Inference. —*Change the quantity and quality of either extreme and equate the result to the other extreme unchanged.* There are in the case of unlike middle terms no other conditions or rules of syllogistic inference than the above. (Boole G., 2017, pp. 182,183)

Esta segunda condición de Boole la hemos omitido al presentar las leyes de la inferencia por exclusión, primero porque no nos percatamos de ella (Aznar, 2014a) y luego de percatarnos porque buscamos la simetría con las leyes de la síntesis (Aznar, 2018g) y porque, al fin al cabo, se hace manifiesta la posibilidad de inferir por síntesis en el diagrama de Marlo al transformar las premisas. Pensemos que cuando partimos de dos medios excluyentes universales, al transformar una cualquiera de las premisas para igualar la cualidad del término medio, uno de los extremos será necesariamente universal, como exige la condición de los términos medios iguales. En todo caso, conocíamos e insinuamos esta condición en Aznar (2018d).

-1 $a_x b$

-2 $\neg a_x c$

3 $a\neg c_x$ Transformación de 2.

4 $a\neg c_x\ b$ Síntesis o generalización de *A* de línea 1 a 3.

5 $\neg c_x\ b$ Contenido en 4: Siempre que tenga ¬*C* tendré *B*.

5.10.1 Reducción de la segunda figura a la primera

Aristóteles ha llegado a tres figuras distintas que sirven como base a la inferencia silogística y es consciente de que todo silogismo puede ser convertido a la primera figura, del mismo modo en el que somos nosotros conscientes de que en el diagrama de Marlo toda inferencia por exclusión puede reducirse a una inferencia por síntesis transformando una premisa.

Nosotros también reducimos los silogismos de la segunda figura, que tienen lugar por exclusión, a los de la primera figura que tienen lugar por síntesis en el diagrama de Marlo.

Segunda figura: exclusión		Primera figura: síntesis particular	
Toda A es B	[A]B	$\neg b_x \neg a$	Toda no B será ¬A
Alguna C no es B	C¬B	¬bc	Alguna no b es C
Alguna C no es A	C¬A	c¬a	Alguna C no es A
Por exclusión particular entre 1 y 2		Por síntesis particular entre 1 y 2	

TABLA 27. SILOGISMO RESUELTO POR EXCLUSIÓN Y SÍNTESIS.

En todo caso, ya insistimos en que pueden convertirse los modos válidos de una figura a los modos válidos de cualquiera de las otras dos figuras, y no solo los modos de las figuras segunda y tercera a la primera como se muestra en Rasch (2013), aunque sea cierto que se prioriza la primera (Aristóteles & Ross, 1957).

> (...) La Silogística es el primer sistema axiomático que conocemos, o dicho más exactamente. la primera clase de tales sistemas, pues Aristóteles la axiomatizó de varias maneras. Se pueden distinguir en él los siguientes sistemas; 1) con los cuatro silogismos de la primera figura junto a otras leyes como axiomas, 2) con los dos primeros silogismos de la misma figura, 3) con silogismos de cualquier figura como axiomas, reduciéndose, entre otras cosas, los silogismos de la primera figura a los de la segunda y tercera. (Bochenski & Bravo, 1985, p. 87)

5.10.2 Reducción de Camestres

En *Analíticos Primeros* I, 5, 27a5-15 leemos:

> Y aún, si M <se da> en todo N pero en ningún O, tampoco O se dará en ningún N (pues si M <no se da> en ningún O, tampoco O en ningún M; ahora bien, M se daba en todo N: luego O no se dará en ningún N: en efecto, se ha formado de nuevo la primera figura); y puesto que se puede invertir la < proposición> privativa, tampoco N se dará en ningún O, de modo que será el mismo razonamiento. También es posible demostrar estas < conclusiones> por reducción a lo imposible. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 110)

Podemos representar Camestres en las redes atendiendo en primer lugar al modo en el que entiende Aristóteles las premisas desde el punto de vista existencial.

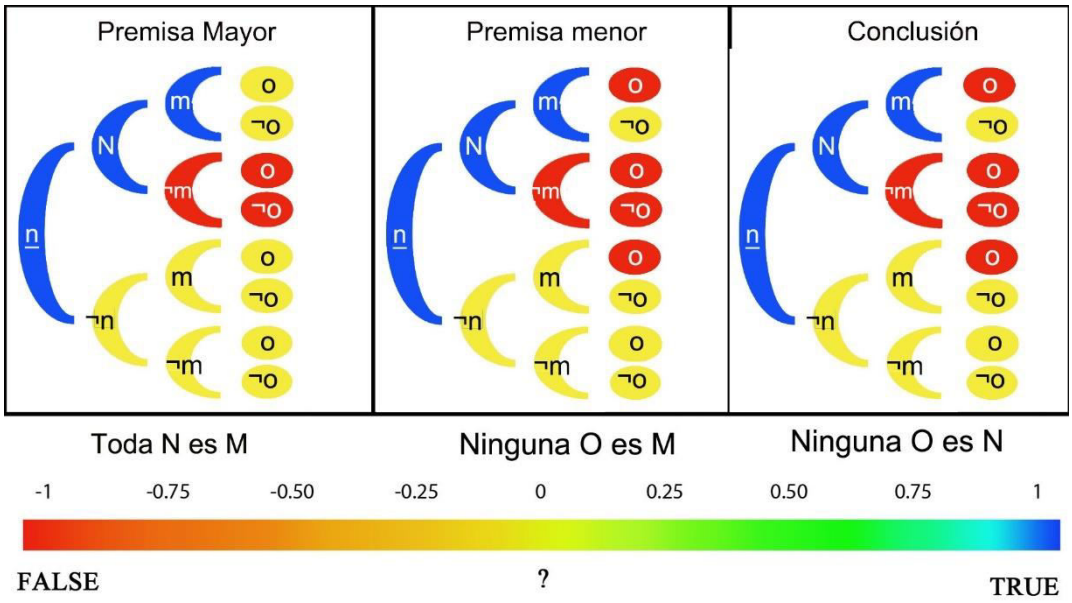


ILUSTRACIÓN 130. CAMESTRES EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS SEGÚN ARISTÓTELES. NINGUNA O ES N SE DEBE INTERPRETAR AQUÍ COMO NO EXISTE UNA O DE LA QUE SE PREDIQUE M.

Formalizando como creemos que lo haría Aristóteles observamos que no hay ninguna *O* que pueda ser *M*. No existe una O de la que predicar N, pues toda O por la vía de M está en rojo. Luego *Ninguna O es N*. Aquí la *O* no tiene validez existencial. No hay *O* en mayúscula ni en un nodo azul. Formalizando en lógica matemática tampoco se sigue que exista ningún x de ningún tipo. Formalizando a nuestro modo vemos que podemos afirmar que *Ninguna M es O* y *Ninguna O es M*, aceptando que hablamos de *M* y de *O* como tipos de objetos verificados. Otra cosa sería partir de premisas del tipo: *No existe ninguna M que sea O*.

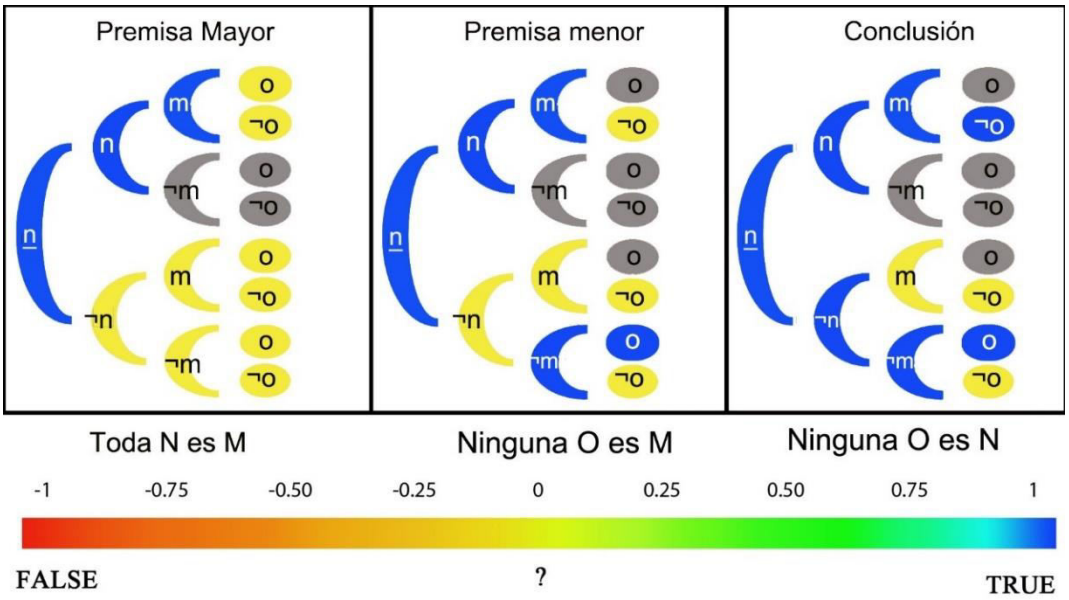


ILUSTRACIÓN 131. CAMESTRES EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

En la ilustración 132 tratamos de reproducir el razonamiento aristotélico utilizando los diagramas de Marlo.

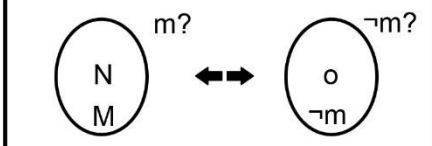
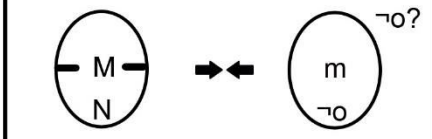
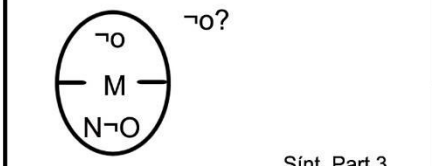
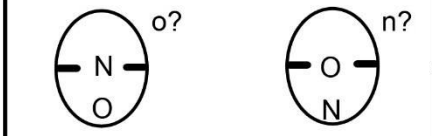
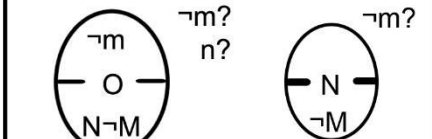
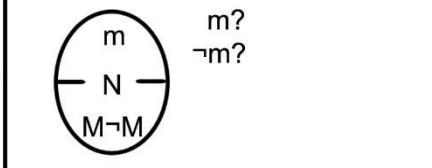
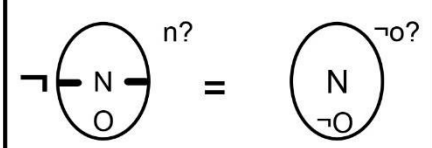
Toda N es M.Ninguna O es M.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1	2ªFigura 	-1 [N]M	M se da en todo N
		-2 $o_x\neg m$	M no se da en ningún O
2	1ª Figura  Conversión 1a Inversión 1b		
		3 $m_x\neg o$ Transf. de 2	tampoco O en ningún M
3	 Sínt. Part 3	4 [N]M¬O Gen. m, de 3 a 1	
		5 [N]¬O Cont. 4	Luego O en ningún N
4?	 Suposición Conversión 4a		Supongamos que algún N es O
		6? ON Suposición	O lo que es igual, que algún O es N
5?	 Sínt. Part 4, 1b Cont. en 5a	7? ON¬M Gen. O, 2 a 6	Asumiento la segunda premisa
		8? N¬M Cont. 7	Tendríamos que algún N no es M
6?	 Sínt. Part 1, 5b	9? N¬MM Gen. N, 1 a 8	lo que, teniendo en cuenta la primera premisa...
		10? ¬MM Cont. 9	nos lleva al absurdo de que alguna N es M y no es M
7	 Abs. 4a-6 Contradict. 4a	11 ¬(NO)	Luego es imposible que alguna N sea O
		12 [N]¬O Introd. generel. 11	Es decir, que ninguna N es O

ILUSTRACIÓN 132. CAMESTRES POR INVERSIÓN Y POR ABSURDO EN DIAGRAMA DE MARLO.

Es discutible que tengamos razón suficiente para deducir en el paso doce la existencia de N partiendo de que *es imposible que alguna N sea O*. Necesitamos recurrir a la primera premisa para contar con la existencia de N. Luego deberíamos concluir en doce "$n_x \neg o$" , luego deducir en el paso trece que "[N]M¬O" por generalización de trece a uno y en el paso catorce, ya podríamos decir que está contenido en trece que "[N]¬O".

5.10.3 Festino a Ferio

Aristóteles es consciente de que los silogismos de la segunda figura pueden reducirse a la primera figura convirtiendo las premisas, del mismo modo que pueden los de la primera demostrarse en virtud de lo que sabemos por los silogismos de la primera (Bochenski & Bravo, 1985). Según Aristóteles se puede acceder a los silogismos de la segunda figura, es decir, aquellos con cualidad diferente en el término medio según Boole o llamados por exclusión en el diagrama de Marlo, por reducción a la primera figura. Como por ejemplo, Cesare y Camestres a Celarent. En *Analíticos Primeros* I, 7, 29b1-5 leemos:

> Es posible también reducir todos los razonamientos a los razonamientos universales de la primera figura. Pues es evidente que los de la segunda llegan a conclusión a través de aquéllos aunque no todos de la misma manera; sino que los universales <llegan a conclusión> al invertirse la < proposición> privativa, mientras que cada uno de los particulares <llega a conclusión> por la reducción a lo imposible. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 124)

Ya hemos visto más arriba cómo Festino de la segunda figura era convertido a Ferio de la primera para ser resuelto por síntesis. En este caso, parece que nos encontramos con lo que acaba de llamar Aristóteles un razonamiento universal en el que puede ser invertida la proposición privativa. Así pudimos cambiar en el paso 2 ninguna M es N por ninguna N es M, lo cual alteró la cualidad del medio para poder operar por síntesis. De este modo, pueden ser convertidos a la primera figura fácilmente silogismos como Cesare y Camestres, pero no los que requieren la conversión de una universal afirmativa por la elección que hizo Aristóteles de su conversión (Aristóteles & Ross, 1957).

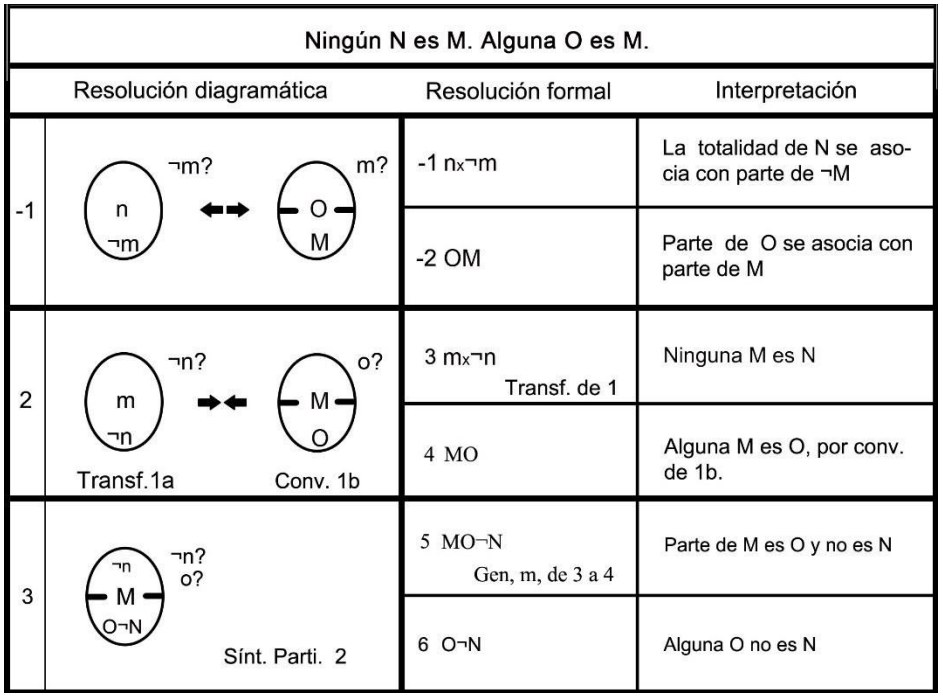


ILUSTRACIÓN 133. FESTINO POR SÍNTESIS TRAS SER TRANSFORMADO A FERIO DE LA PRIMERA FIGURA.

Es interesante observar en el desarrollo diagramático de la figura anterior que para ver la transformación de Festino a Ferio se debe tomar la universal negativa del paso 2 con la particular negativa del paso 1. Si nos fijamos solo en el paso 2 estamos en Ferison de la tercera figura, lo cual, obviamente no altera en nada la inferencia. En todo caso, Aristóteles sabía que los silogismos de las tres figuras podían reducirse unos a otros (Bochenski & Bravo, 1985), lo cual refuerza la idea de que la estructura esencial del silogismo no depende del orden de los términos.

Si representamos ahora Festino en las redes de expectativas con la convención aristotélica veremos que el único término que puede ejercer de sujeto de la conclusión es O.

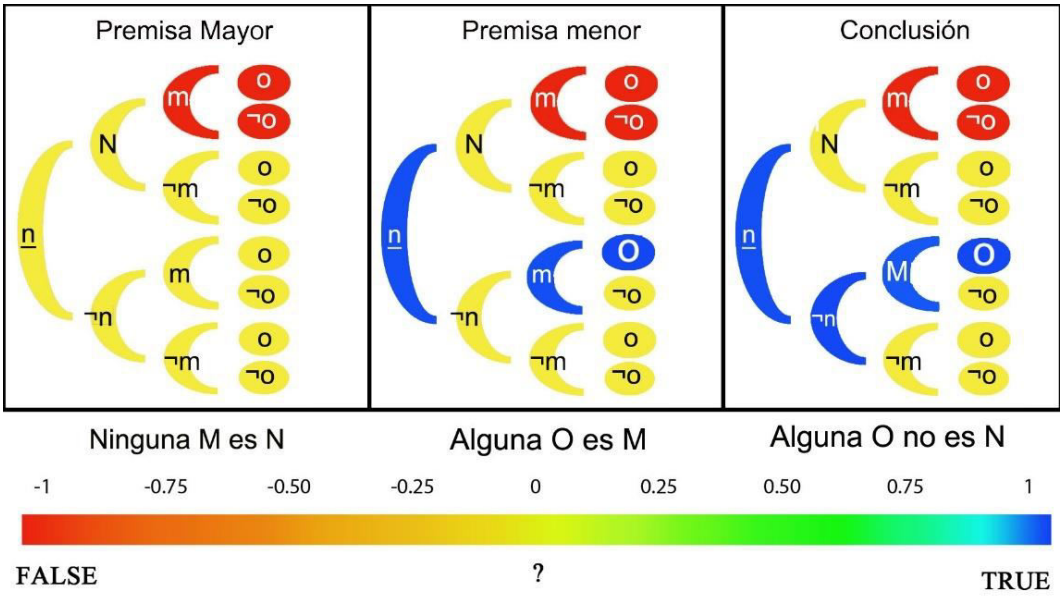


ILUSTRACIÓN 134. FESTINO EN LAS REDES CON LAS CONVENCIONES ARISTOTÉLICAS.

5.10.4 Baroco por Inversión directa ilegítima

Podemos analizar Baroco como ejemplo de silogismo que, según Aristóteles, debe ser demostrado por reducción al absurdo, aun cuando es posible demostrarlo en el diagrama de Marlo por síntesis particular transformando la premisa universal. Si formalizamos en el diagrama de Marlo Baroco por transformación (ilustración 136), observaremos que es posible transformar y operar por síntesis, sin necesidad de recurrir a la reducción al absurdo. El inconveniente es que al transformar para poder operar por síntesis, la premisa adquiere un sujeto negativo, ¬M, que es llamado *término infinito*.

Es difícil creer que Aristóteles no se percatara de la posibilidad de que un término negativo ejerciera de medio, pero no recurrió a ella, tal vez porque no consideraba aceptable que la ilación se produjera entre términos infinitos. Pero también es posible que no transformara la proposición universal afirmativa (predicativa) como haríamos al aplicar el *Modus Tollens* simplemente porque en ningún momento consideró ¬M como entidad que formara parte del razonamiento. Y así sería si se limitaba a observar sobre un diagrama lineal este silogismo

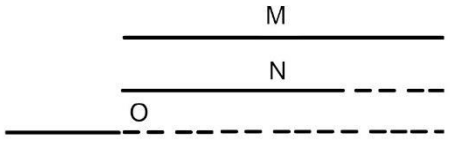


ILUSTRACIÓN 135. BAROCO EN UN DIAGRAMA LINEAL.

A la luz de lo que sabemos sobre los diagramas lineales de Leibniz (Castro-Manzano J. M., 2017), tiene sentido especular con que también Aristóteles visualizara las relaciones que se establecen en un silogismo sobre ellos, de modo que la única inversión legítima y evidente fuera para él que *Alguna M es N*, siendo casi imposible percatarse de que en el espacio de lo que no es M se asocian necesariamente lo que no es N y parte de lo que es O. Visualmente es algo que no ofrece la imagen y mentalmente es algo con lo que no se cuenta cuando el ente es lo que está ahí, la línea que representa a M. En este sentido, invertir la proposición universal *Toda N es M* en una particular *Alguna M es N*, es más compatible con el hecho de que Aristóteles concibe las relaciones que establece el silogismo no como relaciones entre clases, sino como relaciones entre un sujeto y un atributo, de modo que la universalidad de los juicios significa la conexión necesaria entre sujeto y predicado, no la inclusión de uno en el otro:

> For, in the first place, his typical way of expressing a premiss (a way that is almost omnipresent in the *Prior Analytics)* is not to say '*E* is included in *A',* but to say '*A* belongs to *E',* where the relation suggested is not that of class to member but that of attribute to subject. And in the second place, it is only in the *Prior Analytics* that the class inclusion view of judgements appears at all. In the *De Interpretatione,* where he treats judgements as they are in themselves, not as elements in a syllogism, he takes the subject-attribute view of them; and in the *Posterior Analytics,* where he treats them as elements in a scientific system and not in mere syllogisms, the universality of judgements means the necessary connexion of subject and predicate, not the inclusion of one in the other. (Aristóteles & Ross, 1957, p. 28)

Así pues, si hay que mostrar conexiones entre sujetos y atributos, solo es posible la siguiente conversión de la universal afirmativa en una particular afirmativa que se ofrece en *Analíticos Primeros* I, 2, 25a5-10: «La predicativa es necesario que se invierta, pero no < tomada> universalmente, sino particularmente, v.g.: si *todo placer <es> un bien, también algún bien es un placer»* (Aristóteles, Trad. 1995, pp. 96,97).

Recordemos que la interpretación de la universal *Toda B es A* que permite su conversión en *Alguna A es B*, no coincide con la interpretación que le da hoy la lógica moderna, pero como señala Ross, apoyándose en Cook Wilson (Wilson & Farquharson, 1926) y James Wilkinson Miller (Miller, 1938), la interpretación de Aristóteles es su interpretación natural, mientras que el significado que la lógica moderna le atribuye se expresa más adecuadamente en la forma *No hay B que no sea A*, o *If anything is B, it is A,* aunque dice Ross que Aristóteles no percibió "el doble sentido de la implicación que sí ha visto la lógica moderna" (Aristóteles & Ross, 1957, p. 30). En todo caso, se podría argumentar que Aristóteles distinguía claramente entre el contenido hipotético de la universal y el categórico a la luz de sus observaciones sobre la modalidad (Bobzien, 2016).

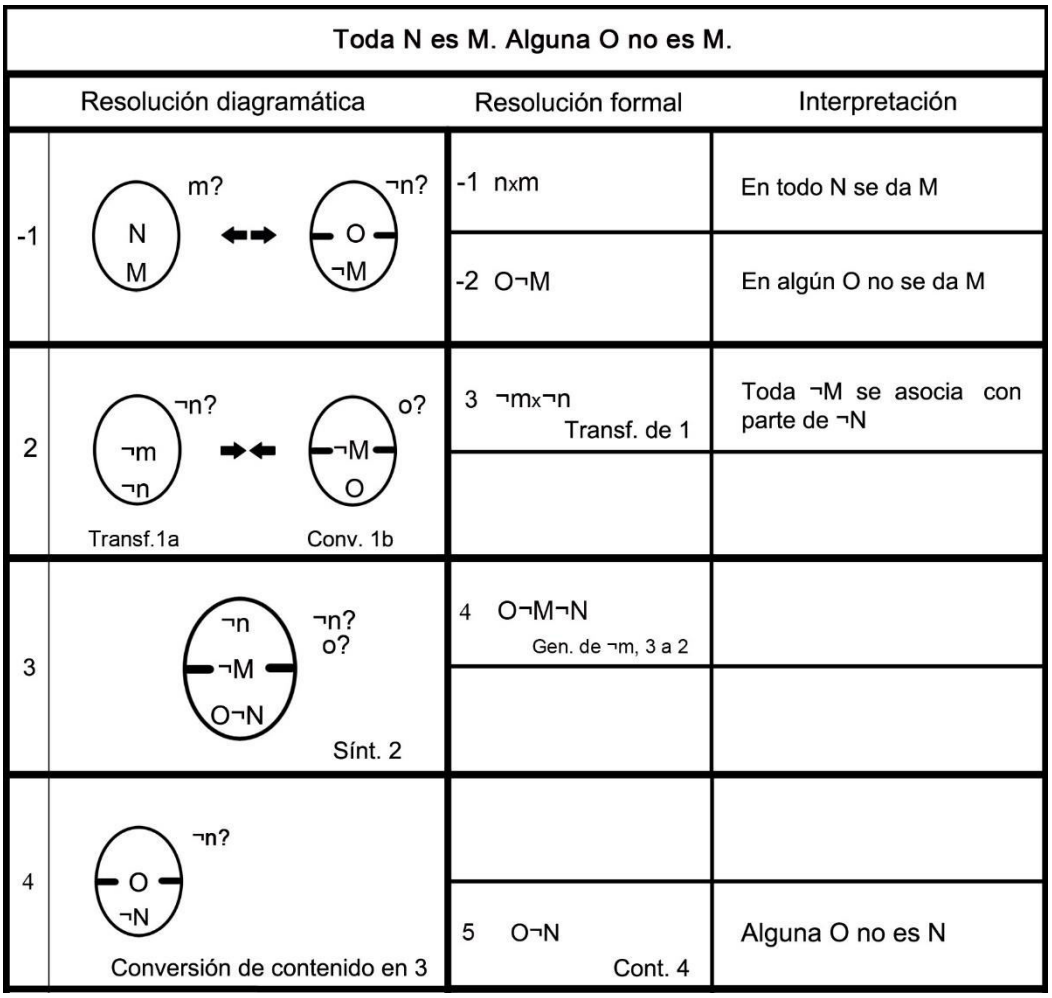


ILUSTRACIÓN 136. BAROCO POR SÍNTESIS PARCIAL (PRIMERA FIGURA) EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

5.10.4.1 Baroco a la primera por reducción al absurdo

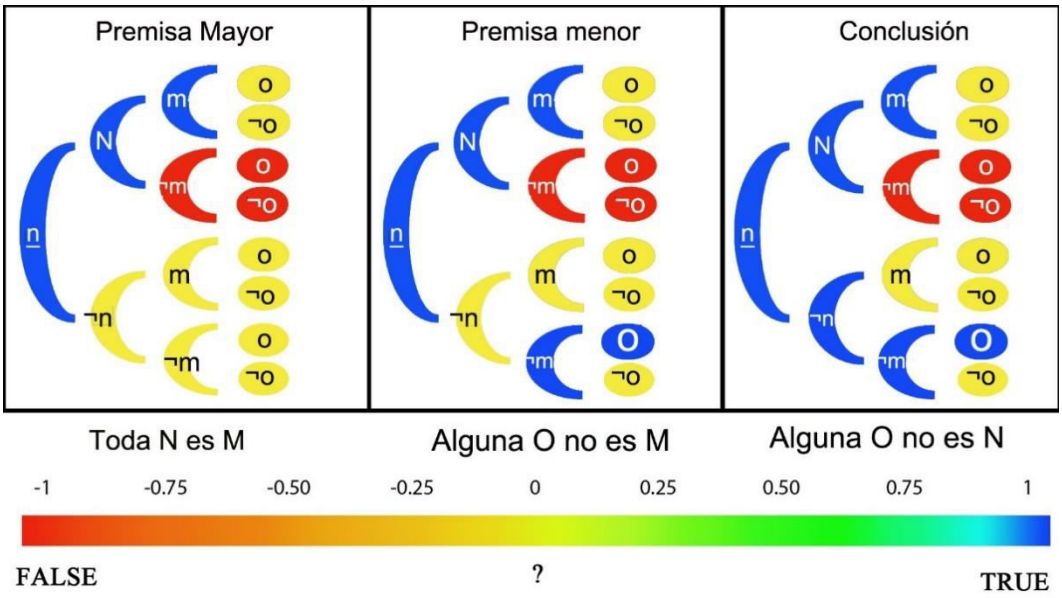


ILUSTRACIÓN 137. BAROCO ARISTOTÉLICO EN REDES DE EXPECTATIVAS.

En los razonamientos particulares de la segunda figura en los que no puede transformar la privativa por no ser universal, como en Baroco en la segunda figura y Bocardo en la tercera, Aristóteles tendrá que demostrar su validez empleando la reducción al absurdo con la primera figura (Aristóteles & Ross, 1957).

> Esta prueba (...) consiste en formar un nuevo silogismo de la primera figura con una de las premisas del original y la contradictoria de la conclusión. De este silogismo se obtiene entonces como conclusión la contradictoria de la otra premisa, cosa absurda, pues las premisas se suponen siempre verdaderas en el momento de efectuar el razonamiento. Este método indirecto de validación es necesario sólo en algunos modos de la segunda y la tercera figuras en que no es posible la reducción simple a ningún modo de la primera. (Oriol & Gambra, 2015, p. 199)

Podemos mostrar gráficamente la demostración de Baroco en el diagrama de Marlo (ilustración 138) como hicimos en Camestres empleando la reducción al absurdo para reducirlo a la primera figura.

Leemos en *Analíticos Primeros* I, 5, 27a5-10:

> Aún, si en todo N se da M y en algún O no se da, es forzoso que N no se dé en algún O; pues, si se da en cada uno, y también se predica M de todo N, es forzoso que M se dé en todo O; ahora bien, se dio por supuesto que en alguno no se daba. (Aristóteles, Trad. 1995, P. 110)

Toda N es M. Alguna O no es M.

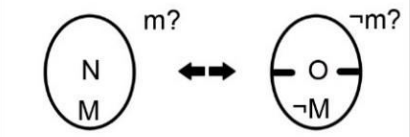
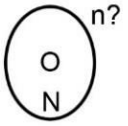
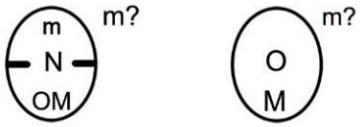
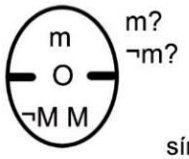
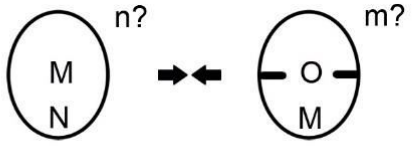
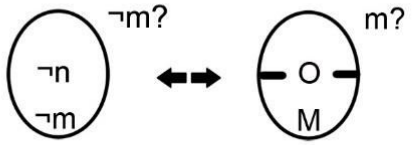
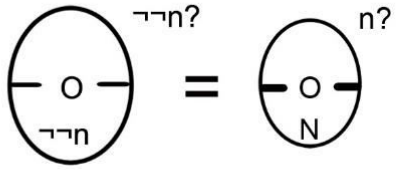
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 [N]M. nxm	En todo N se da M
		-2 O¬M	En algún O no se da M
2?	 suposición		
		3? [O]N suposición	Suponemos que N se da en todo O
3?	premisa conv. 2b		
		4? N[O]	Alguna N es O, que es realmente: Solo N es O
4?	 síntesis 3 contenido 4a	5? [O]NM Gener.n, 1 a 3	En parte de N se relaciona toda O con M
		6? [O]M Cont. 4	Toda O es M
5?	 sínt. 1b y 4b	7? O¬MM Síntesis 1b, 5	Luego alguna O es M y no es M al mismo tiempo
			Lo cual es absurdo
6	Abs, 2 a 5 Contradictoria 6a	8 ¬ [O]N Abs. de 3 a 7	Luego es imposible suponer que toda O es N
		9 O¬N Contradictoria 8	Por tanto; Alguna O no es N

ILUSTRACIÓN 138. DEMOSTRACIÓN DE LA CONCLUSIÓN DE BAROCO REDUCIÉNDOLO A LA PRIMERA FIGURA CON EL ABSURDO. SE SUPONE EN 2 LA CONTRADICTORIA DE LA CONCLUSIÓN A LA QUE QUEREMOS LLEGAR.

5.10.5 Reducción de la primera figura a la segunda: la síntesis por exclusión

Del mismo modo que, en el diagrama de Marlo, podemos convertir los silogismos que se resuelven por síntesis en silogismos que se resuelven por exclusión, nos dice Aristóteles que los silogismos de la primera figura pueden reducirse a los de la segunda. En *Analíticos Primeros* I, 7, 29b5 leemos: "En cuanto a los de la primera, los particulares llegan a conclusión por sí mismos, pero también es posible demostrarlos por mediación de la segunda figura reduciendo a lo imposible" (Aristóteles, Trad. 1995, p. 125).

<table>
<tr><th colspan="4">Toda M es N. Alguna O es M.</th></tr>
<tr><th colspan="2">Resolución diagramática</th><th>Resolución formal</th><th>Interpretación</th></tr>
<tr><td>-1</td><td>1ª Figura
 
</td><td>-1 [M]N</td><td>N se da en todo M</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>-2 OM</td><td>Alguna O es M</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2ª Figura
 

Transform. 1a</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>3 ¬n_x¬m
Transf. de 1</td><td>Si no es N, no es M</td></tr>
<tr><td>3</td><td> 

Excl. Part 2</td><td>4 OM¬¬N
Exclus. Parti.m,¬m: 2,3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>5 ON
Cont. 4</td><td>Alguna O es N</td></tr>
</table>

ILUSTRACIÓN 139. DARII RESUELTO MEDIANTE LA SEGUNDA FIGURA.

5.10.6 Modos no válidos de la segunda figura

En el capítulo que Aristóteles dedica a la segunda figura del silogismo, presenta también los modos que no son válidos en ella. En *Analíticos Primeros* I, 5, 27a15 leemos:

> Así, pues, es evidente que, si los términos están dispuestos de ese modo, se produce razonamiento, pero no perfecto: pues la necesidad no se hace concluyente sólo a partir de las < proposiciones establecidas> desde el principio, sino también a partir de otras cosas. En cambio, si M se predica en todo N y de todo O, no habrá razonamiento [...] Tampoco < habrá razonamiento> cuando M no se predique ni de ningún N ni de ningún O. (Aristóteles, Trad. 1995, pp. 110-111)

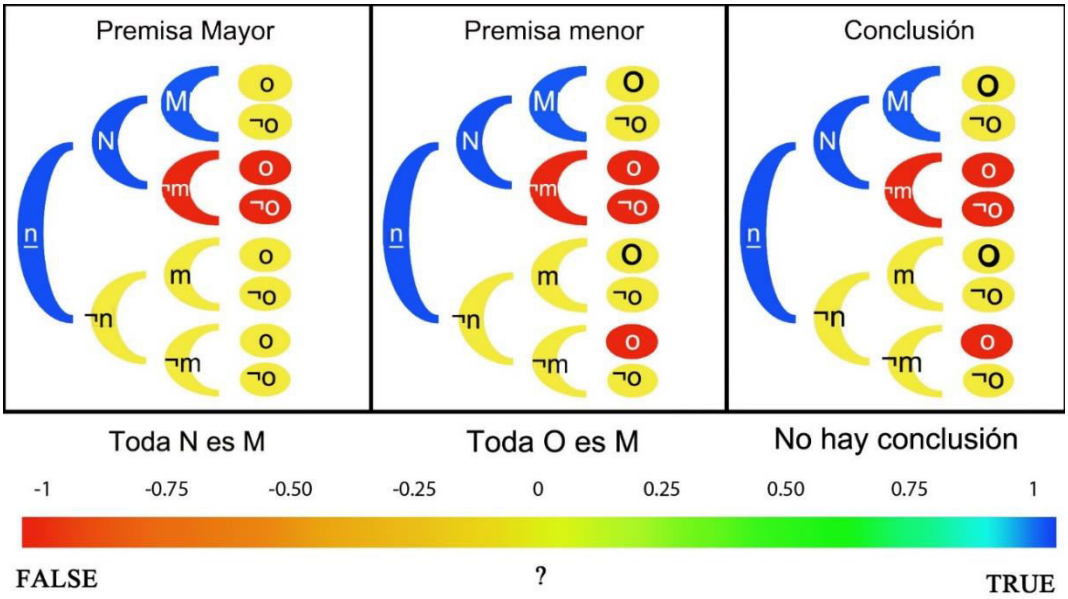


ILUSTRACIÓN 140. MODO AA CATEGÓRICAMENTE INCONCLUYENTE DE LA SEGUNDA FIGURA, PERO CON CONCLUSIÓN FORMALMENTE NECESARIA PARA ¬M.

Llegamos a la misma conclusión de que no hay conclusión universal necesaria existencial analizando el razonamiento con el diagrama de Marlo. No obstante, como vemos en la figura anterior y como veremos en el diagrama de Marlo, llegamos a una conclusión teórica que es esencialmente necesaria, aunque con un alcance particular. Observamos en la imagen anterior que desde ¬*m* llegamos necesariamente a ¬*n* y ¬*o*, una conclusión fácilmente verificable en lógica de proposiciones:

-1	n → m	Premisa
-2	o → m	Premisa
3	¬m	suposición
4	¬n	M.T 1, 3
5	¬o	M.T 1, 4
6	¬n ∧ ¬o	Conjunción 4, 5
7	¬m → (¬n ∧ ¬o)	Introducción implicación de 3 a 6

TABLA 28. MODO AA DE LA SEGUNDA FIGURA EN LÓGICA DE PROPOSICIONES.

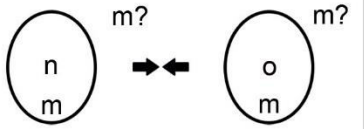
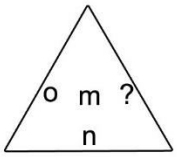
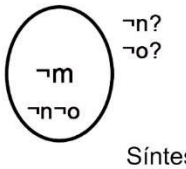
Toda N es M. Toda O es M.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 nxm	M se da en toda N
		-2 oxm	M se da en todo O
2	Figura no válida Conv.1a Conv.1b	3 mnx Conversión 1	
		4 mox Conversión 2	
3	 Sínt. Nula 2		
			No hay razonamiento*
4	3ª Figura Conv. 3b	5 ¬mx¬n Trans.1a	Si algo no es M, entonces no es N
		6 ¬mx¬o Trans.1b	Si algo no es M, entonces no es O
5	 Síntesis Universal 4	7 ¬mx¬n¬o Gen.¬m, 5, 6	Lo que no sea M, ni es N ni es O
		8 ¬n¬o Cont en 7	En teoría, una parte de lo que no es N no es O

ILUSTRACIÓN 141. FIGURA INVÁLIDA DE LA SEGUNDA FIGURA. BASADO EN ARISTÓTELES, TRAD. 1995, P. 111.

La conclusión de que en teoría parte de los tipos de ¬*N* es ¬*O* es una consecuencia teórica particular que se sigue de las premisas. Pero no es en modo ni existencialmente necesaria, ni universal respecto de ¬N y ¬O. No es existencialmente necesaria porque nada obliga a que tenga que existir ¬*N* o ¬*O*. Y no es universal porque se mantienen vivas las posibilidades de ¬*ON* y de *O*¬*N*. En todo caso, es una consecuencia hipotética particular necesaria dentro del estado actual de conocimiento de la red, tal y como hemos demostrado utilizando la lógica de proposiciones.

Comprendemos que la combinación hipotético-particular-necesario no parece ortodoxa a primera vista, pero se nos impone. O bien negamos que las siguientes fórmulas sean tautologías en las tablas de verdad:

$$[(n \rightarrow m) \wedge (o \rightarrow m)] \rightarrow \neg m \rightarrow (\neg n \wedge \neg o)$$

$$\neg m \wedge (n \vee o) \rightarrow \neg [(n \rightarrow m) \wedge (o \rightarrow m)]$$

Sea como fuere, el modo AA de la segunda figura no se ajusta a la segunda figura lógica (exclusión universal o particular) que permite extraer a Aristóteles una conclusión categórica. Y tampoco ofrece una relación necesaria partiendo del término medio original *M*.

5.11 Tercera figura: Síntesis universal

La tercera figura que define Aristóteles en *Analíticos Primeros* I, 6, 28a10-17, se ajusta exactamente a lo que denominamos síntesis universal en el diagrama de Marlo. Aristóteles define la tercera figura como una síntesis universal de los modelos del término medio, y aunque incluya más tarde en este capítulo la explicación de Disamis, Datisi, Bocardo y Ferison, estos silogismos solo pertenecen a la tercera en cuanto a su figura superficial, pues en cuanto a su estructura lógica profunda se ajustan a la primera. Hay que prestar atención a que en la definición inicialmente no se incluye el caso en el que una premisa sea particular, aunque termine aceptando que el razonamiento es posible por más que no se relacionen de manera universal con el medio. En *Analíticos Primeros* I, 6, 28a10 leemos:

> Si, respecto a la misma cosa, una se da en ella en todos los casos y otra en ninguno, o ambas en todos o en ningún caso, llamo a ésta tercera figura, y llamo en ella medio a aquel <término> acerca del cual <se dicen> ambos predicados, extremos a los predicados, extremo mayor al más alejado del medio y menor al más próximo. El medio se coloca fuera de los extremos, en última posición. Así, pues, tampoco en esta figura se produce razonamiento perfecto, pero será posible tanto si los términos se relacionan de manera universal como no universal con el medio. Así, pues, si son universales, cuando tanto P como R se dan en todo S, P se dará necesariamente en R. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 117)

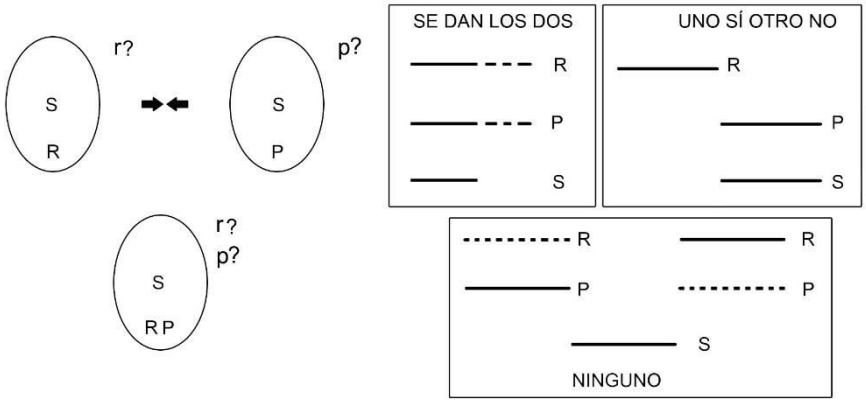


ILUSTRACIÓN 142. TERCERA FIGURA EN EL DIAGRAMA DE MARLO Y UN DIAGRAMA LINEAL. LOS EXTREMOS SE DAN DE FORMA UNIVERSAL EN LA TOTALIDAD DEL MEDIO, AUNQUE EN LA REPRESENTACIÓN, SOLO PARTE DE LOS EXTREMOS CAE BAJO EL MEDIO.

La definición que da Aristóteles de la tercera figura puede ser representada en ambos diagramas, aunque el discurso parece hecho auxiliándose de un diagrama lineal.

Es tentador pensar que cuando Aristóteles afirma que el razonamiento "será posible tanto si los términos se relacionan de manera universal como no universal con el medio" se refiere a que en la figura lógica profunda de la tercera no importa que los extremos estén o no en su totalidad en el medio. Si los extremos no se dan en su totalidad en el medio veremos un trazo de línea discontinua en los diagramas lineales para representar esa parte de los extremos que no se da en el medio. En nuestros diagramas veremos la variable del predicado con una interrogación al margen del modelo del término medio. En nuestros diagramas hay conclusión en esta figura de la síntesis universal con independencia de que los extremos se relacionen con el medio de manera universal o no, es decir, que no afecta a la necesidad del razonamiento que al margen de los modelos haya o no haya *r?* y *s?*. Y si observamos los diagramas lineales del caso en que se dan los dos extremos en el medio, veremos que aunque eliminemos los trazos discontinuos de R y de P seguirá habiendo conclusión. De esos trazos depende que los extremos se den universalmente o no en el medio. Y siendo las premisas ambas universales afirmativas, no hay inconveniente en reconsiderar el silogismo suponiendo que es posible que todo R y todo P se relacionen de manera universal con el medio S. Si esto fuera así, Aristóteles estaría exponiendo esta figura como si tuviera en cuenta la cuantificación del predicado.

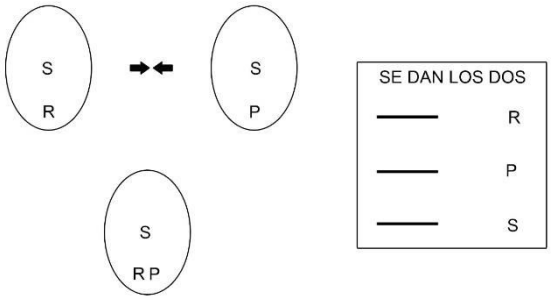


ILUSTRACIÓN 143. SÍNTESIS UNIVERSAL EN EL CASO DE QUE LA TOTALIDAD DE AMBOS EXTREMOS CAIGA BAJO EL MEDIO.

Los diagramas de la figura anterior expresan modelos de identidad, la cual, como ya hemos visto, Aristóteles conoce y define extensamente. Que Aristóteles percibiera la identidad de tres líneas iguales, que caen una bajo otra, resulta elemental y sería increíble que no se percatara de ello. En nuestra opinión, señalar algo tan básico solo vendría al caso para explicar lo más elemental de lo elemental del razonamiento en general, pero tendría que darse totalmente por supuesto para afrontar el silogismo demostrativo.

Podemos ver que en el diagrama de Marlo las tres asociaciones posibles que se pueden seguir de la síntesis universal son: *Alguna P es R*, *Alguna P no es R*. *Alguno que no es P no es R*. Y podemos comparar en las redes de expectativas la convención aristotélica con la nuestra para comprender por qué no llegamos a las mismas conclusiones a pesar de usar los mismos principios formales de la inferencia.

La primera asociación posible en la síntesis universal es el caso en el que se dan los dos extremos *B* y *C* en el medio *A*. Es decir, *Alguna B es C*, aunque sería también ciencia decir que alguna *C* es *B*. En este caso, al ser afirmativas las premisas, nuestra representación sería la misma. Es el caso de Darapti.

5.11.1 Darapti

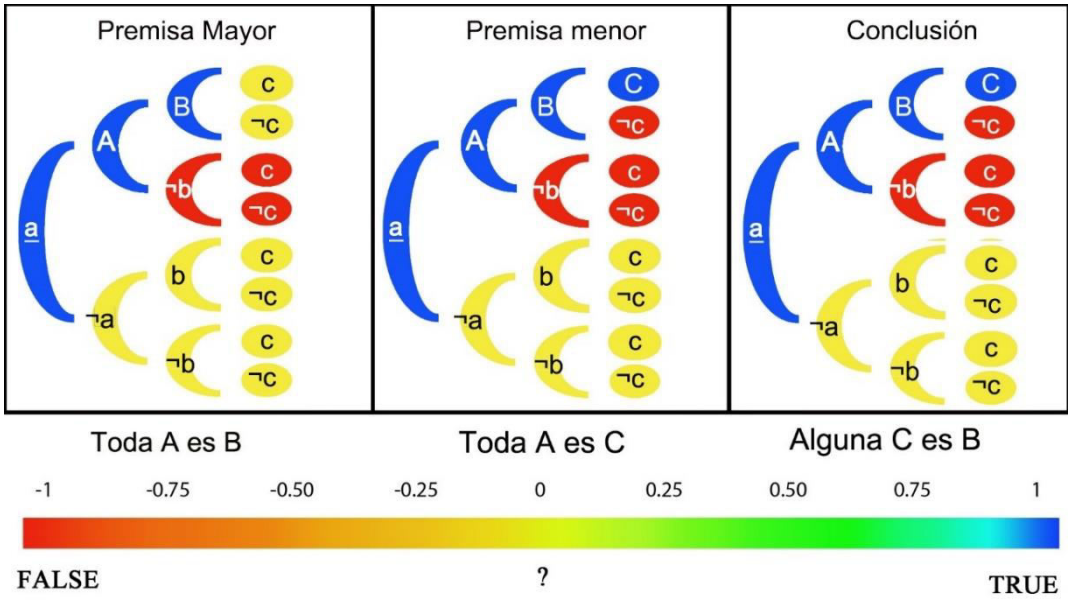


ILUSTRACIÓN 144. DARAPTI EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

5.11.1.1 Darapti a Darii por inversión predicativa

En *Analíticos Primeros* I, 6, 28a15-20 se dice:

> Así, pues, si son universales, cuando tanto P como R se dan en todo S, P se dará necesariamente en R; en efecto, dado que la < proposición> predicativa se invierte, se dará S en algún R, de modo que, comoquiera que en todo S se da P y en algún R se da S, necesariamente se dará P en algún R: pues se produce razonamiento en virtud de la primera figura. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 117)

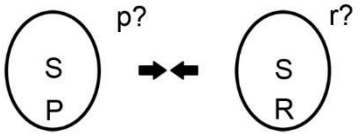
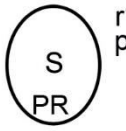
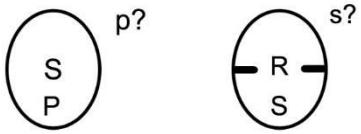
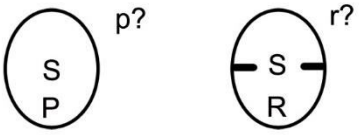
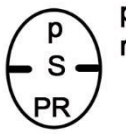
Demostración Darapti por Darii: Todo S es P. Todo S es R.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1	3ªFigura 	-1 [S]P	P se da en todo S
		-2 [S]R	R se da en todo S
2	 Sínt. 1	3 [S]PR Gen. a, de 2 a 1	
		4 PR Contenido 3	P se da necesariamente en R.
3	 premisa 1a Conv. Arist 1b		En efecto... Invertimos la predicativa
		5 RS Conv.Arist. 2	en algún R se da S
4	1ª Figura  Conv. 3b		De modo que, en virtud de la primera figura, como en todo S se da P
		6 SR Conv. 4	y en algún R se da S
5		7 SPR Gen. s, 1 a 6	
		8 PR Cont en 7	Necesariamente se dará P en algún R

ILUSTRACIÓN 145. DEMOSTRACIÓN DE DARAPTI POR DARII EN *ANALÍTICOS PRIMEROS*.

5.11.1.2 Darapti a Darii por *éctesis*

> Finally, in addition to one or both of these methods of validation, Aristotle sometimes uses a third method which he calls (ἔκθεσις)[17] Take, for instance, the mood Darapti: All S is *P,* All S is *R,* Therefore some *R is P.* This must be so, says Aristotle; for if we take a particular S, e.g. *N,* it will be both *P* and *R,* and therefore some *R* (at least one *R)* will be *P(...)* I think, mean to be justifying the conclusion by appealing to something more intuitive than abstract proof to be calling for an act of imagination in which we conjure up a particular which is both Rand P and can see by imagination rather than by reasoning the possession of the attribute P by one R. (Aristóteles & Ross, 1957, p. 32)

Se afirma en *Analíticos Primeros* I, 6, 28a20-25:

> También es posible hacer la demostración mediante <reducción a> lo imposible y por exposición[18]: pues, si ambos <términos> se dan en todo S, en caso de tomar alguno de los S, como por ejemplo, N, tanto P como R se darán en éste, de modo que en algún R se dará P. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 117)

Podemos recrear en el diagrama de Marlo el razonamiento por *éctesis* que se sigue para demostrar Darapti por Darii en la primera figura.

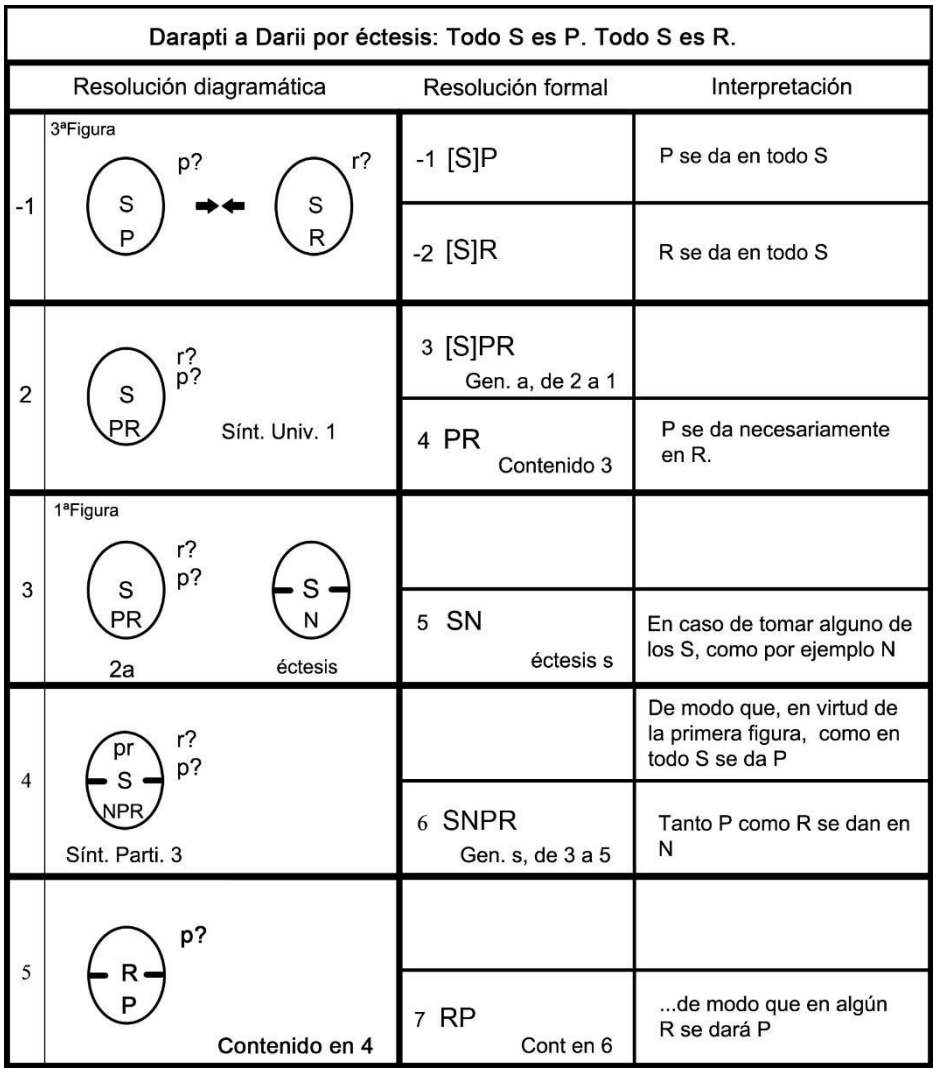


ILUSTRACIÓN 146. DARAPTI A DARII POR *ÉCTESIS*, BASADO EN ANALÍTICOS PRIMEROS. N* SIGNIFICA ALGUNO DE LOS S, POR LO QUE LO TOMAMOS COMO INDIVIDUO SIN POSIBILIDAD N¬S AL MARGEN DE S.

[17] ἔκθεσις *Ekthesis*.

[18] *ekthésthoi,* i.e., el procedimiento de *éctesis*

-1	$s_x p$	Premisa	Si algo es S, entonces es P.
-2	$[S]$	Premisa de actualidad implícita en 1	Es un hecho cierto que tenemos ahora todo S
-3	$s_x r$	Premisa	Si algo es S, entonces es R.
4	$s_x pr$	Generalización de S de 3 a 1.	Si algo es S, entonces es P y R.
5	[S]PR	Generalización de S de 4 a 2 con razón suficiente de existir (RS∃)	Es cierto como hecho científico que tenemos la totalidad de lo que es al mismo tiempo SPR
6	SN	Ekthesis 2.	Tomamos parte de S, digamos N
7	SNPR	Generalización de S de 4 a 6	Tenemos que SN es P y R
8	PR	Contenido en 7	Luego alguna P es R
9	RP	Conversión de 8	Y/O alguna R es P

TABLA 29. DEMOSTRACIÓN DE DARAPTI POR ÉCTESIS REDUCIÉNDOLO A LA PRIMERA FIGURA.

5.11.2 Invalidez de EE y AE en la tercera aristotélica

Podemos ver por qué AE de la tercera no produce conclusión en Aristóteles y sí con nuestra convención de existencia en las negativas. Primero veamos cómo nosotros consideramos en la segunda premisa que si *A no es C*, entonces verificamos ¬*C*. También debemos observar que podemos leer *Alguna B no es C* lo mismo que *Alguna B es* ¬*C* y que alguna ¬*C es B*. Todos nuestros términos, incluidos los infinitos o negativos pueden ejercer como sujeto de la conclusión y no hay diferencia en la validación material del término que ejerce de sujeto o predicado. También comprobamos que incluimos razonamientos probables en el sistema.

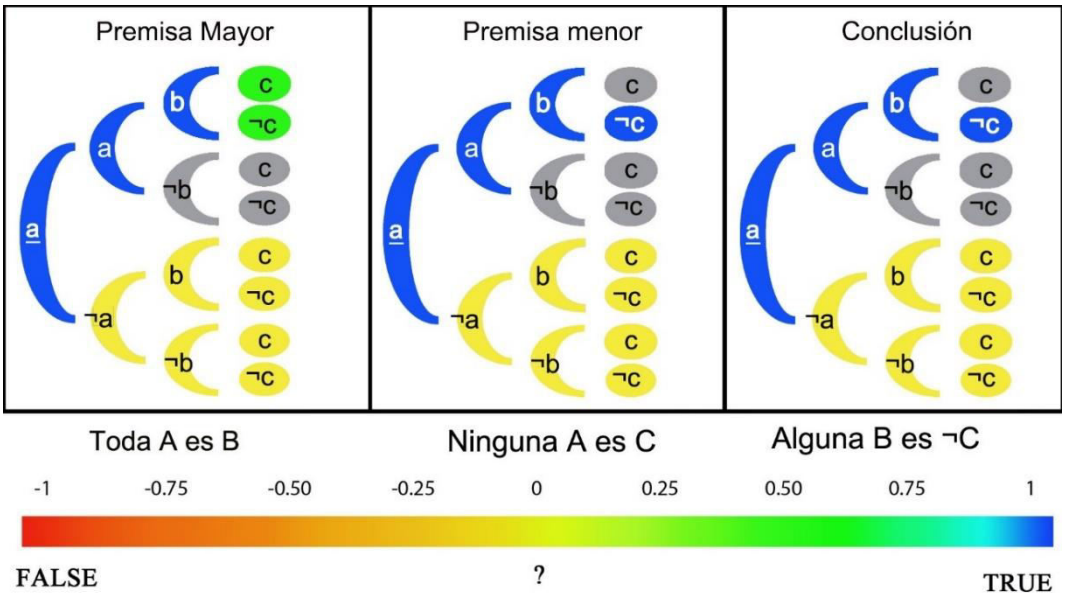


ILUSTRACIÓN 147. VALIDEZ FORMAL Y EXISTENCIAL EN LAS REDES MARLO DEL MODO AE DE LA TERCERA FIGURA.

Ahora observamos cómo imaginamos el mismo modo AE de la tercera figura en Aristóteles.

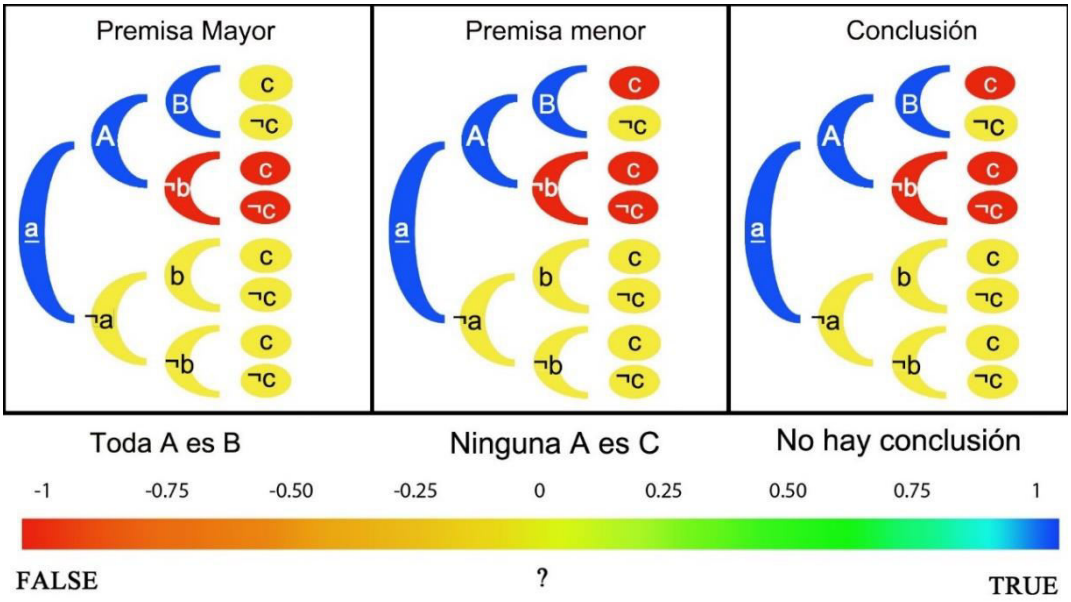


ILUSTRACIÓN 148. INVALIDEZ EN ARISTÓTELES DEL MODO AE DE LA TERCERA FIGURA.

Como vemos, no existe una sustancia que sea C bajo A y B. Y ¬C no puede ejercer como sujeto. Podemos apreciar por último, por qué no se sigue nada en la lógica matemática en este modo.

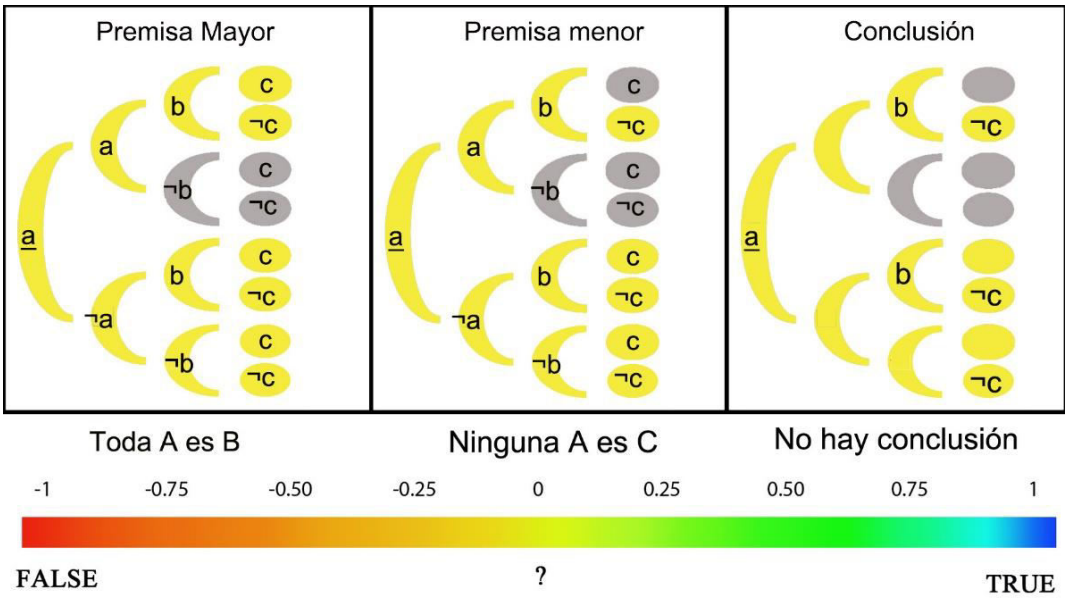


ILUSTRACIÓN 149. MODO AE DE LA TERCERA FIGURA EN LA LÓGICA MATEMÁTICA: INCONCLUYENTE.

Al considerar el modo AE de la tercera figura desde la perspectiva de la lógica matemática, dado que hemos eliminado la predicación existencial de las proposiciones universales, no podemos concluir que *Algún B sea ¬C*, sobre todo porque "algún" tiene contenido denotativo existencial en su paradigma y como apreciamos en la figura anterior, dicho contenido no está justificado por las premisas. Tampoco podemos extraer una conclusión universal porque ni es necesario *B* a partir de *¬C* ni es necesario *¬C* a partir de *B*. Luego este silogismo no otorga a la conclusión necesidad ni esencial ni existencial, por más que sea cierto que *Si tenemos A y B, entonces ¬C*.

Las redes de expectativas permiten representar las tres posturas: la aristotélica, la de la lógica matemática y la nuestra, que consideramos una síntesis de las anteriores que se ajusta mejor a las exigencias de la comunicación. Nosotros entendemos la lógica, creemos que siguiendo en lo esencial la postura de Locke, como condición previa a cualquier negociación de las convenciones que hacen posible la comunicación. Y es obvio que atenta contra todas las reglas de la comunicación honesta afirmar que *Toda A es B* o que *Ningún A es B*, sin tener evidencia de que existe algo (ya sea un objeto material, psicológico o social), que se ajusta a los criterios de *A* y de *B* en el

primer caso o de *A* y ¬*B* en el segundo. Puede ocurrir en la figura definida por Aristóteles al comienzo del capítulo 6 de *Analíticos Primeros,* la cual se corresponde con nuestra definición de la síntesis universal, que no se dé ninguno de los extremos en el conjunto del término medio. De esto se seguiría ¬P¬R. Es decir, *Alguno que no es P no es R*, una conclusión que no puede ser aceptada como ciencia. Recordemos que no sería una conclusión válida para un silogismo categórico porque de dos negativas no se sigue nada. El mismo resultado obtendríamos en la lógica matemática, aunque en vez de en rojo rellenaríamos los nodos con gris o negro para significar la eliminación de posibilidades que conllevan las premisas universales por encima de su negación existencial. En *Analíticos Primeros* I, 6, 28a30-35 leemos: "Tampoco habrá razonamiento cuando ninguno de los dos < extremos> se diga de S" (Aristóteles, Trad. 1995, p. 118).

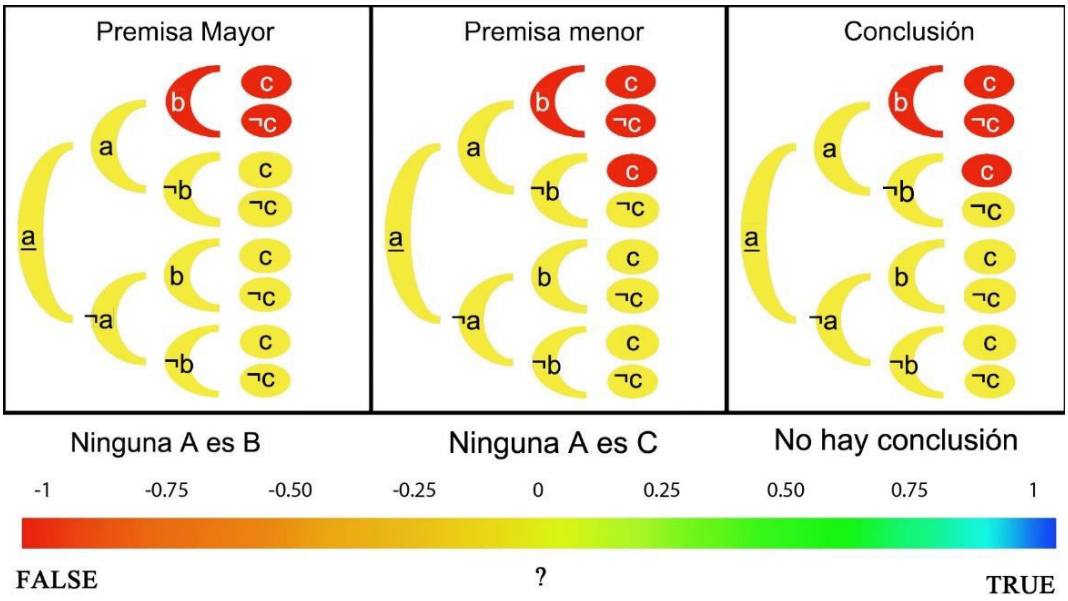


ILUSTRACIÓN 150. INVALIDEZ DEL MODO EE DE LA TERCERA FIGURA EN ARISTÓTELES.

Sin embargo, en nuestro sistema y conforme al sentido común, si afirmamos que *Ninguno de nuestros alumnos bebe* y que *Ninguno de nuestros alumnos fuma*, se sigue que hay algunos que ni fuman ni beben. Sea *A* ser alumno nuestro, *B* beber y *C* fumar.

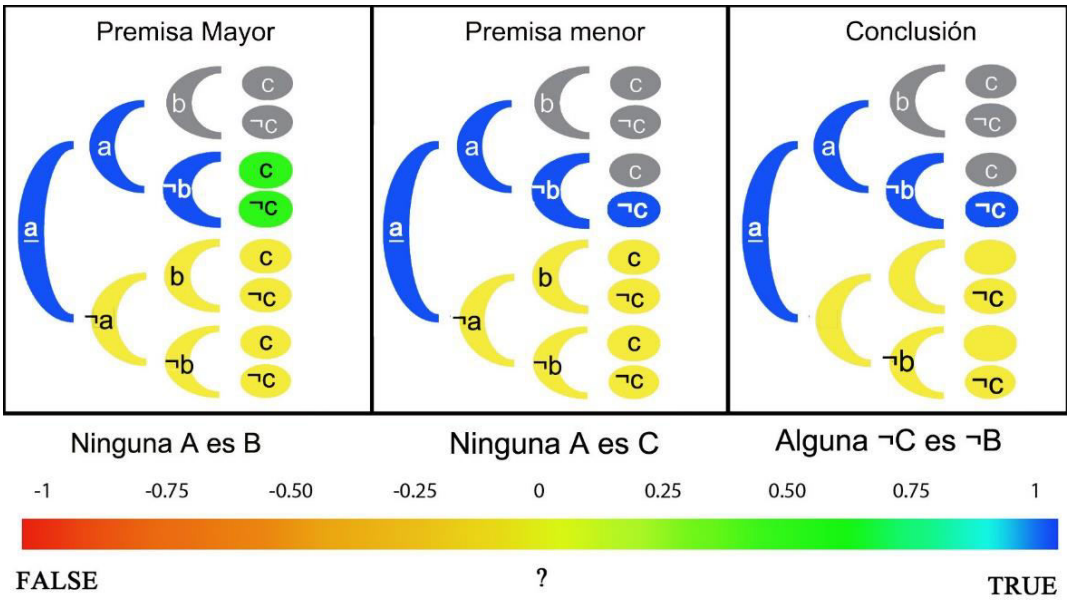


ILUSTRACIÓN 151. VALIDEZ DEL MODO EE DE LA TERCERA FIGURA EN NUESTRO SISTEMA.

DIAGRAMA DE MARLO

Podemos llegar a la misma conclusión utilizando el diagrama de Marlo.

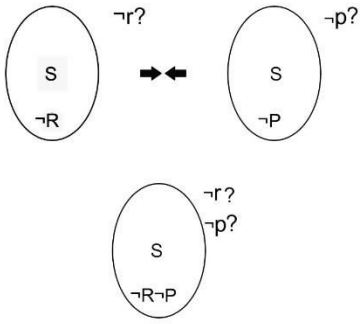


ILUSTRACIÓN 152. CONCLUSIÓN FORMALMENTE VÁLIDA POR SÍNTESIS UNIVERSAL DESDE DOS NEGATIVAS, NO VÁLIDA PARA ARISTÓTELES EN EL SILOGISMO CATEGÓRICO.

En el capítulo 6 de *Analíticos Primeros* Aristóteles define la tercera figura de modo que encaja perfectamente con nuestra definición de síntesis universal si seguimos la traducción de Miguel Candel "tanto si los términos se relacionan de manera universal como no universal con el medio". Sin embargo, nuestra hipótesis sale perjudicada con la traducción de Ross de esta definición, pues donde Candel habla de términos Ross habla de premisas (La negrita es nuestra):

> If two predicates belong respectively to all and to none of a given term, or both to all of it, or to none of it, I call this the third figure, the common subject the middle term, the predicates extreme terms, the term farther from the middle term the major, that nearer it the minor. The middle terms is outside the extremes, and last in position. **There is no perfect syllogism in this figure, but there can be a syllogism, whether or not both premisses are universal.** (Aristóteles & Ross, 1957, p. 310)

En todo caso, no comprendemos cómo puede terminar el párrafo dejando abierta la posibilidad de que las premisas no sean universales cuando ha definido inicialmente la tercera figura como aquella en la que los extremos se predican: a) ambos de la totalidad del medio; b) ninguno del medio; c) uno se da en la totalidad y el otro no se da en absoluto. La primera parte trata las premisas claramente como universales, careciendo de sentido que luego considere la posibilidad de que ambas sean particulares. En el caso de que ambas fueran particulares no se seguiría nada y si una es universal tendremos razonamiento en base a la primera figura lógica, por síntesis particular. Y así ocurre de hecho en Bocardo, Datisi, Disamis y Ferison, que se corresponden superficialmente con la tercera figura pero que se ajustan a la estructura lógica de la primera según nuestra clasificación.

Estos modos se exponen en el capítulo que dedica Aristóteles en *Analíticos Primeros* a la tercera figura, lo cual no refuerza en absoluto la idea de que las figuras lógicas de nuestros diagramas se ajustan a las figuras de Aristóteles. No obstante, se nos hace notar en Bochenski & Bravo (1985) que en Disamis, Datisi y Bocardo, Aristóteles sitúa la premisa menor en primer lugar de forma anómala, quizás para conseguir aproximarlos a la primera figura en la que el término superior es el de mayor extensión, aunque no sabemos a qué se debió esta anomalía con certeza. Por otra parte, y aunque a nosotros nos gustaría pensar que Bocardo, Datisi, Disamis y Ferison pudieron ser incluidos en la tercera figura por Teofrasto y no por Aristóteles, apoyándonos en Zürcher (1952), lo cierto es que afirman Bochenski & Bravo (1985) que no puede tomarse en serio que el contenido lógico-formal del *Órganon* proceda de Teofrasto y no de Aristóteles. Luego tenemos que reconocer, muy a nuestro pesar, que Aristóteles describió en la tercera figura el caso en que ambas premisas son particulares (Aristóteles & Ross, 1957). Pero pese a la evidencia en contra, seguimos pensando que Aristóteles distinguía perfectamente entre la estructura lógica profunda o *Lekta* que permite la inferencia y la estructura superficial que depende de la posición del término medio, la cual resulta útil para ordenar sin omisiones los silogismos.

Supera los objetivos de esta tesis discutir qué quiso decir Aristóteles y solo exponemos parte de su trabajo para mostrar de qué modo el nuestro se supedita al suyo. Pero nos atrevemos a especular con que, siendo la estructura lógica profunda condición necesaria para el razonamiento pero no condición suficiente para que exista demostración, Aristóteles no reorganizó en función de ella la exposición de los silogismos, lo cual no es incompatible con la afirmación de Bochenski y Bravo (1985) de que, a grandes rasgos, la obra del *Órganon* es auténtica.

En el segundo caso de la asociación por síntesis universal se da uno de los extremos totalmente en el medio y el otro no, es decir, *Alguna P no es R*, no siendo ciencia decir que *Algún ¬P es R.*

5.11.3 Felapton

En *Analíticos Primeros* I, 6, 28a25 leemos: "Y, si R se da en todo S y P no se da en ninguno, habrá razonamiento, <a saber> que por fuerza P no se dará en algún R: en efecto, el modo de demostración <será> el mismo <de antes>, invirtiendo la proposición RS" (Aristóteles, Trad. 1995, p. 118). Debemos advertir que, en nuestros diagramas, el modo de la tercera figura superficial AE no difiere en absoluto del modo superficial EA. En la ilustración 153 R es afirmado existencialmente en la premisa menor por conversión de la premisa mayor: así puede ser afirmado como sujeto de la conclusión.

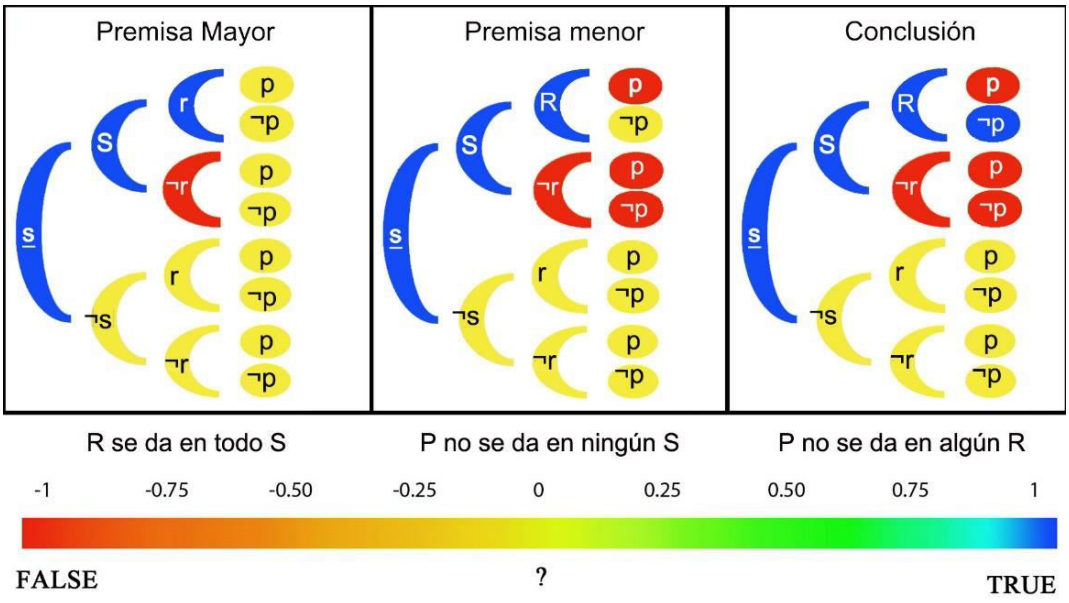


ILUSTRACIÓN 153. VALIDEZ DEL MODO AE EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS CON LA CONVENCIÓN ARISTOTÉLICA. P HA SIDO VALIDADO COMO SUJETO.

En lógica matemática, para obtener una conclusión materialmente válida en Felapton es necesario afirmar la existencia de S. En caso contrario, no hay conclusión existencialmente válida.

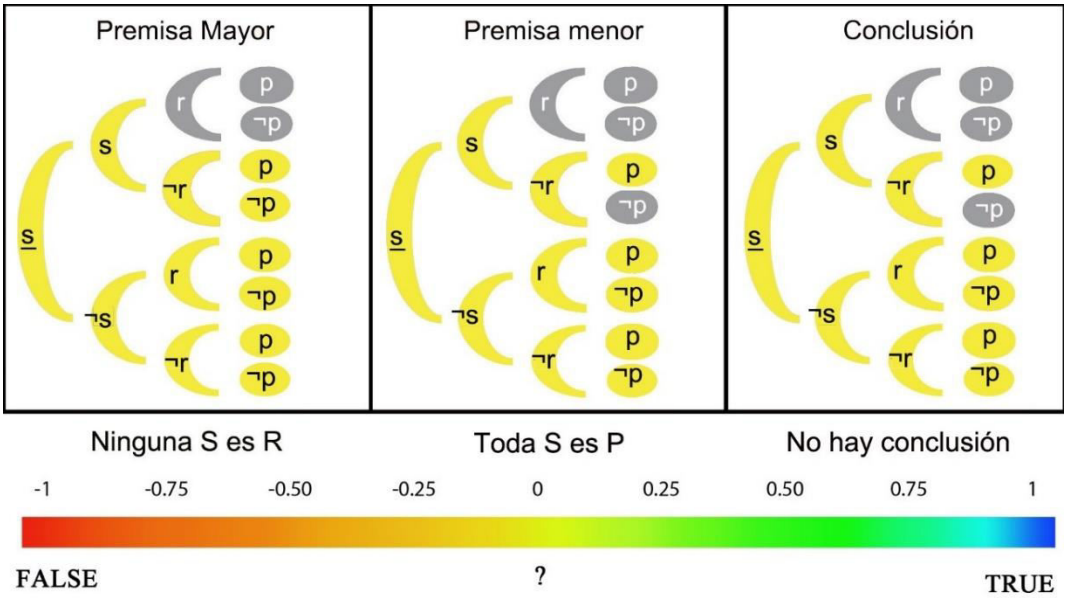


ILUSTRACIÓN 154. FELAPTON EN LÓGICA MATEMÁTICA.

5.11.3.1 Felapton a Ferio por inversión

También podemos ver el razonamiento EA de la tercera figura en los diagramas de Marlo adoptando la convención aristotélica en la validación de existencial de los términos. El razonamiento se produce por síntesis universal de forma directa en la tercera figura, pero también se puede producir por síntesis particular en la primera figura tras invertir la segunda premisa. En este último caso estamos transformando Felapton a Ferio como podemos observar en la siguiente ilustración.

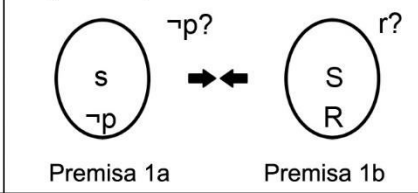
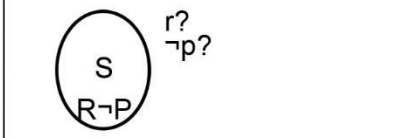
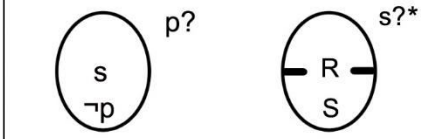
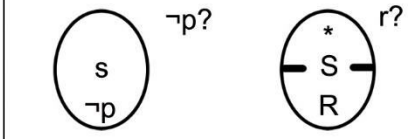
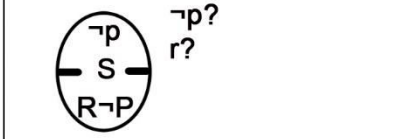
Felapton reducido a Ferio: Ningún S es P. Todo S es R.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1	3ªFigura: Felapton  Premisa 1a Premisa 1b	-1 $S_{x}\neg P$	P no se da en ningún S
		-2 [S]R	R se da en todo S
2	 Sínt. 1	3 [S]R¬P Gen. S, de 1 a 2	
		4 R¬P Contenido 3	Por fuerza P no se dará en algún R.
3	 Premisa 1a Inversión. Arist 1b	* Inversión imprecisa, no altera la conclusión	En efecto... Invertimos la predicativa
		5 RS Conv.Arist. 1b	en algún R se da S
4	1ª Figura: Ferio  Premisa 1a Conv. 3b		De modo que, en virtud de la primera figura, como en ningún S se da P
		6 SR Conv. 4	y en algún R se da S
5	 Síntesis 4	7 SR¬P Gen. s, 1 a 6	
		8 R¬P Cont en 7	Necesariamente P no se dará en algún R

ILUSTRACIÓN 155. FELAPTON POR LA TERCERA FIGURA Y REDUCIDO A FERIO. R HA SIDO VALIDADO COMO SUSTANCIA.

5.11.3.2 Felapton por absurdo

En *Analíticos Primeros* I, 6, 28a25-30 se dice:

> Y, si R se da en todo S y P no se da en ninguno, habrá razonamiento, <a saber> que por fuerza P no se dará en algún R (...) Podría también demostrarse por <reducción a> lo imposible, como en los casos anteriores. (Aristóteles, Trad.1995, p. 118)

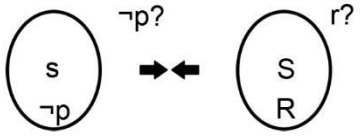
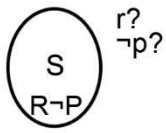
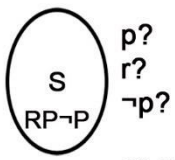
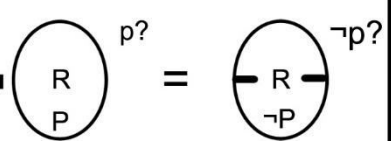
Felapton por Absurdo: Ninguna S es P. Todo S es R.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1	3ªFigura 	-1 $s_x\neg p$	P no se da en ningún S
		-2 [S]R	R se da en todo S
2	 Sínt. Univ. 1	3 [S]R¬P Gen. s, de 1 a 2	
		4 R¬P Contenido 3	Por fuerza P no se da en algún R.
3?	1ªFigura Suposición Conversión 1b	5? [R]P suposición	Supongamos que todo R es P...
4?	 Sínt. Part. 3 Conversión 4a	6? [S]RP Gen. r, de 5 a 2	... entonces la R contenida en S según la segunda premisa también sería P
5?	 Sínt.Uni. 2, 4b		Pero como dijimos en la primera premisa que en ninguna S se da P...
		7? [S]RP¬P Gen. s, de 1 a 6	tendríamos P y ¬P en S
6	 Abs. 3a a 5 Contradictoria 6	8 ¬[R]P Abs. de 5 a 7	Luego es imposible que toda R sea P.
		9 R¬P	Por lo que alguna R no es P

ILUSTRACIÓN 156. FELAPTON POR ABSURDO EN EL DIAGRAMA DE MARLO.BASADO EN *ANALÍTICOS PRIMEROS*.

5.11.4 Datisi

En el capítulo 6 de *Analíticos Primeros* Aristóteles explica primero los casos de la tercera figura del silogismo que se ajustan a lo que nosotros llamamos síntesis universal y que se corresponden exactamente con la definición que él ha dado de la tercera figura, es decir, el caso en el que el término medio se considera sujeto de dos premisas universales. Después prosigue analizando los casos en los que el término medio es también sujeto de ambas premisas (tercera figura superficial del silogismo), pero siendo una universal y otra particular (síntesis particular). Así define ahora Datisi en 6, 28b5-10 cuando la particular y la universal son afirmativas. Debemos observar, como se nos señala en Bochenski y Bravo (1985), la anomalía de poner en primer lugar la premisa menor. Así leemos:

> Si un < extremo> se relaciona universalmente con el medio, y el otro particularmente, siendo ambos afirmativos, es forzoso que haya razonamiento, cualquiera que sea el término universal. En efecto, si R se da en todo S y P se da en alguno, es forzoso que P se dé en algún R. Pues, como se puede invertir la afirmativa, se dará S en algún P, de modo que, como R se da en todo S y S se da en algún P, también R se dará en algún P: así que también P se dará en algún R (Aristóteles, Trad. 1995, p. 119)

Podemos imaginar que Aristóteles acompañara la explicación de los siguientes diagramas:

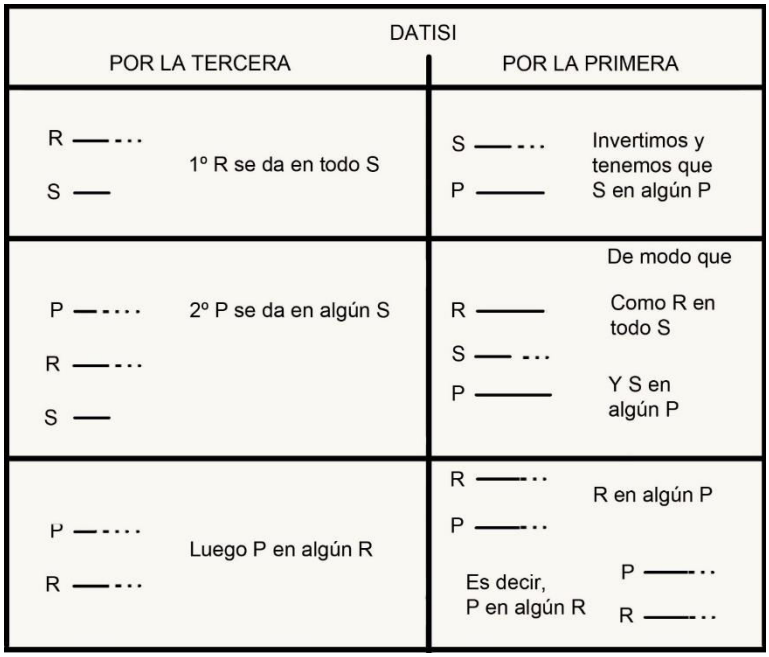
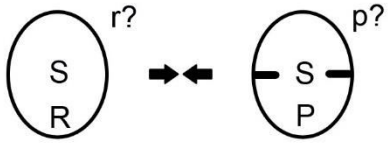
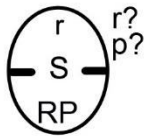


ILUSTRACIÓN 157. DATISI DE LA TERCERA A DARII DE LA PRIMERA FIGURA EN DIAGRAMAS LINEALES.

Si Aristóteles empleaba diagramas lineales, sus explicaciones estarían condicionadas por la forma en la que el razonamiento como ilación se muestra en la representación, del mismo modo que por las convenciones en la interpretación del hecho de que la línea de arriba (lejana) se predica de la de abajo (próxima). Y si es así, sus conversiones de las premisas no tendrían otro objeto que el de adecuarse a las convenciones gráficas. Por eso no podemos hacer corresponder paso a paso su modo de proceder con el nuestro, pues las convenciones de lo que significa ser predicado de en nuestro diagrama son otras (estar dentro del conjunto del sujeto y/o fuera). Pero a pesar de ello, si observamos la resolución gráfica de Datisi en el diagrama de Marlo veremos que se ajusta perfectamente a la estructura lógica de la primera figura, ya que el razonamiento se produce por síntesis particular, lo mismo que Barbara, Celarent, Darii y Ferio.

<table>
<tr><th colspan="4">Todo S es R. Alguna S es P</th></tr>
<tr><th colspan="2">Resolución diagramática</th><th>Resolución formal</th><th>Interpretación</th></tr>
<tr><td rowspan="2">-1</td><td rowspan="2">Primera figura
 
</td><td>-1 SxR</td><td>R se da en toda S</td></tr>
<tr><td>-2 SP</td><td>P se da en alguna S</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2"> 

Sínt.Particular 1</td><td>3 SPR
Gen. s, de 1 a 2</td><td>razonamiento necesario</td></tr>
<tr><td>4 RP</td><td>P se da en algún R</td></tr>
</table>

ILUSTRACIÓN 158. DATISI EN DIAGRAMA DE MARLO CON LAS CONVENCIONES ARISTOTÉLICAS.

Si observamos el razonamiento en las redes, se pierden matices de la forma lógica del lenguaje que sí se aprecian en los diagramas lineales y los diagramas de Marlo, aunque también podríamos invertir el orden de los términos para ajustarnos a las figuras superficiales cambiando el orden de las letras, lo cual no altera del razonamiento más que la perspectiva.

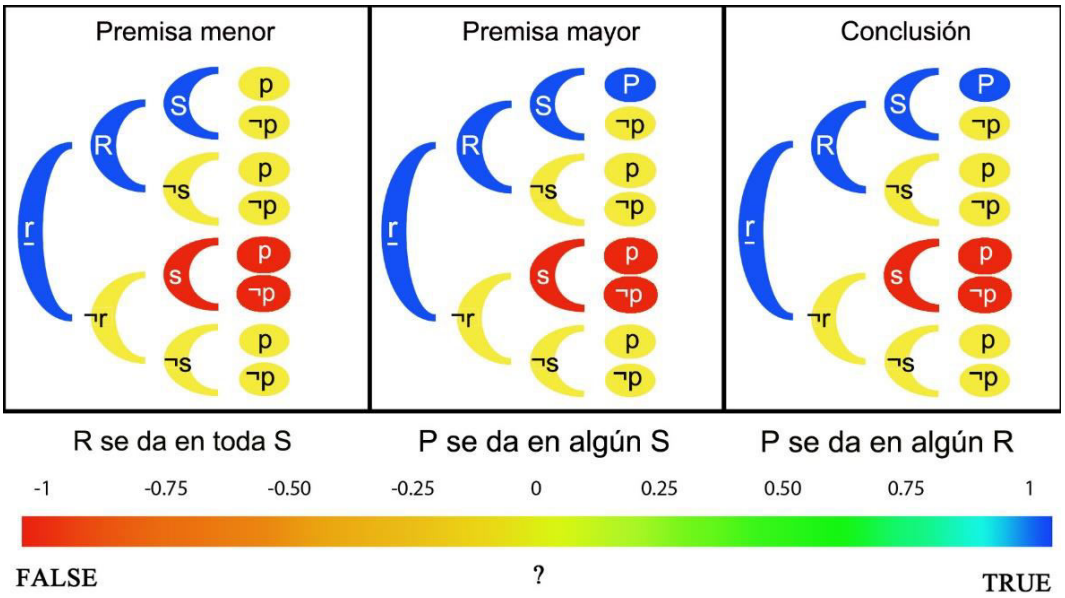


ILUSTRACIÓN 159. DATISI EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

En el paso 2 de la demostración de Datisi en las redes, la P mayúscula significa que "p" se valida como sustancia para ejercer de sujeto. Y por eliminación sabemos que tiene que ser esa P la que es S, motivo por el cual la afirmamos.

5.11.5 Disamis

Ya hemos indicado que aunque Datisi y Disamis se ajustan a la tercera figura superficial del silogismo, la cual queda definida por ser el término medio sujeto de ambas premisas, su *Lekta* se corresponde, según nuestra clasificación, con la primera figura lógica, pues se produce el razonamiento por lo que llamamos en el diagrama de Marlo síntesis particular. En la tercera el razonamiento es por síntesis universal. El caso es que en *Analíticos Primeros* Aristóteles describe el modo Disamis en el capítulo de la tercera figura, pero poniendo también en primer lugar la premisa menor, una anomalía en la que ya hemos dicho que se hace hincapié en Bochenski y Bravo (1985). En 28b13-15 leemos: "Y aún, si R se da en algún S y P se da en cada uno, es forzoso que P se dé en algún R: pues el modo de la demostración es el mismo" (Aristóteles, Trad. 1995, p. 119).

Si aceptamos la hipótesis de los diagramas lineales de Einarson (1936), Aristóteles debía ir trazando líneas en el suelo para representar las premisas. La descripción del modo Disamis la hace Aristóteles en el capítulo dedicado a la tercera figura, pero la pregunta que podemos hacernos es si el desarrollo del razonamiento se ajusta al modo de proceder de la primera o de la tercera. Recordemos que ha dicho Aristóteles que en la primera figura el término medio está en el medio, el menor es el más próximo y el mayor el más alejado. En el capítulo seis dedicado a la tercera figura, en cambio, Aristóteles llama en 28a10-15 "extremo mayor al más alejado del medio y menor al más próximo" y dice que "el medio se coloca fuera de los extremos, en última posición" (Aristóteles, Trad. 1995, p. 117).

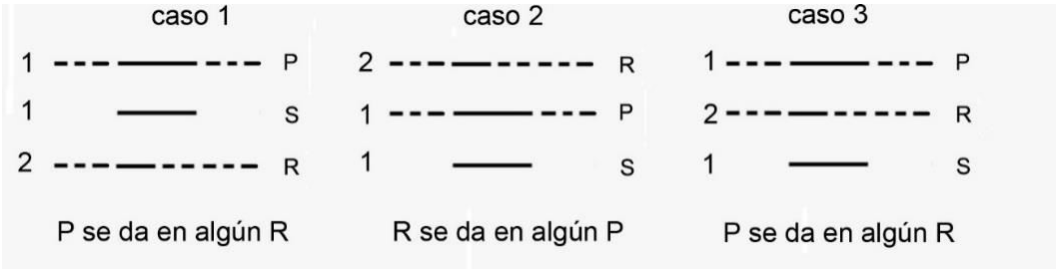


ILUSTRACIÓN 160. TRES FORMAS DE REPRESENTAR DISAMIS EN UN DIAGRAMA LINEAL.

En la figura anterior el caso uno se corresponde con la primera figura y los casos dos y tres con la segunda. Debemos percatarnos de que Aristóteles parece sacar la conclusión de los silogismos observando los diagramas lineales siempre de arriba abajo, de modo que el extremo más alejado del que dibuja se predica del extremo más próximo. Podemos tratar de averiguar qué dibujo es más probable que empleara Aristóteles.

Considerando el orden en el que se describen las premisas "si R se da en algún S y P se da en cada uno", resulta forzado que fuera el caso tres. Para ajustarse a esta imagen tendría que haber dibujado la línea de *R* entre medias de las líneas de *S* y *P* después de haberlas dibujado.

Ahora pensemos si lo hizo ajustándose al caso 1 o al caso 2. Si lo hubiera hecho ajustándose al caso 2 como exige la definición de la tercera figura, la línea de *R* habría quedado más alejada, por lo que *R* debería tomarse como término mayor, siendo la conclusión *R se dice de alguna P*. No es descabellado pensar, por tanto, que

Aristóteles representara este modo (IAI) siguiendo la forma lógica de la primera figura a la que se ajusta el caso 1 de nuestra imagen.

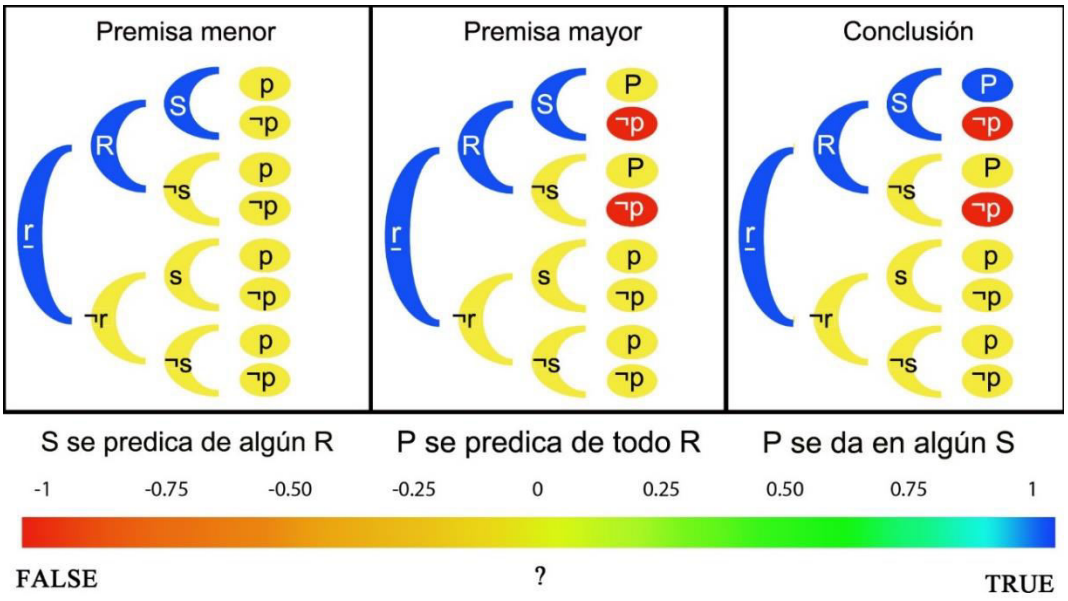


ILUSTRACIÓN 161. DISAMIS EN REDES DE EXPECTATIVAS.

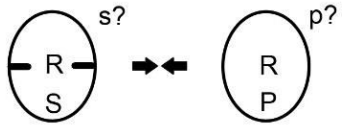
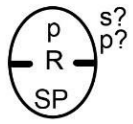
Algún R es S. Toda R es P			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1	Primera figura 	-1 SR	R se predica de algún S
		-2 RxP	P se predica en cada S
2	 Sínt.Particular 1	3 RSP Gen. r, de 2 a 1	razonamiento necesario
		4 RP	P se da en algún R

ILUSTRACIÓN 162. DISAMIS EN DIAGRAMA DE MARLO.

5.11.6 Bocardo

Aristóteles, al exponer los razonamientos asertóricos de la tercera figura en *Analíticos Primeros* I, 6, 28b15-20 incluye Bocardo, aunque también aquí procede, como se señala en Bochenski y Bravo (1985), poniendo la premisa menor en primer lugar.

> Si un <término> es predicativo y el otro privativo, y el predicativo es universal, cuando el menor sea predicativo, habrá razonamiento. En efecto, si R se da en todo S y P no se da en alguno, es forzoso que P no se dé en algún R. Pues, si se diera en cada uno, y P se diera < como se da> en todo S, también P se daría en todo S: pero no se daba. Se demuestra también sin la reducción si se toma alguno de los S en que no se da P. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 120)

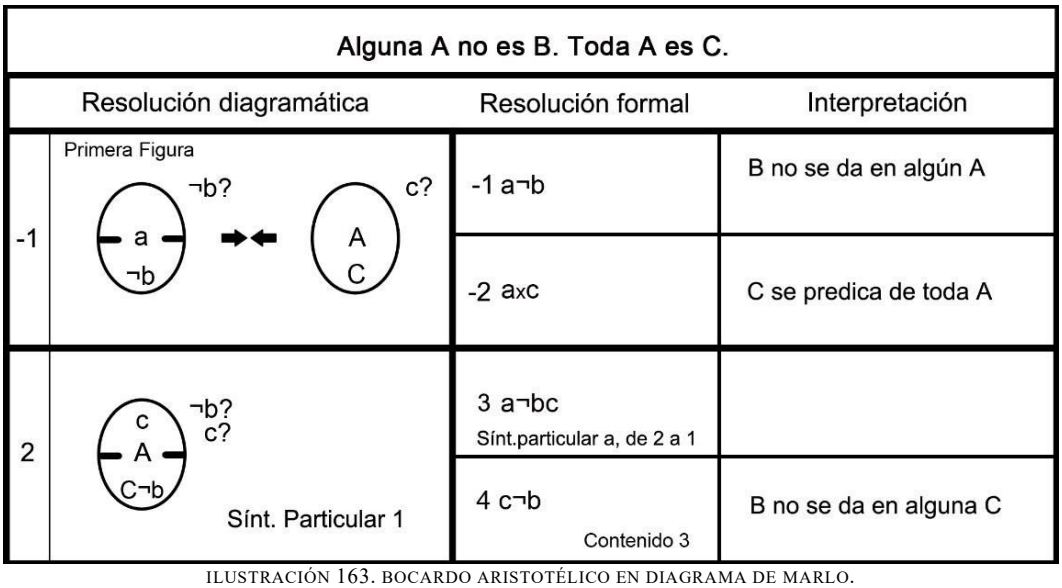


ILUSTRACIÓN 163. BOCARDO ARISTOTÉLICO EN DIAGRAMA DE MARLO.

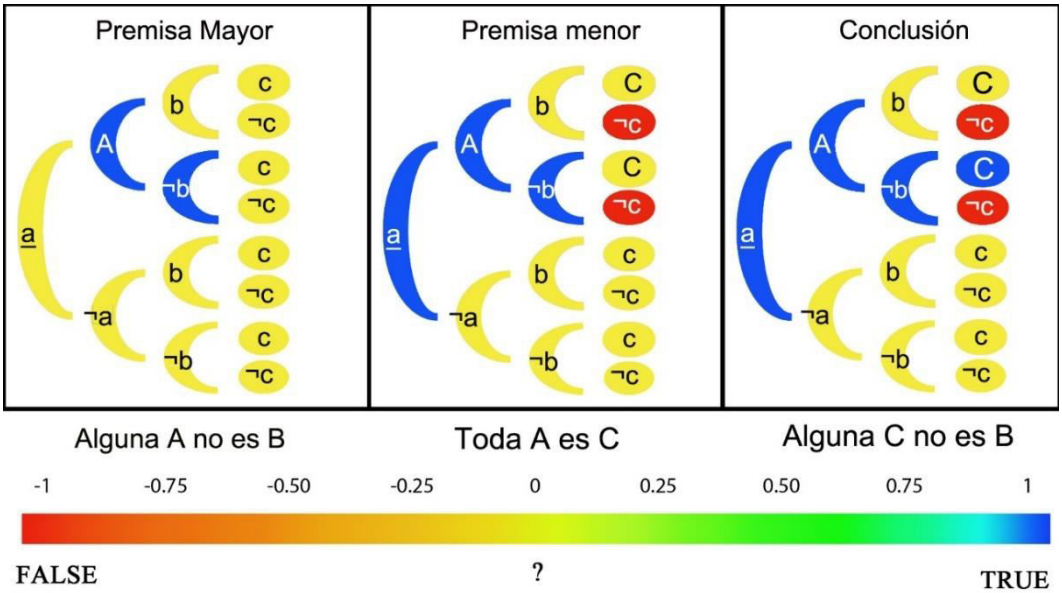


ILUSTRACIÓN 164. BOCARDO ARISTOTÉLICO EN LAS REDES. LA A QUE NO ES B TIENE QUE SER C POR ELIMINACIÓN. Y C HA SIDO VALIDADO COMO SUJETO DE LA CONCLUSIÓN. TAMBIÉN PODRÍA HABER ALGUNA C QUE FUERA B. POR ESO LA CONCLUSIÓN ES PARTICULAR Y NO UNIVERSAL.

5.11.7 Ferison

El último silogismo válido de la tercera figura que nosotros consideramos que se ajusta a la primera lógica es Ferison. Así lo define en *Analíticos Primeros* I, 6, 28b31-35, afirmando que habrá razonamiento porque al invertir la premisa vemos la primera figura.

> Si el término privativo es universal, cuando el mayor sea privativo y el menor afirmativo, habrá razonamiento. En efecto, si P no se da en ningún S y R se da en algún S, P no se dará en algún R: pues será una vez más la primera figura al invertir la proposición RS (Aristóteles, Trad. 1995, p. 121)

Al representar Ferison en el diagrama de Marlo es evidente de forma directa y sin necesidad de invertir ninguna proposición que la figura lógica a la que se ajusta es la primera.

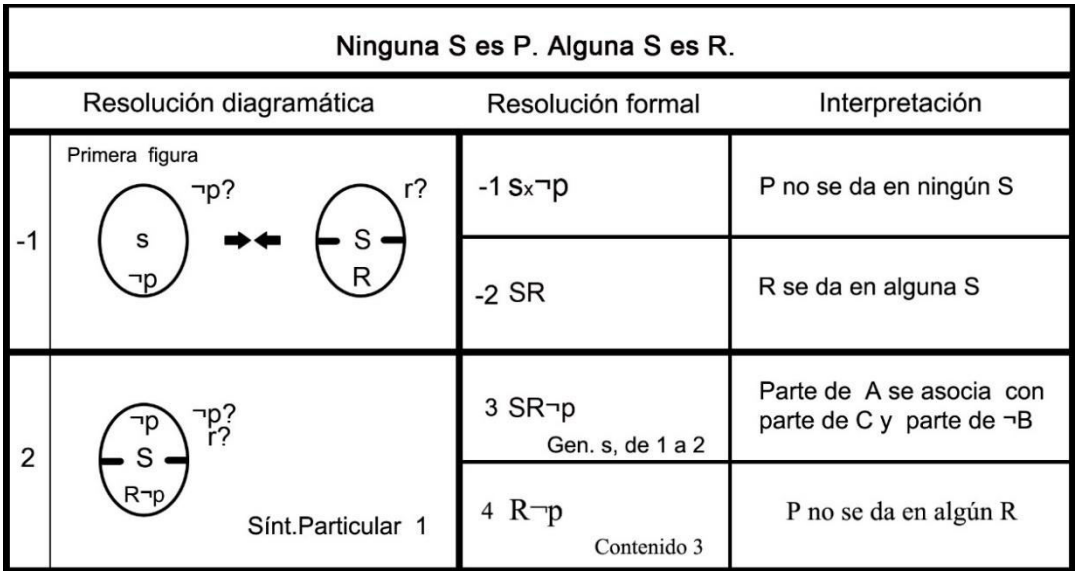


ILUSTRACIÓN 165. FERISON EN EL DIAGRAMA DE MARLO CON LAS CONVENCIONES ARISTOTÉLICAS RELATIVAS A LA DISTINCIÓN SUJETO-PREDICADO.

También podemos representar Ferison en las redes de expectativas.

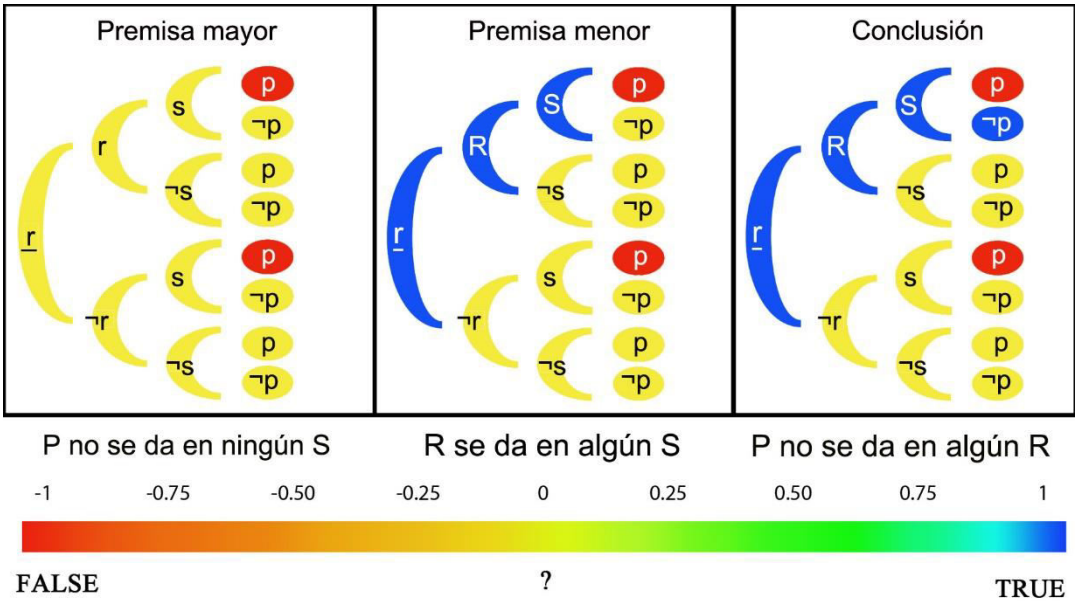


ILUSTRACIÓN 166. FERISON EN REDES DE EXPECTATIVAS.

En la imagen anterior, es muy probable que Aristóteles no hubiera afirmado que es cierto ¬*psr* en el último paso, pues basta que sea falso el nodo *psr* siendo cierto *S* para afirmar que *P no se da en algún S,* y no siempre podemos concluir que es cierto ¬*p* si es falso *p*, como vimos al analizar la obversión en Aristóteles (Correia, 2006).

5.12 Ejemplos de silogismos modales en el diagrama de Marlo

Supera los objetivos de esta tesis afrontar los razonamientos modales que propone Aristóteles, sumamente complejos y que constituyen un sistema calificado en Bochenski y Bravo (1985) como complejo y poderoso pero lleno de imperfecciones y que ha sido mal comprendido desde Teofrasto hasta 1934. Nosotros no habíamos indagado hasta ahora el razonamiento modal al modo de Aristóteles ni con el diagrama de Marlo ni con las redes de expectativas, pues en casi todos nuestros trabajos y sobre todo en el aula, siempre nos hemos limitado a partir de proposiciones categóricas o a incluir como supuesto la no existencia de clases vacías.

No obstante, al formalizar las proposiciones y al leer las conclusiones nos hemos encontrado con algunos de los problemas que se han venido discutiendo desde el principio de la lógica, como el hecho de que ciertas conjunciones no se pueden afirmar con el mismo grado de certeza que otras. Encontramos en Atwatek (1867): «Sect. II. — Quantity, Quality, Relation, and Modality of Judgments (...) With respect to the degree and kind of certainty in the connection of subject and predicate — Modality» (p. 87).

La modalidad se nos impone cuando formalizamos las proposiciones añadiendo las posibilidades que implícitamente permanecen abiertas y con las que tenemos que contar haciendo uso de la interrogación. Y es necesario que Aristóteles haya contado con esas posibilidades para generar todas las conclusiones particulares del silogismo que se leen como al menos uno, de modo que no se afirma ni se niega nada acerca del resto. Y pensamos que el propio Aristóteles pudo utilizar líneas discontinuas para señalar tales posibilidades, aunque Venn (1881) diga sobre tales líneas que fueron empleadas por primera vez por Thomson.

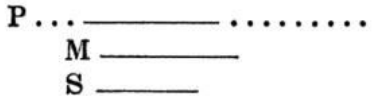


ILUSTRACIÓN 167. DIAGRAMA LINEAL CON LÍNEA DISCONTINUA. TOMADO DE THOMSON W., 1871, P. 213.

> But the common way of meeting the difficulty where it is at all recognized, is by the use of dotted lines to indicate our uncertainty as to where the boundary should lie. So far as I have been able to find, this plan (as applied to closed figures) was first employed by Dr Thomson in his Laws of Thought, but was doubtless suggested by the device of Lambert, to be presently explained. It has been praised for its ingenuity and success by De Morgan, and adopted by Prof. Jevons and a number of others. Ueberweg has employed a somewhat more complicated scheme of a similar kind. Any modifications of this sort seem to me (as already explained in Chap. I.) wholly mis-aimed and ineffectual. If we want to represent our uncertainty about the correct employment of a diagram, the only consistent way is to draw all the figures which are covered by the assigned propositions and say frankly that we do not know which is the appropriate one. Of course this plan would be troublesome when several propositions have to be combined, as the consequent number of diagrams would be considerable. Thus in Bokardo, two diagrams would be needed for the major premise and two for the minor, making four in all. (Venn 1881, p. 425)

Nosotros hemos distinguido fundamentalmente entre asociaciones necesarias, imposibles, posibles y probables, del mismo modo que hemos separado, conforme a la tradición, entre la necesidad teórica de la esencia que encontramos en las verdades de razón de Hume o los juicios analíticos de Kant y la necesidad de facto de la existencia que se atribuye a las cuestiones de hecho o los juicios sintéticos en Kant.

Ni el diagrama de Marlo ni las redes de expectativas pueden hacer frente a día de hoy a toda la complejidad de matices que el lenguaje permite otorgar a la proposición. No obstante, hemos intentado abordar, como me sugirió la profesora Amparo Díaz, el problema de las clases vacías, que ha sido discutido al menos desde el S.XIV por autores como S. Vicente Ferrer, Paulo Veneto, Descartes o Juan de Santo Tomás (Bochenski & Bravo, 1985). Nosotros relacionamos este problema, al que hemos tratado de dar una solución gráfica en el apartado dedicado a la existencia de la quimera, con la distinción tradicional que desde Aristóteles a Kant se ha hecho entre juicios problemáticos, apodícticos y necesarios y así formalizamos los juicios como posibles, fácticos y teóricos, reconociendo el valor de un punto de vista desestimado entre otros, por Venn y Frege, quien afirmó que “la

distinción de los juicios en categóricos, hipotéticos y disyuntivos, me parece que sólo tiene significación gramatical" (Frege, Trad. 1972, p. 7). En *Analíticos Primeros* I, 8, 29b30 leemos:

> Comoquiera que darse es distinto de darse por necesidad y de ser admisible que se dé (pues muchas cosas se dan, pero no por necesidad; y otras, ni se dan por necesidad ni se dan de manera absoluta, sino que es admisible que se den), está claro que también el razonamiento de cada una de esas cosas será diferente, no comportándose tampoco los términos de igual manera, sino que uno < concluirá> a partir de cosas necesarias, otro a partir de cosas que se dan y otro a partir de cosas admisibles. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 126)

También, siguiendo la traducción de Ross (1957) de *Analíticos Primeros* nos encontramos en 29b25-30:

> It is different for *A* to belong to *B,* to belong to it of necessity, and to be capable of belonging to it. These three facts will be proved by different syllogisms, proceeding respectively from necessary facts, actual facts, and possibilities. (Aristóteles & Ross, 1957, p. 316)

Las redes de expectativas muestran las distintas asociaciones con las que cuenta un sistema cognitivo a la hora de anticipar y tomar sus decisiones, informando al mismo tiempo de qué grado de certeza acompaña a cada una de estas predicciones (Aznar, 2016b). Hemos señalado también que a la hora de anticipar y calcular lo que nos cabe esperar no es lo mismo eliminar una posibilidad de forma definitiva que afirmar que es falsa provisionalmente, distinción que afecta al comportamiento matemático de los nodos *And* (Aznar, 2016b, 2017a). Aristóteles anticipa esta distinción al distinguir entre verdades necesarias y accidentales. Las verdades necesarias eliminan posibilidades de forma permanente y las expresamos en la red anulando nodos con el color negro que ya no se tienen en cuenta para calcular el valor de los nodos *And*. Las verdades accidentales solo inhiben de forma provisional los nodos, los cuales adquieren un valor de -1 y son coloreados en rojo. Es fácil observar en las redes que lo que es falso ahora, si mantenemos la posibilidad intacta, puede ser verdad más tarde, si contamos, claro está, como ya hicieran los lógicos megárico-estoicos, con el valor temporal de la verdad de las proposiciones (Bochenski & Bravo, 1985). La red expresa el estado de conocimiento aquí y ahora, y de hecho, nos hemos limitado hasta el momento a un análisis sincrónico de las proposiciones. En la siguiente ilustración (168) podemos observar la diferencia que hay en las redes de expectativas entre 1) juicios universales asertóricos no necesarios (*Todos mis alumnos están callados*), 2) juicios universales asertóricos y necesarios *(Todos mis alumnos son mortales)* y 3) juicios universales y necesarios pero hipotéticos (*si es par, entonces es divisible por dos*).

En las redes, asertórico es el juicio empírico que informa sobre la presencia o ausencia de una variable y lo consideraremos categórico cuando su valor de verdad sea igual a uno (azul). Y afirmamos esta verdad en un sentido muy próximo al que encontramos en Aristóteles y en Santo Tomás en *Sum. Contra gentiles. I, 67:*

> La cuestión de si existe una cierta sustancia debe decidirse simplemente por observación; La pregunta de qué se trata debe responderse mediante una definición que indique simplemente el género al que pertenece la sustancia, y la diferencia o diferencias que lo distinguen de otras especies del género. (Aristóteles & Ross, 1957, p. 76)

> Es necesario que Sócrates esté sentado porque es visto sentado. Mas esto no es necesario absolutamente (o) como algunos dicen, con necesidad del consecuente (*necessitate consequentis*), sino solo condicionalmente (...) Pues la siguiente (*haec*) condicional es, en efecto necesaria: "Si se ve a alguien estar sentado, está sentado". (Bochenski & Bravo, 1985, p. 197)

Del mismo modo, es apodíctico el juicio basado en la eliminación definitiva de una posibilidad, por ejemplo, afirmar que *Si tengo A tengo B* en el caso tres de la imagen anterior, pues para cualquier momento dicha verdad es necesaria. Todo lo que permanece en amarillo con valor cero es problemático, incierto.

> If we like to interpret the symbol 1, in x = 1, as meaning 'everywhere and always', then x may be regarded presumably as a necessary proposition; if we interpret it as meaning 'at some specified or definite time or place,' then x is merely empirically true. (Venn, 1881, p. 374)

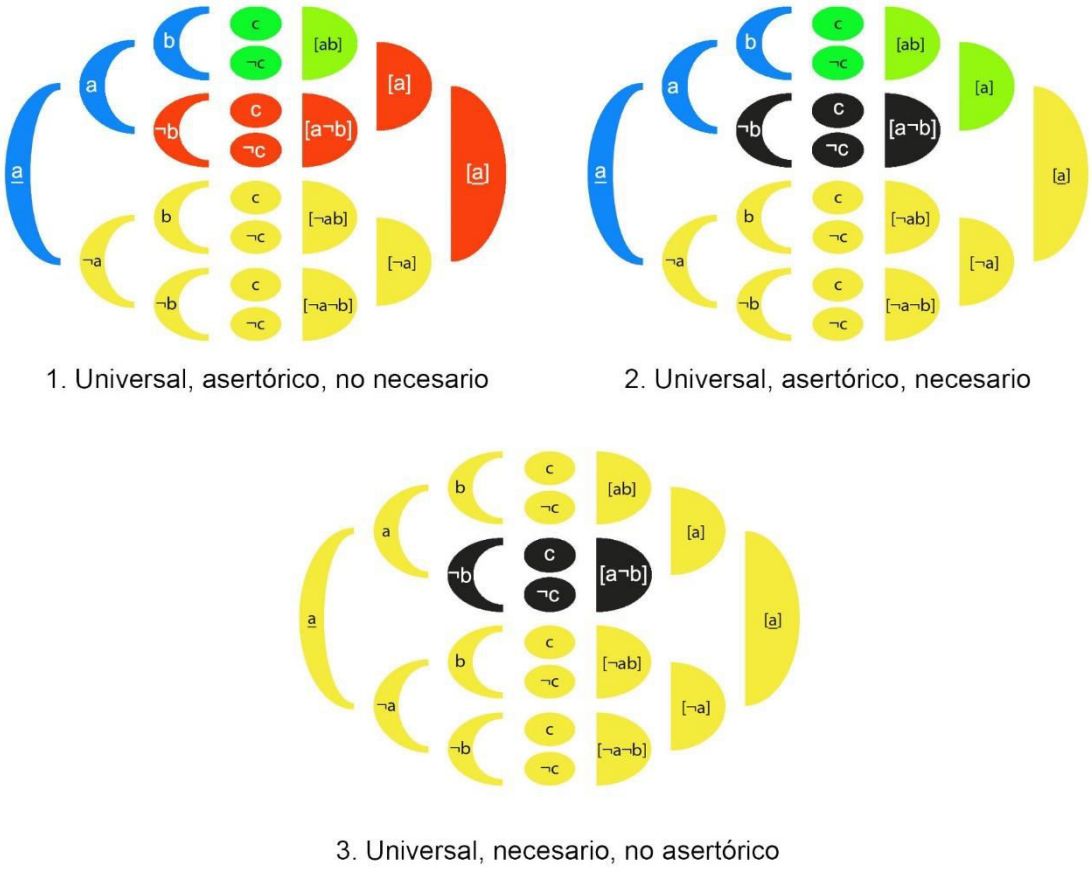


ILUSTRACIÓN 168. DIFERENCIA EN LAS REDES DE *TODO A ES B* EN BASE A SU CARÁCTER DE NECESARIA Y/O ASERTÓRICA.

Expresar en los diagramas de Marlo diferencias en las clases de juicio es más complicado. Así, por ejemplo, es difícil formalizar en los silogismos las proposiciones que designan en *Analíticos Primeros* I, 9, 30a aquello que simplemente se da en otro, pero sin ser necesario, como el movimiento en el animal (Aristóteles, Trad. 1995). En las redes marcaríamos en azul el nodo que conecta *hombre* con *movimiento*, marcando en rojo el nodo que asocia *hombre-no movimiento*, pero sin eliminarlo de forma definitiva. En los diagramas de Marlo podemos utilizar la negación que expresa ausencia para señalar lo que es falso temporalmente, pero tendríamos problemas para indicar de ese modo que *Todos los alumnos están presentes* y al mismo tiempo *está ausente en ellos la acción de correr*, pues en base a las definiciones que hemos dado no puede ser en el diagrama que un nodo *Objeto* esté al mismo tiempo compuesto por variables presentes y ausentes (Aznar, 2016b). La capacidad expresiva del diagrama nos permite expresar, a lo sumo, que está ausente la totalidad de los alumnos que corre, $[\overline{A}]C$ que está muy lejos de la afirmación *Ninguno de los alumnos presente corre, [A]¬C*. El problema es que si afirmamos que *[A]¬C* en los diagramas de Marlo se puede inferir que $a_x \neg c$.

En el diagrama de Marlo podemos expresar que *Toda A es B* de dos modos:

$a_x b$ = *Si tengo A, entonces tengo necesariamente B, porque la posibilidad a¬b está eliminada*.

[A]B = Está presente ahora la totalidad de A asociada con parte de B.

Hasta el momento hemos seguido la convención de que *si [A]B, entonces* $a_x b$, pero está claro que tal consideración se basa en la validez que nosotros le damos a la inducción. Afirma Ross en Aristóteles & Ross (1957):

En la mayoría de las referencias de Aristóteles a la inducción, no solo no se sugiere que produzca conocimiento; no hay ninguna sugerencia de que el conocimiento de la verdad universal siga el uso de la inducción. Pero en ciertos pasajes se nos dice que los primeros principios de la ciencia, o algunos de ellos, se conocen por inducción. (p. 48)

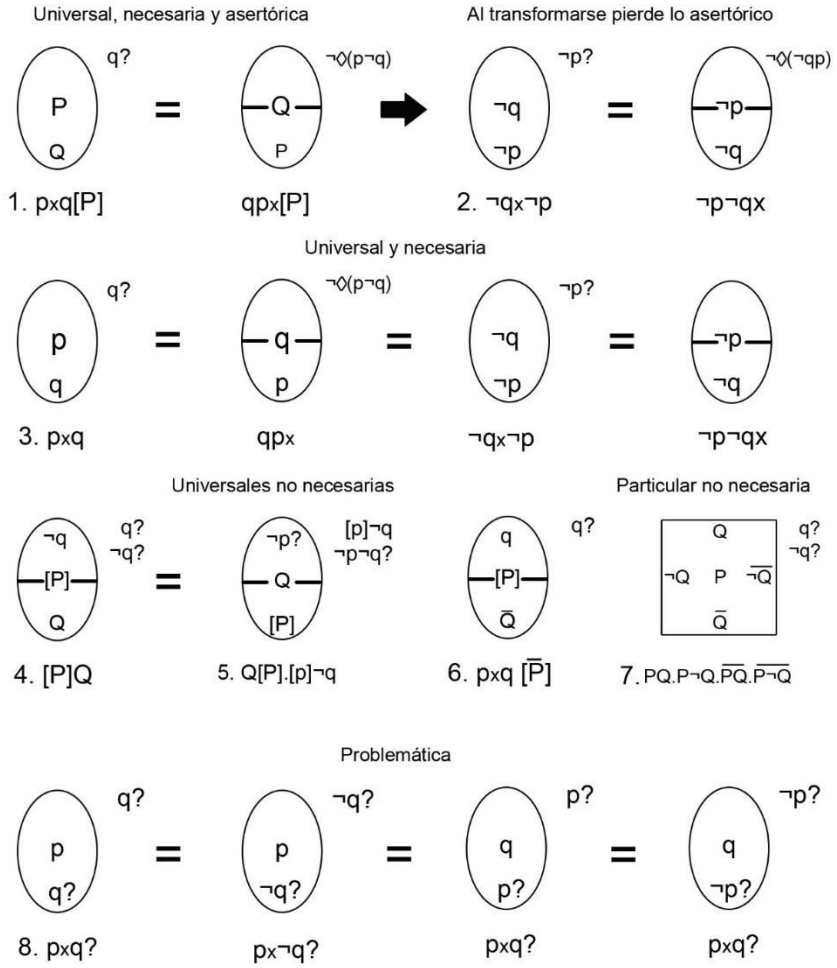


ILUSTRACIÓN 169. POSIBLES DIAGRAMAS PARA AFRONTAR LA MODALIDAD ARISTOTÉLICA.

Por ejemplo, si afirmo que *todos mis alumnos están callados, [A]C*, entonces es verdad que *tomado un alumno cualquiera al azar necesariamente está callado,* $a_x c$ *... ahora*. Hasta que se incluyan sistemáticamente en el diagrama de Marlo variables temporales que limiten la validez de las expectativas, mantendremos que es correcto afirmar que *si [A]B, entonces* $a_x b$*,* conscientes de que es una inferencia temporalmente insostenible. No obstante, podemos suspender provisionalmente la validez de la inducción, de modo que [A]B no permita inferir que *en todo momento y circunstancia en la que tengamos A, tendremos B*, por más que ahora sea el caso que *la totalidad de A se asocia con B*. Este tipo de proposiciones universales pero no necesarias se expresan con los diagramas 4, 5 de la ilustración 169. En ellos se aprecia que está presente la totalidad de *P* con los corchetes *[P]*, al mismo tiempo que se indica que está presente y asociada a dicha totalidad parte de *Q*.

Aceptar la sutil distinción entre lo necesario y lo que simplemente ocurre nos obliga a distinguir en el diagrama la representación de *Todos los perros son mamíferos y es imposible que no lo sean*, de la representación de *Todos los perros están ladrando pero pueden no ladrar*. La primera es universal y necesaria. La segunda es universal pero no necesaria. La aceptación provisional de la representación de la universal no necesaria en el diagrama de Marlo exclusivamente a lo largo de este apartado no pretende ser otra cosa que un homenaje a la modalidad aristotélica. Así podemos aceptar que la totalidad de *P* sea *Q* ahora y que al mismo tiempo sea posible *P*¬*Q* en otro momento.

También observamos en la ilustración anterior que los juicios asertóricos y necesarios (1) pierden la necesidad de lo asertórico cuando son transformados, aunque no la necesidad teórica (2). Así, si le digo al camarero que ninguno de mis amigos bebe cerveza, no puede inferir que debe sacar cerveza para los que no son mis amigos, aunque sabe que, en teoría, si alguien bebe cerveza no será mi amigo. El diagrama número siete de la anterior ilustración muestra que es el caso que hay presentes tipos de objeto que son PQ y $P\neg Q$, del mismo modo que están ausentes objetos definidos con las mismas características, $\overline{PQ}, \overline{P\neg Q}$.

Según Ross (Aristóteles & Ross, 1957), Aristóteles no concreta en *Analíticos Primeros* qué quiere decir con una "premisa necesaria", pues él considera evidente la distinción entre premisa necesaria y premisa que solo pretende declarar un mero hecho, aunque una proposición necesaria es verdadera solo si lo que afirma es un hecho necesario, siendo para Aristóteles una distinción muy importante la que se da entre un hecho necesario y un simple hecho, aunque a veces parece que borra esta distinción

> Sus ejemplos, entonces, no arrojan luz sobre la pregunta de qué tipo de hechos considera necesarios y qué tipos no son necesarios. Pero deberíamos estar justificados al suponer que él hace la distinción en el punto en que la dibuja en Analítica Posterior, donde nos dice que la conexión entre un sujeto y cualquier elemento en su definición (es decir, cualquiera de las clases a las que esencialmente pertenece, o cualquiera de sus diferencias, o nuevamente entre un sujeto y cualquier propiedad que se desprenda de su definición, es una conexión necesaria, mientras que su conexión con cualquier otro atributo es accidental. (Aristóteles & Ross, 1957, p. 41)

La ilustración 170 nos muestra que lo problemático puede ser afirmado partiendo de lo asertórico, pero no al revés. También vemos en la ilustración que, al igual que para Aristóteles, ser posible que se dé *A* equivale a ser posible que no se dé *A*, basándonos en lo que se dice en *Analíticos Primeros* I, 13, 32a 30-35:

> Se desprende de ello que todas las proposiciones sobre el *ser admisible* se pueden invertir unas en otras. Digo, no que las afirmativas se inviertan en las negativas, sino que todas las que tienen la forma afirmativa se invierten con arreglo a la oposición, v.g.: *ser admisible que se dé* en *ser admisible que no se dé.* y *ser admisible <que se dé> encada uno* en *ser admisible <que no se dé> en ninguno* o *no en cada uno,* y *<ser admisible que se dé> en alguno* en *<ser admisible> que no <se dé> en alguno.* (Aristóteles, Trad.1995, pp. 137-138)

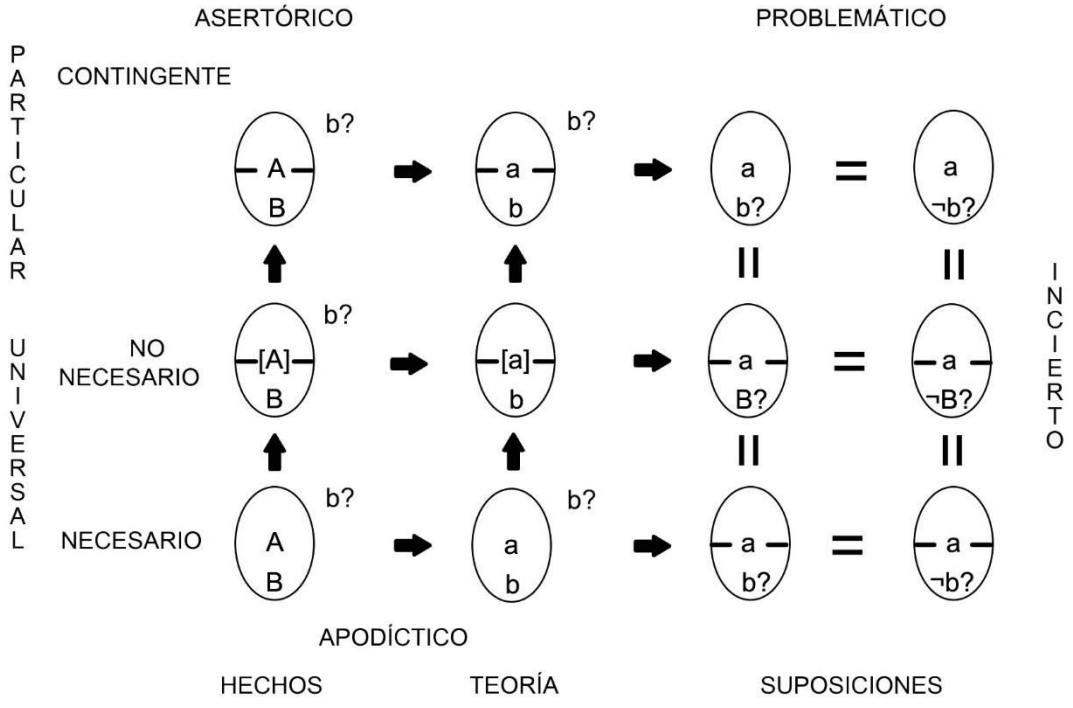


ILUSTRACIÓN 170. CONVERSIÓN DE LOS DIAGRAMAS DE MODALIDAD.

5.12.1 Ejemplos de silogismos modales de la primera figura. Síntesis particular.

Como ya hemos indicado, no vamos a profundizar en este apartado en la modalidad aristotélica, pero sí nos gustaría probar la capacidad de los diagramas de Marlo de ajustarse a algunos de los silogismos modales que Aristóteles propone, por más que seamos conscientes de que nuestra interpretación esté sujeta a sesgos y errores. A continuación resolvemos un silogismo modal de Aristóteles muy cercano a alguno de los propuestos por su discípulo Teofrasto (Aristóteles & Ross, 1957), aunque la suya será una modalidad nueva y diferente (Bochenski & Bravo, 1985).

Todo A es B, no necesariamente. Algún C es A necesariamente

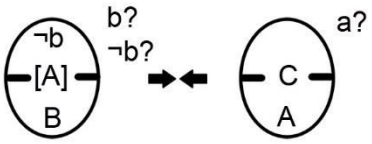
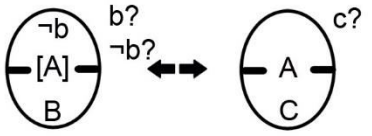
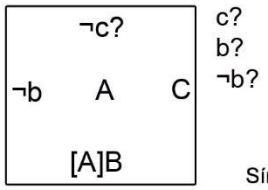
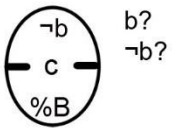
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 [A]B.[a]¬b	Todos los animales están sentados, pero pueden no estarlo
		-2 CA	Algunos movientes son necesariamente animales
2	Figura inválida  Conv. 1b	3 a_x %c Introd. Gen. 2	Si tomamos un animal cualquiera, es admisible que sea moviente
3	 Sínt. Nula 3	4 [A]B(%C).[a]¬b%c Gen. A, 3 a 1	
		5 %CB Cont. 4	Es admisible que algunos movientes estén sentados
4	 Combinaciones de C en 3	6 %c¬b Cont. 4	Y es admisible que no estén sentados
			ANIMAL: A ESTAR SENTADO: B MOVIENTE: C

ILUSTRACIÓN 171. SILOGISMO INCONCLUYENTE CON LA PREMISA MAYOR UNIVERSAL PERO NO NECESARIA.

En *Analíticos Primeros* I, 9, 30a15-25 se dice:

> si se ha tomado A como dándose o no dándose necesariamente en B, y B como dándose simplemente en C: pues, tomando así las proposiciones, A se dará o no se dará por necesidad en C. En efecto, puesto que A se da o no se da necesariamente en toda B y C es alguno de los B, es evidente que también para C será por necesidad una de esas dos cosas (Aristóteles, Trad. 1995, p. 128)

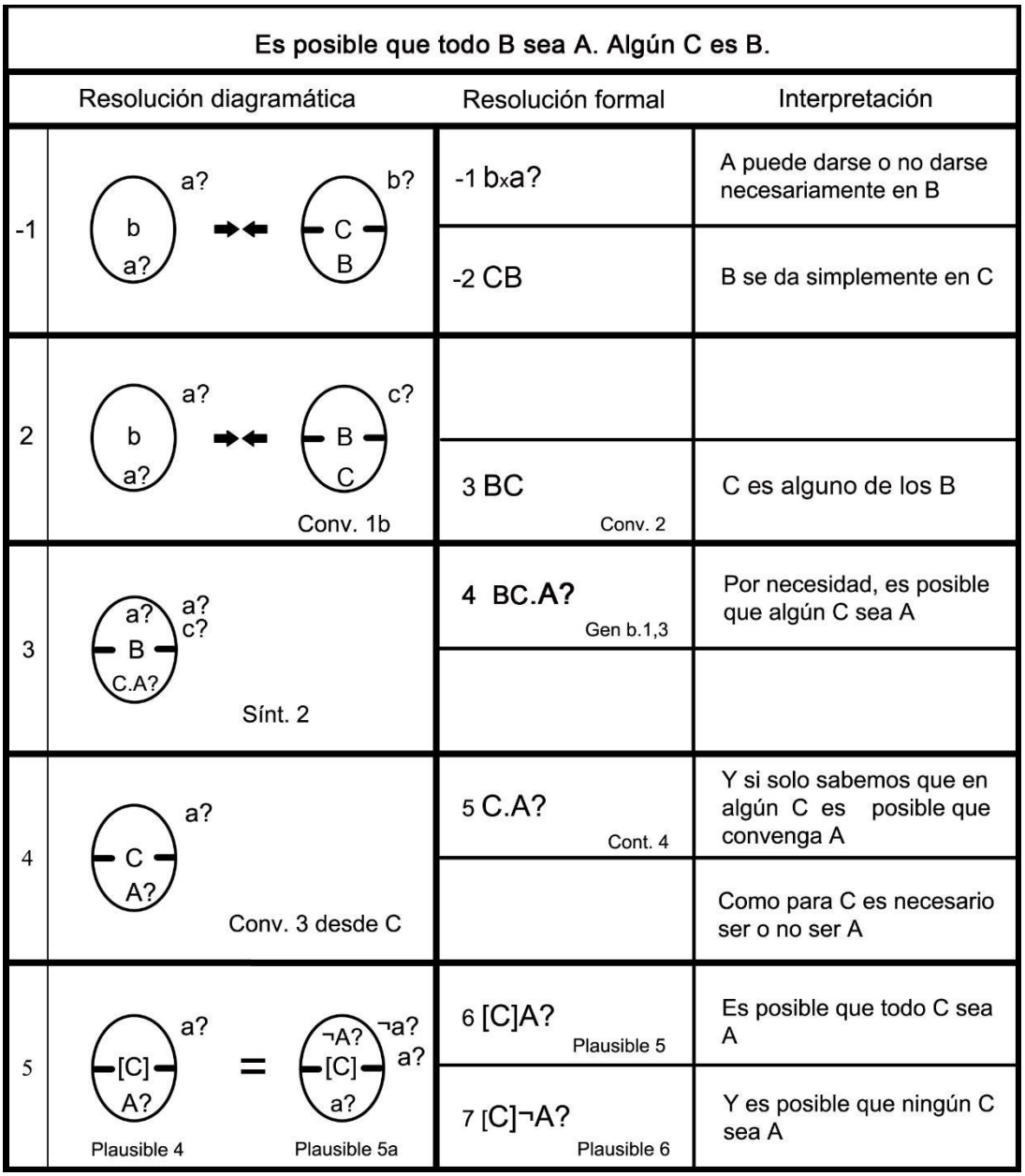


ILUSTRACIÓN 172. SILOGISMO MODAL PRIMERA FIGURA: CONCLUSIÓN POSIBLE NECESARIA. BASADO EN ARISTÓTELES, TRAD. 1995, P. 128.

Está claro que la profundidad de análisis en Aristóteles supera la actual capacidad expresiva del diagrama de Marlo. Parece que la proposición *Algún hombre es accidentalmente blanco* no equivale modalmente a la proposición *Algunos animales son necesariamente humanos*. Este matiz no alcanzamos a expresarlo en el diagrama de Marlo. Para Aristóteles, la proposición asertórica que informa de una asociación accidental conlleva la posibilidad de su contraria. Luego si *algún hombre es moreno accidentalmente*, ese mismo hombre *podría no ser moreno* sin dejar por ello de ser el mismo hombre. En el caso de las particulares necesarias, si algún mamífero es bípedo, por ejemplo el humano, no cabe la posibilidad de que ese mismo mamífero no sea bípedo sin dejar de ser humano.

En nuestro diagrama ambos tipos de proposiciones son particulares, pero no podemos distinguirlas a no ser que añadiéramos variables temporales a los modelos del tipo t_x para indicar que el juicio será verdadero en cualquier momento, t_0 para indicar que el juicio es verdadero ahora, t_{-1} para señalar que fue verdadero y t_1 para indicar que lo será en el futuro. A falta de estas variables, nuestros diagramas no alcanzan a expresar todos los matices del pensamiento aristotélico. A pesar de ello, proponemos otro ejemplo de resolución diagramática del silogismo modal aristotélico. En *Analíticos Primeros* I, 9, 30a25-30 leemos:

> En cambio, si AB no es necesaria y BC lo es, la conclusión no será necesaria. Pues, si lo es, ocurrirá que por necesidad A se dará en alguna B en virtud de la primera y la tercera figuras. Ahora bien, eso es falso: pues es admisible que B sea tal que no quepa que A se dé en ningún caso en él (...) v.g.: si A fuera *movimiento,* B *animal* y, en el lugar de C, *hombre*. (Aristóteles, Trad. 1995, p. 128).

Es posible que algún animal "B" se mueva "A". Algún hombre "C" es animal

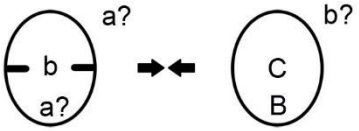
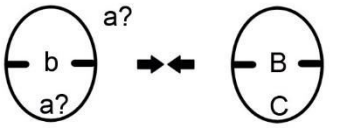
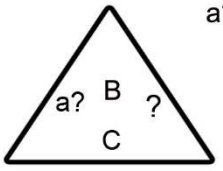
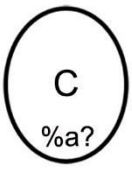
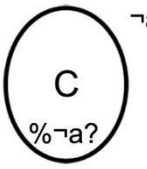
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ba?	A puede darse o no darse en algún B
		-2 cxb	B se da necesariamente en C
2	Figura inválida  Conv. 1b	3 bx %a? Intro. generaliz. 1	
			C es alguno de los B
3	 Sínt.Nula 2	4 cxb%a? Gen. b, 3 a 2	No hay asociación necesaria, y aún así...
4	 Combinaciones 3	5 cx%a? Cont. 4	Es probable, no necesario, que sea posible que a todo C le convenga A.
			Es, por tanto, admisible que todo animal se mueva
5	 Combinaciones 3		Pero como no se mueve necesariamente...
		6 cx%¬a? Sustitución a? en 5	Es admisible que ningún animal se mueva

ILUSTRACIÓN 173. SILOGISMO MODAL CON CONCLUSIÓN POSIBLE Y NO NECESARIA. BASADO EN ARISTÓTELES, TRAD. 1995, P. 128.

5.12.2 Ejemplo de razonamiento modal con una premisa necesaria y una asertórica

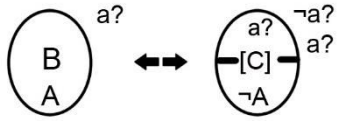
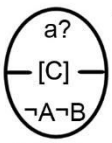
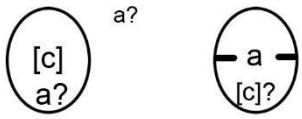
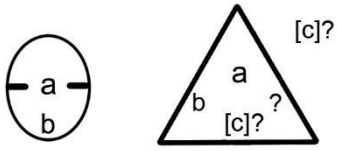
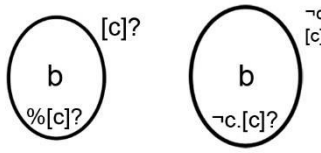
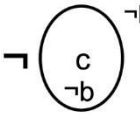
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 B_xA premisa	Por necesidad animal se da en todo hombre
		-2 [C]¬A.[c]a? premisa	Animal simplemente no se da en ningún blanco. Pero podría darse.
2	 Excl. Parti. a, ¬a 1 A: Animal B: Hombre C: Blanco	3 [C]¬A Contenido 2	
		4 [C]¬A¬B Excl.Parti.a,¬a 1, 2	B no se da en ningún C, simplemente, no necesariamente.
3?	Empieza la demo por absurdo Suposición Inversión 3a	5? $c_x¬b$ Suposición	Porque si por necesidad B no se da en ningún C...
		6? $b_x¬c$ Trans.5	C no se dará en ningún B
4?	Sínt. Univ. 1a,3b Conv. 4a		Ahora bien, es necesario que B se dé en algún A (premisa 1a)
		7? $b_xa¬c$ Gen. b, de 6 a 1	De modo que es necesario que C no se de en algún A
5?	 Contenido 1b Conv. 5a	8? [c]a? Cont. 2	Como era posible que todo C fuera A...O parte de A sea todo C
		10? a_x %[C]? Introd. general. 9	Nada impide que sea admisible que C se dé en todo A
6?	 Conv. 1 Sínt. Nula 5b,6a	11? b_xa%[C]? Gen. a, de 10 a 1	Considerando que parte de A es necesariamente B...(premisa 1a)
7?	 Combinaciones 6 Sínt.Univ.3a,7a	12? b_x%[C]? Cont. 11	Es admisible que A se tome de modo que todo B sea C
		13? b_x%[C]?¬c Gen. B, de 3 a 12	Luego sería admisible que todo B fuera C y necesario que no lo fuera...
8	 Abs. 3a-7b	14? %[C]?¬c Cont. 13	Lo cual es absurdo.
		15 ¬($c_x¬b$) Abs. 5-14	Luego no puede ser necesario que ningún C sea B

ILUSTRACIÓN 174. SILOGISMO MODAL CON PREMISA PREDICATIVA NECESARIA Y PRIVATIVA ASERTÓRICA.

Para elaborar la ilustración 174 partimos de *Analíticos Primeros* I, 10, 30b20-35:

> Pero, si la proposición predicativa es necesaria, la conclusión no será necesaria. En efecto, supóngase que por necesidad A se da en toda B y que simplemente no se da en ninguna C. Entonces, invirtiendo la privativa, se forma la primera figura; y ya se ha demostrado en la primera que, no siendo necesaria la < proposición> privativa respecto al <extremo> mayor, tampoco la conclusión será necesaria, de modo que tampoco en estos casos será por necesidad. Además, si la conclusión es necesaria, ello conlleva que por necesidad C no se dé en algún A. En efecto, si por necesidad B no se da en ninguna C, tampoco, necesariamente, C se dará en ninguna B. Ahora bien, es necesario que B se dé en algún A si A se daba en toda B por necesidad. De modo que es necesario que C no se dé en algún A. Pero nada impide que A se tome de tal manera que sea admisible que C se dé en todo A (...) v.g.: sea A *animal.* B *hombre* y C *blanco.* (Aristóteles, Trad. 1995, p. 130)

5.12.3 Asertórico, categórico, problemático

Como hemos visto, en las proposiciones de un silogismo algo se predica de algo. La cuestión de qué es algo y qué puede ser predicado de qué es una cuestión importante para Aristóteles y los aristotélicos. Por eso encontramos en Oriol y Gambra (2015) que la doctrina de las categorías interesa a la Lógica porque entre los términos de una misma categoría se pueden dar relaciones de predicación que no se dan entre los que pertenecen a categorías dispares, o porque dentro de una categoría hay formas de predicar que no se dan en las otras. Así, Oriol y Gambra en su libro ponen como ejemplos, que casi reproducimos literalmente, que en la cualidad cabe que un predicado se diga de una cosa según el más o el menos, lo cual no ocurre con la substancia o la cantidad. Y dicen también que si una cosa pertenece a una categoría no pertenece a otra, pues se trata de subdivisiones excluyentes, o incomunicables; y del mismo modo, dicen, la substancia, igual que la cantidad, no tiene contrarios, pues nada es lo contrario de hombre ni de cinco, ni hay nada que sea más cuerpo u hombre que otra cosa y tampoco hay algo que sea más cinco que otro; mientras la cualidad, igual que la relación, puede tener contrario (pp.53-54).

Aunque las cuestiones de las que trata la doctrina de las categorías son de interés para la psicología y no van a dejar de ser tenidas en cuenta en el diseño de redes complejas que simulen el procesamiento neuro-lingüístico de la información, su discusión es un problema que supera de largo nuestro objetivo en esta tesis, mucho más limitado y centrado en la justificación del diseño de los elementales diagramas y redes de expectativas Marlo.

No obstante, aunque tratamos de evitar toda cuestión ontológica en la discusión del significado de nuestras variables, no tenemos más remedio que reconocer una diferencia importante entre proposiciones teóricas, digamos hipotéticas y proposiciones fácticas que se refieren a aquellos elementos que deberíamos tener en cuenta durante una situación en curso (Aznar, 2018g). Es decir, que reconocemos, como ya hemos dicho, un componente existencial en el juicio, que debe ser expresado diagramáticamente y tenido en cuenta a la hora de convertir las proposiciones.

Nos dicen Bochenski y Bravo (1985) que la expresión: «*Si x es A, entonces es B, si x es B entonces es C; entonces si x es A, entonces x es C*» es admitida como válida por Aristóteles (p.102), pero que rehusó admitirla como silogismo. Tradicionalmente podemos hablar de silogismos hipotéticos o de proposiciones condicionales, y su diferencia es muy clara con los silogismos categóricos donde afirmamos que *A es B* sin condiciones. Así nos dice Kant en su *Lógica* II, 6-7:

> Hay una diferencia esencial entre estas dos proposiciones. Todos los cuerpos son divisibles [...] Si todos los cuerpos son compuestos, todos los cuerpos son divisibles. En la primera afirmo sin condición; en la segunda, afirmo bajo una condición expresada problemáticamente. (Kant, Trad. s./f., p.86)

En todo caso, ahora nos referimos a algo más básico y primordial relativo a los términos y no a las proposiciones. Es evidente la diferencia entre afirmar que hay sirenas y suponer que las haya, del mismo modo que es muy sencillo distinguir entre la afirmación de que existen las sirenas, la afirmación de que aquí y ahora hay una sirena y la afirmación de que la sirena que dejé aquí no está o está ausente.

Reconocemos que nuestro análisis de las proposiciones es muy pobre en comparación con el análisis de las sentencias que realiza Aristóteles o que encontramos en la Escolástica, pero lo que decimos parece sencillo de comprender para nuestros estudiantes, que no encuentran *a priori* dificultad para percibir la diferencia entre ser posible y ser ahora en acto. Esto es lo que nos limitamos a representar en el diagrama diferenciando entre términos-variables minúsculas y mayúsculas.

DIAGRAMA DE MARLO

	Teoría	Hecho
	Todos los perros ladran. Si es un perro, ladra.	Todos los perros están ladrando
Formalización diagrama Marlo	$p_x l$	[P]L

TABLA 30. DIFERENCIA TEORÍA Y HECHOS.

Parece simple e intuitiva, en primera instancia, la distinción entre las cosas que son meramente posibles y aquellas de lo que podemos decir que existen, aunque no estén aquí y ahora, porque hemos tenido evidencia de ellas. Sin embargo, no resulta tan sencillo ponerse de acuerdo acerca de qué cosas hemos tenido evidencia, e incluso es discutible qué sea la evidencia.

Asumimos, siguiendo a Miguel Candel Sanmartín (Aristóteles, Trad. 1982), que hay una afirmación de existencia en todos los juicios declarativos y pensamos que es lo que debería ser tomado como criterio para distinguir lo que se asume de lo plausible.

Nosotros no entramos a discutir qué es posible, qué es un hecho o qué es una teoría con evidencia. Asumimos que esta distinción se reconoce tradicionalmente y nos limitamos a tratar de formalizar los diagramas de modo que podamos evitar el problema de otorgar en las transformaciones de las premisas existencia o evidencia a términos que son posibles o a lo sumo, consecuencias teóricas de las proposiciones, conscientes de que lidiamos con un problema milenario al considerar la verdad material de las proposiciones.

Recordemos, siguiendo la traducción de Bochenski y Bravo (1985), que en *Tópicos* B8, 113 b17s, afirma Aristóteles que: "Si el hombre es animal el no-animal no es hombre". (p. 103) y en *Tópicos* B8, 113 b19s: "Si de hombre se sigue, en efecto, animal, de no-hombre (no se seguirá), sin embargo no-animal, sino al contrario"(p.104).

Por nuestra parte, encontramos que en *Categorías*, 13, 14b 25-35 se afirma:

> Son simultáneas por naturaleza todas las cosas reversibles según la implicación de existencia, ninguna de las cuales es en modo alguno causa de la existencia de la otra, como en el caso de lo doble y la mitad: en efecto, éstos son reversibles, pues al existir lo doble existe la mitad, y al existir la mitad existe lo doble, y ninguno de ellos es causa de la existencia del otro (...) Así, pues, se llaman *simultáneas* por naturaleza todas las cosas que son reversibles según la implicación de existencia, (Aristóteles, Trad. 1982, p. 74)

También en Lee (1935) leemos:

> En Aristóteles, se necesitan hipótesis además de las definiciones, porque las definiciones no dicen nada sobre la existencia o la no existencia, sino que simplemente dan el significado del término en cuestión. Y por lo tanto, la ciencia necesita algunas suposiciones adicionales. Porque dado que la ciencia trata con el mundo real, debes asumir que las cosas con las que estás tratando como prueba existen. (p.115)[19]

También Correia (2006) afirma que la materia de las proposiciones se relaciona con la significación de los verbos y nombres de las proposiciones y que no es lo mismo ser verdadero por la materia que ser correcto lógicamente.

[19] Traducido por el autor.

5.13 Indemostrables en redes y diagramas de Marlo

Según Bochenski y Bravo (1985) encontramos que la lógica sentencial estoica parece haber sido rigurosamente axiomatizada, siendo importantes las definiciones de los indemostrables que aparecen en Sexto Empírico y que vamos a tratar de mostrar en nuestras redes de expectativas y diagramas de Marlo (Aznar, 2020b). Al tratarse de nodos excluyentes los que representan los sucesos *ser de día* o *no ser de día*, en el caso de que sea verdad (azul) la afirmación de uno, señalaremos con rojo la falsedad de su contrario. Y lo mismo para los nodos *ser de noche-no ser de noche*.

Así, en los *Esbozos Pirrónicos*, en el Libro II, en el capítulo XII sobre la demostración nos dice Sexto Empírico:

> Pues bien, según dicen, "la demostración es un razonamiento que, mediante unas premisas admitidas, revela por encadenamiento (de unas proposiciones con otras) una inferencia no evidente" (...) y de los razonamientos, unos están bien encadenados y otros mal encadenados.
>
> Están bien encadenados cuando es correcta la implicación que parte de la intersección de las premisas del razonamiento y termina en la conclusión del mismo (Empírico, Trad. 1993, p. 183)

Y concreta Empírico en el Libro II, capítulo XIII

> Sueñan con muchos indemostrables; pero básicamente exponen estos cinco, a los que parecen reducirse todos los demás (Empírico, Trad. 1993, p. 190).

5.13.1 Primer indemostrable

Según Bochenski y Bravo (1985) «El primer indemostrable mantiene que de una proposición implicativa y su antecedente se deduce el consecuente» (p.137). Y Sexto Empírico (Trad. 1993) lo explica diciendo: « Por ejemplo, "Si es de día, hay luz; pero es de día; luego hay luz"» (p. 190).

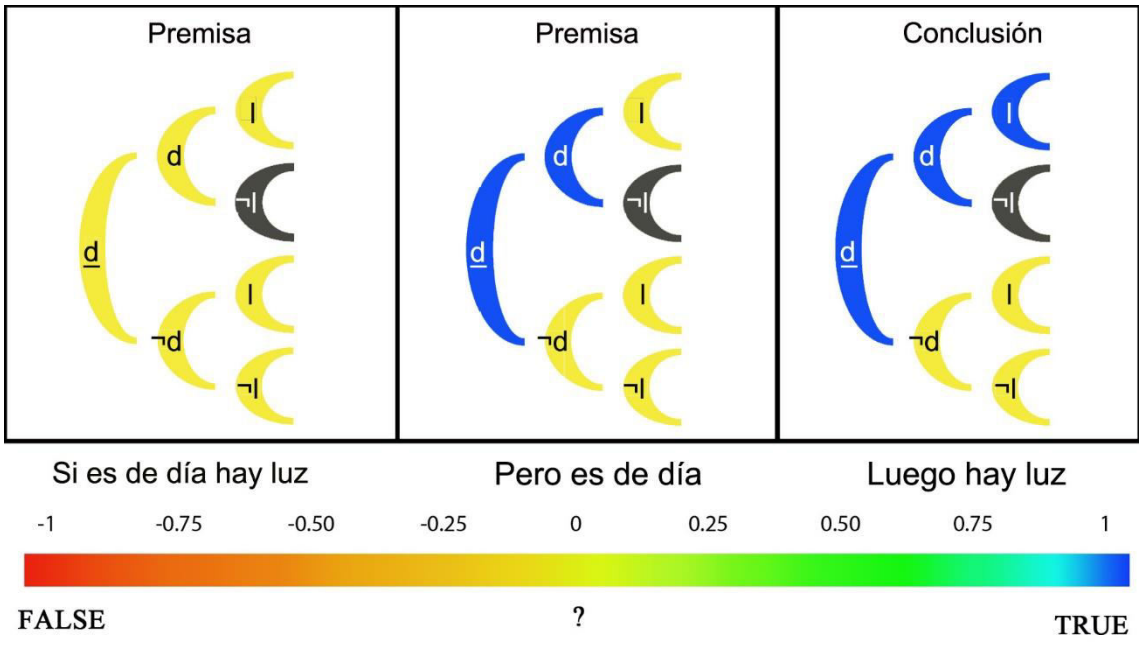


ILUSTRACIÓN 175. PRIMER INDEMOSTRABLE EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

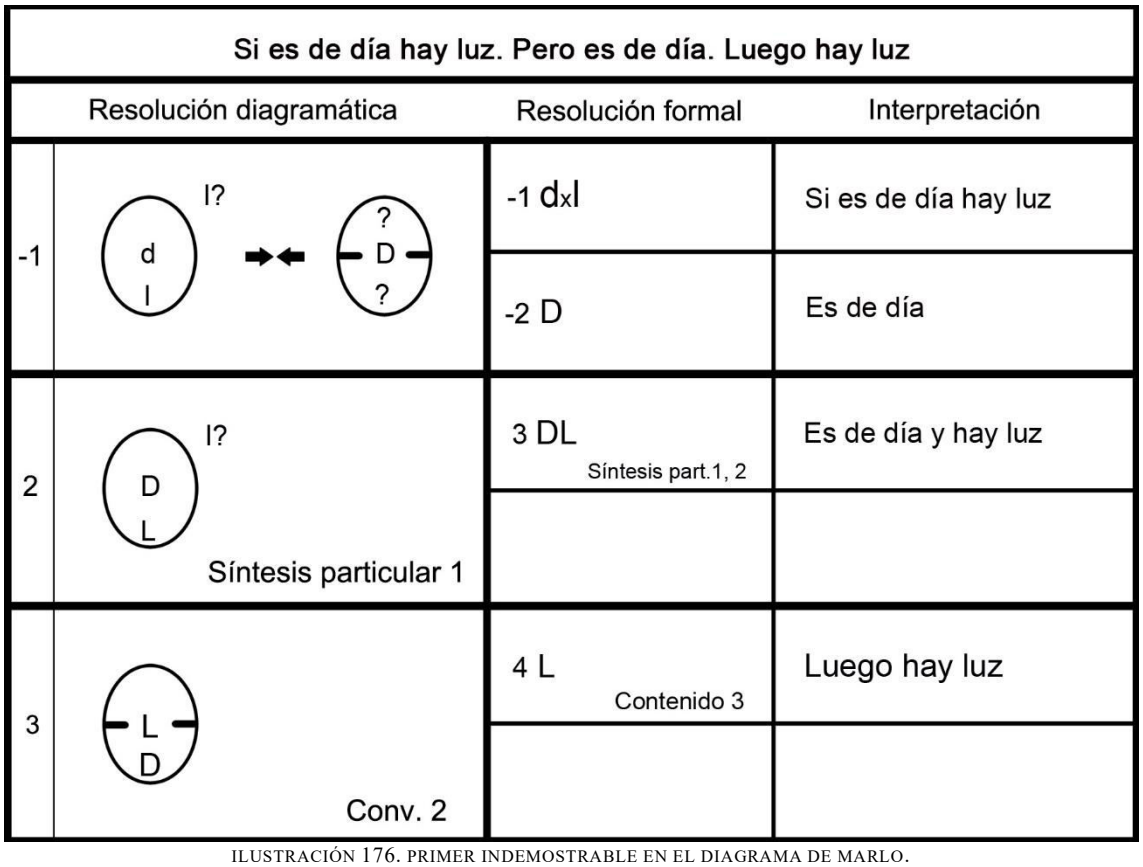


ILUSTRACIÓN 176. PRIMER INDEMOSTRABLE EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

5.13.2 Segundo indemostrable

Según Bochenski & Bravo (1985) «el segundo indemostrable dice que de una proposición implicativa y del opuesto contradictorio de su consecuente se concluye el opuesto contradictorio de su antecedente» (p.137). Sexto Empírico (Trad. 1993) lo explica diciendo: «Por ejemplo, "Si de día hay luz; pero no hay luz; luego no es de día"» (p.190).

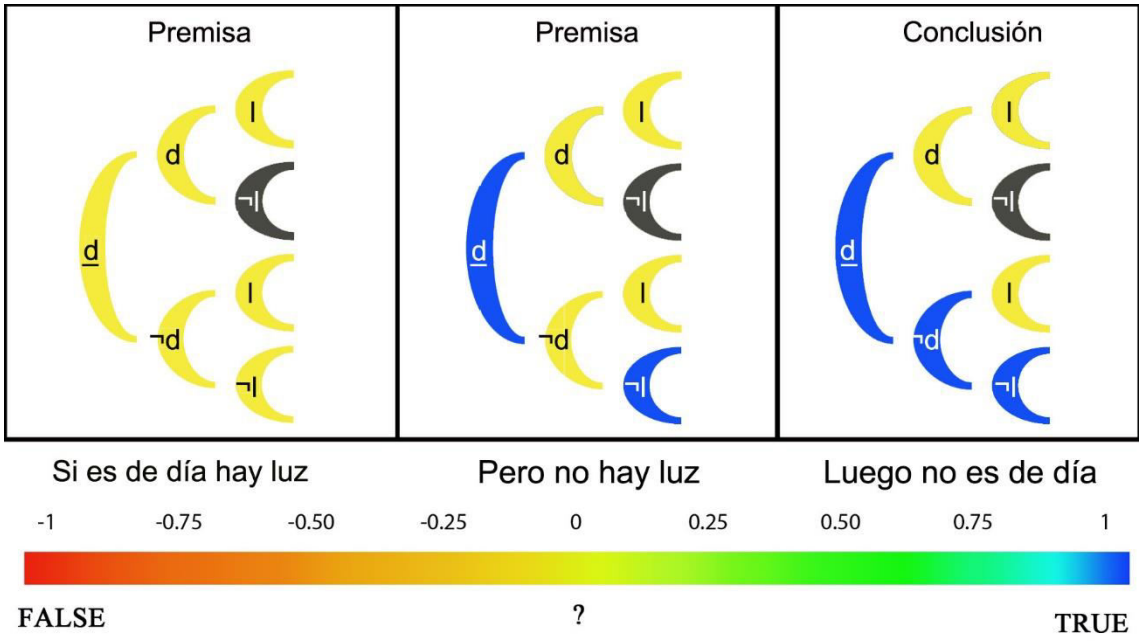


ILUSTRACIÓN 177. SEGUNDO INDEMOSTRABLE EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

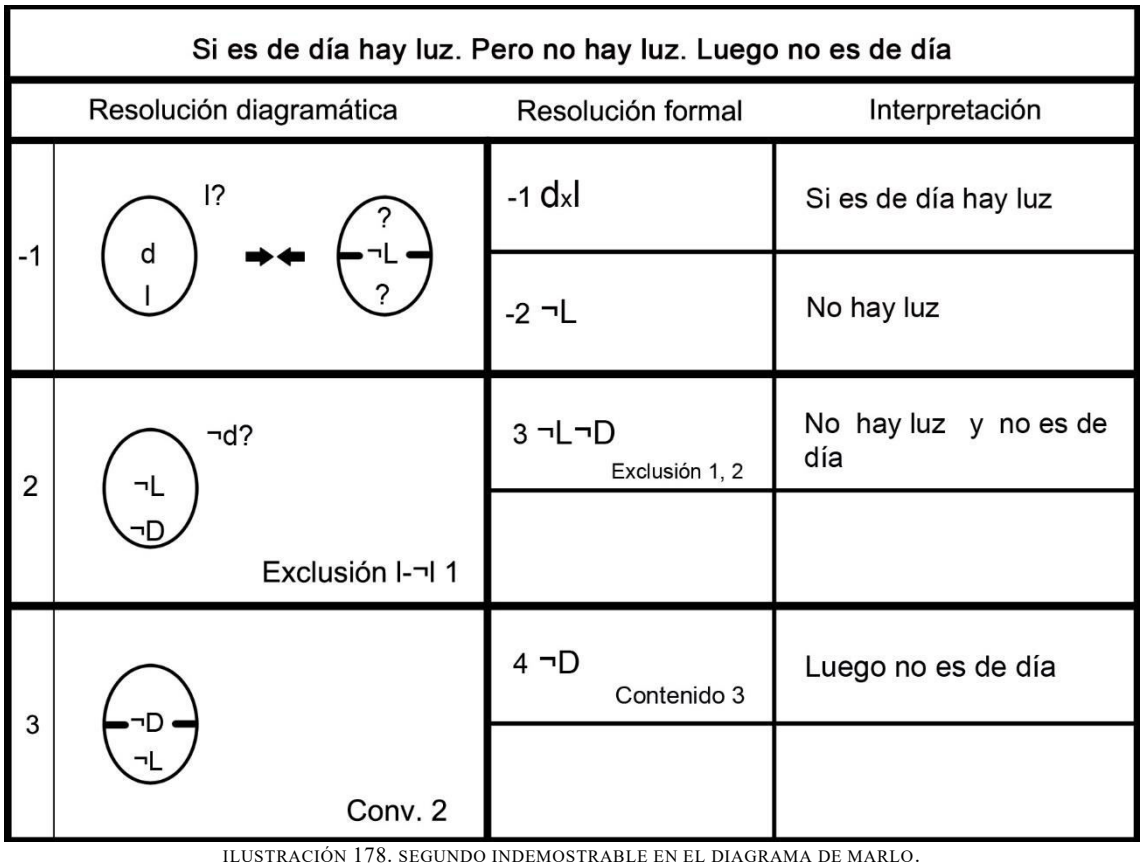


ILUSTRACIÓN 178. SEGUNDO INDEMOSTRABLE EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

5.13.3 Tercer indemostrable

Bochenski & Bravo (1985) nos dicen sobre los indemostrables: «El tercero es aquel que de la negación de una conjunción y de una de las proposiciones contenidas en la conjunción concluye el opuesto contradictorio de la otra» (p. 138). Y Sexto Empírico (Trad. 1993) afirma: «Por ejemplo, “No es verdad que sea de día y de noche; pero es de día; luego no es de noche”» (p.190).

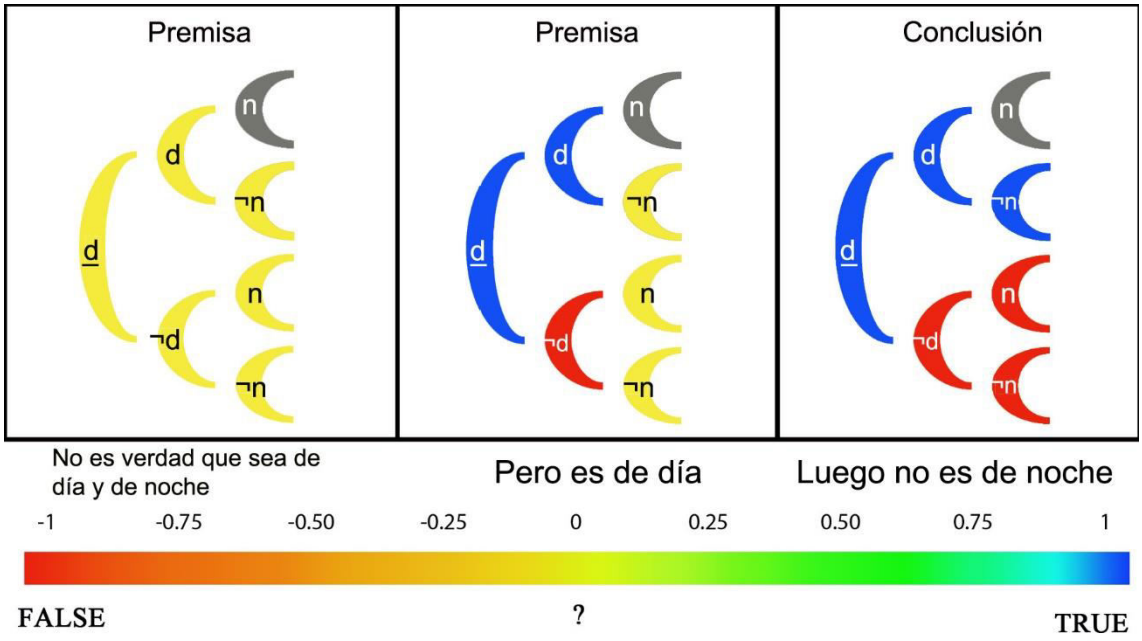


ILUSTRACIÓN 179. TERCER INDEMOSTRABLE EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

No es verdad que sea de día y de noche. Pero es de día. Luego no es de noche

	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1	premisa 1a: ¬(d, n)? — premisa 1b: (D, ?)	-1 ¬(dn)	No es verdad que sea de día y de noche
		-2 D	Es de día
2	Contra. 1a: (d, ¬n)?	3 d_x¬n Contradictoria 1	Si es de día , no es de noche
		4 D¬N Síntesis 1b, 2.	Es de día y no de noche
3	(D, ¬N)? Síntesis 1b-2 con RSE	5 ¬N Contenido 4	Luego no es de noche

ILUSTRACIÓN 180. TERCER INDEMOSTRABLE EN LOS DIAGRAMAS DE MARLO.

5.13.4 Cuarto indemostrable

El cuarto, el que a partir de la disyunción y de una de las (apreciaciones) en disyuntiva, concluye lo opuesto a la otra. Por ejemplo, “o es de día o es de noche; pero es de día; luego no es de noche” (Empírico, Trad. 1993, p. 190).

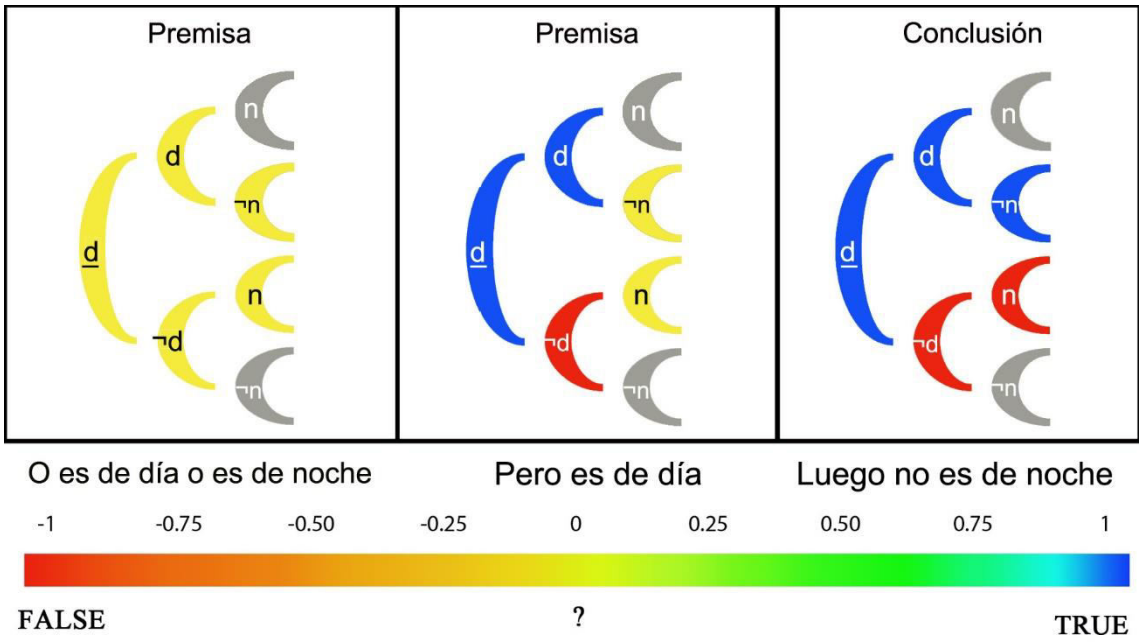


ILUSTRACIÓN 181. CUARTO INDEMOSTRABLE EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

O es de día o es de noche. Pero es de día. Luego no es de noche			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1	d ¬n (premisa 1a); ? D ? (premisa 1b)	-1 $d_x \neg n_x$	O es de día o es de noche
		-2 D	Es de día
2	D ¬N (Síntesis 1)	3 D¬N (Síntesis 1a-1b)	Es de día y no de noche
3	¬N D (Conversión 2)	4 ¬N (Contenido 3)	Luego no es de noche

ILUSTRACIÓN 182. CUARTO INDEMOSTRABLE EN DIAGRAMAS DE MARLO.

5.13.5 Quinto indemostrable

El quinto, el que a partir de la disyunción y de lo opuesto a una de las (apreciaciones) en disyuntiva, concluye en la otra. Por ejemplo, "o es de día o es de noche; pero no es de noche; luego es de día (Empírico, Trad. 1993, p. 190).

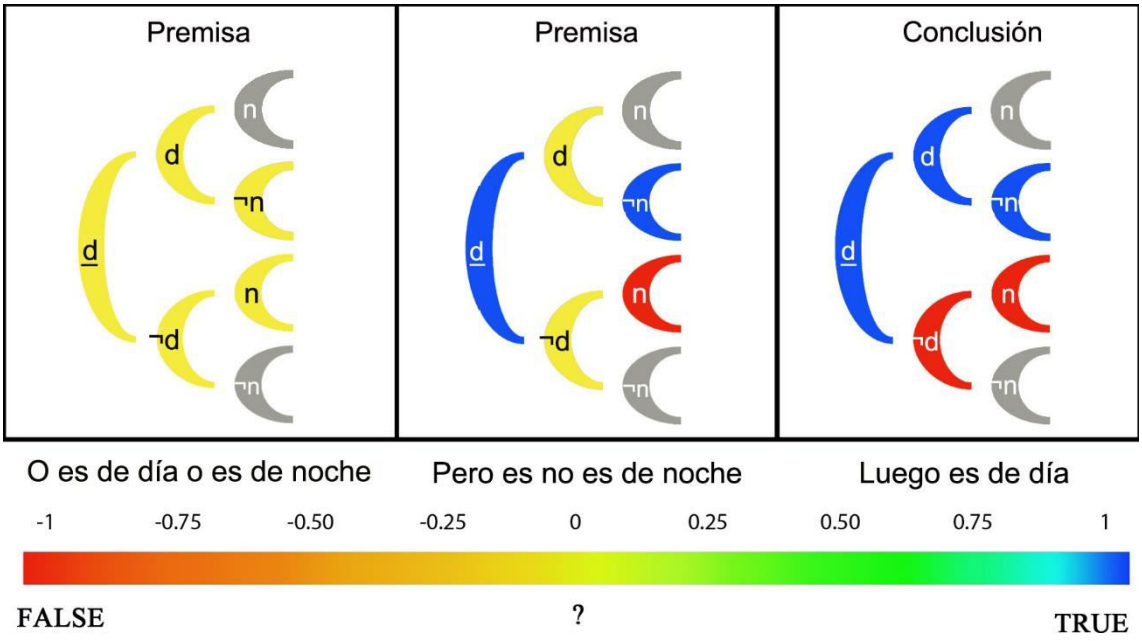


ILUSTRACIÓN 183. QUINTO INDEMOSTRABLE EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

O es de día o es de noche. Pero no es de noche. Luego es de día			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1	premisa 1a; premisa 1b	-1 $d_x \neg n_x$	O es de día o es de noche
		-2 ¬N	Pero no es de noche
2	Conver.1a		
3	Síntesis 1b-2	3 ¬ND Síntesis ¬n 1b-2	No es de noche y es de día
		4 D Contenido 3	Luego es de día

ILUSTRACIÓN 184. QUINTO INDEMOSTRABLE EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

5.14 Diferenciación histórica entre proposiciones primarias y secundarias

Tradicionalmente se ha distinguido entre proposiciones simples o primarias, que relacionan términos del tipo (A→B), y proposiciones complejas o secundarias del tipo (A→B) →(B→C), generalmente llamadas hipotéticas porque expresan relaciones de relaciones. Según Oriol y Gambra (2015) han destacado tres momentos en la historia de las proposiciones y razonamientos hipotéticos posteriores a Aristóteles: La Lógica estoica, los estudios medievales y la Lógica matemática, tres etapas en las que se ha discutido sobre el significado de las conjunciones, aunque hoy prevalece la interpretación funcional veritativa, que define las conexiones entre proposiciones atendiendo solo a la verdad o falsedad (valores de verdad) de las proposiciones que son unidas por medio de ellas.

Por su parte, Boecio distinguía entre sentencias hipotéticas simples y compuestas (Bochenski & Bravo, 1985), mientras que Boole, consciente de las discusiones sobre el tema, que llegarían hasta Venn (1881), separaba las proposiciones primarias de las secundarias.

> For instance, the propositions, "The sun shines," "The earth is warmed," are primary; the proposition, "If the sun shines the earth is warmed," is secondary. To say, "The sun shines," is to say, "The sun is that which shines," and it expresses a relation between two classes of things, viz., "the sun" and "things which shine." The secondary proposition, however, given above, expresses a relation of dependence between the two primary propositions, "The sun shines," and "The earth is warmed." I do not hereby affirm that the relation between these propositions is, like that which exists between the facts which they express, a relation of causality, but only that the relation among the propositions so implies, and is so implied by, the relation among the facts, that it may for the ends of logic be used as a fit representative of that relation (Boole, 2017, p. 38)

Según Oriol y Gambra (2015), Aristóteles no se ocupó detenidamente de las proposiciones que suelen llamarse hipotéticas aunque nos dice también que a pesar de que en su definición de oración excluye las oraciones compuestas de otras, pues en ella la oración no tiene partes que sean significativas como afirmaciones, admite que las oraciones compuestas de otras constituyen una clase especial de oraciones con "conexiones" copulativas, disyuntivas o condicionales. Afirman Oriol y Gambra que su propia propuesta no coincide con la manera habitual de entender hoy las conjunciones, ya que para ellos una proposición hipotética significa una conexión necesaria entre las proposiciones categóricas simples de las que consta y que para poder conectar dos proposiciones de esa manera debe haber ciertas relaciones necesarias entre los términos, como la subalternancia o la conversión, y ponen como ejemplo "si todos los hombres son sabios, entonces algunos hombres son sabios" (p.168). Por ello estos autores rechazan la implicación llamada *filónica*, que es considerada verdadera siempre y cuando no comience con verdadera y acabe con falsa, es decir, la implicativa que propone Venn como simbólicamente necesaria y añaden como ejemplo "Si los patos son palmípedos, entonces los isósceles son triángulos" (p.169), una proposición en la que no hay conexión entre las proposiciones, para mostrar que la lógica matemática propone una interpretación de las proposiciones hipotéticas contraria al sentido común.

Venn (1881) considera la división de Boole entre proposiciones primarias y secundarias, o proposiciones que se refieren a hechos y afirmaciones sobre hechos, no solo insostenible en sí misma, sino también "superficial en su sistema" (p.346). Al considerar la naturaleza de las sentencias hipotéticas Venn afirma que no hay diferencia entre las proposición categórica *Todo X es Y* y la disyuntiva *X o Y*, porque "en ambos casos se habla de relaciones de clases" (p.175), lo mismo que no encuentra nada diferente en la proposición *Si A es B, entonces C es D,* que puede ser convertida en la forma "*Si C no es D, entonces A no es B*" (p.337). Según Venn, en la comprensión de estas proposiciones "solo hay ciertas dificultades gramaticales, pero no simbólicas" (p.329).

Cuando Venn (1881) analiza las proposiciones complejas o secundarias poniendo el ejemplo (A→B) →(C→D), considera que esta proposición es hipotética en tanto genera dudas acerca de si realmente es cierto que *A es B*, pero no encuentra en ella ninguna peculiaridad importante que tenga ser tenida en cuenta en su sistema simbólico, proponiendo el ejemplo límite: *Si me duele la cabeza, entonces el mar es salado* para explicar la naturaleza de la conexión que se establece entre proposiciones. De esta proposición compleja afirma que es verdadera porque siendo cierto siempre el consecuente *el mar es salado* no podemos obtener contradicción alguna de ella, con independencia de que afirmemos como antecedente "*Si tengo dolor de cabeza* o afirmemos *Si no tengo dolor de cabeza*" (p.340).

Venn está afirmando que basta para que una proposición condicional sea verdadera que no puede ser falsada, lo cual es contrario al sentido común, que pide conexiones causales, y es contrario a la postura aristotélica, que exige

alguna ilación entre antecedente y consecuente. Pero Venn reafirma su postura afirmando que el sentido común realiza inferencias psicológicas o inductivas que no son de naturaleza formal, estableciendo una brecha entre el razonamiento natural y formal que afecta también al lenguaje popular: "My contention is that the really characteristic elements of the hypothetical of common life and of Inductive Logic are of a non-formal nature" (p.341).

Así pues, Venn (1881) niega que exista nada especial en las proposiciones complejas, secundarias o hipotéticas, aunque no pone ni un solo ejemplo de cómo representarlas en *Symbolic Logic*. La proposición *Si A es B, entonces C es D* se formaliza como (1-$A\bar{B}$) C$\bar{D}$ = 0 (p.342), que podemos traducir como es imposible que al mismo tiempo sea falso A¬B y verdadero C¬D.

Gardner (1958) afirma que las sentencias hipotéticas como *Si todo A es B, entonces toda B es C* y otras sentencias compuestas son posibles de diagramar con curvas cerradas y gráficos tipo Marquand, incluso con ciertos tipos de lógicas multivalor y que Peirce fue quien desarrolló finalmente un sistema integral por el cual creía que podía dar una expresión geométrica a cualquier aseveración o argumento lógico concebible. Sin embargo, tales sentencias hipotéticas, secundarias o complejas, no admiten una representación diagramática simple o directa en los diagramas de Venn, sino que requieren de la construcción de tantos diagramas como proposiciones simples formen parte de ellas, los cuales solo posteriormente podrán ser reducidos a uno solo. Nosotros creemos que esto pone de manifiesto que se aplican mecanismos de inferencia que van más allá de la simple eliminación y que, desde nuestra perspectiva, demuestran que también existe una diferencia en los diagramas Venn entre las proposiciones compuestas encadenadas por conjunciones y las que están asociadas mediante disyunciones o condicionales.

5.15 Proposiciones secundarias en las redes de expectativas

Cuando nosotros diseñamos la arquitectura de las redes de expectativas, nos enfrentamos también con los dos tipos de proposiciones históricamente diferenciadas como proposiciones simples o primarias del tipo $a \rightarrow b$, las cuales expresan combinaciones de variables ajustadas al diseño *a priori* de las redes bayesianas, y las proposiciones complejas no tautológicas del tipo (a→b) → (c→d), que expresan relaciones que requieren suplementos *a posteriori* en la estructura de red para ser reflejadas. En nuestras redes las proposiciones simples se representan activando o eliminando conexiones naturales entre nodos situados en una misma rama del árbol lógico, discurriendo en paralelo a la horizontal del diagrama. Las complejas o secundarias discurren en la vertical del diagrama conectando nodos no relacionados a priori por la estructura bayesiana. Por ejemplo, la proposición (a→b) → (c→d) la mostraremos en nuestros diagramas como la conexión *a posteriori* entre los valores de los nodos "$a\neg b = \nexists$" y "$c\neg d = \nexists$", de modo que quede establecido que en el caso de "$a\neg b = \nexists$", entonces "$c\neg d = \nexists$".

El desarrollo de redes y diagramas nos convence de que las proposiciones primarias pueden traducirse por proposiciones que nos informan de la estructura *a priori* implicada en la generación del ser de los nodos combinando caracteres en la red, mientras que las proposiciones secundarias nos informan de conexiones *a posteriori* establecidas entre nodos no relacionados *a priori* por la combinatoria del ser, que surgen gracias a la experiencia que tenemos sobre la correlación entre nodos en sus activaciones e inhibiciones.

Todas las proposiciones del silogismo aristotélico se corresponden con proposiciones primarias que informan primero de la arquitectura combinatoria de la red y luego de la activación de alguno de los nodos, de modo que dicha activación se propaga por las conexiones que permanecen de entre las que naturalmente se dan entre los caracteres esenciales que definen los nodos. En todo caso, la proposición primaria se refiere primero al ser cuando basta conocer el ser para inferir a partir de la presencia o ausencia de uno de los caracteres la presencia o ausencia de otro de los caracteres aplicando las leyes de la inferencia. Si los gorilas son mamíferos y los mamíferos tienen pelo, entonces el ser de los gorilas (combinación de caracteres) posee la característica "tener pelo".

También la lógica de proposiciones puede limitarse a las proposiciones primarias si eliminamos las proposiciones complejas del tipo (a→b) → (c→d) que conectan nodos que no están naturalmente relacionados por la combinación elemental bayesiana de caracteres. Según Oriol y Gambra (2015), habría que eliminar estas proposiciones complejas cambiando la condicional principal por una conjunción, de modo que se afirme "(a→b) ∧ (c→d)". Así la proposición secundaria o compleja se resuelve como primaria.

Ya Boole (1854) distinguía entre proposiciones primarias y secundarias o de relaciones en un sentido que compartimos solo inicialmente con él. Las proposiciones de relaciones complejas como (a→b) → (c→d) hacen inevitable percatarse de que se pueden establecer conexiones entre nodos no relacionados *a prioiri* por la estructura del ser. Por ejemplo, podemos afirmar que *cuando hay algún alumno trabajador en clase, están todos los vagos*, siendo esta una conexión entre un nodo *Or* y un nodo *And* situados en ramas distintas de la red bayesiana. Esta conexión carece de sentido en un sistema sin memoria de la evolución temporal de los estados de cosas, pero es esencial en un sistema que necesita aprender.

La representación en nuestros diagramas nos obliga a distinguir la proposición teniendo en cuenta en primer lugar si denota la existencia o cierto valor de verdad presencia/ausencia de términos, variables, cualidades, caracteres, nodos de la red, etc. o bien denota relaciones de estos nodos que pueden estar condicionadas a ciertos valores de presencia/ausencia. La distinción entre proposiciones primarias y secundarias reconocida a lo largo de la historia de la lógica y que se nos impone diagramáticamente fue eliminada por Venn y no es relevante tampoco en las tablas de verdad que usamos en el aula, aunque incluso Mill (1865) afirmaba que lo realmente importante en un juicio hipotético es que "es un juicio que concierne a juicios" (p.455) y todavía Carroll (1897) decía que:«Propositions are of two kinds, 'Propositions of Existence' and 'Propositions of Relation» (p.11).

Vimos en las redes de expectativas que las proposiciones de objetos señalan de forma inmediata el valor de activación (verdad) o inhibición (falsedad) de los nodos denotados por ellas. En la lógica del objeto las proposiciones simples, aunque puedan emplear la cópula, solo denotan un tipo de objeto, por ejemplo AB¬C, que se expresa en uno y solo uno de los nodos centrales de la red; las proposiciones complejas que informan de la existencia de objetos necesariamente distintos requieren de compartimentos separados dentro del modelo, como cuando afirmamos tener *A* y ¬*A*. Así, en las redes de expectativas claramente se aprecia que las proposiciones de objeto simples afectan de forma inmediata o directa únicamente al valor de un nodo y las compuestas afectan a más de uno señalando al mismo tiempo varios focos o puntos de inicio de la inferencia. En lógica de proposiciones, donde solo se acepta que pueda ser verdadero un tipo de objeto, si afirmo que tengo *A* y que tengo *B*, afirmo el objeto *AB*, pero no es así cuando consideramos una lógica del conjunto en la que pueden coexistir *AB*, *A*¬*B, B*¬*A* y ¬*B*¬*A.* Por eso nosotros nos referimos en el aula al objeto formado por las dos características como objeto *AB* y no decimos *A*∧*B*, pues partiendo de la segunda afirmación el objeto *AB* solo es probable en lógica del conjunto. De esta lógica del conjunto parece ocuparse la lógica de predicados cuando trabaja con premisas como *Existe un X que es A* y *existe un Y que es B.* ¿Son el mismo objeto X e Y?

Por su parte, las proposiciones de relaciones permiten realizar inferencias acerca de cómo se propagarán la activación o la inhibición de ciertos nodos por las redes. Para configurar los caminos de la propagación, basta con que la carga existencial de una proposición se limite a establecer que ciertos nodos son imposibles, sin afirmar o negar ningún tipo de activación en las redes capaz de propagarse, tal y como ocurre en la interpretación de las proposiciones universales de la lógica matemática. Podemos decir que las proposiciones de relaciones nos informan del cableado que señala los caminos de la propagación que permanecen de entre todos los inicialmente construidos combinando caracteres.

Las proposiciones de relaciones simples nos informan mediante el uso de conectores de que se ha eliminado algunas de las combinaciones que vertebran la red *a priori,* convirtiendo en necesarios los caminos alternativos que se mantienen. Pero en las proposiciones complejas es necesario realizar implementos en los nodos con conexiones *a posteriori* que nos informen de las correlaciones en el darse y no darse de los nodos.

En las redes de expectativas se ve claramente que las proposiciones complejas relacionan los valores de activación de nodos que no están en la misma rama del diagrama de árbol bayesiano, y lo hacen mediante conexiones establecidas *a posteriori*. Para poder representarlas necesitamos incluir en cada nodo todos los posibles valores que puede adoptar entre -1 y 1, pasando por cero. Además, hay que incluir en estos nodos la opción de que sean apagados definitivamente de la red, de manera que no cuenten en la ponderación de los nodos *And*. Por ejemplo, cuando yo elimino a un alumno absentista de la lista de clase puedo volver a considerar que todos están en clase, pero no mientras cuento con él.

El ejemplo más sencillo de proposición secundaria para nosotros es afirmar que *Cuando tenemos A tenemos* ¬*A*. Esta proposición evidencia que no podemos hablar de combinaciones de caracteres, pues el ser de ningún nodo

puede estar definido al mismo tiempo por *A* y ¬*A*. Sin embargo, sí podemos referirnos a lo que hay, a lo está presente o ausente, de modo que puede ser cierto que cuando hay alemanes los hay también que no son alemanes.

Sea como fuere, no es fácil distinguir entre proposiciones primarias que se refieren al ser y secundarias que nos hablan de correlaciones en la activación (estar). Incluso una proposición sencilla como *tener A implica tener B* puede interpretarse como primaria (no existe combinación de caracteres *a*¬*b*) o como secundaria (cuando está presente un objeto con la cualidad *A*, está presente un objeto con la cualidad *B*, el cual puede ser *A* o ¬*A*). Nosotros reconocemos nuestra tendencia a interpretar por defecto las proposiciones como primarias. Por eso en el ejemplo (*a*→*b*) → (*c*→*d*) solo tomamos la condicional principal como secundaria.

No hay ninguna dificultad en comprobar gráficamente en las redes si una proposición secundaria es consistente con las leyes de la inferencia que hemos programado y/o con otras proposiciones secundarias que podamos haber introducido en el sistema. Pare ello, tenemos que ver si son compatibles, al mismo tiempo, las consecuencias que se siguen de considerar sus antecedentes verdaderos. Cuando las proposiciones secundarias sean inconsistentes y nos lleven a otorgar al mismo tiempo valores absolutos de uno y menos uno a un mismo nodo, dicho nodo asumirá en la red un valor igual a cero que lo hará incierto, es decir, que será posible cualquier cosa, pero solo al nivel de conjetura.

La siguiente ilustración nos dice en la conexión número uno que *Si es imposible ab, entonces es falso que a*¬*bc,* aunque el núcleo de todos los nodos permanece con valor cero o incierto. Ese valor cero justifica que se llamara a estas proposiciones hipotéticas tradicionalmente. En la conexión dos se afirma *que Si es probable* ¬*a, entonces es cierto a*¬*b* y en tres se lee que *Si no existe a*¬*b*¬*c, entonces tenemos* ¬*ab*. Estas proposiciones no tautológicas no podrían ser falsadas empíricamente mientras su antecedente sea falso o su consecuente verdadero, pero es obvio también que no pueden ser verificadas empíricamente y aceptadas como teorías mientras no comprobemos que los estados del nodo antecedente correlacionan de forma consistente con los estados establecidos como consecuente a lo largo del tiempo. En todos los casos las proposiciones complejas requieren el implemento de conexiones.

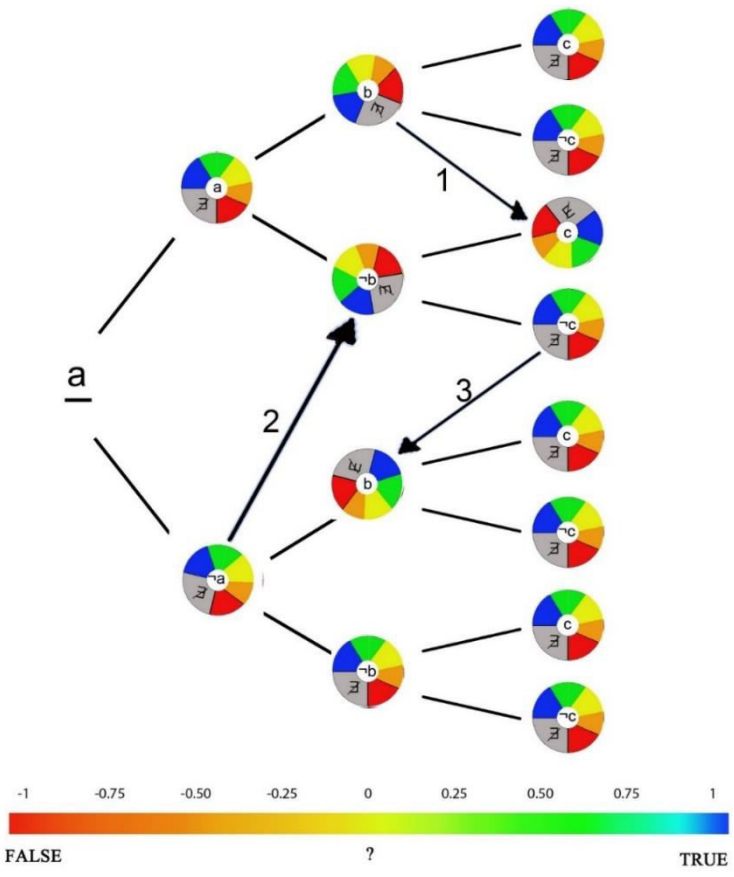


ILUSTRACIÓN 185. RED DE EXPECTATIVAS CON PROPOSICIONES COMPLEJAS.

El núcleo de cada nodo en las redes está en blanco porque puede adquirir cualquier valor entre -1 y 1 además de ser eliminado. Cuando el color del núcleo coincida con el del antecedente de la proposición de segundo grado se desencadena el esquema de pensamiento. Para complicar la representación gráfica de las proposiciones complejas en las redes bastaría con afirmar sobre la imagen de la red anterior, conectando las conexiones uno y tres, que *Si es verdadero afirmar que "si es imposible ab, entonces es falso que a¬bc"*, *entonces se sigue que es verdadero afirmar que* "*si no existe a¬b¬c, entonces tenemos ¬ab".* Leemos en el *Tractatus* de Wittgenstein (Trad. 1992): «La verdad de la tautología es cierta, la de la proposición, posible, la de la contradicción, imposible. (Cierto, posible imposible: he ahí los distintivos de graduación que necesitamos en la teoría de la probabilidad)» (p.89).

Después de todo, si ahora tuviéramos que ampliar la capacidad de entrada en la calculadora lógica para introducir proposiciones secundarias nos veríamos obligados a incrementar el número de celdas de entrada de las que recibe información cada nodo. Así, en lugar de tener una celda para el *input* de su verdad y otra para el *input* de la falsedad que le comunican sus asociados naturales, añadiríamos en la misma columna una celda por cada condición adicional que vinculase su valor de verdad o falsedad con el de otros nodos a las que no se vincula de forma natural por no ser miembro de su conjunto. Así, partiendo de la expresión (*a→b*) → (*c→d*) no generaríamos nuevos nodos *Objeto*, *Or* o *And*. En su lugar añadiríamos una casilla adicional al nodo *c¬d* que adquiriera el valor "No existe" o "menos uno" cuando el valor de falsedad del nodo *a¬b* fuera "No existe" o "menos uno".

	Casilla Excel:	B	…	D	J	M	P
1	Nodo:	***a***		***a¬b***	***c¬d***	***ac***	***abc¬d***
2	*Input* del valor de verdad inicial	1		0	0	1	1
3	*Input* del valor de falsedad	0		**-1**	0	0	0
4	Condiciones de verdad secundarias (a→b) →(c→d)	0		0	0	0	0
5	Condiciones de falsedad secundarias (a→b) →(c→d)	0		0	**-1** Si (d7=-1;-1;0)	0	0
6	Verdad inicial corregida	1		0	0	1	1
7	Falsedad inicial corregida	0		**-1**	-1	0	0
	PROCESAMIENTO DE LOS DATOS… *OUTPUT*=						
68	Priorizando nodo central *Objeto*	1		-1	**0**	1	**1**
69	Sin priorizar objeto	1		-1	**0**	1	**0**
		a		***a¬b***	***c¬d***	***ac***	***abc¬d***

TABLA 31. IMPLEMENTO DE CELDAS PARA PROPOSICIONES SECUNDARIAS EN LA CALCULADORA LÓGICA.

Evidentemente, habrá casos en los que esta implementación de proposiciones secundarias sea incompatible con las relaciones de verdad y falsedad establecidos *a prioiri*, llevando a la red a un estado de incertidumbre respecto al auténtico valor de un nodo, como vemos en el siguiente ejemplo de la tabla anterior: si un nodo *Objeto abc¬d* es inicialmente igual a uno y el nodo *a¬b* vale menos uno, entonces, si además establecemos la proposición secundaria (*a→b*) → (*c→d*), la red derivará hacia la incertidumbre, porque por un lado tenemos que *c→d* es verdadero por ser verdadero que *a¬b= -1* y por otro lado tenemos que es cierto el nodo central *abc¬d* que contradice que *c→d.*

Los procesos de corrección de los valores de falsedad-verdad garantizan que el sistema pueda seguir operando cuando se encuentran en un mismo nodo al mismo tiempo los valores uno y menos uno. Para ello genera nodos neutros con valor igual a cero, como vemos en la celda P-69 de la tabla anterior, la cual integra la verdad del nodo *Objeto* en P6 con la falsedad de uno de su nodos *Or* en J7. No obstante, también se puede programar una jerarquía que salve la confianza en los valores de los nodos *Objeto* en caso de contradicción con nodos *Or* o *And* de menos rango, tal y como hemos hecho en la casilla P-68 de la tabla anterior. En este caso, el sistema corrige el *seguro*

que no obtenido en J7 desde D7 por la condición secundaria (a→b) → (c→d) transformándolo en incierto al cruzarlo con el valor de P6

Desde nuestra perspectiva las proposiciones secundarias carecen de nodos propios. La proposición (*a→b*) → (*c→d*) se anida en J5 vinculando el valor del nodo *Or c¬d* al valor del nodo *Or a¬b*, el cual, de forma natural, nunca le afectaría al propagar su verdad o falsedad por la red. Si consideramos las proposiciones secundarias como tautológicas, contradictorias y contingentes estaríamos de acuerdo con Wittgenstein cuando en el *Tractatus* dijo que las proposiciones tautológicas no informan y que las contradictorias igualmente carecen de sentido, aunque las contradicciones lleven a nuestras redes a una incertidumbre en la que todo es posible al nivel de conjetura.

Nosotros consideramos nuestra propuesta muy próxima a Boole, que interpretaba las proposiciones secundarias como relaciones entre proposiciones y no entre sucesos, en las que rigen relaciones de coexistencia de la verdad o la falsedad, y no relaciones de equivalencia inmediata o sustantiva, aunque para Boole rigen las mismas leyes formales en el lenguaje de las proposiciones primarias y secundarias, cuya diferencia era para él solo una cuestión de contenido o interpretación (de Carrillo, 1981). Sin embargo, nosotros consideramos que las proposiciones primarias y secundarias solo pueden ser consideradas lo mismo cuando el número de objetos en la red es igual a uno, es decir, cuando manejamos una lógica del objeto.

Una lógica del objeto como la llamada lógica de proposiciones o sentencias permite a la lógica matemática establecer que cualquier condicional es verdadera cuando el consecuente es verdadero, porque no es posible que *A* y ¬*A* sean verdaderas al mismo tiempo. En la siguiente imagen se compara la perspectiva de la lógica del conjunto que proponemos con la lógica del objeto que justifica la inferencia (a → (b→a).

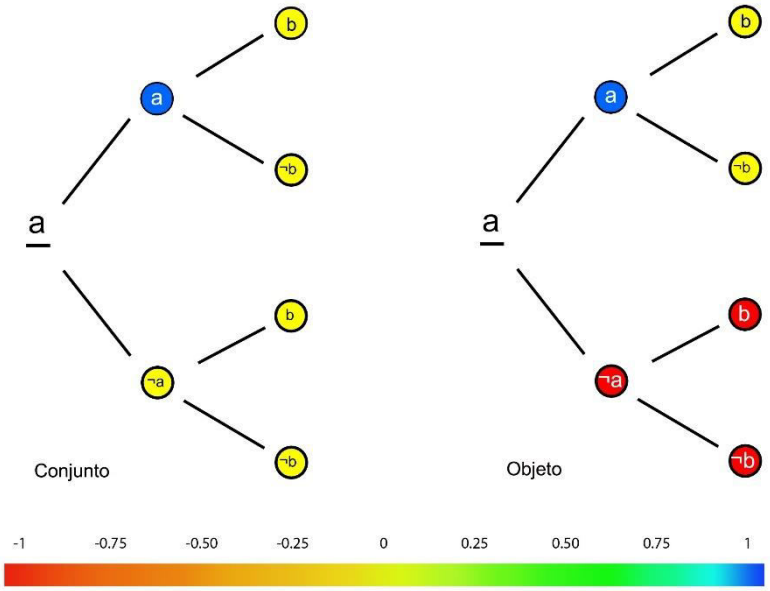


ILUSTRACIÓN 186. DIFERENCIA ENTRE LÓGICA DEL CONJUNTO (IZQUIERDA) Y DEL OBJETO (DERECHA) EN LA VALIDACIÓN DE A → (B→A). DEBEMOS OBSERVAR QUE TAL LEY SOLO ES VÁLIDA EN LA LÓGICA DEL OBJETO.

Si partimos de una lógica del objeto en el álgebra de Boole como la que se muestra a la derecha de la ilustración anterior, cuando el nodo *Or A* es verdadero el nodo *Or* ¬*A* será falso. Esta eliminación radical e indiscriminada de nodos nos facilita la inferencia porque limita el número de conclusiones posibles. Si ahora afirmamos tener *B*, en la lógica del conjunto tendremos que esforzarnos mucho para determinar que el peso de la expectativa del nodo *AB* es 0,75, la de *A*¬*B* y *B*¬*A* es 0,5 y la de ¬A¬B es 0. Sin embargo, en la lógica del objeto obtendremos valores seguros con mucho menos gasto cognitivo: *AB* es verdadero y todo lo demás falso.

Nosotros pensamos que si pretendemos aplicar la lógica a las teorías científicas merece la pena partir de una lógica del conjunto en la que podemos admitir incluso que las relaciones de segundo grado pueden aumentar nuestro conocimiento del mundo y mejorar nuestras expectativas. Así, la sentencia *Como es un hecho que todos los estudiantes tienen recreo ahora, las clases están totalmente vacías,* nos da a entender que *Si las clases no están*

totalmente vacías, entonces no es cierto que todos los estudiantes tengan recreo ahora. Esta información codificada en forma de ley, o teoría general, puede ser útil a un albañil que debe esperar al recreo para comenzar sus ruidos, y no deberíamos confundirle con condicionales accidentalmente verdaderas.

En todo caso, debemos reconocer que el desarrollo actual de nuestras redes y diagramas solo nos permite apuntar el significado de las proposiciones de segundo grado o más complejas. A día de hoy el diseño de infografías informáticas de nuestras redes que puedan expresar proposiciones secundarias o relaciones de relaciones es solo un proyecto.

5.16 Esbozos para infografías con implementos *a posteriori* en las conexiones de la red.

5.16.1 Significado de los conectores en las proposiciones complejas

La primera dificultad a la que nos enfrentamos cuando tratamos de diseñar infografías que puedan expresar proposiciones complejas es precisar el significado de los conectores en ellas, teniendo en cuenta que tendremos que codificar las relaciones que se van estableciendo a lo largo del tiempo entre distintos valores de presencia ausencia en los nodos. El sistema cognitivo busca regularidades en el presentarse de los hechos y la estructura combinatoria de las relaciones entre hechos resulta infinitamente más compleja que la estructura combinatoria del ser de los objetos que ofrecemos en un sistema dicotómico. Incluso aunque simplifiquemos las relaciones a esquemas de presencia y ausencia, todavía tendremos que decidir si codificamos el orden en el que se dieron.

Nosotros entendemos los conectores como herramientas para la comunicación de las conjunciones que pueden ser esperadas en la red, capaces de comunicar información en la medida en la que prestan atención a la idiosincrasia de una serie, es decir, en la medida en que señalan su rasgo distintivo. Para comprenderlo imaginemos que la siguiente ilustración muestra los resultados de codificar, para nueve personas distintas y a lo largo de nueve días, la ocurrencia de dos hechos: comer queso (Q) y tener dolor de cabeza (D) empleando el azul para significar presencia y el rojo para la ausencia. En estas series no tenemos en cuenta el orden en el que se activaron los nodos.

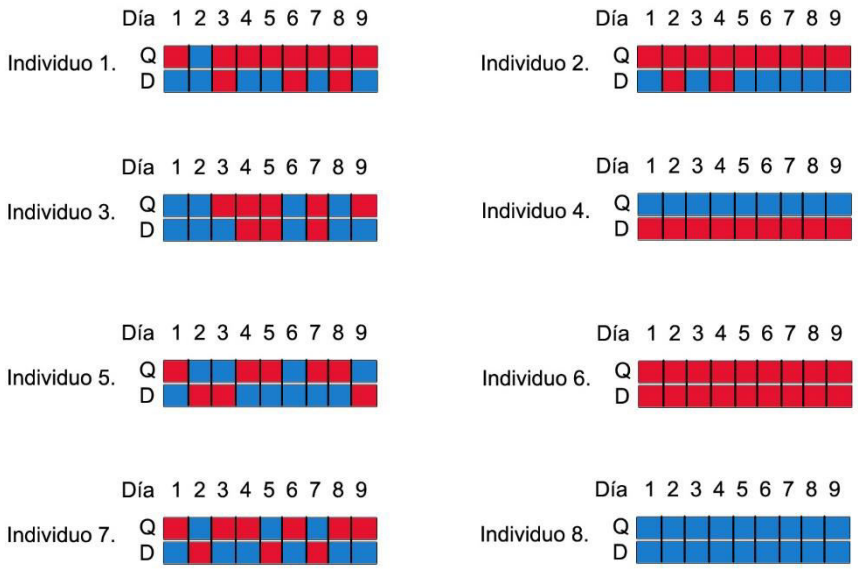


ILUSTRACIÓN 187. SERIE TEMPORAL DOLOR DE CABEZA Y COMER QUESO.

Podríamos comunicar los resultados de cada individuo empleando los conectores lógicos, pero a buen seguro tergiversaríamos la información si diéramos prioridad a la verdad lógica sobre los hechos. Siguiendo los estándares de la lógica matemática es cierto formalmente para los individuos uno, tres, seis y ocho que $Q \rightarrow D$. ¿Pero es eso lo que nos dicen los datos de presencia-ausencia? El caso del individuo cinco podríamos resumirlo como una disyunción inclusiva $Q \vee D$, o lo que es lo mismo, podemos decir que $\neg Q \rightarrow D$.

El sentido común nos dicta que hay mejores formas de comunicar los datos que limitarse al uso de los conectores de la lógica matemática. Y sobre todo nos dicta que los conectores no son más que una forma de comunicar que puede ser más o menos significativa en función del contexto. Así, cuando en las redes decimos que *Toda A es B*, que $A \rightarrow B$ o que se cumple que $\neg B \vee A$, lo que estamos afirmando sobre el estado actual de posibilidades admitidas es que la totalidad de los nodos que contienen *A* es una parte de los nodos que contienen *B*. Evidentemente no respalda la misma evidencia al condicional en el individuo uno que en el tres y si queremos hacer ciencia habrá que emplear herramientas para la comunicación con más potencial para informar de la proporción exacta de las conjunciones en la presencia-ausencia de las variables: Por ejemplo, en ocho de cada diez veces que come queso le duele la cabeza, y en nueve de cada diez ocasiones que no le duele no ha comido queso.

Desde esta perspectiva los conectores son medios de comunicación rentables en determinadas circunstancias y son eficaces solo en la medida en la que son capaces de informar a la razón de la proporción aproximada de las correlaciones presencia-ausencia que tienen lugar entre las variables o términos que ejercen de sujeto y predicado en la proposición.

Las conjunciones entre variables y objetos pueden ser formales o existenciales. Llamamos formal a la correlación combinatoria de caracteres que tiene lugar cuando definimos los objetos. Llamamos existencial a la correlación de las presencias-ausencias de los objetos, que solo indirectamente conlleva correlaciones en la presencia-ausencia de caracteres. Lewis Carroll (1897) ya distinguía entre proposiciones de existencia y proposiciones de relación, en lo que consideramos una distinción semejante a la establecida entre verdades formales y materiales, verdades de razón y de hecho o verdades teóricas y fácticas. Lo interesante para nosotros es que cuando descubrimos una conjunción existencial en la presencia-ausencia de caracteres u objetos dicha correlación nos inclina a buscar un porqué, una causa, un término medio. Encontrar dicha causa parece que conlleva reconfigurar las redes de modo que se establezca una conexión esencial entre ambos nodos. Es decir, que la correlación en el darse y no darse fáctico o *a posteriori* de dos nodos *P* y *Q* inicialmente no conectados en la red por las conexiones combinatorias bayesianas *a prioiri* podría impulsar a los sistemas cognitivos a reconstruir las redes incluyendo un término medio o porqué *M* que justifique dichas correlaciones. La siguiente ilustración ejemplifica sin ninguna pretensión de rigor, cómo imaginamos en lo esencial este proceso que nos viene sugerido, correcta o incorrectamente, por la lectura de alguna de las definiciones sobre la abducción que diera Peirce y que veremos más adelante.

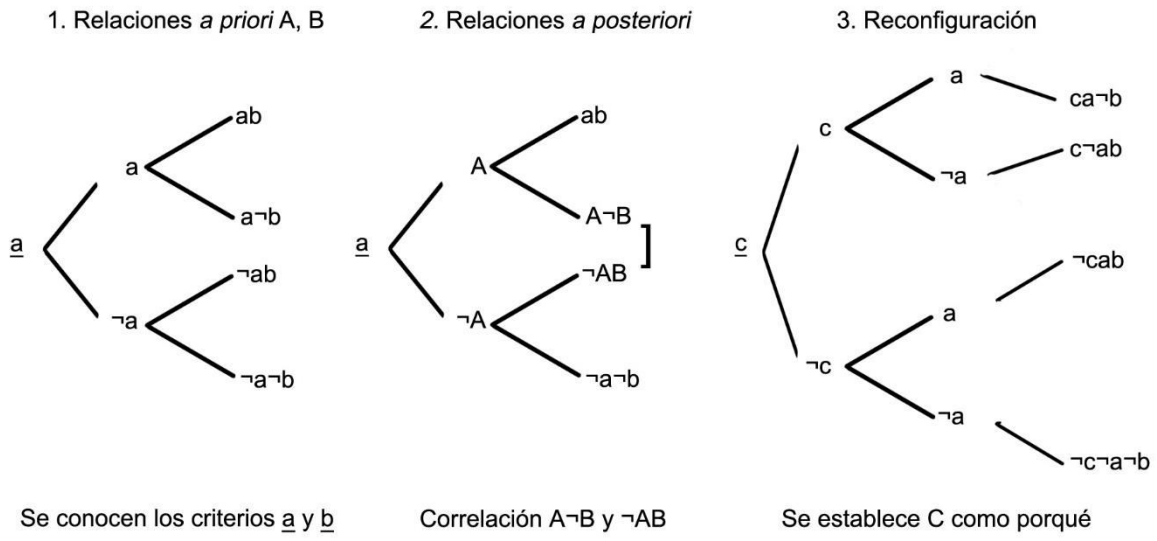


ILUSTRACIÓN 188. RECONFIGURACIÓN DE LAS REDES *A POSTERIORI.*

Nos queda como proyecto para investigaciones futuras comprender la lógica que subyace a las proposiciones complejas incluso cuando atendemos al orden en el que los nodos son activados o inhibidos. Un primer paso en este sentido nos obliga a redefinir los conectores implementando en los nodos conexiones presencia/ausencia *a posteriori*. En la siguiente ilustración (168), podemos contemplar en primer lugar dos nodos X e Y con implementos de conexión. Cada uno de estos nodos tiene la apariencia de una tableta alargada con varias entradas y salidas en toda su extensión. Estas tabletas están pensadas de forma que puedan ocupar en primer lugar el lugar

que les corresponde en la red bayesiana en función de la estructura de sus caracteres. En el extremo más estrecho de la izquierda la tableta recibe el *input* activador e inhibidor de los nodos *Or* que el preceden. Si X es un nodo de un sistema dicotómico con tres criterios y posee los caracteres *AB*, mantendrá por su izquierda relaciones con los nodos *A* y *B* y enviará señales por el extremo estrecho de su derecha a los nodos *ABC* y *AB*¬*C* en función de su valor de activación actual. El valor actual de los nodos se representa en la casilla del extremo derecho, la cual es amarilla en ambos nodos porque ambos son actualmente inciertos. Además de las conexiones recibidas por la izquierda y emitidas por la derecha, ambos nodos X e Y han sido implementados con salidas y entradas a lo largo de toda su longitud superior e inferior respectivamente para que puedan ilustrar todas las combinaciones que pueden tener lugar entre sus presencias y ausencias. Así generamos circuitos de activación e inhibición secundarios.

Por ejemplo, si leemos los circuitos de izquierda a derecha en las columnas de las tabletas X e Y representadas en la parte superior de la ilustración veremos en primer lugar que la presencia de X precede o activa la presencia de Y y a su vez la presencia de Y activa a la de X. En la segunda columna la presencia de X activa la de Y pero la presencia de Y inhibe la presencia de X. En la columna de la derecha del todo, es el caso que nunca tenemos ni X ni Y.

Una red que busque patrones de regularidad en el darse y no darse de los hechos tratando de establecer relaciones causales se tiene que enfrentar sin duda a la complejidad de estas relaciones. Pero imaginemos que su propósito fuera únicamente comunicar la información que ha recogido del medio a otros sistemas cognitivos. Entonces tendría que seleccionar la información distintiva de los sucesos acumulados. Por ejemplo, comunicando que siempre que está X está Y, o que no hay ocasión en la que Y no preceda a X. O bien podemos decir que nueve de cada diez veces X es seguida de la ausencia de Y, o quizás podamos comunicar que de las tres mil ocasiones de las que tenemos registro, en dos mil trescientas X fue precedida de la ausencia de Y.

En la siguiente ilustración mostramos las distintas combinaciones que nosotros pensamos que sería necesario registrar en los implementos de los nodos para poder comunicar con cierto rigor expectativas razonables acerca del darse y no darse de los hechos. Las casillas negras señalan que cualquiera otra combinación falsaría lo que se afirma. De este modo un conector se puede definir como un modelo de conexiones presencia-ausencia con el que podemos comparar y comunicar el registro de los acontecimientos que nos interesan.

Sin embargo, todos sabemos que no podemos extraer relaciones causales registrando solo lo que pasa cuando un objeto está presente. Así, que nueve de cada diez fumadores mueran de cáncer no es significativo donde nueve de cada diez no fumadores mueren de cáncer también. Y aunque desde luego las tablas de verdad funcionan devolviendo sistemáticamente un valor de verdad para las distintas clases con independencia de lo compleja que sea la proposición que se analice, nosotros pensamos que son algoritmos vacíos desde la perspectiva de la lógica del conjunto, pues no tiene sentido afirmar que *B* se sigue de *A* cuando solo se ha constatado que ambas son siempre verdaderas. No cuando pretendemos distinguir lo causal de lo casual (Sutherland, 1996).

Los diagramas de Marlo que acompañan a los modelos de conectores de red deben leerse sabiendo que *x* significa que existe un nodo definido por una determinada secuencia única de caracteres y ¬*x* significa que dicho nodo o secuencia de caracteres no existe. Tanto $\underline{x}$ como $\underline{y}$ significan respectivamente (x, ¬x), (y , ¬y).

Para nosotros la cuestión relevante ahora es señalar que la inferencia lógica es una cuestión de proporción y que la confianza en las conclusiones depende del número de casos registrados, lo cual nos lleva a la matemática de la investigación científica y nos aleja de los principios elementales que pretendíamos representar en las redes y diagramas de Marlo.

DIAGRAMA DE MARLO

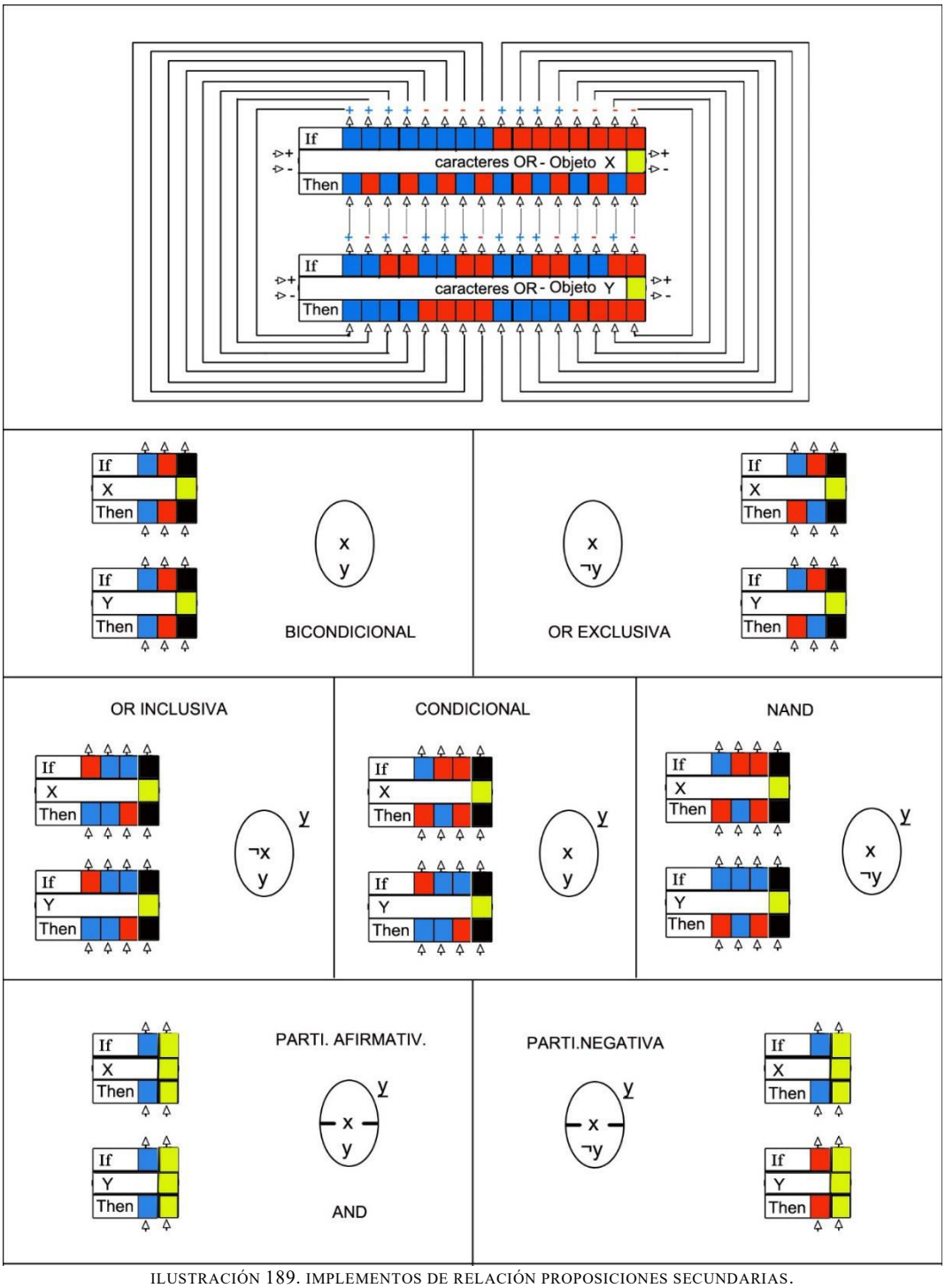


ILUSTRACIÓN 189. IMPLEMENTOS DE RELACIÓN PROPOSICIONES SECUNDARIAS.

Si observamos la ilustración anterior deberíamos convencernos de que la complejidad en lo que Hume llamaría relaciones de hecho no está sometida a las reglas de ninguna lógica de los conectores, los cuales únicamente pueden resultar útiles cuando se emplean para comunicar información con rigor y precisión.

5.16.2 Proposiciones complejas en la lógica del conjunto.

Podemos diagramar la premisa $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg D)$ en las redes de expectativas suponiendo que informa de las cosas que puede haber o que hay en un conjunto y no de lo que algo concreto tiene que ser. Por ejemplo, en la secretaría de la escuela de idiomas se puede establecer como norma para cuadrar horarios que: *Si obligamos a todo alumno matriculado en alemán a estudiar búlgaro, entonces, a cualquier alumno que no elija catalán (estudie alemán o no), habrá que prohibirle estudiar danés*. De ahí se sigue que si un alumno no estudia catalán y sí danés, entonces no hemos obligado a los de alemán a estudiar búlgaro. Lo cual todavía se puede interpretar como "no está prohibido combinar alemán búlgaro" o "hay de facto alumnos que estudian alemán y búlgaro". Pero incluso admitiendo que haya alumnos que estudian alemán y no estudian búlgaro, esa matrícula en concreto no tiene por qué ser de un alumno de alemán".

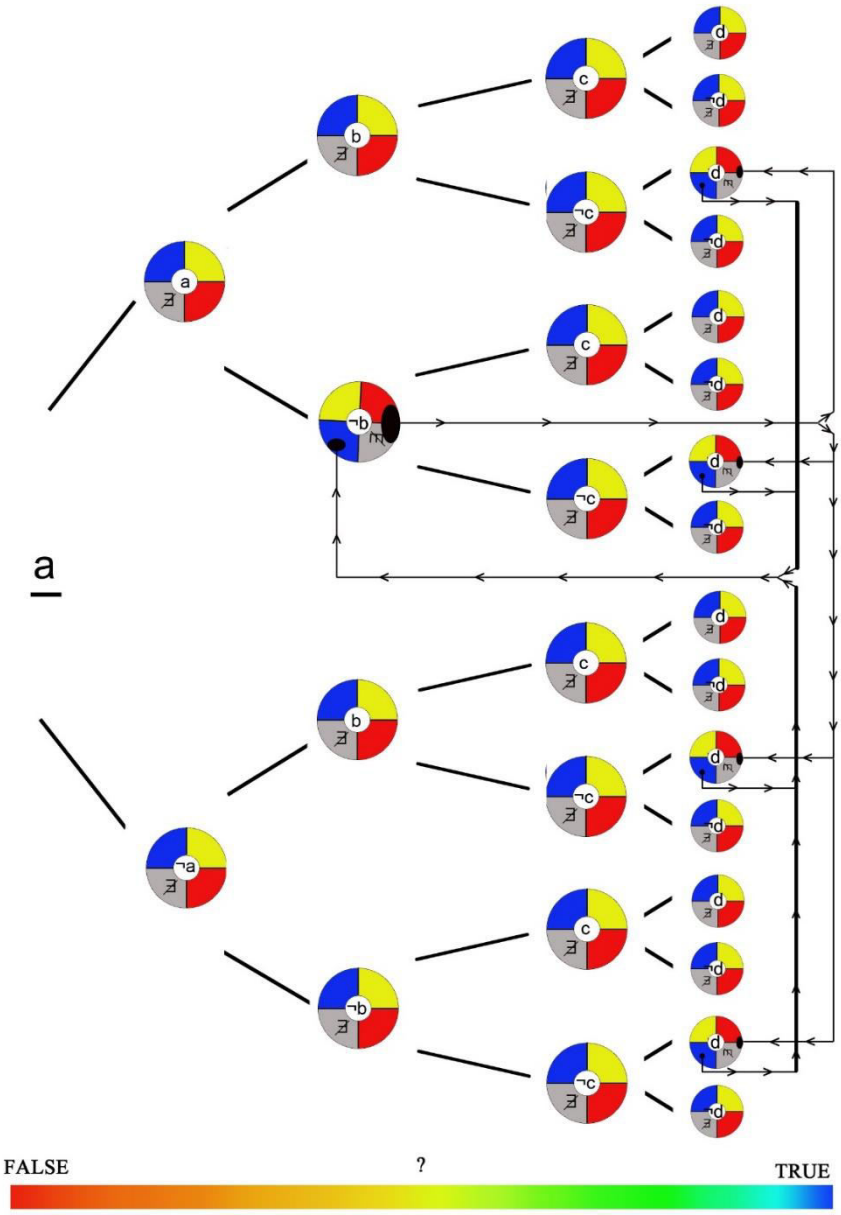


ILUSTRACIÓN 190. "(A→B) →(¬C→¬D)" EN LAS REDES.

Si observamos cómo representamos la proposición en las redes veremos que hemos interpretado el antecedente $A \rightarrow B$ como "es falso o imposible que tengamos $A\neg B$". Así, cuando sea el caso que es falso o imposible $A\neg B$, entonces será falso todo nodo $C\neg D$. Eso es exactamente lo que expresamos al asociar con una flecha los valores

falso-imposible de *A¬B* con los valores falso imposible de los nodos C¬D y en sentido contrario al asociar el valor verdadero de CD. La misma proposición compleja puede analizarse en los diagramas de Marlo.

5.16.3 Reglas para una lógica del conjunto en el diagrama de Marlo.

Los problemas de la lógica del conjunto son afrontados hoy por la lógica de predicados, aunque las redes de expectativas añaden algunas peculiaridades como los nodos *And* y la ausencia que pueden ser de interés. Nuestro punto de partida es que todo sistema Alfa se compone de nodos *Objetos* centrales definidos por una combinación única y distinta de tantos caracteres como criterios emplea el sistema para determinar el ser de dichos objetos. Así, en un sistema con n criterios que son divididos en m grados de ser, el número de caracteres que compone un objeto será igual a *n* y el número de objetos posibles será igual a m^n.

De cada objeto podemos formar secuencias parciales de variables que son resultado de combinar al menos un carácter y como máximo un número de caracteres igual al número de criterios del sistema menos uno. Estas secuencias parciales reciben en las redes el nombre de nodos *Or* y serán etiquetadas en los diagramas de Marlo del conjunto con las letras v, *w*, *x*, *y*, *z*. Emplearemos estas letras no para referiremos al ser, sino a la existencia/activación de dichas secuencias en el sistema. Podemos emplear subíndices si fuera necesario etiquetar nuevas secuencias de caracteres durante el cálculo. Así, hay ocho posibles secuencias simples de caracteres en un sistema Alfa dicotómico con cuatro criterios: *a, ¬a, b, ¬b, c, ¬c, d, ¬d*, aunque basta con catorce secuencias *Or* para configurar el diagrama de árbol de tal sistema partiendo de uno cualquiera de los criterios. Por ejemplo: *a, ab, a¬b, abc, ab¬c, a¬bc, a¬b¬c, ¬a, ¬ab, ¬a¬b, ¬abc, ¬ab¬c, ¬a¬bc, ¬a¬b¬c*

Los modos básicos de activación de una secuencia serán *presente*, *ausente*, *incierta* o *probable*. Nos referiremos a una secuencia *w de* caracteres presente en el sistema como W, si está ausente como $\bar{W}$, si es incierta como *w?*. Si la presencia de dicha secuencia es probable escribiremos *%W y si es probable* su ausencia *%*$\bar{W}$. Si es imposible dicha secuencia afirmaremos ¬*W*.

Debemos caer en la cuenta de que las variables v, *w*, *x*, y, y z que se añaden en el cálculo de la lógica del conjunto nos sirven para indicar primero el grado de certeza que tenemos acerca de la presencia o la ausencia de una secuencia de caracteres, la cual es señalada en las redes con un número entre menos uno y uno. Así, W equivale a uno; *x?* equivale a cero; $\bar{W}$ equivale a menos uno; ¬W equivale a no existe; *%X* sustituye a un valor menor que uno y mayor que cero y *%* $\bar{W}$ debe interpretarse como mayor que menos uno pero menor que cero. La compatibilidad de estas variables puede ser deducida de su compatibilidad en la calculadora lógica. Baste señalar por ahora que, como sucede en las redes, solo los valores absolutos *W,* $\bar{W}$ o ¬*W* eliminan otros posibles valores de *w*. En los diagramas, y para simplificar, tomaremos *x* y ¬*x* como disyuntiva esencial de una secuencia cualquiera de caracteres.

Si interpretamos el signo clásico de conjunción "∧" como suma será fácil inferir cómo combinar estos valores. En todo caso podemos convenir que lo seguro se imponga a lo contingente para reducir el gasto en procesamiento cognitivo y ganar seguridad en nuestras decisiones.

Input	conjunción	*Input*	Resultado	Interpretación	Ejemplo
X	∧	¬X	x?	Incierto	Dicen que hay salados. Dicen que no hay salados. Luego no sé si hay salados.
X	∧	%¬X	X	Seguro	Este dice que seguro hay salados, el otro que probablemente no. Luego cuento con ellos.
X	∧	X?	X	Seguro	Este dice que seguro hay salados, el otro que no lo sabe. Luego cuento con ellos.
X	∧	%X	X	Seguro	Este dice que seguro hay salados, el otro que probablemente. Luego cuento con ellos
%X	∧	%¬X	X?	Incierto	Este dice que probablemente hay salados, el otro que probablemente no. Luego no sé qué pensar.
%X	∧	X?	%X	Probable	Este dice que probablemente hay salados, el otro que no sabe. Luego es probable que sí.
X	∧	Y	%XY	Probable	Este me asegura que los hay listos y este que los hay trabajadores. Luego es probable que los haya listos y trabajadores.

TABLA 32. RESULTADO DE LA CONJUNCIÓN DE DISTINTOS GRADOS DE CERTEZA.

Podemos aumentar la capacidad expresiva del sistema incluyendo la distinción entre existe y está presente y existe y no está presente empleando el símbolo $\bar{X}$ para lo ausente y *X* mayúscula para lo presente. Además dejamos $\neg X$ para las clases vacías, aunque ya hemos indicado que en un sistema sincrónico sin nodos *And* esta diferencia es superficial.

Hay que advertir que nosotros no distinguimos exactamente entre conceptos y objetos, sino entre secuencias de caracteres y valores de activación de dichas secuencias que cuando son tomados en términos de valores absolutos como unidades no pueden superar el número de nodos *Objetos* centrales del sistema. Es decir, que si tenemos que son ciertas las secuencias las V, W, X, Y, $\bar{Z}$ en un sistema dicotómico Alfa definido por dos criterios a, b en el que solo son posibles cuatro unidades porque solo hay cuatro tipos de objetos únicos y distintos, entonces al menos dos de tales secuencias deben referirse a un mismo y único objeto. Cualquier estudiante de lógica de predicados comprende que tales secuencias se deben tomar provisionalmente y por precaución como referidas a objetos distintos. Sabemos que las que contengan caracteres contrarios no pueden formar parte de la misma unidad y tampoco pueden formar parte de la misma unidad las secuencias cuyos valores de activación sean incompatibles. Luego en este caso sabemos que en Alfa hay al menos dos unidades porque $\bar{Z}$ es una secuencia incompatible con el resto.

Distinguir el valor de la secuencia de los caracteres que definen dicha secuencia nos permite negar en el universo del discurso que haya algo (*w*) que es guapo (*g*) sin afirmar al mismo tiempo que hay no guapos, pues establecemos que "Es falso que $Wg = \neg Wg$ y no igual a $W\neg g$". Sin embargo, al diferenciar una secuencia de caracteres *w* de una secuencia de caracteres *z* que son potencialmente combinables, estamos afirmando, por precaución y provisionalmente, que debemos contar con que ambas secuencias *Or* pertenezcan finalmente a nodos *Objetos* centrales o unidades distintas que se relacionen por agregación, en lugar de considerar dichas secuencias *w* y *z* como segmentos de un mismo objeto que se relacionan por composición. Por eso hemos preferido también distinguir en la notación entre la conjunción *ab* y la conjunción $a \wedge b$.

Al resolver silogismos encadenados, en los que proposiciones primarias se refieren a la estructura combinatoria y elemental del ser, no es necesario distinguir composición de agregación. Allí las proposiciones eliminan nodos, convirtiendo unos caminos en necesarios y otros en imposibles. Pero en el caso de las proposiciones secundarias,

la afirmación de relaciones condicionales entre nodos no afecta a la estructura misma del ser, sino al modo en el que se combinan las presencias y ausencias de los seres.

El único modo de igualar las proposiciones primarias y secundarias es considerar que de entre todas las posibles combinaciones de caracteres que pueden ser o no ser el caso en el sistema, solo puede existir o estar presente de hecho una y solo una. Pues aunque las tablas afirmen que varias combinaciones son posibles, en cuanto se afirma una como cierta *de facto*, el resto debe ser considerada falsa, pues en tal sistema la regla principal es que no puede ser el caso al mismo tiempo *a* y ¬*a*.

Aunque desarrollar las leyes precisas de la lógica del conjunto en los diagramas de Marlo supera los objetivos de esta tesis, podemos anticipar algunos formalismos elementales que nos permitan traducir y comunicar verbalmente lo que matemáticamente ocurre en las redes.

En base a la dualidad de Hamilton, en un sistema dicotómico toda secuencia *ab* de información tiene que ser *abc* o *ab*¬*c*. En base a la dualidad de Boole, toda secuencia de información es exclusivamente o *xab* o ¬*xab*, aunque nosotros establezcamos ciertos grados intermedios entre la certeza de que sí y de que no.

5.16.4 Variables de activación

Para intentar representar en los diagramas de Marlo las inferencias lógicas de un sistema en el que sus nodos mantienen relaciones complejas o secundarias del tipo (*A*→*B*) →(¬*C*→¬*D*), podemos distinguir en los modelos, por una parte, la información que concierne a las secuencias de caracteres que son admisibles o no en la construcción y definición de los nodos objeto centrales (ser) y por otra parte, la información relativa a la activación-inhibición (existir-estar) de secuencias parciales o nodos *Or* que deben ser correctamente atribuidas durante la inferencia a los nodos objeto centrales o unidades que corresponda. La información relativa al ser de los nodos centrales de Alfa es expresada en las proposiciones simples o primarias como combinación de variables que dependen de los criterios a, b, c, etc. La información relativa a la activación de los nodos que cuentan aquí y ahora la expresaremos con las letras: v, w, x, y, z, a las cuales podemos llamar variables existenciales.

w	En minúscula significa que, en teoría, existe tal secuencia única de caracteres en Alfa, aunque con valor de activación igual a cero porque ahora mismo no cuenta.
¬w	En minúscula significa que hipotéticamente no existe tal secuencia de caracteres
W	En mayúscula significa que es un hecho que existe tal secuencia de caracteres en Alfa y su valor de activación es igual a uno.
¬W	En mayúscula significa que no existe tal secuencia de caracteres en alfa. No es atribuible valor de activación-inhibición.
$\bar{W}$	En mayúscula significa que existe tal secuencia de caracteres en Alfa y su valor de activación es igual a menos uno.
w?	No sabemos si existe tal secuencia de caracteres en Alfa. Valor de activación-inhibición igual a cero.

TABLA 33. VARIABLES DE EXISTENCIA.

En esta sección escribiremos primero la variable existencial seguida luego de la secuencia de variables esenciales que la definen. Así, *X(A)* o X*A* significará tener algo ahora con la cualidad *a*, y ¬*X(a)* o ¬*Xa* significará que no existe nada con la cualidad *a*; *zab* representa que hipotéticamente existe una secuencia de cualidades *ab* y ¬*zab* significará que hipotéticamente no existe ninguna secuencia en la red con las cualidades *ab*. El uso de paréntesis para separar la primera letra que nombra la variable existencial de las variables esenciales que designan cualidades o caracteres se vuelve innecesaria con la práctica. Por otra parte, como cada variable existencial designa el valor de una secuencia única de caracteres, una vez definida podemos prescindir de escribir sus cualidades durante el cálculo. Es decir, que definido z como *ab*, podemos operar con z sin necesidad de escribir *zab* en todas las ocasiones. También hay que decir que aunque las variables existenciales refieren secuencias únicas de caracteres, si tras definir *v* como secuencia *abc*, añadimos que *toda c es* ¬*d*, entonces podemos redefinir *v* como secuencia *abc*¬*d*. Una variable existencial definida por una secuencia de caracteres con todos los criterios de Alfa designa

un nodo *Objeto* central de la red, es decir, refiere una unidad en el universo del discurso. Determinar la cantidad, la cualidad y el valor de activación de las unidades en Alfa pueden ser objetivos de la inferencia en la lógica del conjunto. Recordemos que todas las variables existenciales cuyas cualidades no sean contrarias pueden referir finalmente al mismo objeto central o unidad del sistema.

Obviamente, en los diagramas de Marlo del conjunto, al margen de modelo de *w* solo podemos tener ¬*w*. Y si tenemos ¬*Xa*, es decir, si no existe ninguna secuencia de caracteres que incluya *a*, entonces toda otra secuencia de caracteres *Y* es ¬*a*. Hay que insistir también en que en un sistema sincrónico y en el que no contamos con valores *And*, no existir y ser falso resultan equivalentes, de modo que no habrá diferencias entre ¬W y $\bar{W}$. Del mismo modo, hay que recordar que en un sistema que no interprete las proposiciones complejas desde la lógica del conjunto resulta innecesario y equívoco distinguir W(*AB*) y Z(¬*D*) de simplemente *AB* y ¬*D*, porque al final de la inferencia llegaremos necesariamente hasta *AB*¬*D* y es más fácil hacerlo sin distinguir *W* de *Z*. Sin embargo, en la lógica del conjunto distinguir el nodo *Or* w del nodo *Or* z debe servir para prevenirnos de la falacia de atribuir la activación de las secuencias AB y ¬D al mismo nodo central *Objeto*, pues podría tratarse de dos objetos distintos.

La siguiente ilustración intenta mostrar la diferente interpretación de una proposición desde la lógica del objeto y del conjunto. En el primer caso y conforme a las tablas de verdad, la afirmación *Si tengo A, tengo ¬A* solo puede ser verdadera en el caso de que sea falso *A*. Sin embargo, es posible concebir en la lógica del conjunto y a lo largo del tiempo que en todas las ocasiones en las que está activo el nodo *A* esté activo el nodo ¬*A*.

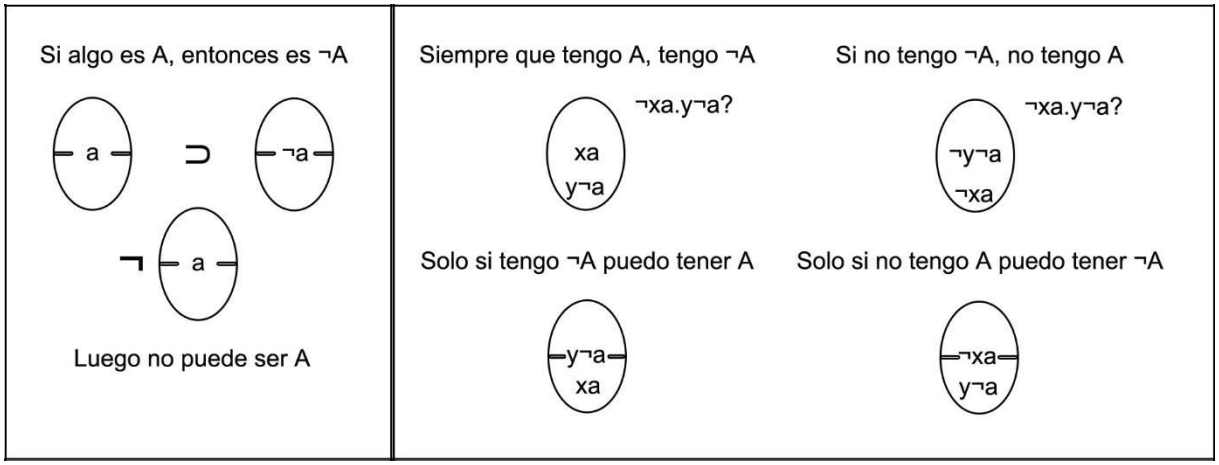


ILUSTRACIÓN 191. MODELOS PROPOSICIONALES LÓGICA DEL OBJETO Y DEL CONJUNTO.

En la siguiente ilustración empleamos las letras X e Y para nombrar nodos *Or* y las letras *a*, *b*,*c* y *d* para nombrar caracteres. Así, x¬cd se debe leer como nodo hipotético con los caracteres ¬cd. En ella pretendemos representar en el diagrama de Marlo la proposición compleja *Si los alumnos de alemán estudian búlgaro, entonces los que no estudien catalán no pueden estudiar danés y es el caso que algún alumno estudia danés y no catalán*.

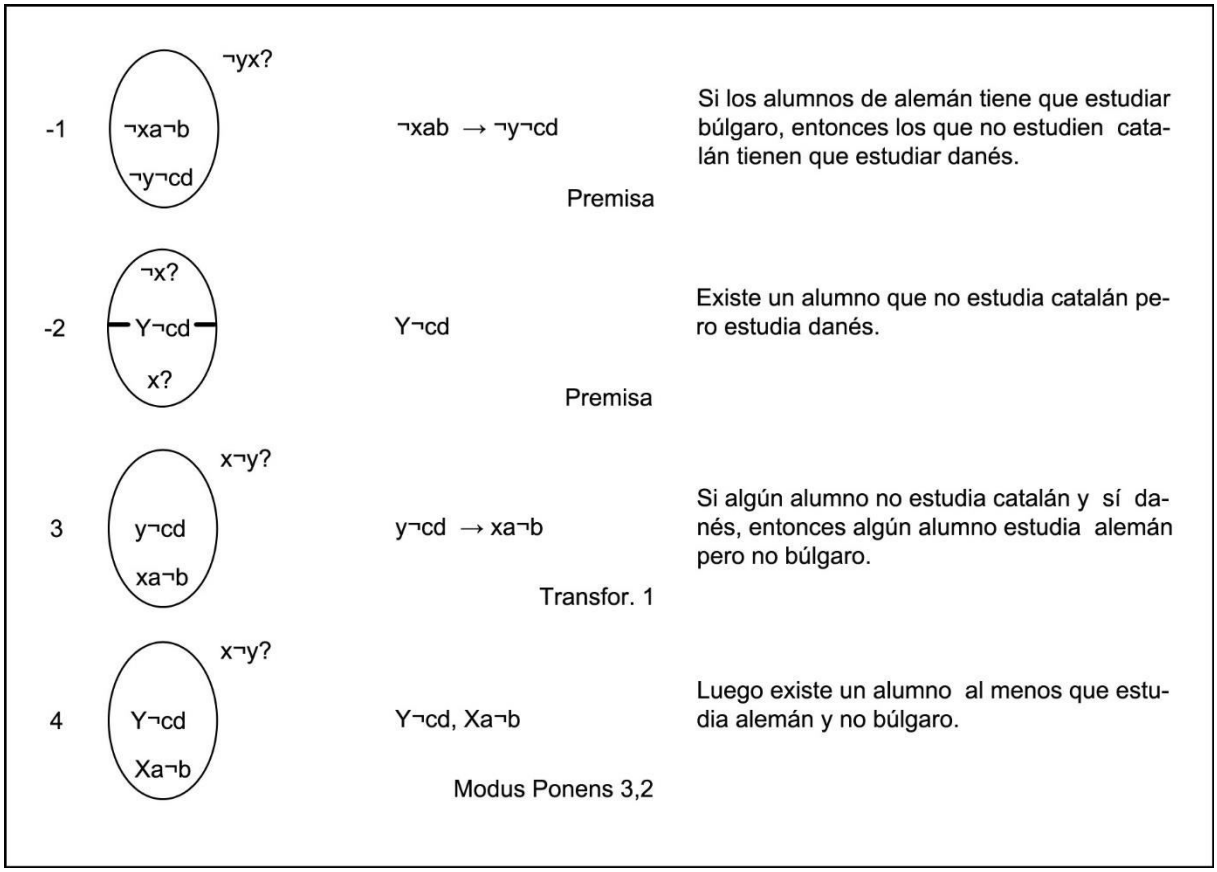


ILUSTRACIÓN 192. "(A→B) →(¬C→¬D)" EN DIAGRAMA DE MARLO PARA LÓGICA DEL CONJUNTO.

Si partimos del supuesto de que puede haber más de una unidad u objeto, no llegaremos a la misma conclusión que reflejan las tablas de verdad y que alcanzamos con el método de las combinaciones imposibles que veremos más adelante. En este caso sabemos que algún alumno estudia alemán pero no estudia búlgaro, pero no podemos afirmar que se trate del mismo estudiante que estudia catalán sin aprender danés. Es probable que X e Y sean nodos *Or* activados por el mismo nodo *Objeto* central *A¬B¬CD* finalmente, pero no es necesario que así sea. Para comprender mejor nuestra postura añadiremos premisas al supuesto anterior y generamos el siguiente ejercicio:

> 1. Si todos los alumnos de alemán estudian búlgaro, entonces los que no estudien catalán no pueden estudiar danés. 2. Los que se matriculen de alemán no pueden matricularse de danés. 3. Hay alumnos matriculados en alemán y búlgaro. 4. Si se matriculan de catalán no pueden estudiar alemán. 5. Hay alumnos con danés y sin catalán. 6. Si hay alguien que solo estudie alemán, entonces los que no estudien alemán deben estudiar búlgaro. Luego al menos tenemos un alumno que solo estudia alemán, otro que estudia solo alemán y búlgaro y otro que estudia búlgaro y danés.

Hemos empleado las letras x, y, v, w, z para designar las variables existenciales y las letras a, b, c, d, para nombrar los caracteres o variables esenciales. La conclusión no ha sido unificada en un paso catorce por motivos de espacio, pero puede leerse fácilmente combinando el contenido de once y trece. En todo caso, los diagramas de Marlo que presentamos en esta sección combinando variables existenciales y esenciales está pendiente de desarrollo, si es que finalmente encontramos utilidad a su uso.

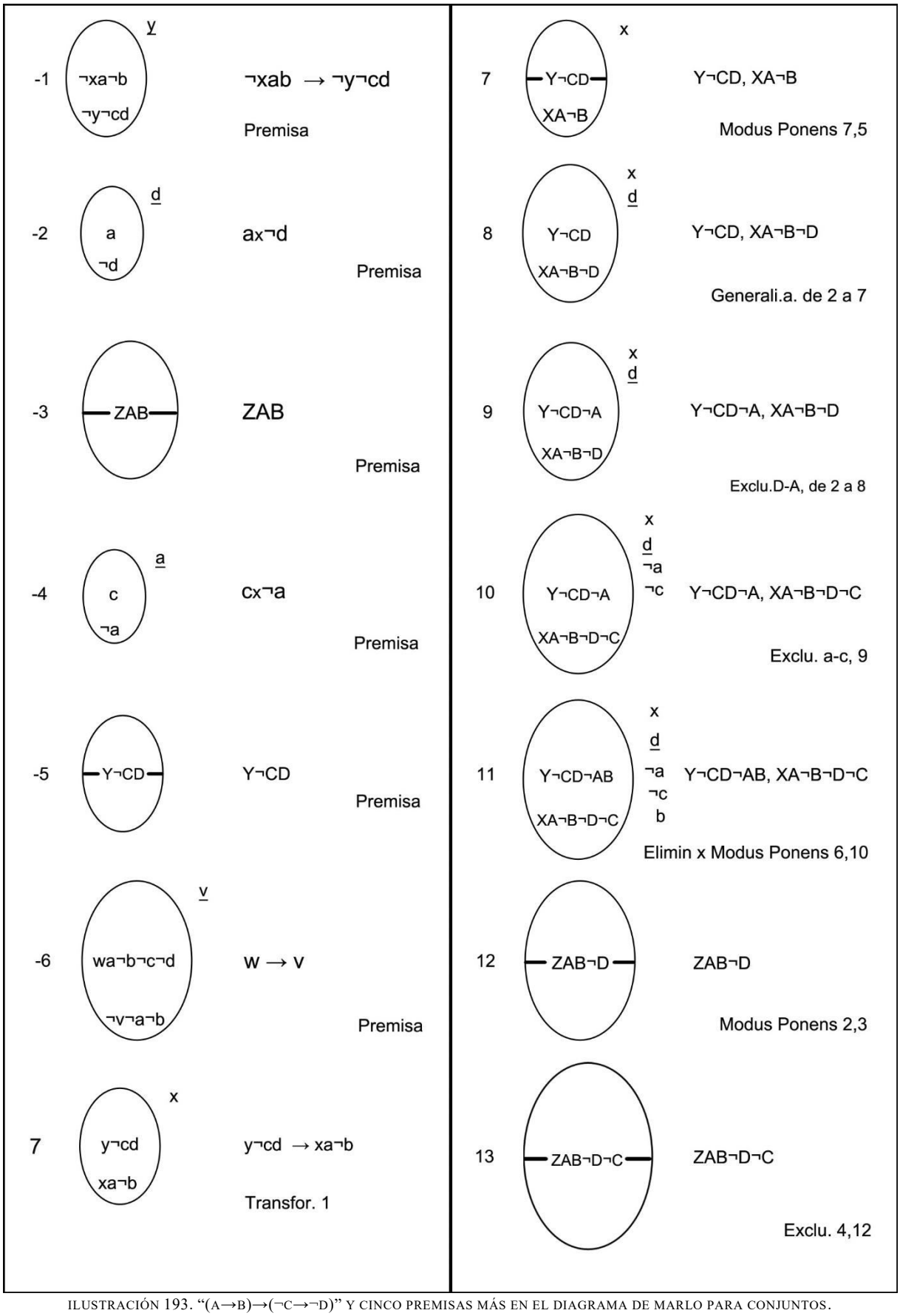


ILUSTRACIÓN 193. "(A→B)→(¬C→¬D)" Y CINCO PREMISAS MÁS EN EL DIAGRAMA DE MARLO PARA CONJUNTOS.

La misma información podríamos comunicar, quizás de una forma más precisa, empleando redes en las que algunos nodos de la red han sido implementados con conexiones *a posteriori*. Las conexiones naturales no se muestran para clarificar el significado de la imagen y por el mismo motivo se han resaltado las relaciones implicadas en la inferencia que nos lleva a afirmar como segura la presencia de tres objetos. El número que acompaña a los nodos es el número de la premisa que justifica su estado. Como se ve, el número N de tipos de estudiantes es igual o mayor a tres, porque sigue habiendo otros tres tipos de estudiante que son admisibles pero de los que no sabemos nada.

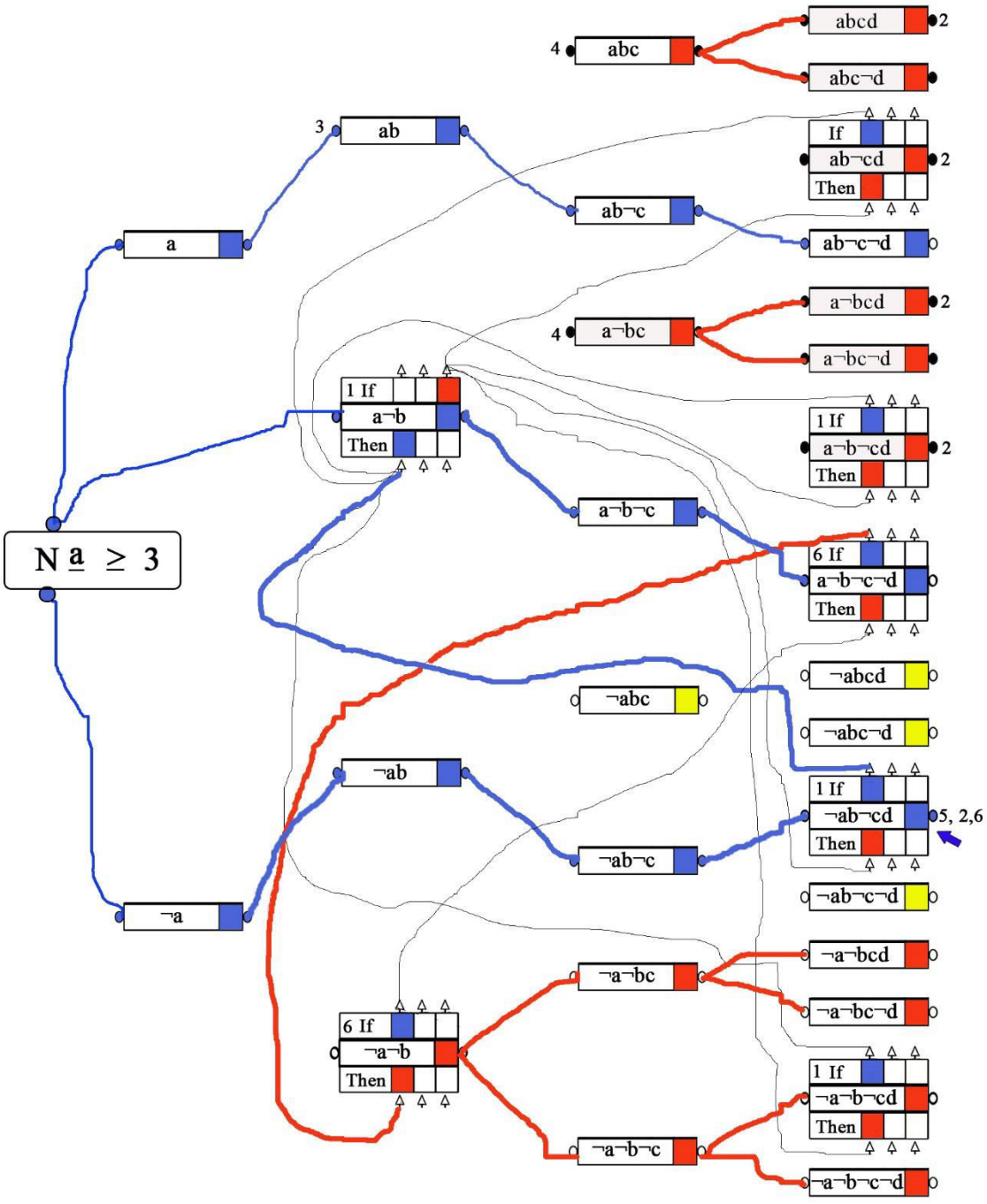


ILUSTRACIÓN 194. EJERCICIO EN REDES CON CÉLULAS COMPLEJAS.

Para terminar esta sección en la que solo pretendemos indicar el camino que nos gustaría seguir en próximos desarrollos de las infografías de nuestros diagramas y redes, presentamos el modo en el que pensamos que pueden

diagramarse las relaciones de una proposición compleja que encadena varias condiciones, por más que pensemos que tales proposiciones son imposibles de verificar empíricamente: *Si es cierto que podemos concluir que Y se sigue de X del hecho de que podamos inferir partiendo de que U se siga de T que es cierto que W se siga de V, entonces de todo ello podremos concluir que tenemos Z*: $((T\rightarrow U)\rightarrow(V\rightarrow W))\rightarrow((X\rightarrow Y))\rightarrow Z$

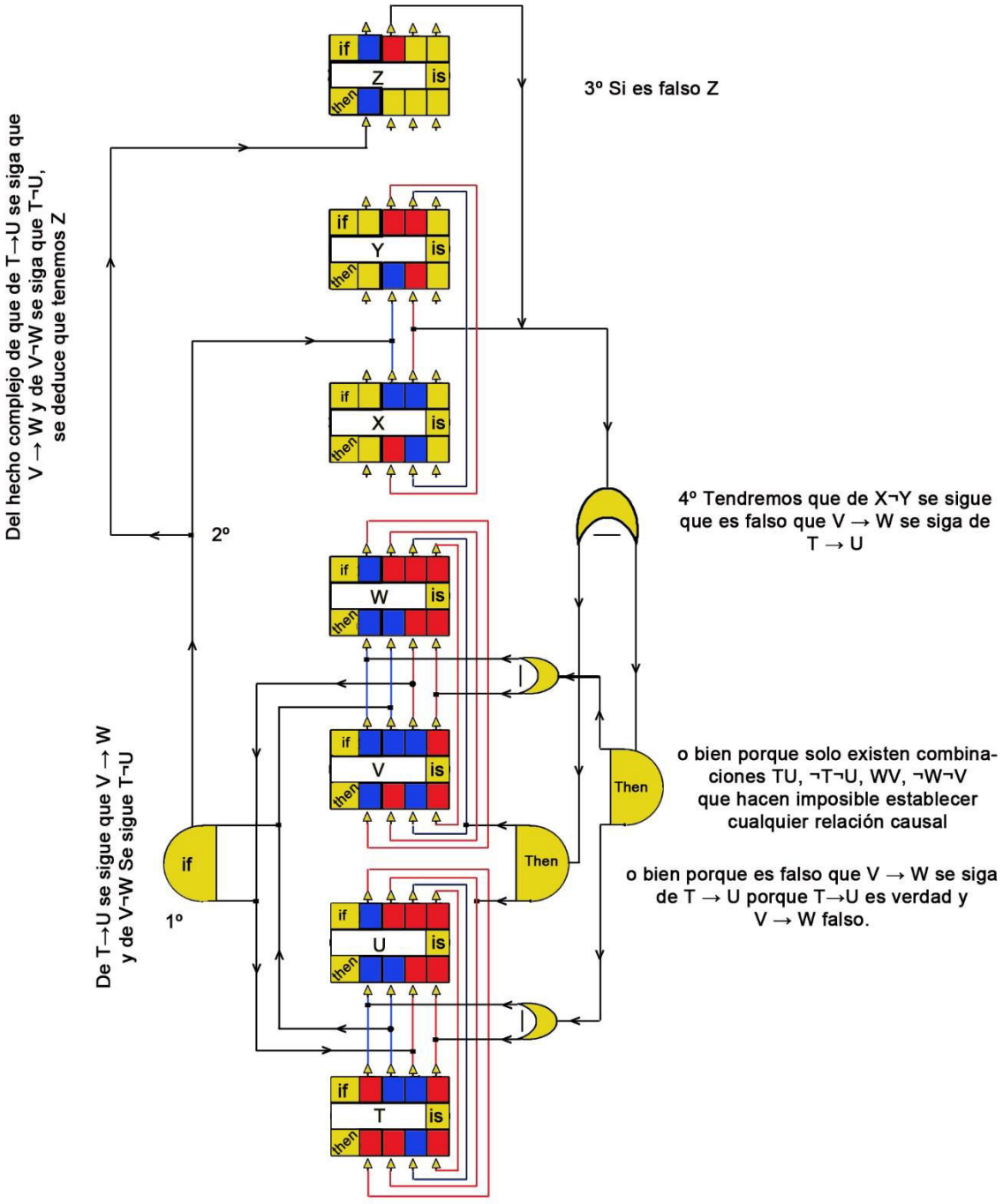


ILUSTRACIÓN 195. EJEMPLO DE RELACIONES COMPLEJAS ENCADENANDO CONDICIONES.

Reconocemos que el planteamiento que proponemos puede suponer más interrogantes que respuestas definitivas, que por otra parte tampoco pretendemos ofrecer, acerca, por ejemplo, del significado de que un modelo conectivo sea falso en las proposiciones complejas. Sin embargo, consideramos legítimo y de posible utilidad generar

controversia en estas cuestiones para las que, personalmente, no hemos encontrado todavía respuestas plenamente satisfactorias.

5.17 Proposiciones complejas en la lógica del objeto

Ya hemos explicado que en un sistema dicotómico con cuatro criterios en el que afirmamos que *Si A implica B, entonces C implica D,* podemos interpretar la proposición como referida al ser de las cosas o como referida a lo que puede haber. En el primer sentido leemos: *Si dada una cosa cualquiera ser A conlleva que dicha cosa sea B, entonces cuando tal cosa sea C, tal cosa será D. De donde se sigue que si algo es C¬D debería ser A¬B*. En este caso, y a diferencia de lo que vimos en el apartado anterior, A¬BC¬D es con certeza el objeto o unidad que buscamos y que será señalado en las tablas de verdad como único compatible con las restricciones de las premisas.

Podemos aceptar como punto de partida en el diagrama de Marlo una lógica del objeto compatible con las tablas de verdad. En este caso y mediante el procedimiento diagramático que llamaremos *producto de las combinaciones imposibles*, limitaremos el análisis de los modelos que forman las proposiciones de segundo grado a los casos en los que el antecedente es verdadero y el consecuente falso, reduciendo así el número de comprobaciones necesarias para obtener la tabla de verdad. Para obtener los casos en los que el consecuente es falso debemos buscar un modelo del consecuente universal, al que opondremos su homólogo en el antecedente, de modo que también en este procedimiento, igual que en la síntesis y la exclusión, es imprescindible hilar los modelos a través de un término medio.

> Pero en Aristóteles no basta decir que una proposición simple es verdadera y otra también para que podamos decir con verdad que si aquélla entonces ésta. Y dice: Pues, en tal caso, habríamos de aceptar que, si el calor dilata los cuerpos, entonces los isósceles son triángulos, ya que ambas son igualmente verdaderas. (Oriol & Gambra, 2015, p. 168)

Las proposiciones de segundo grado serán verdaderas o tautológicas en el diagrama de Marlo solo cuando no exista ningún caso en las tablas de verdad en el que la inclusión del consecuente en el antecedente pueda ser falsada. Así, *Si los patos son palmípedos, entonces los isósceles son triángulos*, es una proposición formalmente contingente porque hay varias posibilidades que desmienten que la inclusión de la segunda proposición en todo su significado dentro de la primera sea formalmente necesaria, aunque sea ahora el caso que ambas son verdaderas por separado.

Al representar relaciones esenciales de caracteres en el diagrama de Marlo desde la lógica del objeto, toda proposición de segundo grado Φ puede interpretarse como expresión de las relaciones que son admisibles o no admisibles cuando se afirma la inclusión del modelo del consecuente β' en el modelo del antecedente β.

Recordemos el principio que guía tanto nuestro procedimiento como la construcción de la tabla de verdad del condicional: Si el modelo de β contiene al modelo de β' entonces toda posibilidad o combinación de variables, imposible en β', debe ser imposible en β

5.17.1 Si toda A es B, entonces algún A es B

La forma más intuitiva de comprobar que β' está contenido en β es superponer ambos modelos igualando el sujeto para comprobar que las combinaciones necesarias en el segundo son admisibles en el primero, sin que exista nada imposible en el primero necesario en el segundo. Así, es fácil ver que *Si Toda A es B, entonces en teoría algún es B* es tautológico, porque el modelo del consecuente está perfectamente incluido en el del antecedente y no hay nada imposible en el consecuente inadmisible en el antecedente. Observemos que la posibilidad *a¬b* que es imposible en el antecedente no es necesaria en el consecuente, pues está contenida como mera conjetura en el espacio en blanco del modelo de A, pero sin ser explícitamente afirmada.

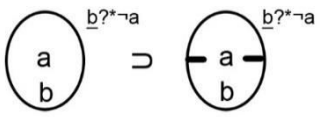


ILUSTRACIÓN 196. SI A ENTONCES B, SE SIGUE QUE PARTE DE LOS TIPOS DE A SON NECESARIAMENTE B.

5.17.2 Si algún es B, entonces toda A es B

Si afirmamos como un hecho que *Si algún tipo de A es B, entonces toda A es B*, podemos concluir que es imposible ¬*b* en el modelo de *a*. Si observamos el modelo de la siguiente ilustración veremos que afirmamos en el paso uno que la proposición *Alguna A es B* incluye a *Toda A es B*. Como nosotros confiamos en la fuente, entendemos que se afirma algo con necesidad acerca de las relaciones formales de los elementos de nuestro mundo. En el paso dos procedemos a considerar las posibles relaciones imposibles entre el modelo particular y el universal de *A*. Lo único imposible en el consecuente es *A*¬*B* y resulta que es combinable con parte del modelo del antecedente.

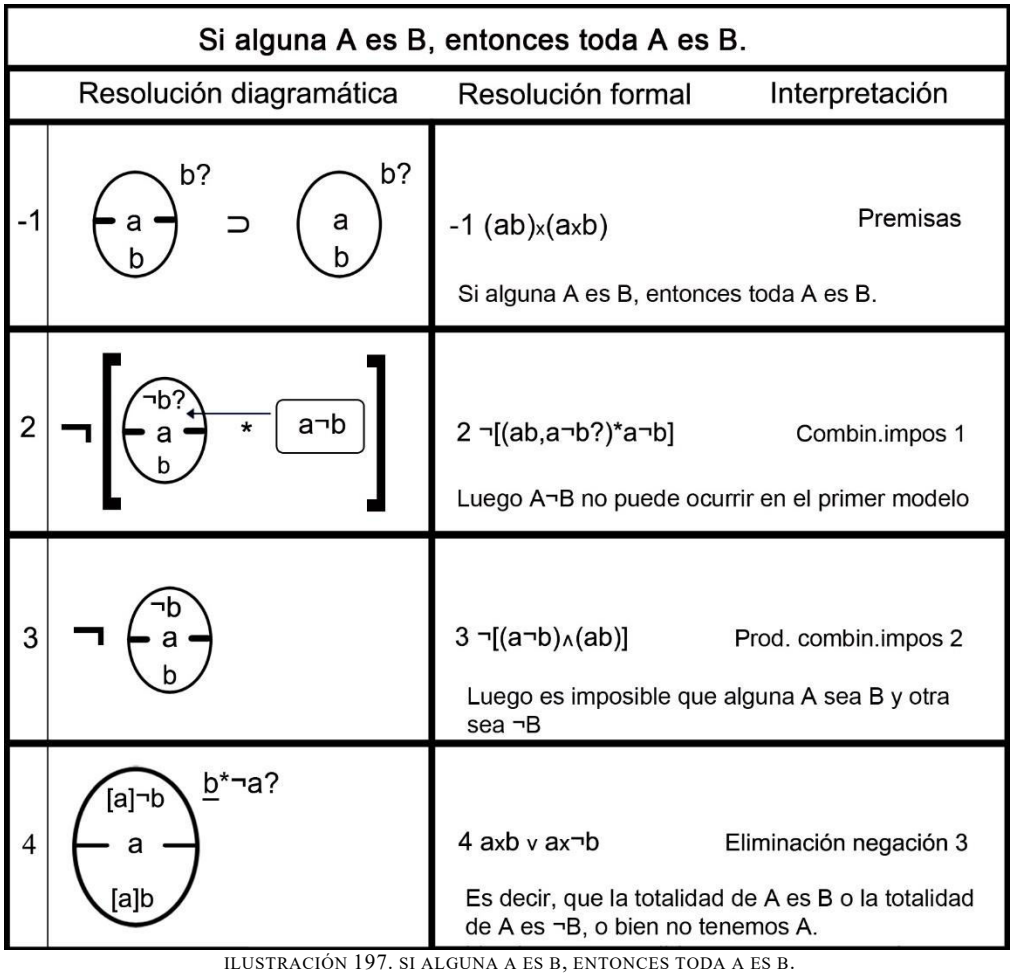


ILUSTRACIÓN 197. SI ALGUNA A ES B, ENTONCES TODA A ES B.

Esa combinación imposible es la que se señala dentro de un cuadrado. Todo lo que era posible al margen de *A* en el modelo universal del paso uno no nos interesa.

Nos centramos en lo imposible y vemos que la combinación prohibida *A*¬*B* solo podría darse en la parte superior del modelo particular de *A*. Ese cuadrado *A*¬*B* no puede relacionarse ni con la parte inferior del modelo particular de *A* porque ya hay *B*, ni con el exterior del modelo donde hay ¬*A*. Luego *A*¬*B* solo puede ser el caso en la parte indeterminada del modelo particular de *A*.

Mediante las combinaciones imposibles obtenemos un modelo de lo que no puede ser en el paso tres. Partiendo de que *Si es cierto que de Alguna A es B se sigue que toda A es B*, vemos que es imposible que una parte de *A* sea *B* y una parte de *A* sea ¬*B*.

Para eliminar la negación de un modelo cambiamos la cantidad del sujeto y la cualidad del predicado, como hicimos en la tabla de oposición del juicio. También añadimos, claro está, las posibilidades inciertas al margen. Pero como en este caso no se puede cambiar la cantidad del modelo eliminando la divisoria porque uniríamos *A* y ¬*A*, debemos cambiar la cantidad en el sujeto sustituyendo *a* por *[a]* en ambas partes del modelo del paso cinco,

de modo que obtenemos una disyunción como conclusión que nos dice que *O bien la totalidad de A es B o bien la totalidad de A es ¬B, o bien no tenemos A*, siendo esta última posibilidad de ¬*a*, la que nos queda al margen de las otras dos, la que permite en la tabla de verdad que las condicionales $A \rightarrow B$ y $A \rightarrow \neg B$ sean ciertas al mismo tiempo. La posibilidad de ¬*a* nos parece más evidente en los diagramas que en la notación formal. Mediante la tabla de verdad de [(A∧B) →(A→B)] → [(A→B) ∨ (A→¬B)], que resulta ser una tautología, podemos comprobar que es correcta la conclusión en nuestros diagramas.

Si β' está incluido en β, entonces lo necesario en β no puede ser imposible en β' y lo que es imposible en β' no puede ser necesario en β, siendo suficiente comprobar que lo que es falso en el consecuente no es verdadero en el antecedente.

En la siguiente imagen mostramos de qué manera incluye un diagrama de árbol bicondicional a uno condicional.

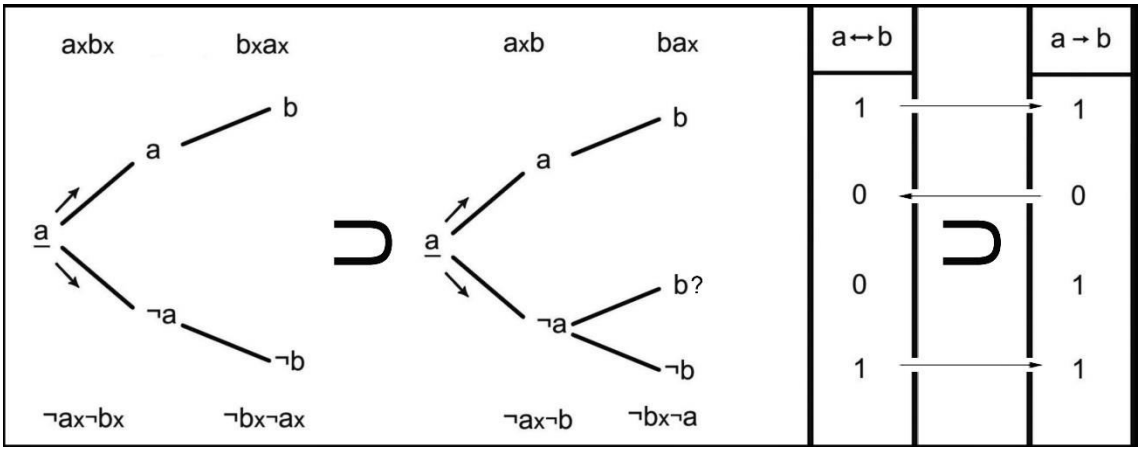


ILUSTRACIÓN 198. PROPOSICIÓN COMPLEJA "(A↔B) → (A→B)" EN REDES. SE OBSERVA QUE LO QUE ES VERDADERO EN EL ANTECEDENTE ES VERDADERO EN EL CONSECUENTE Y QUE LO QUE ES IMPOSIBLE EN EL CONSECUENTE ES IMPOSIBLE EN EL ANTECEDENTE.

Cuando lo que es imposible en el modelo del consecuente sea inadmisible en cualquiera de las posibilidades admisibles del modelo del antecedente, las relaciones serán contradictorias, sin que exista ninguna posibilidad de que lo segundo está contenido en lo primero. Cuando solo en algunos casos lo segundo sea admisible en lo primero tendremos relaciones contingentes. Y cuando no haya nada imposible en el modelo del consecuente que sea inadmisible en el del consecuente, la relación de inclusión será tautológica. Como ya sabemos, las relaciones tautológicas ocurrirán con certeza cuando el modelo del consecuente sea consecuencia de la conversión o de la transformación de un modelo.

5.17.3 (A↔B) →(¬B→¬A)

Las proposiciones de segundo grado serán verdaderas o tautológicas en el diagrama de Marlo solo cuando no exista ningún caso en las tablas de verdad en el que la inclusión del consecuente en el antecedente pueda ser falsada. Así, *Si los patos son palmípedos, entonces los isósceles son triángulos*, es una proposición formalmente contingente porque hay varias posibilidades que desmienten que la inclusión de la segunda proposición en todo su significado dentro de la primera sea formalmente necesaria, aunque sea ahora el caso que ambas son verdaderas por separado. En los casos en los que una proposición de segundo grado exprese una relación tautológica no podremos condensar los modelos en uno solo. Podemos ver un ejemplo de inclusión tautológica en la siguiente figura, donde se diagrama una proposición condicional de segundo grado que tiene como antecedente un bicondicional y como consecuente un condicional.

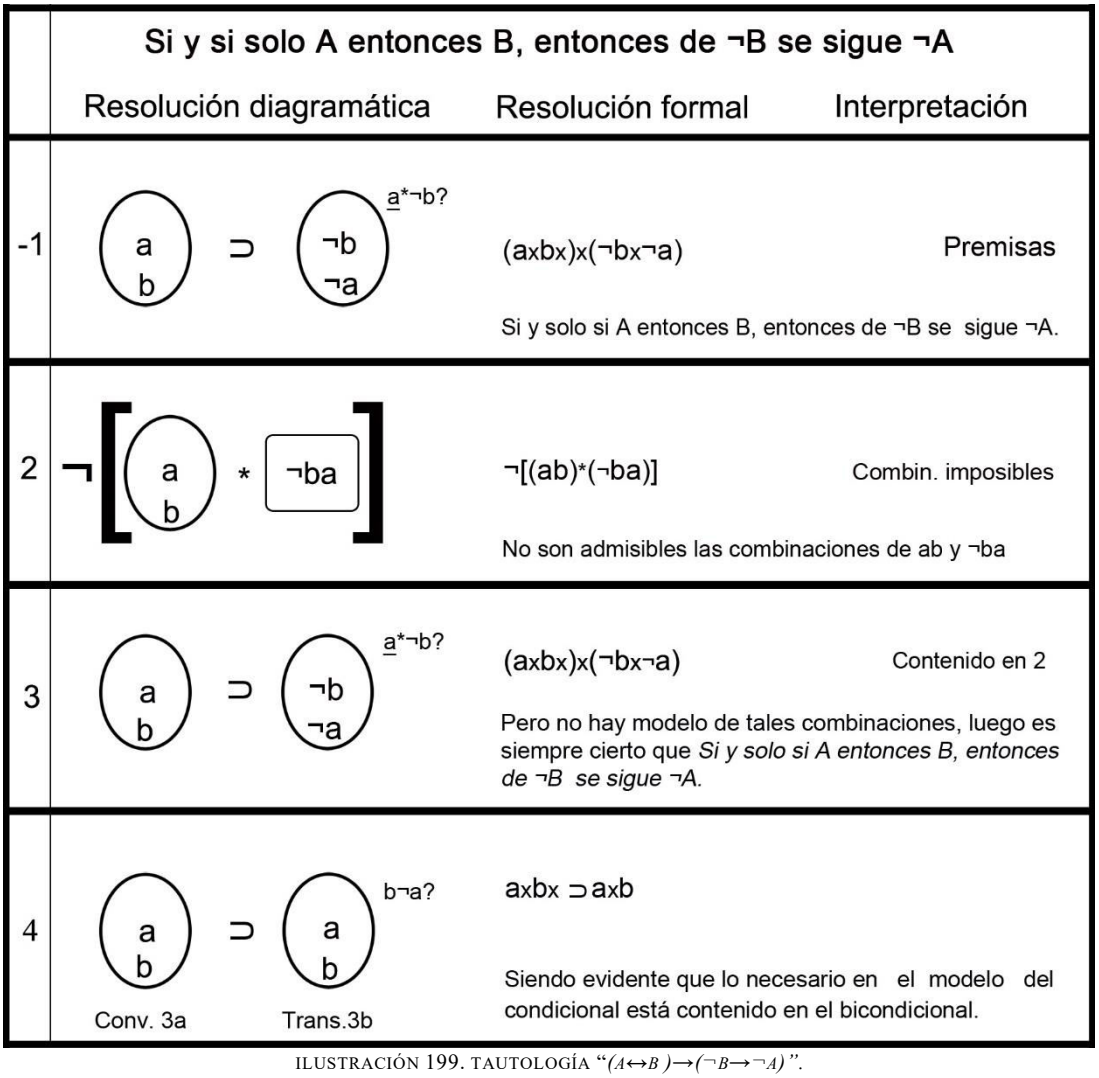


ILUSTRACIÓN 199. TAUTOLOGÍA "*(A↔B)→(¬B→¬A)*".

Lo único imposible en el consecuente es ¬*ba*, pero dicha opción no puede incluirse en el modelo *ab* del antecedente. Por eso no podemos obtener ninguna combinación que false la proposición compleja inicial (A↔B) →(¬B→¬A).

Así pues, desde nuestra perspectiva, solo cuando en todos los casos formalmente posibles del antecedente pueda estar contenido el modelo del consecuente, la relación será tautológica y podremos afirmar que *lo segundo está dicho en lo primero.* Es importante señalar que una relación de segundo grado contingente no puede ser nunca formalmente verdadera en las redes de expectativas. No mientras siga siendo contingente, aunque ahora sea el caso una de las posibilidades que no desmiente la relación.

5.17.4 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg D)$

Podemos analizar, desde la lógica del objeto en el diagrama de Marlo, la proposición compleja que utilizamos anteriormente como ejemplo de proposición secundaria desde la lógica del conjunto: *Si los estudiantes que se matriculan en alemán estudian búlgaro, entonces cuando no escojan catalán no pueden estudiar danés.* Si conociendo esta norma vemos en una matrícula que se no se ha marcado el catalán pero sí el danés, tenemos que deducir que no se ha obligado a dicho alumno a matricularse de alemán y búlgaro, es decir, que, conforme a las tablas de verdad, estudia alemán y estudia búlgaro. Esta conclusión supone aceptar que ambas partes de la proposición nos hablan de la secuencia de caracteres que define al mismo y único objeto que puede ser el caso, porque solo un objeto puede ser el caso. Siendo así, la tabla de verdad nos dice lo mismo que el modelo del paso cinco en la siguiente ilustración, esto es: que, contando con que sea cierto que (A→B) →(¬C→¬D), la única posibilidad aceptable para definir a un objeto con los caracteres ¬*cd* es la combinación ¬*cd a*¬*b*. Esta conclusión es muy diferente de la que obteníamos en la lógica del conjunto, donde podíamos aceptar que es el caso (activación igual a uno) un objeto X con los caracteres ¬*cd* y como consecuencia de ello es el caso otro objeto distinto Y con los caracteres *a*¬*b*. Pero partiendo de la lógica del objeto tenemos la siguiente resolución diagramática.

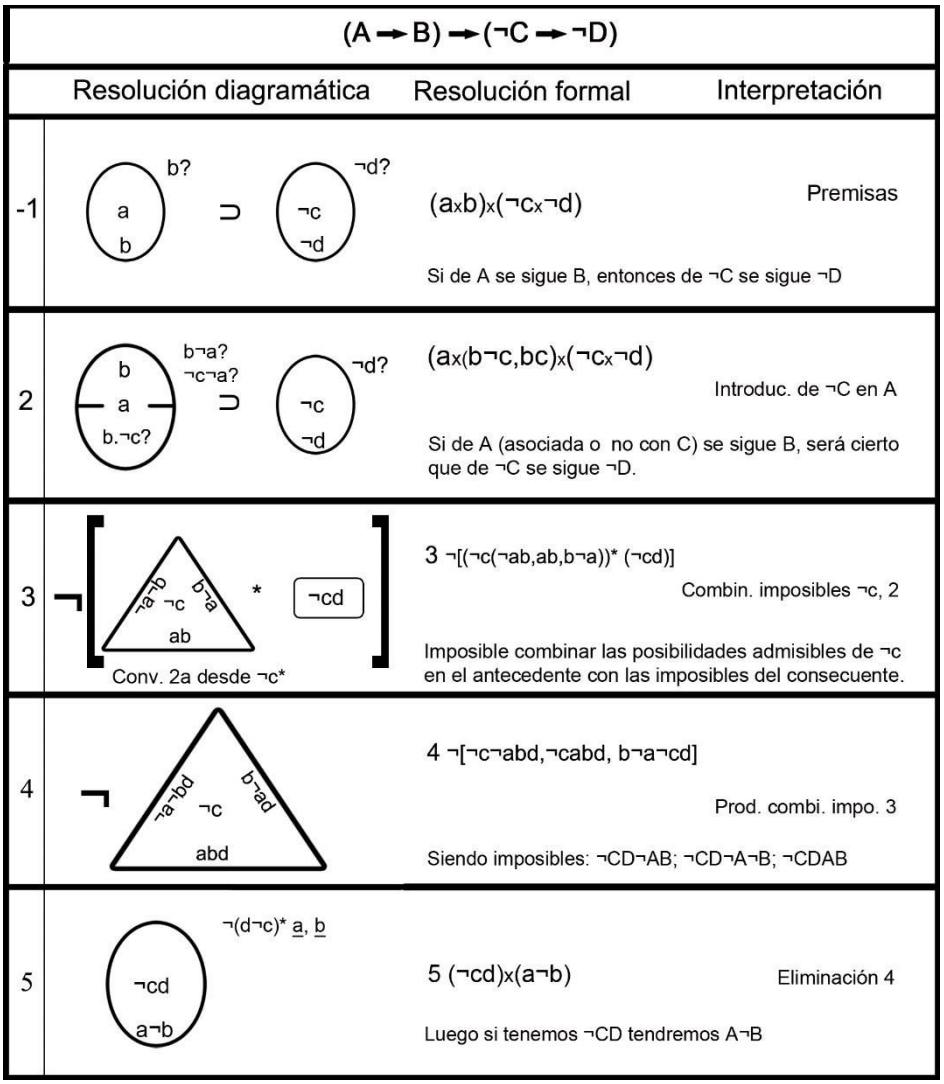


ILUSTRACIÓN 200. "(A →B) →(¬C→¬D)" EN DIAGRAMA MARLO SEGÚN LÓGICA DEL OBJETO.

Desde nuestra perspectiva diagramática, mientras la lógica del objeto reflejada en las tablas de verdad determina el ser de "esto" como conjunto de caracteres ajustado a las condiciones de las premisas, la lógica del conjunto nos permite establecer con qué presencias y/o ausencias de objetos contamos en un estado de cosas en el que partimos del conocimiento de algunos valores de activación-inhibición de ciertos nodos.

5.17.5 (A→B) →(¬C→D). Comprimir y descomprimir

Supongamos ahora que partimos de la siguiente proposición compleja (A→B) →(¬C→D), la cual interpretamos desde la lógica del objeto para resolverla por el método de las combinaciones imposibles. Después de resolver lo interesante será observar que de las posibilidades que falsan el consecuente, es decir, de las combinaciones que contienen ¬*c*¬*d*, solo es aceptable *a*¬*b*¬*c*¬*d*.

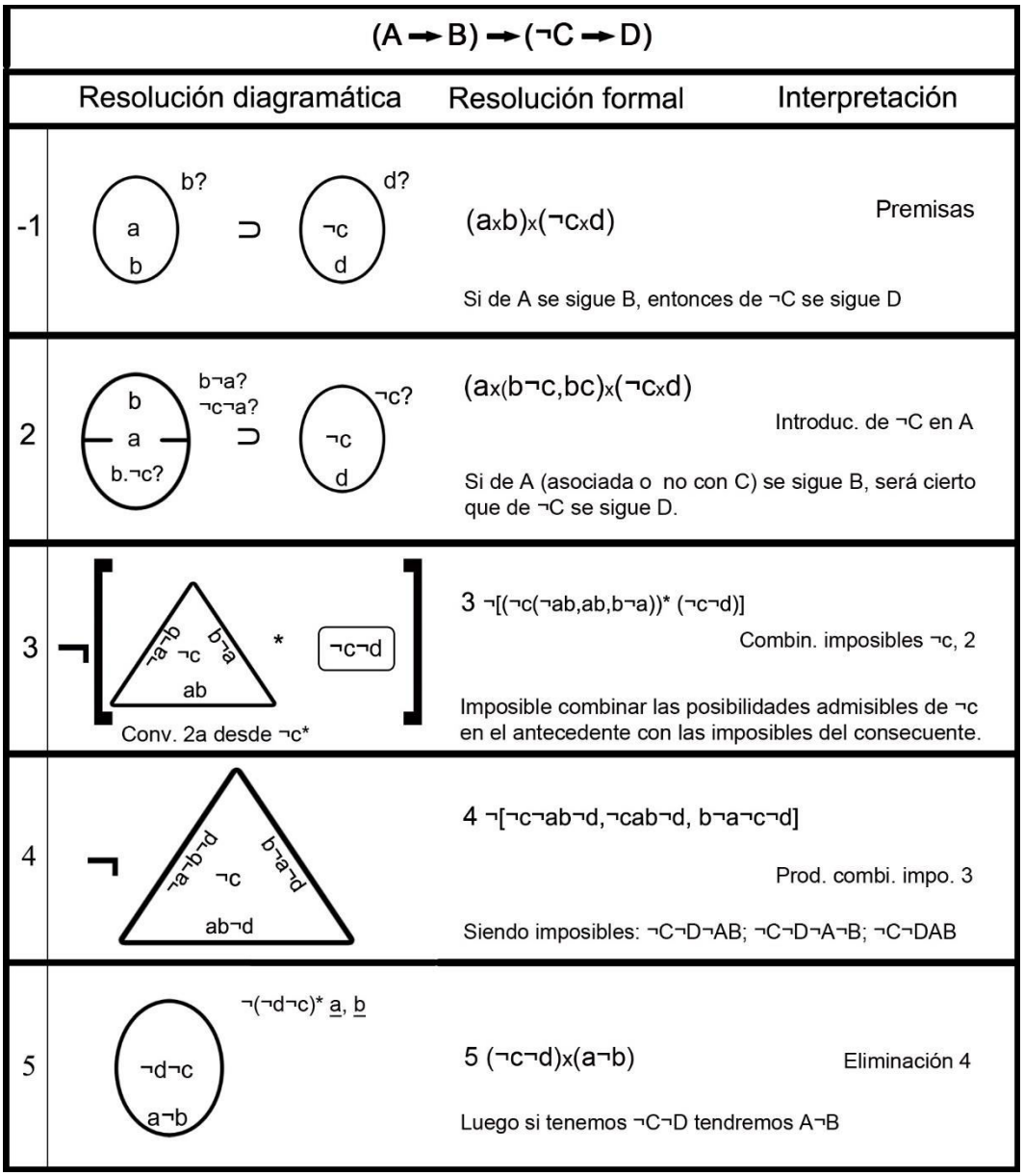


ILUSTRACIÓN 201. PROPOSICIÓN DE SEGUNDO GRADO EN DIAGRAMA DE MARLO "(A→B) →(¬C→D)".

El modelo del paso cinco condensa en un solo modelo la proposición compleja *(A→B) →(¬C→D)*. Hemos llegado a él eliminando las posibilidades prohibidas en el paso cuatro. Por eso observamos en el núcleo del diagrama de cinco que ¬*D*¬*C* solo pueden combinarse con *A*¬*B*. Luego comprimimos al margen todas las opciones distintas del sujeto (no son ¬*d*¬*c*) que aún son combinables con *a, ¬a, b* y ¬*b*, dando además a entender que ninguna de las variables del sujeto se agota en el núcleo. Recordemos que a es sustituible tanto por *a* como por ¬*a*.

Si posteriormente queremos descomprimir el modelo del paso cinco observaremos que se generan tres series de combinaciones al margen del núcleo combinando lo que no es ¬*d*¬*c* con *a, b.* La descompresión nos permite

comprobar que las trece posibilidades aún admisibles partiendo de la proposición *(A→B) →(¬C→D)* estaban implícitamente expresadas en nuestro modelo, ahorrando una cantidad de espacio considerable respecto a los diagramas de Venn, lo cual además nos permite ganar en claridad.

s	A	B	C	D	Γ	ÁREAS DIAGRAM
1	1	1	1	1	V	4
2	1	1	1	0	V	2
3	1	1	0	1	V	3
4	1	1	0	0	F	X
5	1	0	1	1	V	4
6	1	0	1	0	V	2
7	1	0	0	1	V	3
8	1	0	0	0	V	1
9	0	1	1	1	V	4
10	0	1	1	0	V	2
11	0	1	0	1	V	3
12	0	1	0	0	F	X
13	0	0	1	1	V	4
14	0	0	1	0	V	2
15	0	0	0	1	V	3
16	0	0	0	0	F	X

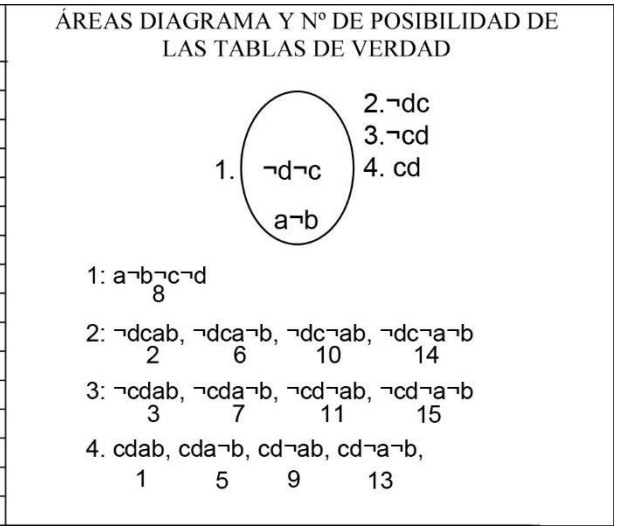


ILUSTRACIÓN 202. CORRESPONDENCIA DEL MODELO QUE CONDENSA *(A→B) →(¬C→D)* CON LAS TABLAS DE VERDAD. LOS SUCESOS NO COMPRIMIDOS NO ESTÁN PERMITIDOS.

A la izquierda de la ilustración anterior vemos las dieciséis posibilidades de la tabla de verdad de *(A→B) →(¬C→D)* y el área del diagrama en el que están comprimidas. El núcleo del diagrama es el área 1 y las áreas 2, 3 y 4 surgen de la descomprensión de la expresión *¬(¬d¬c)*. Por eso observamos a la derecha de la figura qué combinaciones de la tabla de verdad están comprimidas en cada área. Por ejemplo, en el área 4 del diagrama están las posibilidades de la tabla número 1, 5, 9 y 13 que van desde *abcd* hasta *¬a¬bcd*. Como puede observarse, hay una exacta correspondencia entre la información contenida en las tablas de verdad y la contenida en nuestro diagrama.

5.17.6 Conclusión sobre las proposiciones secundarias

Como hemos tenido ocasión de comprobar en los últimos capítulos, la complejidad de las proposiciones secundarias hace inevitable afrontar la distinción del contenido esencial y existencial de las proposiciones en la inferencia. Ya hemos dicho que nosotros hemos tendido a interpretar en este trabajo, por lo general, las proposiciones simples desde una perspectiva esencial en la que se informa de la estructura admisible en las secuencias de caracteres, de modo que partiendo de $(A \rightarrow B) \wedge A$ siempre concluimos que es cierto *AB*. Sin embargo, en las proposiciones complejas como las que maneja la lógica de predicados se nos hace evidente que podemos interpretar la proposición desde el punto de vista de los valores de activación de los nodos, siendo posible en este caso que partiendo de $(A \rightarrow B) \wedge A$ sea finalmente cierto que tenemos *AB* y *A¬B*. Para llegar a esta conclusión es evidente que interpretamos el signo "→" como una conexión entre los valores de activación de *A* y de *B*, considerando que dichos valores son sucesos independientes. Sería conveniente no utilizar el mismo símbolo para ambos tipos de implicación, y de hecho, nosotros preferimos utilizar la notación, que basamos en la cuantificación del predicado empleando el subíndice x como en la expresión $a_x \neg b$ para expresar relaciones esenciales y dejar el uso de los signos de los conectores de la lógica de proposiciones " → , ↔, $\underline{\vee}$, ∨" para las relaciones entre unidades independientes, de modo que podamos expresar proposiciones del tipo $A \rightarrow \neg A$ conforme al sentido común, aunque hubiera que redefinir su significado para adecuarlo a secuencias de activación-inhibición que se dan a lo largo del tiempo.

En todo caso, puede que lo más razonable sea tratar de adaptar nuestra notación a la que se emplea hoy en lógica de predicados, siendo este un proyecto que tendremos que dejar para futuras investigaciones. Pensemos en la siguiente proposición: *Si todos los repetidores estudian dibujo, entonces los no repetidores tienen que estudiar química.* Imaginemos que la formalizamos como $(R \rightarrow D) \rightarrow (\neg R \rightarrow Q)$ y nos preguntamos si puede ser entonces verdad que haya al mismo tiempo algún repetidor que estudie dibujo y que algún no repetidor no estudie química. Sin embargo, esa opción no puede comprobarse en las tablas de verdad, ya que no es posible generar una fila en

la que *R* y ¬*R* sean verdaderas al mismo tiempo. Claro que podemos eliminar el problema convirtiendo *todos los repetidores estudian dibujo* en la proposición *p* y *los no repetidores tienen que estudiar química* en la proposición *q*, de modo que formalicemos la proposición inicial como $p \rightarrow q$. A nosotros la solución de reducir la complejidad del discurso inventando una lógica de sentencias distinta de la lógica de predicados nos parece inaceptable, y aunque sus algoritmos funcionen, nosotros creemos que carecen de todo significado informativo. En la calculadora lógica es posible que sea cierta la conjunción RD en un nodo activo sin que sea verdadero que ¬R →Q porque no está eliminado el nodo ¬R¬Q. De este modo, la lógica del conjunto nos exige un esfuerzo mayor para alcanzar convenciones acerca de las conectivas que sean significativas a la hora de comunicar información relativa a las correlaciones presencia-ausencia de los objetos que componen nuestro mundo.

5.18 Sintaxis, axiomas y reglas del cálculo lógico

El desarrollo de los diagramas de Marlo y las redes de expectativas nos ha exigido inventar una notación que pueda expresar los matices de la inferencia tal y como se produce en nuestras herramientas didácticas. Esta notación no es definitiva y seguimos trabajando para unificar los principios matemáticos de la propagación de la activación y la inhibición que justifican el razonamiento en las redes con los principios lógicos de la síntesis y la exclusión que legitiman el cálculo lógico de modelos proposicionales. Además esbozamos ciertos principios del razonamiento de relaciones que aplicamos en alguno de los ejercicios que tuvo a bien publicar la Academia Mexicana de la Lógica en (Aznar, 2016b) y que añadimos a continuación de las reglas y axiomas que presentamos. En todo caso y a grandes rasgos, podemos asumir la notación general de los *Principia* siempre que se nos permita distinguir la lógica del objeto de la lógica del conjunto. Es nuestra intención seguir trabajando para aproximar nuestra notación a la más extendida de la lógica de proposiciones (lógica del objeto) y la lógica de predicados (lógica del conjunto) y de hecho, buena parte de las convenciones de la sintaxis de la lógica de proposiciones y de predicados son asumidas en nuestra notación.

Quizás, podemos destacar como diferencias fundamentales que nosotros usamos minúsculas para las variables afirmadas hipotéticamente, el signo % para lo probable y la distinción entre lo que no existe y lo ausente. También empleamos corchetes para referirnos a los nodos *And*, de los que desconocemos su equivalente en la lógica de predicados. Por otra parte, en nuestro intento de tender puentes entre la lógica del objeto (proposiciones) y del conjunto (predicados) nosotros distinguimos como De Morgan entre composición “AB” y agregación “A, B” o bien “A ⋀ B”. Igualmente, mientras nos movemos dentro de los parámetros de la lógica de clases y con proposiciones simples preferimos el subíndice *x* para definir los conectores, indicando que la totalidad de los objetos centrales definidos por una variable se identifica con parte de los objetos centrales definidos por otra variable. Sin embargo, para expresar relaciones complejas entre nodos en sus correlaciones de presencia-ausencia preferimos el uso de los conectores convencionales. En todo caso, al final de esta investigación solo hemos vislumbrado de qué manera nuestras formas de representación pueden afrontar la lógica de predicados y menos aún hemos desarrollado una lógica de relaciones, de modo que todas las formas de notación que hemos empleado y que presentamos no son más que tentativas provisionales que necesitan ser mejoradas y precisadas. Ya hemos dicho que sería nuestro objetivo unificar la notación de las redes y diagramas de Marlo teniendo como horizonte nuestra calculadora lógica, aunque mejorada para modificar los pesos de los nodos en función de su número de ocurrencias, lo cual nos obligará, sin duda, a combinar la notación de las leyes de la probabilidad con las de la lógica de predicados.

5.18.1 Elementos de los sistemas dicotómicos

Mundo o universo ℵ: construcción de la realidad al servicio de la vida. Interpretación del mundo. Espacio mental.	ℵ (α, β,γ…ω)	
Alfa: subsistema cognitivo que permite identificar, clasificar, comparar, organizar y comunicar la experiencia a partir de criterios relevantes para la acción del sistema.	α (a, b, c,… p, q, r…)	
Criterios: cada uno de los conceptos que permiten identificar el ser de cualquier objeto o cosa a partir del ajuste a sus cualidades en el espacio mental α	a, b, c…p, q, r…	No debemos confundir el criterio o concepto q con la cualidad q, que significa que se ajusta al criterio q
Variables de caracteres: cada uno de los grados que componen la escala de un criterio. Para el cálculo elemental emplearemos escalas dicotómicas. ¬ = No se ajusta	a, ¬a, b, ¬b, c, ¬c…, p, ¬p…	**Principio de economía:** Las divisiones dicotómicas son las más baratas cognitivamente, pero no son siempre las más rentables.
Nodos *Objeto* centrales o unidades: Objetos teóricos definidos como combinaciones únicas y distintas de cualidades: secuencia definida por sus grados de ajuste a todos y cada uno de los criterios que componen α.	abc, ab¬c, a¬bc, a¬b¬c, ¬abc, ¬ab¬c, ¬a¬bc ¬a¬b¬c… Objetos de α = $\mathbf{2^n}$	Para sistemas dicotómicos el número de sucesos completos u objetos teóricos = $\mathbf{2^n}$, siendo n el número de criterios de Alfa. Para sistemas tricotómicos 3^n
Nodos *Or* o perspectivas parciales: suceso no definido en relación a todos los criterios. La diferencia entre un suceso completo y una perspectiva parcial es incertidumbre.	Para **α** (a,b,c) son perspectivas parciales: ab, ac, a¬b, a¬c, bc, b¬c, ¬ab, ¬ac, ¬a¬b, ¬a¬c, ¬bc, ¬b¬c, a, b, c, ¬a, ¬b, ¬c	Para n ≥ 4 el número de perspectivas parciales = $2^{n+1} - 2$ Incluyen a los sucesos elementales.
Variables de activación v, w, x, y, z: Sirven para identificar nodos. Un nodo que es definido por una secuencia de caracteres con cierto valor de activación.	$v \rightarrow p \trianglerighteq \neg p$ wq ⊵ w¬q	Todo nodo debe estar cualitativamente definido por un carácter o su contrario.
	WP	Un nodo definido por la cualidad p y con valor de activación igual a uno.
	$\bar{W}$ $\bar{W} \rightarrow$ w	Un nodo definido por la cualidad p ausente, es decir, con valor de activación igual a menos uno. Si está ausente forma parte o existe como combinación verificada en el sistema.
Nada, conjunto vacío	nw= 0 ↔ ∅	Cero es lo mismo que nada o ∄

Conectores fundamentales

	Fórmula inicial	Conversión	Transformación	Conversa	Definición
Bicondicional	$p_x q_x$	$q_x p_x$	$\neg q_x \neg p_x$	$\neg q_x \neg p_x$	¬(p¬q), ¬(¬pq)
Condicional	$p_x q$	$q p_x$	$\neg q_x p$	$p \neg q_x$	¬(p¬q)
Exclusiva	$p_x \neg q_x$	$\neg q_x p_x$	$q \neg p_x$	$\neg p_x q_x$	¬(pq), ¬(¬p¬q)
Inclusiva	$\neg p_x q$	$q \neg p_x$	$\neg q_x p$	$p \ \neg q_x$	¬(¬p¬a)
Conjunción	PQ	QP			$p_x \% q$

5.18.2 Sintaxis elemental de las fórmulas utilizadas

	Notación	Interpretación	Ejemplo y/o regla asociada
Mayúscula y minúscula			
	$Minúscula$	Hipotético, teórico o que no modifica los valores de activación del resto de nodos en el estado de cosas actual. Aquello cuya presencia o ausencia resulta irrelevante en el curso de la comunicación. Potencia, lo que no es el caso, pero puede llegar a serlo por ser una de las posibilidades de Alfa.	Cuando vengas, Si corres, si tienes faltas… Es posible.
	$Mayúscula$	Acto, lo que es el caso, lo que cuenta en el momento y tiene capacidad de influir directamente en el resto de valores de activación de los nodos de la red. Lo que tiene un valor de activación igual a uno o de inhibición igual a menos uno.	Esto es un león hambriento Eso es un sitio barato Aquel es rubio.
Signo de imposibilidad, siempre delante de un paréntesis.	¬ (p)= ∄p ¬ (p) ↔ x_x ¬p ¬ (¬p) ↔x_x p	Es imposible p. En el cálculo implica eliminar todo suceso que incluya el carácter p. No existe p como suceso elemental. Luego para cualquier x en un sistema dicotómico, la característica que lo defina debe ser ¬p. En la calculadora lógica es necesario tomar manualmente la decisión de si ¬(p) significa que p está ausente ahora o no existe.	La expectativa razonable de que es imposible que haya algún alumno matriculado en psicología. Es decir, la creencia de que ningún alumno que hubiera sería de psicología.
Paréntesis: sirve para agrupar objetos y delimitar el objeto imposible.	¬ (¬pq)	Es imposible cualquier suceso esencialmente definido por las cualidades ¬p y q. No es posible el objeto teórico ¬pq.	Es imposible que haya algún alumno que no esté matriculado en psicología y lo esté en química.
	(pq, p¬q)	Define un conjunto de objetos cuya agrupación resulta de interés	Una parte de mi pan tiene queso y la otra no.
Subíndice x	p_xq	En cualquier caso que tenga p, para la totalidad de los tipos permitidos de p o siempre que tenga p, será cierto q. Una variable con subíndice x tiene sentido solo cuando actúa como antecedente en una teoría general. Sola es una expresión mal formada del cálculo y debe ser sustituida por p. Equivale a la expresión: ∀x (Px → Qx)	Si alguien es mi primo, entonces come queso.
Corchetes de totalidad como conjunción en nodos *And*.	$[P]Q$	Es el caso que la totalidad de tipos permitidos de p en Alfa está presente y se asocia con parte de los tipos de q. Incluye las expresiones p_xq y es cierto ahora el nodo *And* [P].	Todos mis primos están comiendo queso aquí y ahora.
comas	$a, \neg a, b, \neg b$	Sirven para separar tipos de objetos, aunque dichos objetos son combinables siempre que no se incurra en contradicción.	
	a¬a	Es una expresión imposible o mal formada	
	a, ¬a A ⋀ ¬A	Son expresiones bien formadas del cálculo de las que se infiere la existencia al menos de dos posibilidades o sucesos distintos e incompatibles a nivel de objeto.	Hay listos y no listos.
Combinación de comas y paréntesis	(a, ¬a)(b, ¬b) = a, ¬a, b, ¬b = a, (¬a, b), ¬b	La agrupación de sucesos separados por coma mediante paréntesis no altera el significado de la expresión. Luego a,b = (a,b) y a,(b,c) = a,b,c	
Combinación de paréntesis y subíndices	$(ab)_x$	Siempre que tenga ab, en todo caso que tenga ab, etc. Será una expresión bien formada siempre que le añadamos un consecuente, como en $(ab)_x c$	Siempre que tenga ab tendré c.
Corchetes como nodos *And*	[a]	Será el caso cuando sean verdaderos todos los tipos de a permitidos en Alfa o se haya verificado que hay todo tipo de a.	

	[A]	Es cierto que están aquí y ahora todos los tipos de A	
	[¬A]	Están activos todos los tipos de ¬a permitidos en Alfa.	
Expresiones complejas	$(ab)_x(cd)$	Siempre que tenga un objeto ab tendré parte de los posibles objetos cd.	
	$\neg(ab)_x$	Es una expresión mal formada que debe sustituirse por $\neg(ab)$. Después del subíndice x siempre hay que escribir la consecuencia.	
	$\neg(ab)$	Es imposible el suceso ab. Equivale a ∄(ab)	
	$\neg[(ab)_x(cd)]$	Es imposible que siempre que tenga un objeto ab tenga parte de los posibles objetos cd.	
	$\neg(ab)_x(cd)=$ $[\neg(ab)]_x(cd)$	Para todo caso en el que sea imposible ab tendremos parte de los sucesos cd	
	$[a]_x b$	Siempre que tenga la totalidad de los tipos permitidos de *a* tendré *b*. Es una condición más exigente que $a_x b$	
Asociación esencial	pq	Es razonable esperar objetos teóricos definidos por las cualidades p y q	
Asociación accidental	p, q p, q ↔ %pq	Es cierto que se dan las cualidades p y q, aunque no necesariamente en un mismo objeto	
	pq, pr pq, pr → %pqr	Es razonable esperar sucesos definidos como p y q, y es razonable esperar objetos definidos por las cualidades p y r, aunque no tenemos razones para afirmar o negar que pq y pr sean perspectivas parciales de un mismo y único suceso.	
	Expresión del grado de certeza de una posibilidad		
	p?	Es posible suponer que habrá objetos definidos por la cualidad p dentro de Alfa, aunque dicha posibilidad no ha sido ni verificada ni falsada.	
	%P	Es probable que haya objetos definidos por la cualidad p dentro de Alfa. Requiere un antecedente al menos implícito verificado por un estímulo.	
	p	Es razonable esperar sucesos elementales de Alfa definidos por la cualidad p.	
Expresión de la activación del objeto en el sistema α			
	P	Existe un objeto cualquiera x tal que x está presente y es definido por la cualidad *a*. x es una porción del tejido espacio temporal de α determinado por coordenadas $e_y t_z$	
	$\bar{P}$	Existe un objeto x tal que x está ausente y es definido por la cualidad p Está ausente algún P	
	¬P	Es el caso un objeto x tal que x está presente y es definido por la cualidad ¬p Hay alguno que no pesa.	
	$\overline{\neg P}$	Es el caso un objeto x tal que x está ausente y es definido por la cualidad ¬p Falta alguno que no pesa	
	a.b?	Combinación formada por un carácter *a* confirmado y otro carácter *b* solo posible.	

5.18.3 Axiomas

AXIOMAS DEL SISTEMA. PRINCIPIOS INDEMOSTRABLES		
Regla		
Disyunción esencial: o hay algo o no hay nada.	α (∅⊻x)	
Principio de tercio excluso P.T.E.: Lo que es, es o no es	S→ a ∨ ¬a	P.T.E conjunto. Lo que hay
	s_n → a ⊻ ¬a	P.T.E. objeto. Lo que es
Definición de la nada	∅↔ (nx=0)	El número de ocurrencias de un nodo es cero
	¬∅↔nx ≥ 1	El número de ocurrencias de un nodo es igual o mayor que uno.
Si un suceso es imposible, cualquier suceso que lo tenga es imposible también. La parte es necesaria para el todo	-1. ∄(a) 2 ∄(ab) P.N.T.	Propagación de la falsedad y la no existencia en la red de los nodos *Or* más genéricos a los más concretos.
Si un suceso es verdadero, sus componentes son verdaderos.	$AB \rightarrow A, B$	Propagación de la verdad en la red de los nodos *Or* más concretos a los más genéricos.
Propiedad conmutativa o conversión	bac = cab = cba… a, b, c = b, c, a = c, a, b…	Conversión
Propiedad asociativa	a (b,c)→ ab,bc	
La presencia o la ausencia de un objeto determinado por cualidades del sistema α conlleva la existencia del nodo *Objeto*, pero no al revés.	P ∨ $\bar{P}$ → p	objeto
	WP ∨ $\bar{W}P$ → wp	conjunto
Razón suficiente. Basada en las leyes de propagación de la activación en la red.	-1 $a_x b$ -2 A 3 Ab Gen a de 1,2 4 AB RS∃, 3	
Razón suficiente. Basada en la propagación de la inhibición.	-1 $a_x b$ -2 $[\overline{A}]$ 3 $\overline{[A]}b$ Gen a de 1,2 4 $\overline{[A]}\ \bar{B}$ RS∃, 3	Si todos los alemanes beben cerverza y está ausente la totalidad de los alemanes, entonces está ausente alguno que bebe cerveza.
Evidencia: A∨$\bar{A}$→∃a→nx≥1	-1 A 2 a Evidencia. 1	Si esto es A, entonces existe la cualidad a en el sistema.
Si hay de todo hay algo. Ambiguación.	[A]→A_n →A →X→x	

5.18.4 Leyes de la inferencia

LEYES DE LA SÍNTESIS		
Generalización o síntesis particular	-1 $p_x q$ -2 pr 3 prq	Gen de p. 1,2
Síntesis universal	-1 $p_x a$ -2 $p_x b$ 3 $p_x ab$	Sín univ de p. 1, 2
Síntesis probable	-1 ab -2 ac 3 % abc	Sín. Parti parti de a 1, 2
LEYES DE LA EXCLUSIÓN		
Exclusión universal	-1 $p_x a$ -2 $q_x \neg a$ 3 $p_x \neg q_x$	Excl. univ 1, 2
Exclusión particular	-1 pa -2 $q_x \neg a$ 3 $p \neg q_x$	Excl. part. 1, 2
Exclusión determinada	-1 pa -2 $q \neg a$ 3 $p_1 \neg q_1$	Exclusión deter. 1, 2
Definición de la conjunción	-1 pq 2 $p_x \% q$	Def. conj. 1
Simplificación	-1 $p_x \% q \% r$ 2 $p_x \% qr$	Simp. 1
Conmutativa	-1 ab 2 ba	Conmutativa 1
Conmutativa de la exclusión: Si es imposible asociar p y q, entonces es imposible asociar q y p. Luego si ninguna p es q, entonces ninguna q es p.	-1 $(p) \neg (q)$ 2 (q) $\neg (p)$	Conm. Exclu. 1
Introducción de la implicación (I.I):	-1 $p_x a$? -2 $a_x q$? 3 $p_x q$? Sínt 1, 2 4 [$(p_x a)$($a_x q$)]x ($p_x q$)	II, 1 a 3
La parte es necesaria para el todo. Razón suficiente. Exclusión.	-1 $a_1 b_1$ -2 ¬ (b_1) 3 ¬ (a_1)	PNT, 1 y 2
Adición de lo imposible	-1 ¬(a) -2 ¬(b) 3 ¬ (ab)	Adición. 1, 2
Adición 1	-1 a -2 b 3 a, b	Adición 1, 2

Adición 2	-1 a -2 b 3 %ab	 Adición
Adición esencial (síntesis)	-1 $a_n b$ -2 $a_n c$ 3 $a_n bc$	 Síntesis a_n, 1, 2
Introducción del generalizador	-1 ¬ (ab) 2 $a_x \neg b$ 3 $b_x \neg a$	 I.G 1 I.G. 1 o bien Trans.2
Regla de separación en lo posible. Contenido.	-1 ab 2 a 3 b	 Contenido en 1 Contenido en 1
Si todo es imposible nada es posible	-1 ¬(a) -2 ¬(¬a) 3 ∅	 Todo imposible 1, 2

5.19 Primeros ejercicios más allá del silogismo

Como preámbulo al capítulo que dedicamos a los problemas de lógica resueltos con los diagramas de Marlo y las redes de expectativas, queremos presentar dos ejercicios publicados en (Aznar, 2016b) que fueron tomados del clásico *El arte de la Lógica* (García Trevijano, 1993), un libro con el que preparamos las oposiciones al cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria y que nos sirvió inicialmente para comprobar que podíamos resolver todos sus ejercicios con el diagrama de Marlo. Así nos convencimos de que podíamos proponer una nueva perspectiva en la didáctica de la lógica con potencial para afrontar lógica de relaciones, aunque la hemos dejado de lado en esta tesis. En el segundo ejercicio hemos propuesto como sujeto de los modelos proposicionales al propio símbolo omega siguiendo una vía que hemos evitado normalmente, pero que puede resultar interesante investigar.

SERES CON INTENCIONES	i	
ACCIONES O RELACIONES ENTRE LAS COSAS NO ESENCIALES	RECÍPROCAS	NO RECÍPROCAS
	v	‘v, v’
Agente que no padece: alguien hace algo a algo o a alguien	ivx ivi	$i'v$x $i'vi$
Paciente. Alguien o algo que recibe una acción.	ivx ivi	iv’ xv’
Una acción es recíproca si y solo si se da en ambas direcciones	$v \leftrightarrow ('v \wedge v')$	
En una acción no recíproca: si y solo si un agente realiza una acción v, entonces el otro la padece.		i_y’v i_z = i_zv’ i_y

TABLA 34. CONVENCIONES EMPLEADAS PARA EXPRESAR RELACIONES Y ACCIONES.

El símbolo de omega en mayúscula se debe interpretar como que hay algo en el sistema, mientras que en minúscula significa que todo es teoría. Así diferenciamos al publicar este ejercicio una disyunción esencial de posibilidades de una disyunción de hechos probables respaldados por un estímulo.

Es un delincuente quien vende una pistola que no está registrada. Todas las armas que posee Juan fueron compradas por él o en la tienda de Luis o en la de José. Así, si una de las armas de Juan es una pistola que no está registrada, entonces, si Juan no ha comprado nunca en la tienda de José, Luis es un delincuente.

$\boldsymbol{i_x}$: $cualquier\ ser\ con\ intenciones$; $\boldsymbol{i_1}$: $Juan$; $\boldsymbol{i_2}$: $Luis$; $\boldsymbol{i_3}$: $José$; $\boldsymbol{p}$: $pistola$; $\boldsymbol{r}$: $registrada$.

d: delincuente; $\boldsymbol{i_x v' x_x i_y}$: Alguien vende algo a alguien; $\boldsymbol{i_x' v x_x i_y}$: alguien compra algo a alguien; **a**: armas.

-1	$(i_x v'(p\neg r)_x\ \ i_y)_x(i_x d)$	**Premisa 1**	En todos los casos en los que cualquier individuo venda cualquier pistola no registrada a cualquier otro individuo, el primer individuo será un delincuente, aunque puede haber otros motivos al margen para que sea un delincuente.
-2	$\Omega\ \%(i_1 v'(ai_1)_x i_2)\%(i_1 v'(ai_1)_x i_3)$	**Premisa 2**	O Juan compró cualquier arma de Juan a Luis, o Juan compró cualquier arma de Juan a José.
3?	$(\mathrm{a}i_1)(p\neg r)$	**Suposición**	Es posible que una de las armas de Juan sea una pistola no registrada.
4??	$\neg(i_1 v'\ i_3)$	**Suposición**	Y es posible que nunca Juan comprara a José.
5??	$\Omega(i_1 v'(ai_1)_x i_2)$	**Eliminación posibilidad 2, 4 por absurdo**	Con lo cual tendríamos que Juan habría comprado cualquier arma de Juan a Luis.
6??	$\Omega(i_1 v'(\mathrm{a}i_1)(p\neg r) i_2)$	**Generalización de $(\boldsymbol{ai_1})_x$ de 5 a 3**	Y ocurriría entonces que esa posible arma de Juan que sería una pistola no registrada, habría sido comprada por Juan a Luis.
7??	$\Omega\ (i_2\ 'v(\mathrm{a}i_1)(p\neg r)\ i_1)$	**Conversión de 6**	O lo que es lo mismo, Luis habría vendido una de las armas de Juan, una pistola no registrada en concreto, a Juan.
8??	$\Omega(i_2\ 'v\ (p\neg r)\ i_1\ ))$	**Contenido en 7**	Es decir, que Luis habría vendido una pistola no registrada a Juan.
9??	$\Omega\ i_2 d$	**Generaliza-ción de 1 a 8**	y Luis sería un delincuente según la primera premisa.
10	$\omega_1(\mathrm{a}i_1(p\neg r)\neg(i_1 v'\ i_3))_x\ i_2 d$	**Introducción de la implicación de 3 * 4 a 9**	En conclusión, si una de las armas de Juan es una pistola no registrada y Juan no ha comprado nunca a José, entonces Luis es un delincuente. Pero podría ser un delincuente también por otros motivos.

ILUSTRACIÓN 203. EJERCICIO EN AZNAR, 2016B. ADAPTADO DE GARCÍA TREVIJANO, 1993.

El dilema del Calif Omar: O los libros de la Biblioteca de Alejandría contienen las enseñanzas del Corán o no las contienen. Si contienen sus enseñanzas son prescindibles, y si son prescindibles deben ser quemados. Si no contienen las enseñanzas del Corán son malos, y si son malos deben ser quemados. Luego los libros de la Biblioteca de Alejandría deben ser quemados.

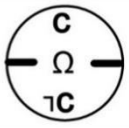
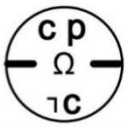
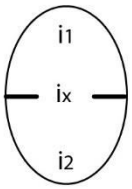
Resolución formal: (c,p,q,m)			Resolución gráfica:		
-1	$(c_n)\Omega(\neg c_n)$		-1		
-2	$c_x p_c$		-2		**Representación de 2 en 1**
-3	$p_x q_p$		3		**Representación de 3 en 2**
-4	$\neg c_x m_c$		4		**Representación de 4 en 3**
-5	$m_x q_m$		5		**Representación de 5 en 4**
6	$(c_n p_c)\Omega(\neg c_n)$	**Generalización de c de 2 a 1**	6		**Inducción de q en 5**
7	$(c_n p_c)\Omega(\neg c_n m_{\neg c})$	**Generalización de ¬c de 4 a 6**	7		**Razón suficiente de la existencia (R.S.∃) de q en 6**
8	$(c_n p_c q_c)\Omega(\neg c_n m_{\neg c})$	**Generalización de p de 3 a 7**	• p, q, m no se agotan en c o ¬c. Ω representa la activación de al menos un objeto en el contexto del problema. Gracias a la inducción de q tenemos razón suficiente para afirmar que q está activo y es el caso. ω representaría un contexto en el que todo objeto permanecería existencialmente inactivo. Es decir, presentaría una disyuntiva meramente esencial.		
9	$(c_n p_c q_c)\Omega(\neg c_n m_{\neg c} q_n)$	**Generalización de m de 3 a 8**			
10	$\Omega\, q_n$	**Inducción en 9**			
11	Q_n	**R.S.∃. en 10**			

ILUSTRACIÓN 204. EJERCICIO EN AZNAR, 2016B. ADAPTADO DE GARCÍA TREVIJANO, 1993.

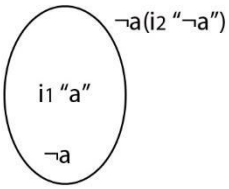
DIAGRAMA DE MARLO

Premisa 1



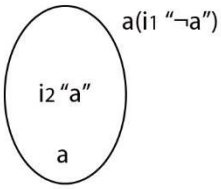
Cualquier individuo ix o bien miente (i1)
o bien dice la vedad (i2)

Premisa 2



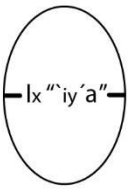
Si el mentiroso afirma A, entonces es el caso ¬A.
Aunque puede ser ¬A si el veraz dice ¬A.

Premisa 3



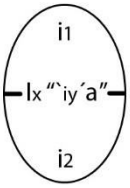
Si el individuo honesto afirma que A, entonces A
Puede ser A si el mentiroso afirma ¬A.

Premisa 4



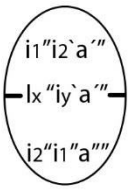
Un individuo afirma que el otro diría que A.

5



Y ese individuo o bien miente o bien dice la verdad
Generalización ix premisa 1 a 4

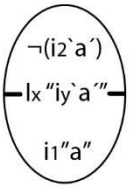
6



Luego o es el mentiroso afirmando que el veraz dice A
O es el veraz afirmando que el mentiroso dice A

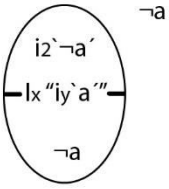
Sustitución ix por i1 y i2 5

7



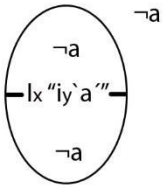
O bien es falso que el veraz afirme A (Gen. de 2 a 6)
O bien es cierto que el mentiroso afirma A (Gen. 3 a 6)

8



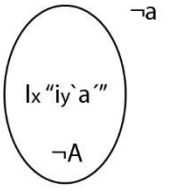
Por tanto o el veraz afirma ¬A (negación 7 superior)
O es cierto ¬A porque el mentiroso dice A.
(Gen. de 2 a 7 inferior)

9



Es decir, que o tengo A porque el veraz (i2) lo afirma
(Gen. de 3 a 8 superior), o tengo ¬A.

10



Luego dado que uno mantiene que el otro diría que A,
entonces es cierto ¬A

(Inducción ¬A en 9)

ILUSTRACIÓN 205. DILEMA DEL MENTIROSO. ADAPTADO DE LA PELÍCULA DE 1986 DENTRO DEL LABERINTO.

6 HISTORIA COMPARADA DE LOS DIAGRAMAS LÓGICOS

6.1 Precedentes de la filosofía de nuestros diagramas

Antes de realizar un recorrido temporal por la historia de los diagramas lógicos buscando antecedentes concretos de nuestra propuesta, nos gustaría señalar la influencia más importante que ha recibido nuestro trabajo desde el campo de la filosofía. Descartes nos convenció de la utilidad que podría tener el empleo de formas de representación sencillas, claras y distintas para poner al alcance de nuestros alumnos la comprensión de las cuestiones más abstractas. Kant, por su parte, nos convenció de la complejidad de tales cuestiones, las cuales debían formar parte del significado de nuestros diagramas si queríamos hacer de ellos modelos aproximados del razonamiento y no simples herramientas auxiliares con las que llevar la cuenta de las posibilidades eliminadas por las proposiciones durante los procesos de inferencia. Si hay algún mérito en nuestra calculadora lógica, alguna aportación, por mínima que sea, que sirva para aclarar la naturaleza de la razón en nuestros diagramas, es mérito sin duda de la filosofía.

6.1.1 René Descartes (1596-1650)

A pesar de que solo hemos encontrado referencias a diagramas cartesianos de carácter geométrico o matemático (Scott, 1976) y no a diagramas estrictamente lógicos en la bibliografía revisada, es obligado reconocer la influencia que ha tenido en la génesis del diagrama de Marlo la lectura que hicimos en nuestra juventud de las *Reglas para la dirección de la mente* y el impacto que tuvieron en nosotros los conceptos cartesianos de evidencia, certeza, intuición y razonamiento, tal y como los interpretamos entonces.

Recordemos, siguiendo en la definición de estos conceptos a Cirilo Flórez (2011), que la certeza o *certitude*, designa un "acto de la mente que nos permite conocer la verdad sin posibilidad de duda, con total evidencia" (p. cxiii), mientras que la evidencia o *évidence* es "la propiedad característica de los conocimientos claros y distintos obtenidos por un acto de intuición o de deducción simple. La evidencia lleva consigo la resistencia a toda duda" (p. cxiv). Por su parte, la intuición o *intuitus* designa una "«primera acción de nuestra mente» capaz de engendrar el concepto como distinto e indudable, con anterioridad a lo que luego será la deducción como segunda operación de la mente. Significa la visión directa e inmediata de una realidad y se trata de un acto simple de la mente en el que se conoce a las naturalezas simples y sus relaciones inmediatas" (p.cxv). Así se define en las *Reglas para la dirección del espíritu:*

> Entiendo por intuición, no el testimonio fluctuante de los sentidos, ni el juicio falaz de una imaginación incoherente, sino una concepción del puro y atento espíritu, tan fácil y distinta, que no quede en absoluto duda alguna respecto de aquello que entendemos, o, lo que es lo mismo: una concepción no dudosa de la mente pura y atenta que nace de la sola luz de la razón, y que, por ser más simple, es más cierta que la misma deducción, la cual, sin embargo, tampoco puede ser mal hecha por el hombre, según notamos más arriba. Así, cada cual puede intuir con el espíritu, que existe, que piensa, que el triángulo está determinado por tres líneas solamente; la esfera, por una sola superficie y otras cosas semejantes, que son mucho más numerosas de lo que creen muchos, porque desdeñan parar mientes en cosas tan fáciles. (Descartes, Trad. 2011c, p. 9)

Descartes se refiere sin ninguna duda a la intuición intelectual, a la captación sin el recurso de la imagen. Y como buen racionalista define también la deducción como un movimiento de la intuición intelectual que permite captar las relaciones que existen entre elementos distantes cuando están racionalmente conectados. Recordemos, siguiendo a De la Torre Gómez (2006), que Descartes, como posteriormente Leibniz, hereda el objetivo propuesto en la *Ars magna* de Raimundo Lulio de buscar un arte de razonar, un método de pensamiento universal fundado en la idea de una *mathesis universalis* que fundamente cualquier rama de la matemática. Dice Rabouin (2010) que según Descartes, al encontrar los términos simples y la regla para combinarlos se habrá reproducido la trama total del pensamiento divino, el cual, a su vez, se manifiesta, *per symbola*, a través de la gran máquina del universo. Igualmente afirma Descartes que la razón que opera en todos los hombres es una y la misma, por lo que solo puede haber un método universal que aplicado a cualquier clase de problemas lleve a conclusiones necesarias que todos los hombres puedan verificar. Ese método se reduce al estudio del orden según el cual al conocimiento de un término le sigue necesariamente el conocimiento de otro término, así como al estudio de la medida por la cual los objetos están relacionados entre sí gracias a la misma unidad. El método, que piensa Descartes que engendra la matemática universal y que está por encima de ella, es perfectamente reconocible en los pasos que tienen lugar operando con nuestros diagramas en la medida en que la deducción para él permite poner de manifiesto en una secuencia de términos sucesivamente intuidos las relaciones de dependencia o de necesidad que hay entre ellos, de manera que pueda darse la impresión de que todo el proceso es captado con un solo golpe de vista y casi sin el recurso de la memoria (de la Torre Gómez, 2006). En las *Reglas para la dirección del espíritu*, Regla III, leemos:

> Porque muchas cosas se conocen con tal que sean deducidas de principios verdaderos y conocidos por un movimiento continuo y no interrumpido del pensamiento que tiene una intuición clara de cada cosa. No de otro modo conocemos que el último eslabón de una cadena está en conexión con el primero, aunque no podamos contemplar con un mismo golpe de vista todos los eslabones intermedios, de los que depende aquella conexión, con tal que los hayamos recorrido sucesivamente y nos acordemos que, desde el primero hasta el último, cada uno está unido a su inmediato. (Descartes, Trad. 2011c, p. 9)

Sin embargo, y a pesar de ser la intuición de naturaleza intelectual y un producto exclusivo de la razón, en la Regla VII Descartes deja claro cómo la imaginación permite mejorar la capacidad de captar o intuir intelectualmente las conexiones entre los extremos de una relación.

> Si, por ejemplo, he llegado a conocer por medio de diversas operaciones, primero, qué relación hay entre las magnitudes A y B, después entre B y C, luego entre C y D, y, finalmente, entre D y E, no veo por eso la que hay entre A y E, y no puedo verla por las ya conocidas si no me acuerdo de todas. Por lo tanto, las recorreré varias veces con cieno movimiento continuo de la imaginación, que al mismo tiempo vea cada cosa y pase a otras, hasta que aprenda a pasar tan de prisa desde la primera hasta la última, que dejando apenas trabajo a la memoria, parezca que tengo la intuición de todo a la vez; pues de este modo, al mismo tiempo que se ayuda a la memoria, se corrige la lentitud del entendimiento y en cierta manera se aumenta su capacidad (...) Así como no podemos con una sola mirada distinguir todos los anillos de una cadena muy larga; pero no obstante, si hemos visto el enlace de cada uno con su inmediato, bastará esto para decir que también hemos visto cómo el último está en conexión con el primero. (Descartes, Trad. 2011c, p. 21)

Este concepto de ilación intelectual apoyada en un movimiento continuo de la imaginación, de larga tradición filosófica y que suscribimos plenamente, describe con exactitud, en nuestra opinión, lo esencial del proceso mental que tiene lugar durante la inferencia, y ello con independencia de que utilicemos el lenguaje formal de la lógica matemática o el recurso de los diagramas, pues no dejan ambos de ser captados por los sentidos externos.

$$a \rightarrow b;\ b \rightarrow c;\ c \rightarrow d;\ d \rightarrow e;\ \text{Luego: } a \rightarrow e$$

Y como afirma Gardner (1958):

> It reminds us that there is no sharp line separating symbolic notation from a diagram. Even algebraic notation is in some degree iconic, if only in the fact that single symbols stand for single terms, and even the most iconic diagram must make use of some conventions of a noniconic nature. (p.43)

Cada paso, cada puntada intelectual, tendrá que basarse en la comparación de dos objetos para ver si son idénticos o excluyentes-contradictorios. Las nociones comunes en las que descansa la evidencia de todo razonamiento no son otras para Descartes (Trad. 2011c) que aquellas que afirman que "las cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, y también que las cosas que no pueden ser referidas del mismo modo a una tercera, tienen también entre sí algo diverso" (p.40). Dice Rabouin (2010) que en la Regla XIV Descartes introduce la base de su cálculo geométrico al afirmar que solo mediante la comparación logramos un conocimiento exacto de la verdad en todo razonamiento y que la razón humana consiste casi enteramente en preparar esta operación, que es exactamente lo que pretendemos conseguir nosotros con nuestros diagramas, siguiendo una idea omnipresente en filosofía. Así, De Morgan (1847b) afirmaba con claridad que: «Perception of agreements and disagreements is the foundation of all assertion: the acquirement of such perception with respect to any two ideas by the comparison of both with a third, is the process of all inference» (p.41).

Descartes afirma en las *Reglas* que hay dos géneros de cosas que se comparan entre sí: las pluralidades y las magnitudes; y nos muestra dos géneros de figuras que ayudan a concebirlas. Así, la imagen de un triángulo generada con puntos y un diagrama de árbol que explica la genealogía de alguien son figuras hechas para representar la pluralidad o multiplicidad; en cambio las figuras que son continuas e indivisas, como un triángulo, un cuadrado, etc., "dan a conocer las magnitudes" (Descartes, Trad. 1983b, p. 243).

ILUSTRACIÓN 206. FIGURA PARA EXPRESAR PLURALIDAD. ADAPTADA DE DESCARTES, R. 1983

Según Descartes, es un hecho evidente por sí que conviene representar las figuras de modo que, poniéndose ante nuestros ojos, sus imágenes se formen más distinta o claramente en nuestra imaginación, y por ello propone en las *Reglas* representar la unidad de tres maneras, con un punto, una línea o un cuadrado (Descartes, Trad.1983b, p. 245).

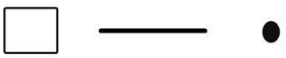


ILUSTRACIÓN 207. REPRESENTACIÓN DE LA UNIDAD. ADAPTADO DE DESCARTES Y SAMARANCH 1983

En la Regla XIV, Descartes afirma que nada más fácil o simple para exponer todas las diferencias que existen entre las relaciones que emplear figuras como superficies rectilíneas y rectangulares. En la Regla XV Descartes dice que "es útil trazar de ordinario estas figuras y presentarlas a los sentidos externos, a fin de que sea más fácil por este medio mantener atento nuestro pensamiento" (Descartes, Trad. 1983b, p. 245), lo cual no deja lugar a duda sobre la utilidad de emplear lo que nosotros llamamos dispositivos de memoria externos, útiles también para evitar el cansancio mental cuando razonamos. En *Principios de la Filosofía* leemos:

> La tercera causa de nuestros errores reside en la fatiga del espíritu cuando presta atención a todas las cosas acerca de las cuales juzgamos (...) encuentra la mayor dificultad en la consideración de las cosas puramente inteligibles que ni están presentes a los sentidos ni a la imaginación, bien a causa de su naturaleza, bien a causa de que esté unida al cuerpo o bien a causa de que, durante los primeros años de nuestra vida, nos hayamos acostumbrado en modo tal a sentir e imaginar que hayamos adquirido una mayor facilidad para pensar de tal forma. (Descartes, Trad. 1995, p. 67)

Descartes propone en *Las Reglas* el empleo de imágenes claras y distintas, continuas y discontinuas, para apoyar al entendimiento en la captación de la verdad y evitación del error, el cual no procede nunca de la razón misma, sino de su uso incorrecto. En la Regla II afirma:

> En efecto, todo error en que pueden caer los hombres (no digo las bestias) no proviene jamás de una mala inferencia, sino sólo de que se dan por supuestas ciertas experiencias poco comprendidas, o porque se establecen juicios a la ligera y sin fundamento. De lo cual se colige evidentemente por qué la aritmética y la geometría son mucho más ciertas que las demás disciplinas, a saber: porque sólo ellas versan acerca de un objeto tan puro y simple que no hace falta admitir absolutamente nada que la experiencia haya hecho incierto, sino que consisten totalmente en un conjunto de consecuencias que son deducidas por razonamiento. Son, pues, las más fáciles y claras de todas, y tienen un objeto como el que buscamos, puesto que en ellas, si no es por inadvertencia, parece que el hombre apenas pueda cometer error. (Descartes, Trad. 2011c, p.7)

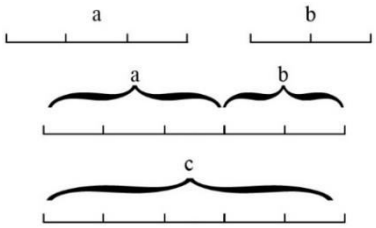


ILUSTRACIÓN 208. LA OPERACIÓN DE LA SUMA APOYADA EN IMÁGENES. ADAPTADA DE DESCARTES, 1983B, P. 258.

La razón misma como capacidad de comparar e identificar, de reconocer lo idéntico y lo distinto, de agrupar y separar, es una facultad universal que no es responsable en sí misma del error en el juicio, una idea en consonancia con lo afirmado por Aristóteles en *Acerca del Alma* I, 4, 408b15-25

> El intelecto -parece ser en su origen- una entidad independiente y que no está sujeta a corrupción. A lo sumo, cabría que se corrompiese a causa de su debilitamiento que acompaña a la vejez, pero no es así, sino que sucede como con los órganos sensoriales: y es que si un anciano pudiera disponer de un ojo apropiado vería, sin duda, igual que un joven. De manera que la vejez no consiste en el que el alma sufra desperfecto alguno, sino en que lo sufra el cuerpo en que se encuentra, y lo mismo ocurre con la embriaguez y las enfermedades. La intelección y la contemplación decaen al corromperse algún otro órgano, pero el intelecto mismo es imposible. (Aristóteles, Trad. 1983, p. 40)

O por Kant en el capítulo VII de su *Lógica* y que nosotros nos atrevemos a suscribir en cierta medida:

> Si no tuviéramos otra facultad que el entendimiento, no nos equivocaríamos nunca (...) La razón fundamental de todo error es, pues, única, y no debe buscarse más que en la influencia oculta de la sensibilidad sobre el entendimiento, o para expresarnos con más exactitud, sobra el juicio (Kant, Trad. s/f., , p.44)

Para Descartes, son el cansancio, la falta de atención, o lo que llamamos hoy limitaciones en la memoria de trabajo, entre otros motivos, los que propician una mala inferencia. Por eso es fundamental, como vemos en la Regla XII, dotar a la razón de los medios adecuados para que avance en su recorrido: Imágenes de figuras y fórmulas reducidas al mínimo necesario para apoyar al entendimiento en las sucesivas comparaciones-percepciones que le permiten vincular los extremos de una cadena en la que existe un orden lógico, geométrico o matemático, exactamente lo que buscamos nosotros en nuestros diagramas y la notación que desarrollamos.

> Mas para extraer una cosa de varias, lo que ordinariamente conviene hacer, convendrá excluir de las ideas de las cosas todo lo que no requiera la atención del momento, a fin de que lo restante pueda ser más fácilmente retenido en la memoria; y, del mismo modo, no hará falta presentar entonces las cosas mismas a los sentidos externos, sino más bien algunas figuras reducidas de las mismas que, con tal que sean suficientes para guardarnos de la falta de memoria, serán más útiles cuanto más pequeñas (Descartes, Trad. 2011c, p. 39)

También leemos en el *Discurso del Método*:

> Then, having carefully noted that in order to comprehend the proportions I should sometimes require to consider each one in particular, and sometimes merely keep them in mind, or take them in groups, I thought that, in order the better to consider them in detail, I should picture them in the form of lines, because I could find no method more simple nor more capable of being distinctly represented to my imagination and senses. (Descartes R., Trad. 1996, p.14)

Consideramos los diagramas de Marlo y el lenguaje formal con el que se representan, figuras de inspiración cartesiana que sirven de apoyo a las inferencias de nuestros alumnos. Han sido construidos, con más o menos acierto, con la intención de mostrar de forma clara y distinta las relaciones de identidad o exclusión que mantienen entre sí los términos de las proposiciones lógico-matemáticas. Los diagramas y la notación han sido sucesivamente simplificados tratando de representar cada vez más con menos. Y siempre bajo el precepto platónico-cartesiano de

que no es necesario, ni posible, enseñar propiamente a razonar, pues la razón por sí misma y de forma natural compara todo aquello que caiga bajo la consideración de un "espíritu atento". Otra cosa es que la cultura y los intereses condicionen a qué atendemos y otra todavía distinta es el uso adecuado de la razón. Por ello, los diagramas intentan servir de ayuda señalando qué objetos diferentes deben ser contemplados al mismo tiempo y en qué sentido y en qué orden se deben suceder las sucesivas focalizaciones de la atención para captar las relaciones lógicas en las que descansa la inferencia correcta. Los diagramas de Marlo y la notación que se propone no son más que una de las muchas formas en las que puede ser codificada la información para que sea posible comparar, organizar, simplificar, comunicar, etc. Recordemos que, como señala Roberts (1973), Peirce afirmaba, citando al gran matemático Gauss, que el álgebra es "una ciencia del ojo" [CP 1.34] y que decía también que el uso de las letras en el álgebra proporciona un tipo de diagrama que se puede experimentar y observar, pues aunque las fórmulas algebraicas no se parecen a los objetos o las relaciones que representan, no dejan de ser diagramas.

La traducción de Samaranch de los textos cartesianos que leímos en nuestra juventud, seguramente sin el rigor debido, nos convencieron a pesar de todo de que es posible generar un código en cualquier modalidad sensorial (visual-táctil-auditiva-etc.) al servicio del pensamiento y la comunicación, siempre que sea posible percibir diferencias o discontinuidades en dicha modalidad que podamos vincular o asociar a los objetos que se nos presentan de algún modo como distintos bajo la consideración de algún criterio. Y en este sentido, interpreto el concepto cartesiano de *mathesis universalis* que soporta la inferencia en Descartes, al menos tal y como es definido en Descartes et al. (1991), muy próximo al concepto de información en el que descansan las perspectivas actuales del razonamiento heterogéneo que ya han sido descritas en la introducción a los diagramas lógicos de este trabajo.

6.1.2 Immanuel Kant (1724-1804)

Venn (1881) caracterizó el período entre Lambert y Boole como un vacío en la historia de la lógica simbólica que se debía, tal vez, al efecto desastroso sobre el método lógico creado por la filosofía de Kant. Sin embargo, Heis (2012) mantiene que Kant facilitó que emergiera la lógica formal a finales del siglo XVIII gracias a que en él aparece por primera vez con firmeza la distinción entre la materia y la forma lógica, en un contexto en el que había sido dejado de lado el trabajo con el que Lambert y Ploucquet daban continuidad al trabajo exploratorio de Leibniz. Al margen de valoraciones históricas que escapan de nuestras posibilidades y objetivos y en relación al devenir de los diagramas, sabemos, siguiendo a Lemanski (2017), que en 1772 Immanuel Kant mencionó explícitamente las figuras de Euler y que él mismo utilizó numerosos diagramas en sus lecturas lógicas en Königsberg, siendo algunos de ellos diagramas de Euler (Lu-Adler, 2012). En todo caso, los diagramas de Kant no son meras imágenes particulares, sino esquemas que pretenden sintetizar una multiplicidad de intuiciones. Recordemos que, como se afirma en Heis (2012): «The generality of logic requires this kind of formality because Kant, as an essential part of his critique of dogmatic metaphysicians such as Leibniz and Wolf, distinguishes mere thinking from cognizing (or knowing) » (p.99). Y también nos dice Peláez (2014):

> En la sección sobre el esquematismo de los conceptos puros del entendimiento de la *CRP,* Kant parte del reconocimiento de que los esquemas son producto de la imaginación, pero enfatiza de inmediato que, dado que la imaginación tiene aquí la función de sintetizar una multiplicidad de intuiciones, su resultado no puede ser una intuición particular. Así, un esquema ha de ser distinguido cuidadosamente de una imagen, la cual en sentido estricto lo es siempre de un objeto particular. (p.158)

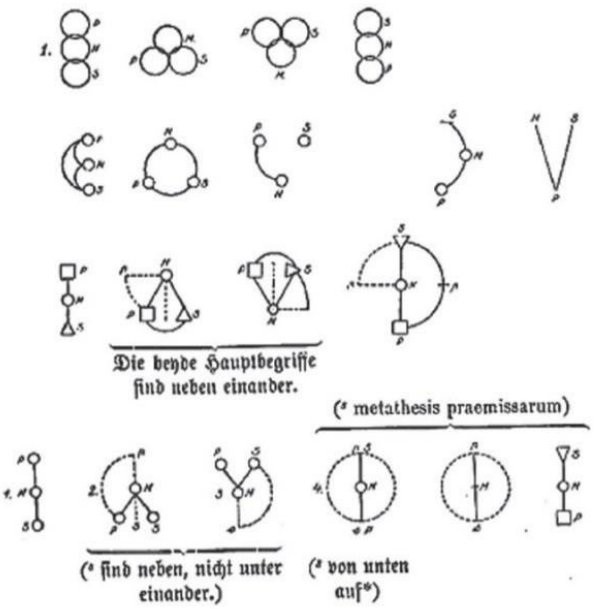


ILUSTRACIÓN 209. DIAGRAMAS DE KANT. TOMADOS DE LEMANSKI, 2017.

Según Heis (2012), para Kant, la lógica formal se limita a considerar las diferentes formas en que un concepto puede estar contenido dentro o debajo del otro. Así, en un juicio como *Todas las ballenas son mamíferos*, la palabra *Todas* y la cópula *son* no representan conceptos, sino que expresan la forma del juicio, la forma particular en que un pensador combina los conceptos de *ballena* y *mamífero*. Por otra parte, según Lu-Adler (2012), aunque la lógica formal de Kant (lógica general pura) es completamente intensional e implica una noción de extensión lógica únicamente en términos de conceptos que están subordinados a un concepto dado, es importante atribuir a Kant una noción objetual de extensión lógica según la cual la extensión de un concepto es la multitud de objetos que caen bajo dicho concepto. De acuerdo con esto, podemos interpretar algunos de los diagramas que Kant emplea en sus lecturas lógicas como un modo de señalar bajo qué conceptos cae un objeto.

Kant en su *Lógica* (Trad. s./f.) expresa las relaciones del sujeto y el predicado representando el sujeto como un círculo y el predicado como un cuadrado, una forma de proceder que Venn (1881) comparó con la de De Morgan: «Kant (Logik, I. 21) and De Morgan (Formal Logic, p. 9) have introduced or suggested both a square and a circle into the same diagram, one standing for subject and the other for predicate; with the view of distinguishing between these». (p.428)

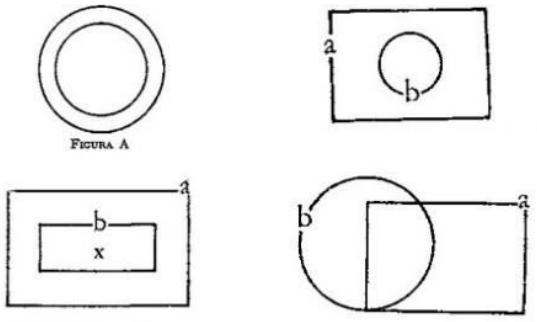


ILUSTRACIÓN 210. DIAGRAMAS DE LA LÓGICA DE KANT. TOMADOS DE FERRATER MORA 1965, P443.

Si observamos la ilustración 210, veremos que la figura superior derecha representa un juicio particular porque *algo de lo que pertenece a A es B* y *algo de la misma A, es no B*; mientras que en la figura inferior derecha observamos, en palabras de Kant, *Lógica* II, 3-4, que «todo *A* por lo menos, puede estar contenido en *B* si es menor que *B*, pero no si es mayor», por lo que tal figura solo puede ser particular fortuitamente.

En cualquier caso, y al margen del hecho de que Kant empleó diagramas, nos interesa destacar que muchos de sus postulados sobre lógica sostienen aspectos importantes del diagrama de Marlo y las redes de expectativas. Baste con ejemplificar este hecho señalando algunos de los que consideramos más relevantes.

En primer lugar compartimos la idea de que el punto de partida de la lógica, y en consecuencia nuestra representación diagramática, sólo se ocupa de los aspectos formales del pensamiento, que consisten en reglas absolutamente necesarias, universales e independientes de toda experiencia. En la introducción a la *Lógica* afirma Kant: «Esta ciencia de las leyes necesarias del entendimiento y de la razón en general, o lo que es lo mismo, de la simple forma del pensamiento en general, es lo que nosotros llamamos lógica» (Kant, Trad. s./f., p. 5).

En segundo lugar, compartimos la diferencia tradicionalmente admitida entre materia, como intuición del objeto, y forma, como concepto o noción. Compartimos la clásica diferencia entre sensibilidad (receptores) y entendimiento (generador de patrones), que es clave para entender las redes de expectativas Marlo como un sistema de nodos activado por los estímulos captados por los receptores en el que, como afirma Kant en *Lógica* V (Trad. s./f.): «la sensibilidad no da más que intuiciones, mientras que por el contrario, el entendimiento no da más que nociones» (p.28). Y en el mismo capítulo afirma:

> En todo conocimiento es necesario distinguir la materia, es decir, el objeto, y la forma, esto es, la manera con que nosotros conocemos el objeto. -Un salvaje, por ejemplo, ve de lejos una casa, de la cual desconoce el uso: este objeto, en verdad, se le representa como podría serlo para otro que lo conociese determinadamente, como una habitación propia para el uso del hombre. Más en cuanto a la forma, este conocimiento del mismo objeto es diferente en cada uno de ellos; en el uno es una simple intuición, en el otro es intuición y noción al mismo tiempo. (p.25)

Pensamos que está incluida en la distinción kantiana entre intuición y noción la diferencia que nosotros establecemos entre objetos fácticos que pueden estar presentes y ausentes y objetos teóricos, sin ser exactamente lo mismo que nosotros interpretamos en la distinción entre individuos y clases de la lógica matemática. En *Lógica* I, 1 dice Kant:

> Todo conocimiento, es decir, toda representación referida conscientemente a un objeto, es o *intuición* o *noción*. La intuición es una representación *singular (representatio singularis)* la noción es una representación *general (representatio per notas communes),* o *refleja (representatio discursiva).* Conocer por nociones es *pensar (cognitio discursiva). Observaciones*. l.ª La noción es opuesta a la intuición porque aquella es una representación general o de lo que tienen de común muchos objetos, por consiguiente una idea susceptible de ser *contenida en muchas cosas diferentes*. (Kant, Trad. s./f., p.75)

En tercer lugar, compartimos la división de los juicios en problemáticos, asertóricos y apodícticos que se expone en la *Crítica de la Razón Pura,* A 74, B 99-100, porque es esencial para la representación y el cálculo lógico en los diagramas y redes de expectativas Marlo distinguir entre proposiciones meramente posibles, hechos y teorías.

> La modalidad de los juicios constituye una especialísima función de los mismos y su carácter distintivo consiste en no aportar nada al contenido del juicio (ya que, fuera de la cantidad, la cualidad y la relación, no hay nada que constituya el contenido de un juicio) y en afectar únicamente al valor de la cópula en relación con el pensar en general. Los juicios problemáticos son aquellos en que se toma el afirmar o el negar como algo meramente posible (opcional). Los asertóricos se llaman así por considerar la afirmación o la negación como algo real (verdadero). Los apodícticos son aquellos que se concibe como algo necesario, cuando es considerado como real (verdadero). (Como si el pensar fuese en el juicio problemático una función del entendimiento; del juicio en el asertórico y de la razón en el apodíctico). (Kant, Trad.1993, p. 110)

Además, asumimos en el diagrama de Marlo la diferencia que establece Kant, como señala Hernández (2004), entre pensar cualquier cosa posible que no contenga contradicción (lo cual puede hacerse en las redes asociando hipotéticamente nodos posibles o relaciones entre nodos que son inciertas) y conocer (que son los juicios en los que los nodos de la red asumen valores mayores o menores que cero por alguna evidencia que energiza la red).

> El conocimiento de un objeto implica poder demostrar su posibilidad, sea porque la experiencia testimonie su realidad, sea a priori, mediante la razón. Puedo, en cambio, pensar lo que quiera, siempre que no me contradiga, es decir, siempre que mi concepto sea un pensamiento posible, aunque no pueda responder de si, en el conjunto de todas las posibilidades, le corresponde o no un objeto. (Kant, Trad. 1993, p. 25)

La diferencia entre pensar y conocer nos lleva al hecho de que nosotros también aplicamos durante el cálculo en las redes y en el diagrama de Marlo el principio de razón suficiente de un modo que percibimos idéntico al

enunciado por Kant en su *Lógica* VII, (Trad. s./f.): «El principio de la razón suficiente, *principium rationis suffientis*, que sirve de fundamento a la realidad lógica de un conocimiento, principio que establece que el conocimiento es fundado, como materia de los juicios asertóricos» (p.44). Así, para pasar de afirmar *ab?* a afirmar *AB* en las redes de expectativas debe haber un motivo ineludible, una energización de la posibilidad expresada en los nodos que la convierte en presente o ausente de forma manifiesta. Para Kant la certeza empírica solo es una certeza asertórica, la cual se corresponde para nosotros con la verdad como captación inmediata de la presencia o ausencia señaladas en la red con los valores de activación uno y menos uno, azul y rojo. En *Lógica*, V (Trad. s./f.) afirma Kant:

> Sin duda que queda siempre entre la perfección estética y la perfección lógica de nuestro conocimiento, una especie de oposición que no puede disiparse completamente. El entendimiento quiere ser instruido, la sensibilidad excitada, animada; el primero aspira al conocimiento profundo; el segundo a la facilidad de concepción. (p.29)

No obstante, qué sea una razón suficiente y necesaria para dar el paso del objeto posible *ab?* al objeto con validez objetiva *AB* es una cuestión difícil para la que, en ningún caso, existe una respuesta definitiva. Nosotros hemos afirmado que tomaremos por real cualquier objeto que tenga influencia en las decisiones de una acción en curso (Aznar, 2017b; 2018g), o bien cualquier secuencia de caracteres cuyos valores de activación tengan capacidad para influir en los valores del resto del sistema. Consideramos esta idea compatible con la propuesta de Kant. En todo caso hay que recordar que "real para mí" no es lo mismo que "real para el grupo" o "real para la comunidad", por lo que nuestras decisiones pueden no estar condicionadas por las mismas "realidades" subjetivas.

Los diagramas y redes de expectativas Marlo también formalizan la ausencia de un objeto distinguiendo la negación de su presencia ($\bar{A}$) de la negación de una cualidad ($\neg a$). Así, puede ser real para mí como profesor, cuando paso lista, que está ausente el individuo que no es moreno $\overline{\neg M}$, lo cual me mueve a poner una falta en su casillero. Es decir, que la ausencia de un objeto sirve como antecedente en un esquema de acción del tipo, *si y solo si cualquier alumno (i) está ausente, pon una falta en su casillero* (f): $\bar{\imath}_x f_x$. Y es posible que perciba la ausencia tanto como la presencia del objeto gracias a la imaginación. Recordemos que la representación en la filosofía moderna no tiene porqué referirse necesariamente a lo que está en acto. Así, afirma Kant en la *Crítica de la Razón Pura* (Trad.,1993) que: «La imaginación es la facultad de representar un objeto en la intuición incluso cuando éste no se halla presente» (p.166). Y Lefebvre (1983) afirma que el concepto de representación, ampliamente extendido en el pensamiento filosófico desde Kant, no puede definirse claramente para la filosofía moderna, porque la representación no es ni la verdad ni el error, ni la presencia ni la ausencia, ni la observación ni la producción, sino algo intermedio. De este modo, podemos afirmar nosotros también que la presencia de un obstáculo no es más real para la acción que la ausencia de un recurso.

También es importante señalar que la distinción que hacemos en el diagrama de Marlo entre posible y probable, perfectamente comprensible para el alumnado, no es en absoluto original. Así, si alguien ha tenido noticia por una fuente A de que en mi familia hay jugadores de criquet (*c*) y ha tenido noticia por una fuente B de que en mi familia hay albinos (*a*), para él es probable y más que posible que en mi familia haya albinos que juegan al criquet (*%ac*). De hecho, cuanto menor fuera el número de mis familiares, más peso le daríamos a la certeza de tal conjunción. Sin embargo, para alguien que desconozca ambos datos, tal conjunción sería meramente posible (*ac?*) o simplemente verosímil. A esta diferencia entre posible y probable se refiere Kant en su *Lógica* X:

> La teoría de la certeza de nuestro conocimiento comprende también la del conocimiento de lo probable, que es como una aproximación de la certeza. Debemos entender por probabilidad una creencia fundada sobre razones que distan más o menos de las que producen la certeza; pero que siempre se hallan más cerca de ella en todo caso que las razones que sirven de apoyo a la proposición contraria. Esta explicación hace resaltar la diferencia que existe entre la probabilidad (*probabilitas*), y la verosimilitud (*verosimilitudo*): en la probabilidad, las razones de preferencia tienen un valor objetivo; en la verosimilitud, por el contrario no tiene más que un valor subjetivo. Es necesario, pues, tener en la probabilidad una unidad de medida que sirve para apreciarla. Esta unidad de medida es la certeza (p.69)

Kant señala que no puede convertirse un juicio hipotético en un juicio categórico, del mismo modo que nosotros no pasamos de la afirmación $a_x b$ a la afirmación AB; Pero además, cuando trabajamos con lo que llamamos proposiciones complejas que vinculan dos diagramas, tenemos en cuenta la especificidad de los juicios disyuntivos señalada por Kant y buena parte de la tradición lógica.

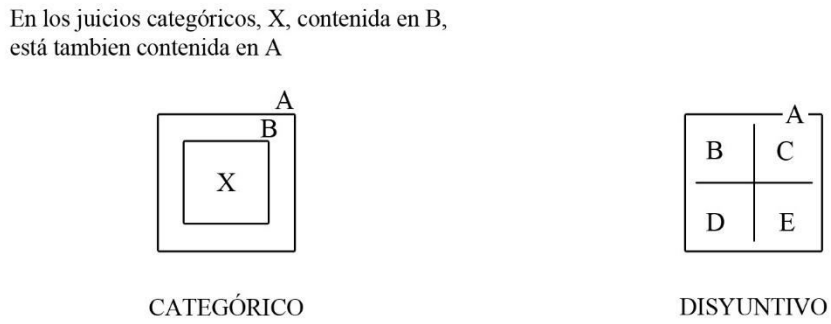


ILUSTRACIÓN 211. DIAGRAMAS DE JUICIOS CATEGÓRICOS Y DISYUNTIVOS EN KANT, *LÓGICA* II, TRAD. S./F.

Tal vez los diagramas de Kant no merecen pasar a la historia, porque como señaló despectivamente Venn (1881) todo lo que hace para representar gráficamente un juicio disyuntivo es «tomar un cuadrado y dividirlo en cuatro cuadrados más pequeños que conforman entre ellos toda la esfera del concepto dividido» (p.435). Sin embargo, la falta de imaginación que tuvo para mostrar de un modo simple la profundidad de su pensamiento no debería impedirnos reconocer el valor de sus ideas en el campo de la lógica, del mismo modo que la sencillez de los diagramas de Venn no debería persuadirnos nunca de la solidez de los fundamentos que establece la lógica matemática acerca de la naturaleza de la proposición.

En cualquier caso, ni el diagrama de Marlo ni las redes de expectativas hubieran sido posibles sin haber conocido, lo entendiéramos correctamente o no, el pensamiento del de Königsberg siendo estudiantes de filosofía.

6.2 Posibles diagramas lineales de Aristóteles

Como ya sabemos, los problemas que definen el campo de la Lógica formal son formulados claramente por primera vez en los *Analíticos Primeros* (Bochenski & Bravo, 1985). Allí expone Aristóteles los silogismos no modales que suponen el culmen de su lógica (Bobzien, 2016). Y aunque tal vez sea imposible demostrar que Aristóteles empleó diagramas lineales para representar, resolver silogismos y demostrar sus conclusiones, es muy difícil creer que no lo hiciera. Aristóteles afirma en *Acerca del Alma* III, 8, 432a5-10 que "cuando se contempla intelectualmente, se contempla a la vez y necesariamente alguna imagen" (Trad. 1983, p.107), sabe que los geómetras basan sus conclusiones en lo que representan las imágenes particulares de la línea (Heath, 1921), la misma línea sobre la que ha visto representar el ser y no ser de las cosas mismas.

> Toma, pues, una línea cortada en dos partes desiguales, y cada una de estas, que representa el mundo visible y el mundo inteligible, cortada a su vez en otras dos (...) y tendrás de una lado la parta clara y del otro la parte oscura de cada uno de ellos. (Platón, Trad. 1997, p. 297)

Como señala Martí Sánchez (2017) el afán por saber y la cercanía intelectual y biográfica con Platón, llevaron a Aristóteles a conocer de cerca el trabajo de los matemáticos de su época, sobre todo de los geómetras, siendo así que su terminología lógica, sobre todo en los *Analíticos*, se inspira en la pureza conceptual de la terminología matemática y que muchas de las definiciones de términos técnicos en geometría tienen el mismo uso en la obra de Aristóteles.

> Sabes también que se valen para esto de figuras visibles, a las que se refieren sus razonamientos, aunque no piensen en ellas, sino en otras figuras representadas por aquellas (...) los geómetras las emplean como otras tantas imágenes, que les sirven para conocer las verdaderas figuras, que sólo pueden conocer por el pensamiento. (Platón, Trad. 1997, p. 298)

Siguiendo a Yagüe (1998) podemos decir que el desarrollo de la aritmética y la geometría pitagórica, que sustituían la ciencia experimental conocida en Egipto y Mesopotamia por una ciencia deductiva, serían determinantes no solo en la concepción platónica de las Ideas, sino en el desarrollo de la estructura de las

demostraciones formales incluida en las leyes de la lógica aristotélica y que emplearán las ciencias deductivas ya desde siglo VI a.C. Así ocurre con la geometría, que según Aristóteles debía satisfacer los tres principios básicos del silogismo: identidad, tercio excluido y no contradicción (Recalde & Murillo, 2016). Einarson (1936) afirma: "Besides the similarity of method, there is a striking resemblance between the language of the Prior Analytics and that of the Greek mathematicians" (p.171). Sabemos que Aristóteles analiza en *Analíticos Posteriores* los primeros principios de la geometría tal como él los concibió, existiendo paralelismo entre las explicaciones de Aristóteles, de Euclides y el movimiento general del pensamiento en la dialéctica platónica (Lee, H. 1935). También Heath (1921) afirma que Aristóteles no podía concebir nada más hermoso que los objetos de las matemáticas y cita como ejemplo el siguiente fragmento de *Analíticos Primeros* I, 24, 41b15*:*

> Llévense los < lados adyacentes a> A y B al centro < de una circunferencia>. Así, pues, si se acepta que el ángulo AC es igual al ángulo DD, sin estimar que, en general, los ángulos de los semicírculos sean iguales, y aún que C es igual a D sin aceptar también que lo sean todos los del mismo segmento <de circunferencia> y además se acepta que, al sustraer ángulos iguales de los ángulos completos también iguales, los que quedan, E y Z, son iguales, se postulará lo del principio, a no ser que se acepte que, al sustraer cosas iguales de cosas iguales, quedarán cosas iguales (Aristóteles, Trad. 1995, pp. 175, 176)

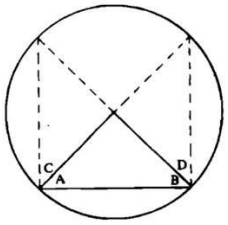


ILUSTRACIÓN 212. ANALÍTICOS PRIMEROS. TOMADO DE ARISTÓTELES, TRAD.1995.

Aristóteles tenía talento para las matemáticas y contribuyó a la teoría filosófica de su naturaleza (Aristóteles & Ross, 1957); reflexionó sobre el continuo y el infinito, trabajó el problema de las líneas indivisibles y sus obras son consideradas por algunos autores como influyentes en la historia de las matemáticas, particularmente en el desarrollo de los *Elementos* de Euclides, pudiendo incluso mencionarse proposiciones geométricas en la *Física* de Aristóteles que no están presentes en Euclides. Así lo encontramos en Heath (1921), que afirma: "He gives the clearest distinctions between axioms (which are common to all sciences), definitions, hypotheses and postulates" (p.335).

También Einarson (1936b, 1936a) señala que algunos de los términos que usa Aristóteles en su lógica en general y en las premisas del silogismo en particular tienen origen matemático. Así, por ejemplo, menciona que se puede encontrar el mismo término para referirse a una conclusión en Euclides y en algunos textos de Aristóteles; que la palabra que se usa para la conversión de premisas se deriva probablemente de la conversión de teoremas matemáticos; y que el hecho de seleccionar una parte de la extensión de un término y su designación mediante una letra era bastante paralelo al procedimiento matemático: "There are several analogies between the syllogism and proportion that serve to explain Aristotle's choice of terms. In the first place both an argument and a proportion are spoken of as a movement through several terms" (Einarson, 1936b, p.151).

> The terminology of proportion, found in both Prior and Posterior Analytics, and especially appropriate to the mood barbara, suggests that Aristotle hit upon this mood-the one most prominent in scientific demonstration-first and, after having developed a terminology suitable to that mood, applied it to the other figures and moods when they were discovered. (Einarson, 1936b, p. 163)

Siendo clara las relaciones y paralelismos en el desarrollo de la geometría y de la lógica aristotélica, parece muy improbable que no se utilizaran esquemas o diagramas lógicos en las demostraciones de ambas ciencias deductivas, y más cuando, como señala Cedres (2009), en Aristóteles las construcciones eran esenciales para el conocimiento geométrico, porque todo conocer es en acto, lo cual implica la actualización de una serie de propiedades que no existen más que potencialmente en una situación dada. También en este sentido van los comentarios de Ross, que a su vez alude a los comentarios de Alejandro de Afrodisia (fi. c. A.D. 205), cuando explica cómo Aristóteles demuestra que P y R deben darse unidas en una conclusión:

> He must, I think, mean to be justifying the conclusion by appealing to something more intuitive than abstract proof-to be calling for an act of imagination in which we conjure up a particular which is both R and *P* and can see by imagination rather than by reasoning the possession of the attribute *P* by one *R.* (Aristóteles & Ross, 1957, p. 32)

Según Coumet y De Mora (2002) la figura del árbol, uno de los primeros diagramas lógicos que se encuentra a menudo en la lógica medieval y renacentista en el llamado Árbol de Porfirio, era ya conocida por Aristóteles como una forma práctica de visualizar subdivisiones sucesivas de materia y forma, o géneros y especies. Insisten Coumet y De Mora (2002) en que Julius Pacius (1550-1635), comentador de la obra de Aristóteles, estimaba que Aristóteles se había servido de «diagramas» perdidos después por culpa de los copistas. También recientemente Crubellier (2017) ha indicado que podemos pensar que Aristóteles ilustraba sus explicaciones lógicas de los *Analíticos* con diagramas a partir de ciertas expresiones características que utiliza con frecuencia en los textos. Sin embargo, no estamos de acuerdo en la forma de representación que este autor propone como una línea vertical en la que representa *A pertenece a B* situando el predicado arriba y el sujeto abajo. En lugar de una línea vertical, nosotros pensamos que es más plausible que Aristóteles recurriera a diagramas lineales horizontales similares a los usados por Kekersman y Alsted, Leibniz, Gergonne, Maass, De Morgan o Hamilton entre otros. Es obvio que el uso de diagramas lineales, ya fueran trazados horizontal o verticalmente, podría relacionarse, como nos dice Vlasits (2017), con el método de la división platónica, que se ocupaba de las esencias de las clases naturales mediante la reducción progresiva a un género, y que sabemos que influyó en la teoría lógica de Aristóteles en varios aspectos cruciales aunque el silogismo será, a diferencia de la división, "un método de prueba" (Pasqualoni, 2016, p. 192).

Además, el interés de Aristóteles por la naturaleza de la línea debería estar fuera de toda duda, sobre todo cuando a raíz del descubrimiento de los inconmensurables los conceptos de punto y línea entraron en crisis y se originaron especulaciones filosóficas como las paradojas de Zenón: "¿Existen acaso las líneas indivisibles y hay en todas las magnitudes, en general, algo sin partes, como afirman algunos?" (Aristóteles, Euclides, & Ortiz, 2000, p. 33). El propio Aristóteles reflexiona sobre la naturaleza de la línea. En *Tópicos* VI, 141b20 leemos:

> Son definiciones de este tipo la del punto, la de la línea y la del plano: pues todas ellas muestran lo anterior mediante lo posterior: en efecto, aquél dicen que es el límite de la línea, ésta, el del plano, y éste, el del sólido. (Aristóteles, Trad. p. 231)

La línea se está empleando en las demostraciones de la geometría, ha sido trazada en el suelo por su maestro apoyando algunas de sus demostraciones más famosas y Aristóteles reflexiona sobre ella. Además, describe las figuras del silogismo en *Analíticos Primeros* como si trazara diagramas lineales y prueba de ello es la explicación que ofrece de la demostración perfecta, Barbara. Suponiendo el uso de diagramas lineales se puede entender, de forma sencilla y más que plausible, porqué el extremo lejano se llama término mayor, por qué el extremo próximo que sirve de sujeto a la conclusión se llama menor y por qué el término medio se llama medio. Solo tenemos que observar cómo imagina Einarson (1936b) los diagramas usados por Aristóteles para captar la exacta correspondencia entre lo que se dice y lo que parece que se señala.

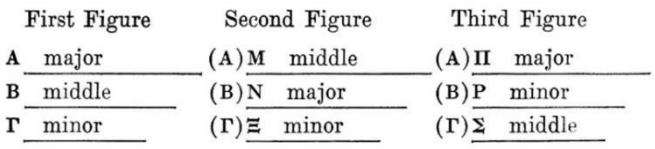


ILUSTRACIÓN 213. DIAGRAMAS GRIEGOS, SEGÚN B. EINARSON, 1936B, P. 168.

Antes de conocer el trabajo de Einarson, pero conociendo el uso lógico de los diagramas lineales, nosotros mismos habíamos llegado exactamente a la misma representación de las tres figuras del silogismo. Pero temíamos estar mal aconsejados por la interpretación de las traducciones del griego al español y el inglés. Sin embargo, ese problema no lo tiene Einarson, que trabaja directamente con los textos griegos y da argumentos filológicos para sus tesis que, debido a nuestro desconocimiento de tal lengua, no intentaremos defender en este trabajo. En todo caso, Einarson (1936b) mantiene que es posible inferir el uso de diagramas en Aristóteles a partir del uso de las letras del alfabeto para los términos, pues este uso se hacía en la doctrina de la proporción, que se ilustraba mediante líneas.

> The arrangement in a continuous line is probably very old, as it agrees with Plato's use of the divided line in illustration of a proportion, and is no doubt the source of the later diagrams of proportion and of the first syllogistic figure where the horizontal lines have degenerated into points... It would thus appear that Aristotle's diagram of proportion consisted of

parallel lines the only other diagram, that with a continuous line, not being admissible here-either horizontal or vertical. (Einarson, 1936b, p. 167)

Ross (Aristóteles & Ross, 1957) se refiere a las tesis de Einarson y ofrece una posible alternativa a la representación diagramática del silogismo aristotélico.

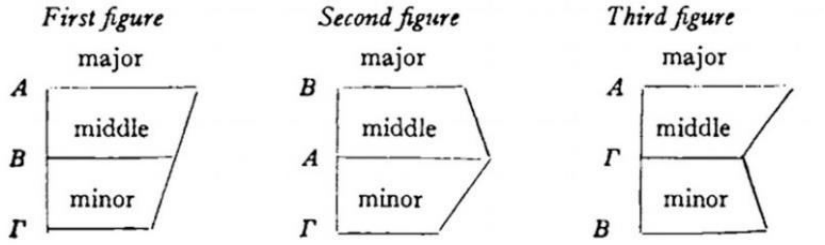


ILUSTRACIÓN 214. POSIBLES DIAGRAMAS DE ARISTÓTELES. EN ARISTÓTELES Y ROSS, 1957, P. 302.

A nosotros nos convence más la propuesta de Einarson que la de Ross. Si Aristóteles empleaba diagramas lineales, sus explicaciones estarían condicionadas por la forma en la que el razonamiento como ilación se muestra en la representación, del mismo modo que por las convenciones en la interpretación del hecho de que la línea de arriba (lejana) se predica de la de abajo (próxima). Y si es así, sus conversiones de las premisas no tendrían otro objeto que el de adecuarse a las convenciones gráficas.

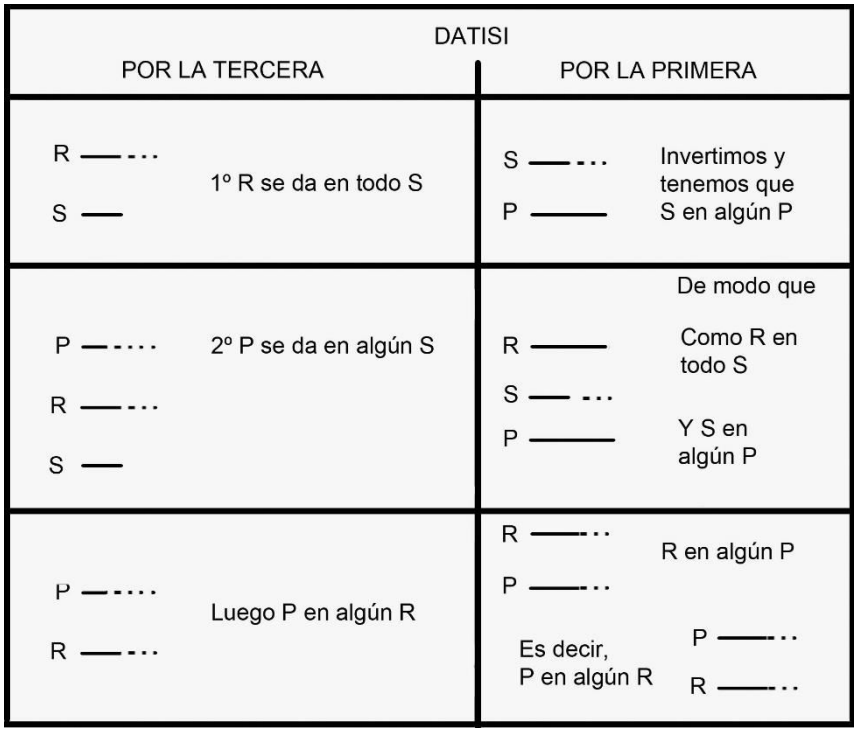


ILUSTRACIÓN 215. DATISI DE LA TERCERA A DARII DE LA PRIMERA FIGURA EN DIAGRAMAS LINEALES.

Como vimos al explicar nuestras propias formas de representación, la estructura profunda o *Lekta* de la primera figura del silogismo aristotélico se corresponde con la síntesis parcial en el diagrama de Marlo, la de la segunda figura con la exclusión y la de la tercera con nuestra síntesis universal. Y aunque es obvio que el uso de líneas o círculos condiciona el procedimiento gráfico es posible percibir que de un modo u otro se buscan síntesis necesarias o imposibles.

La siguiente ilustración muestra los diagramas lineales que imaginamos pudo haber empleado Aristóteles. Y aunque es posible suponer alternativas, nosotros pensamos que el uso de línea discontinua facilita la representación modal de las conjunciones que podrían darse o no darse, siendo la forma más económica de mostrar cuando un silogismo es inconcluyente sin necesidad de construir una a una todas las posibles soluciones compatibles con las premisas.

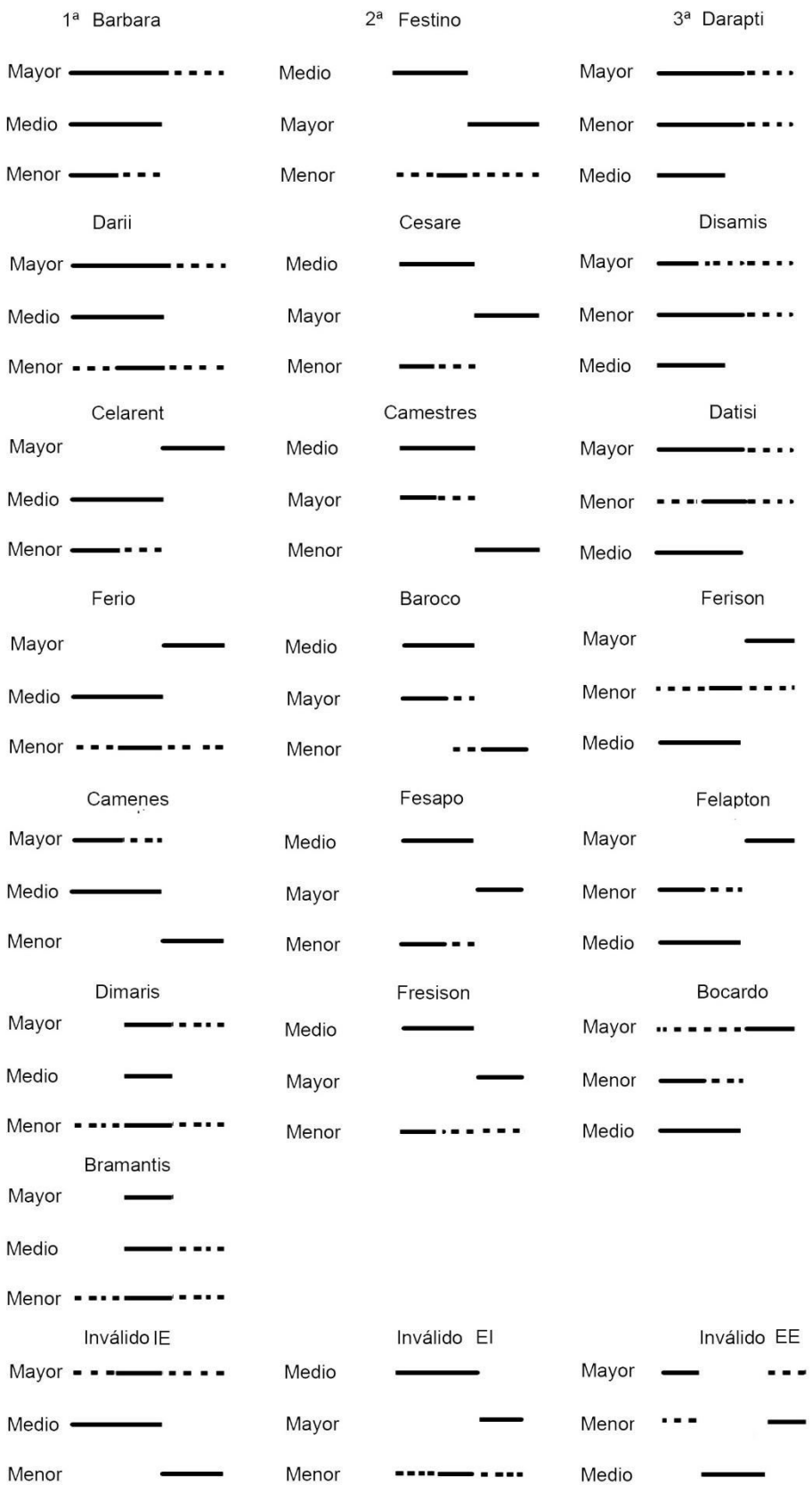


ILUSTRACIÓN 216. LAS TRES FIGURAS DEL SILOGISMO ARISTOTÉLICO EN DIAGRAMAS LINEALES.

6.3 Los primeros diagramas no analíticos

El autor más antiguo al margen de toda controversia en el uso de los diagramas lógicos fue Juan Filopón, (490-570) filósofo, científico y teólogo cristiano conocido como Juan el Gramático o Juan de Alejandría, un pensador original que rompió con la tradición aristotélica-neoplatónica que inicialmente le sirvió como fuente y raíz de sus preocupaciones intelectuales, llegando incluso a iniciar y anticipar la eventual desaparición del aristotelismo (Dales, 1990; Wildberg, 2018). Nos dicen Bochenski y Bravo (1985) que Filopón empleaba diagramas para representar las tres figuras del silogismo. Por su parte, Hamilton (1860) afirma que Filopón (Philoponus & Trincavelli, 1536), mantenía que en la primera figura el término medio se sitúa en el mismo nivel que los extremos, mientras que en la segunda está arriba y en la tercera debajo de ellos

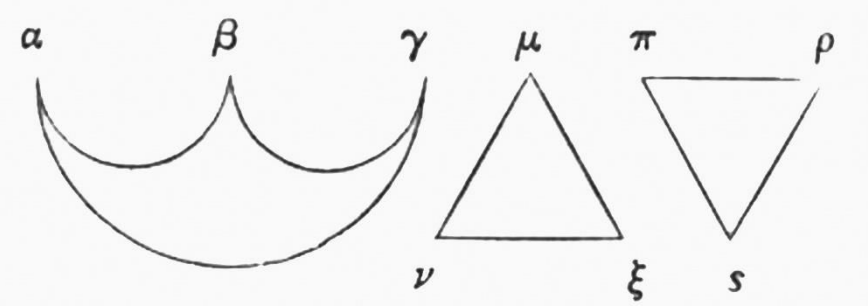


ILUSTRACIÓN 217. PHILOPONUS TOMADA DE HAMILTON, 1860, P. 420.

Hamilton (1860) afirma que, aunque no es posible saber de dónde provienen estos diagramas, probablemente no son las construcciones referidas por Aristóteles. Pero señalar a Filopón tiene interés en esta tesis porque el predicado es para él más importante que el sujeto en las premisas; siendo ese el motivo por el que Hamilton lo nombra en defensa de la doctrina de la cuantificación del predicado en la que también se sustenta el diagrama de Marlo. Así encontramos la siguiente cita en Hamilton (1860):

> The Predicate is always better than the Subject, because the predicate is, for the most part, more extensive (ἐπὶπλέον) than the subject, and because the subject is analogous to the matter, the predicate to the form; for the matter is the subject of the forms. But when the middle term is predicated of the two extremes, or is the subject of both ; in this case, it is not properly intermediate. But, howbeit, though in position external to the middle, it is still preferable to be the predicate than to be the subject. On this ground, that is called the first figure, the middle term Of which preserves its legitimate order, being subject of the one extreme, and predicate of the other... (Philoponus (or rather Ammonius) on Aristotle, An. Pr., i. 4, i. f. 17 a. ed. Trincavelli, 1536.) (p. 420)

Nos parece, en todo caso y de acuerdo con las apreciaciones de Coumet y De Mora (2002) que aunque estos diagramas muestran la ilación o exclusión entre los extremos provocada por el término medio, resulta difícil descubrir en ellos en base a qué reglas de inferencia son construidos. Por ello nos limitaremos en el caso de estos diagramas y de otros semejantes, a dejar testimonio de su existencia en nuestra tesis, estando muy lejos de nuestras posibilidades realizar un análisis más profundo de los mismos.

Señala Coumet y De Mora (2002) que las distintas aportaciones gráficas al mundo de la lógica dieron muestras de una gran variedad en su utilidad y acierto inicialmente, pero que falta en ellas conexión gráfica, o un paradigma gráfico que dé cierta cohesión al conjunto, y que tras un primer periodo de auge para representar la silogística y la lógica de clases, los diagramas quedaron como simple curiosidad sin que se prestara atención ni a los fundamentos ni a las razones implícitas o explícitas que hacen posible la ilustración y fundamentan su principio. Con o sin fundamento, los diagramas que representan el Árbol de Porfirio y la oposición de las proposiciones son dispositivos medievales muy populares a los que Venn (1881) hace alusión en su recopilación de diagramas.

> Hence two kinds of diagram of great antiquity in Logic, will have to be entirely rejected. The first of these is the so-called Porphyrian tree. This only represents the mutual relation of classes to one another in the way of genus and species, by continued subdivision; and though of course giving rise to propositions it cannot be said in any way to portray them. (p.421)

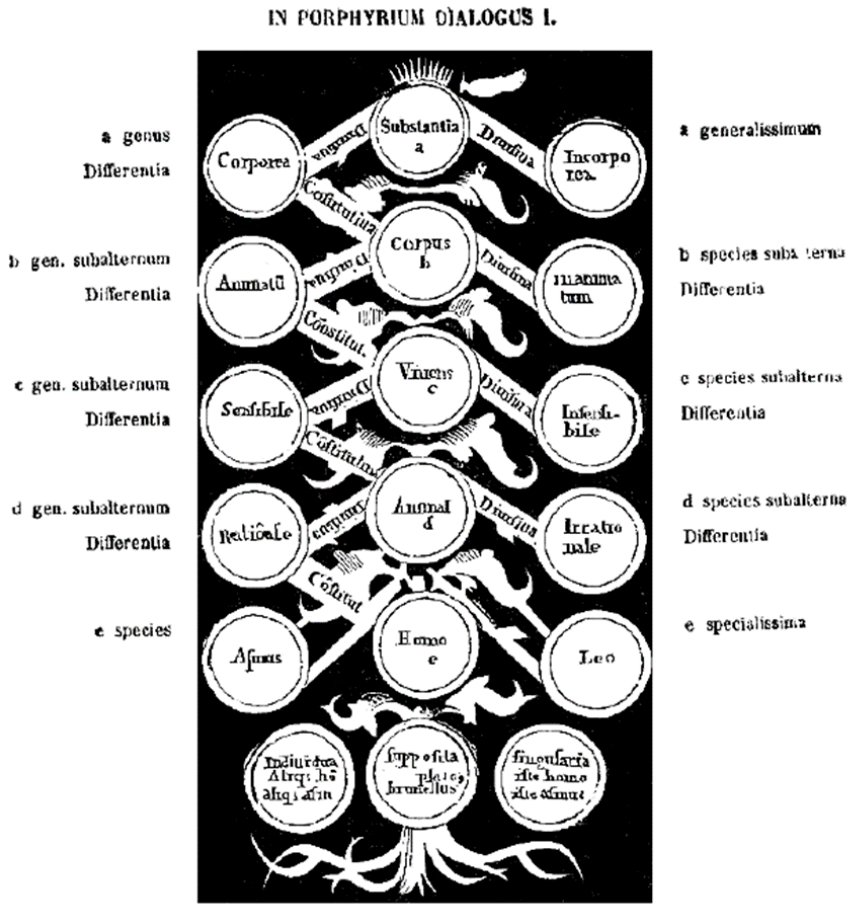
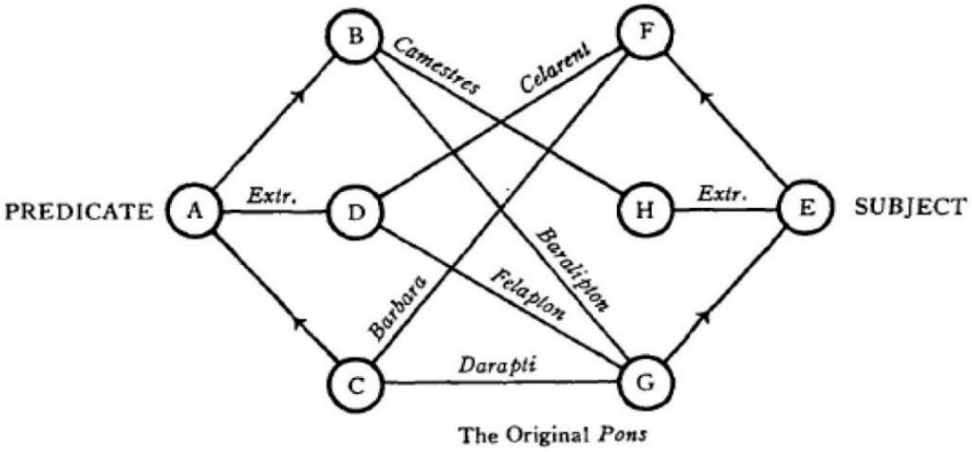


ILUSTRACIÓN 218. ÁRBOL DE PORFIRIO.

En el siglo XVI encontramos diagramas aislados que utilizaban figuras geométricas para representar proposiciones del silogismo (Baron, 1969), por ejemplo, diversos cuadrados de oposición que servían para mostrar ciertas relaciones de inferencia inmediata. Este era el caso del *Pons Asinorum* de Petrus Tartaretus (†1522) que se destinaba a ayudar en el descubrimiento de los términos medios y del cual hay, siguiendo a Venn (1881), una forma en el *Compendium* de Sanderson (Sanderson, 1680) y otra, anterior pero más completa, en el *Comentario* a Porfirio de Pedro Tartareto (1581) (Prantl, 1855).

Juan Buridán (1300-1358), el nominalista francés del siglo XIV, estaba muy preocupado en sus escritos lógicos por encontrar términos medios, y su método fue también conocido como *Pons Asinorum* (*Puente de Asnos*) porque, según Gardner (1958), ayudaba a los estudiantes lentos a pasar de los términos mayor y menor a los medios. Sin embargo Lemanski (2016) no está de acuerdo con esta afirmación de Gardner, pues considera que los diagramas

analíticos no solo fueron en sus inicios una herramienta auxiliar para el estudiante, sino un instrumento utilizado por reformadores didácticos en los inicios de la lógica moderna.



(Pons Asinorum estándar, según Hamblin)

ILUSTRACIÓN 219. PONS ASINORUM ESTÁNDAR, SEGÚN HAMBLIN. TOMADO DE CASAS CAÑAS, 2012, P. 39.

El *Puente de los Asnos* es claramente un antecedente de nuestras redes de expectativas en tanto muestra la necesidad de las conexiones y la ilación durante los procesos de razonamiento.

Ramón Llul (1232-1316) es el autor que Gardner toma como punto de inicio en su estudio clásico sobre diagramas y máquinas lógicas, argumentando que su idea de utilizar dispositivos móviles para tabular combinaciones de términos, ya familiar desde tiempo de los griegos, inspiró a Leibniz para que la aplicara a la lógica formal, de modo que en su *Dissertio de arte combinatoria* (1666) este construyó una tabla exhaustiva de todas las posibles combinaciones de premisas y conclusiones del silogismo tradicional que le permitía eliminar los falsos silogismos.

> Essentially, Lull's method was as follows. In every branch of knowledge, he believed, there are a small number of simple basic principles or categories that must be assumed without question. By exhausting all possible combinations of these categories we are able to explore all the knowledge that can be understood by our finite minds. To construct tables of possible combinations we call upon the aid of both diagrams and rotating circles. (Gardner, 1958, p. 9)

Como veremos, la generación y examinen exhaustivos de todas las posibles combinaciones será la base fundamental de diagramas como los de Venn, Stanley Jevons, Allan Marquand o Lewis Carroll. De la Torre Gómez (2006) afirma:

> Lulio introduce un simbolismo visual, con base en letras, figuras geométricas, colores, diagramas combinatorios y esquemas (como el del árbol de la ciencia), y con la ayuda de este simbolismo, empleado de manera sistemática, busca reemplazar la inseguridad habitual de las operaciones intelectuales por la seguridad de unas operaciones semi mecánicas, que se hacen de una vez para siempre. Se encuentran en él, aunque todavía en estado embrionario, las ideas de "característica" y de "cálculo", que constituyen un antecedente a la obra de Leibniz y al desarrollo moderno de las máquinas lógicas y de la lógica simbólica. (p.81)

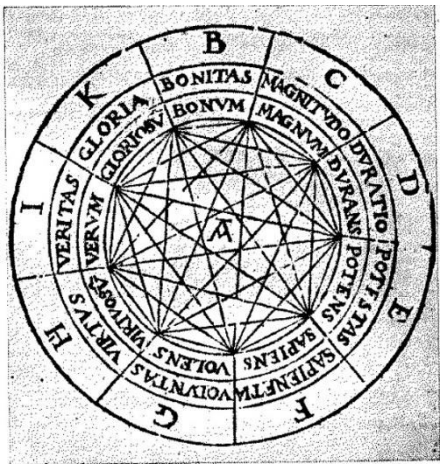


ILUSTRACIÓN 220. PRIMERA FIGURA. EN ARS MAGNA DE LLUL. TOMADO DE BOCHENSKI Y BRAVO, 1985.

También nos dice Eco (2006) que Llull trató de inventor un lenguaje universal capaz de convencer a cualquiera de las verdades del cristianismo empleando el rigor del cálculo matemático.

ILUSTRACIÓN 221. TERCERA FIGURA DEL ARTE DE RAMÓN LLULL. TOMADO DE CASAS CAÑAS, 2012.

Aunque la idea de construir un procedimiento mecánico que facilitase la deducción se encuentra ya en la combinatoria de los comentadores antiguos, de los árabes y de los escolásticos (Bochenski & Bravo, 1985), el primero en abrigar la pretensión de un procedimiento mecánico general fue Raimundo Lulio, cuya idea del *Ars Combinatoria*, compartida por Ricardo Swineshead, inspiraría a Leibniz (Arroyo, 1982).

Lulio llegó a presentar diagramas con intersecciones (Baron, 1969) que anticipan los diagramas circulares atribuidos a Leibniz, Weise, Lange o Euler.

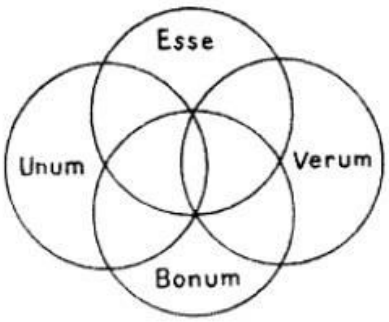


ILUSTRACIÓN 222. INTERSECCIONES DE LLULL. TOMADO DE BARON, 1969.

6.3.1 Primer periodo expansivo (1531-1614)

Afirma Lemanski (2017) que el primer periodo expansivo en la historia moderna de los diagramas, que duró desde 1531 hasta Alsted (1614), fue inaugurado por Juan Luis Vives (1493-1540), pues fue uno de los primeros en utilizar los diagramas de lógica analítica en la filosofía moderna temprana. Dentro de ese periodo expansivo, Lemanski reproduce un primer diagrama de tipo Euler datado en 1531 que Juan Luis Vives (1531) utilizó describiendo el silogismo clásico, el *dictum de omni (et nullo)* aristotélico y el modo Barbara.

ILUSTRACIÓN 223. DIAGRAMA DE VIVES, TOMADO DE LEMANSKI, 2017.

Venn (1881) se refiere así a los diagramas de Vives:

> The other is the triangle of which the three extremities are used to represent the three terms of the syllogism. The same outline of a diagram here serves for any kind of proposition, and all that is meant to be illustrated by the figure, is, that we may by means of reasoning connect the extremes A and C (so to say, along one side) instead of connecting A with B, and then B with C (along the two sides). In this sort of diagrams no kind of analysis of propositions is attempted, and it can hardly be claimed for them that they are any real aid to the mind in complicated trains of reasoning. A historic sketch of their origin will be found in Hamilton's Discussions, Ed. in. p. 666. (p.421)

Nosotros estamos de acuerdo con Venn en que este tipo de diagrama resultaría de poca utilidad en razonamientos complejos, pero no dejan de ser un intento de mostrar la ilación entre términos que subyace a la inferencia.

Siguiendo una vez más a Lemanski (2017), sabemos que Nicolaus Reimers, (1551-1600) astrónomo y matemático también conocido como Ursus Dithmarsius, sugería que sus diagramas estaban directamente inspirados por la metamorfosis de Aristóteles. Nosotros dejamos constancia de ellos, como una muestra más de la relevancia del concepto de inclusión en la historia de los diagramas.

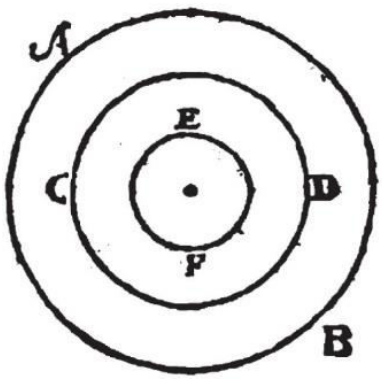


ILUSTRACIÓN 224. DIAGRAMA DE URSUS. DICTUM DE OMNI. TOMADO DE LEMANSKI, 2017.

En un comentario sobre el sistema de Lull, Giordano Bruno (1548-1600) superpuso las tres figuras del silogismo y las rodeó con un círculo, generando el diagrama que se muestra en la figura y que le parecía a Gardner (1958) misterioso, del cual sabemos solo que debía mostrar que la conclusión de un silogismo expresa la relación entre dos términos.

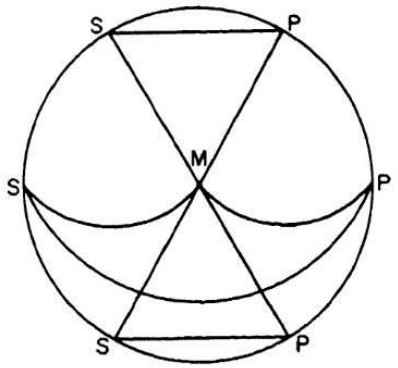


ILUSTRACIÓN 225. DIAGRAMA DE GIORDANO BRUNO. TOMADO DE GARDNER, 1958, P. 30.

Tal vez Giordano Bruno, del que hemos encontrado algún ejemplo más de diagramas circulares, intentaba expresar con este diagrama la posibilidad de convertir unas figuras del silogismo en otras y nos parece sugerente señalar la semejanza que encontramos entre esta imagen y el silogismo no figurado de Hamilton, como si buscara Bruno representar la estructura común que subyace a las tres figuras.

El último esquema tipo Euler del primer periodo expansivo en la historia de los diagramas se sitúa en los primeros años del siglo XVII y se atribuye a Johann Heinrich Alsted (1588-1638) tanto como a Bartholomäus Keckermann (1572-1608), quien usó diagramas de líneas para demostrar que la primera de las tres figuras aristotélicas y el *dictum de omni* son evidentes (Lemanski, 2017). Aunque nosotros hemos indicado, siguiendo a Einarson (1936b) que los diagramas lineales pudieron haber sido usados ya por Aristóteles; la originalidad en su uso es atribuida por Venn (1881) a Alsted, al tiempo que le critica que su diagrama era muy simple y que ni siquiera valdría para distinguir entre proposiciones afirmativas y negativas, universales y particulares, que es lo menos que podemos buscar “en las ilustraciones sensatas” (p.423).

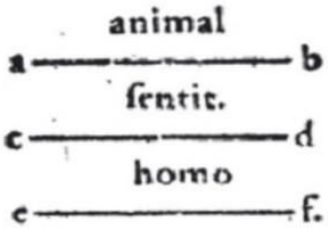


ILUSTRACIÓN 226. DIAGRAMAS LINEALES DE KEKERSMAN-ALSTED. TOMADO DE FERRATER MORA, 1965.

6.3.2 Segundo periodo expansivo (1660-1712)

Siguiendo a Lemanski (2017) podemos decir que después de un primer periodo expansivo de los diagramas de tipo Euler hubo una fase posterior de regresión en la que se perdió todo el conocimiento sobre la aplicación sistemática y la historia de estos diagramas y que no será hasta más tarde cuando tenga lugar un segundo periodo expansivo en la historia moderna de los diagramas que comenzó alrededor de 1660 con Weigel y terminó en 1712. En este periodo los diagramas tipo Euler, lineales y circulares, fueron usados expansivamente ya que dos escuelas desarrollaron y usaron estos diagramas de forma independiente. Recordemos que en su obra paradigmática *Lógica simbólica*, John Venn escribió notas históricas sobre el empleo de diagramas geométricos para la representación sensible de proposiciones lógicas en las que discutió especialmente los llamados "diagramas analíticos", que comparten un parecido familiar con los diagramas tipo Euler y los suyos propios (Lemanski J., 2018).

La primera escuela que desarrolló diagramas tipo Euler se generó alrededor de Erhard Weigel (1625-1699) en Jena y estaba compuesta por Johann Christoph Sturm y Gottfried Wilhelm Leibniz. Los diagramas de Weigel anticipan las representaciones de la inclusión y la exclusión en los diagramas circulares.

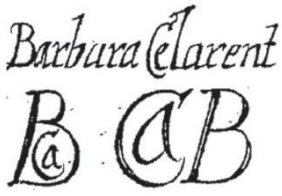


ILUSTRACIÓN 227. DIAGRAMA DE WEIGEL, TOMADO DE LEMANSKI, 2017.

Del trabajo de Johann Cristoph Sturm (1635-1703), astrónomo, matemático y filósofo ecléctico (Секундант, 2016) solo hemos podido encontrar referencias indirectas por las que sabemos que introdujo diagramas circulares para silogismos con términos negativos (Haaparanta, 2009). Este autor fue uno de los primeros en usar círculos en los diagramas lógicos. Así lo afirma Alonzo Church en su contribución a la sección sobre lógica en la decimocuarta edición de la *Enciclopedia Británica*, donde menciona el uso temprano de círculos para representar proposiciones y silogismos por Sturm en su *Universalia Euclidea* (1661) (Gardner, 1958).

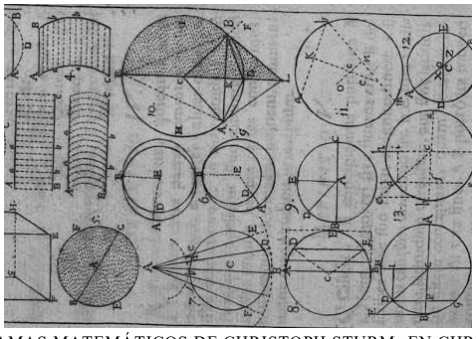


ILUSTRACIÓN 228. DIAGRAMAS MATEMÁTICOS DE CHRISTOPH STURM, EN CHRISTOPH STURM, 1695, P. 9.

Los siglos XVIII y XIX pueden considerarse la edad de oro de los diagramas lógicos (Moktefi & Shin, 2013) y se da en ellos buena parte de su historia según Casas Cañas (2012), un periodo que transcurre desde comienzos del siglo XVIII, cuando aparecen los primeros diagramas circulares de Leibniz, hasta comienzos del siglo XX, cuando fallece Charles Peirce, siendo la etapa histórica en la que el concepto de diagrama lógico se podría considerar como "paradigma gráfico" que proporciona la coherencia de la que no se dispuso en la primera etapa. Será ahora cuando con Euler y Venn difundan sus diagramas circulares herederos de Leibniz.

> Such diagrams, known to John Venn as analytical diagrams, were particularly appreciated in the 18th and 19th centuries, a period which could fairly be considered as the golden age of logic diagrams. Interestingly, this period also witnessed a growing interest in symbolic notation. (Moktefi & Shin, 2013, p. 8)

Nos dice Gardner (1958) que Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) fue el primero en ver la posibilidad de aplicar el método de Llull a la lógica formal y cita una carta suya escrita en 1714 que reproducimos a continuación en la que se aprecia que a pesar de que Leibniz llegó a ser crítico con Llull, siempre consideró la base de su proyecto de forma positiva:

> When I was young, I found pleasure in the Lullian art, yet I thought also that I found some defects in it, and I said something about these in a little schoolboyish essay called On the Art of Combinations, published in 1666, and later reprinted without my permission. But I do not readily disdain anything except the arts of divination, which are nothing but pure cheating and I have found something valuable, too, in the art of Lully and in the Digestum sapientiae of the Capuchin, Father Ives, which pleased me greatly because he found a way to apply Lully's generalities to useful particular problems. But it seems to me that Descartes had a profundity of an entirely different level. (Loemker, 1956, p. 1067. Citado en Gardner, 1958, p.25)

Leibniz fue el primero que estudió seriamente las proposiciones lógicas utilizando diagramas y el primero que concibió la idea de un cálculo lógico puramente abstracto como parte de las matemáticas (Baron, 1969) que en cierto sentido anticipaba la lógica simbólica moderna (Gardner, 1958) porque tenía una clara concepción del cálculo como conjunto de reglas para realizar operaciones empleando cadenas de letras tomadas de algún Alfabeto

o diagramas geométricos (Thiel, 1982). Explica Lemanski (2017) que en 1666 Leibniz publicó su disertación, en la que trataba con diagramas de tipo Euler, empleando posteriormente diagramas circulares y lineales en varios escritos (Lenzen, 1990) que permanecieron inéditos hasta principios del siglo XX (Leibniz, Trad. 1903). Leibniz utilizó diagramas tipo Euler para demostrar todos los modos del silogismo (Russell, 2005). Por ejemplo, en su *Dissertio de arte combinatoria* (1666), Leibniz construyó una tabla exhaustiva de todas las combinaciones posibles de premisas y conclusiones del silogismo tradicional que eliminaba los falsos silogismos, aunque "no revelaba nada que no fuera perfectamente familiar para Aristóteles" (Gardner, 1958, p. 18).

Siguiendo a Lu-Adler (2012) la imagen lineal de *Toda A es B* utilizada por Leibniz en *General inquiries about the analysis of concepts and of truths* (Leibniz, 1686) muestra que todos los individuos que caen bajo el concepto de *A* son, al menos, una parte de los individuos que caen bajo el concepto de *B*.

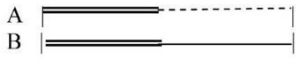


ILUSTRACIÓN 229. TODO A ES B EN DIAGRAMA LINEAL DE LEIBNIZ, 1686.

Nos interesa señalar el hecho, evidente en la imagen, de que Leibniz representa y hace explícita mediante una línea punteada la posibilidad incierta, implícita en la proposición *Toda A es B*, de que finalmente toda B sea *A*. También Lambert, como veremos más adelante, distingue lo seguro de lo meramente posible, representando la incertidumbre que nosotros expresamos en el diagrama de Marlo en las regiones de las figuras que dejamos en blanco o que rellenamos con un signo de interrogación. Lo que tal vez varíe, según Lu-Adler (2012), es el sentido exacto en el que deben ser interpretadas las relaciones entre lo intensional y lo extensional que se desprenden de los diagramas y que pueden ser analizadas en la obra de Leibniz, Lambert, Euler o Kant, aunque tal discusión excede los objetivos de este capítulo.

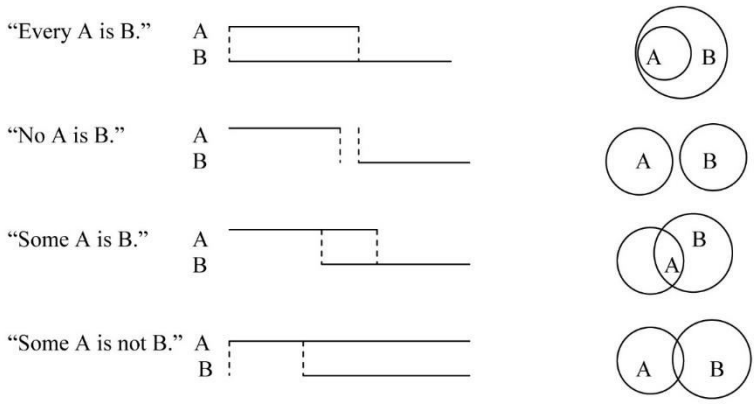


ILUSTRACIÓN 230. DIAGRAMAS DE LEIBNIZ. TOMADO DE LU-ADLER H., 2012, P. 53.

Dice Lu-Adler (2012), apoyándose en Parkinson (1966), que Leibniz nunca usó círculos para representar un juicio con respecto a la intensión, quizá porque sabía de la dificultad de validar un silogismo de este modo, aunque es exactamente el modo en el que trabajamos con el diagrama de Marlo.

Siguiendo a Lemanski (2017), la segunda escuela que desarrolló antes del siglo XVIII diagramas tipo Euler se formó alrededor de Christian Weise (1642 – 1708) en Zittau, y sus estudiantes fueron Samuel Grosser (1664-1736) y Johann Christian Lange (1669-1756). Ambos estudiantes apuntan verbalmente a una doctrina diagramática enseñada por Weise. Ueberweg, Hamilton, Venn y Peirce, reclaman que Christian Weise fue probablemente el primer lógico, y tal vez el único, que usó diagramas analíticos antes del "periodo de oro" (Lemanski, 2018).

Señala Pietarinen (2016) que Christian Weise publicó un pequeño folleto en 1691 titulado *Nucleus Logicae: Succinctis regulis enoughibus tamen exemplis en compendio exhibens quicquid a primis disciplinae audibus disci vel ie potest, Lipsiae, Zittaviae)* que no contenía diagramas lógicos, aunque sabemos por Lemanski (2018) que fue editado y ampliado más tarde en un volumen de más de 800 páginas publicado en 1712 por el estudiante de Weise, Lange (Weise & Lange, 1712), quién en las *Adiciones* y el *Inventvm* añadió, en más de cincuenta páginas, ilustraciones a la obra como diagramas de árbol, triángulos, cuadrados y otras figuras de las que Weise fue probablemente el inventor (Uerberweg & Lindsay, 1871). A este trabajo se refiere Venn (1881) afirmando que:

> In the only work by Lange to which I have been able to obtain access, viz. his Inventum novum Quadratilogici, there is nothing which strikes me as of any great merit. There are a number of geometrical figures represented, both plane and solid, but the author does not seem to have grasped the essential conception of illustrating in this way the mutual intersection, or otherwise, of two or more classes by means of his figures. All that he represents is continued sub-division. (p.424)

Sabemos por Lemanski (2017), que el 1 de mayo de 1716, Lange escribió una carta a Leibniz que contenía un interesante *post scriptum* en el que enfatizaba que había publicado el *Nucleus Logicae Weisianae*, dedicado a la Sociedad Real Prusiana de Ciencias y especialmente a Leibniz, junto con el libro *Inventum. novum quadrati Logici Universalis*. El 5 de junio de 1716, Leibniz respondió que había leído el *Inventum*, que claramente disfrutaba. Además, continúa Lemanski (2017), en un manuscrito que contiene diagramas de líneas de las diecinueve formas clásicas de silogismos, Leibniz se refiere a *'Triangulum Logicum'* de Lange, que es uno de los diagramas del *Inventum*.

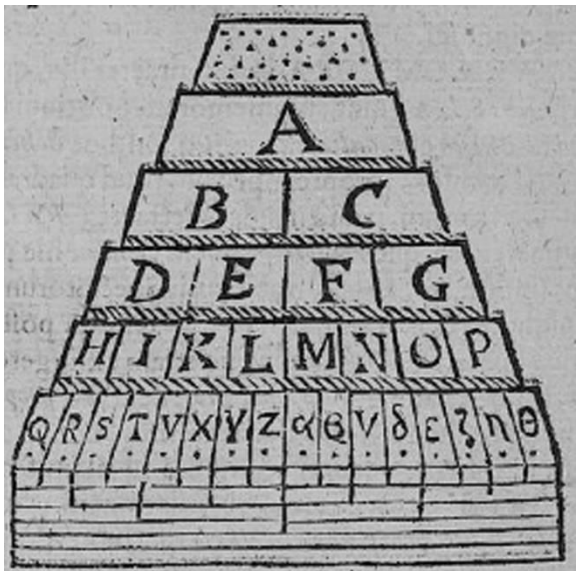


ILUSTRACIÓN 231. CUADRADO LÓGICO DE LANGE, 1712. RECUPERADO DE HTTPS://DIGI.UB.UNI-HEIDELBERG.DE/DIGLIT/WEISE1712/0915/IMAGE.

Siempre según Lemanski (2018), los diagramas en el *Inventum* se usaron para ilustrar la subdivisión y extensión de términos, para mostrar la relación de proposiciones y para demostrar silogismos como: *Toda B es A, todo D es B, por lo tanto, todo D es A*, siendo este tipo de diagrama considerado un esquema universal ("*schematis universalis*"), pues para Lange, el cubo lógico es un diagrama universal que combina las propiedades de sus diagramas de círculos, tablas dicotómicas, cuadrados de oposiciones y otras ilustraciones. Este cubo, nos dice Lemanski (2018b), combinaba los diagramas de Euler (mediante el uso de cubos en orden vertical) con oposiciones geométricas señaladas mediante flechas. Podemos encontrar en Lemanski (2018) que, en general, para los lógicos de finales del siglo XIX y principios del XX, *Nucleus Logicae Weisianae* seguía siendo un texto cautivador envuelto en misterio y que es un tema controvertido si el *Inventum* de Lange es relevante para la historia de los diagramas de lógica analítica. Ya hemos visto que Venn consideraba que los diagramas de Lange simplemente representan cuestiones sin mérito como la subdivisión continua y la dicotomía, e incluso criticaba otros aspectos del trabajo de Lange como su intento de adecuar la longitud de las líneas en sus diagramas a la extensión de los términos, lo cual le parecía a Venn (1881) poco intuitivo y "excesivamente complicado cuando se trabajara con más de tres o cuatro términos" (p. 437). A pesar de conocer el *Inventum* de Lange solo por referencias indirectas, nosotros vemos en él con claridad la estructura de un diagrama de árbol lógico y por tanto, un antecedente de nuestras redes de expectativas, que tiene el mérito de servir de base a una concepción de lo que significa la conjunción de variables alejada de la metafísica de la inclusión y la intersección de clases.

Sabemos, siguiendo a Lemanski (2017), que Samuel Grosser usó una combinación de un diagrama triangular y semicircular para discutir la relación entre sujeto y predicado en los juicios (Grosser, 1697, pp. 117-118), aunque nosotros nos vamos a limitar en este trabajo a constatar su existencia.

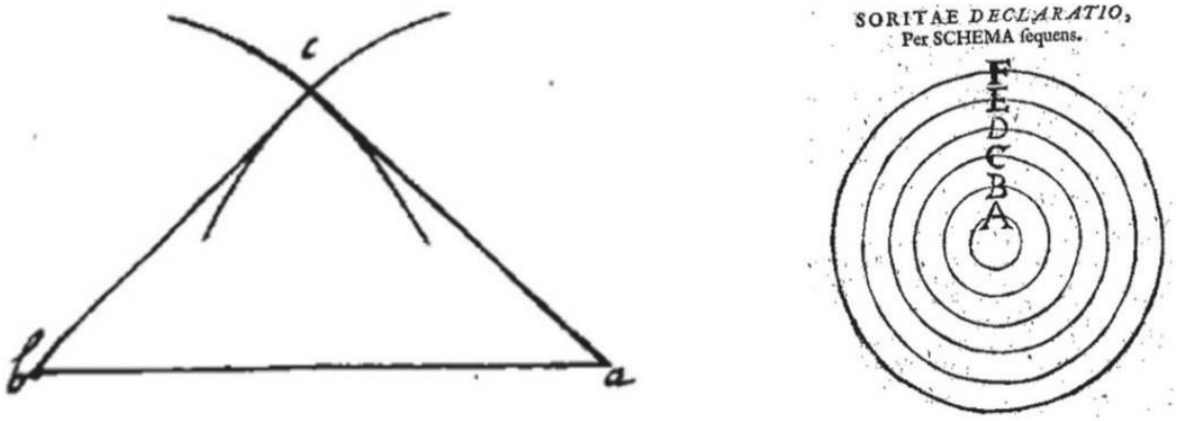


ILUSTRACIÓN 232. DIAGRAMAS DE GROOSER Y LANGE, TOMADOS DE LEMANSKI, 2017.

El último autor que mencionaremos dentro del segundo periodo expansivo del uso de los diagramas en lógica es Arnold Geulincx (1624-1669). En su trabajo *Logica fundamentis suis a quibis hacentus collapsa fuerat restituta*, Geulincx, según Lemanski (2018b), habría inventado un cubo lógico (Geulincx, 1675) en el que el cuadrado de oposición estaba integrado, pero era menos sofisticado que el de Lange. En cualquier caso, ha sido interesante para nosotros encontrar en la obra de un autor del siglo XVII una forma de concebir la inferencia lógica como conjunción, que es semejante, si no igual, a la que nos ha permitido desarrollar los diagramas de Marlo. Así, de dos proposiciones generadas con términos singulares podemos sacar una conclusión legítima. Por ejemplo, en el capítulo VII de la *Opera philosophica* (Geulincx, 1891) titulado "*De Argumento-a-divisis-ad-conjunta*" encontramos el siguiente silogismo: *Pedro es hombre, Pedro es doctor, luego Pedro es hombre doctor*. Y más adelante nos muestra con un diagrama triangular la conexión que se produce entre los términos, empleando una representación que nos parece más próxima al concepto de *estar asociado con* que proponen nuestros diagramas que al concepto de *estar incluido en* que ha prevalecido en los diagramas de Venn y la lógica matemática.

ILUSTRACIÓN 233. *PETRUS EST HOMO. PETRUS EST ANIMAL. ERGO PETRUS EST HOMO ANIMAL*. TOMADA DE GEULINCX, 1891, P. 346.

Esta concepción del silogismo como conjunción permite a Geulincx obtener la misma conclusión que obtendríamos con el diagrama de Marlo a partir de dos premisas particulares negativas. Así, en el Capítulo VII, P.III, Sect II de la misma obra, nos encontramos un ejemplo que sería un modo inválido de silogismo en la tradición aristotélica, pero que permite un razonamiento conforme al sentido común y formalizable en el diagrama de Marlo: «*duo non sunt quinque, et tria non sunt quinque, ergo duo et tria non sunt quinque*» (p 345).

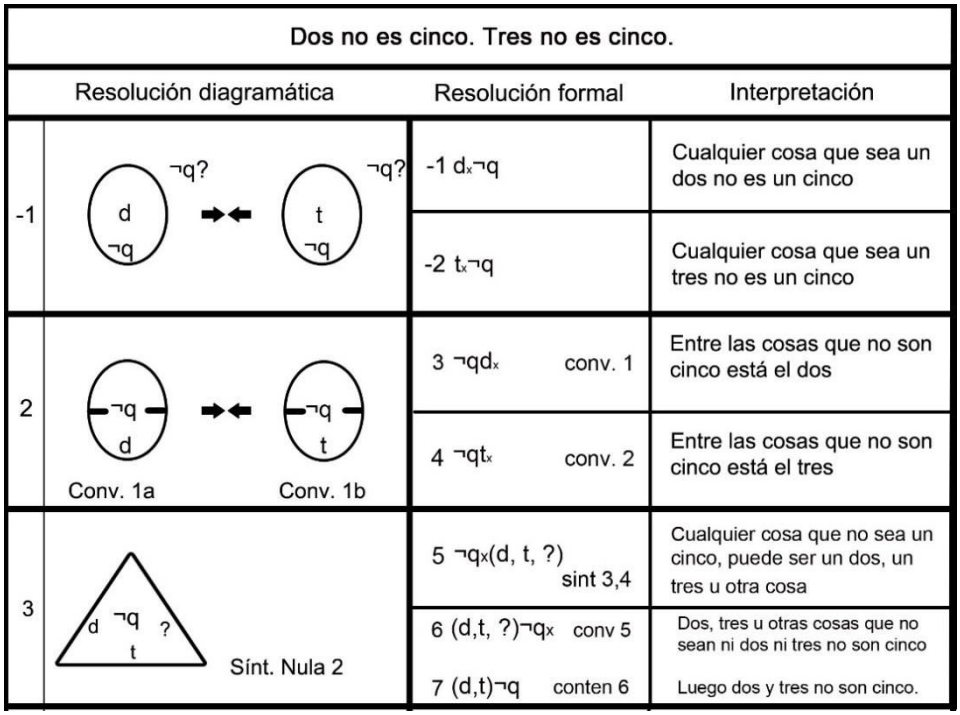


ILUSTRACIÓN 234. SÍNTESIS NULA EN EL DIAGRAMA DE MARLO QUE EXPRESA LA CONJUNCIÓN DE *DOS* Y *TRES* COMO ELEMENTOS DEL CONJUNTO DE *LO QUE NO ES CINCO*, AUN CUANDO PROBABLEMENTE SEAN OBJETOS DISTINTOS.

La formalización en el diagrama de Marlo de la conclusión de esta inferencia nos muestra uno de los sentidos en los que puede emplearse la conjunción y que podría ser causa de confusión con la disyunción. Recordemos que ya Venn (1881) observó que había que afrontar la cuestión del problema, en parte lógico en parte gramatical, de los significados de *A or B* y *A and B* (p.39). Y afirma:

> Broadly speaking we employ two conjunctions, 'and' and 'or', for thus aggregating classes; these terms being practically synonymous in this reference, and both alike leaving it to be decided by the context whether or not they exclude the common part. Often there is no such part, the terms being known to be exclusive of one another; but if there be such, and the context does not make our meaning plain, we often add a clause 'including both', or 'excluding both', or something to that effect, in order to remove all doubt (...) Thus, 'Lawyers are either barristers or solicitors', 'Lawyers consist of barristers and solicitors', must be taken as being equivalent statements. (p.44)

Si observamos la diagramatización desde la perspectiva de las cosas que no son cinco, vemos que tenemos dentro del modelo triangular de ¬*q* el dos y vemos que tenemos el tres. Luego podríamos decir también que si algo no es el cinco puede ser, entre otras posibles cosas, el dos y/o el tres.

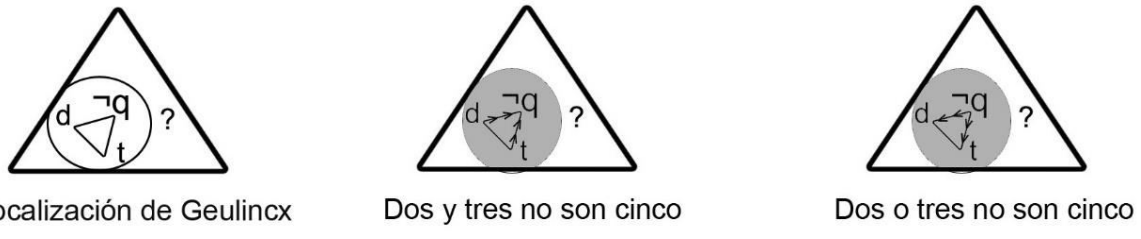


ILUSTRACIÓN 235. DIAGRAMA TRIANGULAR DE GEULINCX QUE PERMITE VER LA CONEXIÓN DE DOS Y TRES CON NO SER CINCO DENTRO DE UN DIAGRAMA DE MARLO. SE HA RESALTADO EL ÁREA QUE DEBE SER FOCALIZADA PARA VISUALIZAR LA CONCLUSIÓN: DOS Y TRES NO SON CINCO.

Esta conjunción del dos y el tres se produce en el conjunto de lo que no es cinco, sin generar la identidad de ambos objetos, y puede ser expresada como “y” o como “o” según nos preguntemos qué puede ser esto en concreto que no es cinco o consideremos en conjunto las posibilidades que hay de no ser cinco. Pues en conjunto, puede ser esto “y” puede ser lo otro. Pero en particular, esta posibilidad solo puede ser esto “o bien” lo otro pero no esto “y” lo otro al mismo tiempo y en el mismo sentido.

6.3.3 Tercer periodo expansivo (1760-1800)

Lemanski (2017) habla de un tercer periodo de expansión de los diagramas lógicos en el que destacará el trabajo de Euler (1707-1783), pero que comienza alrededor de 1760 con los trabajos de Ploucquet y de Johann Heinrich Lambert (1728-1777) cuyos diagramas descritos en su *Neues Organon* (Lambert, 1764) precedieron a los diagramas circulares de Euler (Haaparanta, 2009).

Gottfried Ploucquet (1716–1790), que había anticipado la teoría de la cuantificación del predicado (lenzen, 2008; Venn, 1881), jugará junto a Lambert, según Lu-Adler (2017), un papel importante en el desarrollo del cálculo lógico en Alemania al publicar dos ensayos: *Methodus tam demonstrandi directe omnes syllogismorum species* (Ploucquet, 1773) y *Methodus calculandi in logicis* (Ploucquet, 1763), ensayo en el que utiliza una notación del tipo “M > P, S > M” (p.70), que incorpora a sus cuadrados de 1766. En todo caso, lo que ahora nos interesa es reseñar que en 1759 había publicado *Fundamenta philosophiae speculativae*, donde usó cuadrados para representar la cantidad de los conceptos en la inferencia en un sistema del que se ha discutido si era simbólico o diagramático. Venn (1881) afirma que, en contraste con el de Lambert, el sistema era “esencialmente simbólico y no diagramático” (p.428). Sin embargo, para Bellucci et al. (2014) el sistema de Ploucquet no era completamente diagramático ni completamente simbólico, sino que utilizaba estructuras tanto algebraicas como geométricas para expresar proposiciones y silogismos. Así, en Ploucquet (1766) encontramos diagramas lineales y otras figuras como cuadrados de los que diría Schopenhauer que fueron las primeras figuras espaciales en representar las esferas de los conceptos (Schopenhauer, Trad. 2009).

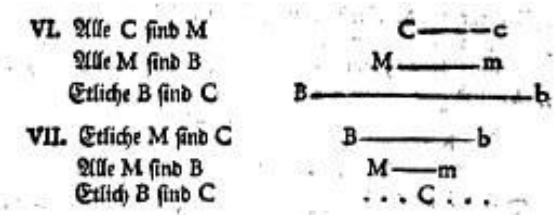


ILUSTRACIÓN 236.DIAGRAMAS LINEALES EN PLOUCQUET. TOMADOS DE PLOUCQUET, 1766, P. 166.

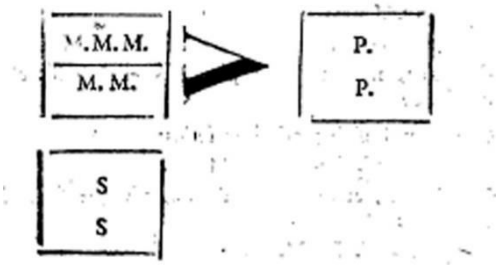


ILUSTRACIÓN 237.CUADRADOS DE PLOUCQUET, TOMADOS DE PLOUCQUET, 1766, P8.

Una de las peculiaridades de los diagramas lineales de Ploucquet es que marcó con un asterisco los límites que invalidan una proposición, tal y como vemos en la figura 238.

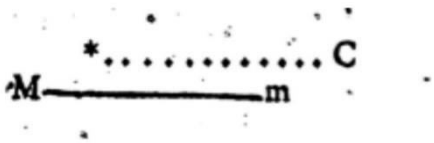


ILUSTRACIÓN 238. LÍMITE PROPOSICIÓN. EN PLOUCQUET, 1766, P. 218.

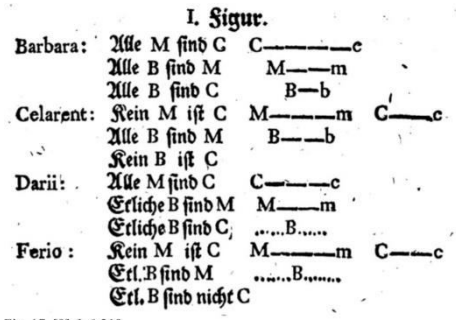


Fig. 17. [9], I, § 219

ILUSTRACIÓN 239. FIGURAS I Y II SILOGISMO EN DIAGRAMAS LINEALES. TOMADO DE BELLUCCI, ET AL., 2014.

De Johann Heinrich Lambert (1728-1777) afirma Kant en su *Lógica* que el órgano solo contenía divisiones sin ninguna utilidad excepto la de agudizar el ingenio, algo en lo que no podemos estar de acuerdo sabiendo que Venn (1881) señala que Lambert anticipó a Hamilton en la cuantificación del predicado y que Peckhaus (2000) lo considera un precursor de la lógica simbólica.

Señala Venn (1881) que Lambert introdujo un esquema de notación diagramática que indicaba la extensión de un término de clase por una línea recta; la inclusión de un término en otro dibujando una línea más corta debajo del otro; la exclusión de dos términos dibujando los dos uno al lado del otro, mientras que el caso de la intersección se presentaba dibujando una línea parcialmente debajo de la otra. Por lo tanto, Celarent podría representarse del siguiente modo:

ILUSTRACIÓN 240. CELARENT EN LAMBERT, TOMADO DE VENN, 1881, P. 430.

En 1764 Lambert publicó el *Neues Organon* (Lambert, 1764), en el que exponía un método de diagramatización lineal que Gardner (1958) consideraba muy cercano a los círculos de Euler y también publicó *De universali calculi idea disquisitio* en 1765 (Lambert, 1765), dedicando ambos a un proyecto de cálculo lógico muy cercano a cómo Leibniz lo había imaginado (Lu-Adler, 2017).

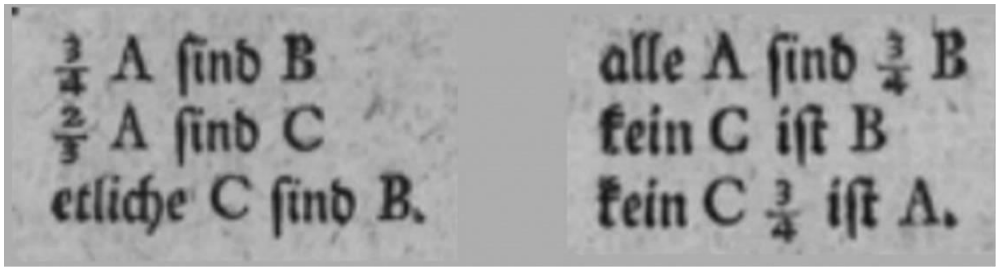


ILUSTRACIÓN 241. SILOGISMOS NUMÉRICOS EN NEUES ORGANON DE LAMBERT, 1764, P 370, 371.

Es interesante advertir que Lambert expresa en sus representaciones diagramáticas la incertidumbre asociada a la parte indeterminada de un concepto. Si nos fijamos en la siguiente ilustración donde se representa *Toda A es B*, veremos que hay una parte punteada de la línea de *B*, que indica que, cuando se convierta la proposición, el término *B* se debe tomar particularmente (*Alguna B es A*).

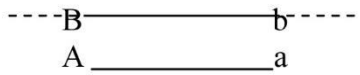


ILUSTRACIÓN 242. *TODO A ES B* EN LAMBERT. TOMADO DE LU-ADLER, 2012, P. 55.

La línea punteada de los diagramas lineales cumple exactamente la misma función que la interrogación en el diagrama de Marlo, esto es, indicar la incertidumbre que acompaña a las proposiciones. Tales puntos representan posibilidades que no han sido ni eliminadas ni confirmadas, pero que deben ser tenidas en cuenta tanto al convertir la proposición como al interpretar las conclusiones. Por eso, en la representación de la proposición *Toda A es B*, la línea de *B* es al menos tan larga como la línea de *A*.

Y también trató de solucionar los problemas que surgen al intentar representar la distribución incierta del predicado empleando líneas de puntos que permitieran distinguir entre *Toda A es B* y *Algún A es B* (Venn J. , 1881, pág. 431).

ILUSTRACIÓN 243. LAMBERT: *ES SEGURO QUE UNA PARTE DE B ES A*. TOMADO DE VENN, 1881, P. 431.

El diagrama anterior significa que *A* cubre una parte de *B*, a saber, la parte continua y puede cubrir el resto, a saber, la parte punteada. No obstante, Venn se queja de que en la representación que hace Lambert de las proposiciones particulares, su uso de las líneas de puntos deja de ser consistente

ILUSTRACIÓN 244. *ALGUNA A ES B* EN LAMBERT. TOMADO DE VENN, 1881, PÁG. 431.

Efectivamente, estamos de acuerdo con Venn en que Lambert debería haber representado la proposición *Alguna A es B* como se expresa en la ilustración 245.

ILUSTRACIÓN 245.CÓMO DEBERÍA HABER ESCRITO LAMBERT "*ALGUNA A ES B*" SEGÚN VENN, 1881, P. 431.

Venn (1881) critica que Lambert emplee de forma oscura las líneas de puntos sin ser consistente en su uso en las figuras silogísticas, y dice de sus diagramas que le parecen claramente inferiores al esquema de Euler, justificando que quizás ningún otro lógico los haya empleado, excepto Ulrich (*Institutiones log. Et met*. p. 171) y Hamilton (*Logic*, I. p. 189)

Venn también analiza la representación que hace Lambert de la disyunción como la subordinación de una pluralidad de especies a un género:

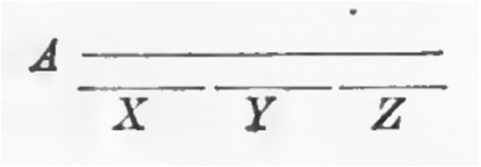


ILUSTRACIÓN 246. DISYUNCIÓN EN DIAGRAMA DE LAMBERT. EN VENN, 1881, P. 433.

Venn (1881) comenta de la figura anterior que las tres clases *X*, *Y*, *Z* forman la extensión de *A*, siendo muy acertadamente especies mutuamente excluyentes, pues «tal exclusividad mutua es la característica natural de todas las especies verdaderas» (p.443). El problema viene, dice Venn (1881), cuando intentamos adaptar este esquema lineal al caso más completo de alternativas que no son mutuamente excluyentes, o cuando tratamos de trabajar con tres términos o más, como en la proposición *Toda A es X o Y o Z* (p.434).

También nos dice Venn (1881) que cuando Lambert se ocupa del silogismo definido numérica o proporcionalmente, la longitud de las líneas que representan la extensión de los conceptos se vuelve muy importante, de modo que cada línea de sus diagramas debería tener en cuenta la longitud proporcional asignada por la extensión de los términos, aunque critica que Lambert no se percatara de la importancia de las relaciones de inclusión y exclusión de clases (p.436). Pero pese a las críticas de Venn, es reseñable que Lambert intentara trabajar la incertidumbre con sus diagramas. Afirman Bellucci et al. (2014) que para Lambert los diagramas lineales siempre muestran una parte indeterminada, lo cual supone un conocimiento imperfecto. Y es destacable que se ocupara de la probabilidad y del silogismo definido numéricamente en la última parte de su *Neues Organon*, donde propone una teoría de los silogismos probables con reglas para calcular el grado de certeza de una conclusión (Martin, 2011), lo cual es un antecedente claro de lo que intentamos hacer con las redes de expectativas.

En todo caso, no compartimos aspectos importantes del modo en el que Lambert comprendía las premisas pues, según Bellucci et al. (2014) afirmaba que las premisas de las que se sigue alguna conclusión deberían poder ser diagramadas, mientras que aquellas de las que no se sigue nada no pueden serlo y por esa razón nada se sigue de las premisas *Ninguna M es P* y *Ninguna S es M*.

Leonhard Euler (1707-1793) es el autor más conocido de este tercer periodo expansivo de los diagramas lógicos y de él afirma Gutiérrez (2007) que añadía al estudio de las matemáticas, la filosofía y la teología el de la medicina, la astronomía, la física y las lenguas orientales. Por su parte, y en relación al tema que nos ocupa, Venn (1881) afirmaba que la característica esencial del plan diagramático de Euler era representar directa e inmediatamente la inclusión y exclusión de clases, siendo un mero accidente que empleara círculos y no otras figuras cerradas.

> We now come to Euler's well-known circles which were first described in his Lettres d une Princesse d'Allemayne (Letters 102 105). The weak point about these consists in the fact that they only illustrate in strictness the actual relations of classes to one another, rather than the imperfect knowledge of these relations which we may possess, or wish to convey, by means of the proposition. Accordingly they will not fit in with the propositions of common logic, but demand the constitution of a new group of appropriate elementary propositions. This defect must have been noticed from the first in the case of the particular affirmative and negative, for the same diagram is commonly employed to stand for them both, which it does indifferently well: (Venn, 1881, p. 424)

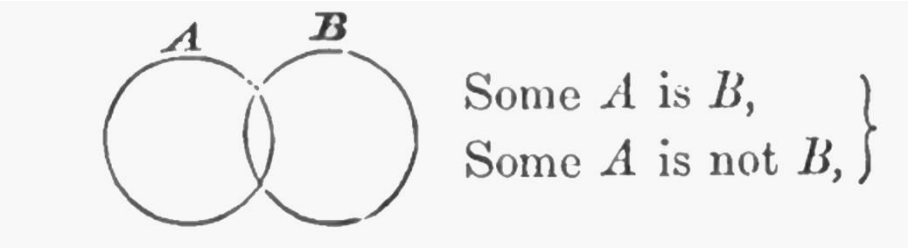


ILUSTRACIÓN 247. DIAGRAMA DE EULER. EN VENN, 1881, P. 424.

Así, en el siglo XVIII la representación en los diagramas de Euler se rige por la convención de que a cada objeto x se le asigna una ubicación única en el plano siempre que x sea un miembro del conjunto que representa la región (Moktefi & Shin, 2013), siendo una de sus ventajas, según le parece a Venn, la de no distinguir entre los términos que ejercen como sujeto y los términos que aparecen como predicado de las proposiciones.

> As regards then the employment of what I term analytical diagrams, viz. those meant to distinguish between subject and predicate, and also between the different kinds of proposition, there can be little doubt that their practical employment dates from Euler. That is to say, he first familiarized logicians to their use, and the particular kind of circular diagram which he employed has consequently very commonly been named after him. (Venn, 1881, pp. 421,422)

El hecho de que las proposiciones pudieran ser expresadas en los diagramas de Euler como ecuaciones, convertían a este sistema de representación en candidato para representar la lógica matemática.

> The result was a diagrammatic method so perfectly isomorphic with the Boolean class algebra, and picturing the structure of class logic with such visual clarity, that even a nonmathematically minded philosopher could "see" what the new logic was all about. (Gardner, 1958, p. 39)

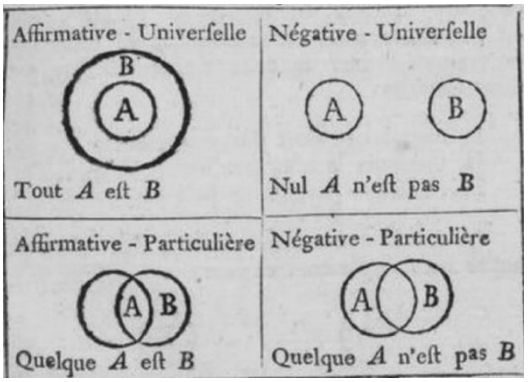


ILUSTRACIÓN 248. RESUMEN PROPOSICIONES CATEGÓRICAS SEGÚN EULER. TOMADO DE CASAS CAÑAS, 2012.

No obstante, señala Venn (1881) que el uso de los círculos de Euler para representar disyunciones no es mucho mejor que las líneas de Lambert.

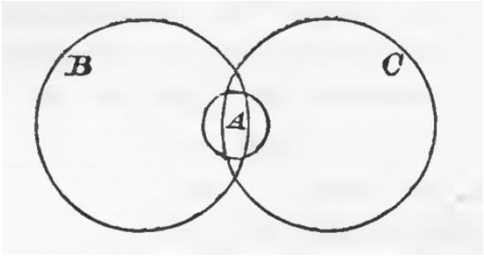


ILUSTRACIÓN 249. DISYUNTIVA EN EULER, SEGÚN VENN, 1881, P. 435.

Abeles (2007) se refiere a los diagramas de Leonhard Euler de 1761 como un sistema que representa las relaciones entre conjuntos mediante las relaciones de los círculos dibujados y nos dice que dicho sistema será mejorado considerablemente por el sistema diagramático de Venn. Sin embargo, Hammer y Shin (1998) afirman que las modificaciones posteriores del sistema original de Euler, motivadas por un intento de aumentar la expresividad de los diagramas, tendrán el efecto secundario de generar una pérdida de la claridad visual del sistema original. Así, según Chen y Boutros (2011), si algunas áreas del diagrama de Venn no existen, los diagramas de Euler pueden ser más deseables porque son equivalentes a los diagramas de Venn cuando existen todas las áreas de intersección y no intersección, pero mientras que las áreas que contienen elementos cero se muestran en los diagramas de Venn por definición, los diagramas de Euler solo muestran áreas que no son cero, lo cual reduce la complejidad de la figura y aumenta la precisión gráfica y la legibilidad general en relación con los diagramas de Venn. También Riche y Dwyer (2010) han llamado la atención sobre la dificultad, resuelta en nuestros diagramas, de generar diagramas de manera que las regiones de los conjuntos no se intersecten a menos que los conjuntos correspondientes tengan una intersección no vacía y proponen ingeniosas y llamativas soluciones que tienden, según nuestra intuición, a parecerse más a diagramas de árbol que a los originales diagramas de Euler.

Lemanski (2017) afirma que los diagramas de Euler se volvieron populares en el debate acerca de la intuición que tuvo lugar en 1790 entre leibnizianos y kantianos, de modo que se puede encontrar autores como Johann Gottfried Karl Christian Kiesewetter (1766-1819), que utilizaron diagramas tipo Euler a finales del siglo XVIII.

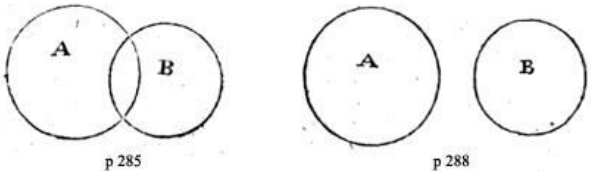


ILUSTRACIÓN 250. DIAGRAMAS TIPO EULER UTILIZADO POR KIESEWETTER. EN KIESEWETTER, 1793.

Los diagramas tipo Euler suponen una forma clara y simple de representar las relaciones que se establecen entre los términos de una proposición, y sirven de base para los extendidos diagramas de Venn, aunque su expresividad era limitada, ya que, por ejemplo, sólo pueden expresar que un conjunto está vació eliminando zonas (Stapleton, 2005). Nosotros tenemos que señalar que el diagrama de Marlo supera la dificultad de tener que representar las clases vacías, generando representaciones con todas las ventajas deseadas según los autores mencionados, siendo capaz de operar con un número ilimitado de premisas, lo cual no ocurre en los diagramas de Euler.

Una versión del sistema de representación de Euler que merece ser mencionada es la Joseph Diaz Gergonne (1771 – 1859), lógico francés próximo al concepto de formalismo (Bochenski & Bravo, 1985) y conocido por ser el creador del problema geométrico del árbol de Steiner, consistente en tratar de unir todos los vértices de una red con el mínimo de conexiones (Brazil, Graham, Thomas, & Zachariasen, 2014). Gergonne También fue señalado por De Morgan (1847b) como uno de los tres matemáticos, conocidos por él, que habían propuesto una forma de inferencia distinta a la aristotélica:

> I THINK it desirable to state all I know of any attempt to deal with the forms of inference otherwise than in the Aristotelian method. Since the time of Wallis, three well known mathematicians have written on the subject, Euler, Lambert, and Gergonne: there may have been others, but I have not met with them. (p.323)

De hecho, el intuitivo sistema de Gergonne (Grattan-Guinness, 1977), es bien conocido en el contexto de los estudios psicológicos sobre el razonamiento silogístico (Erickson, 1974), tal y como indican Sato, Mineshima y Takemura (2010). Estos autores señalan como un defecto del sistema de Gergonne y de los diagramas de Euler que es posible generar más de una representación para expresar una declaración categórica particular del tipo "*Algunos A no son B*" o "*Algunos B son C*". Así, si tenemos un silogismo con estas dos premisas, debemos considerar doce formas de combinar diagramas correspondientes a las premisas, como ya lo indicó Johnson-Laird (1983). Por ese motivo, dicen Sato et al. (2010), aunque los diagramas en el sistema de Gergonne tienen claridad visual porque solo se apoyan en las relaciones topológicas entre círculos, no pueden representar información parcial, esencial para el tratamiento del razonamiento silogístico, en un solo diagrama, y concluyen que son diagramas difíciles de manejar en el razonamiento deductivo real, porque aunque el sistema de Gergonne es natural, carece de un mecanismo convencional para lidiar con la abstracción. La siguiente ilustración muestra la comparación que hacen los autores entre la representación de la proposición “Alguna A no es B” en diagramas de Gergonne y los que ellos llaman EUL. Nosotros, a pesar de nuestro limitado contacto con la obra de Gergonne (Gergonne, 1817), nos hemos atrevido a añadir a la imagen original de Sato, Mineshima y takemura (2010) la representación en el diagrama de Marlo, que además de carecer de los inconvenientes de Gergonne tiene la ventaja de permitir trabajar con un número ilimitado de premisas de forma clara y económica.

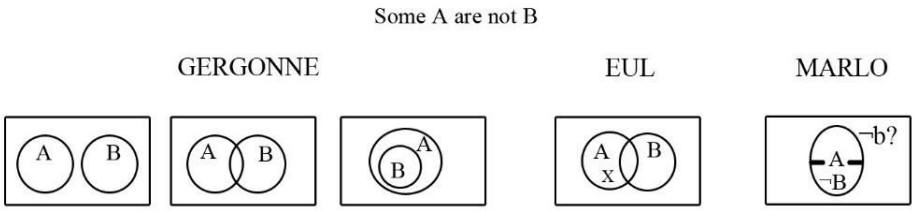


ILUSTRACIÓN 251. COMPARACIÓN DE DIAGRAMAS DE GERGONNE, EULER Y MARLO.ADAPTADO DE SATO, MINESHIMA, Y TAKEMURA, 2010.

Lemanski (2017) afirma que a finales del siglo XVIII y principios del XIX los diagramas lógicos estaban ampliamente extendidos que Georg Samuel Albert Mellin (1755-1825) incluyó diagramas en el *Diccionario Enciclopédico de Filosofia Crítica* (Mellin, 1799).

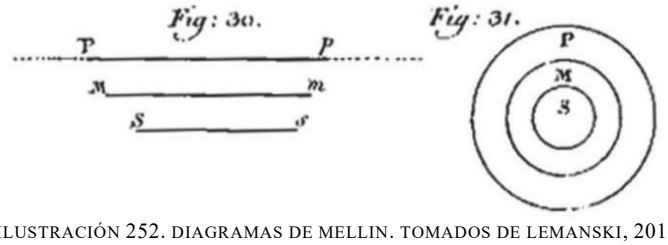


ILUSTRACIÓN 252. DIAGRAMAS DE MELLIN. TOMADOS DE LEMANSKI, 2017.

El siglo XVIII preparó el terreno para la disputa por las representaciones lógicas que mantendría en el XIX John Venn con las propuestas vinculadas a la cuantificación del predicado. No obstante, al margen de las líneas dominantes que analizaremos con más detalle en este capítulo, existieron otras propuestas diagramáticas recogidas por Venn y que no están exentas de originalidad. Es el caso de Johann Gebhard Ehrenreich Maass (1766-1823), Bernard Bolzano (1781 – 1848) y Robert Gordon Latham (1812 – 1888).

Ehrenreich Maass empleó a finales del siglo XVII diagramas lineales sin ningún mérito, pero desarrolló también otros diagramas triangulares más originales que encontramos al final de su obra *Grundriss der Logik* (Maass, 1793). Venn (1881) dijo de él que desarrolló un sistema con variedad de figuras decididamente grave, más o menos complicado y no del todo efectivo en cuanto a su objetivo principal, pero que fue "mal juzgado por Hamilton a pesar de todo" (p.429). En la siguiente imagen vemos que sean AB y AC las líneas fijas; y el triángulo ADE representa la clase X, y AFG representa la clase Y. Si FG permanece donde está, tenemos "Todo X es Y", mientras que para representar "Todo Y es todo X" solo tenemos que concebir que FG se transfiera hasta coincidir con DE (Venn J. , 1881, pág. 429).

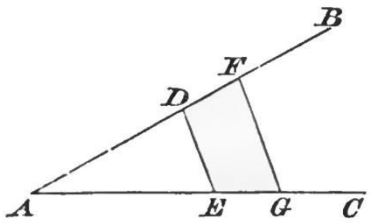


ILUSTRACIÓN 253. DIAGRAMA TRIANGULAR DE MAASS. TOMADO DE VENN, 1881, P. 429.

Robert Gordon Latham (Latham, 1856) utilizaba en una misma figura círculos, cuadrados y triángulos con el propósito, según Venn (1881): « presumably, of distinguishing between the three terms in the syllogism» (p.428).

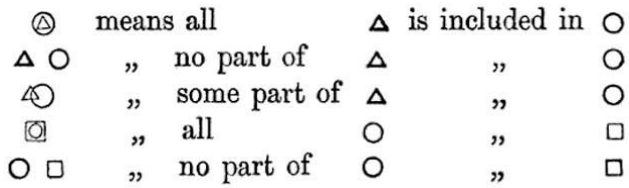


ILUSTRACIÓN 254. SIMBOLISMO DE LATHAM. EN LATHAM, 1856, P. 88.

Por último, al repasar los sistemas diagramáticos que le han precedido, Venn atribuye a Bolzano el mérito de ser el único intento que él conoce de extender la notación diagramática a cuatro términos. Bolzano, nos explica Venn, recurre a paralelogramos con el objetivo de representar la relación mutua de inclusión y exclusión de las diversas clases indicadas por los términos empleados, aunque apenas le dedica espacio a su explicación, en la que tampoco profundizaremos por nuestra parte.

> Thus a collection of small circles included in a large one represents a number of species (mutually exclusive) comprehended under one genus, though, since the small circles cannot fill up all the contents of the large one we cannot thus conveniently represent the exhaustion of the genus by the aggregate of the species ; a row of such circles, each of them interlinked with the next, represents the case of a succession of species each of which has something in common with the next, and so forth. The most ingenious of his figures for four terms is the following. (Venn, 1881, p. 426)

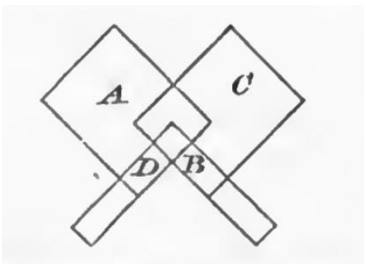


ILUSTRACIÓN 255. DIAGRAMA DE BOLZANO. TOMADO DE VENN, 1881, P. 426.

6.3.4 Influencias mutuas hasta el S.XVIII en el uso de diagramas

Lemanski (2017) nos ofrece una panorámica de las influencias que, hasta finales del siglo XVIII ejercen unos autores sobre otros en el uso de diagramas. Según el esquema que nos plantea, podemos percibir un primer periodo protagonizado por Vives y que se cierra con Alsted; un segundo momento que propaga la influencia desde Weige a Leibniz; un tercer momento que conecta a Weise con Lange y un cuarto momento que nace del propio Lange y se prolonga a través de Lambert hasta Kant.

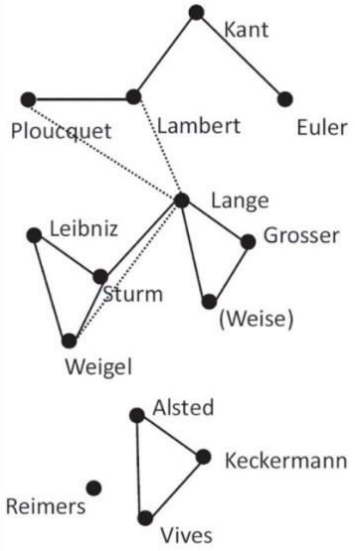


ILUSTRACIÓN 256. INFLUENCIAS MUTUAS. LEMANSKI, 2017.

Sin embargo, es difícil ver para el profano, qué tienen de original los diagramas de Euler respecto a los diagramas de Leibniz, lo mismo que resulta inevitable no vincular el origen de todos los diagramas circulares que tratan de mostrar la conjunción de caracteres mediante la conjunción de áreas topográficas con los primitivos diagramas de Raimundo Lulio, sobre todo cuando sabemos por Bochenski y Bravo (1985) que su obra influyó en la de Leibniz.

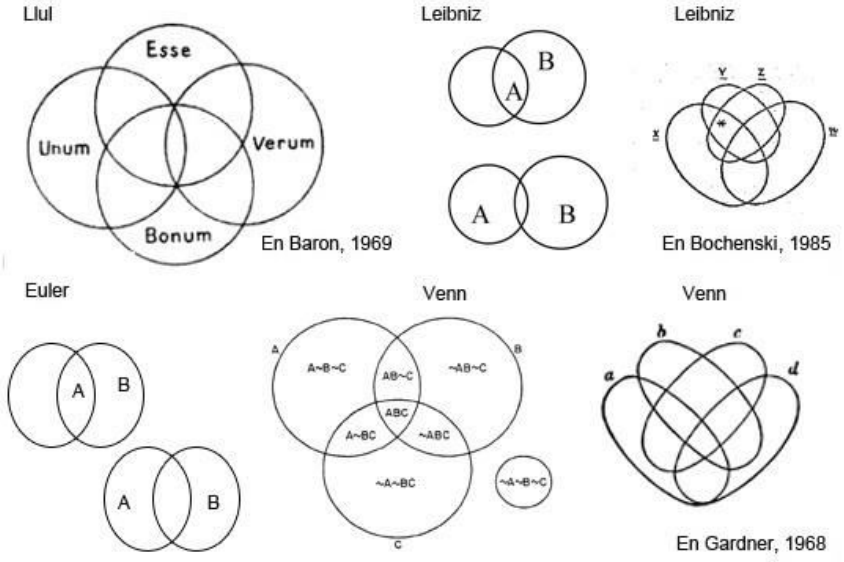


ILUSTRACIÓN 257. COMPARACIÓN DE LOS CÍRCULOS DE RAMÓN LLUL, LEIBNIZ, EULER Y VENN.

> La idea de representar los modos silogísticos mediante figuras geométricas fue familiar a los comentadores antiguos (v.24.26). Hasta qué punto pervivió en la Escolástica es algo que está todavía sin investigar. El empleo por primera vez de círculos se atribuye corrientemente a L. Euler, por encontrarse en sus *Lettres a une princesse d' Allemagne* (1768). Mas el primero en bosquejar estas y otras representaciones diagramáticas fue Leibniz, si bien es verdad que permanecieron inéditas hasta 1903. (Bochenski & Bravo, 1985, p. 275)

Por nuestra parte, lo que aprendimos en esta investigación confirma lo dicho por Bochenski y Bravo (1985) en su *Historia de la Lógica*, de modo que estamos de acuerdo en atribuir a Leibniz el mérito de ser el primero en usar diagramas circulares con la intención de expresar la estructura de la proposición que subyace a la inferencia. En relación al importante avance que supuso en el desarrollo de los diagramas circulares el percatarse de que solo con la intersección de dos círculos podemos expresar todas las proposiciones requeridas en el álgebra de Boole, debemos decir que encontramos en Aaron Schuyler (Schuyler, 1869), una década antes que en Venn (1880), que es posible identificar las cuatro regiones que se generan en dicha intersección con cada una de las clases SP, S¬P, P¬S y ¬S¬P surgidas de combinar los conceptos S y P. De todos modos, una cosa es la capacidad de tener ideas simples y originales y otra muy distinta desarrollarlas y aprovecharlas de forma beligerante frente a sistemas rivales, que fue precisamente lo que hizo Venn con los diagramas intersecados para imponer su perspectiva frente a la de Hamilton en un siglo que fue decisivo en el devenir de la disciplina lógica.

6.4 El siglo XIX: La doctrina de la cuantificación del predicado

La búsqueda de antecedentes históricos en el modo de comprender y formalizar las proposiciones en el diagrama de Marlo nos retrotrae fundamentalmente hasta el siglo XIX, en el que comienza una nueva etapa en la historia de la lógica formal marcada por la confluencia de la tradición filosófica clásica de la lógica asociada al silogismo y la tradición de las matemáticas que permite el nacimiento de la lógica matemática. En este momento histórico decisivo tiene lugar el auge de la doctrina de la cuantificación del predicado, protagonizada esencialmente por Bentham, De Morgan, Boole, y Hamilton. Con ellos nace la lógica matemática, que no hubiera sido posible sin concebir la proposición como una expresión puramente formal de una igualdad en la que las funciones de sujeto y predicado son intercambiables, lo cual permitía llevar la silogística más allá de las proposiciones clásicas A, E, I, O. Pero tal vez la ausencia de un sistema diagramático realmente eficaz al servicio de los defensores de la cuantificación del predicado facilitó que se impusiera la interpretación de las proposiciones de los diagramas de Venn, en detrimento de otras alternativas que sin duda enriquecen nuestra comprensión del razonamiento.

> The main principle on which the new Analytic of Logical Forms proceeds is that of a throughout-going quantification of the predicate. This principle in its full scientific significance has been totally overlooked by logicians; and when noticed at all, has for the most part been referred to only to dicarded as usseless if not to be condemmed as false. In consequence of this omission, logic as a formal science has received only a one-sided development- has been deprived of much that is scientifically true -encumbered with much that is scientifically false; and throughout its entire history exhibited in a perverted and erronous form. On the principle of a quantified predicate, however, past evils are corrected, past omissions supplied; and logic receives its highest development in the perfection and simplicity of its form. (Baynes, 1850, pp. 1-3)

6.4.1 George Bentham (1800-1884)

Como la discusión acerca del verdadero origen de la doctrina de la cuantificación del predicado queda al margen de los objetivos de esta tesis, nos limitaremos a decir que históricamente se atribuye a Bentham haber sido el primero en descubrir la cuantificación del predicado en 1827 (Cohen, 1963; Jevons, 1872; Robertson, 1876).

> Every simple proposition may be reduced to the expression of a relation between two ideas: the two ideas are represented by the two terms (subject and predicate) […] These terms may be either both of them individual, or one of them individual and the other collective, or both of them collective. (Bentham, 1827, p. 129)

Pero como nos dicen Bochenski y Bravo (1985) la doctrina de Bentham de la cuantificación del predicado era contraria a las enseñanzas de Aristóteles (p. 275) y fue criticada por Venn (1881), por más que considerara que sus seguidores marcaban una época: «the "Modern English Logic" i.e. of the works of Mr G. Bentham, Hamilton, De Morgan, Boole, and Prof. Jevons» (p.xxix).

Bentham propone, en lugar de cuatro proposiciones obtenidas en función exclusivamente de la cantidad y la cualidad del sujeto, ocho proposiciones elementales que son resultado de combinar la cantidad y la cualidad de sujeto y predicado, de modo que es posible su conversión sin modificar su significado, precisamente porque permanece constante en la conversión la cantidad y la cualidad de los términos.

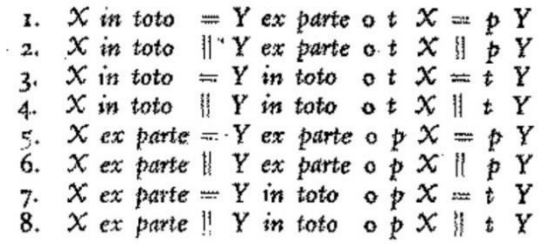


ILUSTRACIÓN 258. PROPOSICIONES EN BENTHAM (1827), EN BOCHENSKI Y BRAVO, 1985, P. 276.

6.4.2 Sir William Hamilton (1788 – 1856) y la cuantificación del predicado

Bochenski y Bravo (1985), justo antes de reproducir la teoría escolástica de los *exponibilia* de diversos lógicos de los ss. XVII y XVIII, afirma que para Hamilton el segundo error fundamental de la lógica consiste en no tener presente que en el pensamiento el predicado tiene siempre una cantidad, al igual que el sujeto, si bien esta cantidad con frecuencia no se expresa explícitamente por ser innecesaria en el uso corriente del lenguaje. Sin embargo, es necesario hacer dicha cantidad explícita cuando el predicado se convierte en el sujeto de la sentencia por conversión. Para Hamilton, prescindir en la conversión de la mención explícita de la cantidad del predicado es degradar la lógica de la ciencia de la necesidad del pensamiento a un inservible instrumento de la ambigüedad del lenguaje.

> The Second cardinal error of the logicians is, the not considering that the Predicate has always a quantity in thought, as much as the Subject ; although this quantity be frequently not explicitly enounced, as unnecessary in the common employment of language; for the determining notion or predicate being always thought as at least adequate to, or co-extensive with, the subject or determined notion, it is seldom necessary to express this, and language tends ever to elide what may safely be omitted. But this necessity recurs, the moment that, by conversion, the predicate becomes the subject of the proposition; and to omit its formal statement is to degrade Logic from the science of the necessities of thought, to an idle subsidiary of the ambiguities of speech. An unbiassed consideration of the subject will, I am confident, convince you that this view is correct. (Hamilton, 1860, pp. 258-259)

Hamilton lamentaba que la lógica clásica hubiera olvidado la dimensión extensional del predicado y afirmaba que la lógica silogística podría mejorarse si no solo se cuantificaran los sujetos, sino también los predicados de las premisas (Hamilton, 1865; Lombraña, 1989), que es lo que nosotros hacemos en el diagrama de Marlo.

> That the predicate is as extensive as the subject is easily shown. Take the proposition, — All animal is man, or, All animals are men. This we are conscious is absurd, though we make the notion man or men as wide as possible; for it does not mend the matter to say, — All animal is all man, or, All animals are all men. We feel it to be equally absurd as if we said, — All man is all animal, or, All men are all animals. Here we are aware that the subject and predicate cannot be made coextensive. (Hamilton, 1860, p. 259)

De Morgan pensó equivocadamente que Hamilton le había precedido en la teoría de los *numerically definite sillogism* y, de hecho, Hamilton le escribió acusándole de plagio en la teoría de la cuantificación del predicado (Lombraña, 1989, pág. 253). También nos dice Lombraña (1989) que Hamilton distinguió tres sistemas en la cuantificación del predicado: Uno referente a la cuantificación de los sujetos, otro a la de los predicados y otro el que presenta las cantidades explícitas más bien que una determinada mayor o menor extensión (cantidad singular y universal) y una indeterminada extensión parcial (cantidad particular), y acusó a De Morgan de haber confundido los términos definido e indefinido. Los tres esquemas que distingue Hamilton son expuestos por De Morgan en el apéndice titulado “Account of a Controversy between the Author of this Work and Sir William Hamilton of Edinburgh; and final reply to the latter” (De Morgan, 1847b, pp. 297-317).

Al margen de polémicas sobre la autoría de la doctrina y sobre la diferencia entre la cuantificación con términos de cantidad numéricamente definidos o no, Hamilton trató de ilustrar mediante diagramas la cuantificación del predicado que permitía considerar las proposiciones como ecuaciones. Sin embargo, su punto de vista se vería frenado primero por el rechazo del aristotelismo a cuantificar el predicado y segundo por la oposición de Venn, quien tenía su propuesta ganadora para la lógica matemática acerca de la estructura elemental de toda proposición.

> Hamilton (Discussions, p. 683) has made an attempt to represent his eight forms diagrammatically, on Lambert's linear plan. He offers only six diagrams, and as much as admits that one of these is superfluous. See also his Logic (II. 277) where the eight propositions are illustrated by four circular diagrams. (Venn, 1881, p. 14)

Según la doctrina de la cuantificación del predicado, una proposición expresa si parte o la totalidad del sujeto es igual o distinto a parte o la totalidad del predicado, resultando así ocho proposiciones elementales, aunque no necesariamente tenemos que aceptar que la cuantificación sea resultado de un proceso consciente y deliberado: “I cannot think Sir William Hamilton right in maintaining that the quantity of the predicate is 'always understood in thought.' It is implied, but is not present in the mind of the person who asserts the proposition” (Jevons, 1869, p. 68).

Bochenski y Bravo (1985) afirman que en la doctrina de la cuantificación del predicado las sentencias (*propositions*) simples pueden ser afirmativas y negativas y todo término puede ser universal o particular. Ahora las sentencias son reductibles a ocho formas elementales. Se representarán los dos términos por las letras X e Y, su identidad por el símbolo matemático =, su diversidad por el signo ||, su universalidad por la palabra *in toto*, su particularidad por la palabra *ex parte*; o, para mayor brevedad todavía, anteponiendo las letras *t* y *p* como signos de universalidad y particularidad.

1	1	*X in toto = Y in toto*	*t X = t Y*
2	2a	*X in toto = Y ex parte*	*t X = p Y*
3	2b	*X ex parte = Y in toto*	*p X = t Y*
4	3	*X ex parte = Y ex parte*	*p X = p Y*
5	4	*X in toto || Y in toto*	*t X || t Y*
6	5a	*X in toto || Y ex parte*	*t X || p Y*
7	5b	*X ex parte || Y in toto*	*p X || t Y*
8	6	*X es parte || Y ex parte*	*p X || p Y*

TABLA 35. PROPOSICIONES ELEMENTALES DE LA CUANTIFICACIÓN DEL PREDICADO.

Si nos fijamos en la propuesta de las ocho proposiciones básicas de Hamilton, veremos que la estructura de las proposiciones 2 y 3, lo mismo que la estructura de las proposiciones 6 y 7 solo difiere en el orden de las variables, por lo que sería posible aumentar hasta doce si duplicáramos las proposiciones 1, 4, 5 y 8 alterando también el orden de las variables X e Y.

1	*X in toto = Y in toto*	*t X = t Y*
2	*Y in toto = X in toto*	*t Y = t X*
3	*X in toto = Y ex parte*	*t X = p Y*
4	*X ex parte = Y in toto*	*p X = t Y*
5	*X ex parte = Y ex parte*	*p X = p Y*
6	*Y ex parte = X ex parte*	*p Y = p X*
7	*X in toto || Y in toto*	*t X || t Y*
8	*Y in toto || X in toto*	*t Y || t X*
9	*X in toto || Y ex parte*	*t X || p Y*
10	*X ex parte || Y in toto*	*p X || t Y*
11	*X es parte || Y ex parte*	*p X || p Y*
12	*Y es parte || X ex parte*	*p Y || p X*

TABLA 36. AUMENTO DE OCHO A DOCE LAS PROPOSICIONES EN EL SISTEMA DE HAMILTON.

Claro que también podemos reducir de ocho a seis el número de proposiciones elementales

1	*X in toto = Y in toto*	*t X = t Y*
2	*X in toto = Y ex parte*	*t X = p Y*
3	*X ex parte = Y ex parte*	*p X = p Y*
4	*X in toto || Y in toto*	*t X || t Y*
5	*X in toto || Y ex parte*	*t X || p Y*
6	*X es parte || Y ex parte*	*p X || p Y*

TABLA 37. REDUCCIÓN DEL SISTEMA DE HAMILTON A SEIS PROPOSICIONES ELEMENTALES.

Esta última clasificación de las proposiciones elementales podría haber servido como punto de partida para elaborar los diagramas de la lógica matemática. Sin embargo, el sistema gráfico con diagramas tipo Leibniz que Hamilton presenta reduce a solo cuatro el número de diagramas fundamentales.

La tabla de Hamilton, según Venn (1881) es: «All A is all B, Any A is not any B, All A is some B, Any A is not some B, Some A is all B, Some A is not any B, Some A is some B, Some A is not some B» (p.9), entre los dos extremos que suponen la *toto-total* coinclusión y la *toto-total* coexclusión

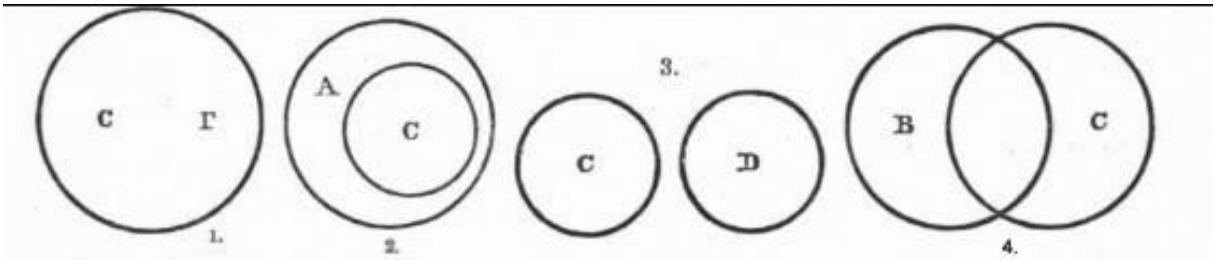


ILUSTRACIÓN 259. DIAGRAMAS PARA LAS CUATRO ESPECIES DE PROPOSICIÓN TENIENDO EN CUENTA LA CANTIDAD Y LA CUALIDAD DEL PREDICADO HAMILTON. TOMADO DE HAMILTON, 1860, P. 277.

Sabemos, siguiendo a Jessop (2011), que Hamilton detalla las formas que se expresan en los diagramas de la anterior ilustración del siguiente modo:

(ii) *Toto-partial coinclusion* (fig. 2)

(3) *Parti-total coinclusion* (fig. 2)

(iv) *Parti-partial coinclusion* (fig. 4)

(6) *Toto-partial coexclusion* (fig. 4)

(vii) *Parti-total coexclusion* (fig. 4)

(8) *Parti-partial coexclusion* (fig. 4) (p. 146).

Hamilton emplea el mismo diagrama (4) para expresar la identidad particular de la tradicional I, *"Alguno es"* y la exclusión particular de la proposición O, *"Alguno no es"*. Por otra parte, no es capaz de expresar gráficamente la diferencia entre las proposiciones *X in toto* || *Y in toto* (3) y *X in toto* || *Y ex parte,* que carece de diagrama propio. El diagrama tres de la figura sirve para formalizar gráficamente la universal negativa *Ningún A es B* y su inversa *Ninguna B es A*, donde claramente la totalidad de A y la totalidad de B se excluyen. Luego queda claro el esquema para *X in toto* || *Y in toto* ¿Pero qué significa *X in toto* || *Y ex parte*, o lo que es lo mismo, qué decimos al afirmar que todo X se excluye con parte de Y y cómo se representa?

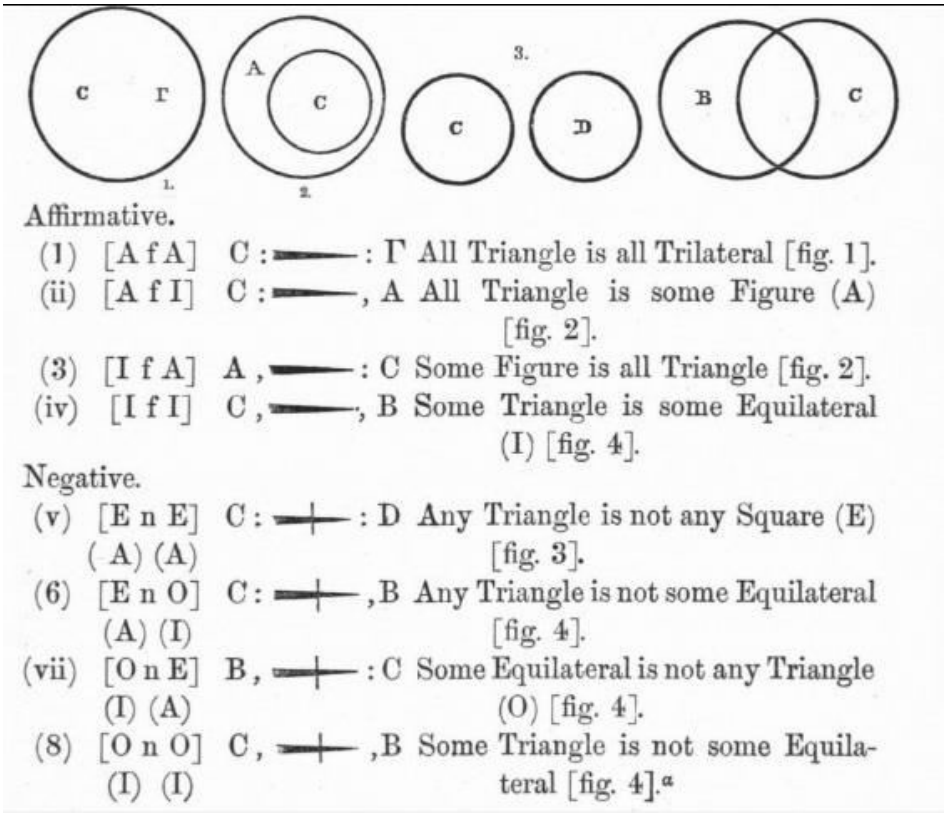
Jessop (2011) afirma que, utilizando la terminología de Hamilton, se debe considerar que los diagramas de círculos que empleaba no expresan cuatro sino tres posibles relaciones principales de: Coinclusión *toto*-total (fig. 1); coexclusión *toto-total* (fig. 3); y, reunidos bajo una clase de relaciones de contra-relación, coinclusión incompleta y coexclusión (fig. 2 y 4). En todo caso, en el sistema de Hamilton no hay correspondencia evidente entre las ocho proposiciones elementales que plantea y los cuatro diagramas tipo Euler que las representan. En el sistema de Venn sí habrá, aparentemente, correspondencia.

Teniendo en cuenta la cantidad de sujeto y predicado y la cualidad de la cópula, Hamilton propone ocho proposiciones de las que afirmaba Venn (1881) que solo tenían la virtud de ser perfectamente simétricas. Por su parte, afirmaba Gardner (1958) que Hamilton llegó a ellas reemplazando cada una de las cuatro proposiciones tradicionales por dos con el predicado cuantificado, aunque nosotros no creemos que eso fuera exactamente lo que hizo, y que se combinan en 512 modos de los cuales 108 son válidos.

All *A* is all *B*,	Any *A* is not any *B*,
All *A* is some *B*,	Any *A* is not some *B*,
Some *A* is all *B*,	Some *A* is not any *B*,
Some *A* is some *B*,	Some *A* is not some *B*.

TABLA 38. PROPOSICIONES DE HAMILTON SEGÚN VENN, 1881, P. 9.

Como ya sabemos, Hamilton trató de mostrar, sin éxito, la estructura elemental de las proposiciones empleando diagramas tipo Leibniz-Euler e inventó para el mismo fin un sistema de notación que, como explica Jessop (2011), incluía cuñas con un lado ancho y otro estrecho que conectaban los términos permitiendo distinguir sujeto de predicado y en el que dos puntos al lado de un término indicaban que dicho término se toma en su totalidad, mientras que una coma indicaba que se tomaba de forma particular.



Affirmative.

(1) [A f A] C : ▬ : Γ All Triangle is all Trilateral [fig. 1].

(ii) [A f I] C : ▬, A All Triangle is some Figure (A) [fig. 2].

(3) [I f A] A, ▬ : C Some Figure is all Triangle [fig. 2].

(iv) [I f I] C, ▬, B Some Triangle is some Equilateral (I) [fig. 4].

Negative.

(v) [E n E] (A) (A) C : ─┼─ : D Any Triangle is not any Square (E) [fig. 3].

(6) [E n O] (A) (I) C : ─┼─ , B Any Triangle is not some Equilateral [fig. 4].

(vii) [O n E] (I) (A) B, ─┼─ : C Some Equilateral is not any Triangle (O) [fig. 4].

(8) [O n O] (I) (I) C, ─┼─ , B Some Triangle is not some Equilateral [fig. 4].[a]

ILUSTRACIÓN 260. PROPOSICIONES ELEMENTALES EN DIAGRAMAS CIRCULARES Y LA NOTACIÓN DE HAMILTON, TOMADO DE HAMILTON, 1860, P. 277.

El uso de los dos puntos y la coma para indicar la extensión de los términos junto a la cuña que los conecta o bien los separa cuando está dividida en el centro, permite a Hamilton representar gráficamente las ocho proposiciones elementales que aparecen en la ilustración anterior y que son criticadas por Venn (1881). También con puntos y comas, como recoge Baynes (1850), Hamilton añadió a los cuantificadores todo y alguno, los cuantificadores “la mitad y más que la mitad” (p.155).

En Estados Unidos las doctrinas de Hamilton despertaron el interés de Aaron Schuyler (1869), que mostró la correspondencia entre el significado de las representaciones cuneiformes y los diagramas tipo Leibniz, poniendo de manifiesto, seguramente sin pretenderlo, las redundancias en el sistema de Hamilton que Venn le criticaría unos años más tarde.

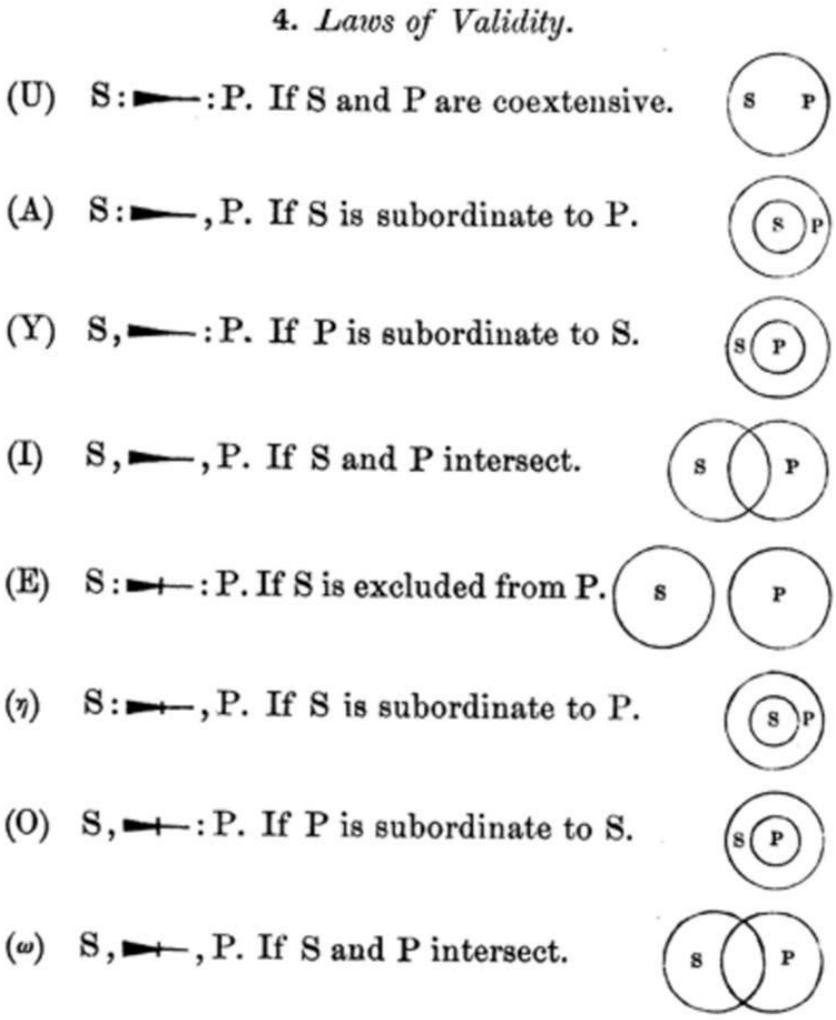


ILUSTRACIÓN 261. DIAGRAMAS PARA LA VALIDACIÓN DE PROPOSICIONES EN HAMILTON. TOMADAS DE SCHUYLER, 1869, P. 95.

Schuyler apreciaba la doctrina de Hamilton y se molestó en exponerla de forma pedagógica, incluyendo una tabla de oposición de los juicios generada con las ocho proposiciones que debía reforzar la sensación de simetría.

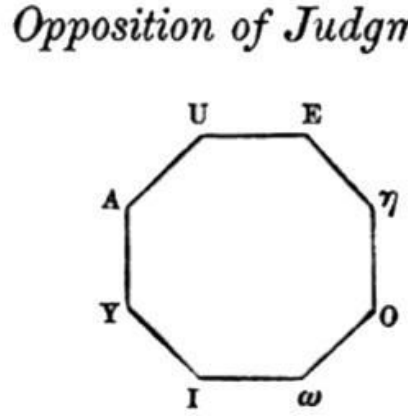


ILUSTRACIÓN 262. TABLA DE OPOSICIÓN DEL JUICIO. TOMADO DE SCHUYLER, 1869, P. 96.

En la notación diagramática, Hamilton distingue entre los extremos grueso y delgado de la cuña, lo que le sirve para marcar si la proposición se lee en extensión o en intensión (Jessop, 2011). Según Venn (1881) esa era la característica diferencial del sistema de notación de Hamilton, aunque el intento de comprimir ambas interpretaciones lo consideraba un error.

Al margen del acierto o no de la interpretación hamiltoniana de la complicada y compleja relación que existe entre la interpretación intensional y extensional de los términos de una proposición, los símbolos del sistema cuneiforme permiten resolver silogismos sin dificultad.

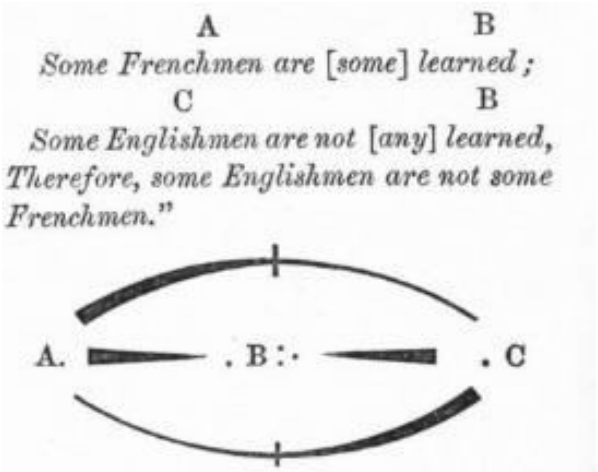


ILUSTRACIÓN 263. SILOGISMO POR EXCLUSIÓN. TOMADO DE HAMILTON, 1860, P. 324.

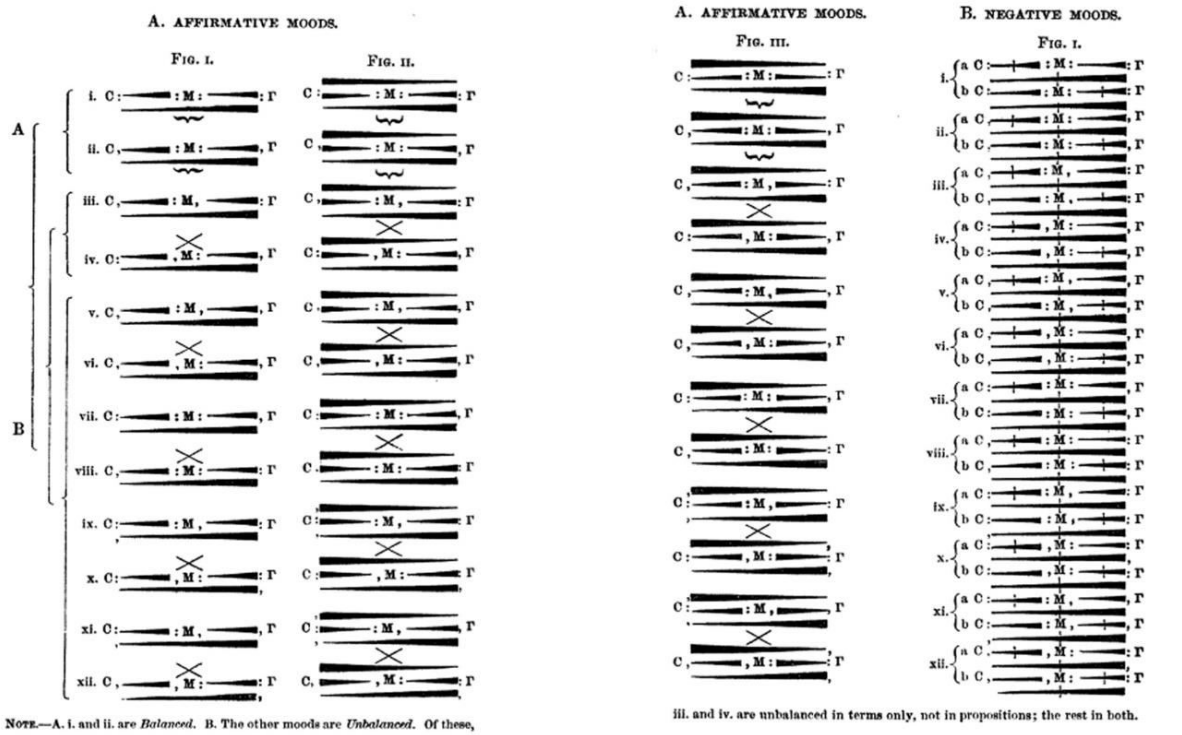


ILUSTRACIÓN 264. SILOGISMO FIGURADO EN HAMILTON. TOMADO DE ATWATEK, 1867, P. 243. LA LLAVE HORIZONTAL REPRESENTA QUE AL INVERTIR LAS PREMISAS NO CAMBIA EL MODO; EL ASPA INDICA LO CONTRARIO.

El sistema cuneiforme también permitía resolver silogismos encadenados aplicando la ley siguiente ley fundamental enunciada en Schuyler (1869):

The first premise in the first form, the last in the second, and the first or last in the third are the only ones that can be particular; and the subject of the particular premise will be the subject of the conclusion. (p.88)

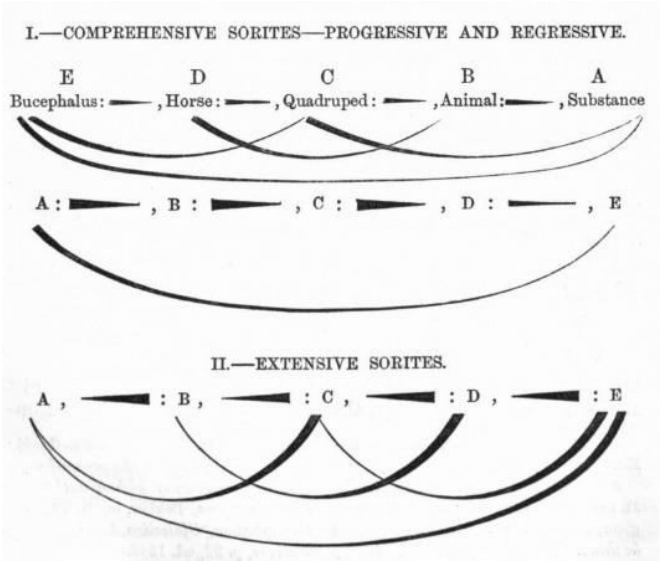


ILUSTRACIÓN 265. SILOGISMO ENCADENADO. TOMADO DE HAMILTON 1860, P. 397.

Esta notación de Hamilton, claramente relacionada con una visión del razonamiento como ilación o conexión, es incluida por Gardner en su recopilación histórica de diagramas y máquinas lógicas.

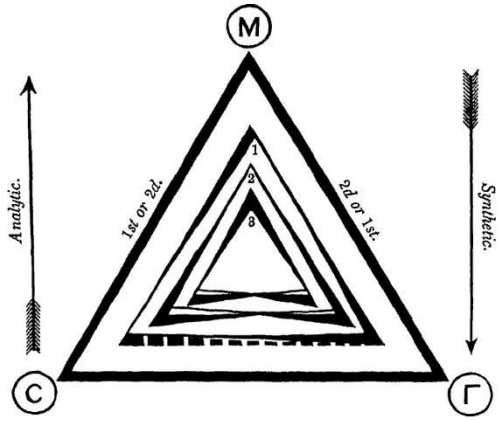


ILUSTRACIÓN 266. SILOGISMO NO FIGURADO DE HAMILTON. TOMADO DE GARDNER, 1958.

En la anterior ilustración, el triángulo exterior con líneas de límite de ancho uniforme representa el "silogismo no estructurado" o *No-figurado* de Hamilton, una imagen del filósofo escocés (Hamilton, 1860, p. 469) que presenta Gardner de forma simplificada. Como ya explicamos en el apartado de la estructura profunda de las figuras del silogismo, el triángulo exterior el silogismo *No-figurado* contiene en su interior a las tres figuras del silogismo aristotélico. Y tenemos que decir que, a pesar de que Gardner (1958) juzga el patrón del silogismo *No-figurado* de Hamilton “más misterioso que el que ofreciera Bruno” (p. 36), nosotros entendemos que Hamilton anticipa el modo que tenemos de entender nuestros propios diagramas, pues considera que subyace a las figuras y modos concretos del silogismo una estructura única que constituye la forma misma del razonamiento y que permite la inferencia al proyectarse sobre las relaciones de sujeto y predicado que se establecen en las premisas.

En las figuras aristotélicas es importante la distinción entre sujeto y predicado, lo cual se señala en la imagen conectando los términos con líneas más anchas en la parte del sujeto y estrechas en la parte del predicado. Sin embargo, en el silogismo *No-figurado* esta diferencia desaparece y, por ello, la línea exterior de la imagen tiene el mismo grosor en todos los vértices del triángulo. Como señala Baynes (1850), al transformar la expresión de cualquier silogismo válido con predicados cuantificados, Hamilton pudo expresarlo en términos de igualdad, y así, una vez cuantificado sujeto y predicado, no importa el sentido en el que interpretemos el silogismo: podemos ir de

las premisas a la conclusión en un proceso de síntesis o al contrario en un proceso de análisis, del mismo modo que podemos leer las conclusiones intercambiando los papeles del término mayor y menor (p153). Por tanto, en los diagramas de Hamilton, como en los de Venn o los nuestros, puede leerse la conclusión intercambiando los papeles de sujeto y predicado, de manera que es irrelevante qué termino ejerza de mayor o de menor. Como afirma Hamilton (1860): «In the Unfigured Syllogism, and in the Second and Third Figures, there is no difference between the Major and Minor Terms, and, consequently, no distinction, (more than one arbitrary and accidental), of Major and Minor Propositions. — All conspicuously typified» (p.472).

Hamilton afirma que en la estructura profunda de la proposición del silogismo No figurado no hay diferencias entre sujeto y predicado y que en ella solo existen relaciones de igualdad, las cuales servirán de base más tarde a la concepción de la proposición como función y argumento. Nosotros pensamos que el enfoque de la doctrina de la cuantificación del predicado permite comprender, de una forma sencilla, que la estructura de tal función expresa siempre una determinada proporción $\frac{x}{y}$ entre argumentos, donde *x* e *y* pueden ser también términos negativos.

Si Hamilton hubiera captado la estructura exacta de la proposición con la agudeza de De Morgan, se habría percatado de que la universal negativa *Ningún A es B*, expresa que *toda A es parte de* $\neg B$, lo cual era perfectamente sabido por Venn. Pero en lugar de desarrollar las virtudes de la doctrina de la cuantificación del predicado corrigiendo sus defectos, Venn prefirió destacar sus defectos y minusvalorar sus aciertos, poniendo como centro de atención en el análisis de la proposición-función las posibilidades que son eliminadas en las premisas. De esta forma, y desde nuestro punto de vista, la simplicidad de los diagramas de Venn contribuyó activamente a complicar la lógica de forma innecesaria, porque el análisis de la proposición en términos de función y argumento es perfectamente compatible con los esquemas tradicionales del análisis de la inferencia basados en las relaciones parte/todo, que es exactamente el análisis de los razonamientos probabilísticos.

6.4.2.1 Las críticas de Venn y Gardner

Jessop (2011) apunta a que el estilo del discurso filosófico de Hamilton no pudo ser comprendido por muchos de sus contemporáneos, lo cual justifica en parte que, a pesar del éxito que tuvieron a mediados del siglo XIX sus ideas, el debate británico entre los pro y anti hamiltonianos fuera intenso (Gardner, 1958).

> Educated in philosophical discourses of the much more sedate and even-tempered stateliness that typified so much earlier 18th century and contemporary philosophical prose from Francis Hutchison, to Hume, Smith, Reid and Dugald Stewart, few at the time may have been able to understand what Hamilton wrote. (Jessop, 2011, pp. 102-103)

Hamilton se oponía al aristotelismo tradicional, que incluía la condena de la cuantificación del predicado y fue criticado por Venn (1881), que negaba injustamente cualquier deuda de las nuevas formas simbólicas de lógica matemática hacia ella: «Es difícil conjeturar cómo estas formas simbólicas podrían así estar conectadas con la doctrina de Hamilton, a menos que por una conclusión apresurada del hecho de que ambos sistemas adopten la forma ecuacional» (p.175). Hoy sabemos que las discusiones entre Hamilton y De Morgan hicieran retomar a Boole su interés por la lógica (de Ledesma et al., 1997).

William Stanley Jevons fue uno de los lógicos que reconoció la importancia histórica de la doctrina de la cuantificación del predicado, afirmando en más de una ocasión que Boole había desarrollado su sistema gracias a la cuantificación del predicado, tal y como vemos en Jevons (1864) y en Jevons (1869) cuando afirma:

> Bentham did more than assert our freedom of inquiry; in his uncouth logical writings are to be found most original hints, and in editing his papers his nephew George Bentham pointed out the all-important key to a thorough logical reform, the quantification of the predicate. Sir William Hamilton, Archbishop Thomson, and Professor De Morgan rediscovered and developed the same new idea. Dr. Boole, lastly, employing this fundamental idea as his starting point, worked out a mathematical system of logical inference of extraordinary originality. (pp.4-5)

Más recientemente, Lombraña (1989) afirmó que fue un aspecto muy destacable para el desarrollo de la lógica de clases el hecho de que Ploucquet, anticipándose en la cuantificación del predicado, observara que de dos negativas se sigue algo, pues *De Toda A es no-B* y *Toda A es no-C* se sigue que *Un cierto no C es no-B*, pues requiere: primero considerar contra Aristóteles que *X es no-Y* es una proposición negativa; segundo tener en cuenta la clase complementaria y tercero, observar las relaciones de no-Y con otras clases (p.208).

Aunque resulta para nosotros del todo imposible hacer una valoración cabal del valor o la originalidad de las aportaciones de Hamilton a la historia de la lógica, es claramente injusto el modo en el que Venn y Gardner critican sus diagramas y subestiman la nueva doctrina del predicado afirmando que es algo obvio en el lenguaje ordinario. Así, dice Gardner (1958): « In common speech, for instance, if one says "Some of Picasso's paintings are mediocre,' one does not want to quantify the predicate, it being obvious that there are other mediocre things that are not paintings by Picasso»(p.36). Y en el mismo sentido encontramos en Venn (1881):

> I think then that the Common Logic is best studied on the old lines, and that the Symbolic Logic should be regarded as a Development or Generalization of it. It is for this reason that I cannot regard the attempts made, in such very different directions, by Hamilton and Prof. Jevons, with any great satisfaction. The petty reforms represented by the Quantification of the Predicate and so forth, seem to me to secure the advantages of neither system. We cut ourselves loose from the familiar forms of speech, and yet we do not secure in return any of the advantages of wide generalization. (p.xxvii)

Venn afirma del sistema de notación de Hamilton que era bastante conocido y que había sido descrito por el propio Hamilton como fácil, simple, manifiesto, preciso, completo, etc. Sin embargo, para Venn (1881) tal sistema no merece ser clasificado como diagramático, sino que es puramente simbólico, ya que no hay nada en los extremos de una cuña que pueda sugerir sujetos y predicados, o en dos puntos y comas para sugerir distribución y no distribución (p.432). También dijo Gardner (1958) que el sistema solo tiene la apariencia superficial de ser un diagrama y el uso de los signos es engorroso a pesar de lo que afirmaba Hamilton acerca de su simplicidad (p.35) y añade, quizás tomando prestados los juicios de Venn, que Hamilton falló al comprender incluso los conceptos matemáticos más elementales (p.36).

> Fortunately there is another mode of viewing the proposition, far more powerful in its applications than either of those hitherto mentioned. It is the basis of the system introduced by Boole, and could never have been invented by any one who had not a thorough grasp of those mathematical conceptions which Hamilton unfortunately both lacked and despised (Venn J. , 1881, pág. 22)

Gardner (1958) insiste en descalificar del sistema de Hamilton siguiendo los pasos de Venn cuando afirma que, aunque su sistema lógico tiene una simetría verbal clara, demostró ser prácticamente inútil en la práctica (p.36).

> The Hamiltonian scheme has, no doubt, a specious look of completeness and symmetry about it. Affirmation and denial, of some and of all of the subject and predicate, give clearly eight forms. But on subjecting them to criticism, by enquiring what they really say, we see that this completeness is illusory (Venn J. , 1881, pág. 13)

Otra de las críticas que hace Venn al sistema de Hamilton es que sus formas no pueden expresar la ambigüedad de la universal afirmativa. Esto es, cuando afirmamos que *Toda A es B*, dejamos en la incertidumbre si al mismo tiempo *Toda B es A* o solo significamos que *Alguna B es A*. Incluso afirma Venn (1881) que en este aspecto es preferible la vieja forma de la universal afirmativa A, pues recoge las dos proposiciones del sistema de Hamilton expresadas como *Toda A es toda B* y *Toda A es alguna B*.

> For instance, as above remarked, we may want to say that 'All A are B,' when we do not know whether or not the two terms are coextensive in their application. The old form just hit this off. An obvious imperfection in the Hamiltonian scheme is that with all his eight forms he cannot express this very common and very simple form of doubtful statement, by means of a single proposition. (p.14)

Estamos de acuerdo con Venn en las ventajas de un sistema de notación que, como el nuestro, permita trabajar con la incertidumbre, pero nos sorprende que afirme que es mejor la vieja universal afirmativa A que las nuevas formas ecuacionales de Hamilton, cuando fácilmente se subsana el problema que refiere interpretando las particulares como *Al menos parte* en lugar de como *Una parte sí y la otra no*.

El error de Hamilton de no integrar la ambigüedad y la incertidumbre en su notación era consistente con su empeño por convertir la lógica en una ciencia necesaria del pensamiento sin las ambigüedades del habla (Hamilton, 1860, pp. 258-259). Sin embargo, ante lo que fue llamado por Baynes (1850) el nuevo análisis de las formas lógicas, Venn (1881) reaccionó poniendo el acento en sus defectos, como por ejemplo, en el hecho de que el sistema de ocho proposiciones le parecía “inconsistente” (p.29), redundante por contener “tres formas superfluas” (p.31) e “incapaz de enfrentarse a la ilustración de ecuaciones complejas” (p.115).

A pesar de que supera los objetivos de esta tesis demostrar que el sistema de Hamilton podría resolver las ecuaciones complejas que plantea Venn, no es difícil suponer que lo hubiera conseguido desarrollando un

procedimiento similar al empleado por Pagnan (2013) basado en las conexiones entre variables que imponen las premisas y siempre que se hubiera avenido a representar *Ningún A es B* como la conexión de *Toda A con parte de* $\neg B$. Pero la realidad es que el sistema de notación de Hamilton con sus diagramas de cuña sucumbirá históricamente, y con él la doctrina de la cuantificación del predicado, posiblemente, por la simplicidad de los diagramas de Venn, las críticas que éste le hizo y el desprecio por el sentido común y por el lenguaje natural que sintieron buena parte de los lógicos matemáticos de los siglos XIX y XX.

Además, como afirma Jessop (2011), Hamilton tampoco fue entendido correctamente por lógicos más próximos a él como De Morgan y quizás fue así porque sus doctrinas, como apreciamos en Fogelin (1976), todavía causaban errores de interpretación en el último tercio del siglo XX, poniendo en entredicho su consistencia.

Debemos reconocer que el intento que hizo Hamilton de exponer la doctrina de las ocho proposiciones elementales mediante diagramas circulares fue muy inferior a la propuesta con la que Venn consiguió ligar históricamente la lógica de clases a sus círculos intersecados, que también eran muy superiores en simplicidad y capacidad de convicción a los diagramas de cuñas del filósofo escocés. Es innegable que toda inferencia requiere, en último término, de la eliminación de posibilidades y que tal eliminación puede ilustrase con los diagramas de Venn, lo mismo que con cualquier otra herramienta que permita listar de forma exhaustiva tales posibilidades como apoyo al lógico matemático en la comprobación de sus resultados. Sin embargo, cuando se trata de comprender el modo en el que la razón comunica el valor de las posibilidades del universo del discurso de forma inteligente, esto es, con economía, precisión y relevancia, nos parece que el enfoque de Ploucquet, Stanhope, Bentham, Hamilton, Jevons y otros, además de simetría lingüística proporciona simplicidad a la lógica y ofrece las claves para unificar las doctrinas de los dos pensadores más grandes en este campo de todos los tiempos: Aristóteles y Boole.

6.4.3 El debate sobre Hamilton

No se puede dudar de la talla intelectual de un personaje que con sus clases de Lógica y Metafísica influyó en científicos como Maxwell (Olson, 2015). Siguiendo a Graham (2015) en el artículo que la *Enciclopedia de Standford* dedica a la Filosofía escocesa del siglo XIX, podemos afirmar que Hamilton fue considerado en su momento una figura intelectual de importancia internacional, llegando a ser incluido junto a Descartes, Berkeley, Locke, Kant y Hegel en un volumen dentro de la serie *Philosophical Classics* editada por William Knight. Sin embargo, sufrió en solo una década dos ataques devastadores desde perspectivas filosóficas opuestas. El más conocido fue *el Examen de la filosofia de Sir William Hamilton*, de John Stuart Mill (1865). Desde una perspectiva idealista recibió otro ataque en el mismo año del filósofo escocés Hutchison Stirling. Además, el estudiante y amigo de Hamilton, James Frederick Ferrier, se esforzó en que la filosofía escocesa adoptara un rumbo diferente tanto al de Reid como al de Hamilton. Entre los defensores de Hamilton estuvieron el filósofo de Oxford H L Mansel, John Veitch (Veitch, 1883), alumno y amanuense de Hamilton, y James McCosh, que no pudieron impedir el rápido declive de la reputación filosófica de Hamilton.

A pesar de todo es difícil creer que fuera producto de una epidemia de ceguera intelectual o de una moda pasajera el hecho de que la nueva doctrina de la cuantificación del predicado fuera vista como una revolución en tiempos de Hamilton. Así, Arnauld (1850) decía de ella:

> The exposition and application of this distinction, indeed, combined with the new doctrine of the predicate, will, I need scarcely say, to any conversant with logic, constitute a new, as ii; will be the last, revolution in its history the era of its completion second only in importance to the era of its discovery.(xxix)

Nosotros pensamos que si Venn gastó tantas energías en criticar a Hamilton y la doctrina de la cuantificación del predicado fue porque sabía que era el rival a tener en cuenta frente a su propia propuesta. Y es cierto que los diagramas de Venn eran más simples y fáciles de entender, aunque Thomas Spencer Baynes (1823-1887) afirmaba en el prefacio de *An essay on the new analytic of logical forms* (Baynes, 1850) que habiendo asistido a las clases de Hamilton en 1845-46, le parecía que su doctrina podría ser fácilmente captada en todos sus puntos esenciales por un estudiante ordinario: Un punto de vista que debían compartir, entre otros, Schuyler, profesor de la Universidad de Baldwin, Lyman Atwatek y Henry N. Day cuando incluyeron las doctrinas de Hamilton en sus manuales de lógica

> The author has endeavored, in the following treatise, to give a clear, concise, and systematic development of the principles of Logic (...) The works of the following authors have been examined : Aristotle, Hamilton, Mill, De Morgan, Thompson, Mansel, Whately, Wilson, Tappan, Mahan, Day, McGregor, True, und Coppee. To Hamilton, the author is especially indebted for valuable aid in reference to the following sub jects: Classification of Science, General Outline, Concepts, and Modified Logic. (Schuyler, 1869, p. 3)

> Quite the most expressive and complete system of Notation, and one of his important contributions to Logic, is that invented by Sir William Hamilton. It is so contrived as to exhibit, at a glance, all the characteristics of the valid Syllogism, both according to intension and extension, in all the figures. (Atwatek, 1867, p. 236)

> The Lectures of Sir William Hamilton have, to a great extent at least, supplied these fatal defects and given us a system full and complete, and in most admirable method. His "New Analytic " marks an era in the progress of abstract science; and in this new form, Logic is in its own right restored to the high commanding position and rank to which it has laid claim in all truly liberal education. (Day, 1863, p. v)

William Thomson (1819-1890), arzobispo de York desde 1862 hasta 1890 dedicó a Hamilton la cuarta edición de su libro *An Outline of the Necessary Laws of Thought*, obra en la que afirma que la notación de Hamilton es simple y que es incluso mejor que la de Euler. Así, leemos en Thomson (1871):

> A mode of notation proposed by Sir William Hamilton is, beyond doubt, one of the most important contributions to pure Logic which has ever been made since the science was put forth; and I am fortunate in being permitted to annex it. Its excellencies are — that it is very simple, that it shows the equivalent syllogisms in the different figures at a glance, that it shows as readily the convertible syllogisms in the same figure, that it enables us to read each syllogism with equal facility according to extension and intension, the logical and the metaphysical whole (…) Perhaps the most celebrated plan of notation is that which Euler has described in his Lettres a' une princesse d' Alemagne. But, as it only represents the extension of the terms, and not the opposite capacity, of intension, it is inferior to that which has just been described. (pp.281-220)

Jevons, que según Marciszewski y Murawski (1995), había sido uno de los primeros en ver la importancia de los trabajos de Boole cuando el resto de lógicos británicos lo ignoraban, criticó a Mill no haber comprendido el valor de la doctrina de la cuantificación del predicado.

> Though I have pointed out how consistent are many of Mr. Mill's expressions with the view of logic here put forward, and how clearly in one place he describes the principle of substitution itself, I cannot but feel that his system is full of anomalies and breaches of consistency. These arise, I believe, from the profound error into which he has fallen, of undervaluing the logical discovery of the quantification of the predicate. Of Sir W. Hamilton's views he says : 1 — " If I do not consider the doctrine of the quantification of the predicate a valuable accession to the art of logic, it is only because I consider the ordinary rules of the syllogism to be an adequate test, and perfectly sufficient to exclude all inferences which do not follow from the premises. (Jevons, 1869, p. 125)

Así pues, existen testimonios en defensa de una doctrina que fue criticada dura e injustamente por una parte de los lógicos que determinarían finalmente, para lo bueno y para lo malo, el devenir de la lógica matemática.

6.4.4 La distinción sujeto-predicado en los diagramas de Hamilton

Hamilton, como ya hemos señalado, no podía ser visto con buenos ojos por los aristotélicos debido a su cuantificación del predicado. Por otra parte, mantiene en sus diagramas de cuña la distinción sujeto-predicado, rechazada frontalmente por Venn y las nuevas formas simbólicas de la lógica. La distinción sujeto-predicado es eliminada de la lógica matemática porque no es relevante cuando consideramos las proposiciones como igualdad. También se desvanece la distinción cuando procesamos la información en paralelo en nuestras redes de expectativas. No obstante, a nosotros nos parece un matiz imprescindible cuando abordamos el *λόγος* desde la perspectiva de la comunicación y del lenguaje, sobre todo cuando nuestros intereses giran en torno a la didáctica del razonamiento y la argumentación.

Desde la perspectiva del lenguaje y del discurso analiza Aristóteles las figuras del silogismo y afirma en *Tópicos* I, 1, 100a 25: "Un *razonamiento* es un discurso *(lógos)* en el que, sentadas ciertas cosas, necesariamente se da a la vez a través de lo establecido, algo distinto de lo establecido" (Aristóteles, Trad. 1982, p.90).

Por su parte, Hamilton afirma que a las figuras del silogismo subyace un silogismo *No-figurado* en el que no importa qué es sujeto y qué predicado, qué es termino mayor o menor (Atwatek, 1867; Hamilton, 1860; Ueberweg,

2001; Uerberweg & Lindsay, 1871). El silogismo *No-Figurado* intenta establecer, a nuestro modo de ver, puentes entre lo que llamamos anteriormente la figura superficial y la figura profunda del silogismo. Recordemos que la figura superficial es determinada por el lugar que ocupa el término medio en las sentencias según ejerza como sujeto o predicado de las premisas. Por su parte, la estructura profunda del silogismo, fundamento último de la inferencia, es determinada por las relaciones lógicas de identidad o exclusión, responsables de establecer asociaciones matemáticas entre las totalidades y/o las partes de las variables que conforman las proposiciones.

Los diagramas de Hamilton tienen en común con los nuestros, y a diferencia de los de Venn, el hecho de que permiten mantener de forma explícita en la representación gráfica el matiz de qué termino es tomado como sujeto y cuál como predicado durante los procesos de razonamiento. De esta forma, es posible mantener una mayor correspondencia entre los procesos lingüísticos que nos llevan de las premisas a la conclusión y los procesos del cómputo matemático que subyacen a cada uno de los pasos de la inferencia, pues es de sentido común suponer que dentro de los sistemas cognitivos existen relaciones significativas entre los dominios lingüístico y matemático de interés para la didáctica del razonamiento (Calderón, 2005; 2012; Duval, 2001; Pimm, 1990; Risso et al., 2015).

Como señala Jessop (2011), la lógica de Hamilton explora las relaciones que existen entre las leyes que constituyen las condiciones del pensamiento y los términos del lenguaje sin los que sería imposible cualquier pensamiento, argumento, discurso, o articulación de las leyes de la lógica, pues sin la unidad, la división y la recombinación del lenguaje, el caos de entidades indeterminadas sería ininteligible. Pero además de procesos verbales implicados en la comunicación del pensamiento, es evidente que existen procesos computacionales "privados" que tienen lugar en nuestras redes neuronales y que podrían ser suficientes para justificar otros puntos de vista complementarios sobre la inferencia lógica.

> we must, I say, observe two sorts of propositions that we are capable of making: -First, mental, wherein the ideas in our understandings are without the use of words put together, or separated, by the mind perceiving or judging of their agreement or disagreement. Secondly, Verbal propositions, which are words, the signs of our ideas, put together or separated in affirmative or negative sentences. (Locke, 1825, p. 441)

Puede que las dos formas de representar la inferencia que hemos desarrollado, bien destacando sus aspectos matemáticos en las redes de expectativas, bien poniendo el énfasis en sus aspectos verbales en el diagrama de Marlo, tengan alguna relación con la distinción que se establece hoy en psicología entre los modelos que conciben el razonamiento como un proceso en serie y aquellos que lo conciben en paralelo.

> Los modelos neuromorfos contemplan el funcionamiento mental como computación en paralelo, representación distribuida del conocimiento, ausencia de ejecutivos centrales que rijan el proceso y memorias superposicionales y direccionables por contenidos que respondan en situaciones de incertidumbre. Todos estos rasgos contrastan con las arquitecturas simbólicas inspiradas en el ordenador con computación serial, simbólica y controlada por un supuesto ejecutivo central. Sin embargo los modelos neuromorfos no tienen el amplio poder explicativo de determinados modelos simbólicos. (Crespo, 2006, pp. 152-153)

Es evidente que la comunicación exige mensajes hechos de signos (Fiske, Trad. 1985) y que, desde la perspectiva de la *selección para el procesamiento,* el tratamiento de la información así codificada tiene una capacidad limitada, debido a que las operaciones se ejecutan serialmente por un ejecutivo central que filtra y selecciona la información relevante (van der Heijden, 1999); una idea que no podemos evitar relacionar con la necesidad de distinguir entre sujeto y predicado al articular las proposiciones. El propio Frege reconoce:

> "Sujeto es el concepto de que trata principalmente el juicio". El lugar del sujeto en la serie de palabras tiene para el lenguaje el significado de un lugar singularizado, en donde se pone aquello sobre lo cual se quiere atraer la atención de quien escucha. (Frege, Trad. 1972, p. 7)

Eliminar de los diagramas lógicos la distinción entre sujetos y predicados que aún mantiene Hamilton en su notación de cuñas, puede ser valioso para aislar y comprender mejor la base de los procesos computacionales que subyacen a la estructura profunda del razonamiento. Sin embargo, perdemos los aspectos comunicativos y discursivos propios del acto mismo de *razonar*, definido por la RAE (Real Academia Española: Diccionario de la lengua española, 23.ª ed., [versión 23.2 en línea]. Recuperado de https://dle.rae.es/?id=VFwo7e1.) como: "1. Exponer razones para explicar o demostrar algo. 2. Ordenar y relacionar ideas para llegar a una conclusión. 3. Exponer razones o argumentos". También Schuyler (1869) hacía ya hincapié en la diferencia que existe entre el

pensamiento y la expresión del pensamiento: "But *λογιχή,* is from *λόγος*, a word ambiguous in its import, denoting both thought and the expression of thought, and thus equivalent both to the Latin ratio and oratio"(p.13)

6.4.5 Silogismo en intensión y extensión

Debemos reconocer que la recurrente distinción entre intensión y extensión no es algo que se nos presenta de forma clara y distinta, por más que hayan sido empleados con frecuencia en el S.XIX y por más que los hayamos estudiado en nuestros años de formación en Filosofía del Lenguaje, tal vez sin la agudeza suficiente por nuestra parte. A pesar de todo, autores actuales como Jessop (2011), lo mismo que decimonónicos como Baynes (1850), han insistido en que Hamilton consideró las interacciones entre la intensión y la extensión en el razonamiento y que esta dualidad en la cuantificación de los conceptos supondría, al mismo tiempo, parte del problema y parte del potencial del sistema del filósofo escocés, y en su obra sobre la lógica de Sir William Hamilton, Day (1863) distinguía entre silogismo extensivo e intensivo de un modo que a nosotros nos resulta del todo extraño

> Extensive Syllogism: The Middle term all men is contained under the Major term mortal; But the Minor term Caius is contained under the Middle term all men; Therefore, the Minor term Caius is also contained under the Major term mortal.(…) Intensive syllogism: The Major term Caius contains in it the Middle term man; But the Middle term man contains in it the Minor term mortal; Therefore, the Major term Caius also contains in it the Minor term mortal. (Day, 1863, p. 149)

Por su parte, Venn (1881) identifica, como haríamos nosotros, la intensión con "la esencia" (p.395) y la define de forma más neutra metafísicamente como: "By the intension, connotation, or logical meaning of a term I understand then a group of attributes" (p.391). La extensión, o denotación, de la que debería ocuparse la lógica simbólica, según Venn, se corresponde con los individuos singulares que pertenecen a una clase no vacía, algo en lo que ya no coincidimos.

Nosotros no aceptamos una distinción fija e inamovible entre clases de objetos e individuos incluidos en ellas. Pensemos en las redes de expectativas y la relación que hay entre nodos *Or* y nodos *Objeto*. Para nosotros, en función del grado de generalización o concreción que empleemos en el discurso, dichos nodos pueden ser ocupados por conceptos más o menos generales. Recordemos que el nodo *Objeto* central es para nosotros el conjunto de caracteres definido desde todos los criterios del sistema, lo que funciona como unidad, mientras que los nodos *Or* estarían definidos por perspectivas parciales de tales objetos. Sin embargo, podemos modificar el universo del discurso añadiendo criterios que conviertan a nuestros objetos en nodos *Or* o eliminando criterios para convertir los nodos *Or* en objetos. Así, si tenemos por nodo *Or* mamífero, ser humano puede ser uno de los nodos objeto en la red. Pero si ahora pensamos uno a uno en todos los individuos singulares que son humanos, entonces humano pasa a ser un nodo *Or* y Sócrates, Sánchez y Leibniz se convierten en nodos objeto. Pero podemos extender más el universo del discurso y convertir a Sócrates en un nodo *Or* que contenga los nodos objeto *Sócrates sentado*, *Sócrates tumbado*, *Sócrates corriendo*, etc. También podría convertirse el nodo *Objeto Sócrates sentado* en un nodo *Or* que sintetizara los nodos *Objeto Sócrates sentado en la plaza*, *Sócrates sentado en el campo*, etc. Y así de forma indefinida. Luego entendemos por objeto el conjunto de caracteres único y distinto que se corresponde con el mayor grado de concreción que se puede establecer convencionalmente en el universo del discurso. Tal objeto puede comprenderse intensionalmente analizando los atributos que lo componen, pero extensionalmente dicho objeto, cuando es el objeto central, es equivalente a la unidad. Por ello la extensión numérica de un nodo *Or* la definimos como el número de objetos centrales que contiene. Si luego tratáramos de ver la extensión del objeto, estaríamos considerando a ese objeto como un nodo *Or*, no como un objeto. Aceptado esto, toda inferencia es para nosotros intensional, pues solo en la medida en que la identidad-unidad de dos objetos se muestra como algo necesario o imposible es posible la inferencia. Así, si la extensión del nodo *Or ab* es igual a uno y sabemos que en él se incluye la variable *c*, entonces podemos inferir que *abc* es el único objeto posible en el nodo *Or ab*.

De este modo, creemos seguir el plan de Stanley Jevons que era criticado por Venn (1881), quien cita palabras del propio Jevons que suscribimos en nuestra propuesta, basada lo mismo que la suya, en la cuantificación del predicado:

> Prof. Jevons has endeavoured to work out a symbolic system of Logic in which the symbols are to stand for the meaning of the terms and not for their extension. Amongst other evils of such a plan it leads up to the catastrophe of having to maintain "that the old distinction of connotative and non-connotative names is wholly erroneous and unfounded,"and that

> "singular, proper, or socalled non-connotative terms, are more fall of connotation or meaning in intent or quality than others, instead of being devoid of such meaning."(Pure Logic, p. 6.). (p.36)

Creemos que los resultados de la investigación que hemos realizado hasta ahora con nuestros diagramas nos aproximan más a la cuantificación del predicado de Jevons que a la de Hamilton. Y aunque nuestras limitaciones en el conocimiento de ambos autores y las que impone el término de esta tesis doctoral nos impiden profundizar en esta cuestión, creemos necesario el estudio de las relaciones que necesariamente existen entre la estructura superficial de las sentencias del *silogismo figurado* en las que importa la relación sujeto -predicado, y la estructura profunda de las proposiciones del *silogismo No-figurado* que permite la conexión de variables en términos de igualdad o proporción matemática, pues solo de este modo podremos seguir desarrollando formas inteligentes de decir cada vez más con menos.

Para finalizar este apartado dedicado a los diagramas que diseñó Hamilton partiendo de la doctrina de la cuantificación del predicado nos gustaría señalar que, desde nuestro punto de vista y a pesar de haber podido realizar solo una aproximación superficial al escocés, es imposible no percibir en sus figuras, además de una gran profundidad de análisis, buenas dosis de originalidad e imaginación, aunque todavía muy lejos de lo que nos transmiten los grafos de Peirce. Así, mientras que Venn se limita a construir diagramas con los que llevar la cuenta de las posibilidades eliminadas por las premisas, Hamilton intentó sintetizar en un único sistema de notación todos aquellos componentes del razonamiento de los que tenía conciencia. Por algo se consideraron sus esfuerzos filosóficos, en el momento de su muerte, como el tratamiento más profundo realizado hasta la fecha de algunos de los problemas perennes de la filosofía (Graham, 2015).

6.4.6 Cuantificación del predicado y estructura de las proposiciones

Si analizamos la ilustración del final de este capítulo en la que comparamos varios sistemas clásicos de representación diagramática, veremos que todos pueden organizarse en torno a lo que consideramos la estructura de las seis proposiciones elementales del lenguaje que fue postulada por Hamilton y rechazada por Venn (aunque Hamilton no fue capaz de representarla correctamente). También apreciaremos en dicha figura las dificultades que tuvo Venn, como otros autores de su época, para concebir y expresar la disyunción inclusiva, cuya estructura ya está contenida en nuestro diagrama entre las formas básicas de inclusión.

El siglo XIX supone un punto de inflexión en la historia de la lógica. Comúnmente se considera 1847 el año en el que nace la lógica matemática con la obra *Formal Logic*. Boole, que concebía la Lógica como una disciplina matemática más bien que filosófica (Cusick & Stanica, 2014), fue el primero en proponer de una manera clara el programa de la lógica matemática y fue el primero, también, en realizarlo en parte (Bochenski & Bravo, 1985), La matematización de la disciplina conseguirá que Boole desacredite a Kant (Garrido, 1981), a pesar de que la lógica matemática fue consecuencia, en parte, de los intentos por extender la teoría del silogismo aristotélico (Bochenski & Bravo, 1985).

Incluso limitando el análisis a los predicados monádicos, era necesario aumentar el número de proposiciones más allá de las cuatro elementales: universal afirmativa A, universal negativa, E, particular afirmativa I y particular negativa O. Al mismo tiempo, la matematización de la lógica exigía un nuevo punto de vista acerca de las proposiciones en el que fuera irrelevante la distinción entre sujeto y predicado, haciendo posible operar con sistemas de ecuaciones en los que la inferencia estuviera basada en el concepto de igualdad matemática. Por eso era importante generar notaciones que fueran convertibles.

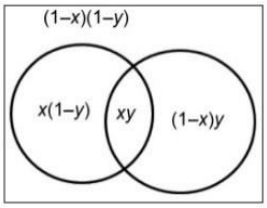


ILUSTRACIÓN 267. CLASES DE BOOLE EN DIAGRAMAS DE LEIBNIZ. TOMADO DE KAK, S., 2018.

Al parecer, la doctrina de la cuantificación del predicado de Bentham, normalmente atribuida a Hamilton (Baynes, 1872), permitió que la lógica mejorara (Jevons, 1864) y fue importante en la aparición del cálculo de

Boole, al margen de que también influyera en dicha aparición el desarrollo del álgebra abstracta y, según Kak (2018), la lógica india que llegó a Boole y a su amigo De Morgan a través de George Everest (1790–1866). Así, como ya sabemos, Boole formuló la teoría de la cuantificación del predicado sobre la base de los manuscritos de Bentham; de hecho, el propio Boole testificó en la introducción de su libro *El análisis matemático de la lógica* (1847) que la controversia sobre la cuantificación del predicado fue el agente externo que lo estimuló a escribir sus pensamientos anteriores sobre una nueva concepción de la lógica (Laita, 1979), es decir, que el cálculo de Boole surgirá fruto de los conatos clásicos de ampliar la silogística aristotélica, advirtiéndose esto claramente en la silogística de Augusto de Morgan (Bochenski & Bravo, 1985).

La cuantificación del predicado da soporte, como veremos, no solo a la manera de formalizar y convertir las proposiciones en el diagrama de Marlo, sino a los principios fundamentales de la inferencia que rigen nuestras representaciones gráficas y que ya fueron en lo esencial advertidas por George Boole en 1854. No puede ser coincidencia que, sin haber tenido contacto directo con la obra de Boole, el desarrollo de los diagramas nos llevara a las mismas leyes del silogismo que ya fueron descubiertas por él utilizando el álgebra matemática.

Venn (1881), además de reconocer la importancia de Bentham y Hamilton en la doctrina de la cuantificación del predicado, cita a Lambert (1728-1777) y Thomas Solly (1816-1875), un precursor en la matematización de la lógica (Pabteki, 1993), como antecedentes de tal doctrina, aunque afirma, como sugerirá más adelante también Lombraña (1989), que el mérito debe ser atribuido a Ploucquet (1716-1790).

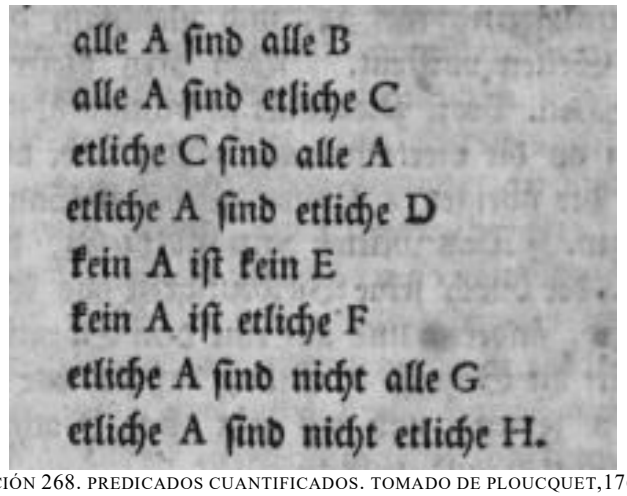


ILUSTRACIÓN 268. PREDICADOS CUANTIFICADOS. TOMADO DE PLOUCQUET,1766 P. 212.

Como ya sabemos, a pesar del rechazo de Venn a la doctrina de la cuantificación del predicado, la lógica matemática fue posible precisamente porque dicha doctrina permitió enfocar el juicio como ecuación, sirviendo de base a lo que Venn (1881) llamó la *moderna lógica inglesa*, entre cuyos representantes incluía a Mr G. Bentham, Hamilton, De Morgan, Boole, y el Prof. Jevons. Recientemente, Lemnaski (1919) ha afirmado que la cuantificación del predicado puede ser ilustrada en los diagramas tipo Euler y que ya es anticipada en los diagramas rectangulares que propone Lange en su obra *Nucleus Logicae Weisianae* (1712).

6.4.7 Aristóteles y la cuantificación del predicado

Kant y Aristóteles parecen considerar el juicio o la proposición dentro de la primera operación del pensamiento, donde juzgar es decir de algo (un objeto o sustancia), qué es (un predicado como especie o género). Desde esta perspectiva el predicado es un fenómeno lingüístico con generalidad que no denota individuos singulares (Evans, 1987). El sujeto es el individuo particular, la sustancia. Recordemos que en la primera operación del entendimiento, como se aprecia en Oriol y Gambra (2015) trabajamos con los conceptos como elementos primeros e indivisibles del discurso intelectual que son normalmente obtenidos del conocimiento sensible. Por ejemplo, cuando al abrir los ojos percibo un estímulo o sensación X y digo de tal estímulo que es mesa, o animal, u hombre, estoy juzgando dicho estímulo y acusándolo de caer bajo la esfera o noción de mesa, animal u hombre, donde ser animal, mesa u hombre siempre se deben corresponder con un término general aplicable a esa sensación X o a otra "semejante". Desde esta perspectiva el predicado es necesariamente universal y las sustancias necesariamente singulares.

Nosotros estamos parcialmente de acuerdo con los aristotélicos en que el sujeto de una proposición existencial que señala hechos en curso es un objeto particular que puede ser señalado (una sustancia dirían ellos, un estímulo diríamos nosotros), mientras que el predicado debe ser necesariamente un criterio universal (forma dirían ellos, concepto o conjunto de caracteres nosotros) que es aplicado a dicho objeto durante el acto de juzgar el estímulo: ¿Qué es eso? Sin embargo, al margen del juicio psicológico, una vez que el objetivo es comunicar las correlaciones en el darse y no darse de distintas secuencias de caracteres, los predicados y los sujetos de la proposición lingüística son intercambiables, como bien dice la lógica matemática.

Al parecer, la doctrina de la cuantificación del predicado del siglo XIX es un desarrollo de la doctrina escolástica de los *exponibilia*, que ha sido generalmente considerada como contraria a las enseñanzas aristotélicas (Bochenski & Bravo, 1985), por lo que no encontraremos nada comparable en la lógica antigua a la cuantificación moderna del predicado, y ello a pesar de que la posición de Aristóteles sobre la cuestión de la cuantificación del predicado no está del todo clara (Mignucci, 1983). Siguiendo a Mignucci, solo hay tres referencias de Aristóteles a tal cuestión, sin ser significativa la primera de ellas:

1º En *Analíticos Posteriores* (APo. A 12. 77B30) dice Aristóteles

> *El predicado no se llama a cada uno*

2º En *Sobre la Interpretación* 7.17b12-5 escribe Aristóteles: "Ahora bien, predicar universalmente sobre el predicado universal no es verdadero: en efecto, no habrá ninguna afirmación en que lo universal se predique del predicado universal, como, por ejemplo, *es todo hombre todo animal*" (Aristóteles, Trad. 1988, pp. 45-46).

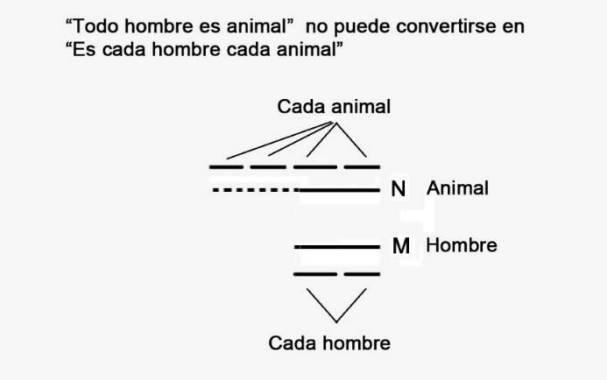


ILUSTRACIÓN 269. "TODO HOMBRE ES ANIMAL" NO SE CORRESPONDE CON "ES CADA HOMBRE CADA ANIMAL".

Es interesante advertir que la famosa frase de Aristóteles que prohíbe cuantificar el predicado puede interpretarse en el sentido de que él se pregunta qué es el hombre individual, que es el único del que hay verdadera ciencia, pues no puede darse el universal separado. Y es evidente en la imagen anterior que cada uno de los hombres no puede ser al mismo tiempo todos y cada uno de los animales. Es decir, que de cada hombre se predica animal de modo particular. No obstante, esta apreciación es independiente del hecho de que para llegar a las conclusiones correctas Aristóteles considera el término mayor como mayor que el menor porque su extensión va más allá de lo que se afirma del término medio. Piensa Mignucci (1983) que la prohibición de cuantificar el predicado en la cita anterior se refiere al hecho de que la expresión *cada hombre es cada animal* no puede considerarse una proposición válida, y no al hecho de que no pueda cuantificarse el predicado. Nosotros mismos nos encontramos en nuestros desarrollos con la incorrección de afirmar que todo número par es todo número divisible por dos, porque no es correcto afirmar que 2=4 y 2=6 y 2=8, y 4=6 y 4= 8, etc. Pero esta confusión no puede venir sino del hecho de mezclar niveles *Or* y objeto dentro del universo del discurso, pues del hecho de que los nodos objeto contenidos en dos nodos *Or* sean los mismos en ambos casos, solo se sigue la identidad de dichos nodos *Or* y no la identidad de los objetos centrales o unidades contenidos en ellos. Por ellos es posible afirmar que solo hay una forma de ser par (p) que se corresponde con la única forma de ser divisible por dos (d), siendo ciertas las proposiciones $p_x d_x$; p=d; p ↔ d.

3º En *Analíticos Primeros* I, 27,43b20-25 dice Aristóteles: "es inútil e imposible, como, por ejemplo, que todo hombre sea todo animal o que la justicia sea todo bien". (Aristóteles, Trad. 1988, p. 185)

Mignucci (1983) señala que Ammonius Saccas (175 - 242), filósofo de Alejandría del siglo III, no interpretó la posición de Aristóteles como contraria a la cuantificación del predicado y puso dieciséis ejemplos de proposición con predicado cuantificado, tratando incluso de caracterizar cada una de ellas en relación con la verdad (pp.18-22). Entre las proposiciones que Mignucci atribuye a Ammonius tenemos: *Todo hombre es capaz de todo conocimiento.*

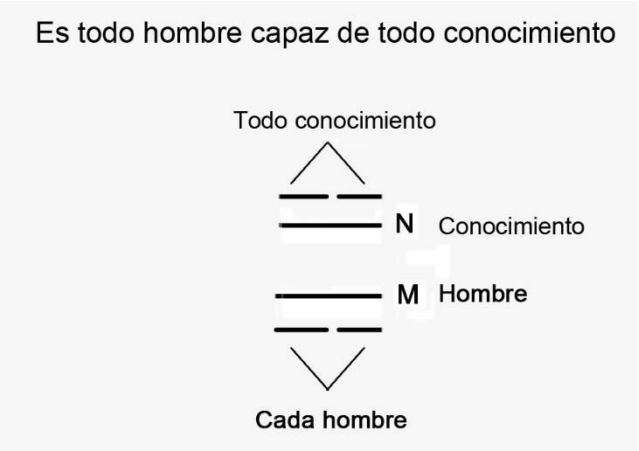


ILUSTRACIÓN 270. TODO HOMBRE ES CAPAZ DE TODO CONOCIMIENTO, COMO PUDO CONCEBIRLO AMMONIUS.

Sabemos que la cuantificación del predicado fue condenada en el S. XIII por el arzobispo de Canterbury Roberto Kilwardby (1215-1279), lo mismo que por Tomás de Aquino (1225-1274), en un contexto en el que, señala Muñoz Delgado (1977) apoyándose en Moody (1975) y Hoffmann (1973), la lógica, especialmente a partir de 1250, se veía más unida a problemas metafísicos, epistemológicos y gnoseológicos que la lógica anterior. Así, la relación entre lógica y ontología, entre materia y forma del razonamiento estará en el trasfondo de varias de las proposiciones condenadas por Kilwardby. Explica Muñoz Delgado (1977) que para Tomás de Aquino el predicado no puede ser cuantificado porque si se cuantificase universalmente se podría inferir de *animal est omnis homo* que *Sócrates est omnis homo*.

Muñoz Delgado (1977) afirma que uno de los errores lógicos señalados por Kilwardby se refiere al importante tema de la cuantificación del predicado relacionado con la proposición *Es todo hombre todo animal*, rechazada por el Estagirita en el *Peri Hermeneias* 17b 12-16, y que también condenó Santo Tomás al comentar esos pasajes, en la *expositio*, I, *lect*. 10, 23 (Tomás de Aquino, Trad. 1955). Recordemos que *El Peri Hermeneias* aristotélico, conocido en Occidente desde época muy temprana, rebasa ampliamente lo que en la actualidad entendemos por lógica, es decir, la ciencia de las leyes formales del razonamiento (García Cuadrado, 2012).

Aunque excede el objetivo de esta tesis analizar la complejidad de las cuestiones lógicas y filosóficas expuestas por Muñoz Delgado (1977) que llevaron a santo Tomás a rechazar la cuantificación del predicado, podemos señalar la importancia que tuvo su concepción hilemórfica de la naturaleza de la proposición, pues para él, todo compuesto tiene una mezcla de acto y potencia, dos elementos que se comparan con la forma (predicado de la proposición) y la materia (sujeto-de la proposición). Así, expone Muñoz Delgado que en el hilemorfismo la cantidad reside en la materia y solo el sujeto puede cuantificarse.

Por tanto, a pesar de la ambigüedad aristotélica sobre el tema y de la interpretación de Ammonius Saccas, la postura que se impondrá durante siglos y que aún prevalece entre los aristotélicos que no han sido persuadidos por la lógica matemática, será la de considerar que solo puede cuantificarse con propiedad el sujeto de la proposición.

> Dejando de lado las oraciones donde el verbo ser ejerce el papel de segundo elemento, en toda proposición aquello que se dice, o se predica (el predicado), es siempre un término universal, mientras que aquello de lo que se dice (el sujeto) puede ser universal o singular. (Oriol & Gambra, 2015, p. 131)

6.4.8 Augustus De Morgan (1806 – 1871)

Uno de los lógicos más importantes vinculado a la doctrina de la cuantificación del predicado antes de que Venn publicara su trabajo fue Augustus De Morgan, que investigó la posibilidad de un cálculo algebraico aplicado a los silogismos. De Morgan introdujo la llamada notación *spicular* para gestionar el razonamiento silogístico en términos puramente simbólicos, analizando en detalle el significado de las proposiciones categóricas (Pagnan, 2013). Según Coumet y De Mora (2002), De Morgan plantea nuevas relaciones entre notaciones simbólicas, lenguaje y diagramas, siendo en su trabajo sobre el silogismo de 1850 cuando critica la nomenclatura tradicional de las proposiciones (A, E, I, O) para proponer su reforma. Allí expone su propio sistema pictórico y arbitrario de notaciones, que consideraba tan sugerente como los diagramas geométricos empleados por Lambert y Euler. Este sistema de notaciones consistía en el empleo de paréntesis y puntos para señalar la cantidad y la cualidad de las proposiciones y podemos decir de él que tiene suficiente valor como para formar parte de la historia de la Lógica (Bochenski & Bravo, 1985) y seguir siendo objeto de interés a día de hoy (Pagnan, 2012, 2013; Moktefi & Shin, 2013).

Todo X es se representa: X)

Algún X es se representa: X (

Ningún X es se representa: X) ·

Algún X no es se representa: X (·

Todo X es Y se representa : X)) Y

Algún X es Y se representa: X ( ) Y

Ningún X es Y se representa: X) . (Y

Algún X no es Y se representa: X (. (Y

TABLA 39. PROPOSICIONES EN LA NOTACIÓN SPICULAR INVENTADA POR DE MORGAN.

Afirma Shin (2002) que De Morgan enfatizó la importancia de "la estructura de la oración" como esencia de la forma lógica, aunque algunos entienden que dicho énfasis se refiere a la formalización simbólica argumentando que la estructura de una oración se representa más fácilmente en un lenguaje simbólico que en un lenguaje gráfico. Sin embargo, dicen Coumet y De Mora (2002), que De Morgan entiende por notación una representación gráfica arbitraria y pictórica que le sirve para introducir divisiones de tipo dicotómico del tipo si-no, dentro-fuera, inclusión-exclusión, que serán aprovechadas por Boole y que "esbozan el tipo de diagramatización que desarrollará Venn" (p.188).

En todo caso, es innegable que De Morgan tuvo interés por lo que él llamaba representaciones sensibles de los silogismos, llegando a afirmar que aunque Lambert había precedido a Euler en tal idea, ninguno aportaba ninguna forma de inferencia realmente original: "there is no introduction that I can find of any form of inference which is not Aristotelian" (De Morgan, 1847b, p. 323).

De Morgan (1847b) negaba que su doctrina partiera de la cuantificación del predicado, al menos en cuanto predicado, afirmando que "It consists entirely in the quantification of the middle term, be it subject or predicate. In fact, perfectly definite quantification destroys the necessity of distinguishing subject and predicate" (p.14). Sin embargo, no pudo impedir que se afirmara de él, como hizo Jevons (1869), que había desarrollado su trabajo partiendo de la doctrina de la cuantificando del predicado.

De forma más o menos discutible es posible encontrar la influencia de tal doctrina en el desarrollo que hizo De Morgan del silogismo numérico con apoyo de diagramas lineales. Este tipo de problemas, que se representan normalmente hoy en los diagramas de Venn, puede ser representado y resuelto también en el diagrama de Marlo y las redes de expectativas, partiendo de los mismos principios elementales de la inferencia silogística, aunque sea necesario añadir algunas reglas cuyo desarrollo supera los objetivos que nos planteamos en esta tesis.

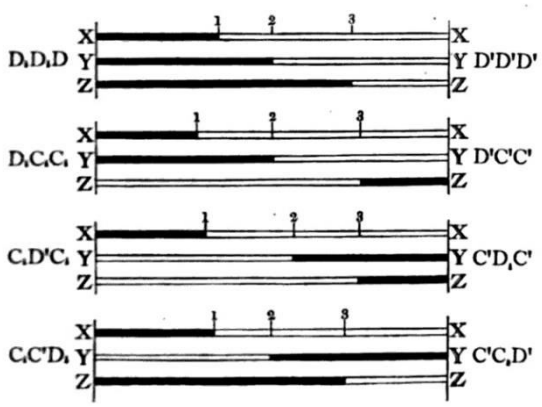


ILUSTRACIÓN 271. DIAGRAMAS LINEALES DE MORGAN, 1847B

En todo caso, podemos ver un ejemplo de silogismo numérico para poner a prueba la capacidad expresiva de nuestros diagramas en comparación con la de Venn. Supongamos que afirmo que *De mis tres hermanos al menos dos son pelirrojos* y afirmo que *De mis tres hermanos al menos dos son simpáticos*, entonces es necesario que *al menos haya uno de mis hermanos que es pelirrojo y simpático*.

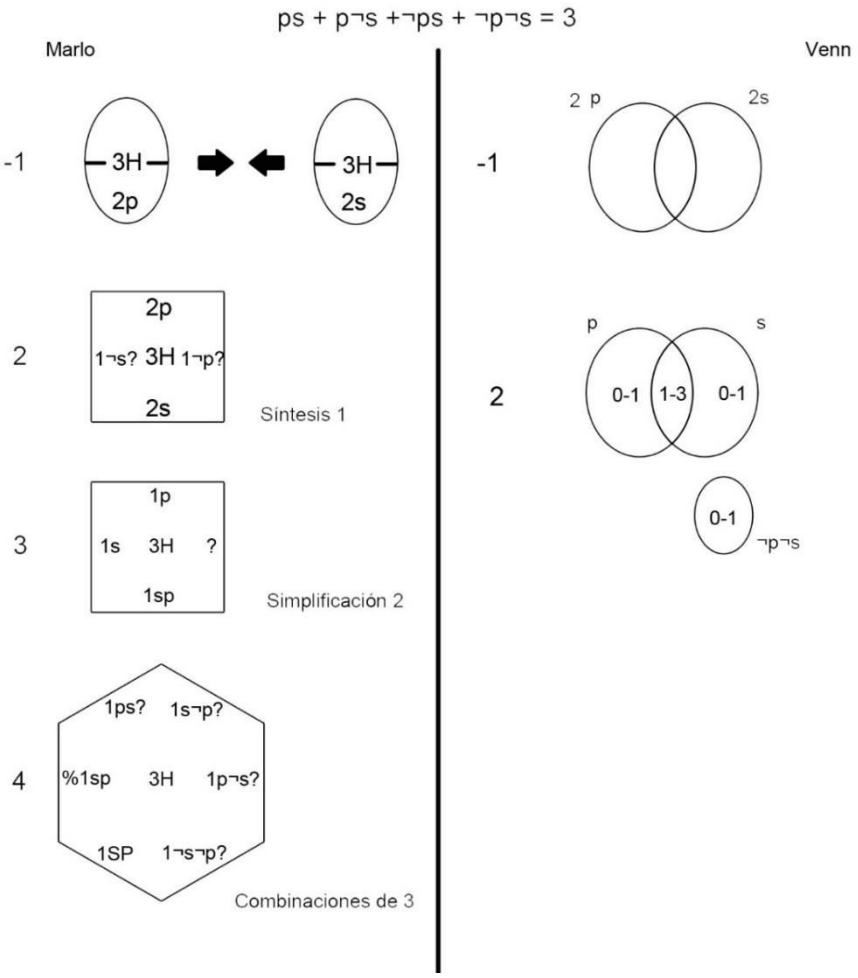


ILUSTRACIÓN 272. SILOGISMO NUMÉRICO CON INCERTIDUMBRE EN LOS DIAGRAMAS DE MARLO Y LOS DIAGRAMAS DE VENN.

El resultado se obtiene, como indica De Morgan, sumando el valor de los extremos y restándolo al del término medio. Así obtenemos las siguientes conclusiones: 1º es seguro que uno es pelirrojo y simpático. 2º Es probable y más que posible que uno más sea pelirrojo y simpático, porque están confirmadas ambas posibilidades. 3º Es

posible que uno tenga una característica y no tenga la otra. 4º Es conjeturable que uno de los tres no sea ninguna de las dos cosas.

Podemos apreciar en la anterior ilustración que en la resolución del silogismo hemos aplicado en la inferencia distintos grados de certeza en las conjunciones en base a la información que dan las fuentes (premisas) acerca de cuáles son hechos confirmados y cuáles supuestos (Aznar, 2018g). Hay que tener en cuenta que el número central en los modelos proposicionales marca el número de tipos de objetos que puede existir, en este caso un máximo de tres según el enunciado. Si hubiera solo un tipo, los tres hermanos pertenecerían a él. La misma información se ofrece en los modelos de los pasos tres y cuatro. Los tipos contenidos en el modelo hexagonal del paso cuatro se obtienen a partir del modelo del paso tres, combinando sistemáticamente todas las variables cuya asociación no sea contradictoria. Como ya sabemos, de dos tipos confirmados obtenemos una conjunción probable, mientras que las conjunciones posibles, menos seguras, se basan en conjeturas. Así, nuestro diagrama ofrece un mayor número de matices razonables en la conclusión, lo cual, evidentemente, conlleva una complejidad mayor cuyo coste, pensamos, es rentable en la didáctica del razonamiento plausible. También De Morgan forma parte de la tradición que comprende que el grado de creencia se relaciona con el grado de probabilidad, lo cual respalda los principios de nuestras redes de expectativas. Así, encontramos en De Morgan (1847b):

> By degree of probability we really mean, or ought to mean, degree of belief. It is true that we may, if we like, divide probability into ideal and objective, and that we must do so, in order to represent common language. It is perfectly correct to say It is much more likely than not, whether you know it or not, that rain will soon follow the fall of the barometer.' We mean that rain does soon follow much more often than not, and that there do exist the means of arriving at this knowledge. (p.172)

Podemos comprobar, en este caso, que la estrategia consistente en dar mayor peso a las opciones confirmadas por la fuente (que aparecen como sujeto y predicado de las proposiciones), muy similar a la empleada en el llamado sesgo de disponibilidad (González Labra, 2011), nos permite establecer un orden bastante acertado en relación al grado de confianza con el que deberíamos apostar por la facticidad de cada una de las combinaciones en al menos un hermano. Primero debemos observar que existen cinco posibles combinaciones que satisfacen las condiciones de las premisas:

- 1: SP, SP, SP (Los tres son pelirrojos y simpáticos)
- 2: SP, SP, S¬P (Dos son pelirrojos y simpáticos y el tercero es simpático pero no es pelirrojo)
- 3: SP, SP, ¬SP (Dos son pelirrojos y simpáticos, pero el tercero es pelirrojo sin ser simpático)
- 4: SP, SP, ¬S¬P (Dos son pelirrojos y simpáticos, pero el tercero no es ni pelirrojo ni simpático)
- 5: SP, S¬P, ¬SP (Uno es simpático y pelirrojo, otro solo es simpático y el tercero solo es pelirrojo)

Ahora podemos ordenar las combinaciones que pueden definir la identidad de alguno de mis hermanos en base a la probabilidad que tienen de ser el caso. Obervamos en la tabla 40 que la posición de las combinaciones en la escala de confianza es la misma si las ordenamos considerando su probabilidad matemática que si las ordenamos en función de si han sido o no confirmadas por la fuente en las premisas. De este modo, vemos que podría haber lógica en el hecho de dar más peso a lo confirmado que a lo meramente conjeturado, por más que sea difícil distinguir el peso de ambos tipos de combinaciones.

Combinación	Probabilidad cuantitativa por el número de combinaciones en el que aparece.	Certeza cualitativa por la necesidad de la conjunción de las cualidades nombradas.	Posición en la escala de confianza.
SP	5/5= 1	Necesaria	Primero
S¬P	2/5 = 0,4	Probable	Segundo
¬SP	2/5 = 0,4	Probable + posible	Segundo
¬S¬P	1/5= 0,2.	Posible	Cuarto

TABLA 40. ORDEN EN EL GRADO DE CONFIANZA SEGÚN LA PROBABILIDAD Y LA DISPONIBILIDAD DE LOS TÉRMINOS.

Además, podemos comprobar que tener dos hermanos que sean al mismo tiempo S y P ocurre en cuatro de las cinco combinaciones posibles que satisfacen la demanda de las premisas de que haya al menos 2 pelirrojos y dos simpáticos. Es decir, que tener dos hermanos simpáticos y pelirrojos tiene una probabilidad de 0,8.

Podemos ver la solución de este silogismo numérico en las redes de expectativas desde la perspectiva de S y de P. El valor numérico de los nodos centrales se corresponde con la probabilidad de la combinación de ser el caso. Así, como vemos en la siguiente ilustración es seguro que tengo hermanos simpáticos o pelirrojos, es probable que tenga hermanos con solo una las dos cualidades y es poco probable que alguno de mis tres hermanos no sea ninguna de las dos cosas. También observamos que es seguro que no es posible que haya de todos los tipos posibles de no simpáticos o de no pelirrojos, por lo que ambos nodos *And* son falsos. Tampoco puedo tener hermanos de todos los tipos concebibles, pues hay cuatro tipos y solo tengo tres hermanos. Luego sabemos que hay un tipo falso al menos, siendo el máximo candidato a clase vacía $\neg p \neg s$.

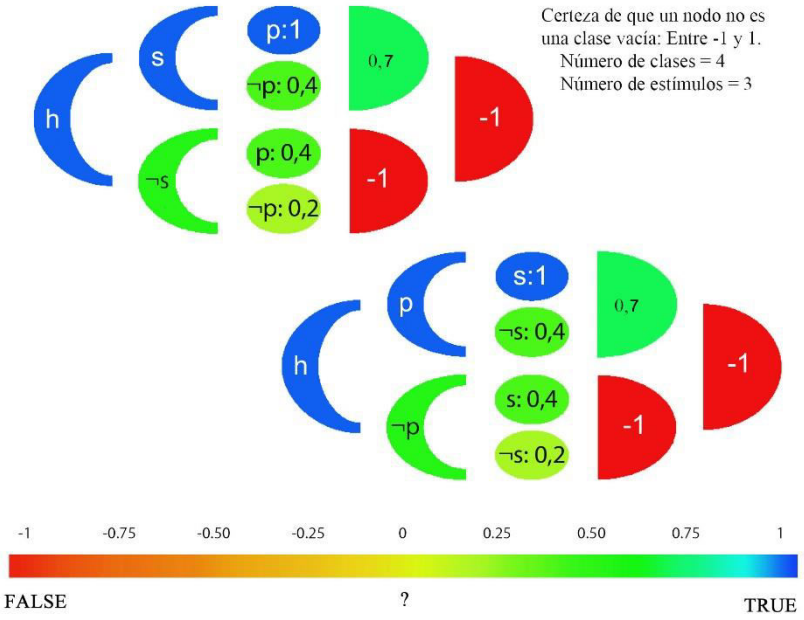


ILUSTRACIÓN 273. GRADO DE CERTEZA EN DISTINTAS PROPOSICIONES A PARTIR DE UN SILOGISMO NUMÉRICO RESUELTO EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

De Morgan anticipa, como muchos otros, una concepción de la lógica muy próxima a la probabilidad que justifica la base teórica de nuestras redes de expectativas.

> If then the premises be all true, the conclusion is certainly true. If a, b, c, &c. be the probabilities of the independent premises, or the independent propositions from which premises are deduced, then the product abc. . . is the probability that the argument is every way good. (De Morgan, 1847b, p. 192)

Quizás porque también comprendía que el ser de una cosa está basado en sus conexiones

> The philosophers of the middle ages were much concerned with the is, or essence, of things: they argued to their own minds, with great justice, that if they could only find out what a thing is, they should find out all about it: they tried, and failed. Their successors, taking warning by their example, have inverted the proposition ; and have satisfied themselves that the only way of finding what a thing is, lies in finding what we can about it ; that modes of relation and connexion are all we can know of the essence of any thing; in short, that the proverb 'tell me who you are with, and I will tell you what you are,' applies as much to the nature of things as to the characters of men (De Morgan, 1847b, p. 170).

Y porque su punto de partida será el que tomemos nosotros para la construcción del sistema dicotómico Alfa.

> The whole extent of matter of thought under consideration I call the universe. In common logic, hitherto, the universe has always been the whole universe of possible thought. 123. Every term which is used (§ 16) divides the universe into two classes; one within the term, the other without. These I call contraries: and I denote the contrary class of X, the class not-X, by x. When the universe is unlimited contrary names are of little effective use; not-man, a class containing every thing except man, whether seen or thought, is almost useless. (De Morgan, 1860, p. 39)

Nos gustaría señalar para terminar que, como indica Lombraña (1989), De Morgan distinguió, al menos en su libro *On the syllogism*, composición (XY) y agregación (X, Y) (De Morgan, 1966) generando una notación que precede no solo la forma de notación de la conjunción y la disyunción de variables que hemos empleado normalmente en el aula, sino muy probablemente, nuestra propia forma de entender los diversos modos en los que puede establecerse una relación entre dos variables.

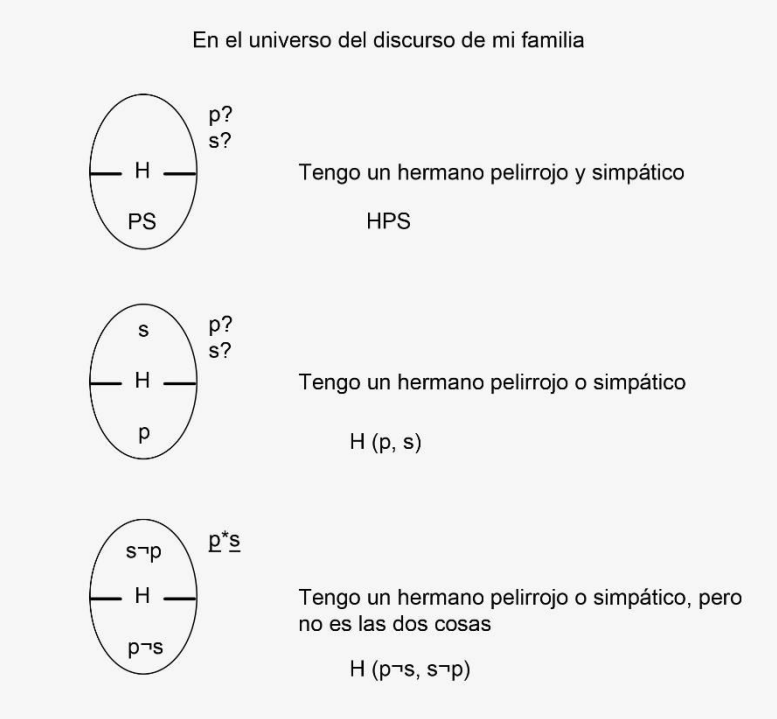


ILUSTRACIÓN 274. COMPOSICIÓN Y AGREGACIÓN EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

6.5 Aaron Schuyler (*1828-1913*)

Aaron Schuyler, que se reconocía deudor de la lógica de Hamilton (Schuyler, 1869), nació en Nueva York en 1828 y en 1875 llegó a ser presidente de la Universidad de Baldwin, siendo conocido por ser un buen expositor que escribió y publicó, entre otros temas, libros de matemática universitaria en los que enfatizaba el pensamiento lógico sobre la memorización y la computación. Así lo describe David E. Kullman (Kullman, s.f.) en la página web de la sección de Ohio de la *Mathematical associationn of America*[20].

> One day in our geometry class, a student was giving his demostration wich was evidently a memorized text-book demonstration. The Keen eye and judgment of Dr. Schuyler saw the worthlessness of the demostration, so he steppted to the board, picked up and eraser, erased the student´s written work, and said, now demonstrate from the figure-his criticism by so doing was "creation", please; mouthing is not demonstrating. (Loomis, 1936, p. 16).

Los diagramas de Schuyler que revisaremos en este apartado aparecieron por primera vez en 1869 (Schuyler, 1869) en un manual de lógica para estudiantes que fue empleado también en las universidades americanas (Hall, 1894) acompañando a buena parte de las explicaciones teóricas. El libro fue publicado por la editorial Wilson, Hinkle & Co. dentro la Serie Educativa Ecléctica, que había vendido el año anterior 3,500,000 volúmenes (The American News Company, 1869, p. 356) y nuevamente fue reeditado en 1897 por la American Book Company.

Schuyler distingue entre los diagramas que representan la estructura de las relaciones de los conceptos extensionales y los diagramas de las sentencias clásicas que se ajustan a dichas relaciones y que presenta vacíos de contenido, seguramente con la intención de resaltar que se trata de estructuras formales. Reduce a cinco dichas relaciones elementales, en una propuesta claramente a caballo entre la lógica aristotélica y la lógica de clases, pues

[20] http://sections.maa.org/ohio/ohio_masters/schuyler.html.

si bien las relaciones fundamentales son las de inclusión, exclusión e intersección, en la definición que hace de ellas todavía recurre a las relaciones que se dan entre especie y género.

> 2. Of Exclusion. — One concept is excluded from another when their spheres have no part common. There are two cases of exclusion: 1st. Of Coordination. — Two concepts are coordinate when they are exclusive and both immediately comprehended under the same concept. Thus, the concepts horse and sheep are coordinate, since they are exclusive, and both immediately subordinate, as species, to the genus quadruped. 2d. Of Non-coordination. — Two exclusive concepts are non-coordinate when they are not immediately subordinate to the same concept. Thus, the concepts Arabian horse and sheep are non-coordinate, since Arabian horse is a species of the genus horse, while sheep is not. (Schuyler, 1869, p. 24)

Las sentencias clásicas A, E, I, O, son válidas en la medida en la que se ajustan a la estructura de las relaciones elementales y habiendo distintas formas en las que cada una de estas proposiciones puede ser verdadera, lo mismo que con las de Hamilton, se sigue de ello que hay "ambigüedad en el lenguaje" (Schuyler, 1869, p. 105). Es decir, que Schuyler identifica la ambigüedad en el lenguaje con el hecho de que una sentencia pueda representarse en diagramas distintos, que son los únicos que realmente parecen poder comunicar el significado de una proposición de forma precisa, esto es, señalando qué tipo de relación extensional se establece entre dos términos.

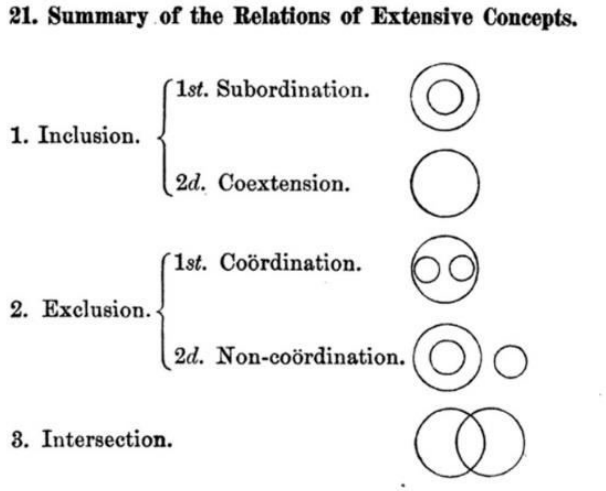


ILUSTRACIÓN 275. RELACIONES EXTENSIVAS ENTRE CONCEPTOS. TOMADO DE SCHUYLER, 1869, P. 26.

Venn (1881) y Schuyler (1869) coinciden en el error de afirmar que la única representación que no presenta ambigüedad es la de la universal negativa, ya que dicha proposición solo puede diagramarse como exclusión en círculos no intersecados, del mismo modo que dos círculos intersecados solo pueden tomarse por la universal negativa.

> One of the greatest obstacles to be surmounted in the development of the science of Logic is the indefinite character of language. Thus, take the four classes of propositions, generally recognized (...) (E) is the only proposition free from ambiguity. Hamilton's negative propositions, except (E), are not free from ambiguity. (Schuyler, 1869, p. 105)

> Considering that they spring from different interpretations of the import of a proposition it could not be expected that they should do so. No. (5) is the one unambiguous exception, corresponding precisely to the universal negative 'No A is B.' That is, given ' No A is B' we could only select this diagram; and conversely, given this diagram we could only describe it as ' No A is B' But such correspondence does not exist in any other case. (Venn, 1881, p. 7)

Luego podemos afirmar que este profesor tampoco tuvo conciencia de la diferencia que existe entre la afirmación *Toda A es no-B* y la afirmación *A es lo mismo que no-B*, dos formas de exclusión claramente diferenciadas en nuestros diagramas, pues la primera solo considera parte de $\neg B$ y la segunda la totalidad de $\neg B$. A medio camino entre las concepciones aristotélicas y las nuevas formas del análisis lógico, el tratamiento de los términos negativos en Schuyler es menos moderno que el de Ploucquet. Así, nos dice Schuyler (1869): "1st. A concept is distributed when all of it is taken. 2d. A concept is undistributed when only a part of it is taken. 2d. All negatives distribute the predicate" (p.35). Y más Adelante añade: "If both premises are negative, there is no conclusion" (p.58).

A partir de la diagramatización y conversión de las proposiciones Schuyler demostrará la validez de diecinueve silogismos categóricos, aunque también empleará diagramas para analizar la validez de las conclusiones del silogismo según su cantidad y cualidad, demostrar Sorites y validar juicios hipotéticos.

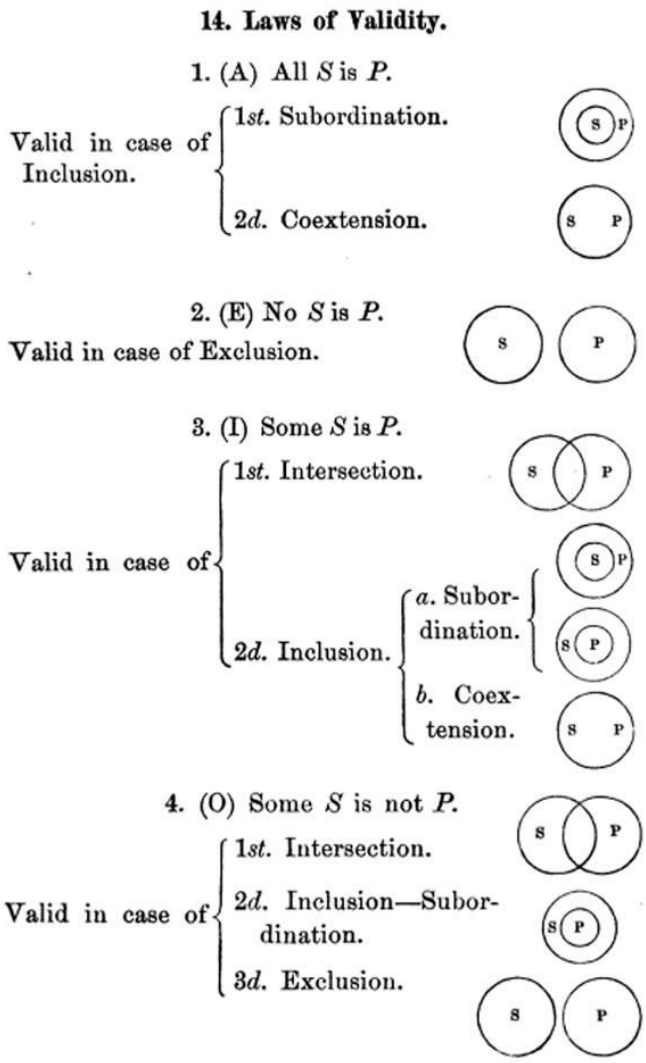


ILUSTRACIÓN 276. DIAGRAMAS DE LA LEY DE VALIDEZ. TOMADO DE SCHUYLER, 1869, PP. 33-34.

Como ya sabemos, durante el S.XIX abundaron intentos de ampliar el alcance del silogismo aristotélico que terminarían impulsando, a la postre, el desarrollo de nuevas lógicas definidas por el formalismo y la matematización. En el propio manual de Schuyler las leyes del silogismo y los diagramas que tratamos representan solo una parte de la lógica que expone, pues incluye también complejos análisis de la inferencia matemática que superan de largo los límites de nuestra tesis.

Lo que sí nos interesa señalar es que Schuyler es capaz de concebir, convertir y representar las proposiciones clásicas A, E, I, O empleando términos negativos como sujetos y predicados, aunque solo lo hace en la proposición lingüística, y no en los diagramas.

Todo S es P y *Todo ¬S es ¬P* son ambas sentencias universales afirmativas del tipo A que pueden indicar exactamente las mismas relaciones inclusivas de coextensión o subordinación.

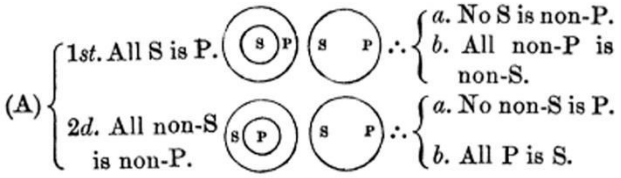


ILUSTRACIÓN 277. UNIVERSALES AFIRMATIVAS PRIVATIVAS. TOMADO DE SCHUYLER, 1869, P. 43.

Queremos llamar la atención hacia el hecho de que Schuyler transforma la segunda sentencia *Todo ¬S es ¬P* en *Todo P es S* para diagramarla. Es decir, que aunque no tiene inconveniente en emplear los términos negativos *No-S* y *No-P* como sujetos de la sentencia (que es ir más lejos que emplearlos solo como predicados), no los emplea como términos en sus diagramas, pues bien podría haber ilustrado *Todo ¬S es ¬P* añadiendo negaciones a la primera representación. Por ello, desde nuestro punto de vista, Schuyler se encuentra entre los muchos que, siguiendo una larga tradición, identifican la clase con el concepto que afirma la presencia de la cualidad o atributo que la distingue, priorizando al término o variable *A* respecto de *¬A,* sin percatarse de la dificultad que conlleva considerar que son más reales las cualidades que indican ser (como ajuste a un criterio) que las que indican no ser (no ajustarse a un criterio). Para nosotros *A* y *¬A* son grados del mismo criterio a que están en igualdad de condiciones, pues ni extensionalmente podemos decir que sea más importante la cantidad de guapos que la de no guapos, ni intensionalmente podemos afirmar que sea distinto el criterio que permite afirmar que algo es guapo del criterio que permite afirmar que no lo es. Creemos que en un sentido similar se pronunciaba Descartes al respecto en las *Meditaciones metafísicas*:

> Por ejemplo, las ideas que tengo del frío y del calor son tan poco claras y tan poco distintas, que por su medio no puedo discernir si el frío es sólo una privación del calor, o el calor una privación del frío, o bien, si uno y otro son cualidades reales, o si no lo son; y en tanto que, al ser las ideas como imágenes, no puede haber ninguna que no nos parezca representar algo, si decir que el frío no es otra cosa que una privación del calor resulta ser verdad, no será un despropósito llamar falsa a la idea que me lo representa como algo real y positivo, y así de otras ideas semejantes; a las que, por cierto, no es necesario que les atribuya otro autor que yo mismo. (Descartes, Trad. 2011a, p. 185)

Después de analizar la universal afirmativa, Schuyler analiza la universal negativa E en las sentencias *Ningún S es P* y *Ningún no-S es no-P* evitando, como era costumbre, etiquetar los diagramas con términos negativos. Siguiendo la tradición, Schuyler traza un diagrama para representar *Ninguna S es P* (*S*→*¬P*), que representa la estructura del bicondicional *S* ↔ *¬P*, a no ser que interpretemos que el espacio entre los círculos de *P* y *S* corresponde a *¬P¬S*. Solo en este caso es exacta la representación de la universal negativa como condicional y no como bicondicional.

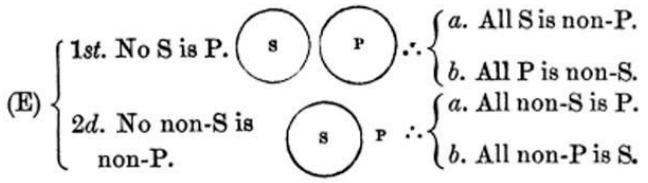


ILUSTRACIÓN 278. UNIVERSALES NEGATIVAS PRIVATIVAS. TOMADO DE SCHUYLER, 1869, P. 43.

En el segundo diagrama, para expresar *¬S →P* y *¬P→S* elimina el círculo que limita el campo de *P*, generando un diagrama novedoso, muy similar a los nuestros, aunque nos resulta difícil de interpretar. En él vemos que todo lo que está fuera de *S* (es decir, *¬S*) es *P* porque al no estar *P* limitada, ahora no queda sitio para *¬S¬P*. Así es correcto que *Ninguna no S es no P*. Por otra parte, vemos que todo lo que no sea P tiene que ser S, porque al haber eliminado el círculo de P no queda espacio para *¬P¬S*. La cuestión en este diagrama es qué pasa con la posibilidad de *PS*. Podríamos pensar que como *P* no está encerrada, es posible suponerla dentro de *S*, de modo que implícitamente la posibilidad *PS* esa afirmada por no ser excluida de la representación. No obstante, ¬P necesariamente está dentro de S, con lo cual es difícil creer que Schuyler pensara que P podía extenderse dentro de S. Nosotros resolveríamos el problema dividiendo *S* en una parte conteniendo con certeza a *¬P* y otra que podría tener o no parte de *P*.

El diagrama de Schuyler para *Ninguna No S es No P* es difícil y obliga a considerar qué espacios se corresponden con qué conjunciones si queremos ser minuciosamente precisos. Nos parece seguro que Schuyler eliminara el círculo de P para que todo ¬*S* fuera *P*, siendo evidente que también todo ¬*P* era *S* en la imagen. Lo que no tenemos claro es si se cuestionó qué pasaba con *PS* y si trató de expresarlo o no como haríamos nosotros mediante el recurso de dejar indeterminado el espacio de *P*, lo cual habría hecho él eliminando el círculo que determinaba su espacio.

Un constructor de diagramas que se preguntara en este punto cómo representar de forma exhaustiva y exclusiva todas las posibilidades del universo del discurso, podría encontrar fácilmente la solución si escrutara atentamente los diagramas de intersección de las particulares I, O desde la perspectiva de las privativas que presenta Schuyler. Entonces se percataría de que en ellas están las posibilidades *SP (1-1)*, *S¬P (0-1)*, y *¬S¬P (0-0)* y de que también se puede expresar con la intersección la única que falta, *¬SP (0-1)*, que se identifica con el área de *P* que no interseca con *S*. En este punto, estaríamos más cerca de tomar conciencia de que es posible expresar las universales A y E eliminando posibilidades del espacio de representación que genera el diagrama de la intersección.

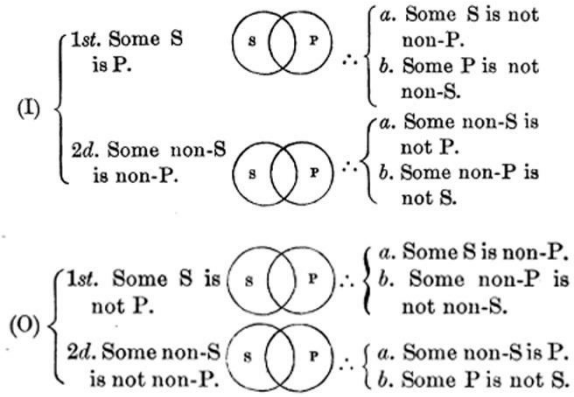


ILUSTRACIÓN 279. DIAGRAMAS PARA INTERSECCIÓN EN PRIVATIVAS. TOMADO DE SCHUYLER, 1869, PP. 43-44.

La exposición de los diagramas de I y O desde la perspectiva de las privativas que hace Schuyler evidencia que basta con la intersección para expresar todas las posibilidades que requiere la diagramatización de la lógica de Boole, incluso sin extrañarse por el segundo diagrama de E. Y es obvio que Schuyler no señala qué área indica cada posibilidad porque está muy claro qué área es *SP*, cuál *S¬P*, cuál *P¬S* y cuál *¬S¬P*, que no puede ser otra que la que está fuera de ambos círculos.

Nosotros no hemos podido encontrar que Venn nombrara a Schuyler, que no llegó a dar el paso de representar en la intersección las premisas universales, por más que los diagramas de Schuyler nos parecen un eslabón intermedio entre los diagramas tipo Leibniz-Euler y los de Venn, pues aunque no podamos afirmar que Venn tuviera noticia de ellos, muestran el paso de expresar proposiciones con sujeto negativo, que no tienen sentido para la lógica aristotélica y sí para la lógica simbólica. En ningún caso nuestra investigación es suficiente como para afirmar ni que fueran absolutamente necesarios diagramas intermedios entre Euler y Venn, ni que tales diagramas intermedios no se dieran en otros diagramas distintos de los de Schuyler, cuando el uso de diagramas estaba entonces muy extendido en los tratados de lógica (Venn, 1881) y el concepto de universo formado por la combinación de clases estaba en el ambiente.

> Again, these classes together make up the universe, for there is no object which may not be described by the presence or the absence of a proposed quality, and thus each individual thing in the universe may be referred to some one or other of the four classes made by the possible combination of the two given classes x and y, and their contraries (Boole, 2017, p. 60)

Sea como sea, en lo que nos interesa insistir ahora es en que Schuyler formaliza *Ninguna S es P* como *Toda S es no-P*, y luego la invierte en *Toda P es no-S*, pero sin llegar a dar el paso de convertirla, como hacemos en el diagrama de Marlo, en *Solo no-P es S*, o bien, cuantificando el predicado, en *Parte de no-P es toda S*. Este paso tampoco lo facilitará Venn con sus representaciones, en las que es obvio que siguen teniendo menos protagonismo los términos negativos que los afirmativos.

6.6 John Venn (1834 - 1923)

Si hay una forma de representación diagramática de la lógica ampliamente difundida desde el ámbito de la didáctica hasta incluso el contexto de la bioinformática (Chen & Boutros, 2011) es la que propuso Venn en julio de 1880 en la revista *Philosophical Magazine* en un artículo titulado "On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings" (Venn, 1880). Un año más tarde publicó su obra paradigmática *Symbolic Logic*, en la que mostraba diagramas geométricos utilizados antes que el suyo en la representación sensible de proposiciones lógicas. Según Lemanski (2018), en estas notas históricas discutía especialmente los llamados "diagramas analíticos", que comparten un parecido familiar con los diagramas de Euler y los del propio Venn, debatiendo hasta qué punto habían sido utilizados en la filosofía moderna, de modo que *Symbolic Logic* también se convertirá en una referencia obligada para cualquier historia de los diagramas.

6.6.1 Alcance de los diagramas de Venn

Los diagramas de Venn forman un sistema lógico completo (Shin, 1995) con unas nociones primitivas de sintaxis bien definidas (Alemany, 1998; Pagnan, 2012; Shin, 2009) de modo que son un ejemplo de razonamiento heterogéneo (Hammer E., 1994) equivalente a la lógica monádica de primer orden (Hammer, 1995) y que pueden representar la silogística de manera perspicua (Castro-Manzano, 2017). De ellos decía Martin Gardner (1958):

> All the foregoing methods of diagramming class-inclusion logic were developed before the modern truth-value prepositional calculus assumed its present form and importance. As we have seen, the terms of class logic stand for classes. In the propositional calculus, terms stand for statements (such as "It is raining") which may be regarded as true or false, and which are logically related by such "connectives" as "and," "or," "not," "both," "if", "then." The question naturally arises, can these diagrams be used for solving problems in the prepositional calculus? The answer is yes, as Venn himself recognized though he did not elaborate the technique. (p. 59)

6.6.2 Principios elementales

Según Bochenski y Bravo (1985), los diagramas de Venn presentan la novedad histórica de marcar con un asterisco las áreas que representan clases no vacías y de utilizar elipses en vez de círculos para trabajar con más de tres términos (Moktefi A. , 2013), mejorando el diseño de los diagramas de Euler (Abeles, 2007; Moktefi & Shin, 2013) hasta el punto de haber contribuido a que buena parte de los lógicos abandonaran definitivamente la aproximación aristotélica del razonamiento en pro de la perspectiva booleana de la lógica de clases

> Few logicians care today whether a syllogism is or is not reduced to the first figure, or whether we should recognize three figures or four. Perhaps one reason why these old issues faded so quickly was that, shortly after Boole laid the foundations for an algebraic notation, John Venn came forth with an ingenious improvement on Euler's circles. The result was a diagrammatic method so perfectly isomorphic with the Boolean class algebra, and picturing the structure of class logic with such visual clarity, that even a nonmathematically minded philosopher could "see" what the new logic was all about. (Gardner, 1958, p. 39)

Venn (1881) se refiere a la lógica de Aristóteles como la vieja visión, una perspectiva simple, útil, cercana al lenguaje popular y difícil de superar para los propósitos educacionales ordinarios, citando entre sus defectos la falta de simetría y de un sistema diagramático que permitiera intuir las proposiciones:

> Its defects seem to me to be principally these: that it does not yield itself to any accurately correspondent diagrammatic system of illustration; and that its want of symmetry forbids its successful extension and generalization. The great merit of the second plan, or that of class inclusion and exclusion, is its transparent clearness of illustration. We may be said thus to intuite the proposition. (p.28)

Más tarde afirma que podemos silogizar a la ligera de la misma manera que podríamos conducir una diligencia de Londres a Birmingham a lo largo del ferrocarril, lo cual sería una deferencia innecesaria a la tradición cuando se tienen "motores y carros especialmente diseñados para el nuevo sistema" (Venn, 1881, p. 324).

Heredero del grupo que él mismo denominó "Modern English Logic" (Venn, 1881, p. xxix) en el que incluía a Bentham, Hamilton, De Morgan, Boole y Jevons, Venn propone un sistema alternativo a la lógica aristotélica partiendo de la lógica simbólica, en especial de Boole, y que acompañará de un sistema de diagramatización en perfecta armonía con sus principios.

En la lógica de Venn (1881) el predicado de una proposición ya no se corresponde con un atributo predicado de un sujeto (p.4), ni hay sujetos ni predicados, y aunque se revalorizan desde un nuevo punto de vista las diferencias entre universal y particular se descartan distinciones tradicionales como la que se da entre términos afirmativos y negativos (p.358) y otras tantas que ya no se consideran importantes para construir una ciencia simétrica y homogénea:

> For instance we have, strictly speaking, no concern whatever within the limits of our enquiry with such distinctions as those between denotation and connotation, between essential and accidental attributes, or even with that between subject and predicate. Not of course that we would for a moment imply that such distinctions as these are unimportant. Quite the reverse; the study of them furnishes decidedly the most valuable educational advantage to be derived from the Common Logic. We omit them solely in order to keep our own Science homogeneous and symmetrical. (pp.33-34)

Ahora el concepto fundamental es el de clase, que permite hablar de identidad como igualdad matemática.

> The answer of course is that a 'class' is merely our way of grouping or outlining things, and is indicated and retained by the imposition of names. The very same individuals therefore may belong to more than one class; in other words, may have more than one single name or combination of names assignable to them. It is in this sense only that we can talk of the identity of all the members of two or more classes. Such identity is what we mark by the sign of equality (=). (Venn, 1881, pp. 64-65)

Venn (1881) insiste en prescindir de cuestiones gramaticales o psicológicas al definir las clases con las que él opera y los símbolos con los que las nombra, e intenta alejarse de toda interpretación metafísica y trascendental de su lógica, intentando por el contrario establecer paralelismos entre las operaciones lógicas y aritméticas de la suma, la resta, la multiplicación y la división, aunque al mismo tiempo traza líneas divisorias afirmando que la lógica simbólica y las matemáticas son ramas de un lenguaje de símbolos que poseen algunas, pero muy pocas, leyes de combinación en común: “this explanation of the principles of the logical calculus, in entire independence of those of the mathematical calculus, is one of the main objects which I have had before me in writing this book”(p.xiii).

Afirma Venn que lo que le interesa son las clases de objetos, reales o posibles, y que estos pueden ser representados por círculos u otras figuras cerradas que podamos sombrear o marcar de otra manera para indicar si dicha clase debe ser declarada realmente inexistente o no. Para ello pretende emplear figuras simétricas que ayuden al razonamiento a través del sentido de la vista y que sean, en cierta medida, elegantes en sí mismas.

> Although however diagrammatic illustration fails to keep pace with true symbols, or letters, in respect of symmetry and simplicity, we must remember that they are really in strict correspondence with one another. No combination of class terms could be invented or expressed either in symbols, or in common language, which could not be made sensible to the eye by a suitable diagrammatic construction. (Venn, 1881, p. 108)

Aunque Venn (1881) afirma que las letras son los verdaderos instrumentos de cálculo y que solo ellas pueden llamarse estrictamente símbolos, nos dice también que empleará los diagramas, de ninguna manera inapropiados para la lógica, para fines de mera ilustración y como verdaderas pruebas geométricas, más breves en ocasiones, insistiendo además en que sus esquemas diagramáticos y puramente simbólicos están en completa correspondencia y armonía entre sí, cosa que no ocurría con los diagramas eulerianos. Por ello insiste en que los sistemas simbólicos y diagramáticos son, hasta cierto punto, artificiales, y deberían construirse de tal manera que funcionen juntos en perfecta armonía, hasta el punto de que se enorgullece de que en la base de su lógica simbólica, ya sea representada por palabras por letras o por diagramas, siempre encontraremos el mismo estado de cosas, algo que nosotros también podemos decir que ocurre al revisar la notación diagramática y simbólica de nuestros diagramas basada en la cuantificación del predicado.

6.6.3 Primera valoración

Los diagramas de Venn han sido definidos como diagramas que usan formas geométricas simples como círculos y elipses para mostrar todas las áreas posibles (2^n-1) creadas por la interacción de n conjuntos, reduciendo con el uso de formas geométricas simples la complejidad y el tamaño de las figuras en relación con las tablas o los diseños de red que consumen espacio (Chen & Boutros, 2011). Nosotros estamos de acuerdo con la definición, aunque desde nuestra perspectiva didáctica, consideramos los diagramas de Venn herramientas que se limitan a facilitar el modo de llevar la cuenta de las combinaciones entre variables que no son compatibles con las premisas, siendo la eliminación la única estrategia de razonamiento que se requiere y que es reflejada en la hoja de aserción.

Existen, como veremos, otros diseños geométricos rectangulares o diagramas de árbol, como nuestras propias redes de expectativas, que también permiten generar de forma exhaustiva y exclusiva todas las combinaciones posibles para proceder por descarte y al margen de que hablemos de clases, cualidades, atributos o caracteres. Y aunque en cierto sentido algunos gozan de mayor claridad para trabajar con más de cuatro variables, todos ellos comparten el inconveniente de que aumenta en progresión geométrica, no solo el espacio que se requiere para representar problemas con un mayor número de variables, sino también el ruido que acompaña a las conclusiones, pues cuantas más celdas se representan, más difícil es identificar la información visual relevante que puede ser recodificada en forma de proposiciones para comunicar el estado exacto del sistema. Un problema que es menos acusado en el diagrama de Marlo, que además de la eliminación emplea la síntesis y el uso de la información implícita como parte de los procesos de inferencia.

Venn presenta sus diagramas como la expresión perfecta de las cinco relaciones fundamentales que pueden tener lugar entre dos clases y que giran en torno a las ideas de inclusión, exclusión e intersección. Sin embargo, y como ya mostramos anteriormente, dicha tesis nos parece que complica innecesariamente nuestra comprensión del razonamiento, más ligada a un punto de vista conexionista que elimina toda reminiscencia de subordinación metafísica entre categorías como la que se da entre género y especie en el aristotelismo. Nosotros preferimos sustituir intersección por asociación y no consideraremos, cuando se trata de proposiciones simples, que *A* pueda estar incluida en *B* excepto en el sentido de que todo aquello que asociamos con *A* lo asociamos con *B:* una idea que está más próxima a la doctrina de la cuantificación del predicado que a la de Venn, tal y como venimos insistiendo desde el comienzo de la tesis.

6.6.3.1 -proposiciones elementales

Según Venn, la naturaleza de la proposición es la cuestión fundamental que debe ser afrontada para construir una teoría completa de la lógica y es en este terreno en el que muestra la superioridad de sus diagramas sobre el resto de las propuestas de su momento, aunque es también aquí precisamente donde nosotros consideramos superior la perspectiva del diagrama de Marlo a la suya.

> If we were constructing a complete Theory of Logic we should have to attack the question as to what is the true account, by which we should understand the most fundamental account, of the nature and import of a proposition, and on this point different accounts would be to some extent in direct hostility to one another (...) So far as we are now concerned there seem to be three different accounts of the import of a proposition; the ordinary or predication view, the class inclusion and exclusion view, and that which may be called the compartmental view. (Venn, 1881, p. 2)

Como recordaremos, Venn (1881) reduce a cinco y solo cinco las relaciones fundamentales entre clases que pueden ser expresadas por una proposición simbólica o diagramáticamente: la de la inclusión de *A* por *B*, de *B* por *A*, su inclusión parcial, su exclusión mutua y su coincidencia (p.5), aunque cuando considera *A* y *B* como grupos de atributos, se reducen a solo cuatro relaciones (p. 392).

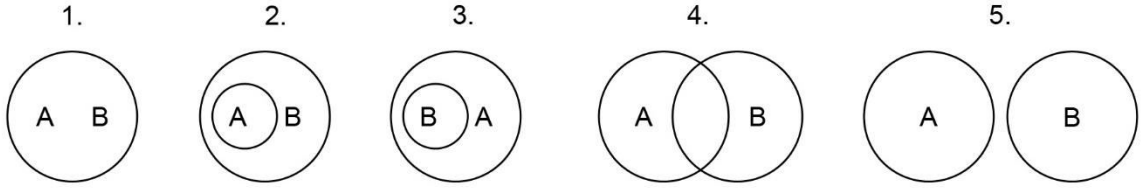


ILUSTRACIÓN 280. RELACIONES FUNDAMENTALES ENTRE CLASES. TOMADO DE VENN, 1881, P. 6.

A nosotros nos parece evidente que los diagramas de incluir y estar incluido (2 y 3) son uno y el mismo, por lo que sus relaciones deberían reducirse exactamente a los mismo cuatro diagramas que proclamaba Hamilton desde la cuantificación del predicado. Venn (1881) es consciente de lo cuestionable de su propuesta y reconoce que: "Other writers, for instance Twesten (Logik, p. 30) and the author of a little volume entitled Thoughts on Logic, or the S. N. L X. Propositional Theory, reduce the five forms to four, by not distinguishing between (2) and (3)"(p.6). Entonces recurre a la autoridad insistiendo en que las cinco formas de relación expresadas han sido reconocidas repetidamente por los escritores lógicos y cita, además de a F. A. Lange (*Logische Studien*), a Gergonne (*Annales de Mathematiques*, vii. 189) como el ejemplo más temprano de esta perspectiva. Sin embargo, desde nuestra perspectiva, lo importante para él era desmarcarse de las viejas teorías aristotélicas de la predicación

y de las modernas ideas de la cuantificación del predicado. Por eso insiste en que no se deben utilizar los diagramas de un sistema para representar las proposiciones de otro.

> But none the less must we remember that the systems of propositions are really based on distinct theories, and we have consequently no right thus without warning to use the diagrams of one system to represent the propositions and syllogisms of another. (Venn, 1881, pp. 16-17)

Sobre todo, dice Venn (1881), porque su sistema de cinco proposiciones no encaja con el anterior de cuatro:

> A very little consideration will serve to convince us that this scheme of five forms, and the old one of four, will not by any means fit in accurately with one another. Considering that they spring from different interpretations of the import of a proposition it could not be expected that they should do so. (p.7)

Su sistema se basa, según él, en las relaciones reales de inclusión y exclusión que se dan entre clases.

> So long as we confine ourselves to the five propositions which correspond to the five distinct diagrams, we are on clear ground. These rest on a tenable theory as to the import of propositions sufficiently to give them cohesion and make a scheme of them. That theory is, as above explained, that they are meant to express all the really distinct relations of actual class inclusion and exclusion of two logical terms, and none but these. (Venn, 1881, p. 15)

En todo caso Venn no pasa a la historia de los diagramas por su propuesta de las cinco proposiciones elementales en diagramas tipo Leibniz-Euler, sino por los diagramas intersecados con los que expresa todas las combinaciones que pueden establecerse entre clases. Y lo que nos interesa señalar es que en estos diagramas lo relevante no es solo que muestren las relaciones de inclusión, exclusión e intersección de clases, sino el hecho de que son capaces de generar de forma exclusiva y exhaustiva compartimentos para todas y cada una de las categorías que se generan al combinar cualquier número de clases. Así, vemos en Venn (1881):

> Both schemes, that of letters and that of spaces, agree in their elements being mutually exclusive and collectively exhaustive. No one of the ultimate elements trespasses upon the ground of any other; and, amongst them, they account for all possibilities. Either therefore might be taken as a fair representative of the other. (p.105)

Venn (1881) aplica una vieja idea que relaciona la lógica con la combinatoria y que entonces estaba muy presente, entre otros, en Boole, y afirma:

> With two classes, X and F, we have four subdivisions; the X that is Y, the X that is not Y, the Y that is not X, and that which is neither X nor Y. And so with any larger number of classes (…) What we ultimately have to do is to break up the entire field into a definite number of classes or compartments which are mutually exclusive and collectively exhaustive. (p. 101)

Esta idea de clases que se combinan para formar el universo del discurso pretendía suponer una perspectiva distinta a la doctrina de la predicación y pretendía ser gráficamente expresable con solo dos círculos que intersecan.

> The view which is here taken is still distinctly a class view rather than a predication view; but, instead of regarding the mutual relation of two or more classes in the way of inclusion and exclusion, it substitutes a complete classification of all the sub-divisions which can be yielded by putting any number of classes together, and indicates whether any one or more of these classes is occupied; that is, whether things exist which possess the particular combination of attributes in question. (Venn, 1881, p. 23)

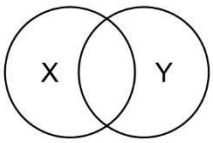


ILUSTRACIÓN 281. TODAS LAS COMBINACIONES POSIBLES ENTRE X E Y. TOMADO DE VENN, 1881, P. 24.

Para expresar relaciones de inclusión-exclusión entre tres términos, basta con unir tres círculos consiguiendo que cada uno se divida en cuatro partes, y cada parte común de dos círculos se divida a su vez en dos partes, de modo que, incluyendo las áreas que se encuentra fuera de los tres círculos, haya un total de ocho compartimentos.

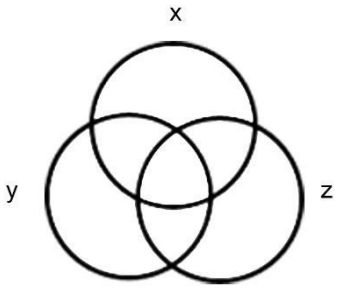


ILUSTRACIÓN 282. EXPRESA LA PRESENCIA Y LA AUSENCIA DE Z. TOMADO DE VENN, 1881, P. 105.

Y afirma Venn (1881) que en teoría puede representarse la relación de cualquier número de términos, aunque a partir de cuatro se pierda claridad.

> This process is capable of theoretic extension to any number of terms. The only drawback to its indefinite extension is that with more than three terms it is not possible to use such simple figures as circles, for four circles cannot be so drawn as to intersect one another in the way required. With employment of more intricate figures we might go on for ever [...] There is clearly no reason against continuing this process indefinitely. (pp.105,106)

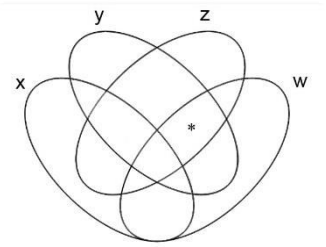


ILUSTRACIÓN 283. DIAGRAMA DE VENN CON CUATRO ELEMENTOS. TOMADO DE VENN, 1881, P. 106.

> With five terms combined together ellipses fail us, at least in the above simple form. It would not be difficult to sketch out figures of a horse-shoe shape which should answer the purpose, but then any outline which is not very simple and easy to follow fails altogether in its main requirement of being an aid to the eye. What is required is that we should be able to identify any assigned compartment in a moment. (Venn, 1881, p. 107)

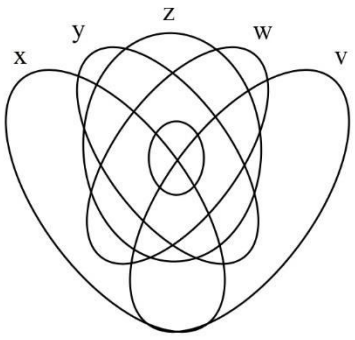


ILUSTRACIÓN 284. DIAGRAMA DE VENN CON CINCO ELEMENTOS. TOMADO DE VENN, 1881, P. 107.

Aunque Venn (1881) pretende inicialmente mostrar las relaciones de inclusión, exclusión e intersección, se hace evidente que el problema fundamental al que se enfrenta cuando pretende aumentar el número de términos implicados en un silogismo es, lo mismo para diagramas que símbolos, mostrar todas las combinaciones posibles entre clases, asumiendo, en este sentido, que otros autores precedentes como Semler (1811) han hecho ya hincapié en las leyes que rigen la combinación de los términos. Afirma Venn (1881): «The writer (before Boole) who has

most strongly insisted on this enumeration of all the possible combinations produced by all the class is Semler (Versuch über die dieser Begriffe beisammen stiinden, combinatorische Methode, 1811) ». (p.351)

Los diagramas de Venn pueden expresar gráficamente la estructura profunda de los conectores lógicos haciendo visibles qué combinaciones son eliminadas y cuáles se mantienen, aunque, como señala Gardner, este desarrollo no fue llevado a cabo por Venn. De hecho, la imagen que presenta Gardner incluye un círculo aparte para la clase $\neg A \neg B \neg C$ que nunca es mostrado en *Symbolic Logic*, donde Venn evita ejemplos de proposiciones del tipo *"X o Y o Z"* que le hubieran obligado a eliminar toda el área exterior de sus diagramas intersecados.

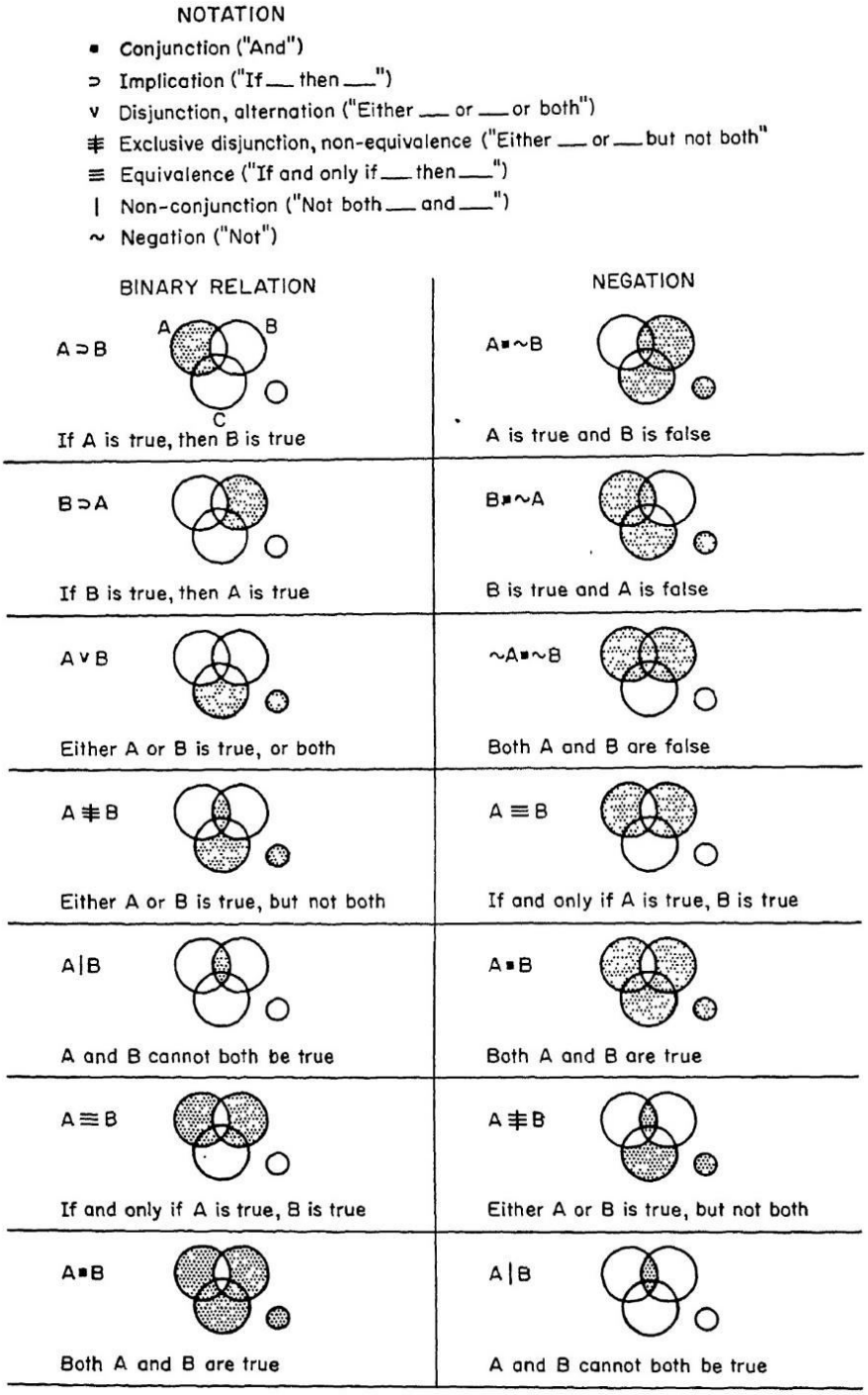


ILUSTRACIÓN 285. PROPOSICIONES LÓGICAS EN DIAGRAMAS DE VENN. TOMADO DE GARDNER, 1958, P. 52.

Los diagramas de Marlo no pueden representar ninguna proposición que no puedan representar los diagramas de Venn, pero requieren de menos espacio porque emplean el uso de información implícita bajo la regla: S*i no es negado es posible*. Además, otra diferencia reseñable es que mientras que en los diagramas de Venn al representar la proposición *Toda A es B* las posibilidades *AB* y *B*¬*A* tienen el mismo estatus epistemológico, en los diagramas de Marlo las diferenciamos, pues consideramos *AB* como posibilidad confirmada por la fuente y ¬*AB* como posibilidad ni afirmada ni negada. Sin embargo, nuestro modo de diagramar es compatible con toda la historia de la tradición diagramática en la que al representar *Toda A es B*, quedaba como incierta toda extensión de *B* más allá de *A,* lo cual se señalaba, por ejemplo, en los diagramas lineales, trazando una línea discontinua. Y el propio Venn (1881) señala como una desventaja del sistema de Hamilton que no sea capaz de expresar tal incertidumbre que sí recoge la universal afirmativa aristotélica. Es decir, que el matiz en los distintos grados de certeza que transmite una proposición acerca de las conjunciones que cabe esperar, y que nosotros indicamos añadiendo una interrogación a las que son inciertas, ha sido tradicionalmente señalada en los diagramas lineales y supuestamente eliminada en los diagramas de Venn. Una decisión que descansa, en último término, en el problema del valor existencial de las universales y la dificultad de su conversión, que nosotros creemos haber resuelto distinguiendo convertir de transformar, como mostramos anteriormente.

6.6.3.2 Existencia en las universales

Venn (1881) reconoce que cuando afirmamos que *Toda X es Y*, damos generalmente por hecho que hay entidades de la clase *X* y de la clase *Y*, es decir, que en términos generales, *Todo X es Y* implica directamente que hay *X*, y en consecuencia indirectamente que hay *Y.* Así afirma: «According to the popular interpretation of ' If A is B then C is D' it is unquestionably assumed that A and C are existent or present» (p.343). Pero le parece más difícil de admitir la existencia de sujetos complejos del tipo *XY* y por ello prefiere extender la interpretación hipotética a todas las proposiciones sin excepción. Admite, no obstante, ciertas dificultades gramaticales que le parecen comunes a todo sistema de lógica pero que no deberían preocupar a ningún lógico. Venn reconoce que no hablamos de lo que no existe sin advertencia, aunque hay excepciones como al utilizar el futuro, y reconoce también que generalmente sabemos cuando nos referimos a ideales. Por eso dice:

> Nuestras subdivisiones esquemáticas, o en realidad nuestros símbolos en general, representan compartimentos y no clases. Sin duda, podemos considerar que representan a estos últimos, pero si lo hacemos, nunca debemos dejar de tener en cuenta la condición de "si hay tales cosas en existencia". (p.110)

Y sigue:

> People do not in general talk about what they believe to be nonentities. They do not, for instance, without warning describe the qualifications for an office which they suppose does not exist, nor do they state the attributes of a substance which is nowhere, within the scope if their enquiry, to be found (…) This seems to be the rule; but there are some admitted classes of exceptions (...) So too, in most circumstances of our ordinary life, wherever we are clearly talking of an ideal. 'Perfectly conscientious men think but little of law and rule', has a sense without implying that there are any such men to be found. (p.130)

Venn (1881) insiste en que pretende afrontar la cuestión de la existencia sobre una base científica o lógica, sin digresión hacia consideraciones metafísicas, pues el lógico no tiene necesidad de discutir la naturaleza de esta existencia, o lo que realmente puede significar, de manera que no importa que cualquiera defina la existencia como le plazca, siempre que luego pueda responder a la pregunta razonable de si hay alguna cosa existente que se corresponda con nuestro sujeto *X* o nuestro predicado *Y*.

> For instance, we may happen to be speaking of ordinary phenomenal existence, and at the time present; by the distinction in question is then meant nothing more and nothing deeper than what is meant by saying that there are such things as antelopes and elephants in existence, but not such things as unicorns or mastodons. (p.127)

Afirma Venn (1881) de sus diagramas que se prestan muy fácilmente a mostrar la distinción entre compartimentos como posibilidades formales y objetos que existen dentro de dichos compartimentos. Es decir, que todo compartimento existe formalmente en cuanto posibilidad, al margen de que esté o no esté ocupado, siendo una cosa su enumeración completa y otra poder probar que haya una clase de cosas que poner en cualquiera de ellos: “The compartment necessarily exists, because it is purely formal, but it must be left to the data to decide whether or not it is occupied” (p.111). Por ello, en fórmulas y diagramas de proposiciones universales se debe prescindir de toda denotación existencial, de modo que la interpretación simbólica de las proposiciones clásicas se

reduce a posibilidades eliminadas. Si decimos que "xy = 0" expresaremos que un compartimento no está ocupado, que no hay tal clase de cosas:

xy = 0	No x is y
$\bar{x}$y = 0	All y is x
x$\bar{y}$ = 0	All x is y
$\bar{x}\bar{y}$ = 0	Everything is either x or y

TABLA 41. PROPOSICIONES CLÁSICAS. ADAPTADO DE VENN, 1881, P. 24.

En el caso de la universal negativa *Ningún X es Y*, le parece más fácil probar que no hay ningún tipo de denotación existencial, porque lo relevante es, según él, negar que exista la combinación *XY,* siendo indiferente que existan o no cosas que son *X o* son *Y* (p.159). De cualquier modo, Venn no seguía en su interpretación existencial de las proposiciones las mismas convenciones que otros lógicos del XIX. Hurley y Watson (2018) afirman, según nuestra propia traducción:

> Será Venn y no Boole quién dé el paso de eliminar la existencia de las universales. Y no es en Boole porque él pasaba de la universal afirmativa a la particular afirmativa I: Toda A es B implica que alguna B es A. Venn lo rechaza porque la conversión de *todas las cosas medibles son finitas* en *todo lo no medible es infinito* implica que existen cosan infinitas. (p. 226)

Venn (1881) cree que si en lugar de interpretar las proposiciones universales como negación de diversas combinaciones se mantuviera la denotación existencial de todos los sujetos y predicados, se obstaculizaría la manipulación de complicados grupos de proposiciones y por ello afirma que es mejor eliminar la distinción entre categórico e hipotético, tal y como reconocieron, según él, lógicos como Herbart, Beneke y Sigwart. Esta decisión la ilustra con lo que considera un ejemplo muy simple: El ve el juicio "Si hay alguna X que sea Y, entonces son Z", como claramente hipotético y que puede estar redactado, sin el menor cambio de significado como 'Todos los XY, si los hay, son Z'; que es idéntico en forma a la categoría ordinaria 'Toda A es B' cuando lo aceptamos con la condición tácita 'Toda A, si hubiera alguno: "This rejection of the Hypothetical, as a distinct form, will not be any sacrifice to us, for it is a marked characteristic of this generalized Logic to abandon that distinction"(p.135).

No obstante, afirma Venn (1881) que de todas las posibilidades al menos una debe ser cierta, luego por eliminación podemos llegar a saber lo que existe. Y dice:

> All cannot be unoccupied, of course, for we cannot deny both the existence and the non-existence of a thing; or, to express it more appropriately on this scheme, given that a thing exists it must be put somewhere or other in our all-comprehensive scheme of possibilities. (p. 24)

Eliminada la denotación existencial de las universales no es posible la conversión accidental directa a las singulares, de las cuales, como ya sabemos, y al contrario que de las universales, sí reconoce Venn (1881) la validez existencial, porque según él:

> Una afirmación limitada a "algunos" de una clase generalmente se basa en la observación o el testimonio más que en el razonamiento o la imaginación, y, por lo tanto, casi necesariamente postula los datos existentes, aunque la naturaleza de esta observación y la existencia consiguiente es, como ya se señaló, una pregunta perfectamente abierta. (p. 131)

Otro problema, que supone aceptar que las universales denotan existencia, es el que se sigue de la inversión de la universal negativa, cuyo esquema lo considera Venn (1881) fundamental en todo sistema diagramático (p.25) y el único que no es ambiguo (p.405). Dado que tradicionalmente se ha invertido *Ningún A es B* en *Ninguna B es A* considerándolas proposiciones equivalentes, afirmar la existencia de *A* en la primera equivale a afirmar la existencia de *B* en la segunda, lo cual es claramente inaceptable: "cómo la universal negativa es simplemente convertible, lo que se sostiene de su sujeto también debe sostenerse de su predicado" (p.138). E insiste:

> For instance, the conversion of a Universal Negative, xy = 0, can imply nothing more with us than an optional difference in the reading off of the proposition; we may utter it as we please, 'No x is y' or 'No y is x'. And since we do not recognize any real distinction between positive and negative terms the same may be said of any other form. (p.356)

Para nosotros, en el diagrama de Marlo, tanto las proposiciones universales como las particulares pueden tener un valor meramente teórico o ambas tener denotación existencial, siendo ambos constituyentes separables en la expresión diagramática y formal de ambos tipos de proposición. Además, como ya indicamos anteriormente, desde la perspectiva del diagrama de Marlo podemos evitar el inconveniente que deriva de lo que consideramos un error histórico fomentado por los diagramas de la exclusión, primero los de tipo Leibniz-Euler y más tarde los de Venn, en los que se muestra como si fueran iguales, partiendo de la universal negativa, la exclusión de *a* respecto de b y la de *b* respecto de *a*.

Nosotros diferenciamos entre convertir y transformar, y si bien al convertir *Ningún A es B* por *Solo ¬B es A* mantenemos la denotación existencial de ¬BA, no lo hacemos al transformar. Y resulta fácil ver en las redes de expectativas que al convertir seguimos refiriéndonos a los mismos nodos activados por la fuente, mientras que al transformar aludimos a nodos que no pasan de ser consecuencias teóricas de la proposición inicial (Aznar, 2018g). Un punto de vista el nuestro que, como señala Venn (1881), coincide con el sentido común:

> From 'All X is Y' we are commonly allowed to derive 'All not-F is not-X'. But this being a universal affirmative must indicate that there are instances of not-F and not-X, as well as of F and X. This is certainly very remote from the popular view, which never thinks of insisting that X and F must not only exist but must also abstain from comprising all existence. The popular interpretation of this form of proposition is surely conditional only, and equivalent to 'All not-F, if there be any, is not-X.' (p.137)

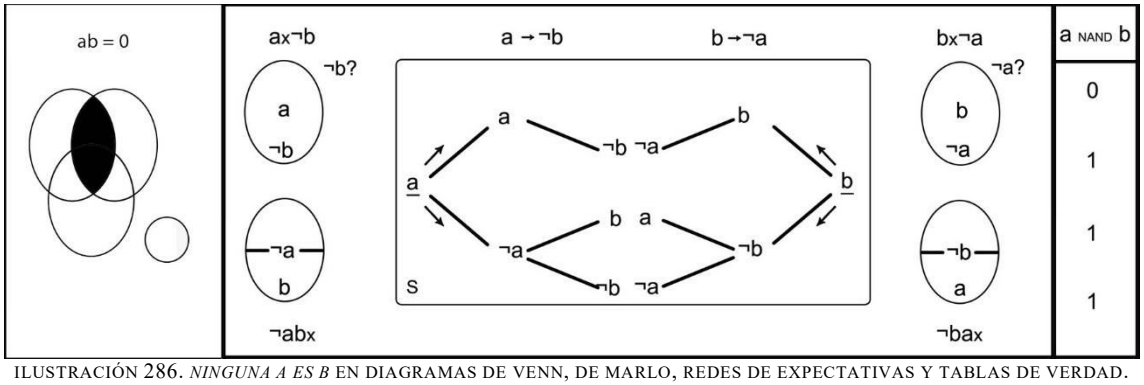


ILUSTRACIÓN 286. *NINGUNA A ES B* EN DIAGRAMAS DE VENN, DE MARLO, REDES DE EXPECTATIVAS Y TABLAS DE VERDAD.

Justo antes de mostrar las notaciones que ha recopilado para la universal negativa, Venn expone seis formas distintas en las que puede ser considerada:

En primer lugar, podemos considerar la proposición como existencial, negando la existencia de la clase de cosas que son S y P.

En segundo lugar, podemos convertir la proposición en la forma de una identidad tomando como términos de la proposición S y no-P, para luego identificar el primero con una parte indeterminada del segundo. La cópula apropiada es, por supuesto, (=).

En tercer lugar, se puede considerar que la proposición expresa una consecuencia o implicación: 'Si S entonces no-P', o 'la presencia de S implica la ausencia de P'. Esta relación, por supuesto, no es convertible, ya que no se sigue que la ausencia de P implique la presencia de S. En consecuencia, algún tipo de símbolo asimétrico se vuelve apropiado para representar la cópula en este caso.

En cuarto lugar, manteniendo lo que considera Venn una relación más cercana con la expresión común de la proposición, podemos considerar que expresa una relación no como antes entre *S* y *no-P*, sino entre *S* y *P*. Esta relación es convertible y, por lo tanto, deberíamos buscar en este caso para algún símbolo simétrico[21].

En quinto lugar podemos considerar a *S* y *P* no como clases de cosas sino como atributos o grupos de atributos según se concibe la proposición en la fraseología conceptualista o nocional.

[21] No hay que olvidar que Venn considera *S* y ¬*S* al mismo nivel, aunque se equivoca al considerar que la universal negativa establece una relación convertible entre *S* y *P*, pues no es existencialmente convertible si consideramos con De Morgan y el sentido común que en las negativas se afirma la existencia de al menos uno de los términos.

Por último, dice Venn, es posible encontrar intentos no descriptivos que pueden limitarse a adoptar una notación arbitraria.

En el sistema de notación del diagrama de Marlo podemos mostrar el caso tres señalado por Venn indicando que todos los casos en los que hemos registrado la presencia de S son igual al menos a parte de las situaciones en las que hemos registrado la ausencia de P, aunque en tal caso hemos eliminado el significado de implicación al que se refiere Venn.

Por otra parte, nosotros interpretamos en general el significado de la universal negativa en el segundo sentido al que se refiere Venn, identificando la totalidad de S con parte de ¬P. Cuando por el contexto o los matices de la proposición la interpretamos como existencial afirmando que *No existe ningún A que sea B*, es decir, como negación de la conjunción, obviamente no tenemos motivos para afirmar que existan A y $\neg B$. Pero en el uso ordinario, al menos en castellano, si yo afirmo que *Ninguno de mis hermanos es cazador*, comunico que tengo hermanos. Esto no ocurre cuando afirmo que *No tengo ningún hermano cazador*. Igualmente contamos con los matices que nos da el castellano para distinguir entre la estructura *Ninguno excepto X es Y* y *Ninguno excepto X podría ser Y* que subyace a proposiciones a las que se refiere Venn como *Nada, excepto un dragón, podría inhalar llamas*

Venn (1881) es consciente de que la opinión en este aspecto es controvertida y cita a otros lógicos que lo discuten como De Morgan, Jevons, Mansel, Herbart, Sigwart, Beneke, Ueberweg, o Peirce, cuyas opiniones, en muchos casos, afirma "no poder reclamar con certeza en contra o a favor de la suya" (p.134). Nosotros estamos de acuerdo con lo que afirma Mr Macfarlane en la cita que toma Venn para mostrar su desacuerdo con él:

> Every general proposition refers to a definite universe, which is the subject of the judgment, and, it may be of a series of judgments. For example, 'All men are mortal' refers to the universe 'men'. 'No men are perfect', refers to the same universe. (Macfarlane, 1879. Citado en Venn, 1881, p. 29)

También nosotros al diagramar formalizamos *Ningún hombre es perfecto* como *Todo lo humano es parte de lo no perfecto* "$h_x \neg p$", dejando claro que la proposición nos informa de las cualidades de los hombres. Este punto de vista lo comparte Boole en *An Investigation of the Laws of Thought* cuando formaliza dicha proposición igualando los hombres con una parte indefinida de los seres no perfectos.

> Consider next the case of universal negative propositions, e.g. "No men are perfect beings." Now it is manifest that in this case we do not speak of a class termed "no men," and assert of this class that all its members are "perfect beings." But we virtually make an assertion about "*all men*" to the effect that they are "*not perfect beings*." Thus the true meaning of the proposition is this: "All men (subject) are (copula) not perfect (predicate);" whence, if y represent "men," and x "perfect beings," we shall have $y = v\,(1 - x)$. (Boole, 2017, p. 45)

Y por lo mismo coincidimos más con De Morgan (1847b), que todavía afirmaba que "la existencia de los objetos e ideas es tácitamente reclamada por los términos de todo silogismo, de modo que en una proposición afirmativa deben existir ambos y en las negativas al menos uno"(pp.111-112), y con aquella mayoría de lógicos que Venn (1881) entiende que tienen una visión más cercana a las conclusiones del sentido común y del lenguaje común (p.136). Pensamos, afines en esto a la tradición aristotélica, que renunciar a la denotación existencial en las proposiciones universales es mutilar el uso del lenguaje por un déficit en la comprensión de cómo emplean los sistemas cognitivos el principio de razón suficiente en los procesos de comunicación para informar de qué es razonable esperar y con qué grado de certeza. Formalizar las proposiciones en los diagramas de Marlo y las redes de expectativas permite señalar la diferencia entre un nodo existencialmente activado y un nodo solo formalmente necesario o solo posible, recuperando la diferencia tradicionalmente aceptada entre hipotético y categórico cuestionada por Venn al justificar la representación diagramática de las proposiciones. Y si bien es cierto que puede recuperarse y señalarse tal distinción en los diagramas de Venn, sigue siendo una ventaja de nuestro sistema mostrar un mayor paralelismo entre los procesos de eliminación y de ilación que tienen lugar en la inferencia.

Venn (1881) insiste en que la única visión simbólica sostenible es que no hay una distinción real entre las formas hipotéticas y categóricas de declaración, y que estas representaciones sean distintas lo considera una cuestión de opción privada, por lo que cada uno puede leer los símbolos de cualquier manera que le plazca, porque, según él, no hay nada en la forma en la que se redactan las premisas que nos obligue a traducirlas a una forma en lugar de otra (p.326). También señaló las posibles relaciones de las proposiciones hipotéticas con aproximaciones al estudio de la inducción, que las acercaban a la estimación de la probabilidad, insistiendo en que la distinción entre juicios

categóricos e hipotéticos solo puede ser realizada por aquellos que adoptan una visión más subjetiva de la naturaleza de los procesos de razonamiento (p. 327).

Venn afirma que lo importante es que en el universo del discurso las divisiones que realicemos sean mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivas y que la única suposición en cuanto a las relaciones mutuas de X y ¬X es que, independientemente de lo que X represente, y podría significar casi todo lo que quisiéramos, ¬X "debería representar el resto de "todo" de lo que es tenido en cuenta" (p.363). Afirma que igualando *X* y ¬*X* se desvanece la distinción entre silogismos con premisas afirmativas y negativas (pp.318,319). Incluso llega a decir que el punto que le parece más característico de su sistema es que las clases positivas o negativas se sostienen exactamente sobre la misma base (p.350) y que no hay ninguna diferencia de carácter entre las clases *X* y *no X* o entre *XY* y ¬*X*¬*Y.* Como afirma al comienzo de *Symbolic Logic*:

> On the present scheme this is just as simple as any of the others; but in the traditional arrangement it would probably obtain admittance only as a disjunctive, since that arrangement hates the double negation 'No not-x is not-y' and does not like even the simpler 'All not-x is y.' Indeed on hardly any other view could such a verbal statement as this last be considered as elementary, since almost every one would have to put it into other words before clearly understanding its import. (p25)

Pero a pesar de todo, Venn (1881) siempre configura sus diagramas desde la perspectiva de X y nunca desde ¬X y prefiere la inversión de *Ningún A es B* en *Ninguna B es A*, aun cuando en sus propios diagramas es evidente que al eliminar el área de *AB* todo lo que esté en *A* estará en clases que son ¬*B* y que todo lo que esté en *B* estará necesariamente en compartimentos ¬*A*, permaneciendo intacta la posibilidad ¬*B*¬*A*. Y sigue afirmando que *Ninguna B es C*, *Ningún A es B* es un silogismo inválido (p. 16), porque interpreta el significado de la universal negativa igual que Aristóteles como *No existe un X que sea tal,* lo cual evidentemente no garantiza que exista un *X* que sea lo contrario. Pero un punto de vista moderno sobre la negación como el que afirmaba tener Venn debería captarla con la misma capacidad comunicativa que la afirmación, algo que sí vieron otros como Lewis Carroll (Carroll, 1897). Así, es más fácil decir *Ninguno de los comensales tomará postre* que afirmar *Todos van a no tomar postre, no habiendo diferencia existencial tampoco respecto al contenido particular o universal de la premisa.* Pues lo mismo se puede denotar con *Alguno tomará postre y con Alguno no tomará postre.*

Sin ir más allá de Aristóteles, de Kant y del sentido común, podemos expresar nuestra convicción de que al margen de que las proposiciones sean universales o particulares, afirmativas o negativas, la clave está en si la negación afecta a la existencia de los *X* (estímulo-materia-sensación-activación-*energeia*…) informando de que se trata de una proposición meramente teórica, hipotética o condicional, o bien afecta solo a las cualidades de *X* (esencia, forma, concepto, engrama…) dando por supuesto que X es real. Recuérdese que llamamos reales a los fenómenos materiales, psicológicos o sociales con cuyas presencias y ausencias tuvimos, tenemos o tendremos que contar durante el curso de la acción, siendo conscientes de la dificultad que entraña dar una definición definitiva de lo real.

A la hora de determinar nuestras conductas, cualquier prioridad que demos a lo presente sobre lo ausente, a la afirmación sobre lo negación, a lo concreto sobre lo abstracto, a lo mental sobre lo material o a lo material sobre lo mental, a la parte sobre el todo o al todo sobre la parte, etc., será sesgar y negar la complejidad de la realidad que construyen y afrontan los sistemas cognitivos para tomar sus decisiones vitales.

6.6.3.3 Ambigüedad

Como el resto de los diagramas lógicos empleados históricamente, los diagramas de Venn se enfrentaron a la ambigüedad y la incertidumbre que nos acompañan al formalizar premisas y conclusiones.

> There ought not, one would think, to be much opening here for doubt and confusion. What however with the ambiguities of popular language, and the disputes of rival models of symbolic statement, a little cloud of confusion has been stirred up. (Venn, 1881, p. 39)

Al emplear diagramas circulares tipo Leibniz-Euler nos encontramos, tal y como muestra Schuyler, con varios esquemas que satisfacen las condiciones impuestas por la proposición, salvo, aparentemente, en el caso de la exclusión (E). Así afirma Venn (1881):

> The common practice, adopted in so many manuals, of appealing to these diagrams, Eulerian 1 diagrams as they are often called, seems to me very questionable. Indeed when it is done, as it generally is done, without a word of caution as to the important distinction between the implied theories about the import of propositions, it seems to me that there can be no question as to its being wrong. The old four propositions A, E, I, 0, do not exactly correspond to the five diagrams, and consequently none of the moods in the syllogism can in strict propriety be represented by these diagrams. (pp.15-16)

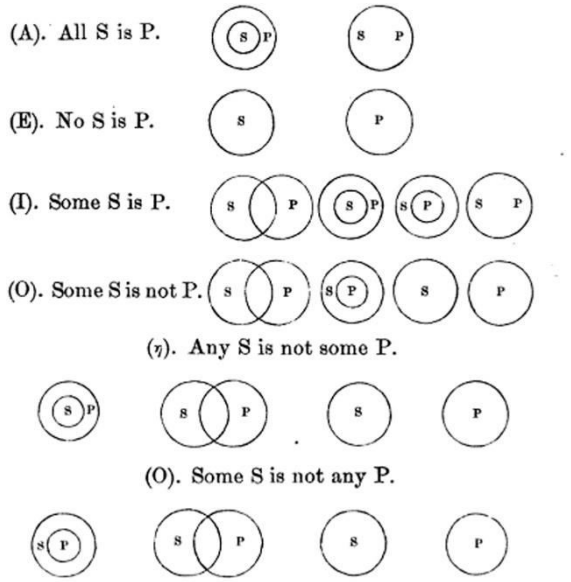


ILUSTRACIÓN 287. AMBIGÜEDAD EN LA REPRESENTACIÓN DE PROPOSICIONES. TOMADO DE SCHUYLER, 1869.

Por el mismo motivo, Venn (1881) se lamenta de que hay silogismos que pueden ser resueltos en diagramas tipo Leibniz-Euler de varias formas igualmente válidas:

> But this is too narrow. The Affirmative represented here is not 'All A is B,' but 'All A is some B' To represent Celarent adequately in this way we should have to append also the diagram, representing 'All A is all B,' 'No B is C,' and to say frankly that we can only know that one of these diagrams will represent our syllogism ; we do not know which. (p.16)

La ventaja de representar el mismo silogismo en los diagramas de Venn y de Marlo en lugar de en los diagramas de Euler es que la conclusión admite una única representación, aunque dicha representación no es siempre concluyente respecto a la existencia o no de una determinada clase o conjunción de variables. Que una clase, pongamos $B\neg A$, puede existir o no existir, puede mostrarse construyendo dos diagramas tipo Leibniz, uno en el que tiene lugar el compartimento y otro en el que no. Sin embargo, tenemos la opción de presentar en un solo diagrama las dos representaciones posibles (una en la que A es lo mismo que B y otra en la que no coinciden porque existe $B\neg A$), utilizando un trazo discontinuo en la línea que separa A de B de modo que se señale que puede existir o no la opción de $B\neg A$.

> An attempt is sometimes made in this way by the device of marking a part of one of the circles with a dotted line (as, for instance, is done, amongst others, by Dr Thomson in his Laws of Thought). The dotted part here represents of course our ignorance or uncertainty as to whether the A line should lie partly inside B, or should entirely include it. But surely, if we are thus ignorant we have no right to prejudge the question by drawing one part inside, even as a row of dots. What we

ought to do is to draw two lines, one intersecting B and the other including it. Doing this, there is no need to dot them; it is simpler to draw at once in the ordinary way the two figures (3) and (4) above, and to say frankly that the common 'Some A is not B ' cannot distinguish between them. In other words this form cannot be adequately represented by one of these diagrams; it belongs to another propositional theory. Ueberweg (Logic, Trans. p. 217), has thus represented propositions of this kind by alternative diagrams, as well as by a scheme of dotted lines. (Venn, 1881, pp. 12-13)

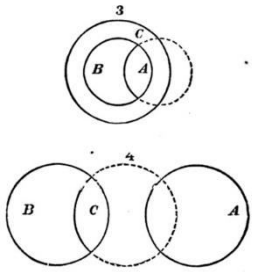


ILUSTRACIÓN 288. DIAGRAMAS DE LA PRIMERA FIGURA DEL SILOGISMO. TOMADO DE THOMSON W., 1871, P. 223.

Si comparamos los diagramas de Celarent en Euler, Venn y Marlo veremos que nos enfrentamos a varias amenazas relacionadas con la claridad y la ambigüedad en la interpretación de las conclusiones, como son la facilidad para interpretar la información explícita de los gráficos y la accesibilidad y precisión de los contenidos implícitos. En la siguiente ilustración hemos numerado las posibilidades para mostrar en qué área de los diagramas se expresan y las hemos acompañado del valor de verdad que adquieren en la conclusión.

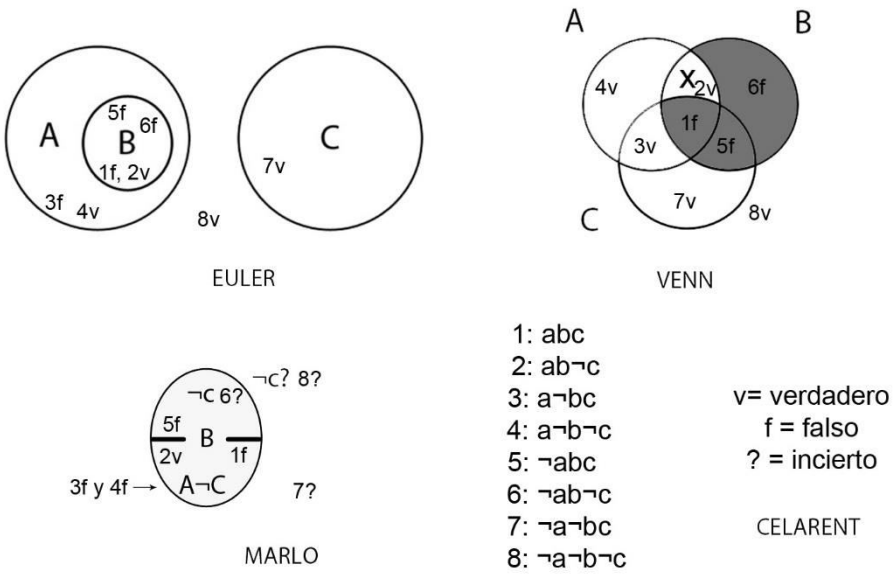


ILUSTRACIÓN 289. VALORES DE VERDAD DE LAS POSIBILIDADES INFERIDAS DE LAS REGIONES DE LOS DIAGRAMAS AEE 4ª FIGURA.VÁLIDO PARA CELARENT.

En todos los diagramas de la anterior ilustración hemos dado la misma interpretación existencial a las premisas, considerando que el sujeto y el predicado existen, aunque hemos tratado de interpretar las conclusiones siguiendo las convenciones de cada sistema. Aunque hay que insistir en que nuestros diagramas, como los de Venn, admiten cualquier interpretación existencial de las premisas, al formalizar en este caso concreto la premisa *Ninguna B es C,* hemos concedido que existe al menos un *X* que es *B* y ¬*C*, lo mismo que en *Alguna B no es C*. De este modo empleamos el mismo criterio en los tres diagramas para aceptar conclusiones categóricas, señalándolas con una X en Euler y Venn y con mayúscula en Marlo. Además de conclusiones que afirman categóricamente que una clase está ocupada nos encontraremos en los diagramas con conclusiones existencialmente posibles, probables e imposibles, habiendo una gran dificultad para precisar en ocasiones el grado de certeza que acompaña a la existencia de ciertas clases de objetos. Por ello tendremos que valorar si es satisfactoria la representación de la incertidumbre existencial, por ejemplo cuando las clases ni están necesariamente vacías ni necesariamente

ocupadas pero son más que posibles. Por ejemplo, si afirmamos que *Si A, entonces B y se da B*, la clase $A\neg B$ es imposible o vacía, la clase $\neg B\neg A$ es meramente posible y las clases BA y $B\neg A$ no están necesariamente ocupadas, pero son más que posibles porque hay un X que es *B.* Nosotros decimos que son probables (Aznar, 2016b; 2018g). La incertidumbre existencial de lo posible la señalamos en Venn y Euler dejando las áreas sin marcar, simplemente en blanco y la incertidumbre de lo probable la hemos señalado en Venn y Euler con una recta que une dos compartimentos cuando no tenemos certeza de en cuál de ellos debemos situar la existencia segura de X. En Marlo señalamos la incertidumbre existencial con el signo % y la mera posibilidad añadiendo una interrogación en la variable.

Con la interpretación existencial de las premisas que hemos convenido en el caso de Celarent, las clases quedan definidas por los siguientes grados de certeza: Seguro que falsas, imposibles o vacías las clases abc, $a\neg bc$, $a\neg b\neg c$, $\neg abc$. Meramente posibles o solo consecuencias de las premisas teóricamente verdaderas, las clases $\neg abc$, $\neg a\neg b\neg c$. La clase $\neg ab\neg c$ se eleva hasta probable (porque afirmamos que hay $B\neg C$ y esta puede ser A y $\neg A$). Y es seguro que está ocupada, es categóricamente verdadera o existencialmente necesaria la clase $AB\neg C$, la cual valida la conclusión *Ningún A es C*.

Queda fuera de toda duda que podemos simplificar mucho la complejidad del razonamiento y los diagramas si eliminamos los matices relativos a los grados de certeza reduciéndolo todo a 0 y 1, o falso y verdadero, siendo verdadero todo lo que no sea falso, una opción que no era la de Boole como veremos más adelante. Nosotros mismos eliminamos la complejidad que supone al comienzo de la instrucción el uso de las interrogaciones y de hecho, el diagrama de Marlo apareció en 2014 sin ellas (Aznar, 2014), de modo que en los ejercicios que allí se resuelven hay que dar por supuesto que no existen clases vacías para considerarlos formal y materialmente correctos. Tampoco empleamos en el aula el matiz "probable" en el diagrama de Marlo excepto con los mejores grupos, aunque es bien asumido por todos cuando trabajamos con las redes de expectativas, más fáciles de interpretar matemáticamente en estos términos por su relación con los árboles de probabilidad.

Venn introdujo varios métodos como líneas horizontales para representar existencia en sus diagramas, pero se sentía incómodo con ellos (Moktefi y Pietarinen, 2015; Moktefi y Shin, 2012), y encontramos en Stapleton (2005), y Shin, et al. (2018) que Peirce consideraba que el sistema de Venn no tenía manera de representar declaraciones existenciales, información disyuntiva, probabilidades y relaciones y se propuso extender su poder expresivo para proposiciones con declaraciones existenciales y disyuntivas empleando tres dispositivos. (i) Reemplazó el sombreado de Venn que representa el vacío con un nuevo símbolo, "o". (ii) Introdujo un símbolo "x" para la importación existencial. (iii) Para la información disyuntiva introdujo un símbolo lineal '-' que conecta los símbolos 'o' y 'x'. Un ejemplo de estas ampliaciones se encuentra en [CP 4.362].

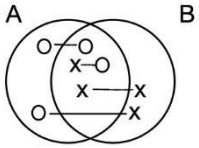


ILUSTRACIÓN 290 EXTENSIÓN DE LOS DIAGRAMAS DE VENN DE PEIRCE. TOMADO DE SHIN ET AL., 2018.

6.6.3.4 Información explícita e implícita en los diagramas, espacio requerido y rentabilidad del aprendizaje

Si comparamos las representaciones anteriores de Celarent en diagramas tipo Leibniz-Euler, empleando el recurso de la línea discontinua para señalar la ambigüedad de la universal afirmativa, con los diagramas de Venn y los diagramas de Marlo, será muy difícil argumentar las ventajas de nuestro diagrama en relación a la claridad y la distinción con la se observan en él la validez de las conclusiones en una intuición directa o inmediata. Oponemos los términos intuición directa e intuición mediada según el sentido tradicional en el que la primera se considera una visión directa e inmediata de una realidad o comprensión directa e inmediata de una verdad sin elementos intermediarios que se interpongan en tal visión directa

Debemos reconocer que trabajando con solo tres variables es muy fácil comprobar en Venn la validez formal de cada una de las posibles combinaciones, pues todas aparecen representadas exhaustivamente de forma clara y distinta. Tampoco podemos defender en el caso de tres variables que en nuestros diagramas las conclusiones

categóricas sean más evidentes por mostrarse en primer plano, pues igual de evidentes son en Venn cuando se señalan con una X. También en Euler es más intuitivo que en nuestro diagrama ver que *Ninguna C podría ser A*, porque esto es algo que en Marlo debe ser inferido de que el único signo de A está asociado con ¬C. Con tres variables, pues, y cuando el objetivo es facilitar la validez de las conclusiones o simplemente validar los resultados del razonamiento, podemos conceder que los diagramas de Venn sean claramente superiores a los diagramas de Euler y a los de Marlo, porque en ellos toda la información se muestra de forma explícita, esto es, puede ser intuida de forma directa observando la imagen, mientras en Euler y Marlo hay conclusiones que permanecen implícitas y solo pueden ser intuidas de forma mediada o deducida. En todo caso, esta ventaja exige expresar de forma explícita y exhaustiva todas las posibilidades que conforman el universo del discurso, aunque se trate de clases vacías, lo cual ha sido señalado como desventaja por Hammer y Shin (1998), Riche y Dwyer (2010) y Chen y Boutros (2011).

Pero además, la distinción implícito- explícito no es sencilla y menos la distinción entre intuición directa e indirecta o mediada, por cuanto depende de la fuerza de nuestras asociaciones aprendidas que consideremos presente el significado de un estímulo E1 que está ausente, pero que ha sido asociado con un estímulo E2 que está presente. Y ya antes que ningún psicólogo, Descartes insistía en las *Reglas para dirección de la mente* en el hábito como facilitador de la contemplación de una relación mediada como inmediata. Por ejemplo, cuando escribimos en nuestra notación *¬c?* al margen de cualquier modelo de *B,* debemos percibir *¬c¬b?* y luego, desde ahí, debemos suponer que está en lugar de *¬c¬b¬a* y de *¬c¬ba.* Sin embargo, al contemplar ¬c?, o bien ¬c¬b?, en la siguiente ilustración solo puede ser producto de una deducción indirecta que comprendamos que no pueden representar *¬c¬ba* porque *A* se agota en el modelo de *B*. O dicho de otro modo, al considerar el significado de ¬c? al margen de *B* debemos tener en cuenta que, una vez que hemos tomado la decisión de escribir *A* solo dentro de *B* sin añadir *a?* fuera, está implícito que es imposible la combinación *A¬B*. Podemos escribir explícitamente *¬*[*a¬b*] al margen de B cuando representamos que *Toda A es B,* pero pensamos que perdemos claridad innecesariamente, pues es fácil llegar a tener en cuenta tal restricción generando hábitos con la práctica.

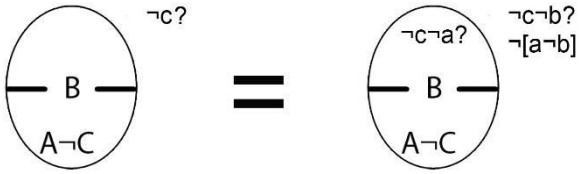


ILUSTRACIÓN 291. NOTACIÓN SIMPLE Y DETALLADA PARA CELARENT EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

Para interpretar los diagramas de Marlo, el alumno debe aprender que si en la conclusión una variable solo aparece en un compartimento explícitamente afirmada sin interrogación, dicha variable es tomada universalmente y no puede existir ninguna otra clase o combinación, incompatible con sus socios actuales, que la contenga. Luego el coste de aprendizaje es mayor en nuestros diagramas, lo cual no significa que sean menos rentables.

Sin embargo, si lo que comparamos en los diagramas son los procesos del razonamiento, consideramos que son más completos los diagramas de Marlo, pues se hace en ellos evidente cada uno de los pasos de la inferencia. Recordemos que pesar de lo que decía Venn (1881) sobre sus diagramas:

> Respecto a los diagramas de Euler una gran ventaja es la representación de incrementos sucesivos de conocimiento a medida que se toma en cuenta una proposición tras otra, en lugar de tener que representar el resultado de todos ellos de un golpe. (p.113)

Gardner (1958) le criticaba que era difícil separar en ellos cada uno de los pasos para hacerlo corresponder con el cálculo proposicional:

> The most annoying drawback of the Venn circles, when applied to prepositional problems, is the difficulty of separating the premises from each other on the diagram so that they can be analyzed separately or altered as desired. This might be done by using sheets of transparent paper (shading each premise on a different sheet) but such a procedure is troublesome, and of course it cannot be applied to classroom blackboards. (p. 61)

Nosotros, al separar los pasos dejando huella de cada uno de ellos en los diagramas de Marlo facilitamos no solo la comprensión de sus principios computacionales, sino también de los lógico-lingüísticos. Y es que a pesar de ser cierto que sin eliminación es imposible la inferencia, el razonamiento humano no es solo eliminación.

Si combinamos la eliminación con la ilación podemos prescindir de la consideración de las posibilidades irrelevantes abaratando los costes derivados del procesamiento de lo que pueden llegar a ser cantidades ingentes de datos. Por ello, consideramos pedagógicamente conveniente que nuestros alumnos sean capaces de reconocer y descomponer los procesos constitutivos del razonamiento lógico, del mismo modo que pensamos que merece la pena aprender a multiplicar para no tener que contar una a una todas las unidades dispuestas en 10 filas de a 10.

6.6.4 Distintas representaciones de Camenes. El coste de la precisión

Podemos analizar y comparar las distintas representaciones diagramáticas en redes de expectativas Marlo, diagramas de Venn, diagramas de Marlo y distintas formas de expresión de la conclusión más o menos simplificada para percatarnos de que los matices en la información suponen un coste en la generación e interpretación de los estímulos, signos, señales o iconos que empleamos para comunicar expectativas. Y una de las ventajas que suponemos a nuestro sistema de representación, además de la coherencia entre diagramas de árbol-circulares y notación simbólica, es que podemos decidir el grado de complejidad y precisión en los procesos de inferencia que emplearemos, pudiéndolos aumentar desde las formas más simples a las más complejas.

A pesar de las ventajas de representar explícitamente toda la información, ni los diagramas de Venn ni los diagramas de árbol en los que se exponen todas las posibilidades de forma exhaustiva resultan tan evidentes en el aula como podría parecer, pues al menos según mi experiencia docente de más de veinte años, requieren ambos igualmente adquirir el hábito de hilar la información con los movimientos oculares precisos (Brandt & Stark, 1977) para poder interpretar la conclusiones en términos de conjunciones necesarias.

Somos conscientes de que, como señala Mackinlay (1986), la eficacia de una buena representación gráfica depende de muchos más factores de los que aquí tenemos en cuenta, sobre todo cuando nuestros alumnos trabajan los diagramas empleando las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, las cuales permiten explorar grandes conjuntos de datos de forma ventajosa y al mismo tiempo estresante, porque, como afirma Larrea (2010), el poder computacional ha crecido en forma exponencial y la habilidad para interactuar con los datos solo ha crecido linealmente. En este sentido, y aunque supera los objetivos de esta tesis demostrar la eficacia de las infografías lógicas para computadoras de nuestros diagramas, que venimos desarrollando y aplicando en el aula en colaboración con el diseñador gráfico sevillano Pepe Amoedo, sí podemos asumir que, dado que cualquier proceso de visualización conlleva una transformación de los datos que, como nos dice Larrea, supone un proceso cognitivo en el que el usuario tiene que poder interactuar para lograr su objetivo, pueden resultar ventajosos los sistemas de representación heterogéneos (Barwise, 1993; Seoane, 2016), cromáticos, lingüísticos y numéricos que se ajusten a las distintas capacidades del alumno, siempre que las diferentes entradas de información sean coherentes y complementarias.

Y si nos preguntamos, desde lo más elemental de la psicología de la forma, qué tipo de signos facilitan dichos movimientos oculares insinuando conexiones, es obvio que la respuesta pasaría por revisar las leyes de asociación de estímulos, y que lo primero sería situar las variables tan próximas que exista entre ellas solo el mínimo de sensación de discontinuidad que es necesaria para diferenciar sus signos (ley de proximidad). También en nuestra cultura se emplean flechas y líneas que permiten evocar la idea de asociación hilando las variables (ley de destino común). Y empleamos figuras cerradas que permiten focalizar la atención en lo que deseamos que sea considerado como totalidad de partes distintas que forman una unidad (ley de cierre).

Pero de un modo u otro, empleemos el signo sensible que empleemos para evocar nuestros significados lógicos, nos enfrentaremos al problema de la rentabilidad de la producción del signo explícito en términos de coste de energía, de espacio y pérdida de claridad, y al problema de la amortización del coste de aprendizaje (Cambronero & Moreno, 2006) que evidentemente supone condensar una mayor cantidad de información implícita en nuestros diagramas reduciendo la cantidad de estímulo explícito presente en Venn. Y también habrá que valorar el aumento de la entropía en los procesos de comunicación.

> De acuerdo con el canal sensorial empleado para su transmisión, las señales pueden clasificarse en químicas, auditivas, visuales, táctiles y eléctricas. Cada tipo de señal se adecua mejor a un ambiente determinado y posee propiedades

> diferentes (…). Tales propiedades determinarán los costos y beneficios de cada tipo de señal de acuerdo con el gasto energético que requiere producirlas y el tipo de receptores que pueden recibirlas. La mayor parte de las señales son relativamente baratas de producir, con excepción de las señales acústicas. (Redondo, 2000, p. 257)

Hay que pensar que las redes pueden transmitir los estados de certeza de todos sus nodos a partir de la activación de uno de ellos como presente o ausente con un elevado grado de precisión en los matices, mientras que los diagramas de Marlo comunican el estado de una región de la red de forma más genérica. Repetidas observaciones en al aula me sugieren que hay alumnos "cromáticos" que procesan la información en las redes empleando colores para llegar a la conclusión con gran rapidez, aunque sin matices, mientras que otros procesan mejor con los números, siendo más lentos pero más precisos que los cromáticos. Y aunque carezco de datos procedentes de una investigación rigurosa, es interesante señalar que, tal vez por casualidad o no, entre los mejores cromáticos que he tenido algunos casi rozaban la discalculia.

El aprendizaje cuesta, pero permite decir cada vez más con menos y de forma más clara, siendo la cuestión de la rentabilidad de la instrucción y la entropía una cuestión de intereses relacionada con los objetivos de la comunicación. ¿Qué queremos enseñar cuando enseñamos a razonar?

6.6.4.1 Camenes en las redes de expectativas

La ventaja de los diagramas de Venn (su inconveniente en costes de señal) es que todas las posibilidades se muestran de forma evidente, pues pueden comprobarse fácilmente de forma visual y exhaustiva. Ciertamente, mi experiencia como docente me indica que es imprescindible para los alumnos tomar conciencia explícita de todas las posibilidades al inicio de su formación lógica. Sin embargo, nosotros preferimos hacer explícitas todas las combinaciones con los diagramas de árbol lógicos que llamamos redes de expectativas por varios motivos: Primero, porque el modelo de nodos asociados en redes que permite observar cómo se propagan por ellas la activación (afirmación) y la inhibición (negación) es más coherente con los actuales paradigmas conexionistas del razonamiento. Segundo, porque el alumno es instruido en una única fundamentación teórica de la inferencia lógica y probabilística, siguiendo una tradición que pasa por grandes nombres como el de Boole y que es compatible con lo que se denomina hoy *Nuevo paradigma del razonamiento*. Tercero, y relacionado con lo anterior, porque se hace evidente en las redes que pueden existir razonamientos plausibles en distinto grado que pueden ser precisados con rigor matemático.

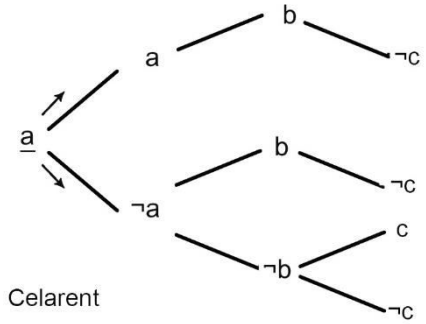


ILUSTRACIÓN 292. CELARENT EN DIAGRAMA LÓGICO DE ÁRBOL ELEMENTAL.

Si aceptamos que la premisa *Todo C es A* elimina los nodos $C\neg A$ y aceptamos que *Ningún A es B* elimina los nodos AC, entonces la activación de C necesariamente se propaga hasta $\neg B$ y la de B hasta $\neg C$.

En los diagramas de árbol, podemos añadir nodos lógicos *Or* y *And* y podemos decidir el valor existencial con el que interpretamos los nodos referidos por las premisas. Así, si negamos cualquier denotación existencial mostramos las cuatro posibilidades con el mismo rango de certeza, como hace la actual lógica matemática y podemos mostrar al alumno la base de las tablas de verdad que hoy empleamos considerando falso solo lo imposible y verdadero todo lo demás. Sin embargo, podemos aumentar la precisión en las redes empleando valores que van desde ciertamente verdadero (1), pasando por incierto (0) hasta seguro que falso (-1) y que distingan además las posibilidades eliminadas que ya no computan. Incluso podemos aumentar la complejidad de la información incluyendo valores de confianza negativos a partir de la falsedad de los nodos *And*.

6.6.4.2 Camenes en Venn y Marlo

Mucho más simples que la representación en redes matemáticas son los diagramas de Marlo que expresan información de regiones del sistema y los diagramas de Venn, que comunican los mismos datos básicos que los diagramas de árbol que sirven de base a las redes. De hecho, Venn se enorgullecía de que al dibujar sus círculos solo tenía que atender a dos términos a la vez, y que en consecuencia, al diagramar, por ejemplo Camenes, la relación de X a Z se detecta fácilmente sin las interferencias problemáticas que supone atender a la interconexión de varios términos simultáneamente entre sí, por más que al mismo tiempo reconocía que, concretamente en Camenes, la relación entre X y Z no se hace más obvia en su diagrama que en el de Euler.

> La superioridad, si la hay, en tal ejemplo debe buscarse en la información pictórica de otros aspectos como, por ejemplo, que, de los cuatro tipos de x solo debe tenerse en cuenta uno, que es el que permanece, a saber, el $xy\bar{z}$, o la *x* que es *y* pero no es *z*'. De manera similar con las posibilidades de *y* y *z*: el número de compartimentos permitidos por los datos se detecta de un vistazo. (Venn, 1881, p. 116)

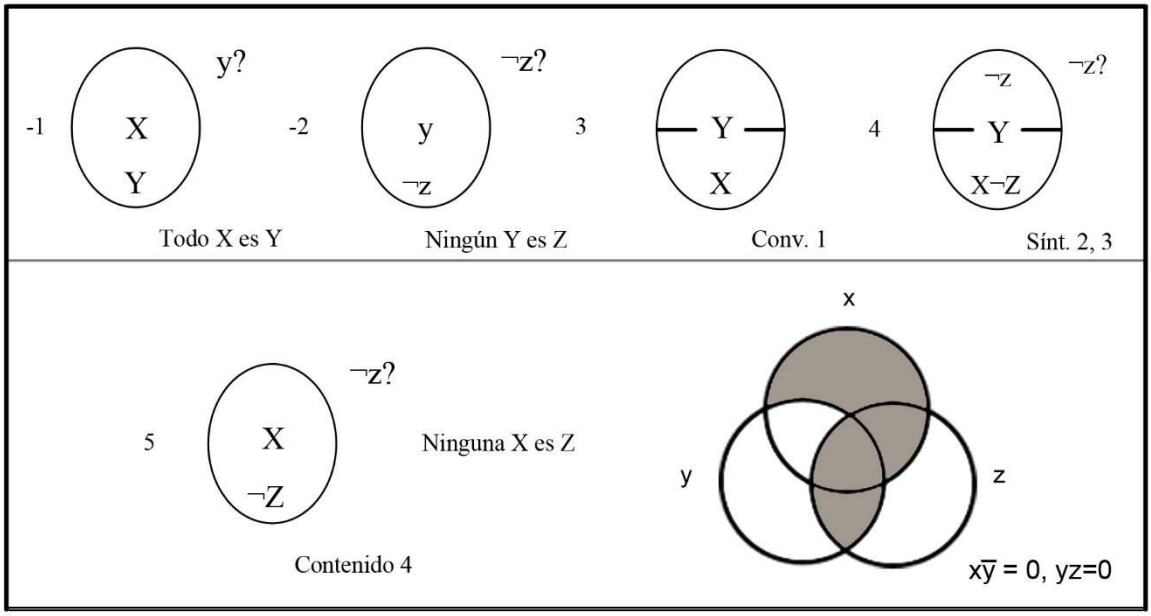


ILUSTRACIÓN 293. CAMENES EN VENN Y MARLO. ADAPTADO DE VENN, 1881, P. 252.

Las ventajas a las que alude Venn de sus diagramas son incuestionables, al menos mientras trabajamos con tres términos, pero es legítimo que nosotros destaquemos también las bondades que vemos en nuestros diagramas. Si observamos la figura anterior donde se resuelve Camenes por Venn y Marlo, podemos ver que nosotros llegamos a la conclusión tras convertir el modelo de XY y sintetizarlo con el de Y¬Z en un único diagrama que contiene solo información relevante. En el diagrama de la premisa 1 ya eliminamos la posibilidad $x\neg y$ y todas sus derivadas ($x\neg yz$, $x\neg y\neg z$) al no dividir el modelo de *X*. Al formalizar la premisa 2 eliminamos del mismo modo en la representación la posibilidad *yz* y con ella toda combinación o secuencia que las incluya (yzx, $yz\neg x$). Al sintetizar en el paso 4 estamos sintetizando la información de la que disponemos. De las ocho combinaciones posibles entre variables hemos eliminado 4 y nos quedan 4, que son las que muestran los diagramas de Venn a la izquierda: $xy\neg z$, $x\neg y\neg z$, $z\neg x\neg y$ y la posibilidad implícita $\neg x\neg y\neg z$. Podríamos nombrar o mostrar una a una las cuatro opciones que nos quedan como hace Venn, pero gracias a las operaciones de síntesis también podemos optar por seleccionar las proposiciones más generales, esto es, las que nos informan de más con menos destacando las relaciones entre elementos más distintivas.

El diagrama que representa la conclusión de Camenes en Marlo tiene una eficacia absoluta al comunicar las cuatro posibilidades que han sido eliminadas por las premisas y aquellas cuatro que se mantienen, y lo hace ocupando menos espacio que los diagramas de Venn, lo cual rentabiliza, al menos en parte, sus costes mayores de aprendizaje. Cuando luego trasladamos la información evidente en el diagrama de la conclusión a la proposición escrita *Toda X es Y¬Z* perdemos un *bit* de información por culpa de un falso positivo que nos permite considerar

aceptable la posibilidad *yz¬x* eliminada por las premisas. Si seguimos simplificando la proposición escrita eliminando el término medio para informar de que *Toda X es ¬Z* (*Ninguna X es Z*), pagaremos con la pérdida de otro *bit* de información, otro falso positivo (*x¬y¬z*), la reducción de espacio. Y si aún reducimos la expresión material de la proposición al lenguaje formal, ya sea en nuestra notación ($x_x\neg z$), ya sea en la notación clásica ($x\rightarrow\neg z$), perderemos todavía un *bit* adicional relativo a la denotación existencial de *X* contenida inicialmente en las premisas.

6.6.4.3 Tabla de entropía en Camenes

Venn (1881) menciona en su obra la pérdida de precisión que acompaña a los procesos de eliminación, aunque no la considera una objeción válida porque al distinguir entre YZ de Z, el último debe ser, en general, "una determinación más amplia y flexible" (p.288). Por nuestra parte, teniendo en mente una perspectiva que relacione inteligencia y comunicación social semejante a la mantenida por Monsalve (2003), creemos que tras la publicación de la *Teoría Matemática de la Comunicación* de Claude Shannon (Shannon, 1948) podemos hablar sin extrañeza de *entropía de la información* (Brillouin, 1962; Oteruelo, 1991) cuando nos percatamos de que la reducción material de los mensajes que tiene lugar al convertir nuestros diagramas en fórmulas lógicas conlleva pérdidas de información, como podemos ver en la siguiente tabla.

<table>
<tr><td colspan="2">Toda X es Y.
Ninguna Y es Z.
 </td><td colspan="5">Compatibilidad de las conclusiones</td></tr>
<tr><td>Combinaciones</td><td>Existencia</td><td>Redes de Expectativas</td><td>Diagrama de Marlo</td><td>Toda X es Y¬Z</td><td>Toda X es ¬Z</td><td>$x_x\neg z$
$x\rightarrow\neg z$</td></tr>
<tr><td>xyz</td><td>∄</td><td colspan="5" rowspan="4">Acierto</td></tr>
<tr><td>x¬yz</td><td>∄</td></tr>
<tr><td>¬x¬yz</td><td>Posible</td></tr>
<tr><td>¬x¬y¬z</td><td>Posible</td></tr>
<tr><td>XY¬Z</td><td>Verificada</td><td colspan="4">Acierto formal y existencial</td><td>Iguala existencia confirmada y posible</td></tr>
<tr><td>x¬y¬z</td><td>∄</td><td colspan="3">Acierto</td><td colspan="2">Falso positivo</td></tr>
<tr><td>yz¬x</td><td>∄</td><td colspan="2">Acierto</td><td colspan="3">Falso positivo</td></tr>
<tr><td>y¬z¬x</td><td>Probable</td><td>Acierto</td><td colspan="5">Iguala contingencia probable y posible</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Entropía en bites de información</td><td>Redes de Expectativas</td><td>Diagrama de Marlo</td><td>Toda X es Y¬Z</td><td>Toda X es ¬Z</td><td>$x_x\neg z$
$x\rightarrow\neg z$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table>

TABLA 42. AUMENTO DE LA ENTROPÍA PRODUCIDO POR LA CONDENSACIÓN DEL MENSAJE EN CAMENES.

En la tabla anterior, un falso positivo se obtiene cuando al razonar de la conclusión a las premisas es admisible una de las combinaciones eliminadas por la conjunción de las premisas. Por ejemplo, partiendo de "$x\rightarrow\neg z$" es aceptable la combinación *x¬y¬z*, que realmente está eliminada teniendo en cuenta ambas premisas.

Las redes de expectativas nos permiten codificar las premisas con precisión matemática combinando lógica y probabilidad, aunque debemos reconocer que no es posible establecer más que convencionalmente la confianza existencial o "credibilidad de la conjetura" (Polya, 1954) que resulta de combinar clases posibles o totalmente

inciertas con clases probables. Al resolver Camenes en las redes de expectativas combinamos la clase segura ($y\neg z$) con una clase posible ($\neg x$) y obtenemos la clase probable $y\neg z\neg x$, que es probable porque asumimos que hay seguro $Y\neg Z$ y que necesariamente ese $Y\neg Z$ debe ser x o $\neg x$. Al usar los diagramas de Marlo en el aula dejamos perder el matiz de la probabilidad de $y\neg z\neg x$, cuya confianza se ve reducida a la de una clase posible. Ese es el único *bit* de información perdido, aunque el ahorro en procesamiento de información es alto y la pérdida es pequeña, pues posible y probable son igualmente contingentes. En los diagramas de Venn, como en los de Marlo, la entropía existencial depende igualmente de cómo decidamos qué denotan las premisas, aunque se pierden tanto en Venn como en Marlo todos los matices de la precisión matemática que ofrecen las redes.

Si construimos las tablas de verdad de Camenes y luego nos limitamos a hacer un análisis básico y muy elemental desde la perspectiva de las teorías de la información, nos interesa señalar que a medida que reducimos la codificación sensible del estímulo-señal-signo-icono aumenta la entropía. Pensemos que, tomando como ejemplo Camenes, lo más caro de trazar por orden son las redes de expectativas, los diagramas, la proposición *Todo X es Y* $\neg Z$, *Ningún X es Z* y finalmente $x\rightarrow\neg z$. Así, si la fuente de información A le transmite a B que *Toda X es Y* y que *Ninguna Y es Z* y luego B le comunica a C su conclusión de que *Ninguna X es Z*, el individuo C no sería capaz de reconstruir correctamente el estado inicial de conocimiento de la fuente A, pues podría considerar que en el mundo de A es posible la combinación $x\neg y\neg z$, realmente eliminada por las premisas.

Así pues, la codificación diagramática exige, como habrían suscrito Descartes desde la filosofía o desde la cibernética Simon (1983a, 1983b), aumentar la eficiencia siendo capaces de decir cada vez más con menos, lo cual es absolutamente imposible sin procesos de aprendizaje asociativo que nos permitan condensar o encapsular[22] variables y procesos complejos en signos únicos. Por ejemplo, encapsulamos $\neg c\neg b?$ en $\neg c?$ cuando la escribimos al margen del modelo de *B* al resolver Celarent.

6.6.5 Procesamiento tipo uno y tipo dos

Los diagramas de Venn son suficientes cuando consideramos la eliminación sistemática de las posibilidades como único componente de los procesos de razonamiento que nos aseguran la conclusión por descarte. Pero estos diagramas no llegan a hacer explícitos componentes constitutivos de la inferencia más complejos que incluyen capacidades como la de atajar hacia la conclusión. De algún modo, los diagramas de Venn parecen asentarse en lo que comúnmente hoy se identifica con el sistema de procesamiento lógico o *Sistema tipo Dos*.

> Los seres humanos provienen de una larga historia evolutiva en la que hacer frente al mundo, en circunstancias normales, es más complejo de lo que nos permite nuestra capacidad de procesamiento. La división de nuestras capacidades de pensamiento en dos sistemas que interactúan supone menos esfuerzo y buenos resultados para hacer frente a situaciones de rutina (...) En el siglo pasado esta vieja dicotomía de pensamiento se plasmó en dos "sistemas" de razonamiento que son complementarios e interactivos, el Tipo o Sistema Uno y el Tipo o Sistema Dos, de acuerdo con la primera definición dada por los psicólogos (Stanovich & Robert, 2000). El Sistema Uno es el más antiguo biológicamente hablando, es sobre todo intuitivo, inconsciente asentado sobre la base de la inteligencia emocional, cognitivo y sin esfuerzo; en consecuencia, tiende a llegar a conclusiones rápidas sobre la base de la "heurística", o a llegar a atajos cognitivos, en lugar de usar la lógica; la característica que le define es el procesamiento autónomo. El Sistema Dos es biológicamente más reciente, deliberado y consciente, se basa en la lógica y supone un esfuerzo cognitivo; en consecuencia, se requiere una mayor cantidad de energía mental para llegar a una conclusión, y es por lo general más lento que el Sistema Uno. (Payá Santos & Delgado Morán, 2017, p. 228)

Hoy entendemos que ambos sistemas, consciente e intuitivo pueden complementarse combinando los modos de procesamiento lentos, pero seguros y precisos, que emplearía Venn para resolver un silogismo con 10 términos analizando uno a uno los 1024 compartimentos que se generan, con procesos rápidos como los que perseguimos desarrollar en nuestros diagramas, pero que no pueden, sin embargo, dejar de respetar los cálculos que han sido revisados sistemáticamente.

> En resumen, el Sistema Uno no es un sistema de análisis. Trabaja para ofrecer una primera respuesta, de forma rápida y, dentro de los límites de su experiencia y de los instintos naturales, apropiada. Sin embargo, estas respuestas automáticas están llenas de una serie de desviaciones sistemáticas que pueden distorsionar los resultados. El analista del equipo es el Sistema Dos, que depende en lo que respecta a la información sobre lo que ese Sistema Uno deja pasar. Sin embargo,

[22] Utilizo *encapsular* en el sentido que mi amigo Pepe Amoedo, programador informático, me explicó que le dan en su argot al hecho de ocultar los objetos variables que no son relevantes.

> incluso el Sistema Dos tiene sus defectos: a pesar de que está estructurado para resolver problemas complejos, no posee una capacidad de cálculo infinito, en otras palabras, este sistema está limitado por la naturaleza y por las circunstancias. (Payá Santos & Delgado Morán, 2017, p. 229-230)

Nos parece imposible responder de un modo tajante y definitivo a la pregunta acerca de si nuestra forma de representación es preferible a la de Venn, siendo conscientes de que serán finalmente los investigadores, los profesores, los estudiantes de lógica, y los interesados en el razonamiento diagramático o visual quienes decidan si les resulta rentable invertir tiempo y esfuerzo para aprender un sistema nuevo cuando ya existe otro perfectamente asentado.

En todo caso, si queremos ser justos al valorar las ventajas e inconvenientes de cada una de las distintas formas de representación en los dos aspectos de la evidencia considerados por Descartes, la claridad y la distinción, o en relación a lo perspicuo, como se dice hoy en la literatura sobre diagramas, es necesario poner a prueba los sistemas aumentando el número de variables.

Pronto los diagramas tipo Leibiniz-Euler dejan de funcionar, pero no los diagramas de árbol, las redes de expectativas o los diagramas de Marlo. Incluso los diagramas de Venn pueden progresar indefinidamente si convertimos los compartimentos en rectangulares como harán Lewis Carroll y Allan Marquand. Al aumentar la complejidad nos daremos cuenta de que hacer explícita la información en compartimentos que expresen todas las posibilidades de forma exhaustiva y exclusiva conlleva costes relacionados, por ejemplo, con la codificación-decodificación de la señal, signo o estímulo comunicativo en términos de energía (Bennet-Clark, 1970; MacNally & Young, 1981; Ryan, 1985), lo mismo que costes de espacio que no necesariamente son rentables.

6.6.6 Otros silogismos en Venn y Marlo

Venn (1881) establece las leyes del silogismo como producto de una convención lógica y aunque reconoce que hay algo más que eliminación en los procesos de razonamiento que tienen lugar en el silogismo, también afirma en repetidas ocasiones que él solo expresa relaciones mutuas de inclusión o exclusión entre clases, así como existencia y no existencia (p. xii); Como el silogismo consiste para él en la eliminación de un término medio, el *Dictum* de Aristóteles puede considerarse una fórmula de eliminación para grupos simples de proposiciones: "Again, the syllogism is a case of Elimination as well as of inference; that is, we know that we thus get rid, in our conclusion, of one term out of the three involved in our premises"(p.xx) y dice más adelante:"The Dictum of Aristotle may in fact be regarded as a formula of elimination for the simple groups of propositions to which it applies"(p.286).

Así reduce Barbara a la expresión: "$YZ^{-} = 0$; $XY^{-} = 0$; $\therefore XZ^{-} = 0$" (p.319).

> On this point logical convention has decided, (1) that the order of the premises is at our option and therefore affords no ground of distinction.(2) That the difference between subject and predicate is not to be meddled with, and therefore does yield a distinction. (3) That negative subjects and predicates are not to be introduced, the negation being confined to the copula Given then three terms X, Y, Z, our range of liberty extends to making universal or particular, affirmative or negative, propositions out of them; and then arranging them so that the term which occurs twice over, (the middle term), shall be subject of both, predicate of both, or subject of one and predicate of the other. This yields sixty-four possibilities, from nineteen only of which can a necessary conclusion be drawn. (Venn, 1881, p. 17-18)

Trabajando con tres términos en sistemas dicotómicos, como ocurre en el silogismo aristotélico, se puede afrontar la valoración de los ocho compartimentos que se generan, pero en cuanto aumenta el número de variables la revisión se hará más lenta y costosa, siendo entonces posible visualizar las ganancias de los diagramas de Marlo.

Sin instrucción en los diagramas de Venn también surgen dificultades para identificar correctamente cada uno de los compartimentos que se presentan explícitamente y tales dificultades aumentan exponencialmente al aumentar el número de variables. Exactamente, el número de celdas necesarias para mostrar de forma exhaustiva todas las combinaciones que forman el universo del discurso es m^n, siendo n el número de criterios y m el número de divisiones de dichos criterios. Pensemos que en un sistema dicotómico con siete criterios a,b,c,d,e,f,g el número de compartimentos es $2^7 = 128$, y que, por ejemplo, en un sistema tricotómico con cuatro criterios los compartimentos son $3^4 = 81$. Aunque todavía los diagramas son relativamente fáciles de manejar con cuatro variables.

Las siguientes ilustraciones compararan la resolución de diversos ejercicios planteados por Venn en *Symbolic Logic* empleando sus diagramas y los diagramas de Marlo.

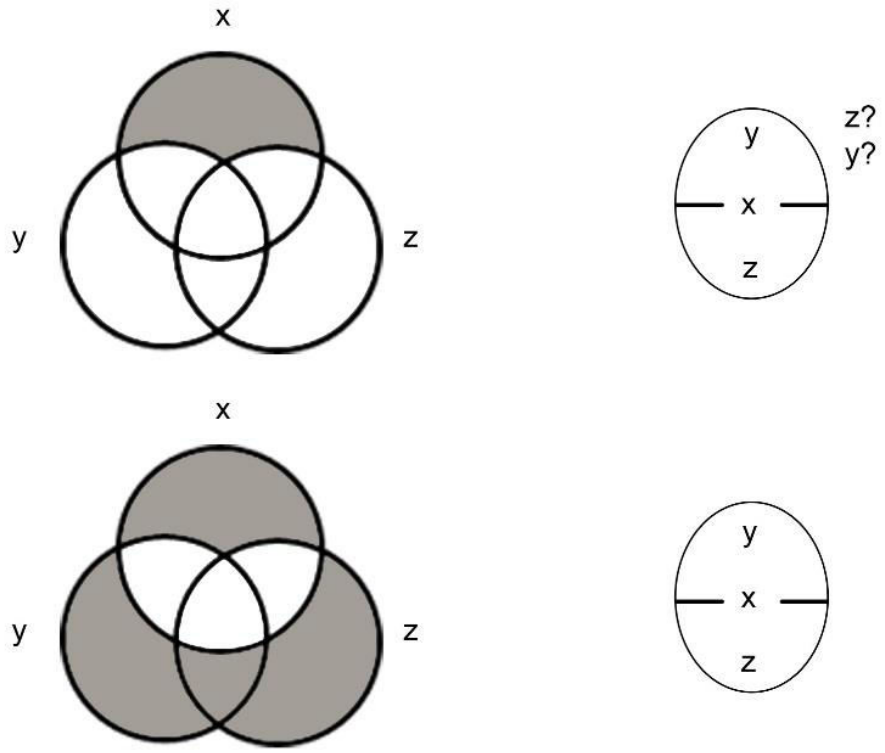


ILUSTRACIÓN 294. COMPARATIVA DIAGRAMAS DE VENN Y MARLO: TODA *X* ES *Y* O *Z*. NADA, EXCEPTO *X* ES *Y* O *Z*.

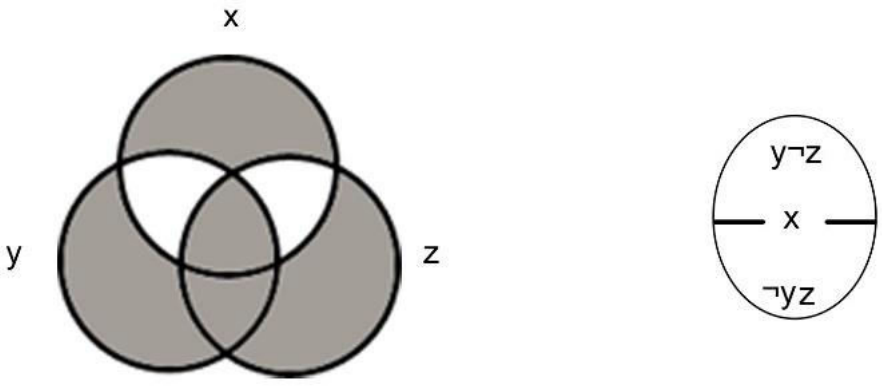


ILUSTRACIÓN 295. COMPARATIVA DIAGRAMAS DE VENN Y MARLO PARA SI Y SOLO SI TENGO X, ENTONCES O BIEN TENGO Y O BIEN TENGO Z, PERO NO AMBAS.

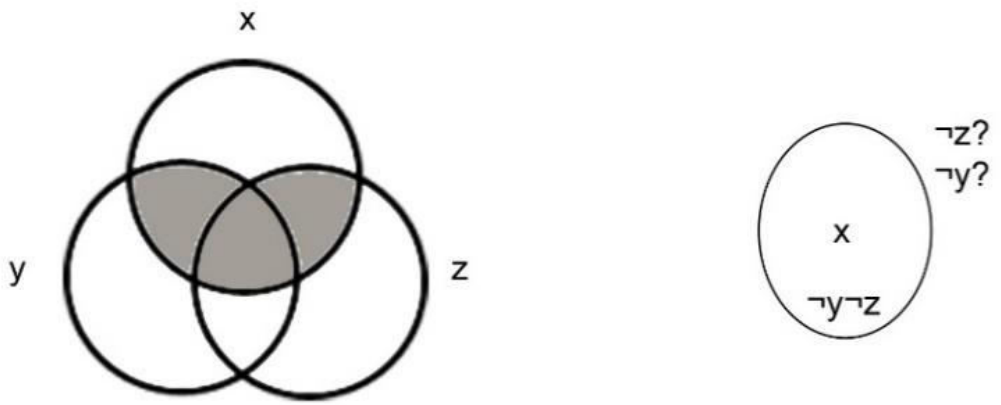


ILUSTRACIÓN 296. NINGÚN X ES Y, NINGÚN X ES Z EN VENN Y MARLO.

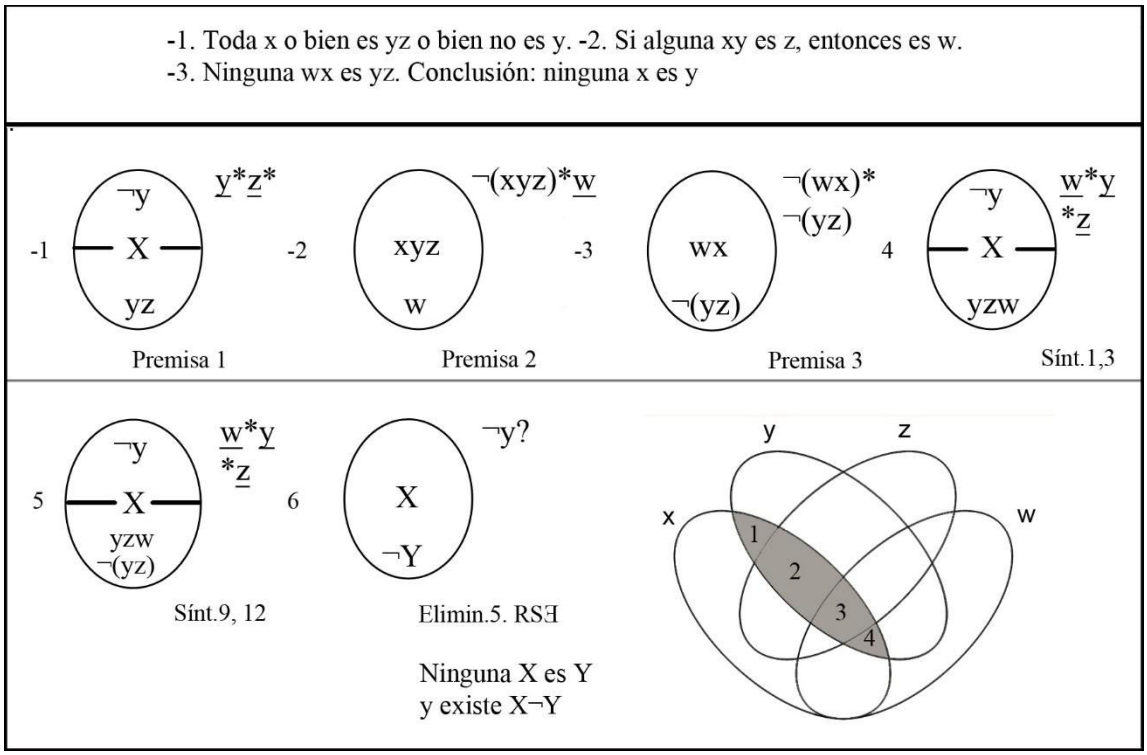


ILUSTRACIÓN 297. SILOGISMO CON CUATRO TÉRMINOS EN VENN Y MARLO; TODA X O BIEN ES YZ O BIEN NO ES Y. SI ALGUNA XY ES Z, ENTONCES ES W. NINGUNA WX ES YZ. CONCLUSIÓN: NINGUNA X ES Y (Y TENGO ¬Y).

Encontramos también en Venn (1881) el siguiente problema compuesto principalmente de disyunciones:

> Take the following problem : 'Every *x* is either *y* or *z*; every *y* is either *z* or *w* ; every *z* is either *w* or *x*; and every *w* is either *x* or *y* : what further condition, if any, is needed in order to ensure that every *xy* shall be *w?* It is readily seen that the first statement abolishes any *x* that is neither *y* nor *z*, and similarly with the others. (p. 117)

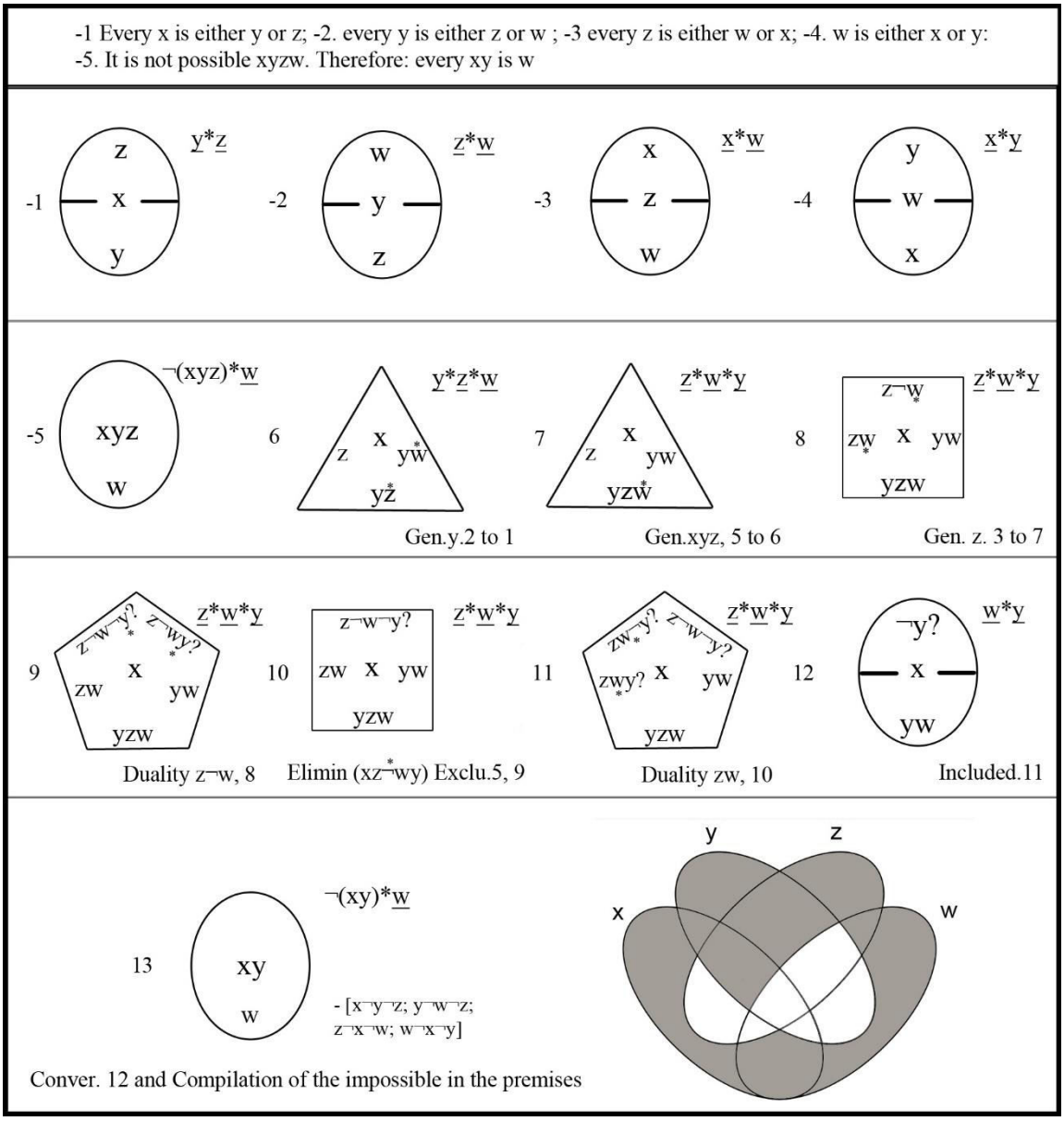


ILUSTRACIÓN 298. PROBLEMA COMPLEJO DE VENN COMPARADO CON MARLO. BASADO EN VENN, 1881, P. 118.

En el paso 13 de la ilustración 298 hemos recopilado todas las combinaciones eliminadas por las premisas, de modo que es posible determinar con precisión qué combinaciones son posibles y cuáles imposibles.

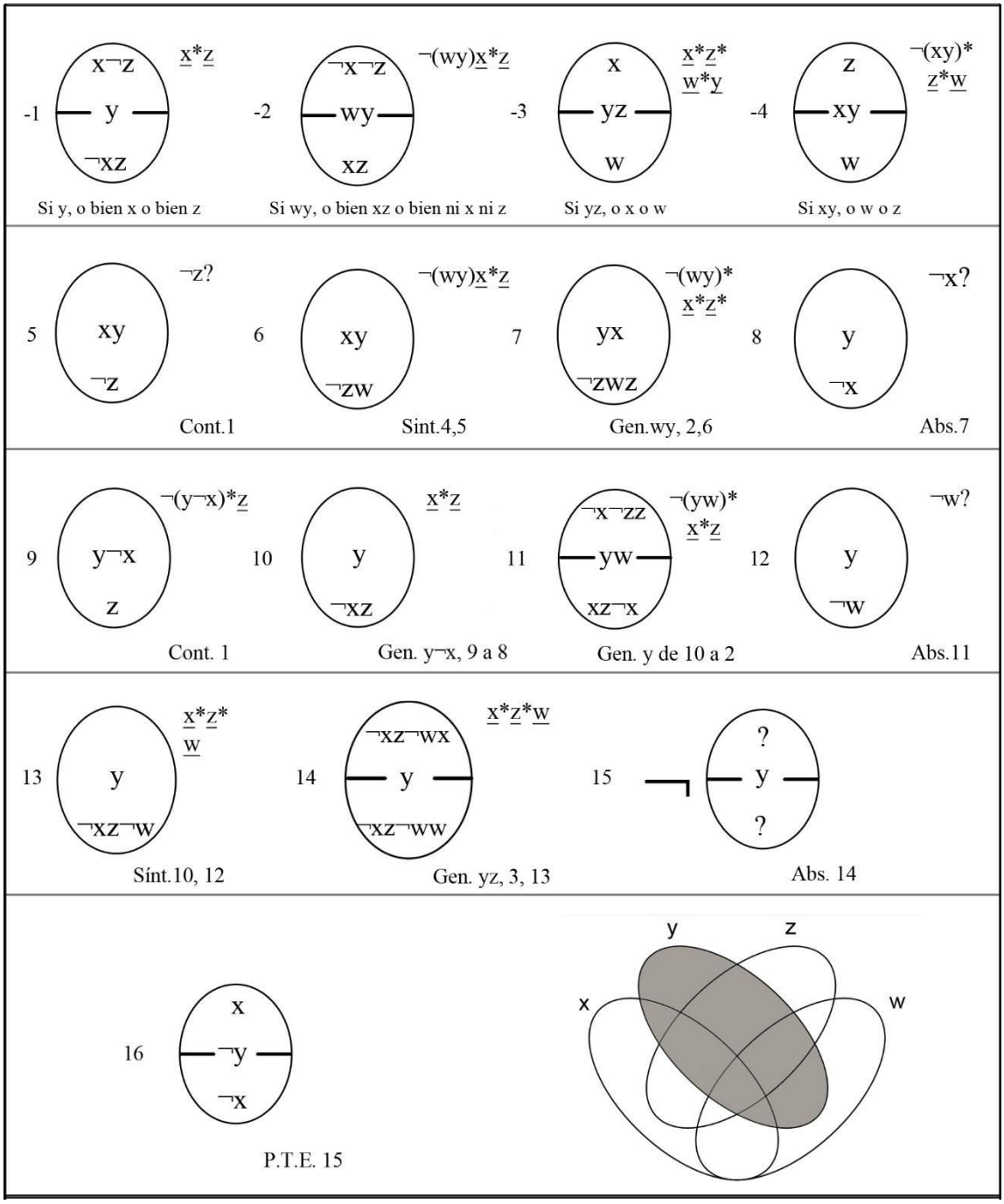


ILUSTRACIÓN 299. PROBLEMA DE VENN COMPARADO CON MARLO. BASADO EN VENN, 1881, P. 119.

A continuación mostramos un silogismo con siete términos (Aznar, 2018g) que permite llegar a la conclusión propuesta con claridad y precisión. Recordemos que en Venn sería necesario crear 128 compartimentos.

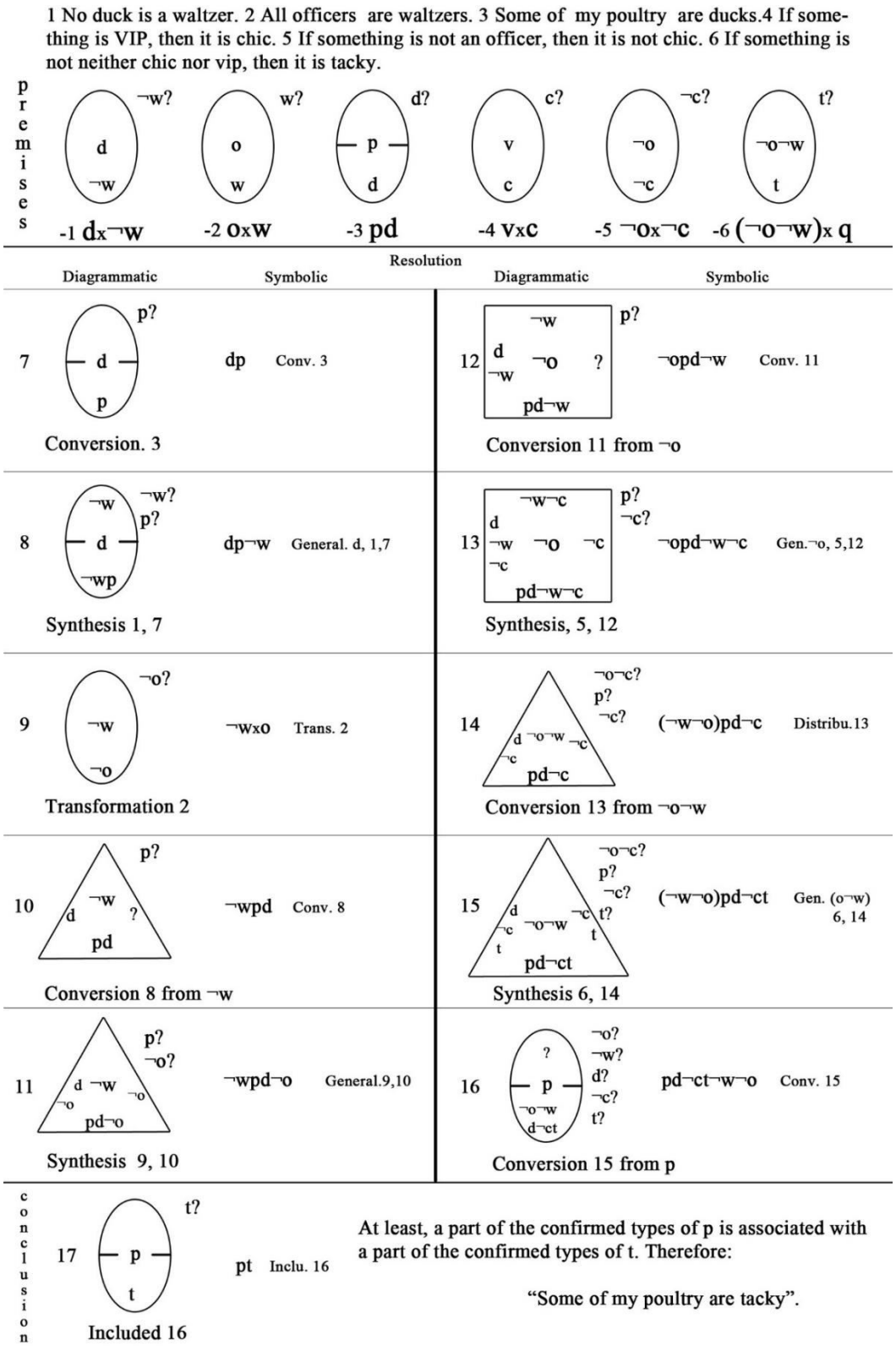


ILUSTRACIÓN 300. SILOGISMO CON SIETE TÉRMINOS QUE GENERARÍA EN VENN 128 COMPARTIMENTOS. TOMADO DE AZNAR, 2018G.

Y aún podemos considerar un problema planteado en un sistema tricotómico que exigiría construir ochenta y un compartimentos en diagramas basados en la eliminación: “Mi primo, que tiene un nivel bueno de danés, pero nulo de catalán y de alemán, quería saber si podría matricularse en un curso especial de idiomas. Para aceptar a los alumnos en este programa de instrucción en cuatro lenguas (alemán, búlgaro, catalán y danés) se les dividiría en tres niveles de competencia por materia: Nula= 0, Media= 0,5 y Buena = 1. Para poder participar en el programa publicaron las siguientes condiciones: -1 Los que tengan un nivel nulo de búlgaro deben tener un nivel bueno de catalán. -2 No se puede tener un nivel nulo de alemán y búlgaro al mismo tiempo. -3 Los que tengan un nivel nulo de alemán deben tener un nivel bueno de búlgaro. -4 Los que tengan un nivel bueno de catalán deben tener un nivel bueno de búlgaro. -5 Los que tengan un nivel nulo de catalán deben tener un nivel nulo de alemán. -6 Los que tengan un nivel bueno de catalán deben tener un nivel bueno de alemán. -7 Es condición necesaria tener al menos un nivel nulo en alemán o danés para participar en el curso. -8 Los que no sepan nada de danés deben tener buen nivel de catalán. ¿Podría mi primo matricularse en el curso?”.

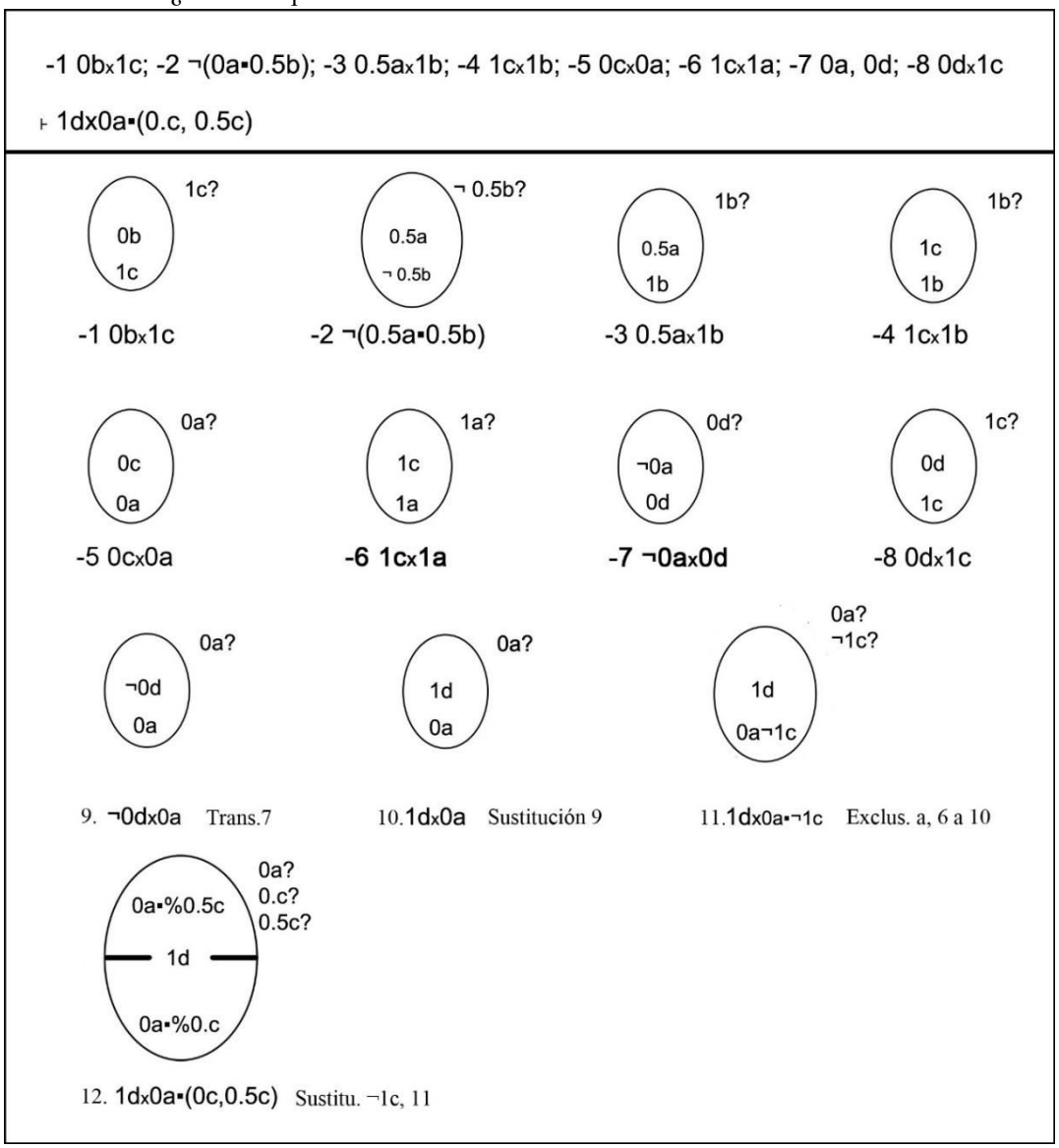


ILUSTRACIÓN 301. SILOGISMO CON CUATRO CRITERIOS CONSIDERADOS TRICOTÓMICAMENTE. 0A= NINGÚN AJUSTE AL CRITERIO A; 0.5A = AJUSTE MEDIO AL CRITERIO A. 1A= AJUSTE COMPLETO AL CRITERIO A. EL PASO 10 SE OBTIENE DE SUSTITUIR EN EL PASO 9 EL ANTECEDENTE DE LA IMPLICACIÓN $\neg\mathbf{0d}_x$ “NO TENER NIVEL NULO DE DANÉS” POR $\mathbf{1d}_x$ “TENER NIVEL BUENO DE DANÉS”, PUES ES CIERTO QUE SI TENEMOS NIVEL BUENO DE DANÉS NO LO TENEMOS NULO (1D → ¬0D). EN EL PASO 12 SUSTITUIMOS EL “NO TENER NIVEL BUENO DE CATALÁN” QUE EN 11 SE ASOCIA A TODO EL MODELO DE *1D* POR LA DISYUNCIÓN “O TIENES NIVEL MEDIO DE CATALÁN O TIENES NIVEL NULO DE CATALÁN” Y QUE NOS OBLIGA A DIVIDIR EL CITADO MODELO DE *1D*.

6.6.7 Proposición secundaria (A v B) → (B v C) en los diagramas de Venn y Marlo

Como indica Gardner (1958), la representación diagramática de (A∨B) ⊃ (B ∨ C) afirma que si la relación "A v B" es una relación verdadera, entonces la relación "B y C" también debe ser verdadera. Luego, afirma Gardner que es una sentencia que puede ser ilustrada siguiendo la sugerencia que hizo Peirce de construir diagramas separados para las dos relaciones dentro de paréntesis y luego conectarlos con otro diagrama de Venn sombreado para representar la implicación.

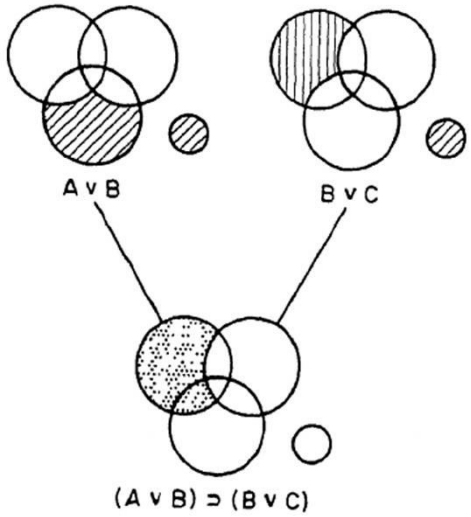


ILUSTRACIÓN 302. (A∨B) ⊃ (B ∨ C) EN DIAGRAMAS DE VENN. TOMADO DE GARDNER. 1958, P. 54.

El diagrama que nos muestra Gardner (1958) como relación condicional de los diagramas de (A∨B) y de (B ∨ C) no es el diagrama general de la proposición (A∨B) ⊃ (B ∨ C), sino un diagrama en el que ya conocemos los valores concretos en la tabla de verdad de las variables. Y sigue explicando:

> Gray is used for the other sets of circles because we have no way of knowing whether the relation each expresses is valid or not. If in the course of diagraming other premises we discover that, say, the relation expressed by the upper left circles, "A v B" is valid, we can then blacken the gray area. If, however, we discover that this relation is false, we must convert the relation to its negation. As we have shown earlier, this is done by blacking the white areas and erasing the shading in the other areas. A knowledge of the truth values of A and B, and in some cases a knowledge of the truth value of one term only, is sufficient to tell us whether the relation A v B is true or false. If, for example, we learn that both terms are false, this clearly contradicts the relation and so we must change it to its negation. If we learn that A is true, this is all we need to know to be sure that the binary relation A v B is true, for it will be true regardless of whether B is true or false. (p.54)

Después de esta explicación sobre cómo proceder, Gardner afirma, de forma totalmente injustificada para nosotros, que las reglas para diagramar en Venn proposiciones compuestas de tipo condicional no serán difíciles de encontrar para un lector que quiera profundizar en el tema y que es sorprendente que en la mayoría de los libros de texto de lógica se limite la discusión de los círculos de Venn a la lógica de clase y al silogismo.

Podemos comprobar en una tabla de verdad que en la proposición condicional compuesta (A∨B) ⊃ (B ∨ C) solo la clase $A\neg B\neg C$ debería ser eliminada, pero no hay una forma perspicua en Venn de llegar a tal conclusión gráfica partiendo de la representación de sus proposiciones simples. Venn afirma que este tipo de proposiciones compuestas no tienen nada de particular, pero no le sirve su procedimiento general de representación para resolverlas y, de hecho, no explica en *Symbolic Logic* con ningún ejemplo cómo ilustrarlas. Si solo recurrimos a la eliminación, ¿podremos llegar a la conclusión de que es imposible $A\neg B\neg C$ partiendo de que cuando es imposible $\neg A\neg B$ es imposible $\neg B\neg C$ y de que cuando es posible $\neg B\neg C$ puede ser posible o imposible la clase $\neg B\neg C$? Está claro que no.

Como indica Gardner (1958), diagramar sentencias compuestas añade la complicación de que más de tres términos convierte los gráficos en demasiado intrincados y pierden su valor como soporte visual, siendo una posible solución elaborar en lugar de diagramas una lista de las combinaciones posibles, como hacía Jevons cuando

trabajaba con un gran número de términos. Sin embargo, nosotros sí podemos trabajar con diagramas este tipo de problemas sin perder precisión, gracias al producto de las combinaciones imposibles.

Mediante el producto de las combinaciones imposibles explicado anteriormente, los diagramas de Marlo nos permiten reducir la proposición de grado dos *(A v B) → (B v C)* a un solo modelo proposicional: ¬B → (¬A ∨ C), siendo ambos modelos en realidad equivalentes, como puede comprobarse en las tablas de verdad fácilmente.

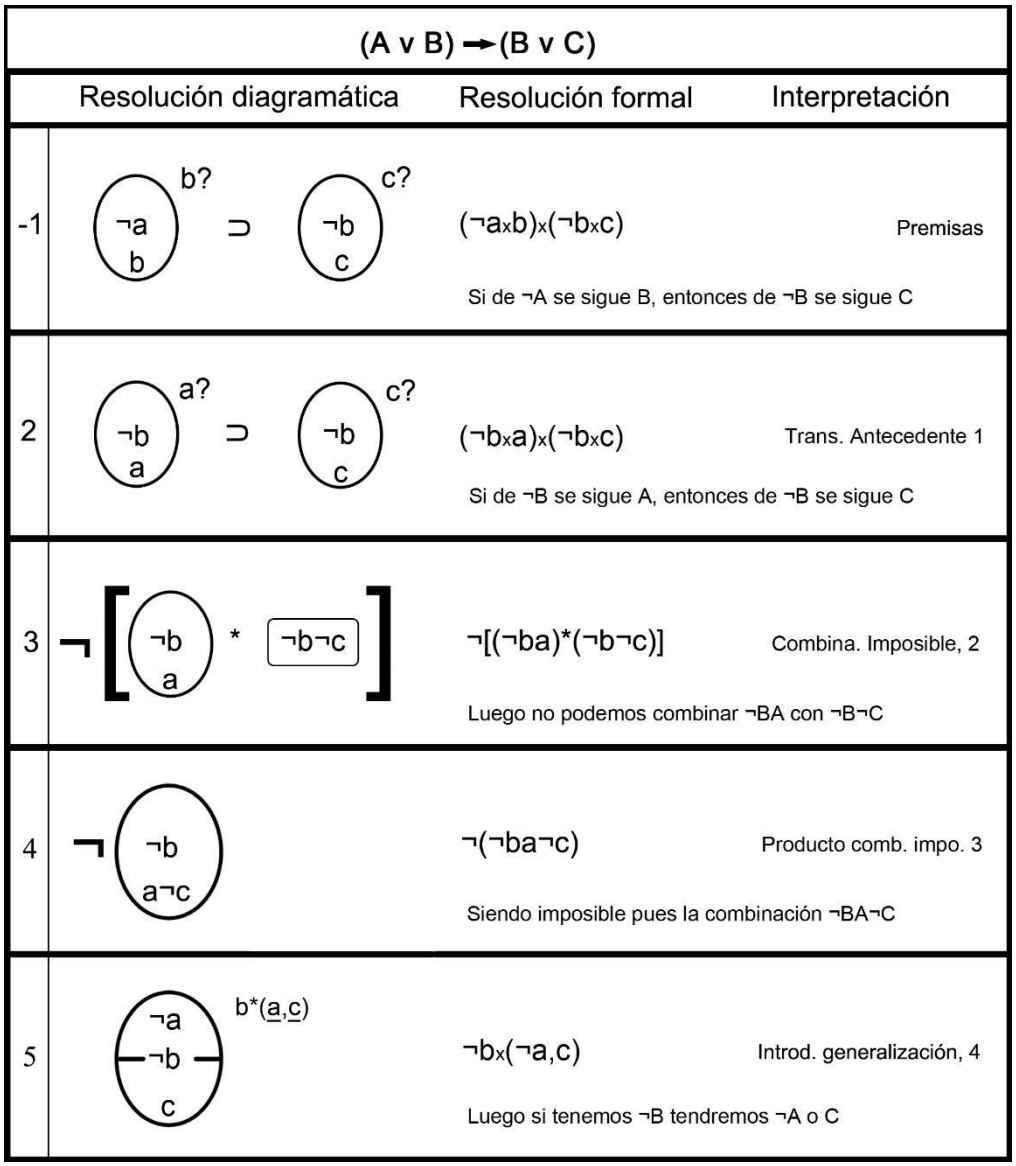


ILUSTRACIÓN 303. CONDENSACIÓN DE LA PROPOSICIÓN DE SEGUNDO GRADO *(A V B) → (B V C)* EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

En el paso cinco, al margen del modelo de ¬*b*, la fórmula *b*(a,c)* nos recuerda que tenemos que contar con todas las combinaciones aún posibles de *b* con *a*, ¬*a*, *c* y ¬*c*, pues ni ¬*a* ni *c* se agotan en el modelo de ¬*b*. Recordemos que *a* se debe sustituir por *a* y por ¬*a*.

6.6.8 Venn frente a la doctrina de la cuantificación del predicado

Venn (1881) pretende distanciarse de Hamilton, que a diferencia de él no ha conseguido sostener un sistema diagramático coherente con su doctrina y afirma que prefiere el sistema antiguo a la nueva doctrina de la cuantificación del predicado: "If indeed our choice lay simply between the old group and the Hamiltonian, the old one seems to me far the soundest and most useful" (p.14). "The view of the proposition must be shifted from that of stating the relation of subject and predicate, or of object and attribute, to that of stating the relation of inclusion and exclusion of two classes to one another" (p.10).

> I think then that the Common Logic is best studied on the old lines, and that the Symbolic Logic should be regarded as a Development or Generalization of it. It is for this reason that I cannot regard the attempts made, in such very different directions, by Hamilton and Prof. Jevons, with any great satisfaction. The petty reforms represented by the Quantification of the Predicate and so forth, seem to me to secure the advantages of neither system. (Venn, 1881, p. xxvii)

> Before comparing in detail the verbal statement of these five forms with that of the four old ones, it must be pointed out how entirely the distinction between subject and predicate is robbed of its significance on such a scheme as this. (Venn, 1881, p. 6)

De este modo Venn dedica parios párrafos en su emblemática *Symbolic Logic* a dejar claro que ni el sistema de Boole ni el suyo, esenciales en el desarrollo de tradición del álgebra de la lógica del siglo XIX (Bruno Ramos, 2013), están conectados con las doctrinas de Hamilton.

Venn trata de mostrar en diagramas tipo Euler que basta con cinco esquemas elementales para representar todas las posibles relaciones que pueden darse entre dos clases *A* y *B*.

> Now suppose that, instead of regarding the proposition as made up of a subject determined by a predicate, we regard it as assigning the relations, in the way of mutual inclusion and exclusion, of two classes to one another […] Now how many possible relations are there, in this respect of mutual inclusion and exclusion, of two classes to one another? Clearly only five. (Venn, 1881, pág. 5)… It can coincide with the former, can include it, be included by it, partially include and partially exclude it, or entirely exclude it. In every recognized sense of the term these are distinct relations, and they seem to be the only such distinct relations which can possibly exist. These five possible arrangements would be represented diagrammatically as follows. (Venn, 1881, p. 6)

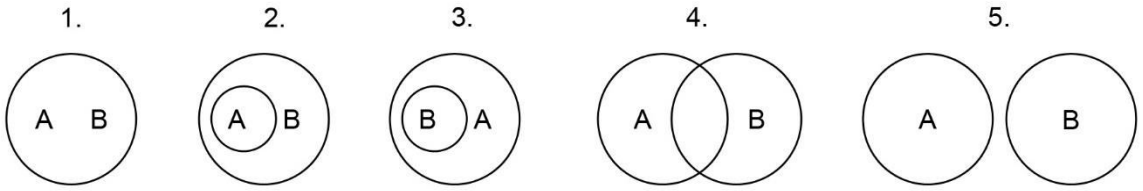


ILUSTRACIÓN 304. RELACIONES EN LA PROPOSICIÓN SUJETO - PREDICADO. TOMADO DE VENN, 1881, P. 6.

Esta representación diagramática de las relaciones expresadas por una proposición reforzaba, sin ninguna duda, el nuevo punto de vista de la lógica simbólica acerca de que no existe diferencia en el estatus lógico de sujeto y predicado, sin el cual hubiera sido imposible considerar las proposiciones como ecuaciones que permitieron dar el paso hacia los conceptos de función y argumento en lógica.

> Now suppose that, instead of regarding the proposition as made up of a subject determined by a predicate, we regard it as assigning the relations, in the way of mutual inclusion and exclusion, of two classes to one another […] Now how many possible relations are there, in this respect of mutual inclusion and exclusion, of two classes to one another? Clearly only five […] It can coincide with the former, can include it, be included by it, partially include and partially exclude it, or entirely exclude it. In every recognized sense of the term these are distinct relations, and they seem to be the only such distinct relations which can possibly exist 1. These five possible arrangements would be represented diagrammatically as follows. (Venn, 1881, pp. 5-6)

Venn presenta los diagramas de las cinco proposiciones básicas acompañados de distintos sistemas de notación que dejan constancia de su evidencia.

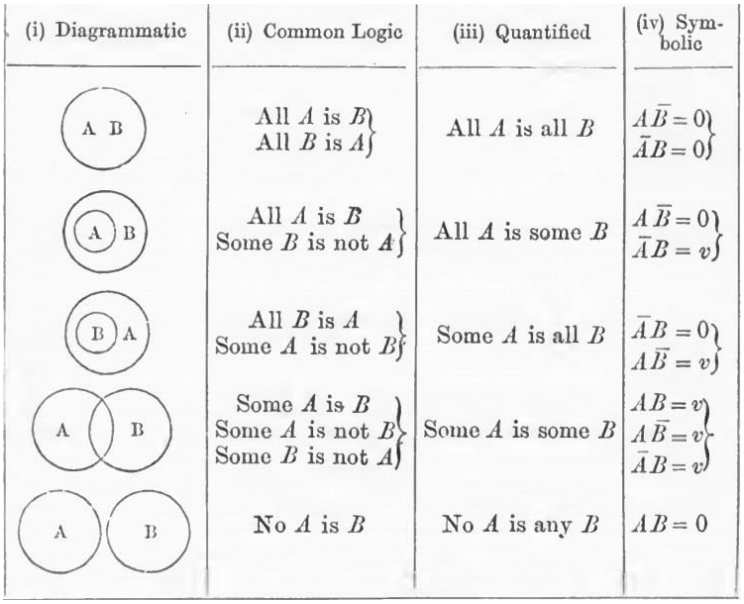


ILUSTRACIÓN 305. COMPARATIVA DEL SISTEMA TRADICIONAL DE HAMILTON Y BOOLE. EN VENN, 1881, P. 30.

Venn reduce de ocho a cinco las proposiciones elementales, pero aumenta en uno el número de diagramas esenciales que propone Hamilton. Así, la única diferencia visual entre ambas propuestas es que Venn emplea dos diagramas para expresar la relación t X = p Y, porque concibe, desde su lógica de clases, como siendo distintas las relaciones de incluir y ser incluido.

	¿A→B = B → A?			
	Distinguen Notación		Distingue diagrama	¿Son distintos los diagramas realmente?
Hamilton	t X = p Y	t Y = p X	NO	
Venn	A$\bar{B}$= 0 $\bar{A}B = v$	$B\bar{A}$= 0 $\bar{B}A = v$	SÍ	NO
Marlo	$a_x b$	$b_x a$	NO	

TABLA 43. COMPARACIÓN DE LA DIAGRAMATIZACIÓN CONDICIONAL HAMILTON-VENN-MARLO.

No parece coherente considerar como distintas las relaciones de incluir y de ser incluido cuando tratamos de establecer las proposiciones elementales, pues no se trata de dos relaciones, sino de una y la misma, por más que sea diferente el papel que juegan en ella cada una de las variables. No obstante, es cierto que la relación condicional no se muestra simétrica, lo cual induce a considerarla desde la diferente perspectiva de *A* y *B*, que es lo que hacemos en los diagramas de Marlo cuando generamos el diagrama de la relación exclusiva para expresar la conversión de un diagrama con relación condicional.

En todo caso, Venn insiste en que las propuestas de Boole y la suya son diferentes a las de la doctrina de la cuantificación del predicado y, si hubiera eliminado el quinto diagrama tipo Euler, estas diferencias podrían ser menos patentes. Sus cinco proposiciones elementales se corresponden perfectamente con su propuesta diagramática tipo Euler y pueden ser representadas fácilmente sobre su esquema elemental de las relaciones entre clases en consonancia con la perspectiva de Boole, cosa que no está, según él, al alcance de Hamilton.

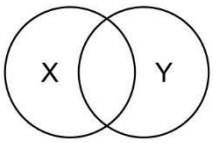


ILUSTRACIÓN 306.TODAS LAS COMBINACIONES POSIBLES ENTRE X E Y. TOMADO DE VENN, 1881, P. 24.

> Fortunately there is another mode of viewing the proposition, far more powerful in its applications than either of those hitherto mentioned. It is the basis of the system introduced by Boole, and could never have been invented by any one who had not a thorough grasp of those mathematical conceptions which Hamilton unfortunately both lacked and despised. (Venn, 1881, p. 22)

> The view which is here taken is still distinctly a class view rather than a predication view ; but, instead of regarding the mutual relation of two or more classes in the way of inclusion and exclusion, it substitutes a complete classification of all the sub-divisions which can be yielded by putting any number of classes together, and indicates whether any one or more of these classes is occupied; that is, whether things exist which possess the particular combination of attributes in question. (Venn, 1881, p. 23)

Combinando su esquema elemental, Venn construirá un sistema de diagramas original y con gran potencia expresiva a partir de círculos que se intersecan. Al representar así las relaciones de tres clases, cada círculo se divide en cuatro partes, y cada parte común de dos círculos en dos partes, de modo que, incluyendo lo que se encuentra fuera de los tres, hay ocho compartimentos.

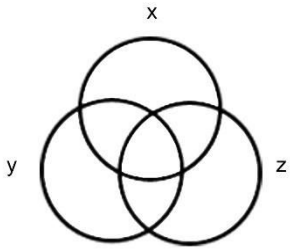


ILUSTRACIÓN 307. ESQUEMA FUNDAMENTAL PARA TRES VARIABLES EN VENN, 1881, P. 105.

Estas clases deben ser mutuamente exclusivas y colectivamente exhaustivas: “What we ultimately have to do is to break up the entire field into a definite number of classes or compartments which are mutually exclusive and collectively exhaustive” (Venn, 1881, p. 101).

Los diagramas de Venn pasarán a la historia por encima de la perspectiva de la cuantificación del predicado reduciendo a cinco los tipos de relación entre clases (Venn , 1881, pp. 5-6):

- Pueden coincidir: 1 It can include it, 2 be included by it, 3 partially include
- Pueden excluirse: 4 partially exclude it, 5 or entirely exclude it.

En los diagramas de Hamilton, lo mismo que en los nuestros, las tres formas básicas de coincidir son las mismas. En Venn se entienden las relaciones de identidad como incluir, estar incluido e incluirse parcialmente.

Cuantificación del predicado	Venn
Toda A se asocia con toda B	A incluye a B y B incluye a A
Toda A se asocia con parte de C	A incluye a B y B está incluido en A
Parte de A se asocia con parte de C	A está parcialmente incluido en B y B está parcialmente incluido en A

TABLA 44. DIFERENTES CONCEPCIONES EN LOS CONCEPTOS DE INCLUSIÓN Y ASOCIACIÓN.

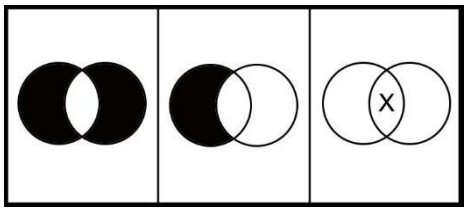


ILUSTRACIÓN 308. RELACIONES DE INCLUSIÓN EN VENN.

Los diagramas de Venn muestran las relaciones de identidad entre dos clases de forma sencilla e intuitiva. Y, aparentemente, muestran con la misma elegancia las dos únicas formas de exclusión que reconocen: la exclusión parcial presente en *Alguna A no es B* y la exclusión total de *Ningún A es B- Ninguna B es A*

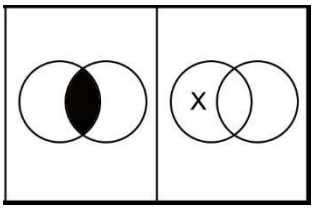


ILUSTRACIÓN 309. EXCLUSIÓN TOTAL Y PARCIAL EN VENN

Sin embargo, al establecer los fundamentos de su representación diagramática con solo cinco proposiciones, Venn ha eliminado los matices que, aunque fuera érroneamente, la teoría de la cuantificación del predicado pretendía establecer al distinguir tres tipos de exclusión:

- *X in toto || Y in toto*
- *X in toto || Y ex parte*
- *X in parte || Y ex parte*

Ni Hamilton ni Venn parecieron darse cuenta de lo que significaba realmente la cuantificación del predicado en términos de exclusión. Ambos parecen interpretarla considerando *A* y *B* como las clases o predicados que se excluyen totalmente o en parte, y por eso recurren los dos a la misma representación de Leibniz, sin que haya diferencias entre los diagramas tipo Euler que utilizan ambos para la exclusión.

Hamilton debería haberse percatado que solo es posible distinguir ambas proposiciones en términos de exclusión afirmando que A → ¬B expresa que *parte* de ¬B (la asociada con A), se excluye con *toto* ¬A, mientras que en A↔¬B tenemos que *toto* ¬B se excluye de *toto* ¬A:

¬A in toto || ¬B ex parte	*¬A in toto || ¬B in toto*
Ningún A es B	*A es lo mismo que ¬B*
Si tengo A, entonces ¬B	*Si y solo si A, entonces ¬B*
$a_x \neg b$	$a_x \neg b_x$

TABLA 45. DIFERENCIA ENTRE LA UNIVERSAL NEGATIVA Y LA BICONDICIONAL EN EL SISTEMA DE HAMILTON.

Ningún A es B muestra la exclusión total entre las categorías *A* y *B*, pero en ella el predicado *¬B* no es considerado universalmente, haciendo imposible que a partir de *¬B* podamos inferir *A*. Por el contrario, en la proposición *Toda A se asocia con la totalidad de ¬B*, podemos concluir que *si ¬B, entonces A*.

La doctrina de la cuantificación del predicado se hubiera beneficiado de la perspectiva que adopta Boole (1854) al establecer los ocho tipos fundamentales de proposición en el lenguaje de símbolos utilizando términos negativos.

	Tipos fundamentales de proposición en Boole		Formalización diagrama de Marlo
1	All *Y*'s are *X*'s,	$y = vx$.	$a_x b$
2	No *Y*'s are *X*'s,	$y = v(1 - x)$.	$a_x \neg b$
3	Some *Y*'s are *X*'s,	$vy = vx$.	ab
4	Some *Y*'s are not-*X*'s,	$vy = v(1 - x)$.	a¬b
5	All not-*Y*'s are *X*'s,	$1 - y = vx$.	$\neg a_x b$
6	No not-*Y*'s are *X*'s	$1 - y = v(l - x)$.	$\neg a_x \neg b$
7	Some not-*Y*'s are *X*'s,	$v(l - y) = vx$.	¬ab
8	Some not-*Y*'s are not-*X*'s,	$v(1 - y) = v(1 - x)$.	¬a¬b

TABLA 46. PROPOSICIONES FUNDAMENTALES EN BOOLE.

También habría sido acertado que Hamilton adoptara las nociones de Ploucquet distinguiendo entre *Todo* ¬*p* y *Algún* ¬*p:*

> Had he written, for instance, $\bar{P}$ for ' all not-P', and $\bar{p}$ for ' some not-P', his expression for 'No S is P' might have been S$\bar{p}$, viz. 'All S is some not-P', in better accordance with the familiar symbolic view at the present time, and as illustrated in group (II.). (Venn, 1881, pp. 416,417)

En *Symbolic Logic* Venn no explicita cómo representar en el diagrama, que supuestamente muestra las todas las relaciones posibles que establece una proposición entre dos clases, ni la disyunción exclusiva ni la inclusiva. Sí representa la disyunción inclusiva empleando tres términos, afirmando, quizás sin conocer los diagramas de Schuyler, que han sido muy pocos los intentos de representar la disyuntiva en lógica.

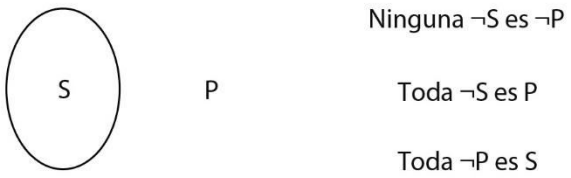


ILUSTRACIÓN 310. DISYUNCIÓN EXCLUSIVA EN SCHUYLER, 1869.

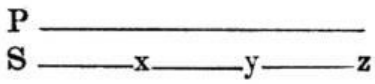


ILUSTRACIÓN 311. DISYUNCIÓN EN DIAGRAMA LINEAL DE THOMSON, W., 1871, P. 215.

El caso es que los diagramas de Venn pueden expresar ambos tipos de disyunciones, pero necesitan hacer visible el círculo que representa la intersección de ¬*A*¬*B* para sombrearlo como señal de que es una posibilidad eliminada, tal y como se muestran los diagramas de Venn en Gardner (1958). Pero queremos señalar que los diagramas de las disyunciones no se ajustan en modo alguno al esquema que ha establecido de las relaciones parciales y totales de exclusión.

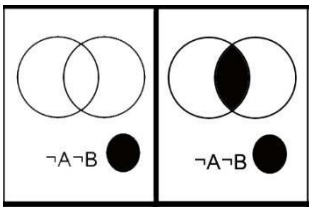


ILUSTRACIÓN 312. DISYUNCIONES INCLUSIVA Y EXCLUSIVA EN DIAGRAMAS DE VENN.

Venn no considera en *Symbolic Logic* las proposiciones que, como la disyunción exclusiva (exclusión *toto-toto*), requieren hacer *visible* la clase $\neg A \neg B$. Las disyunciones entre dos términos pueden representarse en su diagrama, pero cuestionan que la base de su sistema diagramático sean las relaciones de exclusión parcial/total entre dos clases tal y como él las había definido. Al representar la disyunción en Venn nos percatamos de que el verdadero fundamento de sus diagramas es la eliminación de posibilidades que una proposición establece reduciendo el ámbito de las combinaciones posibles que está permitido establecer entre dos términos. De hecho, Venn conocía perfectamente la perspectiva combinatoria que serviría de base a la lógica matemática, y cita como ejemplo de esa orientación el trabajo de Semler (1811).

En todo caso, o bien las relaciones disyuntivas no son relaciones fundamentales, o bien las relaciones fundamentales que establece Venn entre clases no son las relaciones fundamentales que establece una proposición entre clases. Quizá lo más elemental de la proposición es su capacidad para informar acerca de qué variables es razonable esperar partiendo de otras variables, señalando las relaciones que mantienen entre sí la totalidad o parte de dichas variables. Una idea que está contenida en lo que se ha venido a llamar *Nuevo paradigma del razonamiento*, pero que no nos parece ser más que una vuelta atrás en el reconocimiento de las relaciones que existen entre lógica y probabilidad como medios de generar expectativas razonables. Así, encontramos en Boole (2017) que: "the laws for the expression of expectation, viewed as a numerical element, shall be the same as the laws for the expression of the expected event viewed as a logical element" (p. 208). Y también Bentham (1827) afirma:

> Expectation appears to be the immediate result of the exercise of the judicative faculty on an inductive operation, of which the conclusion relates to futurity. It can scarcely be classed, however, as an intellectual faculty. (p. 80)

Como veremos, en el diagrama de Marlo las disyunciones se muestran como parte de las relaciones fundamentales que establece una proposición intensionalmente. Las relaciones fundamentales para nosotros no son, en lo esencial, distintas de las que tradicionalmente se vienen considerando desde Platón como inclusión y exclusión y que fueron recogidas por Aristóteles en el silogismo (Clark, 1958). Estas relaciones son el punto de partida en la doctrina de la cuantificación del predicado y también en la lógica matemática de Venn.

Consideramos nuestros diagramas herederos del espíritu de la doctrina de la cuantificación del predicado y de la interpretación combinatoria que hizo de ella el profesor Jevons, la cual le permitió construir la primera máquina con el poder suficiente para resolver un problema complicado "más rápido de lo que el problema podría resolverse sin la ayuda de la máquina" (Gardner, 1958, p. 91). Venn (1881) criticó a Hamilton y Jevons en repetidas ocasiones a lo largo de su obra *Symbolic Logic.* Criticó la doctrina de la cuantificación del predicado de Hamilton entre otros motivos porque sus ocho formas de proposición eran redundantes e incapaces de expresar la incertidumbre que acompaña a la clase $B \neg A$ cuando afirmamos que *Toda A es B.* Y criticó las doctrinas de Jevons porque trabajaba con los términos intensionalmente como hacemos nosotros y por la inutilidad de su máquina lógica. Así, Venn afirmó su falta de interés en las máquinas lógicas como la desarrollada por Jevons por dos motivos. Primero porque es muy raro que los cálculos lógicos complejos se nos impongan, ya que somos nosotros los que buscamos ejemplos complicados para ilustrar nuestras reglas y métodos, de modo que los cálculos lógicos, al contrario que los cálculos de las matemáticas, no se benefician realmente de los dispositivos que reducen el trabajo inevitable. Además, en segundo lugar, no le parecía que ningún dispositivo conocido en su momento mereciera realmente el nombre de máquina lógica, pues solo resolvían una parte muy pequeña de los procesos que forman parte de un razonamiento. Y concluye Venn que, existiendo muy pocas dificultades para esbozar un diagrama nuevo para cada ocasión, "realmente no vale la pena que una máquina haga parte del trabajo por nosotros" (pp.121). Sin embargo, y a pesar de la falta de visión histórica que hay en sus críticas a la máquina de Jevons, Venn afirma que sus diagramas podían servir de base también para construir una máquina lógica.

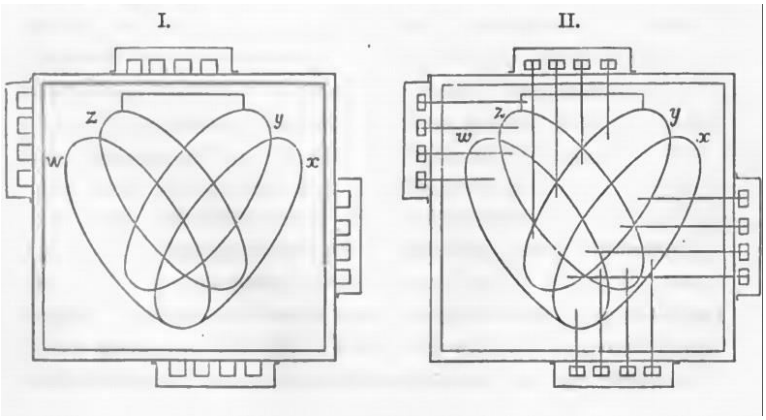


ILUSTRACIÓN 313. MÁQUINA LÓGICA ENFRENTADA A JEVONS. TOMADO DE VENN, 1881, P. 122.

Nuestras redes de expectativas aspiran a ser programables y nos sentimos satisfechos de haberlas trasladado a una hoja de cálculo en la que la entrada de un dato modifica los valores de los nodos asociados. La mecanización de la inferencia es nuestro propósito, como era el de Jevons, y si bien partimos de la consideración sistemática de todas las combinaciones posibles entre variables como hacía Venn, pretendemos encontrar atajos que nos permitan calcular cada vez más con menos. En la búsqueda de tales atajos las doctrinas de la cuantificación del predicado son una fuente de inspiración, mostrándonos de qué manera el sujeto de una proposición señala las combinaciones relevantes, aquellas que son necesarias o imposibles dentro del sistema y que son en las que nos debemos centrar, pero sin olvidar las combinaciones que el predicado aún puede tener con otras variables o combinaciones de variables distintas a las que definen al sujeto.

6.6.9 Inconvenientes y limitaciones en los diagramas de Venn

A pesar de la admiración que muestra Gardner por los diagramas de Venn, reconoce que en muchos aspectos su aplicación es torpe y carece de semejanza formal con la estructura lógica que pretende representar.

> Venn circles and other diagrams of the shaded compartment type can, as we have seen in the previous chapter, be used for solving problems in the prepositional calculus. In many respects, however, their application to this type of logic is clumsy and lacking in what Peirce called "iconicity" formal resemblance to the logical structure for which they are intended to be visual aids. This is understandable since these diagrammatic methods were originally devised for class logic. (Gardner, 1958, p. 60)

Desde nuestra perspectiva los diagramas de Venn se muestran útiles para revisar la validez de las conclusiones cuando el número de términos en juego es igual a tres o cuatro, pero no sirven en ningún caso para mostrar los procesos implicados en la inferencia al margen de la eliminación. De hecho, reducir todo razonamiento a un proceso de descarte anula las diferencias históricamente reconocidas entre proposiciones de primer y segundo grado, lo cual no ha servido en ningún caso ni para generar un sistema lógico universalmente aceptado, ni para crear una teoría de la inferencia unificada que incluya el razonamiento transitivo.

6.6.9.1 Número de variables

Venn (1881) se mostró consciente de la necesidad de un sistema de notación capaz de mostrar con claridad las relaciones de un número ilimitado de clases, porque reconocía que era complicado tratar en sus diagramas con las 32 combinaciones involucradas en cinco términos. Venn afirmaba que él mismo, a base de trabajar cientos de ejemplos, había sido capaz de acostumbrarse a diagramas complejos hasta el punto de ahorrar tiempo con ellos, evitar pesadeces desagradables y asegurarse contra el error, pero reconocía al mismo tiempo que, aunque nunca deja de ser factible, se vuelve “intrincado e incómodo” (p.107).

> Beyond three terms circles fail us, since we cannot draw a fourth circle which shall intersect three others in the way required. But there is no theoretic difficulty in carring out the scheme indefinitely. Of course any closed figure will do as well as a circle since all that we demand of it, in order that it shall adequately represent the contents of a class is that it shall have an inside and an outside so as to indicate what does and what does not belong to the class. (Venn, 1880, p. 6)

> It is possible to draw any number of closed curves that intersect in the necessary manner, but beyond four it is difficult to devise diagrams that permit the eye to grasp quickly the spots that are inside or outside a given curve. The more terms involved, the more peculiar become the shapes of the curves. (Gardner, 1958, p. 43)

> The problem of the Symbolic Logic is: Given any number of non-quantitative propositions, of any type whatever, and involving any number of terms, assign a general formula indicating what class combinations can be established (conditionally) from them, what combinations can be negatived absolutely, and what combinations can receive no such solution either way. It will be seen therefore that whereas the problems of elimination and inference are almost exactly the same thing when regarded from the common or restricted point of view, they develop in very different directions when generalized. (Venn, 1881, p. 361)

Siguiendo a Moktefi y Shin (2012), pocos lógicos se atrevieron antes que Venn a representar problemas con más de tres términos. Uno de ellos fue, en 1867, Francis Garden en *Outline of Logic* utilizando un diagrama tipo Euler

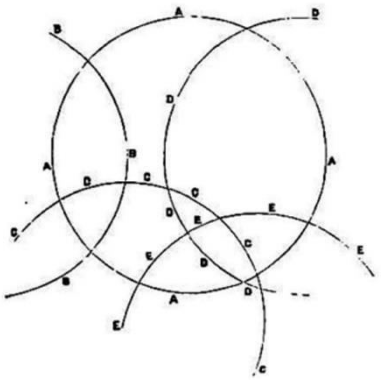


ILUSTRACIÓN 314. PROBLEMA CON CINCO TÉRMINOS. TOMADO DE GARDEN, 1867, P. 39.

Nosotros consideramos que, con la práctica suficiente, nuestro sistema de notación gráfico nos acerca más al ideal de poder ver con claridad un número de combinaciones posibles entre variables sin necesidad de dibujar todos los compartimentos explícitamente. Además, confiamos en que la distinción entre sujeto y predicado en las proposiciones puede ser de utilidad en la medida en que permite restringir el análisis a las combinaciones relevantes. Así lo mostramos ya en Aznar (2014) con un ejercicio cuya solución versionamos ahora:

> 1. Algunos venusianos son amarillos. 2. Algún venusiano es copriano. 3. Algún venusiano es filósofo. 4. Algún venusiano es bailarín. 5. Todo filósofo es pensador. 6. Ningún copriano es pensador. 7. Todo galvánico es copriano.

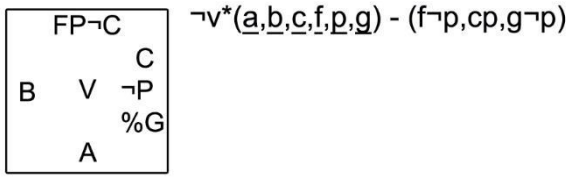


ILUSTRACIÓN 315. SILOGISMO ENCADENADO QUE REQUIERE 128 COMPARTIMENTOS EN VENN.

En la anterior ilustración debemos notar que al margen del modelo de *V* aparecen las combinaciones posibles de ¬V, de las que hay que restar o eliminar todas las que contengan las secuencias *f¬p*, *cp* o *g¬p*, prohibidas por las premisas cinco, seis y siete. Dentro del modelo de *V* son combinables todas las clases no contradictorias.

Los diagramas de Marlo resuelven por síntesis o exclusión las conjunciones de relaciones que se derivan de las proposiciones de primer grado implicadas en el silogismo, pudiendo llegar a las mismas conclusiones a las que arriban los diagramas de Venn eliminando compartimentos prohibidos. Pero Venn sabía que considerar las relaciones de exclusión e inclusión entre clases no era suficiente.

> Any system which merely exhibits the mutual relations of two classes to one another is not general enough. We must provide a place and a notation for the various combinations which arise from considering three, four, or more classes; in

> fact we must be prepared for a complete generalization. When we do this we shall soon see that the whole way of looking at the question which rests upon the mutual relation of classes, as regards exclusion and inclusion, is insufficient. (Venn, 1881, p. 22)

Puede que el proceso de las combinaciones imposibles, que permite comprimir proposiciones de segundo grado a partir de la consideración de las relaciones entre relaciones de clases, forme parte de lo que va más allá de las relaciones de inclusión y exclusión de clases a los que se refiere Venn en la cita anterior.

6.6.9.2 Otros tipos de razonamiento deductivo

Las redes de expectativas permiten visualizar la base de inferencias no silogísticas como las que tienen lugar a partir de las consideraciones de los nodos objeto, los nodos *And* y los nodos *Or*, haciendo evidentes relaciones plausibles, probables o inciertas.

ILUSTRACIÓN 316. VALORES NODOS. BASADA EN ILUSTRACIÓN PRESENTADA EN EL VIII CONGRESO CIBEM DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

No obstante, son muchas las limitaciones que nuestros diagramas comparten con los de Venn, como que están limitados a solo cierto tipo de inferencias que excluyen las que se siguen de las relaciones transitivas comparativas o las que se siguen de silogismos en los que los cuantificadores se refieren a cantidades como *casi todo A*, *muy pocos B*, etc. Gardner sugiere la siguiente imagen como muestra del potencial de los diagramas de Venn para afrontar este último tipo de razonamiento deductivo.

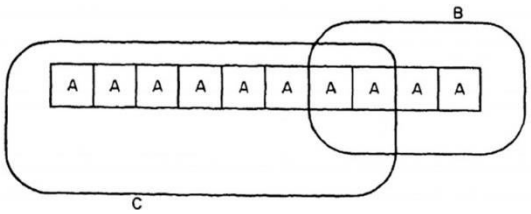


ILUSTRACIÓN 317. LA MAYORÍA DE. TOMADO DE GARDNER, 1958, P. 42.

A pesar de que el propio Venn (1881) había afirmado lo siguiente sobre incluir en los diagramas términos como "muy pocos o la mayoría":

> Mi propia convicción está muy decidida de que toda introducción de consideraciones como estas debe evitarse ya que tiende a confundir los dominios de la lógica y las matemáticas; de lo que es, en términos generales, cualitativo, y lo que es cuantitativo. Los compartimentos cedidos por nuestro diagrama se deben proteger únicamente a la luz de estar delimitados por tales y tales contornos, ya que están dentro o fuera de tales y tales líneas. Debemos abstenernos totalmente de toda consideración de su magnitud relativa, como lo hacemos con su forma real, y no rastrear más la conexión entre estos hechos y la extensión lógica de los términos que representan que entre esta extensión lógica y el tamaño y la forma. de los símbolos de las letras, A y B y C .(p. 438)

Por nuestra parte, también podemos proponer modelos para resolver silogismos con cuantificadores en las premisas como todos, la mayor parte, unos pocos, y algunos considerado como al menos uno (Aznar, 2020a). No obstante, este aspecto de nuestros diagramas está simplemente esbozado y es por ello que lo presentamos en este apartado como parte de la comparativa del potencial de nuestros diagramas con los de Venn.

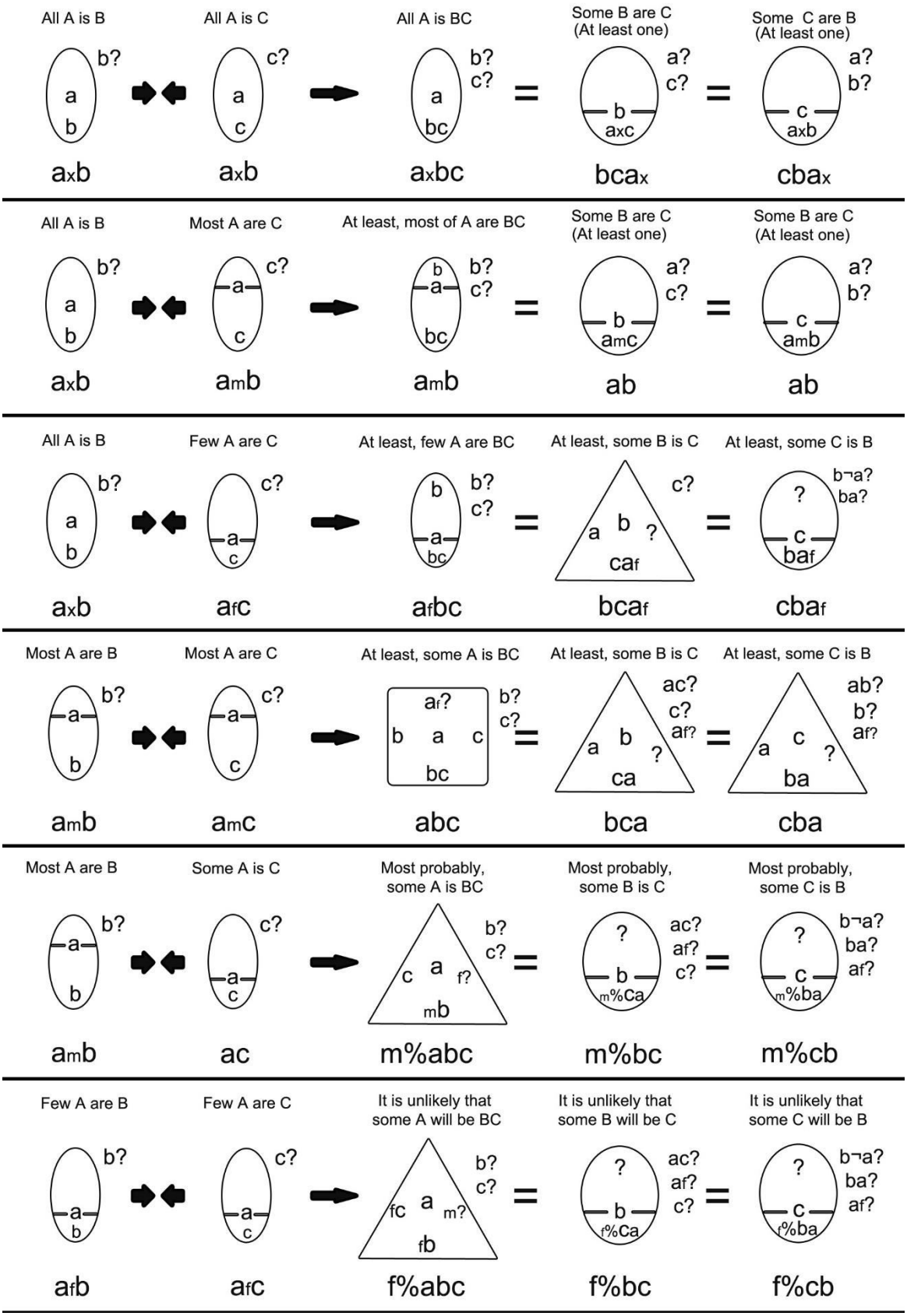
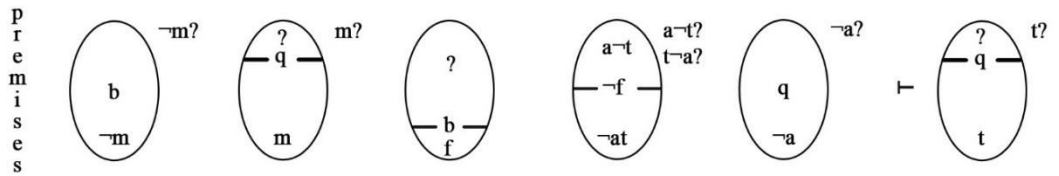


ILUSTRACIÓN 318. EJEMPLOS DE SILOGISMO CON CUANTIFICADORES DE CANTIDAD INDETERMINADA. TOMADO DE AZNAR, 2020A.

1 No bird is a mammal. 2 Most quadrupeds are mammals. 3 Only birds fly. 4 Anything that does not fly is terrestrial or aquatic. 5 Quadrupeds are not aquatic. Therefore, most quadrupeds are terrestria



Resolution

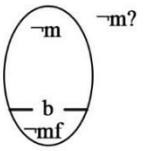
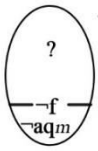
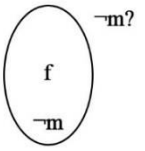
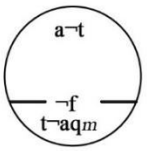
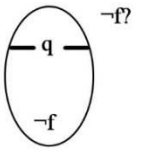
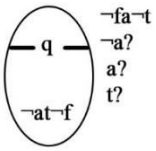
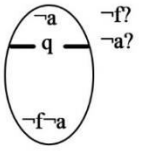
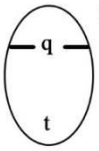
	Diagrammatic	Symbolic			Diagrammatic	Symbolic	
6	 Synthesis 1, 3	b¬mfx	General. b, 1,3	10	 Conversion 9 from ¬f	¬f¬aqm	Conv. 9
7	 Conversion 6	fx¬m	Included 6	11	 Consistent Synthesis, 4, 10	¬f ¬atqm	Gen.¬f¬a, 4,10
8	 Exclusion m, ¬m, 1, 2	qm¬f	Exclu. m,¬m 7,2	12	 Conversion 11 from q	qm¬at¬f	Conv. 11
9	 Synthesis 5, 8	qm¬f¬a	Gen q, 5,8	13	 Included 12	qmt	Included 12

ILUSTRACIÓN 319. SILOGISMO CON CUANTIFICADORES INDETERMINADOS EN EL DIAGRAMA DE MARLO. TOMADO DE AZNAR, 2020A.

Nuestra propuesta en este aspecto está en proceso y tal vez deberíamos representar en la ilustración 319 “Alguno” y/o “Some” en inglés, como al menos uno, en lugar de representarlo gráficamente como la mitad, es decir, aproximando la división del modelo a la que tiene lugar en “unos pocos”. En todo caso, también hemos esbozado formas de resolver razonamientos comparativos imposibles de plantear en Venn, dado que, según Roberts (1973), el primer intento hecho por nadie de aplicar diagramas a la lógica de relaciones en general posiblemente se encuentra en una carta que escribió Peirce a su alumno, O. H. Mitchell, el 21 de diciembre de 1882. Pero nuestros diagramas no expresan lo mismo que los de Peirce.

ILUSTRACIÓN 320. SOMETHING IS AT ONCE BENEFACTOR AND LOVER OF SOMETHING. PEIRCE [MS L 294].

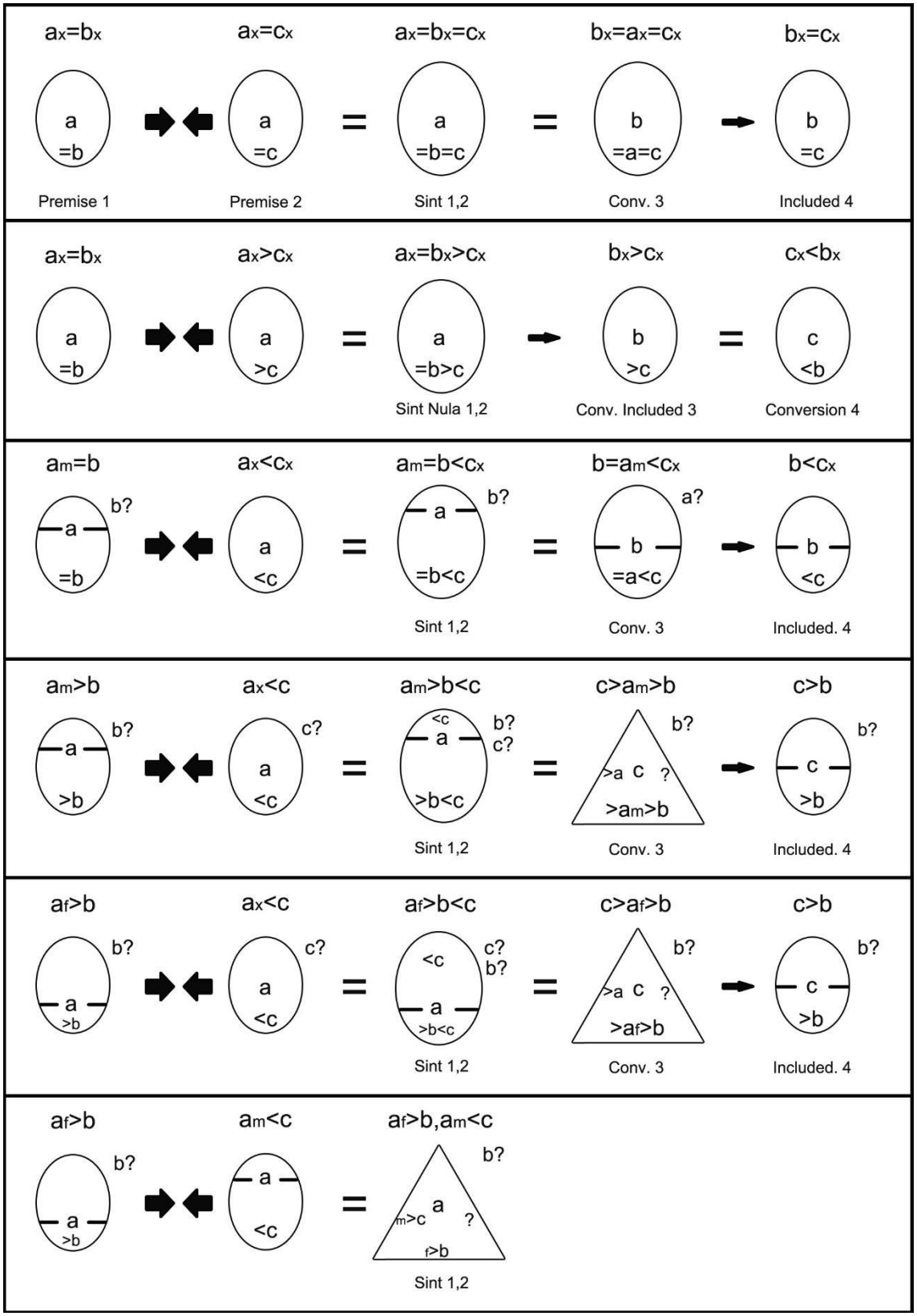


ILUSTRACIÓN 321. REPRESENTACIÓN DE RAZONAMIENTOS COMPARATIVOS 1 EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

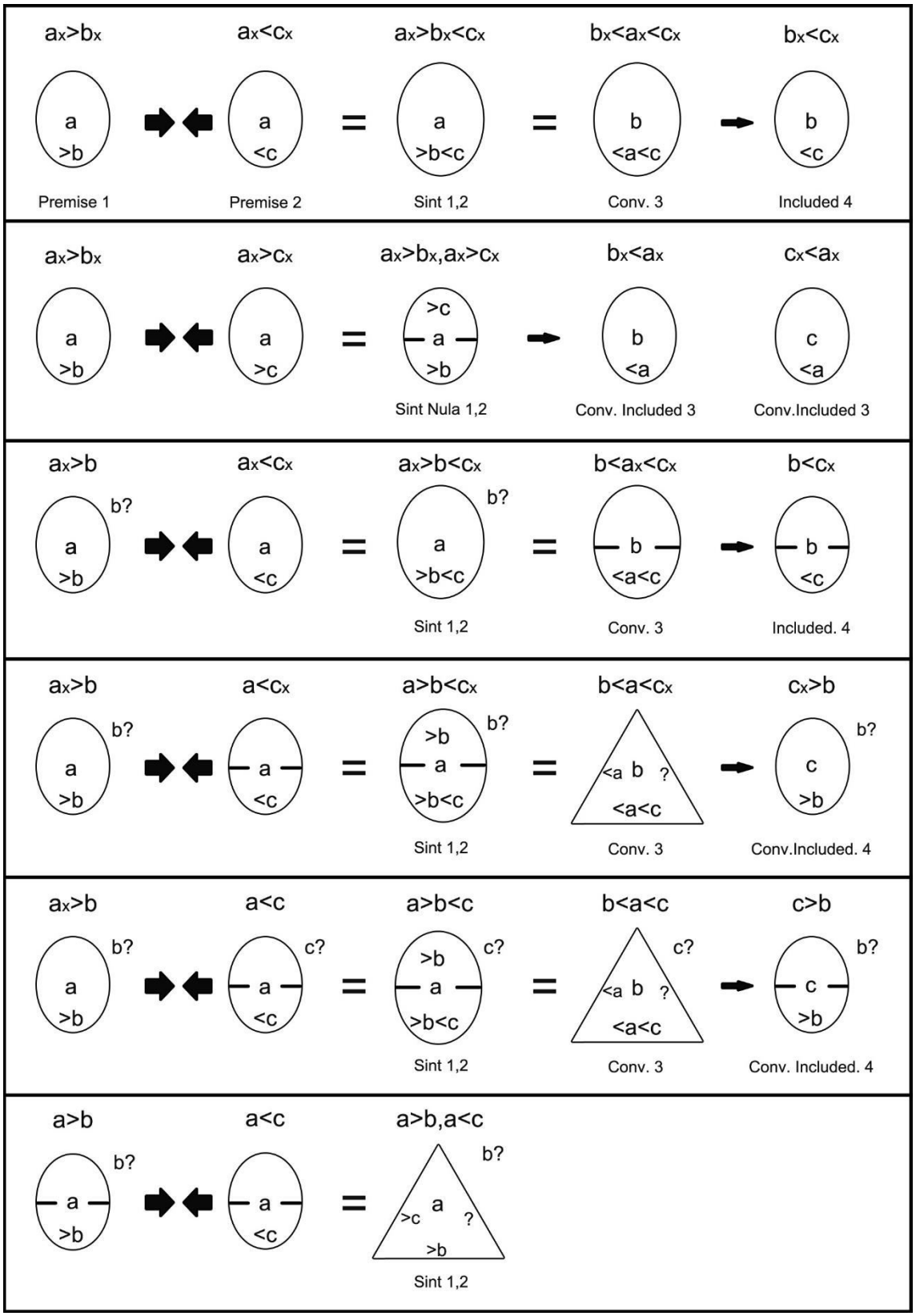


ILUSTRACIÓN 322. RAZONAMIENTOS COMPARATIVOS 2 EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

HISTORIA COMPARADA DE LOS DIAGRAMAS

El siguiente ejemplo tiene varias secuencias en el ordenamiento de las variables que sirven como posible solución a los datos de las premisas y podemos llegar a dichas secuencias ayudándonos del diagrama de Marlo.

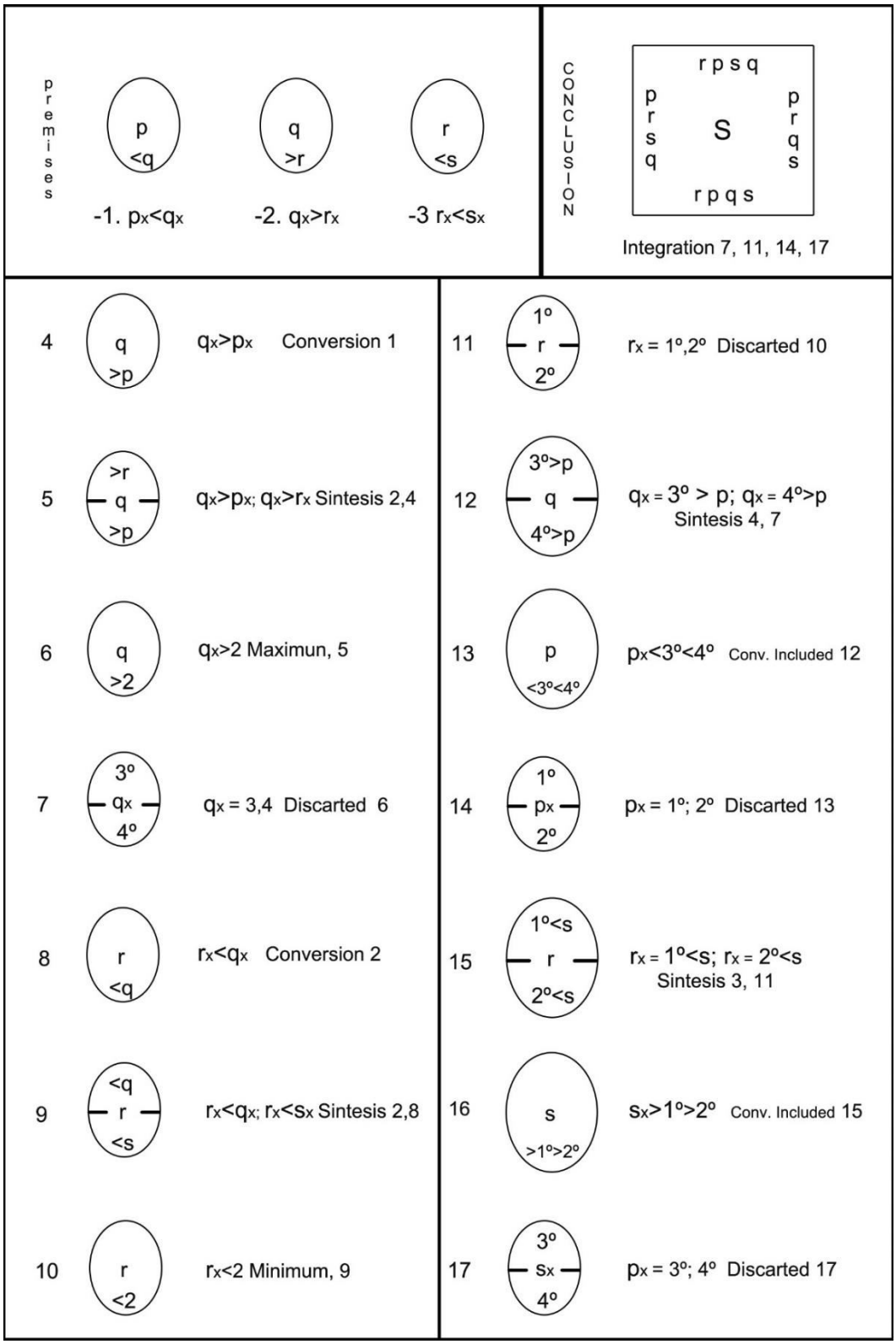


ILUSTRACIÓN 323. RAZONAMIENTO DEDUCTIVO COMPARATIVO APOYADO EN EL DIAGRAMA DE MARLO. BASADO EN UN EJEMPLO DE LAIRD, 1995.

6.6.10 Conclusiones sobre los diagramas de Venn

Desde nuestra perspectiva, los diagramas de Venn tienen el mérito de haber puesto de manifiesto la importancia de considerar los procesos de eliminación de clases que están en la base de toda inferencia silogística hipotética o categórica. Venn aísla los aspectos formales más primitivos del razonamiento al desvincularlos de aspectos materiales más complejos como los que subyacen al silogismo categórico, demostrando de forma irrefutable que la exacta combinatoria de las variables formando compartimentos de clases de forma exclusiva y exhaustiva es un proceso previo sin el cual no sería posible la construcción del universo del discurso ni ninguna forma posterior de razonamiento. Los diagramas de Venn con tres variables son claros y perspicuos y permiten reclamar el derecho del razonamiento visual y diagramático a formar parte de las demostraciones lógicas como herramientas precisas. Su éxito no fue casual y a buen seguro seguirán siendo utilizados en el futuro de forma generalizada.

Sin embargo, los diagramas provocan cierto divorcio entre lo que hemos llamado razonamiento tipo uno y razonamiento tipo dos, entre lenguaje natural y simbólico, proponiendo una visión de la razón como mero proceso de eliminación sistemática. La ilación, la síntesis y otros atajos de la inteligencia creativa fueron ignorados y menospreciados. Y precisamente por eso los diagramas de Venn se ven muy limitados a medida que aumenta el número de variables o la complejidad de las relaciones va más allá de la mera inclusión y exclusión que expresan las proposiciones del silogismo. Pensamos que Venn no valoró adecuadamente el potencial de la doctrina de la cuantificación del predicado, ni lo que podemos aprender de los procesos por los que naturalmente se han desarrollado los sistemas de comunicación vinculados al lenguaje articulado. Nosotros creemos, siguiendo al neurocientífico Antonio Damasio (Damasio, 2006, 2007, 2011), que la capacidad y la complejidad de nuestros procesos inconscientes más primitivos de trabajar con miles de datos al mismo tiempo, seleccionando la información relevante, está muy por encima de los procesos de computación conscientes que Venn ligaba al razonamiento simbólico.

Por ello nos parece que son otros diagramas como los de Peirce los que más se aproximan, por decirlo metafóricamente, a la síntesis de razón e imaginación, a la conjunción del hemisferio derecho e izquierdo en el intento de desvelar cuáles son los principios constitutivos del razonamiento.

Sería nuestro deseo conseguir elaborar modelos gráficos de representación capaces de simular cualquier tipo de razonamiento deductivo, algo que solo nos parece al alcance de una hipotética fusión de la creatividad de Peirce con la claridad y el rigor de Venn al mostrar las inferencias más simples del silogismo.

6.7 La máquina demostradora de Stanhope (1753-1816) y las cartas silogísticas

Según Gardner (1958), la primera máquina lógica, en sentido estricto, fue el *demonstrator* de Charles Earl Stanhope, quien explicaba sus principios en un trabajo sin terminar titulado *The Science of Reasoning* fechado en 1800, según afirma Robert Harley en su artículo "The Stanhope Demonstrator", publicado en la revista *Mind*, dando a conocer, por fin, un invento que su autor había tratado de proteger de "imitaciones bastardas" (Harley, 1879).

> Not only could it be used for solving traditional syllogisms by a method closely linked to the Venn circles; it also took care of numerical syllogisms (anticipating De Morgan's analysis of such forms) as well as elementary problems of probability. In addition, it was based on a system of logical notation which clearly foreshadowed Hamilton's technique of reducing syllogisms to statements of identity by making use of negative terms and quantified predicates. (Gardner, 1958, p. 80)

ILUSTRACIÓN 324. *DEMONSTRATOR* DE STANHOPE. TOMADO DE HARLEY, 1879.

Nosotros consideramos a Stanhope un antecedente de nuestras redes y diagramas por varios motivos. Primero porque, como dice Gardner (1958), concebía la lógica de su máquina como una lógica de la probabilidad. Segundo porque trataba las proposiciones negativas cuantificando el predicado como lo hacemos nosotros: «"No A is M" is equivalent to "All A is identic with something that is -not M"» (Harley, 1879, p. 198). Tercero porque obtenía conclusiones de silogismos con dos premisas negativas. Así, partiendo de *Ninguna M es A* y *Ninguna M es B* Stanhope llega a la conclusión *Algunos que no son A no son B*, la cual sabemos que es perfectamente válida asumiendo que M no es una clase vacía.

Es interesante detenerse a reflexionar cómo antes de la lógica matemática, e incluso tras ella, buena parte de los lógicos solo consideren válidas las inferencias que se basan en la conjunción necesaria de las líneas que representan el espacio de *A* y de *B*, pero no la inferencia que se produce por el hecho de que necesariamente se solapen los espacios que se corresponden con $\neg A$ y $\neg B$. Estos espacios nunca son indicados explícitamente en los diagramas lineales y tampoco en los diagramas circulares, aunque será en los segundos donde sea más fácil reconocer el territorio de $\neg A$ y $\neg B$ identificándolos con el exterior de los círculos que representan *A* y *B* respectivamente. Por ello nos parece de gran mérito que Earl Stanhope reconociera la validez de inferencias que parten de dos premisas negativas mucho antes que autores como De Morgan o Venn y más que lo hiciera anticipando la doctrina de la cuantificación del predicado a la que llegaron de forma independiente Bentham y Hamilton.

La máquina de Stanhope, lo mismo que las máquinas que años más tarde construirían el profesor Jevons y Marquand, muestra la eficacia de lo que consideramos una perspectiva asociacionista de la lógica. Desde este enfoque, se trata de establecer la probabilidad que mantienen dos términos X e Y de ser idénticos cuando se consideran todas las alternativas posibles que son generadas de forma combinatoria para componer el universo del discurso. Este paradigma probabilístico del razonamiento, en el que todavía se sitúa al menos en parte la obra de Boole, no dejaba de ser simbólico y matemático, era perfectamente compatible con la doctrina de la cuantificación del predicado que permitía considerar las proposiciones como ecuaciones y fue llevado a cabo desde una perspectiva comprensiva de la lógica, en la que se consideraba el análisis de las relaciones conceptuales o formales que definen la unidad como algo previo a cualquier interpretación extensional de los términos.

Es obvio que la apariencia de los diagramas de Venn favorecía la prevalencia de los conceptos de inclusión e intersección sobre las nociones de asociación y conjunción, aunque nosotros pensamos que su versión de la lógica simbólica reproducía la metafísica de las relaciones de pertenencia entre género y especie, tantas veces representadas en los círculos de Euler. Frente a esto, debemos tener en cuenta que las primeras máquinas lógicas fueron desarrolladas al margen del concepto de inclusión defendido por Venn en sus diagramas como fundamento de toda relación entre proposiciones. Pero a pesar de las críticas de Venn (1881) a las máquinas lógicas, la inferencia en sus propios esquemas solo puede realizarse cuando, después de generar de forma exhaustiva y exclusiva todas las combinaciones posibles de las variables, podamos eliminar las alternativas que impiden establecer que los compartimentos de una clase, digamos X, son necesariamente los mismos que los de otra, pongamos Y.

De la máquina de Stanhope dijo Gardner (1958) que era marcadamente inferior en ciertos aspectos a los círculos de Venn, aunque reconocía que de alguna forma los anticipaba y que debido a su forma rectangular era más eficiente que los círculos de Venn, cuando se usaba para silogismos con términos que tienen cuantificadores numéricamente definidos o cuantificadores indefinidos como más de la mitad o menos de la mitad. Desde nuestro punto de vista, nos parece que Gardner sobrevalora en su histórica e influyente recopilación de diagramas la importancia de los círculos de Venn y minusvalora la contribución de Stanhope y el resto de los que cuantificaron el predicado, al menos si tenemos en cuenta afirmaciones como las de Harley (1879):

> To Stanhope belongs the honour, and it is a very big honour, of being the first (probably) to attempt the solution of logical problems by a mechanical method. There may be some difference of opinion as to how far he succeeded, but there can be none as to the ingenuity of the attempt. The contrivances of earlier logicians, more especially the circles of Euler, probably prepared the way; but Stanhope did undoubtedly take a very important step in advance when he conceived and constructed his Demonstrator. His conversion of all propositions into the form of identities, by means of the quantification on of the predicate, and the principle of his mechanical method, viz., that the process of mind involved in the ordinary syllogism and that involved in the numerically definite syllogism are essentially one and the same, must be regarded as distinct contributions to logical science, and as remarkable anticipations of recent discoveries. (p.208)

Dice Gardner (1958) que el demostrador Stanhope y otras máquinas lógicas operan a lo largo de líneas mecánicas que, de alguna manera, son análogas a la estructura formal de la inferencia silogística, por lo que se puede obtener un dispositivo que produzca la conclusión requerida de cualquier par de premisas con una amplia variedad de aparatos simples. Afirma Gardner que el dispositivo más sencillo para tal fin es un conjunto de cartas con todas las premisas posibles, como el que él mismo presentó en la revista *Scientific american* (Gardner, 1952) y que confiesa Gardner que lo hizo sin saber que Jevons (1884), en el capítulo XI de sus *Estudios sobre lógica deductiva*, ya había descrito las tarjetas de ventana silogísticas inventadas por Sr. Henry Cunynghame, B.A. (1769-1854), basadas igualmente en la eliminación de las conclusiones ilógicas. En el invento de Cunynghame cada carta tiene aberturas o ventanas cortadas de tal manera que, cuando una se coloca encima de otra, la conclusión válida, si la hubiera, es revelada a través de una ellas.

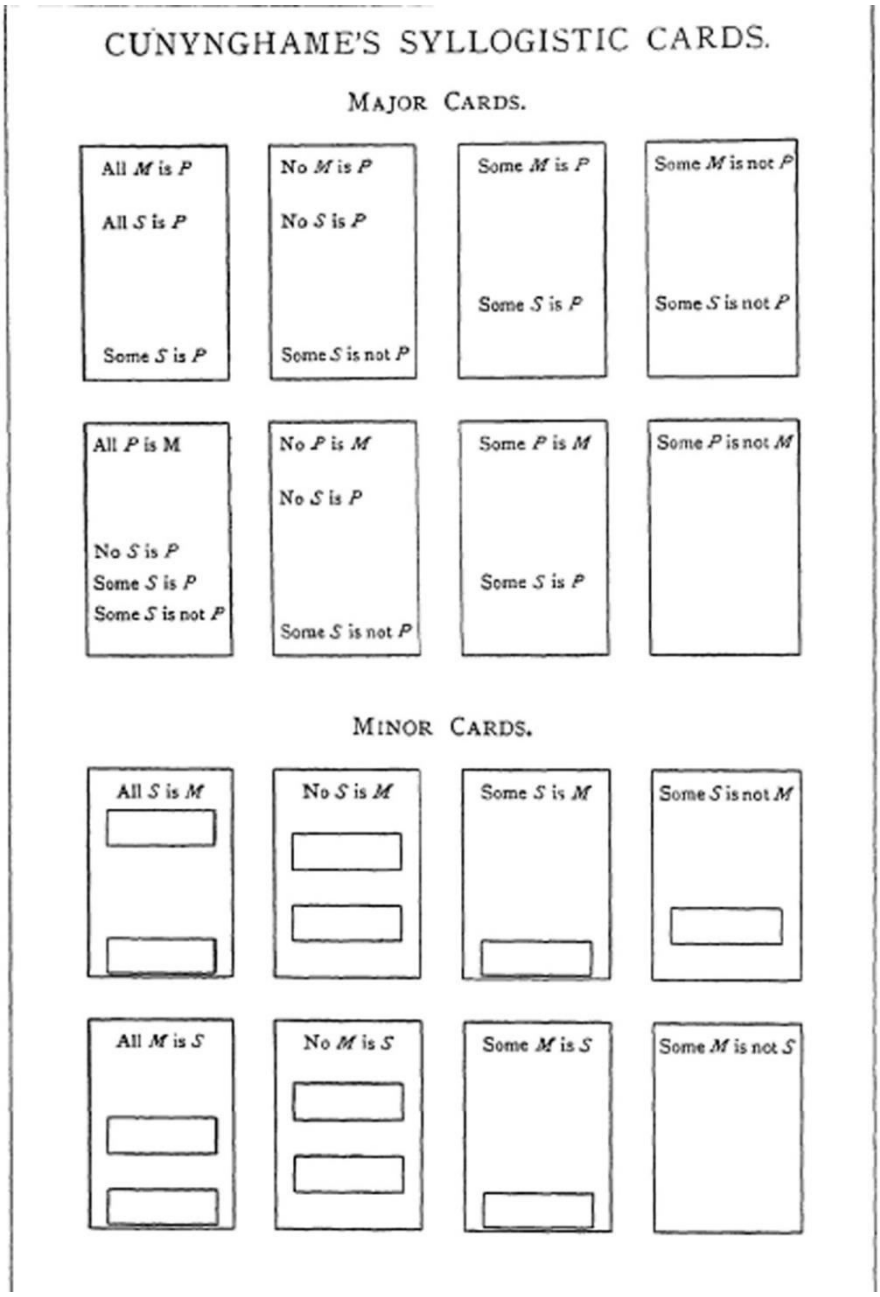


ILUSTRACIÓN 325. CARTAS SILOGÍSTICAS DE HENRY CUNYNGHAME. TOMADO DE JEVONS, 1884, P. 110.

6.8 William Stanley Jevons (1835-1882)

6.8.1 La máquina lógica

> The next great step in the history of logic machines took place in 1869 when William Stanley Jevons, British economist and logician, produced the first working model of his famous logic machine. It was the first such machine with sufficient power to solve a complicated problem faster than the problem could be solved without the machine's aid. (Gardner, 1958, p. 91)

Como señalan Edwards y Stewart (2004), Jevons, que había mantenido correspondencia con Venn, estaba fascinado por las máquinas lógicas, habiéndose construido él mismo un ábaco lógico y luego una máquina lógica que se muestra en la portada de su obra principal (Jevons, 1874), aunque parece que no le dio excesiva importancia a los diagramas lógicos, pues al referirse al artículo de Venn en su carta, incluso omitió la palabra *diagrams* del título. A pesar de que Jevons propuso ciertos cambios bastante radicales en el sistema de Boole (Grattan-Guinness, 1991), nos dicen Edwards y Stewart (2004) que consideraba importante representar visualmente el álgebra de Boole y que estaba convencido de que la forma simple y palpable en la que su máquina lógica presentaba sus resultados ayudaría a que se descubriera su verdadero valor. Pero sería finalmente función de los diagramas de Venn, y no de su máquina lógica, representar visualmente la lógica de Boole.

Señala Gardner (1958) que la fama de Jevons como inventor de una máquina lógica oculta el importante papel que jugó en la historia de la lógica inductiva y deductiva, siendo uno de los pioneros de la lógica simbólica moderna; así, sus *Principios de la Ciencia*, emitidos por primera vez en 1874 (Jevons, 1874), merecen mucho más reconocimiento que el que tiene hoy como un importante tratado sobre la filosofía y los métodos de la ciencia. De hecho, Robertson (1876) consideraba el trabajo de Jevons superior al de Boole en la simplicidad de los procesos lógicos y en la concepción de la relación de la lógica con las matemáticas, siendo su obra el mejor resultado de la rebelión moderna contra el sistema aristotélico que había iniciado la doctrina de la cuantificación del predicado enunciada por George Bentham y popularizada por Hamilton

> Since the doctrine of the Quantification of the Predicate was first enunciated in this country by Mr. George Bentham in 1827, and brought into vogue later by Hamilton, various attempts have been made to set aside the older doctrine of proposition and inference which originated with Aristotle; and of late years no one has laboured so persistently at the double work of demolition and reconstruction as Mr. Jevons (...) It is advanced as embodying all the anti-Aristotelian import of the newer theories (...) The universal principle (of " Substitution") suggested is in these words: " So far as there exists sameness, identity or likeness, what is true of one thing will be true of the other." Here there is evidently implied an expression of logical propositions in the form of equations, and accordingly a general justification is offered for such a mode of expression, while an appropriate system of symbols is indicated. (Robertson, 1876, p. 208)

Nos dice Gardner (1958) que en un momento en que la mayoría de los lógicos británicos ignoraban o condenaban los notables logros de George Boole, Jevons se dio cuenta rápidamente de la importancia de su trabajo y de muchos de sus defectos, calificando la lógica algebraica de Boole como el mayor avance en la historia de la lógica desde Aristóteles. De hecho, afirma Burks y Burks (1989) que Jevons dio el primer paso para su mecanización, aunque este honor lo cedía el propio Jevons a Stanhope.

Como señala Mosselmans (2017), Jevons partía de las combinaciones que se pueden formar con un conjunto dado de términos para eliminar después las contradicciones, llegando a desarrollar, para facilitar el cálculo cuando la cantidad de combinaciones se volvía considerable, un ábaco lógico que funcionaba con simples principios mecánicos, similar a una “pizarra de escuela lógica” que puede ser vista como una de las primeras computadoras. También Mays y Henry (1953) reivindicaban en la revista *Mind* el valor de su trabajo:

> THERE is a need for a revaluation of the logical work of Jevons, especially as he was a pioneer in the mechanisation of logic. His achievements in this direction have been overlooked and remain relatively unknow (...) His views on the use of binary notational coding are also prophetic, and some of his remarks on universal systems of notation bear a strong resemblance to those of workers in the field of Information Theory (...) It is fitting that the first electrical logical machine in this country was built at Manchester and is in the University Department in which Jevons once exhibited his own machine. (p.484)

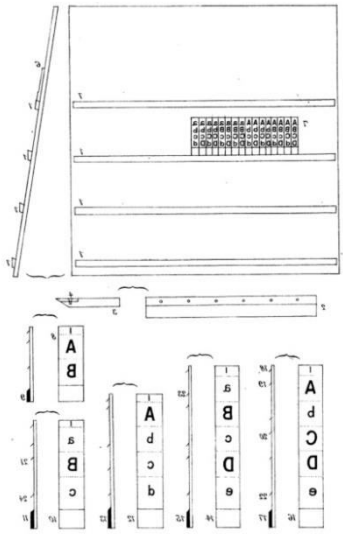


ILUSTRACIÓN 326. ÁBACO LÓGICO TOMADO DE JEVONS, 1869.

Jevons perfeccionó el Ábaco en una máquina lógica que consideraba la encarnación de un verdadero método de cálculo simbólico al que se refería en Jevons (1870) del siguiente modo:

> It is believed that this logical machine may be usefully employed in the logical class-room to exhibit the complete analysis of any argument or logical problem; and it is superior -for this -purpose to a more rudimentary contrivance, the logical abacus, constructed by me for the same purpose and previously described. But by far the chief importance of the machine is in a theoretical point of view as demonstrating, in the simplest and most evident manner, the character and powers of a universal system of logical deduction, of which the first, although obscure solution, was given by Dr. Boole. (p.169)

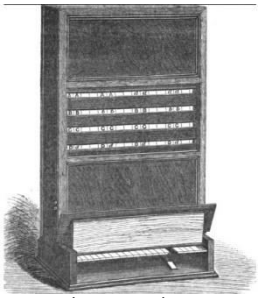


ILUSTRACIÓN 327. MÁQUINA LÓGICA DE JEVONS, 1874.

Mays y Henry (1952) y Buck y Hunka (1999) afirman que los principios de Jevons recibieron su traducción eléctrica en 1885, al menos medio siglo antes de los desarrollos actuales en las máquinas de computación, en el trabajo de Allan Marquand, quien desde 1885 concibió una máquina electromecánica digital que pasaba de la mecánica a los dispositivos electromecánicos, siendo probablemente el primer circuito de una máquina lógica eléctrica.

Nos dicen Mays y Henry (1953) que la máquina de Jevons, debido a la forma en que se construyó, solo podía extenderse con dificultad para cubrir problemas que involucraban más de cuatro términos y que cuando contempló la construcción de una máquina de diez términos descubrió que tendría que sacrificar todo el espacio de un lado de su biblioteca. También explican Mays y Henry (1953) que la máquina de Jevons podía expresar indistintamente relaciones de clases o de proposiciones, pero que su doctrina, que no era aplicable a la lógica de predicados, no logró influir en los lógicos de la escuela Russell-Whitehead, entre otros motivos, porque su método basado en la

eliminación mecánica de todas las alternativas incompatibles con las premisas les parecía bárbaro a los lógicos en su momento, aunque tal crítica carecería hoy de valor teniendo en cuenta lo que significan las tablas de verdad.

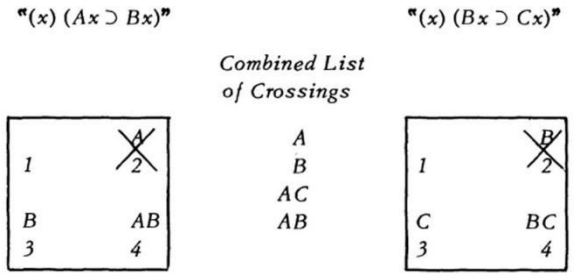


ILUSTRACIÓN 328. DIAGRAMA DE POSIBILIDADES BASADO EN JEVONS. TOMADO DE BRUMM, 1962, P. 220.

6.8.2 Leyes de la lógica de Jevons

Según Mays y Henry (1953), Jevons tuvo una iluminación parecida a la de Descartes cuando descubrió la geometría coordinada y estaba convencido de haber descubierto la lógica del futuro. Así se refería a dicho momento el propio Jevons (1886):

> 28//J March 1866. I cannot forget or omit to record this day last week. I was sleeping as usual for the night at St. Michael's Hamlet. As I awoke in the morning, the sun was shining brightly into my room. There was a consciousness on my mind that I was the discoverer of the true logic of the future. For a few minutes I felt a delight such as one can seldom hope to feel. But it would not last long- I remembered only too soon how unworthy and weak an instrument I was for accomplishing so great a work, and how hardly could I expect to do it. (p.219)

Jevons (1864) consideraba su sistema mejor que el de Boole, porque la notación era más simple y porque el sistema de Boole, aunque maravilloso, no se correspondía con las leyes del pensamiento. Además, como señaló Venn (1881), Jevons pensaba que su notación podía despojarse de la vestimenta matemática que no era esencial a la lógica: "The forms of my system may in fact be reached by divesting his system of a mathematical dress which, to say the least, is not essential to it" (Jevons, 1864, p. 3).

Jevons jugó un importante papel en el desarrollo de la lógica ecuacional (Burris & Legris, 2015), y ello a pesar de que veía la lógica de su tiempo provista de una notación matemática artificial sin la cual podría reducirse a las leyes suficientes y primeras del pensamiento, de las cuales el resto eran meros corolarios (Jevons, 1864). Estas leyes eran definidas en términos de igualdad, haciendo posible aplicar el principio de sustitución[23]:

> Condition or postulate: A= A
>
> Law of Sameness A= B = C; hence A=C
>
> Law of simplicity AA = A; BBB = B
>
> Law of Some parts and holes A=B; hence AC=BC
>
> Law of Unity A+A = A
>
> Law of contradiction Aa = 0
>
> Law of duality A = A(B+b) (C+c)

Para Jevons (1864) la inferencia consiste en eliminar el término que es el mismo en las dos premisas, siendo posible, según Mosselmans (2017), reducir a tres las leyes fundamentales del pensamiento en Jevons: la ley de la identidad, la ley de no contradicción y la ley de la dualidad.

[23] Recordemos que letras minúsculas significan ausencia de la propiedad. Luego $b = \neg B$.

6.8.2.1 Ley de Identidad

Jevons (1864) afirmaba sobre la ley de identidad que: “It is thus the Law of Sameness and not the dictum of Aristotle, which governs reasoning” (p.54) y que: “Whatever is true of a thing is true of its like”(p.15). En la perspectiva de Jevons nos dice Croom Robertson (1876) que es de especial relevancia el principio de sustitución, que permite realizar inferencias a partir de la afirmación de la igualdad de dos proposiciones. Así, aunque las expresiones como A= A son inútiles, son esenciales para la lógica otras como A= B y B=A y si no podemos hacer una inferencia indirecta de *Alguna A es B* y *Alguna B es C* es porque no sabemos si hablamos de la misma clase de B. Por supuesto, de la igualdad de dos términos inferimos la igualdad de sus contrarios, de modo que si $A = b$, entonces $B = a$.

> All acts of reasoning seem to me to be different cases of one uniform process, which may perhaps be best described as the substitution of similars. This phrase clearly expresses that familiar mode in which we continually argue by analogy from like to like, and take one thing as a representative of another. The chief difficulty consists in showing that all the forms of the old logic, as well as the fundamental rules of mathematical reasoning, may be explained upon the same principle; and it is to this difficult task I have devoted the most attention. (Jevons, 1869, p. v)

Del mismo modo que para Robertson (1876), para Mays y Henry (1953) no es fácil descubrir qué entendía Jevons por la identidad de significado sobre la que descansa la lógica ecuacional y aunque les parece que se refería a una identidad de cualidades connotadas por dos términos, creen estos autores que simplemente estaba interesado en los términos como representación de clases de cosas o símbolos para el mismo grupo de objetos, de modo que el signo de equivalencia se refiere a tal identidad.

Desde nuestro punto de vista, Jevons comprende la identidad de un modo muy similar, si no el mismo, en el que se pueden interpretar los compartimentos de nuestros diagramas como objetos teóricos definidos por combinaciones de cualidades únicas y distintas a las que pueden ajustarse posteriormente estímulos externos o internos que a su vez podemos distinguir como cosas distintas. Recordemos que para Jevons (1864): “The meaning of an abstract unit is something only known as logically distinct from or contrary to other things. The meaning of a concrete unit is the abstract unit with certain qualities known or defined” (p.80), y que: “what logic imposes upon numbers that each two units shall be contrary logical alternatives” (p.82). Afirma también Jevons que a la identidad de las cualidades acompaña la diversidad que puede provenir de que las cosas ocupen un lugar distinto en el espacio (p.79) o de que vengan antes o después en el tiempo (p.83).

> He gives an example of this. "There are millions of cells in a human body, but if each cell of one person were'represented by an exactly similar cell similarly placed in another body, the two persons would be undistinguishable, and would be only numerically different " (PS., p. 19). Obviously this is another statement of Leibniz’s identity of indiscernibles and the thesis of extensionality. (Mays & Henry, 1953, p. 486)

Mucho antes de que nosotros hayamos insistido en la combinatoria y la identidad de los términos asociados como principio fundamental de nuestros diagramas lógicos, Jevons, desde la doctrina de la cuantificación del predicado, también tomaba la identidad como relación fundamental, rechazando la inclusión de clases como relación lógica fundamental.

> Jevons' reason for taking identity as a fundamental relation rather than class inclusion stems from his account of classes in terms of individual. Class inclusion he believes can be defined in terms of the correlation of one group of individuals with part of another group. Thus when we state mammals are vertebrates, mammals can only be included in vertebrates if they are identical with part of the class of vertebrates, or expressing it symbolically A = AB, the predicate denoting exactly the same individuals as the subject A (mammals), i.e. the individuals which are vertebrates and mammals. Jevons refuses to base his logic on class-inclusion since for him classes only exist as groups of individuals, and class inclusion is just another instance of identity: an identity between the whole of one group of individuals and part of another. (Mays & Henry, 1953, p. 486)

6.8.2.2 Ley de no contradicción

Como ya hemos dicho, *AB* y *Ab* son contrarios y es imposible que sean combinados. Además, un término que difiere de otro en significado difiere de todo término igual al otro. Así, para Jevons (1864) *Si A es b y C es B*, entonces es imposible la combinación *AbCB*, que debe ser eliminada del conjunto de las posibilidades o alternativas admitidas. Y es así por la segunda ley del pensamiento: "the Law of Contradiction, states that a thing cannot same time and place combine contradictory or opposite atributes" (Jevons, 1870, p. 501)**.** Lo contrario de *BC* es *Bc* + *bC* + *bc*, que son combinaciones que expresan la ausencia de B o de C, lo mismo que el contrario de A + B + C es abc. "Bb = 0 (…) (AB + Ab)B = AB + ABb = AB + 0 = AB" (Jevons, 1864, p. 34).

Además de definir las combinaciones imposibles conforme al sentido común al que apelamos nosotros, Jevons (1864) afirma que: "Any term not known to be contradictory must be taken as not contradictory" (p.33), estableciendo una forma de proceder que se corresponde con el principio que rige la interpretación de nuestros diagramas, cuando establecemos que, aunque se encuentran en regiones distintas de un modelo, dos variables son potencialmente combinables siempre que su exclusión no sea explícita. También afirmaba Jevons (1864) que es innecesario considerar las proposiciones negativas porque sus inferencias pueden obtenerse utilizando proposiciones afirmativas, que es lo que hacemos nosotros al formalizar *Ningún A es B* como *Toda A es ¬B*, facilitando la generación de conclusiones a partir de dos premisas negativas.

6.8.2.3 Ley de dualidad

Mays y Henry (1953) y Brumm (1962) identifican la ley de la dualidad de Jevons con la ley del medio excluido. Sin embargo, Jevons (1864) consideraba distinta su ley de la dualidad a la de Boole. Siguiendo la definición que da de ella el propio Jevons: "A = A(B + b) = AB + Ab" (p.36) y la expresión simplificada que aparece en Mosselmans (2017) como "*b=Ab·|·ab"*, podemos decir que dicha ley sirve de base a la división y subdivisión de todo modelo proposicional en tantas regiones como grados de ser hayan sido establecidos. Así, en un sistema dicotómico, el modelo de *a* = *ab* + *a*¬*b* y a su vez, *ab* = *abc*+*ab*¬*c*, etc.

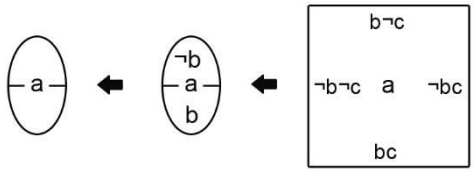


ILUSTRACIÓN 329. LEY DE LA DUALIDAD DE JEVONS EN EL DIAGRAMA DE MARLO.

Podemos apreciar en el diagrama de Marlo que la ley de dualidad de Jevons establece un patrón que permite comprimir y descomprimir los modelos, mientras que la ley del tercero excluido, que no es concebible al margen de la ley de la dualidad, tiene más que ver con la eliminación y la simplificación. Así, Jevons (1864) afirma que *si A no es igual a B, entonces A es igual a A*¬*B o B es igual a B*¬*A*: "A not = B (...) A = Ab or B = Ba" (p.39).

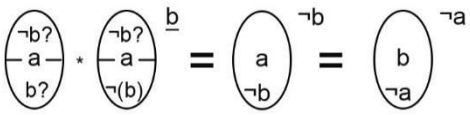


ILUSTRACIÓN 330. TERCERO EXCLUIDO: SI A NO ES B, ENTONCES A ES ¬B Y B ES ¬A.

En la lógica del conjunto de nuestras redes de expectativas no podemos admitir que si *A* es cierto, entonces ¬*A* es falso, aunque sí admitimos en un sistema dicotómico que *Si hay algo y no es A, entonces es* ¬*A.* En todo caso, aplicamos en nuestras redes la ley de dualidad de Jevons cuando obtenemos el valor de verdad de un nodo *Or*, digamos *A*, sumando las probabilidades *AB* + *A*¬*B*.

Jevons (1864) era consciente de que su ley de la dualidad podía suponer aparentes inconsistencias y pone como ejemplo el caso en el que *A* significa virtud y *B* negro. Entonces parece absurda la combinación *AB* y parece absurda la combinación *Ab* en la medida en que *b* = *no negro* se entienda como un color. Sin embargo, *b* puede

descomponerse desde su combinación con *C*, siendo *C* coloreado, en *bC* y *bc*. De este modo *bc* significa *ni negro ni coloreado,* una combinación incompatible con la premisa tácita "negro es un color" (p.37). Es interesante advertir que al exponer por primera vez nuestro diagrama en 2014 en el XVII Encuentro Internacional de Didáctica de la Lógica celebrado en Morelia, nos pidieron un ejemplo de algo que no fuera ni *A* ni ¬*A*. Entonces respondimos que algo que no conocemos no es ni lo uno ni lo otro, dejando a buena parte de la audiencia insatisfecha. Hoy habríamos respondido que, a no ser metafóricamente, el azul no es ni dulce ni no dulce, porque carece de sabor, lo cual lo distingue, como diría Jevons, de todo aquello que tiene sabor y en consecuencia, de todo aquello que sabe a no dulce.

6.8.3 Fundamentos de nuestros diagramas en Jevons

La lógica de Jevons, que él consideraba una "Logic of the common Thought" (Jevons, 1864, p. 53), y a pesar de que su método se limitaba a las proposiciones universales (Brumm, 1962), anticipa muchos de los aspectos esenciales de nuestros diagramas y redes de expectativas: Es heredera de la doctrina de la cuantificación del predicado, la inducción descansa en la teoría de la probabilidad (Croom Robertson, 1876) y está esencialmente basada en una perspectiva combinatoria de la lógica (Mays & Henry, 1953), que trabaja con los términos intensionalmente como cualidades (Jevons, 1864).

6.8.3.1 Cuantificación del predicado

En primer lugar Jevons afirma que el predicado de las proposiciones contiene indicaciones acerca de qué proporción del predicado está involucrada en el juicio, exactamente del mismo modo en que nosotros tratamos de señalarlo en nuestros diagramas

> A proposition, or judgment ex pressed in words, consists of a predicate or attribute united by a copula to a subject. In this proposition, All metals are elements, the predicate element is asserted of the subject metal, and the force of the assertion consists, as usually considered, in making the class of metals a part of the class of elements. The verb, or copula, are, denotes inclusion of the metals among the elements. But the subject only is quantified; for it is stated that all metals are elements, but it is not stated what proportion of the elements may be metals. Now the quantification of the predicate consists in giving some indication of the quantity or portion of the predicate really involved in the judgment. All metals are some elements is the same proposition thus quantified, and, though the change seems trifling, the consequences are momentous. (Jevons, 1869, p. 7)

A	.	*Every A is B*	**A=UB**	or	**A=AB**
E	.	*No A is B*	**A=U*b***	or	**A=A*b***
I	.	*Some A is B*	**UA=UB**	or	**CA=DB**
O	.	*Some A is not B*	**UA=U*b***	or	**CA=D*b*.**

ILUSTRACIÓN 331. PROPOSICIONES CLÁSICAS SEGÚN JEVONS, 1864, P. 57.

De este modo, la universal afirmativa *Toda A es B* debería ser escrita como *A=AB*, expresando la identidad que se da entre una parte de B y la totalidad de A (Mosselmans, 2017).

6.8.3.2 Perspectiva combinatoria de la lógica

Jevons pensaba que la naturaleza tiene carácter combinatorio y que la teoría de las combinaciones se encuentra en la base de la ciencia empírica y las matemáticas. Así, afirman Mays y Henry (1953): "There is an isomorphism between the assumed combinatorial character of the universe and the Logical Alphabet" (p.490), una idea que suscribimos plenamente.

> Nature is to us like an infinite ballot-box, the contents of which are continually drawn, ball after ball and exhibited to us. Science is but the careful observation of the succession in which balls of various characters present themselves. Science is but the careful observation of the succession in which balls of various character present themselves; we register the combinations, notice those which seems to be excluded from occurrence, and from the proportional frequency of those which appear we infer the probable character of the future drawings. (Jevons, 1874, p. 150)

Por ello, para Jevons (1870) todo el procedimiento de la investigación inductiva está ya prefigurado en la visión combinatoria de la lógica, una idea que está en la base de nuestras redes de expectativas bayesianas:

> I have found that the more elaborate and interesting processes of quantitative induction have their necessary foundation in the simpler science of Formal Logic. The earlier, and probably by far the least attractive part of this work, consists, therefore, in a statement of the so-called Fundamental Laws of Thought, and of the all-important Principle of Substitution, of which, as I think, all reasoning is a development. The whole procedure of inductive inquiry, in its most complex cases, is foreshadowed in the combinational view of Logic, which arises directly from these fundamental principles. (Jevons, 1874, p. vi)

La combinación de los términos o variables lógicas nos permite construir el alfabeto lógico (Brumm, 1962) que parece relacionar Jevons (1864) en alguna ocasión con la esfera de un argumento o universo del pensamiento y que claramente se corresponde con el universo del discurso en De Morgan, Boole o Venn. Por ejemplo, combinando *P* y *Q* podemos tener *PQ*, *Pq*, *pQ* y *pq,* sin importar el orden en el que combinemos los términos. Así, igual que en nuestros diagramas, la conjunción de dos variables no es más que el producto de las relaciones combinatorias entre dos términos que no pueden ser contrarios. “The word "combination" is used by Jevons to refer to the analogue of the " and " operation of the propositional calculus” (Mays & Henry, 1953, p. 487).

Jevons (1874) define las proposiciones como la implicación material $p \supset q$ por las combinaciones que descartan, en este caso *Pq*. Al enunciar distintas proposiciones el problema será obtener las combinaciones del alfabeto lógico que siguen siendo consistentes con las premisas, debiendo eliminar todas las combinaciones contradictorias.

> The term thus combined with each side cannot be eliminated intrinsically (...) and remains a condition of the rejection of the other alternative. It is by this rejection of alternatives that the extend of width of the meaning of a term is reduced, as its inted to known meaning is increased by combination. (Jevons, 1864, p. 35)

En lo que Jevons (1870) considera un proceso de desarrollo y eliminación, tenemos en primer lugar que todo término puede ser combinado con otro y su contrario, de modo que siempre es posible combinar con *A* y ¬*A*, *B* y ¬*B*, con *C* y ¬*C*, *D* y ¬*D.* Por ello Jevons consideraba la lógica como la ciencia que trata sobre cuando las alternativas, por ejemplo las de *AB* y *CD*, son o no diferentes. Jevons (1864) afirma: “In short, when alternatives are contraries of each other, subtraction of one is exactly equivalent to combination with the rest”(p.80) y “Having thus establish our liberty to subtract same terms, provided all alternatives are contraries, we have the corresponding liberty to add by the inverse process”(p.82). Así, si una de las alternativas que hemos mencionado es eliminada, por ejemplo *CB*, podemos afirmar la otra como segura, es decir *CD*¬*B*¬*A*.

6.8.3.3 Aproximación intensional de la lógica

Jevons (1864) mantenía que Boole había desarrollado su sistema gracias a la cuantificación del predicado y que ahora era necesario dar el paso de distinguir en los términos lógicos la cualidad, habitualmente ignorada, de la cantidad. Así, era mejor para él afirmar en términos de cualidad que *man is some kind of mortal*, y en términos de cantidad *man are some mortals*. Al buscar las relaciones lógicas entre los conceptos considerados como cualidades combinables y no entre los objetos numerables definidos por tales cualidades, Jevons anticipa nuestra forma de entender las representaciones, que siempre interpretamos como expresión de las relaciones entre tipos de cosas, y no entre cosas. Además, y de acuerdo con su punto de vista, como a la lógica no le concierne la verdad de las premisas, podemos afirmar partiendo de *Todas las ballenas son mamíferos* y *Todos los cachalotes son ballenas*, que todos los tipos de cachalotes son tipos de mamíferos, al margen de que empíricamente podamos percibir o no cachalotes actualmente. Incluso podemos añadir sin problemas en los diagramas y las redes la denotación existencial afirmada por la fuente, porque no representamos lo que es, sino lo que se dice que es, siendo una cuestión ajena a la lógica formal la correspondencia entre una cosa y otra. Recordemos que, para nosotros, a la lógica atañe el modo en el que el principio de razón suficiente legitima la transmisión de la verdad material de una primera variable a una segunda variable, pero no el modo en el que la primera variable asume dicha verdad material, por ser esta una cuestión, como diría Kant, propia de la sensibilidad y no del entendimiento. En todo caso, y como venimos afirmando a lo largo de esta tesis, asumimos igual que Jevons que, incluso cuando se refiere a individuos particulares, la lógica siempre es intensional, y que si no podemos inferir de las proposiciones *Juan es médico* y *González es pediatra* si Juan es pediatra o no lo es, esto se debe únicamente a que no sabemos si estamos hablando de la misma clase de médico y de pediatra. E incluso nos atrevemos a decir, como posiblemente lo haría Jevons, que afirmar que el término *filósofo* pertenece a una clase lógicamente distinta a la que pertenece el término *Aristóteles* es una muestra de un psicologismo propio del realismo ingenuo. Para nosotros, un término singular es definido por la última diferencia relevante en el sistema, dependiendo de los intereses en juego qué deba ser determinado como nodo *Objeto* en el centro de nuestra atención. Comparamos clases de individuos y no

individuos, pues no podemos conocer materia sin forma, intuición sin concepto o estímulo al margen de un juicio acerca de lo que es o no es.

6.9 Allan Marquand (1853–1924)

Marquand pretendía construir diagramas lógicos que pudieran extenderse indefinidamente a cualquier número de términos, sin perder rápidamente la función de proporcionar ayuda visual en la solución de problemas (Marquand, 1881).

> The first published suggestion for a rectangular graph of this sort was an article titled "A Logical Diagram for n Terms," by Allan Marquand, then a fellow at Johns Hopkins University. It appeared in the Philosophical Magazine, Vol. 12, October, 1881, p. 266. As we shall see in Chapter 6, Marquand also made use of this graph in the construction of his logic machine. Figure 33. (Gardner, 1958, p. 43)

Como vemos en Moktefi y Edwards (2011), los diagramas de Allan Marquand, cuyos principios guiaron también a Macfarlane, son diagramas tipo Venn en los que se representan todas las combinaciones posibles de clase, aunque se construyen de un modo diferente, representando el universo en un cuadrado, lo cual hace más fácil ampliar el número de términos representados:

> This method allows all the a part to be contiguous; but the b part is broken up into two portions, the c part into four portions, the d part into eight portions. However the regularity of the spectrum enables us easily to find all the portions belonging to any one mark. (Macfarlane, 1885, p. 287)

A partir de diagramas en los que las relaciones cuantitativas entre los términos no importaban y se consideran iguales por conveniencia (Marquand, 1881), Allan Marquand conseguiría construir una máquina lógica algo similar a la de Jevons, aunque más simple, introduciendo las premisas en forma negativa, por ejemplo eliminando todas las combinaciones que contienen *A b* para expresar *Si A entonces B* (Gardner, 1958). De este modo, mientras que para una máquina de diez términos Jevons requeriría 10,240 letras para sus combinaciones y un teclado con 44 teclas, una máquina del tipo Marquand para diez términos solo necesitaba 124 letras y 22 teclas (Mays & Henry, 1953).

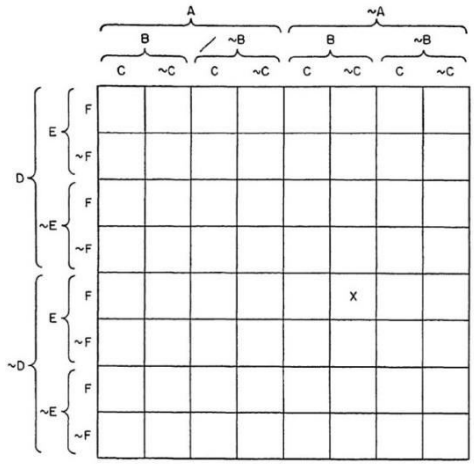


ILUSTRACIÓN 332. DIAGRAMA RECTANGULAR DE ALLAN MARQUAND. EN GARDNER, 1958, P. 44.

A continuación resolvemos en el diagrama de Marlo un problema de Marquand tomado de Gardner con la intención de mostrar que la solución en nuestros modelos se observa de forma clara y precisa.

> Cuatro cazadores A, B, C y D, ocuparon un campamento de diferentes maneras durante siete días. (1) En los días en lo que A cazó, B no lo hizo. (2) En los días en los que B cazaba, D también cazaba, pero no C. (3) En los días en los que D cazaba, A o B cazaban. ¿Cómo se disponían durante la semana? ¿En cuántos días cazó D y con quién?

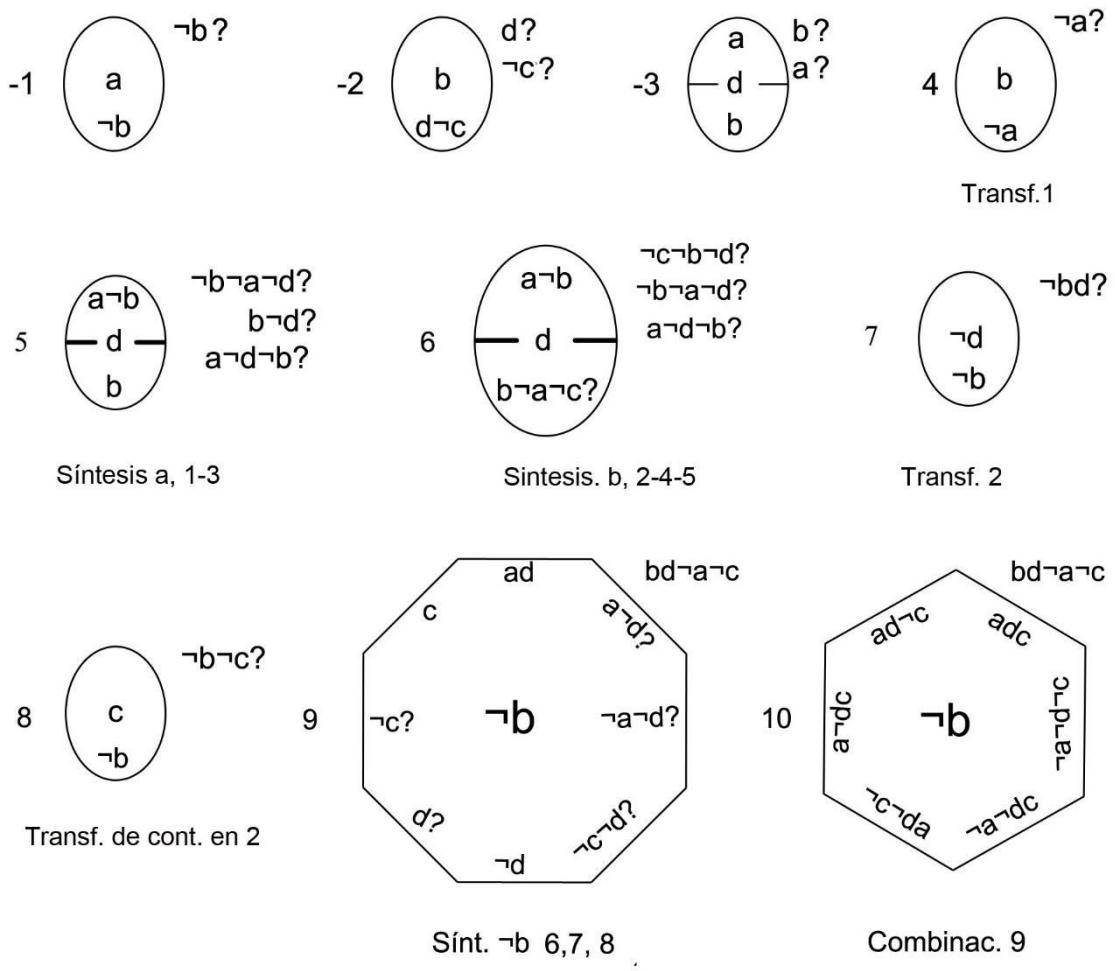


ILUSTRACIÓN 333. PROBLEMA DE MARQUAND RESUELTO EN DIAGRAMA DE MARLO. BASADO EN GARDNER, 1958, P. 113.

En el paso 10 vemos que el cazador D salió tres días: Uno con B, otro con A y otro con A y C. En este paso todas las combinaciones están confirmadas, pues cada una de ellas tiene necesariamente que corresponder a una de las siete formas distintas de ocupar el campamento a las que se refiere el enunciado.

Podemos ver otro problema planteado por Gardner (1958): Cada vez que Anna o Bertha (o ambas) se quedaban en casa, Cora estaba en casa; y (2) Cuando Bertha estaba fuera, Anna estaba fuera; y (3) Cuando Cora estaba en casa, Anna estaba en casa. ¿Qué información se transmite aquí con respecto a Dora? Una vez resuelto el problema en el diagrama de Marlo lo que sabemos de la cuarta chica llamada Dora es que o bien estará con las otras tres o bien no estará con ninguna. La ilustración muestra la misma solución en la máquina de Marquand, aunque de forma menos intuitiva que en los diagramas de Marlo, aunque, obviamente, el fin de la máquina no era mostrar, sino generar de forma mecánica las conclusiones.

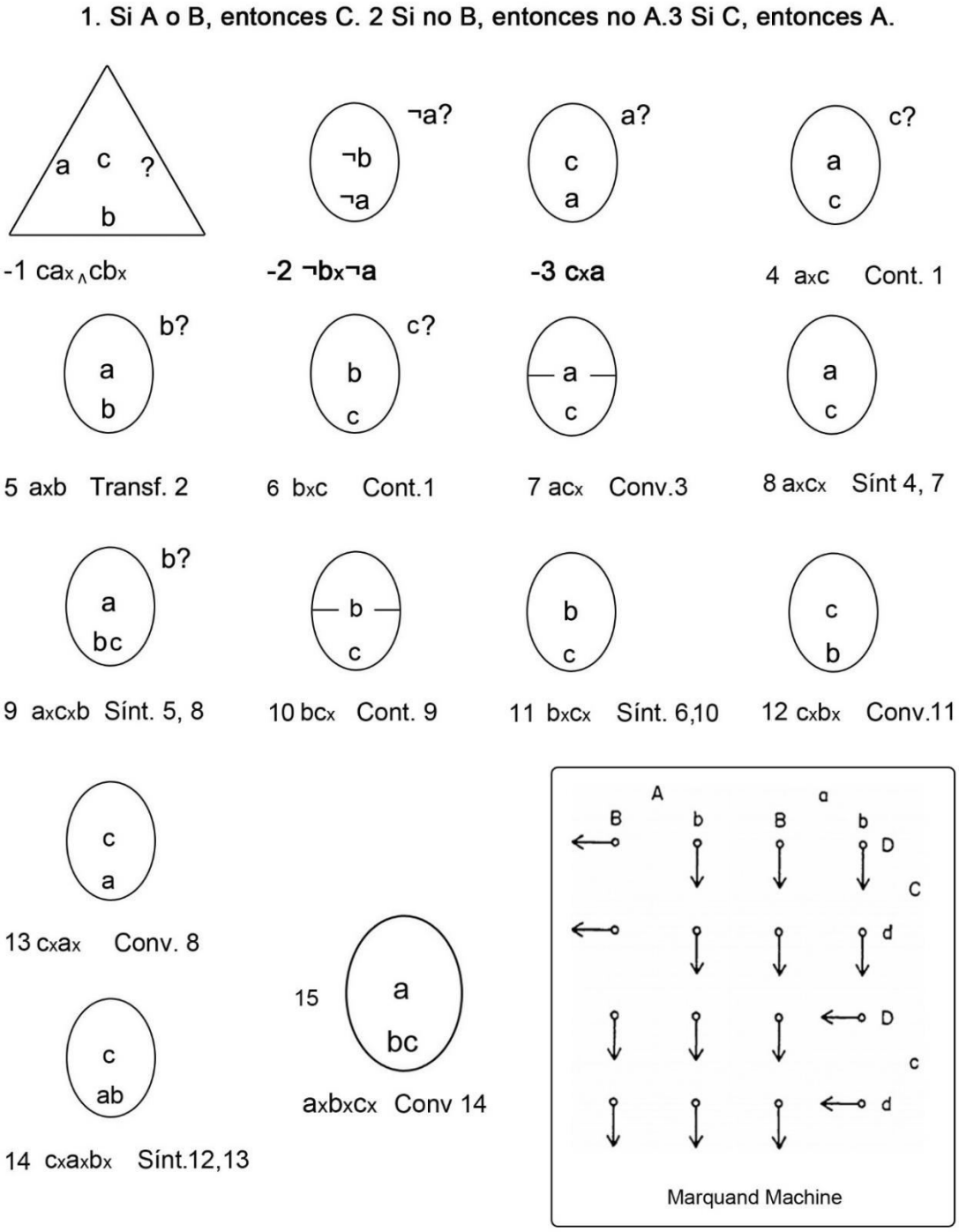


ILUSTRACIÓN 334.COMPARATIVA MARQUAND-MARLO. PROBLEMA BASADO EN GARDNER, 1958, P. 110.

6.10 Lewis Carroll: Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898)

Nos dice Gardner (1958) que Charles L. Dodgson, más conocido por el seudónimo de Lewis Carroll, inventó otro diagrama interesante de tipo Marquand, usando contadores de colores para indicar la presencia o ausencia de miembros de la clase (Carroll, 1886). Este dispositivo podía ser aplicado a un número ilimitado de términos en teoría, aunque se empleó en la práctica para solo diez clases según Abeles (2007). Las diferencias entre estos diagramas y los de Venn las explica el propio Charles Dodgson en su *Symbolic Logic*:

> My Method of Diagrams resembles Mr. Venn's, in having separate Compartments assigned to the various Classes, and in marking these Compartments as occupied or as empty; but it differs from his Method, in assigning a closed area to the Universe of Discourse, so that the Class which, under Mr. Venn's liberal sway, has been ranging at will through Infinite Space, is suddenly dismayed to find itself "cabin'd, cribb'd, confined," in a limited Cell like any other Class. Also I use rectilinear, instead of curvilinear, Figures; and I mark an occupied Cell with a 'I' (meaning that there is at least one Thing in it), and an empty Cell with a 'O' (meaning that there is no Thing in it). (Carroll, 1897, p. 176).

Carroll (1897) lamenta que en los diagramas de intersección que emplea Venn no se muestre la clase ¬A¬B como un área cerrada, así como su dificultad para extenderse más allá de seis términos. Por su parte, él sí representa cada clase en una celda y muestra su diagrama para ocho términos con 256 casillas.

Aunque Anthony Edwards (2004) afirma que ya se encuentra en el diagrama de Carroll la clave para la representación canónica de un número arbitrario de conjuntos, afirma Abeles (2007) que dicho método es demasiado general y que fue Anthony J. Macula (1995) quien mostró realmente cómo construir diagramas de Carroll para cualquier número de conjuntos mediante un proceso iterativo lineal que llamó '*Lew k-grams*'.

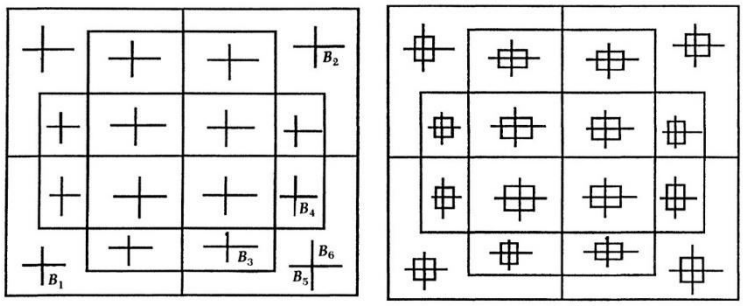


FIGURE 6
Lew 6-gram

FIGURE 7
Lew 7-gram

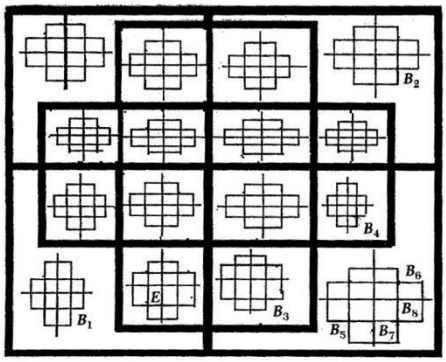


FIGURE 8
Lew 8-gram

ILUSTRACIÓN 335. *LEW K-GRAMS*. TOMADO DE MACULA, 1995.

Nos dicen Moktefi y Shin (2012) que aunque no está claro si Carroll tomó como punto de partida el trabajo de Venn, su diagrama parece un método maduro, con varias mejoras introducidas por sus predecesores y contemporáneos, como por ejemplo, la limitación del universo, la división simétrica o una representación eficiente de las declaraciones existenciales. Y dice Abeles (2007) que para una gran cantidad de conjuntos los diagramas de Carroll son más fáciles de dibujar debido a su auto-similitud y construcción algorítmica, haciendo más fácil localizar y borrar celdas que corresponden a clases destruidas por las premisas de un argumento, sobre todo cuando

se trabaja con más de cuatro conjuntos. Abeles (2007) también insiste en que los diagramas de Carroll pueden representar fácilmente proposiciones existenciales, por lo que se ven con mayor claridad que en el sistema de Venn los problemas más complejos.

Por nuestra parte, nos interesan varios aspectos de Carroll que anticipan nuestra forma de entender las representaciones lógicas, a pesar de que su perspectiva sobre la proposición es ajena a la doctrina de la cuantificación del predicado.

> Lastly, if you would like to have a definition of the world 'proposition' itself, you may take this:--" a sentence stating that some, or none, or all, of the Things belonging to a certain class, called its 'Subject', are also Things belonging to a certain other class, called its 'Predicate'". (Carroll, 1886, p. 3)

Como veremos, él también parte de una lógica del conjunto en la que son posibles al mismo tiempo *x* y ¬*x*, en su notación *x* y *x*'. También otorga carga existencial a la universal negativa E y emplea términos negativos como sujetos de las proposiciones sin ningún problema. Por ello no tiene inconveniente en concluir a partir de dos premisas negativas que pueden, incluso, tener sujetos negativos (Carroll, 1886). También señaló antes que nosotros, aunque después que Boole, que existen diferencias en los términos medios del silogismo según tenga la misma o distinta cualidad en las premisas. Así, en el silogismo compuesto por las proposiciones *Ninguna M es ¬X* y *Toda ¬M es Y,* no hay que referirse al término medio M, sino a los *términos medios* o atributos contradictorios M y ¬M (Carroll, 1886).

Al margen del indudable valor didáctico en el campo de la lógica y las matemáticas de la obra de Carroll (Delgado Pineda & Medina Albós, 2018; Goñi & Corbalán, 2011; Villar, 1998), consideramos que en sus diagramas persiste el mismo problema que está presente en Marquand o Venn, y que para nosotros consiste en que las combinaciones de términos están encerradas rígidamente en celdas que, sean relevantes o no, deben mostrarse en las conclusiones. Así se hace imposible simplificar las figuras y se complica la recreación de aspectos más dinámicos del razonamiento como la simplificación, la conversión o la transformación de proposiciones.

Antes de analizar los diagramas más conocidos de Charles Lutwidge Dogson, nos gustaría señalar que Moretti (2014) muestra que en los manuscritos póstumos de Carroll hay dos misteriosos diagramas que incluyen redes en dos dimensiones y una forma lógica en 3D empleada con posterioridad para estudiar la geometría de las relaciones de oposición por lógicos, matemáticos y lingüistas interesados en las generalizaciones matemáticas del Cuadrado Lógico, por lo que podría considerarse a Carroll un precursor de la geometría de oposición. Supera los objetivos de esta tesis el análisis de tales diagramas, de cuya existencia, no obstante, creemos interesante dejar constancia.

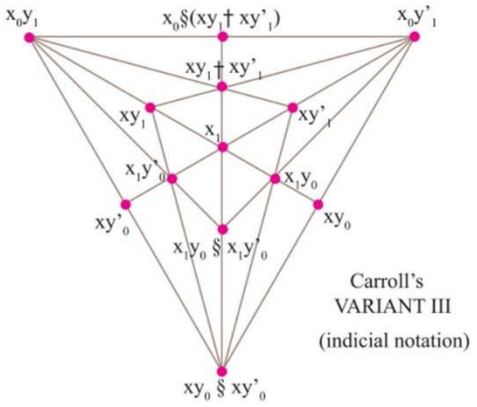


ILUSTRACIÓN 336. DIAGRAMAS 3D CARROLL. TOMADO DE MORETTI, 2014, P. 642.

6.10.1 Proposiciones existenciales en Carroll

Encontramos en Carroll (1897) que este autor distingue, como nosotros, entre proposiciones de existencia y proposiciones de relación, afirmando que las reglas sobre la denotación existencial en las proposiciones de relación son arbitrarias. Carroll señala la existencia de una combinación de variables o *Entity* con el subíndice 1, por ejemplo ab_1 y señala la no existencia o *Nullity* con el subíndice 0, como por ejemplo cd_0, anticipando algunas reglas elementales de las redes, como la propagación de la falsedad, ya que si es cierto x_0, es cierto xy_0 (p.70). En todo caso y como ya señalara Venn en *Symbolic Logic*, un sistema gráfico de representación debe permitir formalizar los términos de las premisas con y sin denotación existencial. Lewis Carroll (1897) adopta la convención de que la universal afirmativa A denote existencialmente y contenga a la particular afirmativa. Así: «"All bankers are rich men" evidently contains the smaller Proposition "Some bankers are rich men"» (p.17).

Sobre la universal negativa E, la convención que propone en 1897, inicialmente solo para aplicar en la Parte I de su *Lógica simbólica*, es que las proposiciones como "No lambs are accustomed to smoke cigars" se interpreten de forma que lo afirmado sea que "no existen cosas que sean corderos y estén acostumbrados a fumar cigarros" (p.21). También en Carroll (1886) expresó la universal negativa *Ninguna X es Y* sin denotación existencial, a diferencia de *Toda X es ¬Y* a la que sí se la dio (p.64). Sin embargo, del mismo modo que nosotros trabajamos con términos negativos y obtenemos conclusiones de dos premisas negativas, Carroll representa en sus diagramas proposiciones con sujeto negativo como *"Some not-gamblers are not-philosophers"* (Carroll, 1897, p. 183) y como señala Gardner (1958) silogismos del tipo *All M are X, No Y is not-M*, del que se sigue que *Alguna X es ¬Y.*

Carroll (1897) mantiene que se debe discutir la regla que afirma que de dos premisas negativas no se sigue nada, porque es posible interpretar la universal negativa con denotación existencia: Hence the Proposition "No x are y" means "Some x exist, and none of them are y": i.e. "all of them are not-y," which is a Proposition in A (p.167). Y también afirma que: «If possible, let E "assert". Then (taking x, y, and z to represent Attributes) we see that, if the Proposition "No xy are z" be true, some things exist with the Attributes x and y: i.e. "Some x are y"» (p.166).

Abeles (2007) también hace hincapié en que Carroll (1897) construyó silogismos con la estructura I y E → I y con la estructura E y E → E, que él consideraba válidos, como por ejemplo: *Ninguna x es m; Ninguna ¬y es ¬m,* luego *Ninguna x es ¬y.*. También afirma Abeles (2007) que la idea de Carroll de la construcción silogística era diferente de la noción clásica, de la medieval y de la de contemporáneos suyos como George Boole, De Morgan, W. Stanley Jevons, John Neville Keynes y John Venn, entre otros motivos porque consideraba que los silogismos tenían reglas demasiado especializadas, conclusiones incompletas y muchas formas legítimas ignoradas. Una postura que nosotros suscribimos plenamente, como podrá deducirse de las siguientes ilustraciones en las que comparamos los diagramas de Carroll con los diagramas de Marlo en la representación de distintas proposiciones con y sin carga existencial.

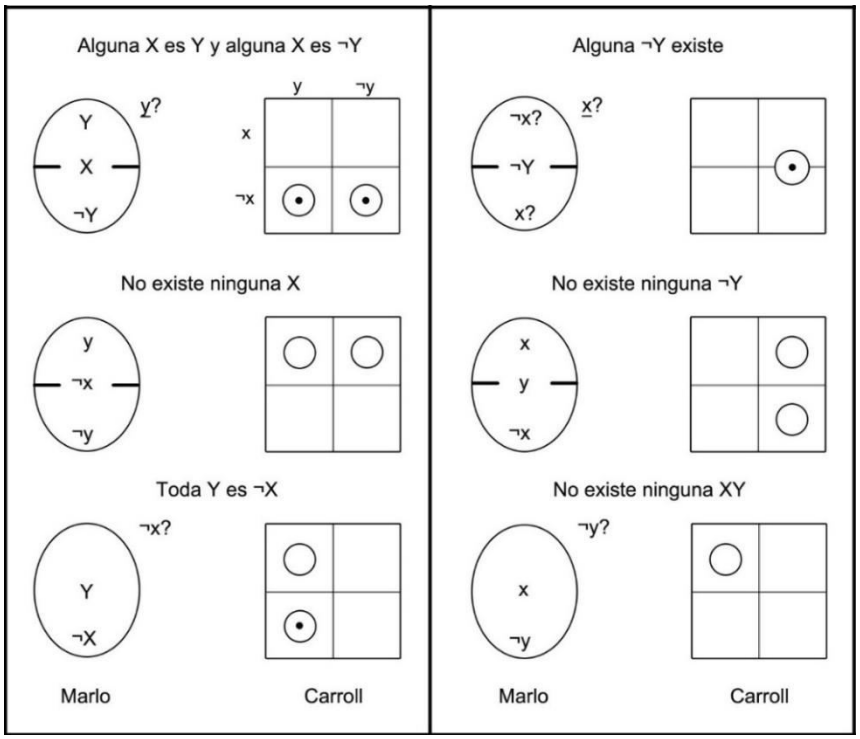


ILUSTRACIÓN 337. COMPARACIÓN DIAGRAMAS DE MARLO Y CARROLL EN PROPOSICIONES CON Y SIN DENOTACIÓN DE EXISTENCIA. BASADO EN CARROLL, 1897.

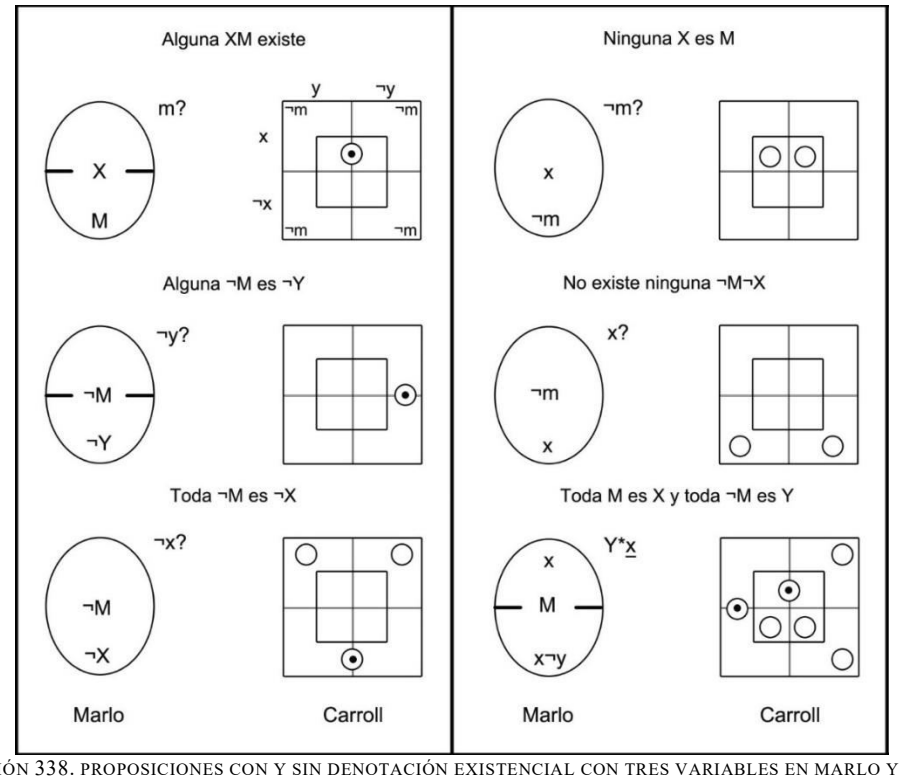


ILUSTRACIÓN 338. PROPOSICIONES CON Y SIN DENOTACIÓN EXISTENCIAL CON TRES VARIABLES EN MARLO Y CARROLL.

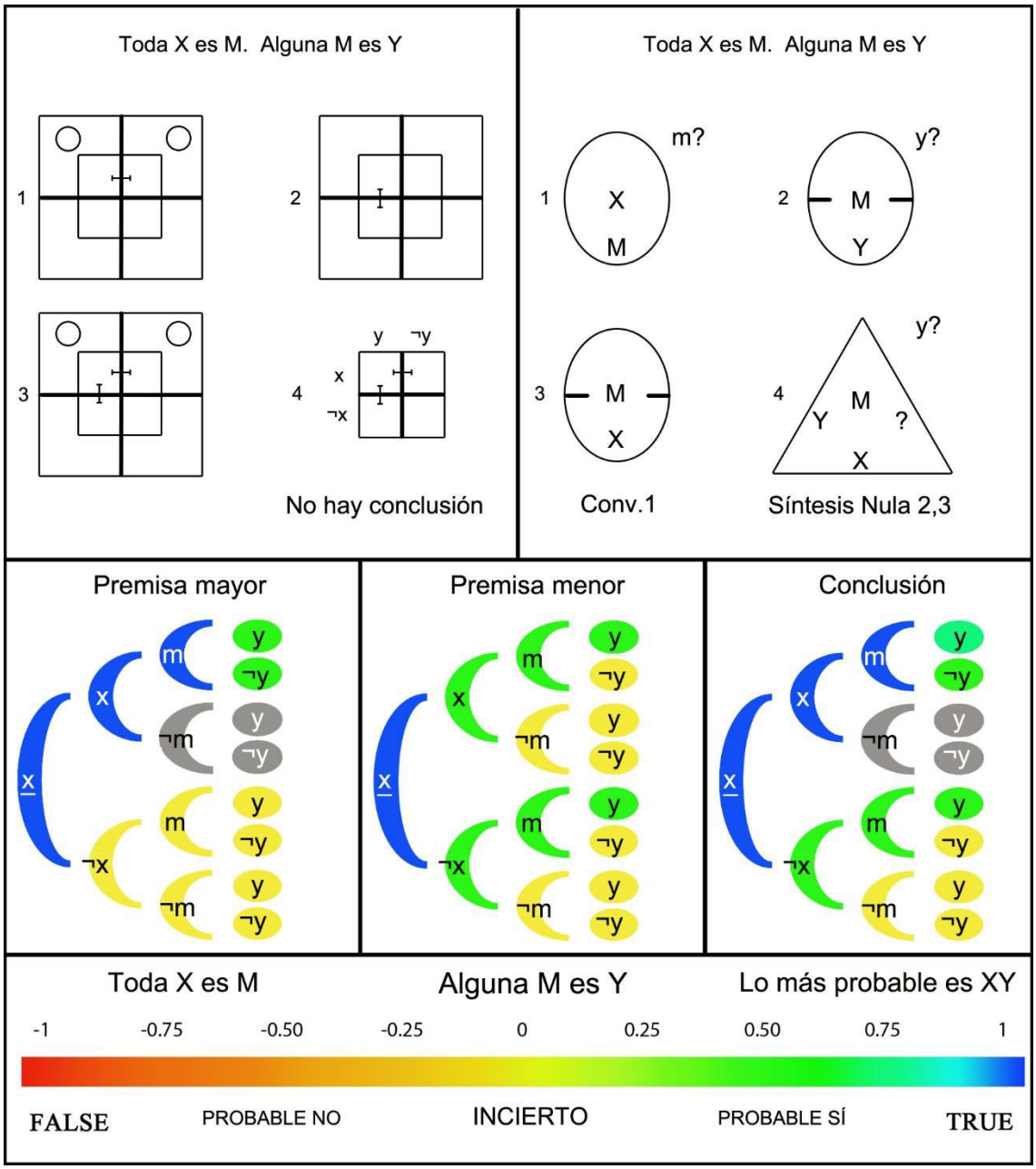


ILUSTRACIÓN 339. CONCLUSIÓN NULA O SOLO PROBABLE EN CARROLL, MARLO Y REDES DE EXPECTATIVAS.

Podemos observar en la ilustración anterior que la conclusión más probable en las redes es XY, lo cual concuerda con lo que ya se observa en Carroll si nos fijamos en que dicha celda es dos veces probable.

Por último, en la siguiente ilustración se muestra la capacidad de las representaciones gráficas de Carroll y las que nosotros proponemos para expresar proposiciones sin carga existencial.

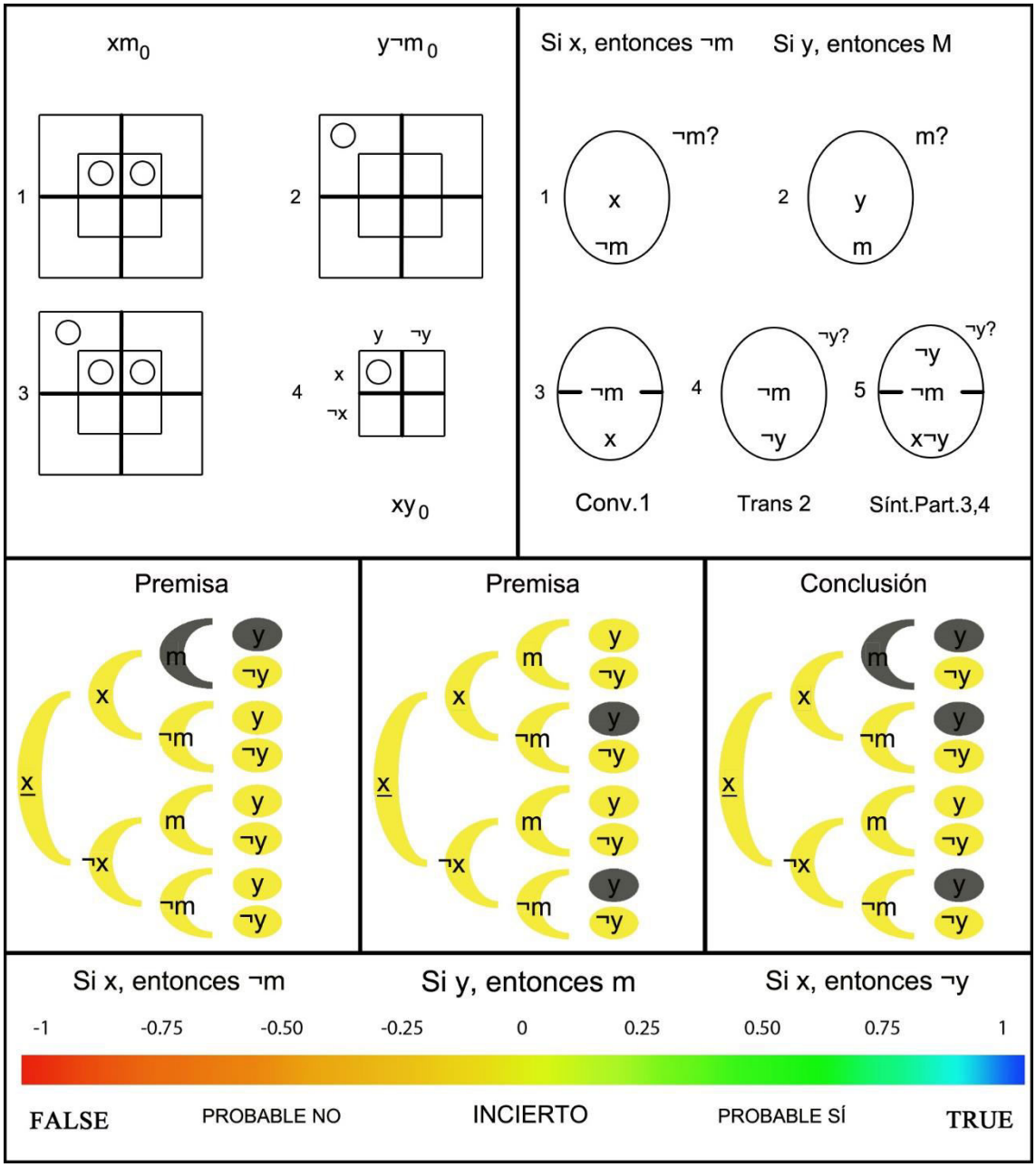


ILUSTRACIÓN 340. PROPOSICIONES DE RELACIONES SIN DENOTACIÓN EXISTENCIAL: CARROLL, MARLO Y REDES DE EXPECTATIVAS.

6.11 Charles Sanders Peirce (1839-1914)

6.11.1 Introducción

En Peirce (1933) encontramos la siguiente definición:

> Diagrammatic reasoning is the only really fertile reasoning. If logicians would only embrace this method, we should no longer see attempts to base their science on the fragile foundations of metaphysics or a psychology not based on logical theory; and there would soon be such an advance in logic that every science would feel the benefit of it. [C.P. 4571]

Peirce dejó más de 80.000 páginas de manuscritos, en su mayor parte inéditos, que su viuda vendió a la Universidad de Harvard (Barrena & Nubiola, 2007). Según Oostra (2003), las ediciones parciales más conocidas de la obra de Peirce recogidas en *Collected Papers* y *Writings,* exhiben numerosos grafos y tablas en muchas de sus páginas, destacando como ejemplos notables los diagramas en CP 4.113 y CP 4.143 ("The Logic of Quantity", 1893) y en CP 4.258 y CP 4.321 ("The Simplest Mathematics", 1902). Por otro lado, dice también Oostra (2003) que algunos de sus artículos más destacados, como "How to Make Our Ideas Clear" [CP 5.388–410, 1878], "A Guess at the Riddle" [CP 1.354–416, 1890] y "What Is a Sign?" (1894), contienen figuras que aclaran o forman parte del texto, y que varias de sus ideas brillantes como la preciosa proyección cartográfica quincuncial [W 4.68–71][24] y los circuitos eléctricos lógicos [W 5.421–423], ambas recogidas en Peirce (1982), fueron expresadas por Peirce, en esencia, mediante diagramas. Bellucci y Pietarinen (2016) mencionan que se imprimieron ejemplos de los *Grafos Existenciales* en la entrada "*Symbolic logic*" del *Dictionary of Philosophy and Psychology* editado por J.M. Baldwin (Baldwin, 1901).

Aunque según Bellucci y Pietarinen (2016), desde la década de 1870 los análisis lógicos de Peirce habían sido algebraicos, a fines de 1896, con 57 años de edad y después de haber hecho ya lo que los estudiosos consideran sus contribuciones más significativas a la lógica simbólica moderna (Zalamea, 1993), Peirce inventó un sistema de diagramas lógicos que llamaría *Grafos Existenciales* (EG):

> The system of expressing propositions which is called Existential Graphs was invented by me late in the year 1896, as an improvement upon another system published in the *Monist* for January 1897. But it is curious that 14 years previously, I had, but for one easy step, entered upon the system of Existential Graphs, reaching its threshold by a more direct way. The current of my investigations at that time swept me past the portal of this rich treasury of ideas. I must have seen that such a system of expression was possible, but I failed to appreciate its merits. [MS 498, pp. 1-2]

Nos dice Legris (2012) que, según Peirce, en la construcción de un icono o diagrama las relaciones son análogas a las existentes en el "objeto del razonamiento" y por lo tanto, la función de icono es hacer visible tal estructura, algo que no es posible en el lenguaje ordinario. De hecho, indica Legris que Peirce fue probablemente la primera persona en discutir las reglas de transformación en un sistema de representación no sentencial y que defendió una concepción diagramática de la lógica, según la cual, la deducción se entiende como un proceso de transformación de diagramas (Legris, 2016a, 2016b; Giovannini & Legris, 2016) próximo al razonamiento matemático y a la ciencia experimental de las conexiones químicas (Anellis & Abeles, 2016; Ambrosio & Campbell, 2017; Roberts, 1973).

ILUSTRACIÓN 341. RELACIÓN DE LOS GRAFOS ENTITATIVOS CON LOS ENLACES QUÍMICOS. EN PEIRCE, 1897.

Dice Roberts (1973) que el interés de Peirce en sus grafos creció y los desarrolló para aplicarlos a temas como la modalidad, la teoría de los signos, su doctrina de las categorías y su filosofía del pragmatismo, llegando incluso a afirmar de EG que era el hallazgo más afortunado en lógica exacta desde Boole, su obra maestra: "*my chef d'oeuvre*" [CP 4.347], la lógica del futuro (Bellucci & Pietarinen, 2016).

[24] Nos referimos con W a *Writings of Charles S. Peirce,* de Peirce y Fisch, (1982).

HISTORIA COMPARADA DE LOS DIAGRAMAS

Dice Roberts (1973) que aunque los grafos tenían la intención de facilitar el análisis de la estructura lógica, no necesariamente facilitaban el dibujo de inferencias y era necesario practicar con ellos, como se hace en un aula, para entenderlos, pero que como el mismo Peirce reconoció, las publicaciones de sus grafos fueron pocas y difíciles de entender, de modo que nadie estuvo de acuerdo con él respecto al valor de los grafos y la mayor parte de los autores que se ocuparon de su obra los omitieron junto a la importancia de su desarrollo diagramático.

El filósofo W. Quine fue uno de los primeros en mencionar los grafos en su revisión de los *Collected Papers* criticando su complejidad, cuestionando su eficacia para analizar la estructura proposicional (Quine, 1935) y afirmando que eran demasiado engorrosos para recomendarse como una notación práctica (Quine, 1955). Como señala Roberts (1973), Gardner, en su obra *Logic Machines and Diagrams*, también calificó la tarea de comprender el sistema de Peirce de difícil, alegando que sus papeles estaban escritos en un estilo tan elíptico e involutivo que parecía albergar compulsiones inconscientes hacia la escritura turbia que le permitirían quejarse más tarde de la incapacidad de sus críticos para entenderlo, con un estilo opaco y decenas de términos extraños inventados por él mismo, modificados de vez en cuando y sin un número suficiente de dibujos para ilustrar su significado. Así, prosigue Roberts, Gardner se limitó a realizar observaciones muy generales de los diagramas de Peirce, acusándolo de tener una noción muy exagerada de su valor (Gardner, 1958), aunque Peirce, a pesar de ser consciente de que EG involucraba una gran cantidad de terminología nueva y una notación inusual, continuó creyendo que era esencialmente "muy fácil" [MS 450, Ms 500].

Roberts (1973) señala que Berry (1952) negó que Peirce hubiera hecho ninguna contribución a la lógica de sentencias o de los cuantificadores después de 1891 y que W. B. Gallie (1952) afirmó, en el mismo sentido, que después de 1891 el pensamiento y la escritura de Peirce se volvían a veces demasiado inconexos, “llegando incluso a divagar” (p. 55). De este modo, podemos incluir a Berry, Gallie, Gardner y Quine en la lista de los que contribuyeron a desestimar el valor de los grafos, subrayando que en la publicación de Quine de 1935 se criticaba a los diagramas en general, considerándolos muy inferiores al enfoque algebraico, en un juicio que anticipaba el valor marginal que tendrían las representaciones gráficas en lógica durante buena parte del siglo XX.

Afortunadamente, la contribución de Peirce a la lógica moderna se ha reevaluado recientemente, no solo reconociéndolo cofundador de la lógica de cuantificadores moderna junto a Frege, sino descubriendo la novedad de los *Grafos Existenciales* (Moktefi & Shin, 2012), su aportación al análisis de los procesos constitutivos del razonamiento (Johnson-Laird, 2002) y la capacidad de una mente llena de inspiración e intuiciones brillantes capaz de crear (Barrena, 2006; de Aguiar, 2017; Tenorio, 2017) y explicar la creatividad al mismo tiempo (Visokolskis & Carrión, 2013).

Para Peirce, un buen sistema de diagramas debe ser icónico, lo que significa que las partes de los diagramas deben relacionarse entre sí de la misma manera que los objetos representados por esas partes están relacionados entre sí y que la utilidad del razonamiento diagramático es su capacidad para revelar verdades inesperadas, lo cual es una peculiaridad de los iconos. Así, en Peirce (1906) encontramos:

> A Diagram is mainly an Icon, and an Icon of intelligible relations. It is true that what must be is not to be learned by simple inspection of any thing. But when we talk of deductive reasoning being necessary, we do not mean, of course, that it is infallible. But precisely what we do mean is that the conclusion follows from the form of the relations set forth in the premiss. (p.497)

Peirce comparó los diagramas lógicos con los mapas porque ambos transmiten cuestiones difíciles y complicadas con una claridad y facilidad que difícilmente puede alcanzarse de otra manera, estando ambos particularmente bien adaptados para la experimentación, pues uno puede, nos dice Peirce (1906), reorganizar y recombinar las partes de un diagrama lógico de la misma manera que puede reorganizar los pines de un mapa para representar el despliegue de fuerzas en una batalla. Así, los diagramas conocidos como *Grafos Existenciales* (EG) permitían reproducir los "movimientos del razonamiento" [MS 693, p. 278] y, de hecho, Peirce pretendía, siguiendo a Roberts (1973), hacer un análisis gráfico de la inferencia diseccionando el razonamiento en sus componentes más pequeños, los cuales creía que eran inserciones y omisiones, conforme a la idea enunciada por primera vez por Mitchell de que el paso de las premisas a la conclusión "en la forma en que se suele llamar solo el razonamiento necesario, siempre puede alcanzarse sumando los antecedentes declarados y restando los consecuentes declarados" [MS 90S, p. 38]. Peirce estaba convencido de que EG disfrutaba en un grado inusualmente alto de las características esenciales del pensamiento diagramático. Roberts (1973) cita el siguiente pasaje de Peirce:

> Is truly *diagrammatic,* that is to say that its parts are really related to one another in forms of relation analogous to those of the assertions they represent, and that consequently in studying this syntax we may be assured that we are studying the real relations of the parts of the assertions and reasonings; which is by no means the case with the syntax of speech. [MS L 231, p. 15]

Según Pietarinen (2011) los EG suponen una nueva forma de expresar nociones lógicas, así como el componente deductivo, de una manera gráfica, diagramática, espacial, topológica e icónica, en lugar de la manera unilineal, convencional y simbólica. Y Roberts (1973) afirma que. aunque los diagramas lógicos eran en el último cuarto de siglo pasado menos familiares que las notaciones algebraicas de la lógica, ni son demasiado engorrosos ni es justo decir que son notaciones menos evidentes que las habituales, porque si una notación fácil y perspicua es una que puede aprenderse rápidamente y manipularse con facilidad, los años de experiencia con estudiantes universitarios le habían convencido de que EG es una notación más perspicua que la notación de los *Principia*, "con la ventaja añadida de la inusual facilidad con la que se pueden extraer inferencias en EG" (p.126).

6.11.2 Válido para el cálculo proposicional clásico

Roberts (1992) y Shin (1999) consideran el sistema de *Grafos Existenciales* un sistema de lógica diagramática que permite tratar de forma completa y consistente la lógica elemental, con capacidad para expresar, examinar y experimentar sentencias e inferencias empleando un número notablemente pequeño de símbolos especiales, y con capacidad de mostrar claramente que el razonamiento deductivo puede analizarse en ciertas clases de inserciones y omisiones de oraciones declarativas. Afirma Roberts (1973) que cuando *Alpha* se estructura como un sistema de deducción natural, el resultado es un cálculo proposicional completamente deductivo. También Roberts (1992) nos dice que Peirce a veces usaba los términos *Alfa* y *Beta* para las partes de EG que corresponden a los dos componentes principales de la lógica elemental, a saber, la lógica de sentencias y la lógica de los predicados y los cuantificadores, mientras que otros desarrollos, incluida la lógica modal, pertenecen a la parte *Gamma* de EG. Según Pietarinen y Bellucci (2015), *Alfa* corresponde a la lógica proposicional y, como señalan Dau y Eklund (2008), *Beta* corresponde a la lógica de primer orden con predicados e igualdad, pero sin funciones o constantes, y *Gamma*, que nunca fue terminada, abarca características de la lógica de orden superior, incluyendo la lógica modal. También Shin (1999) y Johnson-Laird (2002) nos dicen que el sistema *Beta* equivale al sistema natural deductivo de primer orden. Alemany (1998) incluye los diagramas de Peirce entre las formas gráficas de representación capaces de reproducir razonamientos y cálculos deductivos completos en relación a la semántica de los sistemas formales construidos por Shin y Hammer. Thibaud (1982), por su parte, demuestra que los grafos *Alfa* con sus reglas de transformación proporcionan una axiomatización válida y completa para el cálculo proposicional clásico y nos recuerda Legris (2012) que, de acuerdo con Sun-Joo Shin (Shin, 2002), Peirce fue el primero en presentar un marco teórico capaz de abarcar sistemas heterogéneos.

Los EG de Peirce se han usado como base lógica del sistema de grafos conceptuales desarrollado por John Sowa (Sowa, 1984), quien los conecta con redes semánticas e inteligencia artificial (Roberts, 1992). Así, los grafos conceptuales (CG) son una extensión de los gráficos existenciales con características adoptadas de la lingüística y la inteligencia artificial. Mantiene Dau (2003) que el propósito de este sistema es expresar el significado en una forma que sea lógicamente precisa, humanamente legible y computacionalmente manejable, generando un cálculo que nace de trasladar y refinar una a una las cinco reglas del sistema de grafos de Peirce (Sowa, 1997, 2000).

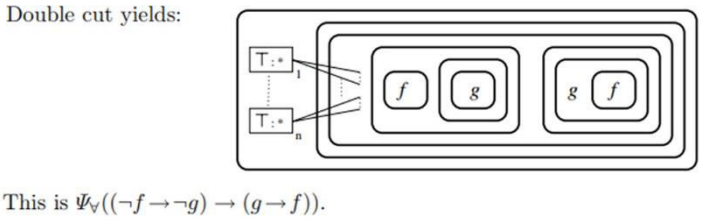


ILUSTRACIÓN 342. GRAFOS DE SOWA BASADOS EN PEIRCE. TOMADO DE DAU, 2003, P. 18.

6.11.3 El primer sistema: Los Grafos Entitativos

Peirce, que según Lemanski (2018) conocía la historia de los diagramas lógicos mejor que la mayoría de los lógicos entre la década de 1760 y finales de la década de 1830, creó sistemas de representación totalmente originales, con mayor capacidad expresiva que los de Venn, que eran capaces de afrontar por primera vez la lógica de relaciones (Roberts, 1973). Los EG tenían dos características propias en la notación: el uso de la línea para representar a los individuos y el uso de la línea, simplemente dibujada, como signo de "algo", una idea que, indica Roberts (1973) le había sido inspirada por sus lecturas de Alfred Bray Kempe (1849-1922) (Kempe, 1886, 1897).

ILUSTRACIÓN 343. GRAFOS DE PEIRCE.

El primer grafo de la figura anterior significa que *algo es a la vez benefactor y amado de algo*, es decir, *algo es benefactor de un amante de sí mismo*. El segundo grafo significa que *algo es un amante de sí mismo*. el tercero que *todo es un amante de sí mismo*. Y el último se lee como «*todo es un amante o un benefactor de todo*» (Roberts, 1973, p. 19).

Señalan Moktefi y Shin (2012) que Peirce había precedido a Frege al describir una notación para la lógica de relaciones. Para ello empleó guiones en el lugar de los términos demostrativos y sustantivos para producir formas en blanco de proposiciones llamados *rhemata* o *rema*. Si solo se borra un nombre se produce un *rema* no relativo, como: "__ es mortal". Si se borran dos o más nombres, el resultado es un el *rema* relativo, como "__ se compra por __ a __ por __".

En un artículo para la revista *The Monist*, titulado "The Logic of Relatives" (Peirce, 1897), Peirce define el término "relación" introduciendo un sistema de diagramas lógicos que más tarde llamó los *Grafos Entitativos* (Roberts, 1973)

> 2. Of the term Relation in its first Grade of Clearness. An essential part of speech, the Preposition, exists for the purpose of expressing relations. Essential it is, in that no language can exist without prepositions, either as separate words placed before or after their objects, as case-declensions, as syntactical arrangements of words, or some equivalent forms. Such words as "brother", "slayer," "at the time," "alongside," "not," "characteristic property " are relational words, or relatives, in this sense, that each of them becomes a general name when another general name is af fixed to it as object. (Peirce, 1897, p. 162)

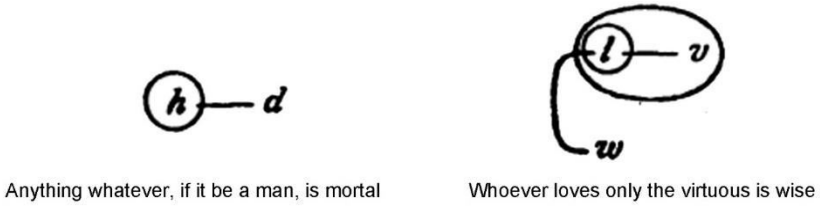


ILUSTRACIÓN 344. PEIRCE GRAFOS ENTITATIVOS. TOMADO DE PEIRCE, 1897.

Nos dice Roberts (1973) que insatisfecho con el sistema de los Grafos Entitativos [MS 484], Peirce evoluciona hacia los *Grafos Existenciales* que consideraba más simple [MS L 477] y mucho más fáciles de usar [MS 513], llamándolos en 1897 "*grafos lógicos positivos*" porque estaban basados en el principio de que escribir una proposición la afirma [MS 488]. Los nombres "entitativo" y "existencial" aparecen en una carta que Peirce escribió a William James el 18 de diciembre de 1897 [MS. L 224] y, aunque según Roberts (1973) no parece fácil comprender qué quiso decir Peirce con entitativo, es posible que tuviera en mente lo mismo que movía a Carroll a distinguir entre proposiciones de relaciones y de existencia (Carroll, 1896). Así, encontramos en Roberts (1973):

> Why did Peirce choose these names? Because the "fundamental symbol" of the one system "expresses an entitative relation", and the fundamental symbol of the other "expresses the relation of existence" [MS 485, p. 1](...) Not so easy is the meaning of the other name [entitative], which is that "being involves necessarily the truth of the description". [MS 513]. (p.30)

6.11.4 El segundo sistema: Los *Grafos Existenciales* (EG)

6.11.4.1 Alfa

Según Roberts (1973), la parte Alfa de EG es la base de todo el sistema de grafos de Peirce; la parte *Beta* presupone Alfa y se construye sobre ella y Gamma se construye presuponiendo tanto Alfa como *Beta*. Alfa se ocupa de la relación entre proposiciones consideradas como totalidades, siendo una formulación del cálculo proposicional, la lógica de las funciones de verdad.

6.11.4.1.1 La *hoja de aserción* y la yuxtaposición explicadas en Roberts (1992)

Explica Roberts (1992) que EG es un sistema bidimensional y que la superficie sobre la que se colocan los diagramas o grafos es importante y se denomina *hoja de aserción* (SA). SA es uno de los símbolos primitivos de EG que cuando está en blanco representa el universo del discurso, es decir, la suma total de todo cuanto el razonador entiende que puede ser razonado. Todo lo escrito en SA se afirma como verdadero en dicho universo, quizás ficticio. Si escribimos en SA "una pera está madura" afirmamos que hay una pera en nuestro universo y que está madura. Dicha sentencia escrita en SA constituye un grafo. Escribir dos o más oraciones (grafos) en SA es unirlas por la conjunción "y". Los grafos escritos juntos en SA están yuxtapuestos, sin que importe el orden o disposición en el que están escritos.

A pear is ripe

The lazy dog stumbles over the quick brown fox

Para negar un grafo lo encerramos dentro de una línea llamada *corte* (*cut*) que separa lo dicho del resto de SA, sin importar la forma de dicha línea.

ILUSTRACIÓN 345. ES FALSO QUE LLUEVE, EN ALPHA DE PEIRCE. TOMADOS DE ROBERTS, 1992.

El corte, junto con su área y cualquier grafo que se encuentre en su área, se denomina *recinto* (*enclosure*). La línea de corte en sí misma no es un grafo, pero sí lo que contiene. Dibujar o escribir o colocar de cualquier modo

un grafo, por ejemplo *P*, se denomina *trazar un grafo* (*scribing a graph*) y el lugar donde lo situemos se llama el *lugar del grafo* (*the place of the graph*), que escribiremos abreviadamente como {P}. Dos grafos no separados por una línea de corte están yuxtapuestos, sin que tenga importancia el orden en que los situemos. El valor de un corte vacío, a veces llamado por Peirce *pseudógrafo*, siempre es falso y no representa ningún estado posible del universo (Roberts, 1992).

6.11.4.1.2 El desplazamiento y la interpretación de los grafos según Roberts (1992)

Como podemos ver en la siguiente ilustración, la proposición *Si P entonces Q* es representa en Alfa como *Es falso que tenga P y no tenga Q*. El doble corte con el que se representa se denomina *desplazamiento* (*scroll*), con lo que podemos leer "*P desplaza a Q*" (*P scrolls Q*). En este caso, {P} es llamado el lugar externo del *scroll* y {Q} es llamado el lugar interior del *scroll* o *área secundaria*. El grafo del área exterior es llamado *antecedente* y el del área interior el *consecuente del scroll*. El grafo de la disyunción inclusiva *Al menos P o Q* puede leerse de dos maneras diferentes, dependiendo de qué conjunto de dos cortes se tome para constituir el scroll, o bien de la dirección de la línea de puntos que une los dos cortes en las figuras en las que tomamos como antecedente y consecuente a *P* y *Q* respectivamente.

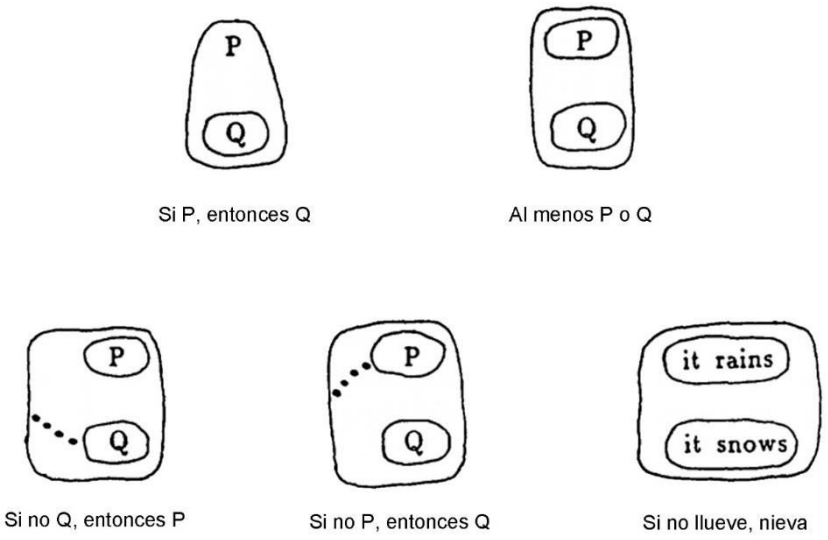


ILUSTRACIÓN 346. EJEMPLOS DE CORTE EN ALPHA. TOMADOS DE ROBERTS, 1992.

Afirma Roberts que una de las fortalezas de EG es ser un diagrama sin excesiva complejidad que puede leerse de varias maneras, eliminando la necesidad de emplear símbolos especiales adicionales, de modo que con un poco de práctica se puede ver con facilidad que una misma figura expresa cuatro declaraciones equivalentes dependiendo de cómo se lea, una ventaja que nosotros pensamos que es compartida por los diagramas de Marlo, tal y como se ve en la sencillez de la conversión de sus modelos.

6.11.4.1.3 Cortes anidados según Roberts (1992)

Los cerramientos que resultan de colocar cortes dentro de otros cortes generan "*nidos*" de uno a más cortes, donde nido significa una colección o serie de cortes, cada uno de los cuales incluye el siguiente. Se dice que un área está encerrada de manera impar (*oddly*) si está dentro de un número impar de cortes empezando el recuento desde el SA no cerrado; y se llama encerrado de forma par (*evenly*) si está dentro de un número par de cortes, o no está encerrada por ningún corte. Por lo tanto, la SA no encerrada se dice que está cerrada de forma par. En la siguiente imagen *P* y *R* están encerradas de forma par y *Q* y *S* de forma impar. *Cut-S*, el recinto que consiste en el corte más interno con su contenido, está cerrado de manera par. El grafo que por sí solo se podría leer como "*R scrolls S*", está encerrado de manera impar.

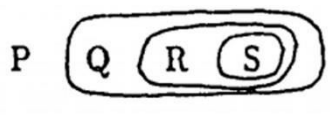


ILUSTRACIÓN 347. NIDOS DE CORTES EN ALPHA DE PEIRCE. TOMADO DE ROBERTS, 1992.

Un grafo en SA se llamará un *grafo no cerrado* o de *nivel-O*; un grafo separado de SA por un solo corte se llamará un *grafo de nivel 1*; separado de SA por dos cortes, *de nivel 2*; y así sucesivamente.

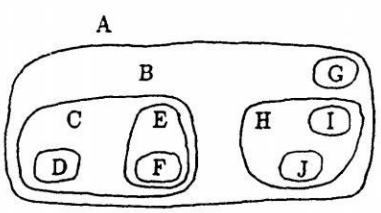


ILUSTRACIÓN 348. GRAFOS ANIDADOS EN ALPHA DE PEIRCE. TOMADOS DE ROBERTS, 1992.

El signo ⊇ significa "contiene" y se afirma que $\{A\} \supseteq \{B\}$ si y solo si (iff) *B* está encerrado por todos los cortes que cierran a *A*. Podemos ver en la imagen anterior que *A* contiene a todas las áreas incluida sí misma, mientras que *B* incluye a todas las áreas excepto *A*. Dos áreas pertenecen al mismo nido de cortes si cada área contiene a la otra. Es decir, que dos grafos pertenecen al mismo nido de cortes si y solo si el lugar de uno contiene al lugar del otro. Este tipo de análisis facilitará la aplicación de las reglas de inferencia EG a grafos de cualquier complejidad.

La figura anterior contiene cinco nidos de cortes. Algunas áreas no están relacionadas con otras por la relación de ser contenido—Por ejemplo, no hay un nido al que *E* y *G* pertenezcan, luego ni $\{E\} \supseteq \{G\}$, ni $\{G\} \supseteq \{E\}$ son afirmaciones verdaderas.

6.11.4.1.4 Las reglas de transformación de Alfa

Según Roberts (1973), en 1877 Peirce dio una definición de razonar que repitió veintiséis años después al exponer los EG (4.476ff):

> The object of reasoning is to find out, from the consideration of what we already know, something else which we do not know. Consequently, reasoning is good if it be such as to give a true conclusion from true premisses, and not otherwise. [5.365]

Para Peirce las únicas reglas de inferencia requeridas para la lógica elemental son las siguientes cinco reglas de transformación, ninguna de las cuales puede convertir en falso un grafo verdadero:

> R.1. The rule of erasure. Any evenly enclosed graph may be erased, except for lines of identity which cross cuts---only evenly enclosed portions of such lines may be erased. R2. The rule of insertion. Any graph may be scribed on any oddly enclosed area, and two lines of identity (or portions of lines) oddly enclosed on the same area, may be joined. R3. The rule of iteration. A graph which already occurs may be scribed again within the same or additional cuts. R4. The rule of deiteration. Any graph whose occurrence is, or could be, the result of iteration, may be erased. R5. The rule of the double cut. The double cut may be inserted around or removed (where it occurs) from any graph on any area. (Roberts, 1992, p. 647)

En Roberts (1973, 1992) podemos encontrar explicaciones detalladas de los matices y cláusulas que permiten aplicar correctamente las reglas de transformación de Alfa. Por nuestra parte, lo que nos interesa es mostrar que a diferencia de nuestros diagramas, Peirce se basa en una lógica del objeto en la que es posible partiendo de la verdad de *P* afirmar que *Q→P*, mientras que, como ya explicamos anteriormente, en nuestra lógica del conjunto, la cual se aprecia también en los diagramas de Carroll, el hecho de que sea cierta *P* no conlleva que *Q* implique *P,* al menos mientras siga siendo posible la combinación *P¬Q*.

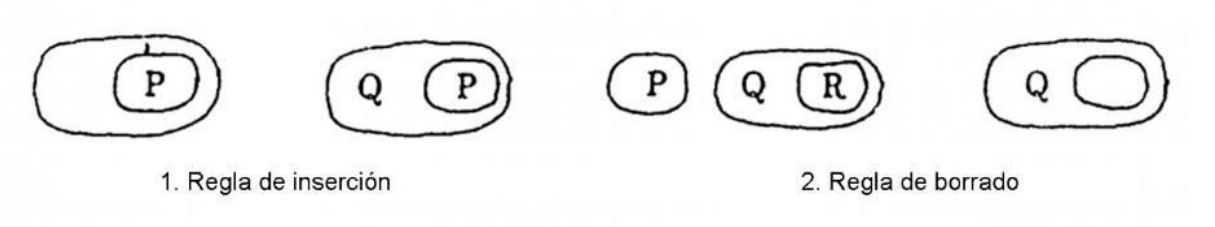


ILUSTRACIÓN 349. EJEMPLO DE INSERCIÓN Y BORRADO EN EG DE PEIRCE.

En el primer grafo de la ilustración anterior vemos que *Si es imposible que sea falso P* (Tengo *P*), por inserción llegamos a que *No puede darse Q* ∧ ¬*P*, es decir, llegamos a que *Q* → *P*. El segundo grafo es resultado de aplicar dos veces la regla de borrado.

Nosotros empleamos algo semejante a la regla de inserción cuando partiendo de la afirmación *Si P, entonces Q*, representamos como transformación válida de nuestros modelos *Si P y R, entonces Q*. Y empleamos algo semejante a la regla de borrado cuando aplicamos la regla que llamamos *Contenido en* para simplificar la información ofrecida en un modelo en otro, del mismo modo que cuando eliminamos de las redes nodos no relevantes sin alterar la estructura legítima de las conexiones. Igualmente encontramos algo equivalente a la regla de borrado en los diagramas de Carroll cuando reduce las ocho celdas inicialmente implicadas en un silogismo con los términos X, Y, Z a las cuatro que corresponden únicamente a las conjunciones de los extremos, omitiendo las que mantienen dichos extremos con el término medio.

Empleamos igualmente algo muy semejante a la iteración ya en Aznar (2014) cuando dijimos que todas las áreas del modelo de *A* contienen *A*, del mismo modo que podemos recurrir a ella cuando afirmamos en las redes de expectativas que cualquier nodo *Q* conectado a *P* debe leerse como *QP*. Igualmente, la iteración permite en los diagramas de Venn identificar como *A* cada una de los compartimentos formado por las intersecciones de la clase *A* con otras clases. Y de forma inversa, empleamos la deiteración en los diagramas cuando eliminamos la redundancia en el etiquetado de los compartimentos o nodos que se sigue de la iteración.

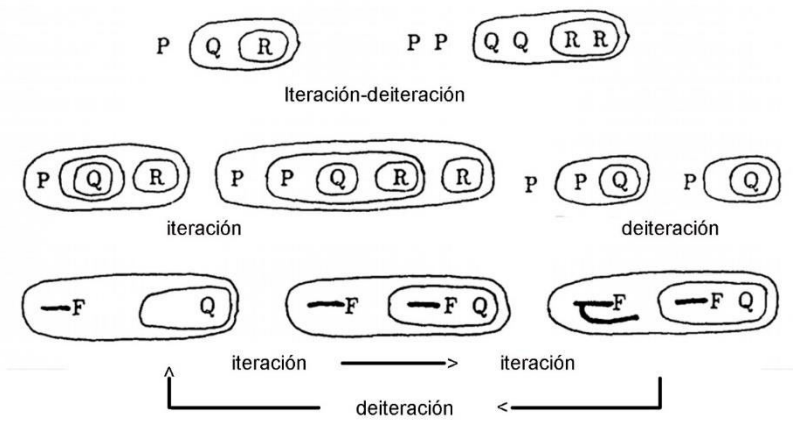


ILUSTRACIÓN 350. EJEMPLOS DE TRANSFORMACIÓN APLICANDO LAS REGLAS DE ITERACIÓN Y DEITERACIÓN EN EG. BASADO EN ROBERTS, 1992.

La regla del doble corte afirma como verdadero lo que es imposible que sea falso, haciendo posible la representación en un solo diagrama de proposiciones complejas del tipo *(A→B)→(C→D)*, la cual es gráficamente transformada en la proposición *Es imposible que sea imposible A¬B y no sea imposible C¬D.*

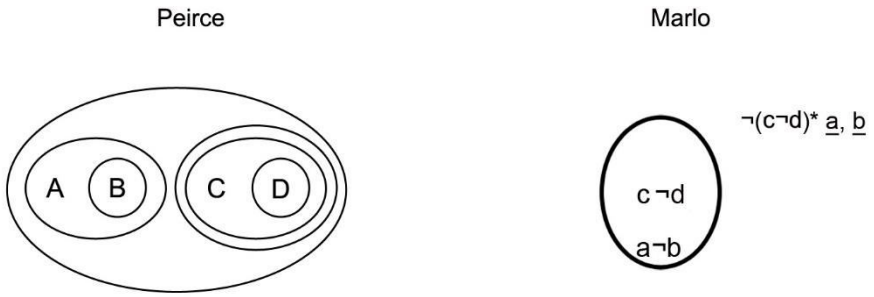


ILUSTRACIÓN 351. *(A→B) →(C→D)* EN GRAFOS DE PEIRCE Y DIAGRAMA DE MARLO.

Peirce representa las proposiciones complejas en la hoja de aserción partiendo de la expresión de lo imposible. En el diagrama de Marlo, al contrario, se muestran las relaciones necesarias.

6.11.4.2 *Beta*, explicado en Roberts (1973)

Explica Roberts (1973) que para Peirce la parte *Beta* de EG tiene en cuenta la identidad y la existencia individuales [MS 462, pp. 8, 34] y que mediante ella podemos expresar proposiciones categóricas [MS 450, p. 20], de modo que Beta es un tratamiento del cálculo de predicados o de la lógica de la cuantificación en el que se introducen dos nuevos símbolos: la línea de identidad y los puntos. Las reglas *Beta* son, esencialmente, extensiones de las cinco reglas *Alfa*.

La primera convención *Beta* proporciona una manera de denotar un único objeto individual y se realiza escribiendo un punto grueso o una línea gruesa en SA; de hecho, Peirce argumentó que dado que el universo del discurso representado por SA es una colección de individuos, cualquier punto de la hoja claramente marcado debe tomarse para representar a un solo individuo existente en ese universo [MS 455, p. 21], existiendo reglas específicas para la generación de grafos de identidad en *Beta*.

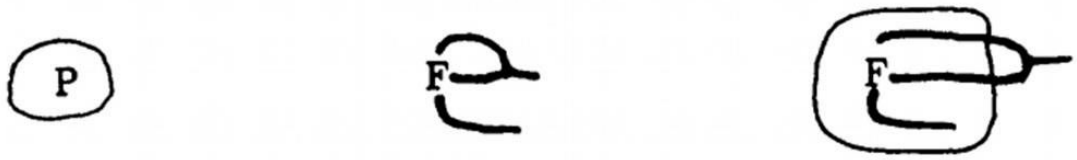


ILUSTRACIÓN 352. GRAFOS SIN GANCHO Y CON GANCHOS EN *BETA* DE PEIRCE. TOMADO DE ROBERTS, 1992.

En los diagramas de Marlo denotamos existencia escribiendo las variables en mayúscula. Si estas variables se encuentran necesariamente unidas en una misma área cerrada del modelo, entonces denotan un solo tipo de individuo que además existe. Si dos variables, digamos *A*, se encuentran en compartimentos distintos del modelo pero su combinación no es contradictoria, por ejemplo *AB* y *AC*, entonces nosotros tomamos solo provisionalmente y por precaución a *AB* y *AC* como objetos diferentes. De forma semejante encontramos en Peirce que un grafo se refiere a tantos individuos como líneas gruesas no conectadas contenga y que en ausencia de más información, debemos tratar dos líneas como diferentes. La línea gruesa, llamada línea de identidad, es un grafo que afirma la identidad numérica de los individuos denotados por sus dos extremidades, tal y como afirma Roberts (1973) apoyándose en Quine (1959) y Church (1956):

Next we give Beta proofs of the two axioms of identity: (x)[x = x], 'Everything is identical to itself; and (x) (y)[x = y ⊃ Fx ⊃ Fy), 'Take any two objects x and y, if they are identical then whatever is true of x is true of y'. (p.62).

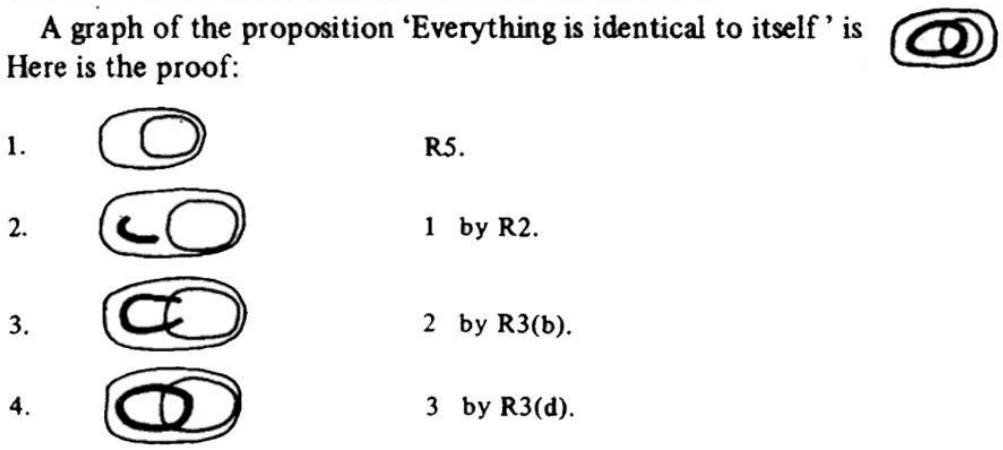


ILUSTRACIÓN 353. "TODO ES IDÉNTICO A SÍ MISMO" EN GRAFOS DE PEIRCE. TOMADO DE ROBERTS, 1973, P. 62.

6.11.4.2.1 Teoremas y metateoremas

En Roberts (1992) encontramos que Peirce pretende con EG proporcionar una imagen en movimiento del pensamiento, en tanto los dibujos animados pueden representar mejor los cambios graduales que tienen lugar a medida que avanza la inferencia. Así, al comienzo, veríamos una SA en blanco o una gráfica que representa las premisas de un argumento y luego veríamos como el grafo cambia a medida que se aplican las reglas de transformación generando como resultado final un teorema o la conclusión de un argumento. Así, si representamos una prueba en EG con un conjunto de grafos, cada uno de ellos podrá considerarse similar a un fotograma tomado de una película de la inferencia y la apariencia de la prueba será muy similar al utilizado en otros sistemas de lógica. Peirce, anticipando nuestra forma de entender y resolver las inferencias en los diagramas de Marlo, numera cada grafo a medida que ingresa en el conjunto de pruebas, justificando a su derecha la inclusión en el conjunto.

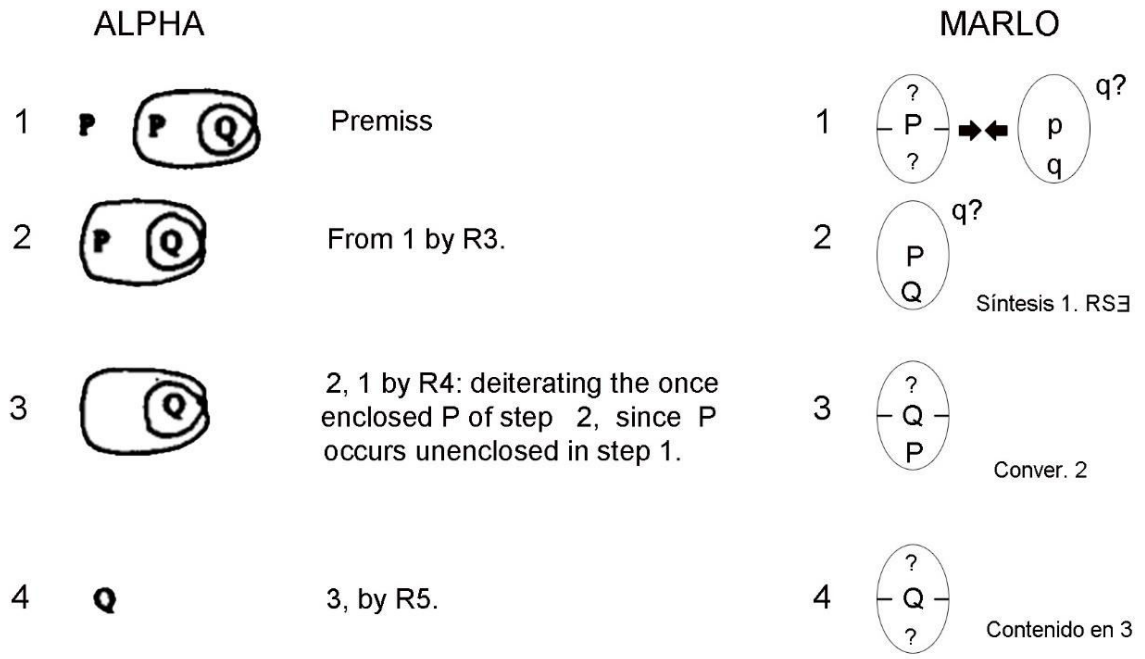


ILUSTRACIÓN 354. DEMOSTRACIÓN GRÁFICA DEL *MODUS PONENS* EN ALPHA Y EL DIAGRAMA DE MARLO. ADAPTADO DE ROBERTS, 1973, P. 45.

El proceso demostrativo de *Modus Ponens* en Alpha de Peirce (ilustración 354) puede abreviarse a los pasos uno, tres y cuatro según Roberts (1973), del mismo modo que puede reducirse a los pasos uno y dos en el diagrama de Marlo, pues ya en dos podemos afirmar que tenemos Q mayúscula dentro de P como hecho en curso.

Peirce también representa la disyunción gráficamente de modo que podemos leer en sus grafos que *Si es imposible que no exista F y que no exista G, entonces hay algo que es F o es G*.

$$[(\exists x)\, Fx \vee (\exists x)\, Gx] \equiv (\exists x)\, [Fx \vee Gx]$$

ILUSTRACIÓN 355. DISYUNCIÓN EN EG PEIRCE. TOMADO DE ROBERTS, 1992.

Peirce da prioridad a lo imposible en la representación de las proposiciones, mientras que en el diagrama de Marlo priorizamos lo necesario. En la siguiente ilustración (356) comparamos las proposiciones clásicas del silogismo (A, E, I, O) en Peirce tal y como aparecen representadas en Roberts (1973) con nuestra forma de representarlas en el diagrama de Marlo. Hemos omitido la obversión en el diagrama de Marlo por considerar que no es informativa y la hemos sustituido por el modelo de la proposición contradictoria en cada caso. Por otra parte, acompañando a las conversiones inválidas en Peirce hemos colocado la transformación que hacemos nosotros de las proposiciones eliminando la carga existencial de los términos. De este modo, aunque no hay una exacta correspondencia entre lo que dicen los diagramas de Peirce y los nuestros, podemos hacernos una idea aproximada de las principales diferencias que existen entre sus diagramas y los nuestros. Desde la primera fila deberíamos observar que afirmar *Es imposible tener F y no tener G y es el caso que tenemos F* significa lo mismo que afirmar *Siempre que tengamos F tendremos G y es el caso que tenemos F*, por más que sea más sencillo procesar lo segundo que lo primero.

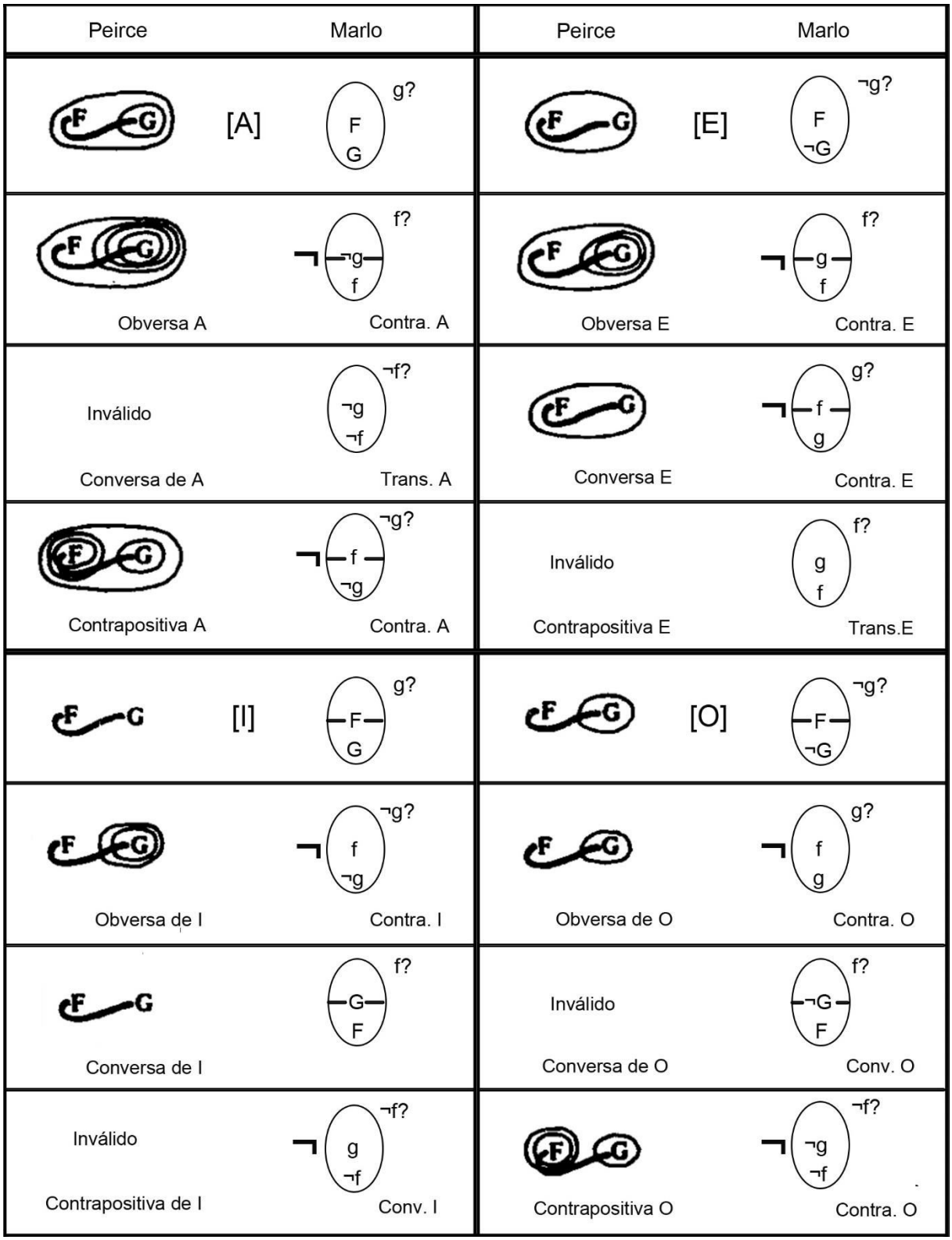


ILUSTRACIÓN 356. PROPOSICIONES CLÁSICAS DEL SILOGISMO EN PEIRCE Y MARLO. BASADO EN ROBERTS, 1973.

Al exponer las reglas del silogismo de Peirce, Roberts (1973) nos dice que la resolución de Barbara mediante inserciones y omisiones sucesivas era su ejemplo favorito de análisis de la inferencia:

> The syllogism Barbara was something of a favorite of Peirce's, and the graphical analysis of it appears in several places throughout his papers (see, for instance, 4.571, 5.147, Ms 500, Ms AM 806.5*, and Ms L 231, pp. 21-22). This is the AAA syllogism in the first figure: 'All F is G, and all G is H; therefore, all F is H. (p.60)

Del hecho de que Peirce resuelva los silogismos dando prioridad a lo imposible se sigue la dificultad de traducir al lenguaje natural los grafos de Barbara, al menos desde el paso tres. En la siguiente ilustración vemos que el paso uno dice que *Es imposible que exista F y no tener G*. El paso dos dice que *Es imposible tener G y no tener H*. El paso tres lo entendemos ya con dificultad como *Es imposible que teniendo F sea imposible tener G y no tener al mismo tiempo que sea imposible tener G y no tener H*. El paso cuatro ni lo intentamos.

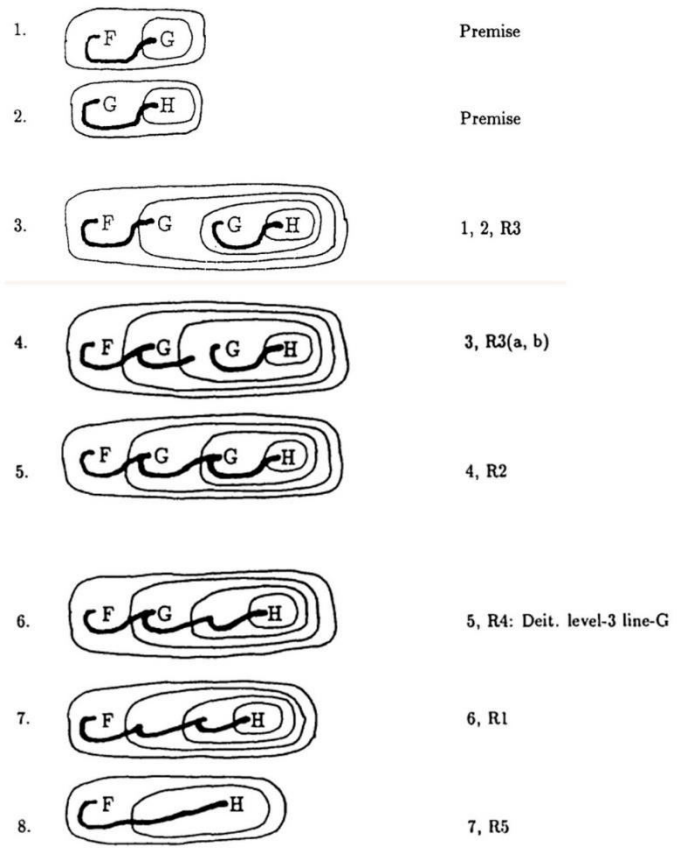


ILUSTRACIÓN 357. BARBARA EN PEIRCE. TOMADO DE ROBERTS, 1992.

Nosotros pensamos que es más sencilla y natural la interpretación de los modelos en el diagrama de Marlo, y también que es más intuitivo Barbara en las redes de expectativas con o sin denotación existencial.

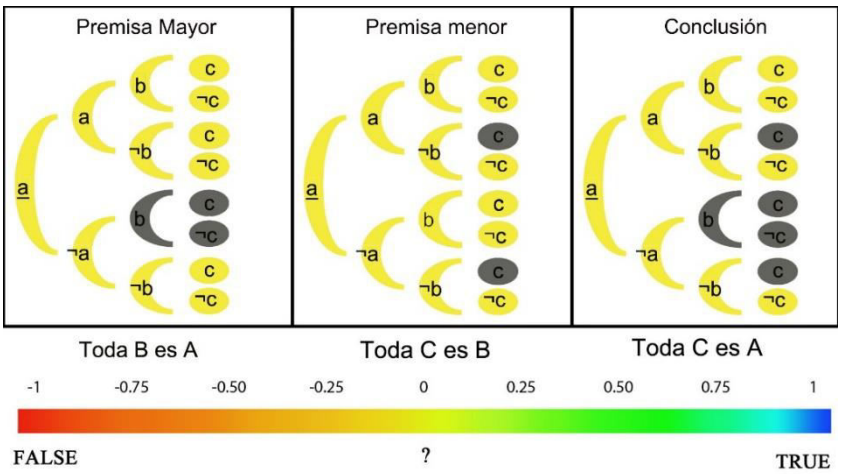


ILUSTRACIÓN 358. BARBARA EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS.

Podemos comparar también la demostración gráfica que aparece en Roberts (1973) de la Ley auto distributiva de la implicación material en Peirce con su demostración en las redes de expectativas y los diagramas de Marlo. *Si cuando tenemos P, es cierto que Q implica R, entonces es cierto que P implica R*, en notación de los *Principia* se escribe como (P ⊃ [Q⊃R]) ⊃ ([P⊃Q] ⊃[P⊃R]) y en nuestra notación: $[p_x(q_x r)]_x\ [(p_x q)_x\ (p_x r)]$, aunque podemos asumir la de los *Principia* sin problemas en este caso. Como observamos en la siguiente imagen de Peirce sería muy complicado traducir al lenguaje natural el significado de los grafos, mientras que, sobre todo en las redes simplificadas, es muy fácil de intuir por qué estamos ante una tautología.

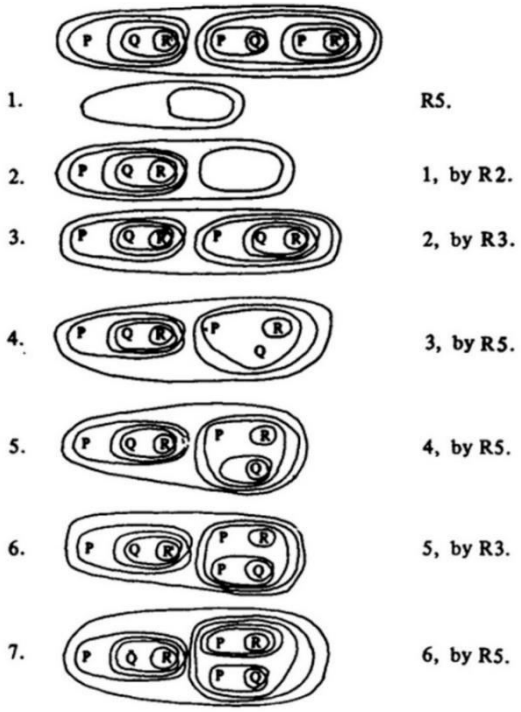


ILUSTRACIÓN 359. LEY AUTO-DISTRIBUTIVA DE LA IMPLICACIÓN MATERIAL. TOMADO DE ROBERTS, 1973, P. 46.

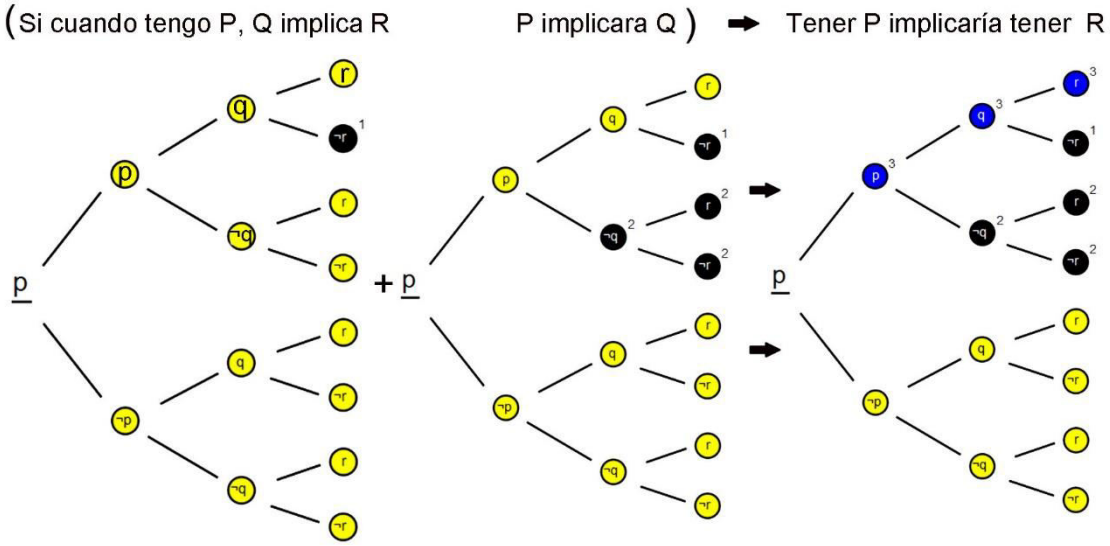


ILUSTRACIÓN 360. LEY AUTO-DISTRIBUTIVA DE LA IMPLICACIÓN MATERIAL EN REDES DE EXPECTATIVAS MARLO.

El azul en los nodos del paso tres sirve para evidenciar que *Si tengo p, tengo r*, pero en rigor es ilegítimo.

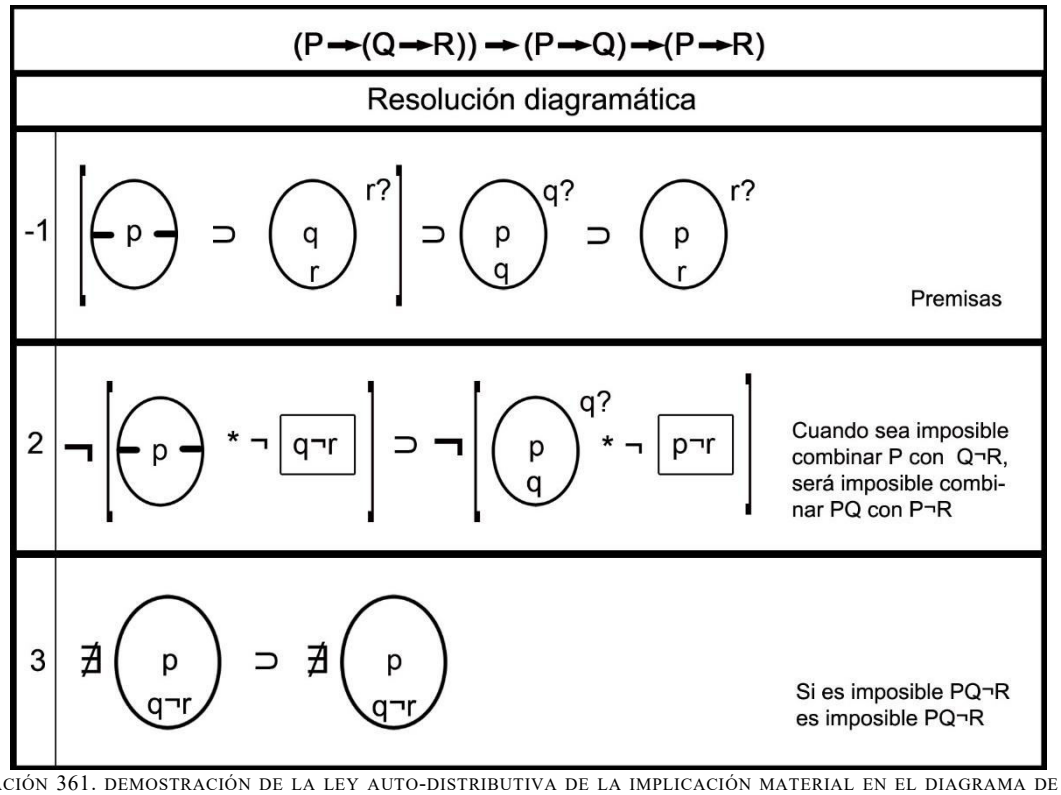


ILUSTRACIÓN 361. DEMOSTRACIÓN DE LA LEY AUTO-DISTRIBUTIVA DE LA IMPLICACIÓN MATERIAL EN EL DIAGRAMA DE MARLO MEDIANTE PRODUCTO DE LAS COMBINACIONES IMPOSIBLES.

En el paso tres de la demostración de la ley auto distributiva empleando el método de las combinaciones imposibles ya es evidente la tautología, pues el segundo modelo está claramente incluido en el primero por ser el mismo.

6.11.4.2.2 Gamma, según Roberts (1973)

Nos dice Roberts (1973) que Peirce afirmaba de Gamma que suponía la posibilidad de que el razonador invente los tipos adicionales de signos que desee: “Came on, my Reader, and let us construct a diagram to illustrate the general course of thought; I mean a System of diagrammatization by means of which any course of thought can be represented with exactitude” (Peirce, 1906, p. 492). También afirma Roberts que la parte Gamma de EG, que nunca se completó, corresponde aproximadamente a los cálculos funcionales de segundo orden (y superior) y a la lógica modal, y aunque en ocasiones es difícil de interpretar, no deja de ser emocionante y valioso intentarlo. Por nuestra parte, pensamos que los problemas que afronta Peirce en Gamma van, en líneas generales, más allá de lo que actualmente podemos explicar con nuestros diagramas y redes de expectativas. Así, por ejemplo, nosotros no afrontamos el potencial de las proposiciones de expresar la cualidad de las relaciones monádicas, diádicas o triádicas que X puede mantener con Y o Z, siendo algo que sí hace Peirce.

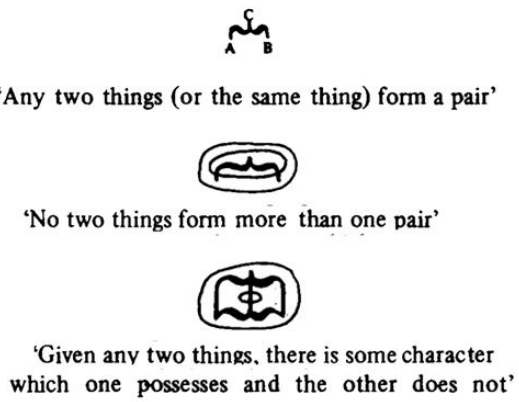


ILUSTRACIÓN 362. GAMMA DE PEIRCE. ADAPTADO DE ROBERTS, 1973, P. 65.

Como señala Amaya (2014) los grafos de Peirce proponen formas de evidenciar la modalidad y lo hizo empleando patrones de puntos, líneas discontinuas y colores mucho antes de que nosotros los usáramos en nuestros diagramas. En 1898 Peirce pensó distinguir en la hoja de aserción (SA) entre los diferentes universos del discurso involucrados en sus afirmaciones gráficas, habiendo generado nuevos símbolos ya en 1903 para clasificar diferentes tipos de objetos involucrados en el razonamiento.

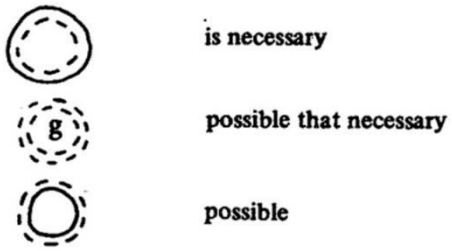


ILUSTRACIÓN 363. MODALIDAD EN GAMMA DE PEIRCE. TOMADO DE ROBERTS, 1973, P. 81.

Igual que nosotros distinguimos en nuestros diagramas, conforme a la distinción tradicional esencia-existencia, entre posibilidad como mera combinación teórica de cualidades o caracteres y objeto fáctico como activación de dicha posibilidad, Peirce también distingue en sus grafos distintos grados de realidad.

Partiendo de la definición de pragmatismo y de algunos textos de Peirce [CP 8.12; CP 8.13], Amaya (2014) define lo real en Peirce como aquello fuera de la mente que influye directamente en la sensación y a través de la sensación en el pensamiento, con independencia de lo que nosotros pensemos acerca de ello, por más que esté ligado a una suerte de paradoja en la que lo real es independiente de mis pensamientos y los tuyos, pero no es independiente del pensamiento en general. No obstante, sería una buena pregunta para Peirce si la afirmación de que algo existe tiene "algún significado positivo o no" [MS 454, p. 15]. También nos dice Roberts que Peirce distinguía entre objetos actuales y posibilidades: "on March 9, 1906 (LN 274r) Peirce concluded that all discourse admits of but two kinds of objects: actualities (represented on the recto of SA) and possibilities (represented on the verso)" (p.89). Y el propio Peirce (1906) afirma: «A logical universe is, no doubt, a collection of logical subjects, but not necessarily of metaphysical Subjects, or "substances"; for it may be composed of characters, of elementary facts, etc.» (p.515).

Peirce distinguía en sus grafos, mucho antes que nosotros, entre meras posibilidades sin ningún tipo de evidencia a su favor y posibilidades confirmadas. Así, por ejemplo, Peirce (1906) mantiene que hay una "colección posible" que incluye a las esfinges, los basiliscos y todos los centauros, y es la colección única y ubicua llamada "nada", que no tiene ningún miembro en absoluto, mientras que hay, según Roberts (1973), otros tipos de posibilidad en Peirce que permiten afirmar proposiciones condicionales que no son verdaderas simplemente porque su antecedente es falso. Así, su reconocimiento de la *actualidad*, la *necesidad* y la *posibilidad* como modos de ser y partes constitutivas de la realidad configuran la consolidación de su realismo modal enmarcado dentro del pragmatismo y del tránsito que desde un realismo moderado a un realismo fuerte le permitió incorporar la noción de posibilidad real (Lane, R., 2007; PihlsTröm, 2010).

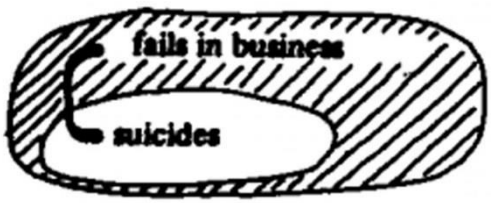


ILUSTRACIÓN 364. PEIRCE TINTE AZUL. TOMADO DE ROBERTS, 1973, P. 89.

Afirma Roberts que Peirce pretendía distinguir en sus grafos meras posibilidades de posibilidades objetivas no basadas en la ignorancia y aunque estaba modificando su firme punto de vista philoniano, continuó admitiendo "con Scotus" [MS 292, p. 51] que hay una condicional de hecho (*inesse*). También, según Amaya (2014), la investigación sobre las modalidades y en especial la noción de posibilidad en Peirce se sitúa en el contexto de la reflexión sobre las proposiciones condicionales y el tratamiento cuantificacional que se pueda hacer de ellas, aunque también interpretó los condicionales *de inesse* y ordinario como siendo lógicamente equivalentes a disyunciones:

> "In order to explain these positions, it is best to mention that possibility may be understood in many senses; but they may all be embraced under the definition that that is possible which, in a certain state of information, is not known to be false (...) According to the Philonians, "If it is now lightening it will thunder," understood as a consequence de inesse, means "It is either not now lightening or it will soon thunder." According to Diodorus, and most of his followers (who seem here to fall into a logical trap), it means "It is now lightening and it will soon thunder". [CP 3.442]

Afirma Roberts (1973) que en sus primeros borradores Peirce reconocía todavía solo los dos universos de actualidad y posibilidad, pero que ya en [MS 292] hace la primera mención de las 'tinturas' y los patrones heráldicos que pronto utilizará para diferenciar el universo verdadero del cuestionable y del obligado [MS 295], llegando incluso a establecer una partición de estos tres universos principales en diez sub-universos designados por tinturas específicas:

> In one early list of Ms 295 there are two metals: (1) *argent* refers to the actual or true in a general or ordinary sense; (2) *or* refers to the actual in some special sense. There are five colors: (1) *azure* refers to logical possibility; (2) *sable* refers to subjective possibility (that which is not known to be false); (3) *gules* refers to a more objective mode of possibility; (4) *purpure* refers to ability; (5) *vert* refers to what is in an interrogative mode. There are three furs: (1) *vair* refers to what is commanded; (2) *potent-counterpotent* refers to the compelled; and (3) *ermine* refers to the rationally (or metaphysically or secondarily) necessitated. (p.90)

Y en palabras del propio Peirce (1906):

> I also think, however, that, in addition to actuality and possibility, a third mode of reality must be recognized in that which, as the gipsy fortune-tellers express it, is "sure to come true," or, as we may say, is destined although I do not mean to assert that this is affirmation rather than the negation of this Mode of Reality. (p.517)

También afirma Peirce que:

> The third universe will be represented by patches of fur, to be "sewn"on the recto or verso as required. The names of the universes vary somewhat from draft t() draft: the recto denotes the Actual and the Existent, or the Actual and True, or Actual Fact; the verso denotes the Questionable and the Possible, or things Possible in themselves; and the aggregate of patches of fur denotes the Commanded and the Compelled, or what is sure to be. [MS 295]

Mantiene Roberts (1973) que si hasta ahora un punto o línea gruesa en SA denotaba un individuo existente, con el aumento de universos y sub-universos su interpretación dependerá de la tintura del área en la que está escrito, con la dificultad especial de tener que decidir qué tipo de línea denota una línea de identidad que se extiende desde una superficie teñida a otra, apareciendo la última revisión completa de EG con algunas modificaciones en al artículo "Prolegomena to an Apology for Pragmaticism" (Peirce, 1906).

La siguiente ilustración contiene las doce tinturas que Peirce dio en "Prolegomena", aunque nos dice Roberts que estos patrones sólo estaban destinados a la publicación y que en su propia práctica, Peirce usaba tinta de colores y lápices de colores.

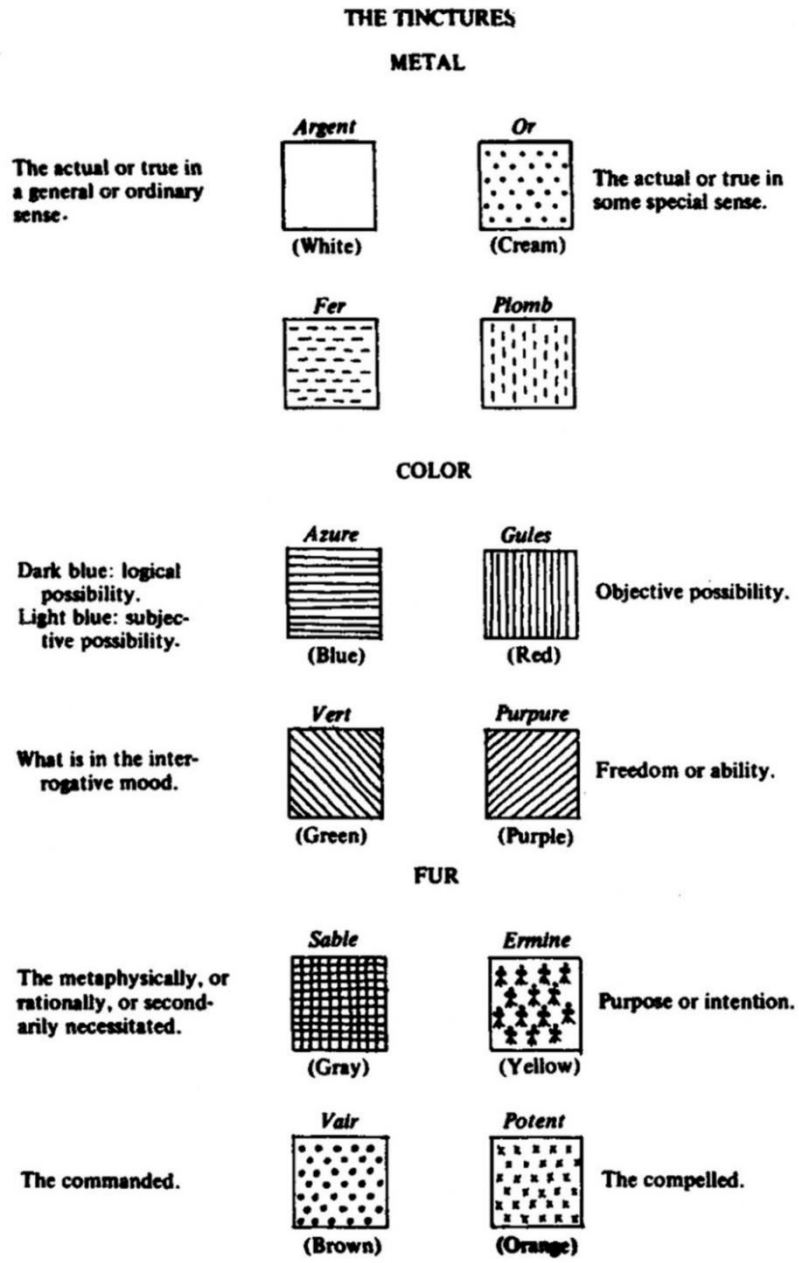


ILUSTRACIÓN 365. DOCE TINTURAS DE LOS PROLEGOMENA. TOMADA DE ROBERTS, 1973, P. 94.

> Every part of the exposed surface shall be tinctured in one or another of twelve tinctures. These are divided into three classes of four tinctures each, the class-characters being called Modes of Tincture, or severally, Color, Fur, and Metal. The tinctures of Colour are Azure, Gules, Vert, and Purpure. Those of Fur are Sable, Ermine, Vair, and Potent. Those of Metal are Argent, Or, Fer, and Plomb. (Peirce, 1906, p. 527)

Según Roberts (1973), Peirce admitiría más tarde que su estudio del color se encontraba en una etapa experimental, que no había sido exhaustivo y que estaba lejos de poder asegurar que funcionaran sin problemas [MS 295, p. 53], siendo así que después de la primavera de 1908 apenas se mencionarán más las tinturas, a pesar de que el propio Roberts (1973) sugiere convenciones y reglas provisionales que representan un primer intento de extender el uso de las tinturas más allá de "Prolegomena" y Ms 670.

Para Roberts (1973) las tinturas tenían el propósito de permitir representar inferencias, hipótesis, preguntas, órdenes, y "todo lo que pudiera estar presente en la mente de cualquier manera o en cualquier sentido" [MS 499 (s)], siendo necesarias para poder diferenciar entre los distintos tipos de universo y sub-universos de modalidad que se le presentaban conforme desarrollaba las nociones de posibilidad y necesidad:

> When tinctures are used, then, as in Prolegomena, the metals are used to mark different kinds of existence or actuality, the colors mark different kinds of possibility (here listed as "possibility consisting of ignorance, of variety, of power, of futurity"), and the furs mark different kinds of intention. (p.102)

6.11.5 Algunos puntos en común de EG con nuestros diagramas

6.11.5.1 Sujeto y predicado

Es evidente que el análisis que hizo Peirce de las proposiciones está muy por delante del que hemos realizado nosotros hasta la fecha en nuestros diagramas, y que se ocupó de cuestiones que ni hemos rozado todavía, como el modo en el que la proposición puede ser afirmada, negada, dudada, ordenada, etc (Hilpinen, 1982). En todo caso, según Roberts (1973), Peirce mantiene los términos "sujeto" y "predicado" en su lógica de las relaciones, aunque, a diferencia de la silogística tradicional, diferentes análisis producirán predicados diferentes. Y ello a pesar de que cada vez que se analiza la proposición se considera un solo sujeto y un único predicado:

> Thus, the proposition God gives some good to every man may be considered as having for its predicate either of the following rhemata:_gives_to _ ; _ gives some good to _; _ gives _ to every man; God gives _ to _; God gives some good to _; God gives _ to every man; _gives Some good to every man; God gives some good to every man.(…) In the last case the entire proposition is considered as predicate. A rhema which has one blank is called a *monad;* a rhema of two blanks, a *dyad;* a rhema of three blanks, a *triad;* etc. A rhema with no blank is called a *medad,* and is a complete proposition. A rhema of more than two blanks is a *polyad.* A rhema of more than one blank is a *relative* [4.438]. (pp. 114, 115)

Respecto a la doctrina de la cuantificación del predicado, Peirce la comentó partiendo desde la traída frase de Aristóteles *Es todo hombre todo animal* que él interpretaba, como nos dice Parry (1966), del mismo modo que De Morgan y que Ockham cuando mantuvo en la parte segunda de *Suma Logicae* que si solo existieran un animal y un hombre, entonces "Todo hombre es todo animal" y "Todo animal es todo hombre" serían verdaderas, pero nunca en el caso de que haya más de un hombre o más de un animal (Ockham & Böhner, 1954, p. 258). Peirce afirmó que la doctrina de la cuantificación del predicado de Hamilton y otros se sostenía en una interpretación de los cuantificadores *Todo* y *Alguno* en sentido distributivo y no colectivo y que tal interpretación tenía derecho a una posición igualitaria en lógica.

> 365. ***Quantification of the Predicate.*** The attachment of signs of propositional quantity to the predicates of simple propositions is called by this name. The ***dictum de omni*** defines the relation of subject and predicate, so that "Any ***A*** is ***B***" is to be understood as meaning "To whatever ***A*** is applicable, ***B*** is applicable." But this definition must be modified, in order to give any room for a quantification of the predicate. If then we are to take ***all*** and ***some*** in their proper distributive senses and not in collective senses, to say that "Every man is every animal" would, as Aristotle remarks, be absurd, unless it were meant that there was but one man and one animal, and that that one man was identical with that one animal. This system has never been proposed. But Hamilton,†1 with his followers, T. S. Baynes †2 and Calderwood, take the marks of quantity in a collective sense. They thus have, as one of the propositional forms, "Some man is not some animal," which precisely denies "Every man is every animal," in the distributive sense, and is entitled to an equal standing in logic. It does not deny "All man is all animal," in the collective sense of these logicians. This system had some vogue in its day. [CP 2.365]

6.11.5.2 Proposiciones de relación y de existencia. Expectativas y comunicación

Como ya dijimos, en nuestros diagramas y en los de Carroll es importante la distinción entre proposiciones de relaciones y de existencia, que nos parece muy similar a la clasificación que Roberts (1973) atribuye a los EG de

Peirce en proposiciones hipotéticas (en el amplio sentido antiguo que incluye condicionales, copulativas y disyuntivas), categóricas y de relaciones [MS 1147, p. 24 de "Logical graphs"].

Para nosotros, la división principal, reflejada en la separación habitual de la parte Alfa de EG de la parte *Beta*, se encuentra entre las proposiciones cuya forma no requiere el uso de líneas de identidad y las proposiciones cuya forma sí requiere su utilización. Y, a pesar de ser discutible si los individuos que representa *Beta* son o no son los mismos que podemos llegar a representar en nuestras redes, sí están representadas las conexiones que nos permiten inferir la presencia o ausencia de una variable a partir de la presencia o ausencia de otra, del mismo modo que lo permite la línea de identidad en Peirce.

También encontramos en Amaya (2014) lo que a nosotros nos parece una fundamentación de nuestras redes de expectativas, cuando se afirma que Peirce establece una conexión entre cognición racional y propósito racional, ya que el significado racional de toda proposición descansa en el futuro y que es a través de los futuros posibles generados mediante el proceso de inferencia y la elaboración de conjeturas que puede darse el pensamiento autocontrolado y la anticipación de conductas: "thought is rationality only so far as it recommends itself to a posible future thought. Or in other words the rationality of thought lies in its reference to a possible future" [CP 7. 361].

También nos dice Amaya (2014) que durante el proceso de elaboración de conjeturas es esencial en Peirce la noción de abducción, que restringe el surgimiento de hipótesis explicativas, siendo la única clase de inferencia que introduce novedades cognitivas, pues permite la construcción de hipótesis o conjeturas. Nosotros consideramos la abducción muy próxima a la inferencia, que en nuestras redes se produce repartiendo la activación desde un nodo *Or* o la inhibición desde un nodo *And* para producir razonamientos plausibles o probables.

En nuestras redes, la lógica se aborda teniendo en cuenta los principios de la comunicación y, según Noeh (2012), Charles S. Peirce tenía una teoría de la información ampliamente ignorada por los teóricos de la información contemporáneos. En este sentido, encontramos en Hilpinen (1982) que Peirce consideraba necesario distinguir entre la proposición y su afirmación o aserción, y que consideraba que las propiedades lógicas de la proposición dependían de su uso asertivo.

> 335. The assertion consists in the furnishing of evidence by the speaker to the listener that the speaker believes something, that is, finds a certain idea to be definitively compulsory on a certain occasion. There ought, therefore, to be three parts in every assertion, a sign of the occasion of the compulsion, a sign of the enforced idea, and a sign evidential of the compulsion affecting the speaker in so far as he identifies himself with the scientific intelligence. [CP 2.335]

Si Peirce tenía en mente algo similar a lo que nosotros pensábamos cuando dijimos que la lógica es la estructura formal que permite organizar y comunicar nuestras expectativas (Aznar, 2016b), entonces tenía que ocuparse de los distintos grados de certeza con los que una proposición puede ser afirmada o negada, incluyendo las relaciones entre posibilidad e incertidumbre.

6.11.5.3 Posibilidad y potencia aristotélica

Según Amaya (2014), hay un retorno evidente en Peirce a Aristóteles y su noción de potencia, motivado por el desarrollo de una nueva concepción de la posibilidad lógica, dado que el *Peirce's modal shift* fue caracterizado por él mismo como un retorno a la doctrina aristotélica de la posibilidad real (PihlsTröm, 2010), insistiendo en CP 5.527 (Carta a Signor Calderoni) en que el reconocimiento de esta categoría modal era un paso indispensable para hacer del pragmatismo una doctrina inteligible (Anderson D. R., 1995; Fisch, 1986; Lane R., 2007).

Así, desde la perspectiva epistemológica, lo posible es, como en nuestras redes, aquello que no se conoce que no sea el caso, aunque, desde la perspectiva ontológica, si lo posible es realmente posible, es posible independientemente de que nosotros lo conozcamos o no. Amaya (2014) nos dice que Peirce abandonó la concepción de lo posible ligada al paradigma de la probabilidad basada en la teoría de la frecuencia de Mill, según la cual "the possible is like most of the actual" (The Logic Notebook 1867, MS 140). Así, lo posible se convirtió para Peirce en algo que iba más allá de un determinado estado de información para convertirse en un tercer modo de ser que debía incorporarse a la lista de categorías ontológicas: "They are the being of positive qualitative possibility, the being of actual fact, and the being of law that will govern facts in the future" [CP 1.23]. Peirce afirma, según Amaya, que no es que ciertas cosas sean posibles porque no se sabe que no sean ciertas, sino que no

se sabe que no sean ciertas porque son vistas, con más o menos claridad, como posibles [CP 6.367]. Amaya distingue, basándose en Peirce [CP 6.371], la posibilidad lógica considerada como hipótesis que no implica ninguna contradicción, la posibilidad metafísica o de existencia cercana a la idea de potencialidad, y la posibilidad sustantiva como la admisibilidad de una hipótesis pura.

Por nuestra parte, a medida que desarrollamos nuestros diagramas, pero sobre todo nuestras redes, también nos hemos encontrado con la necesidad de distinguir modos de ser posible. Así, no tiene el mismo peso en las redes una combinación de variables teóricamente posible, por descabellada que parezca empíricamente, y una combinación con la que es razonable contar basándonos en la evidencia. Luego, aunque el universo de posibilidades es teóricamente infinito, es tarea de la razón, a medida que madura, ser capaz de determinar con precisión el conjunto de las que realmente deberían influirnos al organizar la conducta.

En nuestras redes distinguimos un nodo meramente posible con valor de actualidad o ausencia igual a cero y número de ocurrencias también igual a cero, de lo posible con valor de actualidad o ausencia igual a cero pero que ha sido ya validado por la experiencia. Además distinguimos estos dos modos de ser posible del ser probable, que tiene lugar cuando tenemos una razón suficiente para esperar que la presencia o ausencia del objeto se actualice como consecuencia de los hechos en curso. Distinguimos lo que es en acto, ya sea la presencia o la ausencia, que consideramos necesario y no contingente, porque no podemos no contar con ello al tomar nuestras decisiones. Y distinguimos lo imposible. Pero todos estos conceptos son insuficientes para abordar la complejidad de la modalidad si tenemos en cuenta la distinción entre verdad formal y material y más aún si consideramos los matices que el tiempo añade a los modos de ser. No podemos saber con certeza qué opinaría Peirce de nuestras redes y de las categorías que establecemos en ellas, sobre todo porque él mismo examinó el asunto con mayor detenimiento y agudeza que nosotros. En todo caso y como supera los objetivos de esta tesis profundizar en las cuestiones metafísicas que Venn (1881) pretendía eludir, nos conformaremos con señalar que Peirce era consciente de la necesidad de abordarlas. Como se afirma en Amaya (2014):

> En efecto, tal y como lo habría planteado desde 1877 siguiendo a Aristóteles (MS 1104; W 3. 235-37), siempre tenemos una metafísica, y cuanto menos nos ocupamos de ella con mayor certeza afirmamos su presencia. Y la metafísica estudia las características más generales de la realidad y los objetos reales (CP 6.6; 6. 214), y aborda cuestiones tales como "¿whether or not there be any real indefiniteness, or real possibility or impossibility?" (CP 6.5). La manera más apropiada de enfrentar las cuestiones metafísicas es comenzar por la lógica, puesto que es la única manera razonable de establecer los principios del razonamiento (CP 2.166). (p.117)

6.11.5.4 Verdad accidental y necesaria

Como señala Roberts (1973) y como analiza con más profundidad Amaya (2014), Peirce distingue en sus grafos entre *P* es verdad en determinadas circunstancias y *P* es verdad en cualquier circunstancia, anticipando la distinción entre implicación material e implicación estricta, o entre condicional veritativo funcional e hipotética u ordinaria. Como ya sabemos, los condicionales del primer tipo, *de inesse,* se refieren al aquí y al ahora, y se pueden relacionar con la verdad accidental que Aristóteles diferenciaba de la necesaria, del mismo modo que con la situación que describen nuestras redes de expectativas cuando uno de los nodos de la red asume un valor negativo que lo convierte provisionalmente en falso, convirtiendo, al mismo tiempo, su alternativa en necesaria en tal estado de cosas. Por ejemplo, si es falso ahora que en el aula hay alumnos que no son buenos, el nodo $A\neg B$ de la red asume un valor rojo o numéricamente igual a menos uno, de modo que en tal estado de cosas, en un sistema dicotómico, la alternativa *AB* es temporal y formalmente necesaria partiendo de A. Y si además es el caso que hay alumnos en clase ahora, dicha combinación será también materialmente verdadera y asumirá el color azul o el valor numérico seguro igual a uno. Sin embargo, cuando los nodos son eliminados definitivamente de las redes dejan de contar en el reparto de la propagación de la verdad o la falsedad (Aznar, 2016b). Otra cuestión ajena a los diagramas sería, parafraseando a Hume, preguntarnos cuándo es legítimo eliminar un nodo de forma definitiva para convertir su alternativa en necesaria. Así, desde un punto de vista práctico más que metafísico, podemos plantearnos la cuestión de cuántos días tiene que faltar un alumno a clase para que dejemos de contar con él y podamos decirle al conductor del autobús que arranque porque ya estamos todos. En todo caso, y como apreciamos en (Amaya, 2014), Peirce habla antes que nosotros de estados de información del hablante y del oyente de los que emergen diversos tipos de posibilidades que son ignorancia (amarillo o cero en nuestras redes) y que están relacionados con lo que Peirce denomina el rango o universo de posibilidades [CP 2.347].

Al margen de la verdad material de los nodos y de la necesidad formal que surge de la eliminación de ciertas alternativas de la red, ambas *a posteriori*, los diagramas de Peirce, como los nuestros o los de Venn deben ajustarse a lo que tradicionalmente se han llamado principios *a priori* de la razón para poder ser inteligibles, siendo lo más probable que todos ellos supongan perspectivas complementarias de un mismo entendimiento o *logos* común.

6.11.5.5 Asociacionismo y abducción

Como afirma Pietarinen (2011), los EG debían servir a Peirce en su búsqueda de los elementos simples e irreductibles del pensamiento que podrían ser los componentes básicos de los complejos de nuestros sistemas cognitivos. De hecho, los grafos de Peirce han despertado recientemente interés en el campo de la psicología cognitiva (Van Heuveln, 2006). Mantiene Johnson-Laird (2002) que el trabajo de Peirce no solo ha influido en libros de texto sobre lógica (Ketner, 1991) y en el trabajo de Jon Barwise y sus estudiantes sobre sistemas de razonamiento diagramático (Hammer E., 1995), sino que anticiparon su propia teoría de los modelos mentales, (Johnson-Laird,1983,1995; Johnson-Laird & Byrne, 1991), inspirando también la teoría de los grafos conceptuales de Sowa y las redes semánticas de inteligencia artificial (Sowa, 1984), así como la teoría de la representación del discurso en lingüística (Kamp & Reyle, 1993).

Nuestros diagramas, especialmente las redes de expectativas, han nacido bajo la influencia de los modelos de redes neuronales que estudiamos en Crespo (2006) y han sido condicionados también por la perspectiva que la psicología del pensamiento ofrece hoy sobre los procesos del razonamiento (González Labra, 2011). En este sentido, creemos compartir con el Peirce que nos transmite Roberts aspectos que consideramos relevantes en su forma de comprender el razonamiento. Por ejemplo, la idea de que el pensamiento es un proceso inconsciente ligado al movimiento, la influencia recibida del paradigma asociacionista y sobre todo, su forma de ligar el pensamiento a la excitación nerviosa [CP 7.396], anticipando nuestra forma de entender el modo en el que la inferencia puede propagarse en todas las direcciones de la red.

> Thinking as cerebration, is no doubt subject to the general laws of nervous action. When a group of nerves are stimulated, the ganglions with which the group is most intimately connected on the whole are thrown into an active state, which in turn usually occasions movements of the body. The stimulation continuing the irritation spreads from ganglion to ganglion (usually increasing meantime). Soon, too, the parts first excited begin to show fatigue; and thus for a double reason the bodily activity is of a changing kind. When the stimulus is withdrawn, the excitement quickly subsides (Peirce, 1880, p. 15)

Así, dice Roberts (1973) que cuando Peirce dirigió su atención a la teoría psicológica de la asociación en 1893, la relacionó con el análisis de la inferencia y aceptó sus dos principios habituales de asociación, contigüidad y semejanza, pero dividió la "*suggestion*" de *B* por *A* en dos operaciones, una que va de *A* a *AB* y otra que va de *AB* a *B* [CP 7.393], tal y como ilustraba el siguiente experimento mental:

> Looking out of the window, I see the cow whose milk we generally drink. There are certain difficulties which have occasioned a good deal of thought, so that I imagine I see a boy sitting by the cow milking her. The boy, and the stool, and the pail are added to my idea. Thence, I imagine that boy carrying the pail to the house. The cow and stool have dropped out. The straining of the milk presents itself to my imagination. A bowl is there and the pail. The boy is standing by; but I lose sight of him. I am following along the train dramatically, that is, following the interesting history. [CP 7.428]

Nosotros relacionamos el asociacionismo y el conexionismo en nuestros diagramas con la noción de ilación y en este sentido, creemos que compartimos con Peirce (1880) su afirmación de que el tipo general de inferencia es "P ∴ C", siendo "∴"el signo de la ilación. El conexionismo de nuestras redes permite en ellas la inferencia en todas las direcciones, de modo que es posible un razonamiento semejante a la abducción de Peirce, el cual nos permite suponer que *AB* es probable partiendo de *A*. Para ello, claro está, debemos considerar que la posibilidad *AB* es una de las posibilidades ligadas con *A*. La conexión o asociación de un estímulo de cualidad *A* con todo otro estímulo de cualidad *A*, nos parece evidentemente predeterminada en el diseño *a priori* de las redes de expectativas y tiene que mantenerse a medida que aumenta la riqueza y complejidad de nuestras conexiones aprendidas. Esta sería la base de la abducción que defiende Peirce como un proceso creativo, pero que no dejaba de ser, junto a la deducción y la inducción, como señala Legris (2016b), uno de los tres métodos básicos del conocimiento científico. Encontramos en Barrena y Nubiola (2007) que la abducción consiste para Peirce "en examinar una masa de hechos y en permitir que esos hechos sugieran una teoría" [CP 8.209, 1905] y la califican como un razonamiento mediante hipótesis, una intuición o *insight* que combina la lógica con el instinto y que entraña una novedad, un carácter

originario [CP 5.181, 1903], aunque no sería posible sin conocimientos previos, siendo "la única manera en que puede entrar algo nuevo en nuestro conocimiento"(p.9). Por ello el concepto de abducción de Peirce parece presuponer de algún modo lo que entendemos nosotros por inferencia partiendo de un nodo *Or*, aunque también parece hacer referencia al potencial y la capacidad creativa que resultan imprescindibles para que pueda avanzar el aprendiz dentro de su zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1979) o para que podamos ampliar nosotros el horizonte de nuestro mundo. En Peirce (1880) leemos:

> At the same time that this process of inference, or the spontaneous development of belief, is continually going on within us, fresh peripheral excitations are also continually creating new belief-habits. Thus, belief is partly determined by old beliefs and partly by new experience. Is there any law about the mode of the peripheral excitations? The logician maintains that there is, namely, that they are all adapted to an end, that of carrying, belief, in the long, run, toward certain predestinate conclusions which are the same for all men. This is the faith of the logician. This is the matter of fact, upon which all maximus of reasoning repose. In virtue of this fact, what is to be believed at last is independent of what has been believed hitherto, and therefore has the character of reality. (p.16)

A pesar de la complejidad de las relaciones que existen entre signo, mente y pensamiento y en las que no podemos entrar, parece que Peirce consideraba compatible la coexistencia en nuestros cerebros de los principios universales del razonamiento lógico, que buscaba descifrar ayudándose de los grafos, con la subjetividad de las creencias modeladas por el hábito de la experiencia individual.

> Thought is not necessarily connected with a brain. It appears in the work of bees, of crystals, and throughout the purely physical world; and one can no more deny that it is really there, than that the colors, the shapes, etc. of objects are really there. Consistently adhere to that unwarrantable denial, and you will be driven to some form of idealistic nominalism akin to Fichte's. Not only is thought in the organic world, but it develops there. But as there cannot be a General without Instances embodying it, so there cannot be thought without Signs (Peirce, 1906, p. 523).

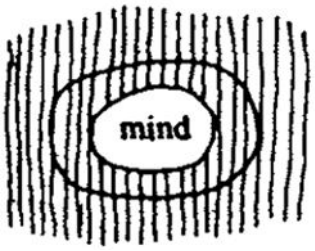


ILUSTRACIÓN 366. ES METAFÍSICAMENTE IMPOSIBLE QUE NO EXISTA REALMENTE UNA MENTE EN GRAFOS DE PEIRCE. TOMADO DE ROBERTS, 1973, P. 102.

Peirce (1880) tiende puentes entre la lógica y la psicología del aprendizaje: "Now, all vital processes tend to become easier on repetition. Along, whatever path a nervous discharge has once taken place, in that path a new discharge is the more likely to take place" (p.15). Y modificar el peso de los nodos en función de la experiencia, haciendo que lo más frecuente sea también lo más probable es algo al alcance de nuestras redes de expectativas, aunque no debemos olvidar que nos limitamos a representar los procesos más básicos y elementales de la inferencia, sin llegar ni siquiera a rozar los procesos creativos tradicionalmente atribuidos a la razón vital.

6.12 Frege (1848-1925)

Frege, que estaba interesado en diseñar un lenguaje formal que sirviera para el cálculo de consecuencias (Díez Martínez, 2005) desarrolla en su *Begriffsschrift* una notación o lenguaje artificial con la finalidad de prescindir de palabras en el transcurso de una demostración. Este nuevo lenguaje simbólico debía proporcionar a la aritmética unos fundamentos seguros y esencialmente lógicos, para lo cual debía derivar la totalidad de la aritmética partiendo de la lógica. Así, como afirma Luis M. Valdés en su introducción a la obra de Frege *Ensayos de semántica y Filosofía de la Lógica*: «Frege llevó a cabo, sin proponérselo, la transformación más radical que la lógica ha sufrido desde la época de Aristóteles» (Frege, Trad. 1998, p. 14).

Frege esperaba asegurar el mayor grado de rigor (Valiño, 2013), y ajustándose al ideal leibniziano de un lenguaje universal, esperaba mostrar la cadena de inferencias sin que se colara nada intuitivo o sin dejar algo fuera de control (Bejarano, 2017). El propio Frege lo expresaba del siguiente modo:

> Por lo pronto, ésta (conceptografía) debe servir para probar de la manera más segura la precisión de una cadena de inferencias y para denunciar toda proposición que quisiera colarse inadvertidamente y poder investigarla en su origen. Por ello, se renuncia a expresar todo aquello que carezca de significado para la *secuencia de inferencias* (…) También de aquí resultó el nombre: "conceptografía". Puesto que me he limitado a expresar, por primera vez, relaciones independientes de las propiedades específicas de las cosas, pude también emplear la expresión "lenguaje de fórmulas para el pensamiento puro". (Frege, Trad. 1972, p. 3)

Explica Valiño (2013) que Frege está interesado en el contenido conceptual de la proposición que depende de sus constituyentes: los conceptos y sus diversas articulaciones, de modo que la *Begriffsschrift* está construida sobre la base de los conceptos de *argumento* y *función,* a diferencia de la gramática del lenguaje ordinario que está construida sobre los conceptos de *sujeto* y *predicado,* enmascarando el contenido y sus relaciones lógicas. Luego Frege considera la proposición como una función con argumentos reemplazables cuyo contenido conceptual puede ser representado de distintos modos dependiendo de qué parte tomemos como constante y cuál como variable, habiendo sido precedido en esta idea por los *rhemata* de Peirce (Moktefi & Shin, 2012). En Frege, "Funciones y argumentos son así posibilidades de análisis de los contenidos juzgables, no sus componentes primitivos" (Frápolli, 2017, p. 9).

> La proposición de que Catón mato a Catón, muestra lo mismo. Si pensamos aquí "Catón" como remplazable en el primer lugar, entonces "matar a Catón" es la función: si pensamos "Catón como remplazable en el segundo lugar, entonces "ser matado por Catón" es la función; finalmente, si pensamos "Catón" como remplazable en ambos lugares, entonces "matarse a sí mismo" es la función. (Frege, Trad. 1972, p. 14)

La expresión $\forall x$ *(x es filósofo)* dice algo así como: sea cual sea el argumento que contemplemos, la función *«...es filósofo»* resulta ser verdadera, lo que en castellano ordinario equivale, restringiendo el rango de los argumentos a los seres humanos, a «Todo ser humano es filósofo», una oración compuesta gramaticalmente de sujeto-predicado, pero que desde el punto de vista lógico se compone de un cuantificador, una función y dos variables (Frege, Trad. 1998).

Así pues, Frege intenta mostrar en su notación la estructura profunda de la proposición que él concibe como una función ajena al lenguaje y la gramática. Así se afirma el principio de superación de la gramática que, según Frápolli (2017) supone que el análisis gramatical no es una fuente fiable de conocimiento lógico.

> Estas discrepancias con lo tradicional encuentran su justificación en que la lógica, hasta ahora, siempre se ha ajustado muy estrechamente al lenguaje y a la gramática. En especial, creo que la sustitución de los conceptos de *sujeto* y *predicado* por los de *argumento* y *función,* se acreditará con el tiempo. Es fácil ver cómo la aprehensión de un contenido como función de un argumento surte el efecto de una aprehensión formadora de conceptos. Más aún, la demostración de la conexión entre los significados de las palabras sí, y*, no,* o*, existe, algunos, todos,* etc., merece atención. (Frege, Trad. 1972, p. 4)

Es evidente que las cuestiones que aborda Frege van mucho más allá de aquellos aspectos elementales del razonamiento que nosotros pretendemos ayudar a visualizar a nuestros alumnos con los diagramas y las redes de expectativas y por eso nos limitaremos en esta tesis a la consideración de los aspectos diagramáticos de su trabajo, aunque no será difícil extraer consecuencias sobre qué aspectos de su teoría son incompatibles con nuestra forma

de entender la proposición misma y la naturaleza de los conectores desde la doctrina de la cuantificación del predicado.

La notación de Frege no fue muy bien acogida por sus contemporáneos (Moktefi & Shin, 2012), a pesar de que Mac Queen (1967) afirme que no era más difícil de manejar que la de los diagramas de Venn. Pero en todo caso, Frege no aparece en el libro de Martin Gardner *Logic Machines and Diagrams*, quizás porque Gardner habría estado de acuerdo con Valiño (2013) en que los aspectos diagramáticos de la *Begriffsschrift* son irrelevantes y conllevan la adopción de un marco teórico ajeno a Frege, por más que algunas lecturas de los últimos años la señalen más como sistema diagramático que lingüístico por la actual revalorización del uso de diagramas en lógica y matemática. Y ciertamente, encontramos en la *Conceptografía* que Frege distingue el pensamiento puro de la intuición, lo cual suscribiría cualquier lógico que sea consciente de que la estructura perceptible de los signos, (ya sean diagramas, sentencias, notación formal o tablas de verdad) solo representa el *Lekta* o estructura profunda de la proposición, sin que deba ser confundido el signo con dicho *Lekta* (Bochenski & Bravo, 1985).

> Además, en estos ejemplos se ve cómo el pensamiento puro, que prescinde de todo contenido dado por los sentidos o incluso por una intuición *a priori,* permite —sólo del contenido que nace de su propia naturaleza— producir juicios que, a primera vista, solo parecen ser posibles con base en alguna intuición. Esto se puede comparar con la condensación por medio de la cual se logra transformar el aire, que para una conciencia infantil da la impresión de ser nada, en un flujo sensible que forma gotas. (Frege, Trad. 1972, p. 38)

A pesar de lo que afirma Valiño (2013) y de que Coumet y De Mora (2002) mantienen que Frege participó en el movimiento de rechazo a los diagramas geométricos de Euler y Venn por considerarlos algo extraño a la lógica, la notación de Frege ya fue considerada por Mac Queen (1967) tanto diagramática como algebraica al compararla con la empleada en los circuitos de conmutación. Otros autores como Kauffman y Weiss (2001) han analizado las características diagramáticas de la notación bidimensional de Frege y, del mismo modo que Macbeth (2009) y Toader (2004), han considerado que debe ser concebida diagramática por las facilidades que ofrece para visualizar la estructura lógica de la inferencia y porque en el curso de una demostración nos permite percibir relaciones que no estaban mencionadas explícitamente en las premisas. También Frápolli (2017) ha sugerido que la notación de Frege es una representación perspicua útil para el análisis de las relaciones lógicas entre los contenidos juzgables que son los pasos de las inferencias. Además, la *Enciclopedia de Stanford* incluye su notación como parte de los sistemas diagramáticos (Shin et al., 2018).

La opinión de Venn era que la notación de Frege merece ser llamada diagramática casi tanto como simbólica, aunque critica la excesiva cantidad de espacio que requiere.

> A horizontal dash with a short vertical stroke at the end signifies a proposition. The line S running into P means that P is dependent upon S; this is in fact his sign of dependence or implication. The little stroke under the P-line marks negation. So that the whole arrangement stands for 'If S then not P '. We can proceed in this way to build up more complicated dependencies. For instance, by joining this whole arrangement on to another such line, we can represent the compound dependency ' The fact that S implies the absence of P, implies Q', and so on. One obvious defect in this scheme is the inordinate amount of space demanded by it; nearly half a page is sometimes demanded for an implication which any reasonable scheme would compress into half a line. (Venn, 1881, p. 415)

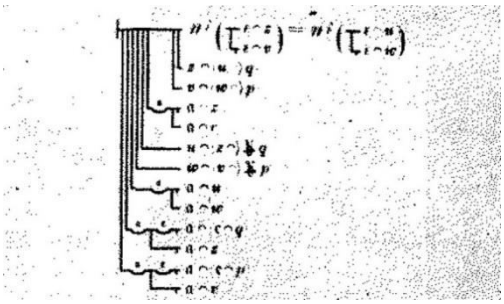


ILUSTRACIÓN 367. EJEMPLO DE LA *BEGRIFFSSCHRIFT* DE FREGE. TOMADO DE BOCHENSKI Y BRAVO, 1985.

Más recientemente, Moktefi y Shin (2012) han incluido la notación de Frege de 1879 dentro de su *Historia de los diagramas lógicos*, considerando que su notación bidimensional es diagramática.

Recordemos que el primer elemento bidimensional que introduce Frege en la *Conceptografía* es el símbolo constituido por una línea horizontal, o barra de contenido, con una pequeña barra vertical en el extremo izquierdo que es la barra del juicio. Vemos en Frege (Trad. 1972) que si se omite la vertical el símbolo expresa una mera representación mental (p.6). La barra vertical puede leerse como la afirmación de que lo expresado en la barra de contenido es un hecho, y como ocurre en la expresión "la muerte violenta de Arquímedes en la toma de Siracusa es un hecho", *ser un hecho* es el único predicado que hay en el lenguaje de la conceptografía y el símbolo ⊢ es el único predicado común para todos los juicios (p.7). Matiza Frege que "casa" no es un término judicable, aunque puede ser parte de la expresión "hay casas (o una casa)" que sí es un contenido judicable (p.6).

> Si se omite la pequeña barra vertical en el extremo izquierdo de la horizontal, esto transforma el juicio en una *mera combinación de ideas* acerca de la cual no expresa, quien la escribe, si reconoce o no verdad en ella(...) únicamente ha de provocar en el lector la representación(...) distinguimos entre contenidos *judicables* y *no judicables.* (p.6)

En nuestras redes, el juicio tiene lugar cuando damos un valor de certeza a los nodos distintos de cero, pues mientras un nodo permanece amarillo y sin un valor n de frecuencia acumulada, dicho nodo no representará otra cosa que una combinación de ideas acerca de la cual no expresa, quien la escribe, si reconoce o no verdad en ella.

Para Frege, si *A* y *B* significan contenidos judicables, entonces, la circunstancia de que no puede ser afirmada *B* y negada *A, (B→A),* se expresa conectando la barra de contenido de *B* a la barra de contenido de *A* mediante una vertical formando un codo (p.9) como se aprecia en la siguiente imagen:

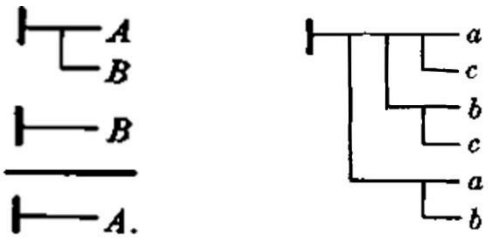


ILUSTRACIÓN 368. IZQUIERDA: *MODUS PONENS* EN FREGE. DEERECHA: SI VALE B→A Y VALE C→B, VALE C→A.

El ejemplo de la derecha de la ilustración anterior lo describe Frege (Trad. 1972) así:

> Sea *a* la circunstancia de que la pieza de acero E se magnetiza; *b* la circunstancia de que por el alambre D fluye una corriente galvánica: c la circunstancia de que se oprime la llave T. Así, obtenemos el juicio: "si vale la proposición de que E se magnetiza tan pronto fluye una corriente galvánica por D; y si vale la proposición de que fluye una corriente galvánica por D tan pronto se oprime T: entonces, E se magnetiza si se oprime T". Si se presuponen conexiones causales, entonces (5) se puede expresar así: "si *b* es una condición suficiente para *a,* si *c* es una condición suficiente para *b,* entonces *c* es una condición suficiente para *a".* (p.24)

Hay que tener en cuenta que Frege (Trad.1972), como Venn, mantiene que la conexión causal del término conjuntivo "si" no se expresa en los símbolos, aunque un juicio del tipo "si la luna está en cuadratura, entonces parece un semicírculo" sólo puede emitirse con base en esto (p.8). Pero en todo caso, ya hemos explicado que en una lógica del objeto es posible afirmar una relación condicional en la que un objeto verdadero sea el consecuente, pero que esto no es admisible en la lógica del conjunto.

Para comprender los diagramas de Frege (Trad. 1972) debemos saber que “si se añade una pequeña barra vertical en la parte inferior de la barra del contenido, entonces con ello se quiere expresar la circunstancia de que el contenido no tiene lugar” (p.10).

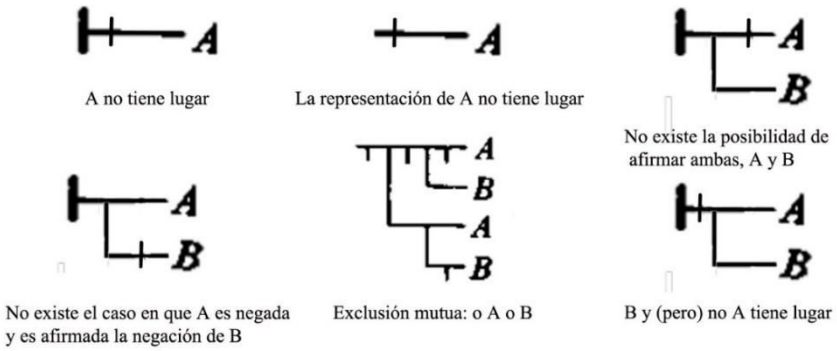


ILUSTRACIÓN 369. EJEMPLOS DE NOTACIÓN CON NEGACIONES. TOMADOS DE FREGE, TRAD. 1972, PP. 11,12.

Indican Moktefi y Shin (2012) que la bidimensionalidad de la notación de Frege permite mostrar relaciones lógicas que no son explícitas en las premisas y lo demuestran tomando como ejemplo la representación gráfica de $C \rightarrow (B \rightarrow A)$ en un solo diagrama que, según ellos, permite obtener tres afirmaciones distintas. Como vemos en la siguiente ilustración, la misma ventaja puede ser atribuida a nuestros diagramas y redes. Nosotros podemos otorgar un estatus distinto a las combinaciones explícitamente afirmadas por la fuente ampliando el grosor de los nodos en las redes, y del mismo modo, podemos distinguir en el diagrama de Marlo, dentro de lo teórico, las combinaciones confirmadas de las que no han sido ni confirmadas ni refutadas. En este caso, dentro del modelo de *C* señalamos las posibilidades de $c\neg b$ como producto combinatorio con $\underline{a}$, de manera que $c\neg ba$ y $c\neg b\neg a$ quedan con el rango de combinaciones hipotéticas, una etiqueta inaceptable para Frege y toda la lógica matemática, que no distingue entre clases posibles y clases confirmadas cuando no son el caso ahora.

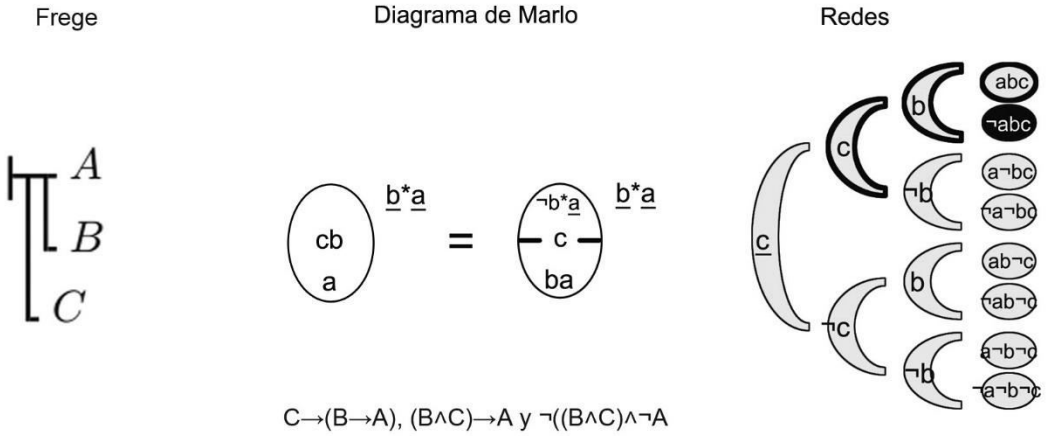


ILUSTRACIÓN 370. C → (B→A) EN FREGE Y MARLO.

Mantener la distinción entre posible y confirmado se vuelve difícil en las proposiciones complejas, siendo una de las alegaciones que hizo Venn en *Symbolic Logic* para prescindir de la diferencia entre hipotético y categórico. Una vez suprimida la necesidad de atender a este matiz tan fino y rodeado de controversia, podemos eliminar también la distinción que todavía se mantiene en Boole entre proposiciones primarias y secundarias, dado que una de sus diferencias es que en las secundarias los términos siempre son tomados de forma hipotética. Por su parte, cuando Frege hace referencia a la función en § 9 emplea proposiciones hipotéticas o secundarias del tipo (A→B) →(B→C). Así, dice Frege (Trad. 1972): “Si, expresada en nuestro lenguaje de fórmulas, pensamos la circunstancia de que el hidrógeno es más liviano que el anhídrido carbónico, entonces en el lugar del símbolo del hidrógeno podemos poner el símbolo del oxígeno o del nitrógeno” (p.14). Esta proposición podemos formalizarla como “H → O ⋁ N”. y podría haber servido para reafirmar que no hay diferencias entre las proposiciones primarias y

secundarias. Recordemos que Frege mantiene que la distinción de los juicios en categóricos, hipotéticos y disyuntivos sólo tiene significación gramatical (p.7), lo mismo que diría Venn unos años más tarde. Y si atendemos a la representación diagramática de las proposiciones, Frege parece capaz de mostrar en un solo diagrama las proposiciones secundarias. De hecho, no hay diferencia en la notación de Frege entre la representación de una proposición de primer grado del tipo *Si A, entonces B* y la representación de una proposición secundaria o compleja del tipo *Si A es B, entonces C es D*. En ambos casos se trata de funciones, aunque los argumentos de la proposición simple son *A* y *B* y los argumentos de la proposición compleja son también funciones.

Frege (Trad.1972) nos dice en § 10 que para expresar una función indeterminada del argumento *A*, encerramos *A* entre paréntesis y nombramos la función con una letra del alfabeto griego. Por ejemplo: Φ (*A*), Ψ(*A,B*). Tales funciones pueden ser afirmadas como en " ⊢ Ψ(*A,B*)" (p.15). Y nos dice Frápolli (2017) que en base al principio de prioridad proposicional, los portadores primarios de las propiedades lógicas son los pensamientos en sentido fregeano, esto es, las proposiciones completas, y no los conceptos. Así, es natural que Frege prestara más atención a la verdad formal de las relaciones que a la verdad material de los términos, que era lo que preocupaba a Aristóteles al sistematizar la teoría de la demostración en el silogismo categórico.

Nosotros pensamos que eliminar la diferencia entre argumentos de una función-proposición que son variables, términos o cualidades y argumentos de una función-proposición, que son a su vez funciones o relaciones, no puede hacernos olvidar que, después de todo, la proposición compleja puede ser reducida a un único modelo proposicional que realmente nos informe de lo que es razonable esperar. Dicho modelo tendrá que ser capaz de expresar, de la forma más clara y resumida posible, qué combinaciones de variables o términos son necesarias y cuáles están prohibidas en la tabla de verdad de tal proposición compleja. Además debe ser viable hacer explícito el camino y las reglas que seguimos para pasar desde la representación de las proposiciones simples que la componen a su representación final en un único modelo. Estos caminos y reglas se muestran en el diagrama de Marlo con el método de las combinaciones imposibles.

Cuando en el desarrollo de nuestros diagramas llegamos por primera vez a la situación de tener que representar proposiciones del tipo (*A*→*B*)→(¬*C*→*D*) estuvimos tentados de nombrar (*A*→*B*) y (¬*C*→*D*) con letras griegas para reducir la expresión a algo como "β→γ" que cupiera en solo modelo proposicional. Sin embargo, pensamos que tal estrategia nos alejaba de la verdadera comprensión de la proposición, la cual, según nuestro punto de vista, exige captar qué presencias o ausencias podemos esperar a partir de la presencia o ausencia de los objetos de nuestro mundo. Así, la proposición anterior preferimos formalizarla como $(a_x b) \supset (\neg c_x d)$, la cual se interpreta como "que la totalidad de *A* sea igual a parte de *B* incluye que la totalidad de ¬*C* sea igual a parte de *D*". O mejor: "en todos los casos en los que *A*¬*B* sea imposible, ¬*C*¬*D* será imposible también". Después de aplicar el método de las combinaciones imposibles reducimos esta expresión a un único condicional $(\neg d \neg c)_x(a \neg b)$ que afirma que la totalidad de los casos en los que haya algo del tipo ¬*DC* es igual a parte de los casos en los que haya algo del tipo *A*¬*B*, lo que ya puede ser representado en un único modelo proposicional. Ya hemos dicho que algunas funciones establecen relaciones entre nodos que pueden ser representadas utilizando las conexiones combinatorias que de forma natural se establecen entre variables para generar la totalidad de los objetos que componen el universo del discurso. Es decir, que en las proposiciones primarias o simples basta con las redes de un diagrama de estructura bayesiana para resolver inferencias, tal y como ocurre en el silogismo. Sin embargo, en las proposiciones complejas o secundarias es necesario implementar la red con conexiones *a posteriori* entre los nodos de la estructura bayesiana. Así, observamos en las redes de la siguiente ilustración que el implemento en la red que supone añadir la información contenida en (*A*→*B*) →(¬*C*→*D*) tiene como consecuencia que los estados de algunos nodos del conjunto de *A* tienen consecuencias en los estados de nodos del conjunto ¬*A*, lo cual no sucede en las proposiciones primarias.

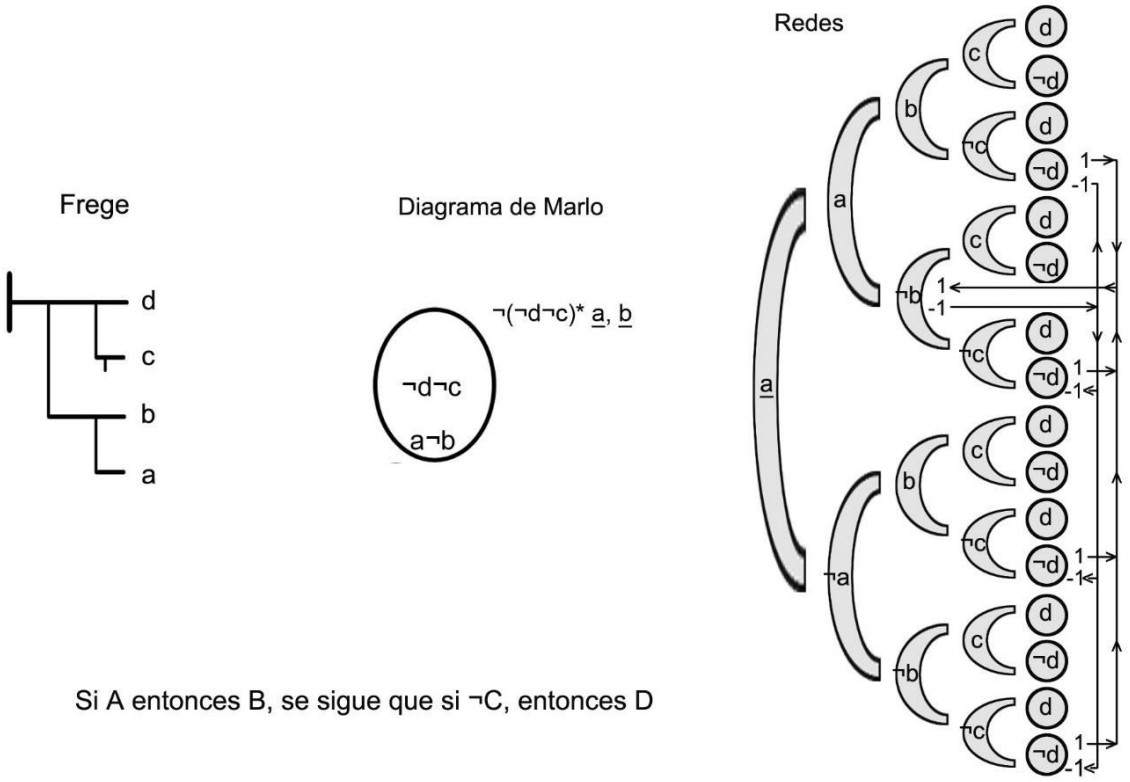


ILUSTRACIÓN 371 COMPARACIÓN DE PROPOSICIÓN SECUNDARIAS EN FREGE Y MARLO.

En la anterior ilustración mostramos la representación de la proposición secundaria *Si B se sigue de A, entonces de no C se sigue D* en Frege, los diagramas de Marlo y las redes de expectativas. Nuestro modelo proposicional ya condensa la información contenida en la proposición compleja una vez que hemos aplicado el método del producto de las combinaciones imposibles.

En relación a la generalidad, nos dice Frege (Trad.1972) que si al final de ⊢ se coloca una letra gótica y a la barra del contenido se le hace una concavidad en la cual se pone esta misma letra, esto significa que es un hecho el juicio de esa función, sea lo que fuere lo que se considere como su argumento (p.15) y además, afirma que de tales juicios siempre se puede deducir una cantidad discrecional de juicios con menor contenido general (p.16).

La función, sea lo que fuere su argumento, es un hecho.

Lo que tiene la propiedad Ψ, no tiene la propiedad P, o "ningún Ψ es un P"

ILUSTRACIÓN 372. AFIRMACIONES CON GENERALIDAD EN FREGE.

Como nosotros no consideramos la posibilidad de una proposición-función-proporción sin argumentos, ni concebimos una relación entre argumentos que no sea una función cuantificacional, tal y como se sigue de la doctrina de la cuantificación del predicado, nos resulta redundante nombrar por separado funciones y argumentos en nuestros diagramas, aunque no ponemos en duda la utilidad de tal recurso para realizar ciertos análisis metalógicos que van más allá de nuestros conocimientos. En todo caso, según Frege, negando la generalidad se obtienen las proposiciones particulares, con lo que es posible generar el cuadrado de oposición lógica.

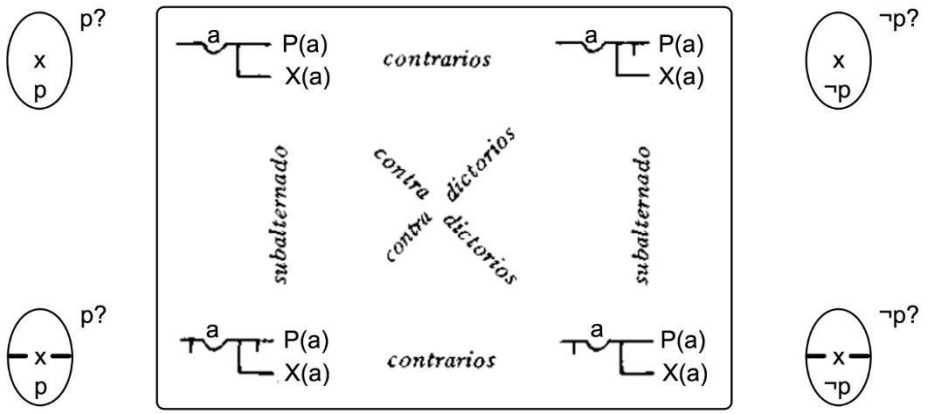


ILUSTRACIÓN 373. CUADRO DE OPOSICIÓN LÓGICA FREGE-MARLO. BASADO EN FREGE, 1972, P. 19.

La notación bidimensional de Frege le permite presentar en un solo diagrama la transformación de *Si B, entonces A* en *Si no A, entonces no B*. Lo que viene a decir la primera figura en § 17 es que *no puede ser que sea falso que no tener A implica no tener B y que sea verdad al mismo tiempo que tener B supone tener A*. Luego Frege convierte la afirmación *No es posible que no tener A implique no tener B* en *Tenemos ¬A y no tenemos ¬B, luego tenemos ¬A y B*. Así se podrá demostrar que era cierta la primera afirmación.

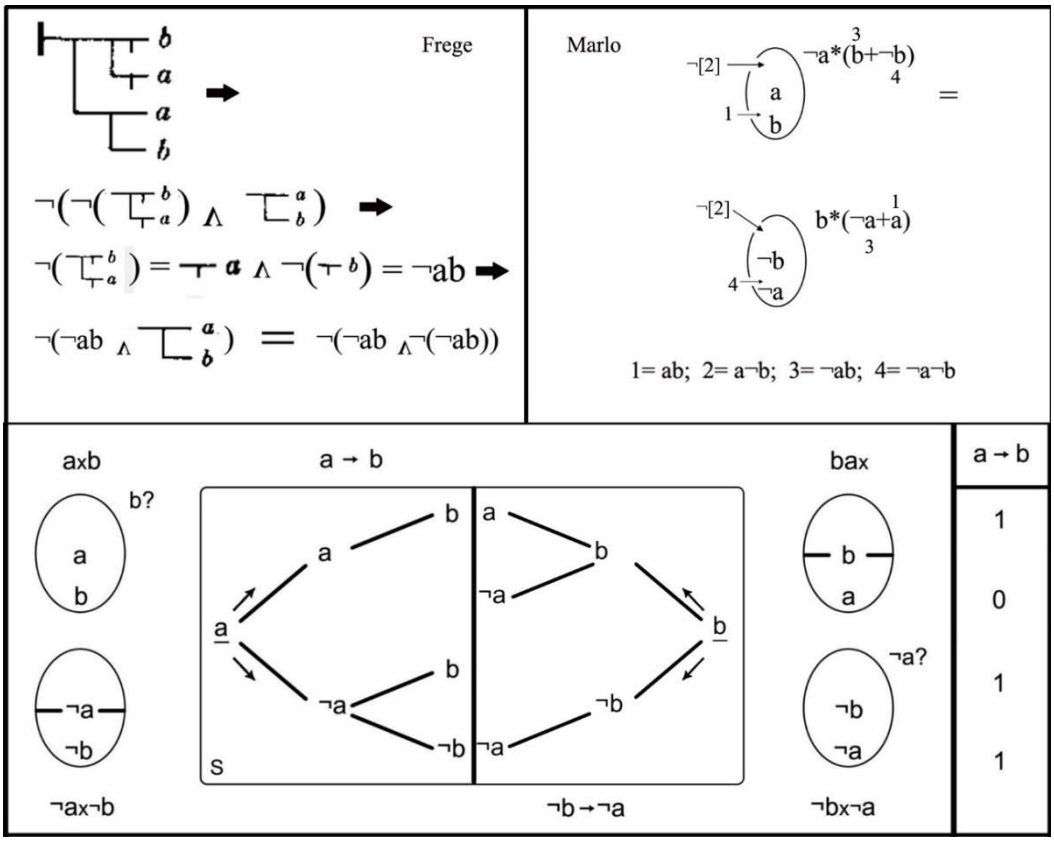


ILUSTRACIÓN 374. PASO DEL *MODUS PONENS* AL *MODUS TOLLENS* EN FREGE, DIAGRAMA DE MARLO Y REDES. LA NOTACIÓN DE FREGE HA SIDO MODIFICADA PARA FACILITAR SU COMPRENSIÓN.

Si observamos con cierto detenimiento las redes de expectativas de la ilustración 374, comprobaremos de forma evidente que cuando es cierto que $A \rightarrow B$, es cierto que $\neg B \rightarrow \neg A$. Al observar los diagramas de Marlo, debemos percatarnos de que el modelo de *Si A, entonces B* se obtiene eliminando del modelo de *A* la posibilidad de $\neg B$, lo cual deja, al mismo tiempo, como única posibilidad teórica de $\neg B$ su combinación con $\neg A$. Así, en la parte superior derecha de la ilustración anterior mostramos que las mismas posibilidades son contenidas en el modelo de *A* y en

el modelo de ¬*B*. En el modelo de *A* está implícita ¬*a*¬*b* porque no se dice nada de ¬*B* al margen de *A* y en el modelo de ¬*B* está implícita la posibilidad *ab* porque no se dice nada de *A* al margen de ¬*B*.

Por otra parte, es interesante señalar que la lógica que concibe Frege es una lógica del objeto en la que partiendo de que es cierto *A* es posible inferir que *B*→*A*, lo cual, según Valiño (2013), es expresión de una de las nueve leyes del pensamiento que constituyen el núcleo a partir del cual Frege realiza sus derivaciones. Sin embargo, esta ley no es aceptable ni en las redes de expectativas ni en los diagramas de Marlo, como ya mostramos anteriormente, porque se parte en ellos de una lógica del conjunto (Aznar, 2016b). Este principio podría demostrarse en nuestros diagramas solo si se añade la condición de que nos centramos en determinar *el qué* de un único objeto.

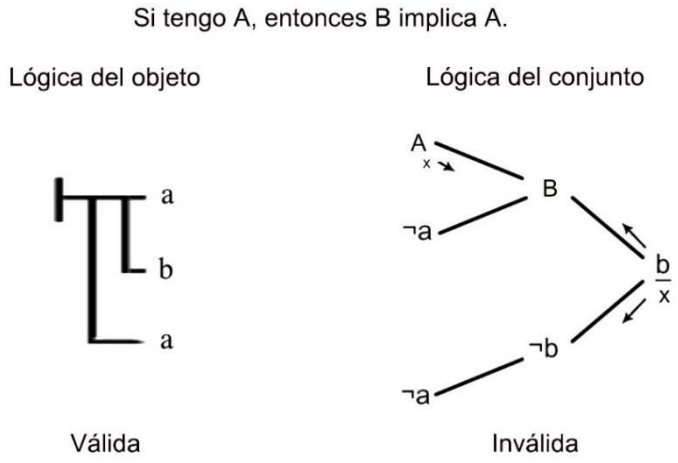


ILUSTRACIÓN 375. NO ES POSIBLE TENER A Y QUE SEA FALSO QUE TENER B IMPLICA TENER A.

A pesar de que nosotros preferimos el uso de las redes de expectativas y de los diagramas de Marlo en el aula, tenemos que reconocer que *la Conceptografía* de Frege abordó la expresión de ideas mucho más complicadas que las inferencias elementales que hemos tratado de ilustrar nosotros hasta ahora. De hecho, dice Frege (Trad. 1972) en §23 que es en las ideas complicadas en las que es reconocible con más claridad la utilidad de su notación (p.38), por lo que nos queda como reto para el futuro ser capaces de representar tales cuestiones en nuestros diagramas.

> Por ejemplo, sea F la propiedad de ser un montón de frijoles; sea *f* el procedimiento de quitar un frijol de un montón de frijoles, de modo que *f* (*a, b*) significa la circunstancia de que *b* contiene todos los frijoles del montón *a,* menos uno, y nada más. Por tanto, según nuestra proposición, se llegaría al resultado de que uno sólo o, incluso, ningún frijol es un montón de frijoles si la propiedades de ser un montón se hereda en la serie *f*. Sin embargo, en general éste no es el caso, ya que hay un cierto *z* según el cual *F* (*z*) no es judicable en virtud de la indeterminación del concepto "montón".(p.45)

Si tuviéramos que aventurarnos hoy a proponer una respuesta al problema del montón de frijoles en las redes de expectativas, diríamos que es cierto que hay un montón de algo cuando el valor numérico de un nodo *Or* alcanza una determinada proporción respecto al valor total de objetos que están siendo considerados en el universo del discurso. En todo caso, el significado puede ser negociado.

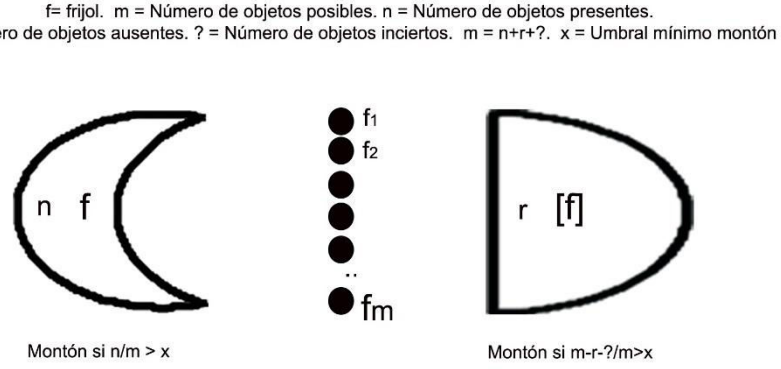


ILUSTRACIÓN 376. MONTÓN DE FRIJOLES EN REDES DE EXPECTATIVAS.

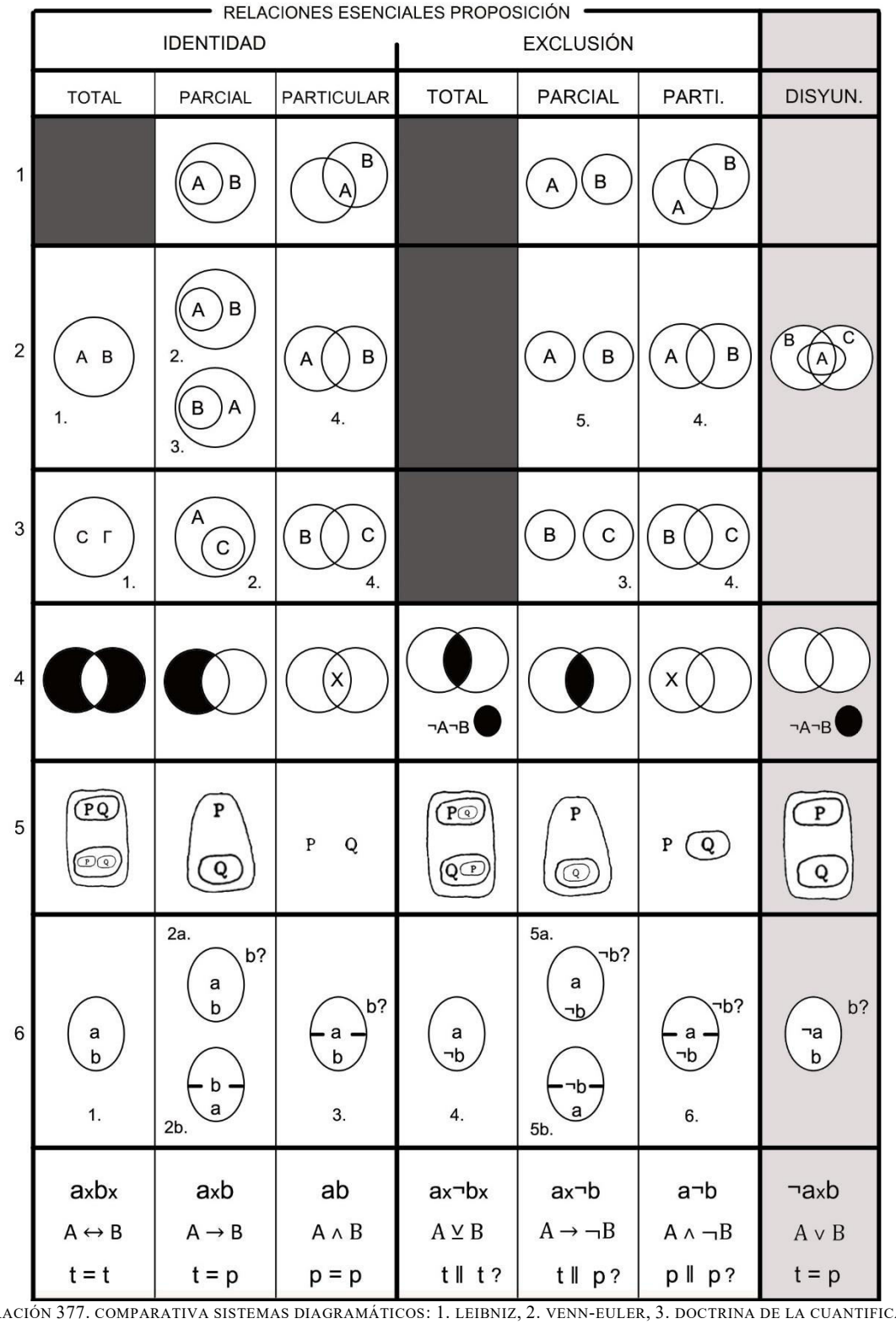


ILUSTRACIÓN 377. COMPARATIVA SISTEMAS DIAGRAMÁTICOS: 1. LEIBNIZ, 2. VENN-EULER, 3. DOCTRINA DE LA CUANTIFICACIÓN DEL PREDICADO SEGÚN HAMILTON, 4 LÓGICA MATEMÁTICA EN VENN, 5. PEIRCE. 6 MARLO. NOTACIÓN DE LA ÚLTIMA FILA EN DIAGRAMA DE MARLO, CONVENCIONAL Y BASADA EN HAMILTON

7 LOS DIAGRAMAS EN EL AULA

7.1 Resultados iniciales

Los diagramas de Marlo vienen siendo desarrollados en el aula desde el curso 2013-2014 en el I.E.S. Pablo Neruda de Huelva. La versión inicial más simple del diagrama de Marlo, sin interrogaciones al margen y limitada a la resolución de silogismos sin atender a las exigencias de las conclusiones categóricas, fue probada por primera vez en la primera evaluación de Filosofía y Ciudadanía, en un bloque dedicado al conocimiento, cuyo objetivo era enseñar a pensar de forma crítica a los alumnos. Destacamos del pensamiento racional su deber de ajustarse a las leyes de la lógica, las cuales explicamos primero con las tablas de verdad en tres sesiones y luego con los silogismos. Se instruyó durante siete horas en cómo trabajar los silogismos en el diagrama, usando la pizarra y una metodología participativa que favoreciera el aprendizaje por descubrimiento. Posteriormente los alumnos recibieron un cuadernillo con treinta ejercicios resueltos al que, según ellos, dedicaron una media de tres horas.

El examen fue: Formaliza y resuelve estos silogismos sacando sus dos conclusiones posibles cuando las haya. Formalizar bien las premisas es un 25% de la nota. Calcular convirtiendo y transformando hasta llegar a la solución gráfica es un 50% e interpretar el resultado un 25%. Duró 45 minutos, sin ayuda de material. Los silogismos fueron: 1º Todos los hombres son buenos. Algunos hombres son ricos. 2º Todos los comecocos son amarillos. Algún juguete es amarillo. 3º Todos los perfumes son caros. Todos los regalos son caros. 4º Ningún machete es elegante. Todas las navajas son elegantes. 5º Algún castor es negro. Ningún feo es un castor. 6º Todas las marcas son caras Algún transistor no es de marca.

Aprobó el 88,3% de los alumnos, con un 36,6 % de exámenes perfectos, sin un solo error. Y si consideramos sólo el grupo de Ciencias este porcentaje de exámenes perfectos llegó hasta el 46,6 %. Es decir, que lo más habitual fue no cometer ningún error. Los siete alumnos que suspendieron este examen suspendieron en la evaluación una media de seis asignaturas.

La gráfica muestra el rendimiento de ambos grupos tomados en conjunto, aunque fue ligeramente mejor en el de ciencias. Se considera rendimiento bajo aquel que obtiene menos del 48% de la nota. Medio el que obtuvo entre el 48 y el 79% de la nota. Alto entre el 80 y el 99% de la nota. Y perfecto el que llegó al 100%. Los datos se ofrecen en número de alumnos.

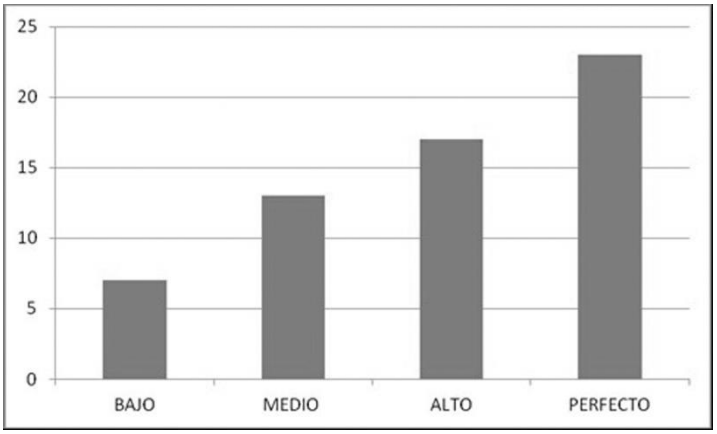


TABLA 47. RESULTADOS DEL PRIMER EXAMEN DE SILOGISMOS CON LA VERSIÓN INICIAL DEL DIAGRAMA DE MARLO. TOMADA DE AZNAR, 2014.

Estos resultados nos convencieron de que el examen había resultado demasiado fácil con el diagrama, lo cual me animó a trabajarlo con un grupo reducido de primero y segundo de la ESO. Y pude comprobar que también el 90% comprendían perfectamente los principios del método (Aznar, 2016c). Al valorar su experiencia con el diagrama varios alumnos lo compararon con hacer *sudokus*, casi adictivo: para la mayoría un ocho sobre diez en entretenido. Entonces me pareció que algo abstracto y complejo se había convertido en un juego de niños, y aunque es posible que yo transmitiera mi entusiasmo a mis estudiantes condicionando sus respuestas, lo cierto es que sobre-motivados o no, habían sido capaces de asimilar el método y resolver los silogismos de forma brillante (Aznar, 2015).

El diagrama de Marlo fue presentado por primera vez en Morelia, México, en el XVII Encuentro Internacional de Didáctica de la Lógica celebrado en Morelia en noviembre de 2014 organizado por la Academia Mexicana de la Lógica y la recepción que tuvo allí fue un importante espaldarazo para seguir trabajando en él.

7.1.1 Desde 2014 a la actualidad

Motivado por lo que me parecía un rendimiento muy elevado en el razonamiento lógico de mis alumnos en comparación con el que había conseguido con los métodos tradicionales en mis tres lustros anteriores como docente, me dispuse a seguir desarrollando los diagramas observando minuciosamente en el aula la actuación de los alumnos al enfrentarse a la resolución de problemas lógicos. Para ello les pedía que pensaran en voz alta y analizaba su comportamiento gestual y sus movimientos oculares en la pizarra: ¿mira, señala y nombra los elementos del ejercicio de manera coordinada? Así, se aprovecharon las sesiones en el aula para realizar un constante análisis y revisión de sus procesos: ¿dónde está la dificultad? ¿Dónde exactamente se ha salido del camino? ¿Podemos sistematizar sus errores en busca de tendencias que corregir con ayuda de señales presentes en las representaciones gráficas? Esperaba que los diagramas sirvieran de apoyo en el razonamiento lógico del mismo modo que sirven las imágenes de soporte al razonamiento de los geómetras y pensé que podría progresar en esta tarea si combinaba, con todo el rigor del que yo era capaz, la observación empírica de sus procesos con la investigación teórica en psicología acerca de los sesgos del razonamiento. La finalidad de generar herramientas gráficas que facilitaran al alumnado la "visualización" de sus procesos mentales al cometer los errores. Posteriormente se contrastaba empíricamente y de forma práctica en el aula la validez y eficacia de estas herramientas, utilizando las aportaciones de los alumnos y sus dudas como sistema de retroalimentación y mejora. Intentamos validar las herramientas por el método de acuerdo entre jueces. Se instaba a todos los alumnos/as a manifestar todas las críticas que les surgieran. La herramienta debía ser satisfactoria para ellos. También se probaban con alumnos de menor edad de primero de la ESO, para ver hasta qué punto eran compatibles con el sentido común y la estructura natural del discurso y de hecho, grabamos un vídeo con dicha experiencia (Aznar, 2014b, disponible en https://www.youtube.com/watch?v=6blBu1EN_EM).

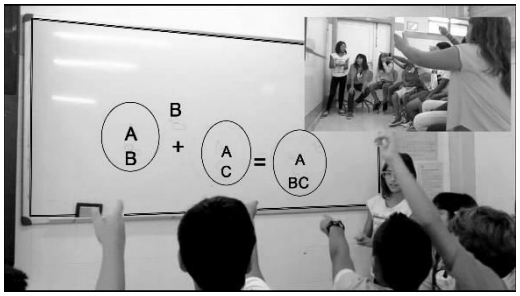
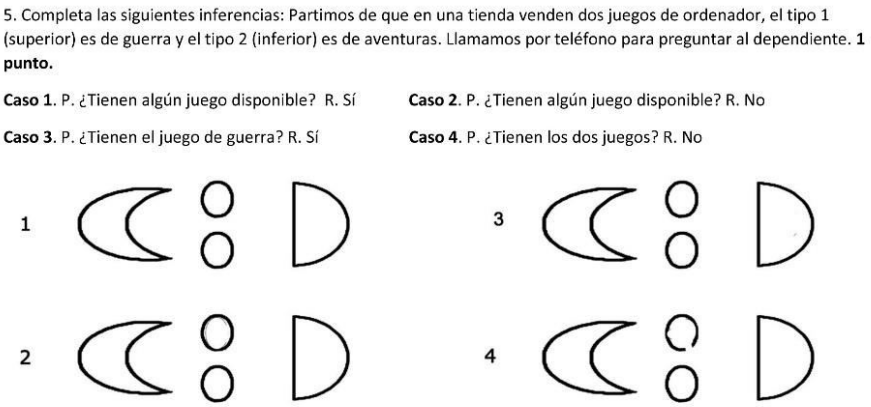


ILUSTRACIÓN 378. NIÑOS DE ONCE Y DOCE AÑOS RESOLVIENDO SILOGISMOS TRAS RECIBIR UNA HORA DE INSTRUCCIÓN. SE HA REMARCADO EL CONTENIDO DE LA PIZARRA (AZNAR, 2014B). TOMADO DE AZNAR, 2020C.

Las herramientas surgidas en el aula han sido expuestas a la crítica de los expertos en la materia tanto en entrevistas personales concertadas como en la participación en congresos y publicaciones que obligan a su revisión anónima por pares.

También utilizamos la retroalimentación que obtuvimos gracias a cuestionarios basados en las redes de expectativas que diseñamos y pasamos a todo el alumnado del centro en el año 2016 (edades entre 12 y 19 años). Para ello contamos con la ayuda de mis alumnos de la asignatura optativa de Psicología de segundo de Bachillerato. Gracias a esta investigación pudimos captar las dificultades del alumnado para distinguir los nodos *Or* (cualquiera) de los nodos objeto (alguno en concreto), así como para comprender que la representación gráfica de la expresión "es falso que alguno" (Nodo *Or* rojo con valor menos uno) se corresponde con el significado de la expresión "ninguno". Con este tipo de investigaciones pretendíamos descubrir y reducir el número de errores que se producen por la incomprensión de los enunciados más que por una verdadera falta de competencia lógica, y lo cierto es que nos han permitido algunas mejoras a la hora de presentar las redes de expectativas y mejorar el rendimiento en las pruebas objetivas.


5. Completa las siguientes inferencias: Partimos de que en una tienda venden dos juegos de ordenador, el tipo 1 (superior) es de guerra y el tipo 2 (inferior) es de aventuras. Llamamos por teléfono para preguntar al dependiente. **1 punto.**

Caso 1. P. ¿Tienen algún juego disponible? R. Sí

Caso 2. P. ¿Tienen algún juego disponible? R. No

Caso 3. P. ¿Tienen el juego de guerra? R. Sí

Caso 4. P. ¿Tienen los dos juegos? R. No

ILUSTRACIÓN 379. FRAGMENTO DEL EXAMEN DE LÓGICA DEL CURSO 2017/2018.

El diagrama de Marlo y las redes de expectativas son el producto de un proceso de investigación colaboradora entre el alumnado y el profesor que aún está en marcha, pues como profesor de Filosofía sigo desarrollando los diagramas con alumnos de Bachillerato. Además, dispongo ocasionalmente de grupos de primero de la ESO con los que verificar la simplicidad de los modelos que más tarde intento validar con expertos en la materia. La metodología en el desarrollo de estas herramientas gráficas se ha encaminado desde el inicio a la búsqueda de acuerdo del sentido común y la intuición natural de los niños con las teorías y modelos de pensamiento más ortodoxos desde una perspectiva académica, sin renunciar a la posibilidad de generar nuevas hipótesis que puedan ser contrastadas empíricamente.

Además, hemos coordinado durante dos años grupos de trabajo en el Instituto conformes a la Orden de 6 de septiembre de 2002, BOJA 118 de 8 de octubre: *Aplicaciones prácticas del diagrama de Marlo en el aula*, realizado a lo largo del curso escolar 2014-2015 y *Desarrollo de la inteligencia lógico-matemática con el diagrama de Marlo*, realizado a lo largo del curso escolar 2015-2016. Ambos grupos de trabajo han estado formados por profesores de otras disciplinas, especialmente Matemáticas, pero también de Música, de Historia o de Biología, que permiten

pensar que los diagramas y redes de expectativas podrían ser utilizados como herramientas en un enfoque multidisciplinar de la didáctica del razonamiento.

En el año 2016 presentamos las redes de expectativas en el XVIII Congreso Español Sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, celebrado en San Sebastián (Aznar, 2016a) y desde entonces han sido también puestas a prueba en el aula demostrando la sencillez de sus principios.

Avanzar en las formas gráficas de representación, nos ha exigido adaptar la notación tradicionalmente empleada en lógica para conseguir una mayor correspondencia entre las formalizaciones simbólica y diagramática de las proposiciones. Nuestro sistema de notación está en desarrollo, siendo perfectamente compatible con la notación usual empleada en lógica de proposiciones o lógica de predicados, que por supuesto no pretendemos sustituir y que también empleamos en el aula. No obstante, tal vez podamos llegar a simplificar la forma de expresar la cuantificación y la existencia empleando el subíndice *x* y distinguiendo entre minúsculas y mayúsculas, dado que los alumnos parecen asimilar perfectamente dichas convenciones.

7.1.1.1 Comparación de resultados con el método tradicional

A lo largo de los últimos años, alumnos de secundaria del IES Pablo Neruda de Huelva han sido capaces de afrontar silogismos, lógica de proposiciones, lógica de predicados e inferencias probables empleando los diagramas lógicos y la notación que proponemos. Desde el curso escolar 2017/2018 ha sido mi intención comparar el rendimiento de mis grupos de primero de Bachillerato con los de mi compañera de departamento en la resolución de ejercicios de lógica de proposiciones. Por ello, en reunión del Departamento de Filosofía del IES Pablo Neruda celebrada el 20 de octubre de 2017 y tal como consta en acta, acordamos comparar nuestros resultados en lógica tras instruir al alumnado en dicha materia utilizando el método tradicional y los diagramas de Marlo respectivamente. Nos ceñiríamos a doce sesiones en las que enseñaríamos a resolver silogismos, a formalizar y resolver ejercicios de lógica de proposiciones en los que fuera necesario emplear leyes básicas como MP, MT, ED, IC, ID, II y ABS.

El método tradicional fue aplicado por una profesora, con más de veinticinco años de experiencia, en un grupo de Letras que tuvo una media en junio, considerando las notas de todos los alumnos en todas las materias, de 5,9 y en grupo de ciencias que obtuvo un 7,1. El diagrama de Marlo fue aplicado por el autor, con veinte años de experiencia, en un grupo de Letras que tuvo una media en junio considerando las notas de todos los alumnos en todas las materias de 6,7 y en un grupo de ciencias que tuvo una media en junio de 7,6.

Durante la instrucción en las redes y diagramas de Marlo evitamos sobre-motivar al alumnado, pensando que un resultado como el obtenido en 2014, con casi un 90% de aprobados, parecía más anecdótico que generalizable. Aún así, se aprecia que los grupos que trabajaron con los diagramas de Marlo eran algo mejores considerando el global de los resultados y además fueron instruidos por el autor, que era parte interesada en este experimento que fue diseñado sin más pretensión que la de servir como estudio piloto. Por ello los resultados que ofrecemos están muy lejos de ser concluyentes, aunque siguen invitando al optimismo. Nuestros alumnos aprendieron a formalizar, a resolver silogismos, a manejar las redes con inferencias probables y los fundamentos de las tablas de verdad y ambos profesores sabíamos que el objetivo fundamental de las doce sesiones era resolver ejercicios de lógica de proposiciones.

Aquí nos limitamos a ofrecer los datos relativos al rendimiento en la ejecución del ejercicio más complejo al que nos propusimos llegar en la primera prueba realizada. Un análisis más profundo sería vano, pues finalmente los exámenes fueron tan dispares en sus preguntas que no es posible sostener cabalmente en qué podría ser uno mejor que otro: ¿Son las tablas de verdad más importantes que los silogismos? ¿Hay ventaja en resolver inferencias probables?

En lo que ambos estábamos de acuerdo es que un alumno de Lógica debería ser capaz de resolver en primero de Bachillerato el ejercicio de la ilustración 380.

Ejercicio de lógica de proposiciones	
Método y notación tradicionales	Notación asociada a los diagramas de Marlo
-1 p → q Conclusión: ¬p -2 r → ¬q -3 s v r -4 t → ¬s -5 t	-1 $p_x q$ Conclusión: ¬P -2 $r_x \neg q$ -3 s, r -4 $t_x \neg s$ -5 T

ILUSTRACIÓN 380. EJERCICIO DE LÓGICA DE PROPOSICIONES EN LOS EXÁMENES DE LÓGICA DE LA PRIMERA EVALUACIÓN CON EL MÉTODO TRADICIONAL Y LA NOTACIÓN ASOCIADA A LOS DIAGRAMAS DE MARLO.

Con el método tradicional, hay que decir que del grupo de letras de 1ºD con 30 alumnos matriculados se presentaron 24 al examen de lógica y que solo uno hizo bien el ejercicio. En el grupo de ciencias de 1ºB se examinaron 34 de los 35 alumnos matriculados, de los que hicieron bien el ejercicio 14, regular 7 y no lo hicieron o lo hicieron mal 13. Regular significa que aunque no llegó a la conclusión correcta demostraba conocimientos aplicados en el proceso. Con la notación asociada a los diagramas de Marlo, de los 28 alumnos de ciencias se examinaron los 28, incluidos 3 alumnos que posteriormente se darían de baja. y de ellos 14 hicieron bien el ejercicio, 4 regular y 10 lo hicieron mal. En Letras, con el diagrama de Marlo, 11 lo hicieron bien, 1 regular porque no justificó los pasos y 20 lo hicieron mal.

Si nos atenemos a la dicotomía hacer bien el ejercicio o no hacerlo bien, podemos resumir los datos afirmando que en el grupo de Ciencias resolvieron bien con el método tradicional el 40% y con el diagrama de Marlo el 50% (Aznar, 2020c). En el grupo de Letras con el método tradicional solo el 4% de los alumnos hizo bien el ejercicio, mientras que con el diagrama de Marlo el 34 % consiguió hacerlo correctamente. La comisión de un solo error en la notación relativa a la fundamentación fue aceptada para considerar el ejercicio correctamente resuelto, y así, con nuestro método y aplicando un criterio similar al de nuestra compañera, consideramos correcto el ejercicio de una alumna que llamaba generalización también a la exclusión, siendo equivalentes respectivamente a *Modus Ponens* y *Modus Tollens*. También consideramos correctos dos ejercicios en los que olvidaron justificar un paso con una regla que ya había sido aplicada correctamente en el ejercicio. Por el contrario, consideramos incorrecto un ejercicio que llegaba a la conclusión dando los pasos correctos sin justificarlos en regla alguna y otro que desafortunadamente se quedó a un paso de hacerlo bien. Un de las posibles soluciones se ofrece en el apartado 3 E del examen resuelto en el curso 2018-2019.

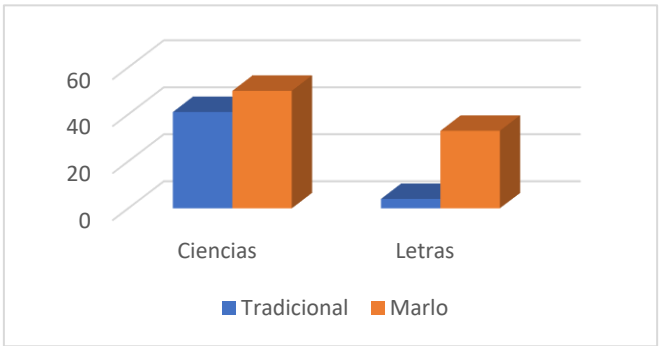


TABLA 48. PORCENTAJE COMPARATIVO DE LOS ALUMNOS QUE RESOLVIERON CORRECTAMENTE EL EJERCICIO CON EL MÉTODO TRADICIONAL Y LA NOTACIÓN ASOCIADA A LOS DIAGRAMAS DE MARLO.

En todo caso, el rendimiento de mis alumnos fue más que satisfactorio y es altamente motivador que ellos mismos generaran alternativas válidas en la resolución de los ejercicios distintas a las que yo ofrecía en los criterios

de corrección. Por ejemplo, les propuse el silogismo *Los robellones son comestibles, los níscalos son comestibles* para comprobar si caían en la falacia, facilitada por los conocimientos previos, de afirmar que *los robellones son níscalos.* Sin embargo, y a pesar de que algunos cayeron como esperaba en tal error formal, otros se dieron cuenta de que podían llegar a una conclusión necesaria con términos negativos transformando las premisas a *Si no es comestible, no es un robellón* y *Si no es comestible, no es un níscalo*, de modo que obtenían la siguiente conjunción correcta en el modelo de lo *no comestible: Parte de lo que no es níscalo es parte de lo que no es robellón*. Y concluían algo imprecisamente en el lenguaje natural que *Algunos no níscalos pueden ser no robellones*. Lo más curioso de su conclusión es que, tal vez por casualidad, había perdido el carácter categórico, una consecuencia lógica de la transformación de ambas premisas. De los silogismos propuestos en el examen solo se muestra el citado ejemplo.

7.1.2 Silogismo con conclusión después de transformar vista por los alumnos

Los robellones son comestibles. Los níscalos son comestibles.

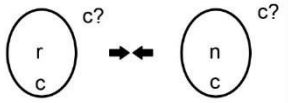
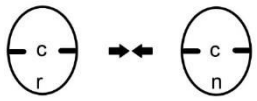
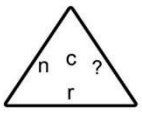
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 rxc	
		-2 nxc	
2	 Conv. 1a Conv. 1b		
			No hay nada necesario
3	 Sínt. Nula 2	3 cx %nxrx sínt.nula 1,2	
		4 %nxrx conten. 3	Es probable que los níscalos sean robellones

ILUSTRACIÓN 381. SOLUCIÓN OFRECIDA POR EL PROFESOR EN EXAMEN A ALUMNOS DE PRIMERO DE BACHILLERATO EL CURSO 2019-2020.

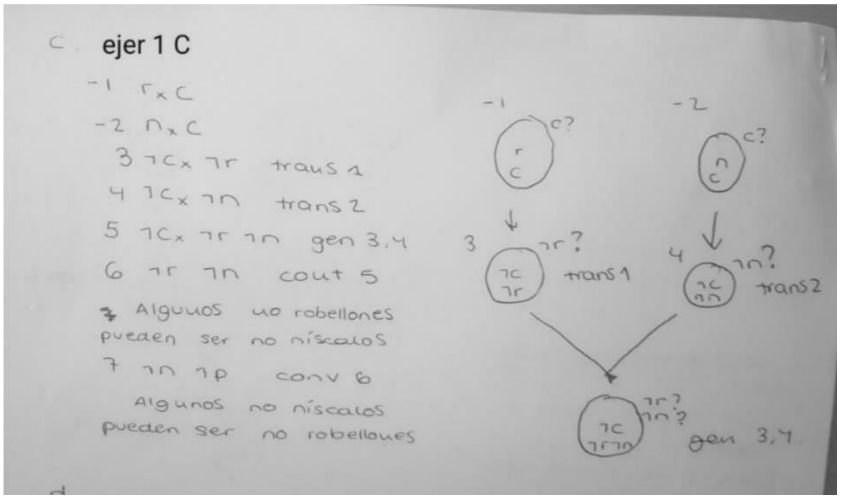


ILUSTRACIÓN 382. SOLUCIÓN ALTERNATIVA, GRÁFICAMENTE CORRECTA AL EJERCICIO C, PROPUESTA POR LOS ALUMNOS.

7.2 Examen resuelto del curso 2018/2019 (Se omiten los silogismos)

Examen Lógica b 2019-2019 **SOLUCIÓN. Sobre 7 puntos.**

1. Resuelve formal y gráficamente los siguientes silogismos: Por cada ejercicio bien 0, 5 puntos (0, 25 por formal y 0, 25 por gráfica). Por cada paso sin justificación una décima menos. Si faltan letras fuera de los diagramas que no afecten a la conclusión restar una décima por cada una, pero si afectan a la conclusión 0, 25 menos.

2. Expresa de tres modos equivalentes las siguientes proposiciones. Por cada celda bien 1 décima hasta un máximo de un punto. Cualquier fallo o falta de una negación, de una coma o de una x, celda mal.

Premisa inicial	Transforma Valen las dos como buenas	Elimina generalizador x Valen las dos como buenas	De Morgan Valen las dos como buenas
$p_x \neg q$	¬pqx = qx¬p	¬(qp) = ¬(pq)	¬p, ¬q = ¬q, ¬p
$p_x t$	¬p¬tx = ¬tx¬p	¬(¬tp) = ¬(p¬t)	t, ¬p, = ¬p, t
Premisa inicial	De Morgan Vale cualquiera de las dos	Introduce generalizador x No importa si la transformación y la introducción del generalizador están cambiados en tu respuesta	Transformación
(m, ¬t)	¬(¬mt) = ¬(t¬m)	¬mx¬t	tx m
¬(p¬q)	¬p, q = q, ¬p	pxq	¬qx¬p

3 **Realiza los siguientes cálculos**: Seguimos la convención de que solo un tipo de objeto puede ser verdadero. No es necesario poner RS∃. Tampoco es necesario poner todas las letras que se siguen, es decir, que basta poner solo la última que concluyes. Por ejemplo, en A.4 basta poner Q y no hace falta poner MQ. Por cada ejercicio bien 0, 6 puntos (0, 25 por formal y 0, 25 por gráfica). Por cada paso sin justificación una décima menos. No importa orden de los números de fila en la justificación. Valen las leyes de la lógica proposicional (MP, MT, conjunción, etc.).

A) -1 $m_x q$ Conclusión: S
-2 $q_x s$
-3 M
4 MQ Gen. m, 1 a 3 con RS∃
5 MQS Gen. q. 2, 4 con RS∃
6 S Contenido en 5

O bien por absurdo suponiendo ¬S en paso 4 para llegar a la contradicción M¬M.

B) -1 $p_x \neg q$ Conclusión: ¬Q
-2 $t_x r$
-3 $\neg t_x p$
-4 ¬R
5 ¬T Exclusión t 2, 4 con RS∃
6 P Gen. ¬t. 3, 5 con RS∃
7 ¬Q Gen. p, de 1 a 6, con RS∃

O bien transformando
5 ¬rx¬t Trans. 2
6 ¬T Gen ¬r, 5 a 4 con RS∃
7 P Gen. ¬t. 3, 6 con RS∃
8 ¬Q Gen. p, de 1 a 7, con RS∃

O bien por absurdo suponiendo Q para llegar a la contradicción R¬R

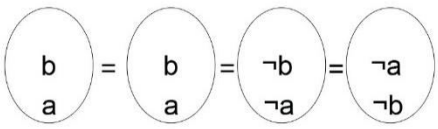
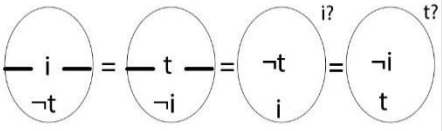
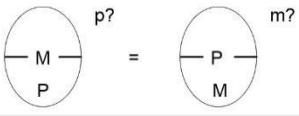
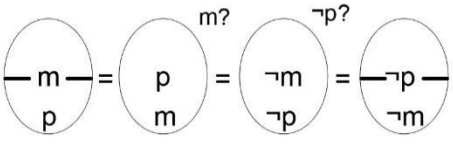
C) -1 $r_x\neg q$ Conclusión por absurdo: ¬Q
-2 s, m
-3 ¬S
-4 $m_x r$
5 Q
6 ¬R Exclusión 1, 5 con RS∃.
(puedo llegar a ¬R transformando 1 y Gen. con 5)
7 ¬M Exclusión 4, 6 con RS∃
8 S Eliminación disyunción (E.D.) 2, 7
9 S ¬S Prod. 3, 8
10 ¬Q Abs. 5-9

D) -1 $g_x b$ Conclusión: $c_x h$
-2 $b_x\neg c$
-3 g, h
4 C
5 Cx¬b Trans. 2
6 ¬B Gen. c de 5 a 4
(Puede llegar directo a ¬B por exclusión entre 2 y 4)
7 ¬G Exclusión b¬b. de 1 a 5
8 H E.D. 3, 7
9 cx h I.I. 4 a 8

E) -1 $p_x q$ Conclusión: ¬P
-2 $r_x\neg q$
-3 s, r
-4 $t_x\neg s$
-5 T
6 T¬S Gen. t, 4, 5 RS∃
7 T¬SR ED. 3, 6 RS∃
8 T¬SR¬Q Gen. 2, 7 RS∃
9 T¬SR¬Q¬P Excl. q¬q 1, 9 RS∃
10 ¬P contenido en 9
O bien por absurdo
6 P
7 Q Gen. p, 1 a 6 RS∃
8 ¬R Excl. q¬q 2, 7 RS∃
9 S E.D. 3, 8
10 ¬T Excl. s¬s 4, 8 RS∃
11 T¬T Producto 5, 10 RS∃
12 ¬P Abs. 6, 11

F) -1 $(mq)_x(r,s)$ Conclusión: T
-2 M
- 3 $r_x t$
-4 Q
-5 $s_x t$
6 MQ Producto 2, 4
7 R,S Gen. 1, 6 RS∃
8 T Casos 7, 3, 5

O bien por el absurdo
6 ¬T
7 ¬R Exclu. 3, 6
8 ¬S Excl. 5, 7
9 ¬R¬S Producto 7, 8
10 ¬(R, S) De Morgan 9
11 ¬ (MQ) Exclu. 1, 10
12 MQ Prod. 2, 4
13 (MQ) ¬(MQ) Prod. 11, 12
15 T Absurdo 6, 13

4. Formaliza y representa en el diagrama de Marlo	Formalizar con letras usando el generalizador x cuando sea posible	Diagrama de Marlo Basta con uno cualquiera de los posibles
Si y solo si eres un burro, eres un asno (b, a) Vale cualquiera de las cuatro como buena	$b_x a_x$ $a_x b_x$ $\neg b_x \neg a_x$ $\neg a_x \neg b_x$	
Es inglés o adora el té (i, t) (Al menos una es verdad) Vale cualquiera de las cuatro como buena	$\neg i_x$t $\neg t_x i$ $i\neg t_x$ $t\neg i_x$	
Este es primate y mamífero (p, m) (se afirma como hecho en curso) Vale cualquiera de las dos	MP PM	
Solo los mamíferos son primates (m, p) Vale cualquiera de las cuatro como buena	mp_x $p_x m$ $\neg m_x \neg p$ $\neg p \neg m_x$	

7.2.1 Alternativa propuesta por los alumnos al ejercicio 3c del examen

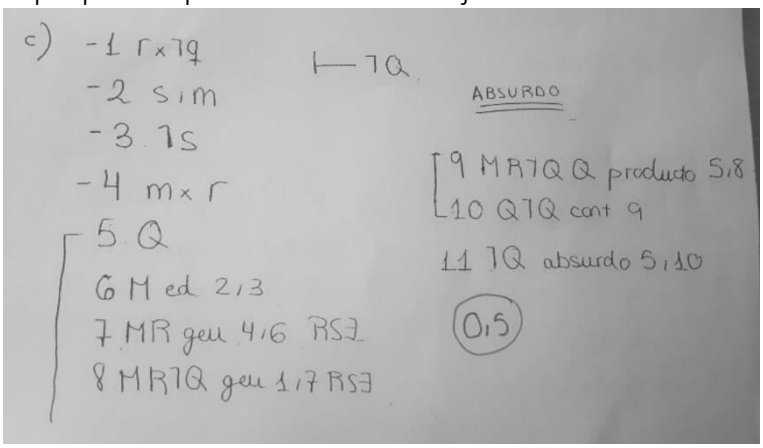


ILUSTRACIÓN 383. SOLUCIÓN ALTERNATIVA AL EJERCICIO DE EXAMEN 3C.

Este ejercicio resuelto por alumnos muestra que distinguen perfectamente entre una afirmación teórica en minúscula y una afirmación de existencia actual en mayúscula, la cual requiere para ser transmitida de una razón suficiente, expresada en el ejercicio como RS∃

7.3 Materiales didácticos compatibles con las nuevas tecnologías

7.3.1 Desarrollo de los primeros materiales TIC

Alumnas y alumnos de la asignatura de Filosofía de cuarto de la ESO emplearon con éxito las redes de expectativas para resolver ejercicios de lógica de predicados en la pantalla del ordenador o en sus teléfonos móviles coloreando una plantilla con una de las muchas aplicaciones gratuitas que pueden descargarse. Los alumnos no tuvieron ninguna dificultad en comprender los principios del método que afirman que las redes transmiten la verdad o falsedad de los argumentos por sus nodos, de modo que podían resolver los razonamientos empleando colores que pueden ser traducidos también a números. Rojo = -1= Falso. Azul = 1 = verdadero. Amarillo = 0 = incierto. Verde = 0,5 = probable, etc. Combinando números, colores y lenguaje pensamos que podemos fomentar la colaboración de sus hemisferios cerebrales permitiéndoles afrontar la resolución de los problemas lógicos con más recursos. Los resultados aportan, desde nuestro punto de vista, una prueba de que no hay que esperar al Bachillerato para enseñar lógica, dependiendo el rendimiento de nuestros alumnos en gran medida de los instrumentos pedagógicos que empleamos.

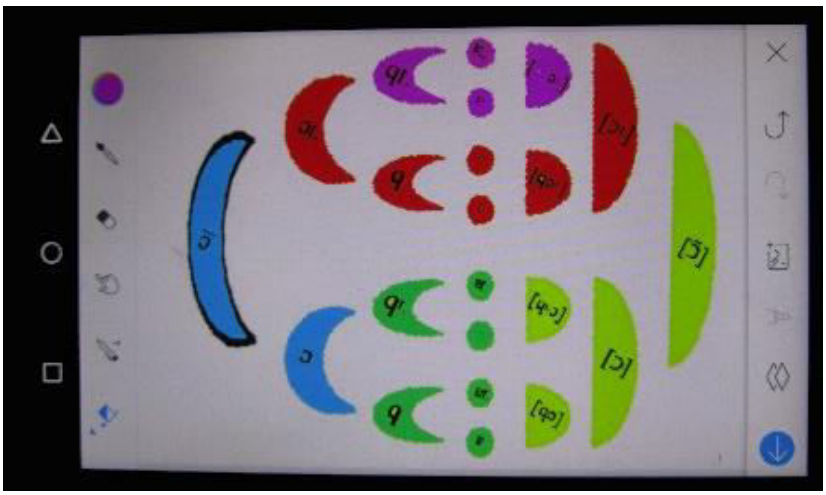


ILUSTRACIÓN 384. EJEMPLO DE SILOGISMO PLAUSIBLE RESUELTO POR ALUMNOS DE CUARTO DE LA ESO EN SUS TELÉFONOS MÓVILES.

7.3.2 Infografías interactivas

También en los últimos años hemos desarrollado infografías en colaboración con el diseñador gráfico de Sevilla Pepe Amoedo, con la finalidad de que incluso alumnos con discapacidades motoras puedan trabajar con medios informáticos los principios básicos de la inferencia lógica en las redes de expectativas. Los alumnos pueden modificar los estados de verdad/color de los nodos con un simple clic, en un ejercicio de razonamiento heterogéneo (Aznar, 2020d), (ver 'Anexo 7: Cap. 9, practicar inferencias').

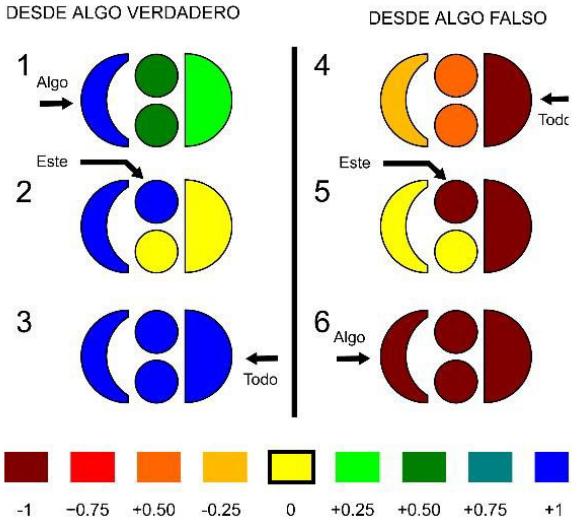


ILUSTRACIÓN 385. INFOGRAFÍA PARA LA PRÁCTICA DE LOS PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA INFERENCIA. DISEÑO GRÁFICO DE PEPE AMOEDO.

7.3.3 Infografías de diagramas de árbol

Se han creado y empleado en el aula herramientas gráficas para la didáctica del razonamiento mejoradas gracias a la retroalimentación de un alumno que además de problemas de aprendizaje sufría graves discapacidades motoras. Así generamos una aplicación sencilla de manejar que se abre en Firefox. El alumno puede cambiar las variables para ajustarlas a las iniciales de los términos, lo cual facilita la tarea de formalizar y luego puede elegir en desplegables entre las opciones de *Todo* y *Alguno* en la primera casilla y "es, no es" en la tercera. Si elige la opción con Conclusión aparece un nuevo desplegable con las opciones anteriores (ver 'Anexo 8: Cap. 9, redes silogismo).

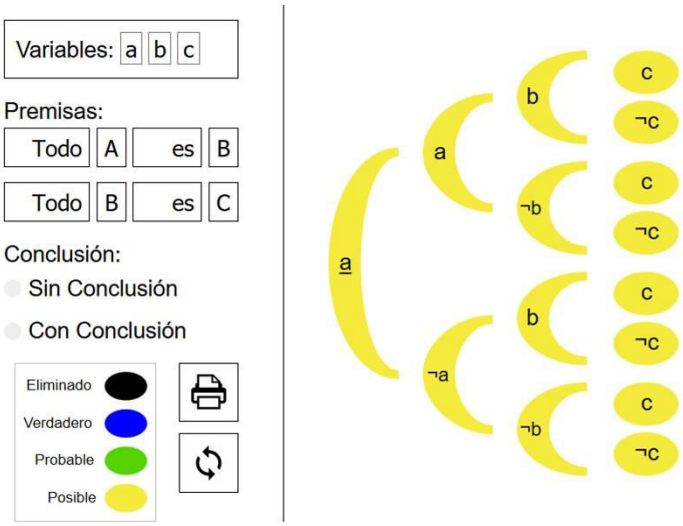


ILUSTRACIÓN 386. INFOGRAFÍA PARA RESOLVER SILOGISMOS EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS. DISEÑO GRÁFICO DE PEPE AMOEDO.

7.3.3.1 Versión simple de las redes

Si eliminamos los nodos *Or* y *And* de las redes de expectativas obtenemos diagramas lógicos de árbol muy sencillos que pueden ser utilizados por los alumnos en lógica de proposiciones y de predicados. En la infografía se puede seleccionar el número de variables que se visualizan, de modo que podemos expandir o contraer la extensión del árbol. Hay un espacio para escribir las fórmulas en notación clásica y puede marcarse en los nodos, con un simple clic, de qué premisa depende su color de verdad seleccionado primero la premisa y haciendo clic después sobre el nodo. La aplicación dispone de un botón para imprimir la solución al ejercicio y de un botón de reinicio, y aunque hubiera sido deseable, un botón de cancelar la última acción no pudo incluirse por motivos económicos. En las redes se propaga la eliminación de los nodos para facilitar la comprensión y el uso (ver 'Anexo 9: Cap. 9, redes proposiciones).

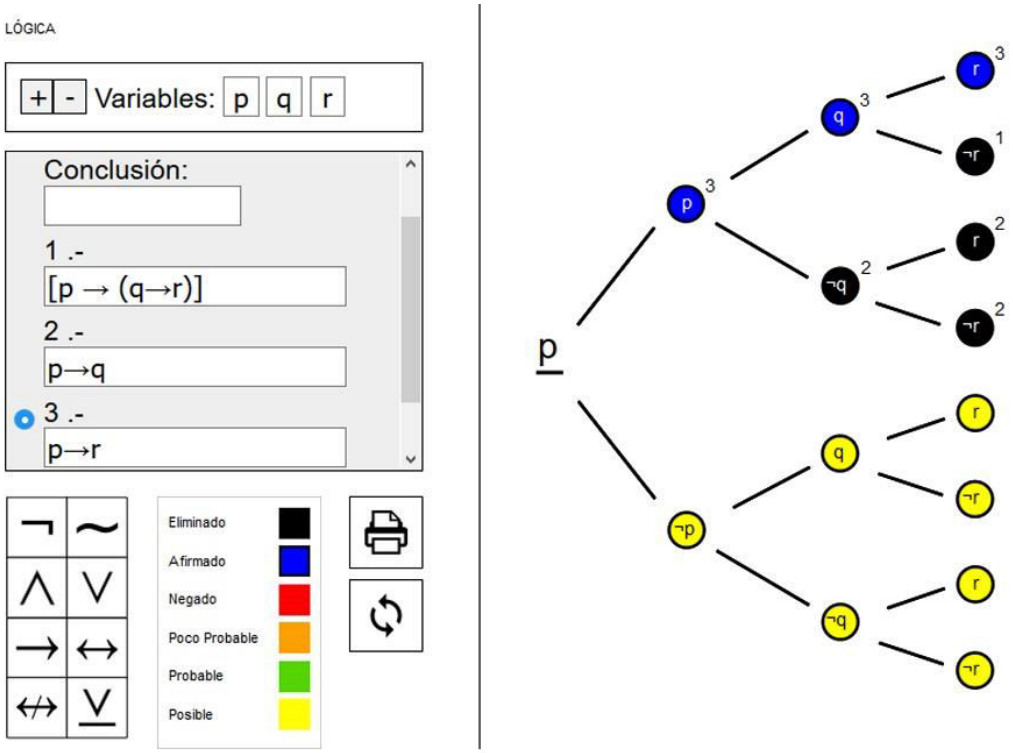


ILUSTRACIÓN 387. INFOGRAFÍA PARA TRABAJAR ÁRBOLES LÓGICOS CON LOS PRINCIPIOS DE LAS REDES DE EXPECTATIVAS. DISEÑO GRÁFICO DE PEPE AMOEDO.

La herramienta permite expresar razonamientos probables y puede implementarse su explicación con los principios básicos de la probabilidad. Por ejemplo, la siguiente imagen muestra que es necesaria la conclusión *S*, aunque son igualmente probables las combinaciones *spq¬r* y *s¬pq¬r*.

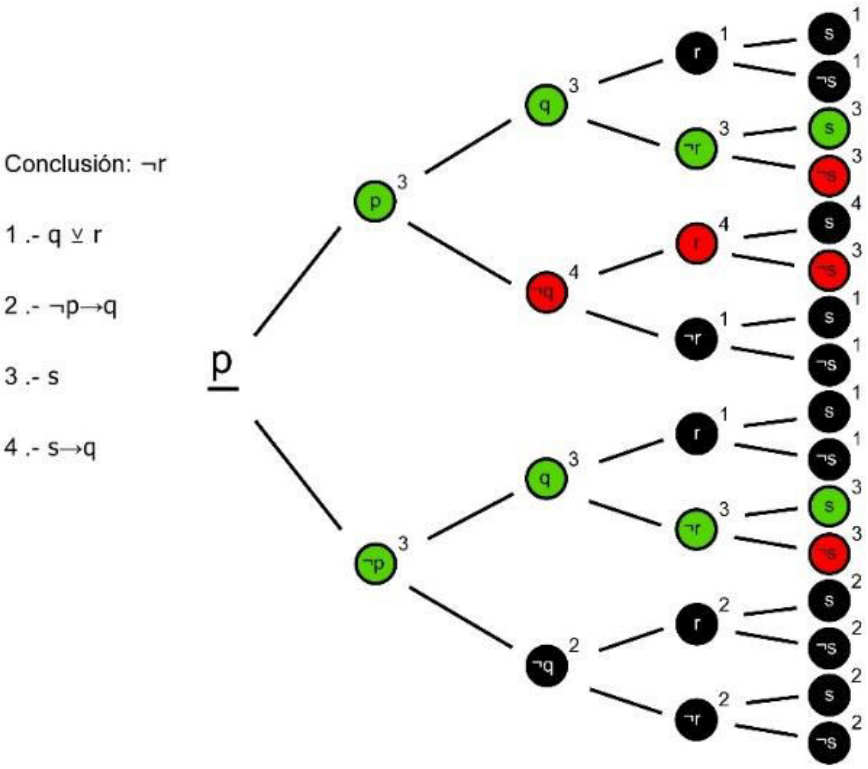


ILUSTRACIÓN 388. IMPRESIÓN FINAL UN EJERCICIO RESUELTO EN LOS DIAGRAMAS DE ÁRBOL BASADOS EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS. DISEÑO GRÁFICO DE PEPE AMOEDO.

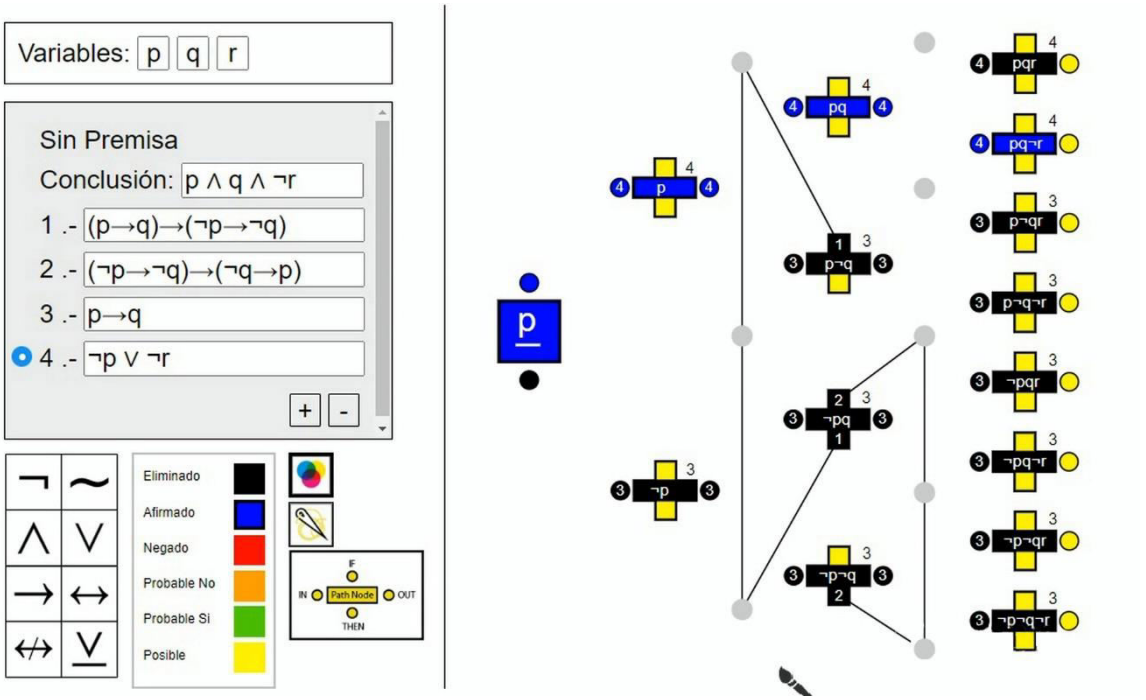


ILUSTRACIÓN 389. IMPRESIÓN FINAL UN EJERCICIO CON PROPOSICIONES SECUNDARIAS RESUELTO EN LOS DIAGRAMAS DE ÁRBOL BASADOS EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS. DISEÑO GRÁFICO DE PEPE AMOEDO.

Más ejemplos de ejercicios resueltos en estas redes lógicas, así como las plantillas para su realización pueden encontrarse en la página web creada por el autor www.diagramademarlo.com.

7.3.3.2 Vídeos explicativos en YouTube

Hay disponibles en la actualidad una serie de vídeos explicativos del diagrama de Marlo en YouTube que han sido elaborados gracias a la colaboración de uno de los profesores del Ciclo de Realización que se imparte en nuestro centro. Estos vídeos sirven como apoyo a los estudiantes y ofrecen una versión sencilla del diagrama que puede ser comprendida sin conocimientos previos. También existen vídeos didácticos de las redes de expectativas editados por el propio autor que tienen, en consecuencia, mucha peor calidad, aunque pueden ser de utilidad para comprender sus fundamentos.

ILUSTRACIÓN 390. SECUENCIA DE UNO DE LOS VÍDEOS EXPLICATIVOS DEL DIAGRAMA DE MARLO EN *YOUTUBE*

7.4 Página web del autor

Infografías, vídeos, ejercicios resueltos y otros materiales didácticos pueden encontrarse en la página web no profesional diseñada por el autor (www.diagramademarlo.com). No será difícil adivinar, observando la estadística del tráfico de visitas por semanas generada por el propio sitio web, en qué fechas realizamos los exámenes de lógica.

ILUSTRACIÓN 391. ESTADÍSTICA DEL NÚMERO DE VISITAS POR SEMANA RECIBIDAS EN LA PÁGINA WEB DEL AUTOR ENTRE OCTUBRE DE 2018 Y MAYO DE 2019.

Nuestros diagramas lógicos podrían, en teoría, ser utilizados fácilmente en plataformas digitales interactivas ofreciendo retroalimentación inmediata al estudiante sobre su ejecución, siempre teniendo en cuenta que los recursos que subamos a la red no banalicen la asignatura (Casanova, 2013) y sirvan realmente para promover el trabajo intelectual asociado a la realización efectiva de ejercicios. Así, sería nuestro deseo poner en marcha una aplicación basada en las redes de expectativas en la que el visitante eligiera si prefiere acompañar la resolución simbólica de los ejercicios de lógica con números, colores o números y colores. Desafortunadamente los costes de producción y mantenimiento de este tipo de páginas escapan a nuestras posibilidades económicas actuales, pero estamos convencidos de la conveniencia a nivel didáctico de trabajar, con todas las precauciones, en la línea

marcada por el Plan e-Europa aprobado por la Unión Europea en 2001 (Echevarría, 2001; Tesouro Cid, 2004). En Echevarría (2002) leemos: "Hay que replantearse la organización de las actividades educativas implantando un sistema educativo adicional en el espacio electrónico" (p.202).

7.5 Dificultades en el uso y aplicación de los diagramas en el aula

7.5.1 Dificultades propias de las cuestiones complejas

A pesar de los resultados espectaculares de la primera versión del diagrama, a medida que hemos ido tratando de aumentar su capacidad expresiva ha decaído, como era de esperar, el rendimiento de mis alumnos. Además nos enfrentamos a la dificultad de encontrar formas de notación capaces de expresar lo que muestran los diagramas y muchas veces debemos reconocer que ni nosotros mismos sabemos si lo correcto es usar mayúscula o minúscula, conjunción o disyunción, lo cual depende en muchas ocasiones de cómo interpretemos las sentencias. En todo caso es una experiencia muy positiva para nosotros como docentes, discutir con los alumnos más interesados estos problemas y descubrir que todos intuimos que solo es cuestión de profundizar en las cuestiones el que podamos llegar a un acuerdo en las convenciones. Vamos más allá que el resto de los grupos en el aprendizaje de la lógica de proposiciones y nos encontramos con más problemas, con mucho que descubrir y la posibilidad de aprender filosofía filosofando en vivo sobre la diferencia que debería haber en un diagrama que se refiere a las setas en general o a esta seta en particular. Y si bien es cierto que estas discusiones pueden haber obtenido ya cierta respuesta en grandes como Frege, podemos reclamar nuestro derecho a repensarlas en el aula tratando de generar interpretaciones visuales compartidas y compartibles, porque lo más interesante en muchos casos no ha sido el resultado, sino el verdadero proceso didáctico de descubrimiento que ha tenido lugar en el aula.

7.5.2 Error de atribuir la negación implícita en "Ninguno" al sujeto

Uno de los errores más interesantes de advertir entre nuestros alumnos es el de atribuir la negación al sujeto cuando formalizan la universal negativa. Así, en un mismo examen realizado a un grupo de ciencias y otro de letras de primero de Bachillerato de nuestro instituto en Huelva, con un nivel socio económico y cultural medio y que habían recibido ambos 12 horas de formación lectiva en lógica, cinco de los treinta y un alumnos de Ciencias y doce de los veinte alumnos de Letras formalizaron mal *Ningún hombre vuela*, escribiendo $\neg \mathrm{h}_x v$ o poniendo $\neg h$ en el centro del diagrama y v como predicado abajo, cuando lo correcto era $\mathrm{h}_x \neg v$ o colocar h en el centro y $\neg v$ abajo del diagrama.

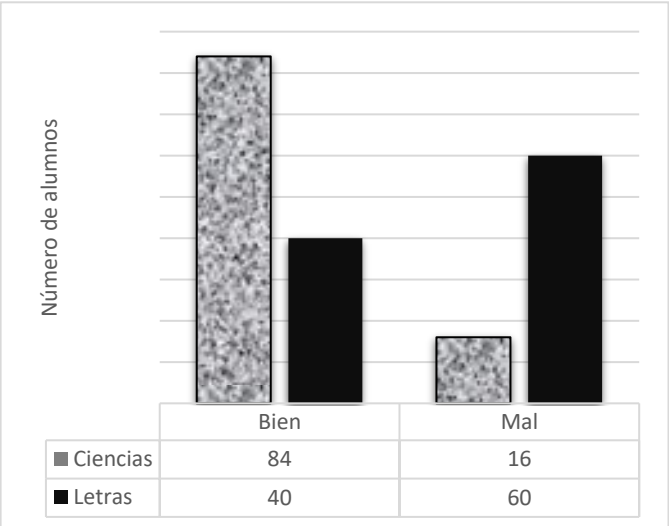


TABLA 49. FORMALIZACIÓN DE LA UNIVERSAL NEGATIVA EN ALUMNOS DE CIENCIAS Y LETRAS DEL IES PABLO NERUDA DE HUELVA. CURSO 2017/2018.

7.5.3 Dificultad de distinguir disyunciones inclusivas y exclusivas

Otra dificultad recurrente constatada en la corrección de pruebas objetivas es la tendencia a formalizar la disyunción en los diagramas de forma exclusiva. Así, y a pesar de insistir en ello, los alumnos representan la proposición *A ∨ B* sistemáticamente como *Si tengo A, no tengo B*, en lugar de expresar que *Si no tengo A, entonces tengo B.* En los exámenes les resulta mucho más fácil escribir «*A ∨ B*» que « $\neg a_x b$», aunque es igualmente difícil para ellos convertir «*A ∨ B*» a «$\neg A \rightarrow B$». Así, en el caso de la interpretación del significado de las disyunciones se muestran muy precisos en las tablas de verdad y parece que también les resulta muy intuitiva su representación en diagramas de árbol eliminando el nodo $\neg a \neg b$, por más que luego se confundan al construirlos por sí mismos. Hay que reconocer que en todos los exámenes que hemos realizado, el acierto al formalizar las disyunciones en diagramas de Marlo ha sido extremadamente bajo, aunque también es cierto que con solo doce sesiones para enseñar Lógica es muy difícil practicarlas. En todo caso, el hecho de que sistemáticamente lo hagan mal, debería persuadirnos de la necesidad de adelantar la didáctica de la Lógica para el uso correcto y preciso del lenguaje natural en la comunicación de posibilidades al inicio de la Secundaria.

7.5.4 Precariedad de los medios y escasez de recursos

Otra dificultad importante con la que nos hemos encontrado ha sido la precariedad de los medios informáticos disponibles en el centro de enseñanza. A pesar de desarrollar infografías que facilitan la práctica de la lógica ha sido muchas veces imposible encontrar la forma de que los alumnos pudieran emplearlas en el aula. O los ordenadores estaban obsoletos, o fallaban las actualizaciones. Esta realidad material supone un grave obstáculo para el uso de las redes de expectativas, pues es muy costoso en tiempo y espacio que el alumno tenga que dibujar una red cada vez que va a realizar un ejercicio, de modo que solo tiene sentido utilizar este recurso si existe un soporte informático verdaderamente operativo. Estos inconvenientes han sido la causa de que el autor haya utilizado las redes en la mayoría de sus cursos de Bachillerato solo para introducir el curso de Lógica. De hecho, como herramienta solo han sido empleadas desde su invención por alumnos de cuarto de la ESO en clases difíciles de olvidar, pues si bien era altamente satisfactorio ver los resultados, también era muy frustrante la lucha con los medios. Y también han sido utilizadas en "clases particulares" con el alumno ya mencionado con graves discapacidades motoras, que las utilizaba en su ordenador personal, constituyendo esta experiencia lo que podríamos considerar un estudio de caso con resultados muy positivos (Ver Anexo 10. Cap 9, Razonar con el hemisferio derecho).

ILUSTRACIÓN 392. ALUMNO DEL IES PABLO NERUDA DE HUELVA CON UNA GRAVE DISCAPACIDAD MOTORA TRABAJANDO CON LAS REDES DE EXPECTATIVAS EN SU ORDENADOR PERSONAL. TOMADO DE AZNAR, 2020D

8 EJERCICIOS RESUELTOS EN REDES DE EXPECTATIVAS

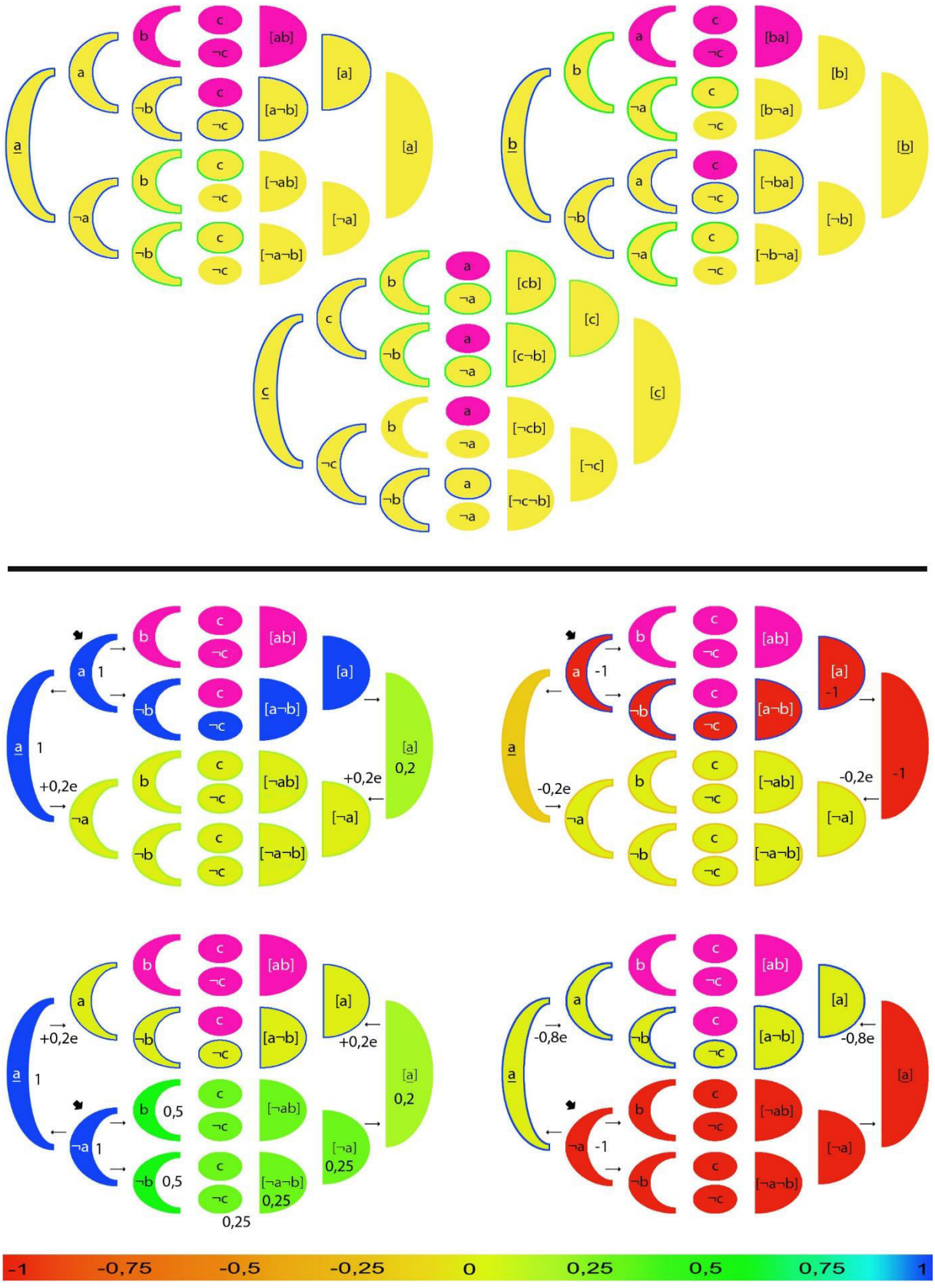
EJERCICIOS RESUELTOS EN REDES DE EXPECTATIVAS

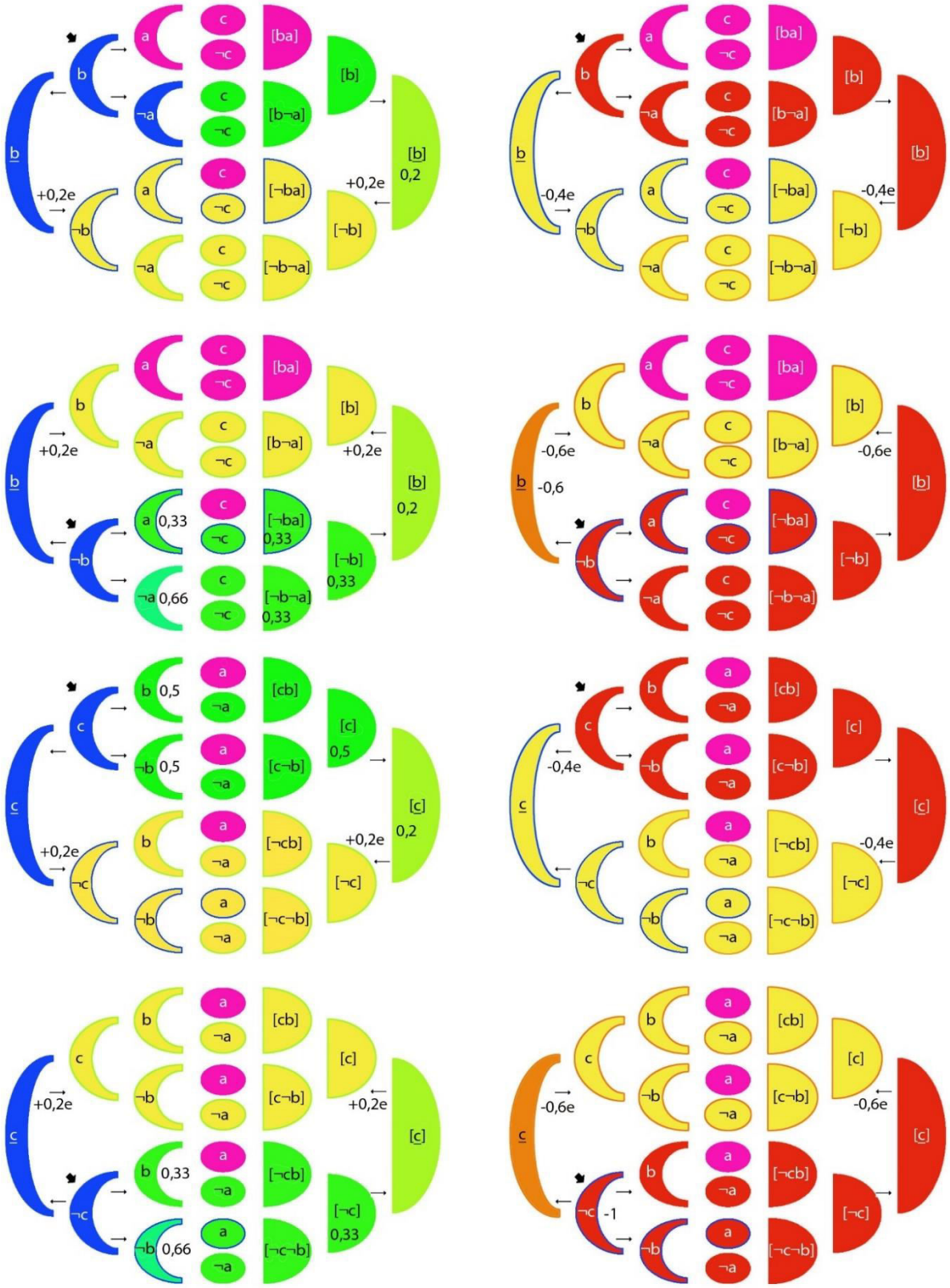
A continuación representamos y resolvemos en las redes de expectativas ejercicios con dos premisas. Se trata de silogismos típicos y de otras proposiciones que expresan relaciones bicondicionales, disyunciones exclusivas e inclusivas. En la primera parte de cada ejercicio representamos, desde a, b y c, fomalmente las premisas, eliminando nodos, y lo hacemos desde la perspectiva de los tres criterios en juego. A las variables que son nombradas explícitamente, porque ejercen de sujeto o predicado en las premisas, las hemos representado contorneado sus nodos de azul, aunque mantenemos el valor de sus núcleos igual a cero, como haría la lógica matemática. Así, con el contorno azul indicamos que nos parece razonable contar con su existencia, pero no indicamos que sea segura la presencia de los sujetos y/o predicados de las premisas. Tanto las proposciones universales como particulares han sido interpretadas desde una perspectiva teórica. En la segunda parte de cada ejercicio, mostramos cómo se propaga la inferencia partiendo de la activación o la inhibición de distintos nodos *Or*, o *And*.

En la mayor parte de los ejercicios solo se resuelve lo que llamamos primera inferencia. Pero en algunos ejercicios hemos añadido los valores de la segunda inferencia contorneando la expectativa que resulta de promediar y repartir los valores de los nodos *Or* y *And*. El lector que prefiera la sencillez puede olvidarse de los contornos. El que prefiera complicarse debe recordar que los valores absolutos se imponen a los contingentes en todo el proceso y además debe tener en cuenta que la resolución de esa segunda inferencia estadística, en los contornos de los nodos, nos plantea la necesidad de desarrollar nuevas reglas. Por ejemplo, el valor de los contornos no debería afectar al de los núcleos, pero sí al revés. Además, en la segunda inferencia el valor que se propaga hacia los contornos de los nodos *Objeto* centrales es un valor promedio. Así, la verdad que se propaga al nodo *Objeto* desde un super nodo *Or* es un promedio del valor de activación considerando todos los nodos centrales, mientras que el valor de falsedad que se propaga desde un súper nodo *And* al *Objeto* central incierto es un promedio considerando el valor de falsedad de todos los nodos *Objetos* centrales conocidos. Así, si en conjunto falta uno de cuatro, los otros tres nodos centrales asumen en la segunda inferencia un valor contorno de -0,25, mientras que si hay dos presentes de cuatro, los otros dos inciertos reciben desde el super nodo *Or*, en la segunda inferencia, un valor en su contorno de +0,5. En todo caso, el valor de los contornos de los nodos centrales en la segunda inferencia depende del conjunto que se tome como referencia para obtener el promedio. En la resolución de Darii se puede ver que partiendo desde el criterio a, si es falso $\neg ab$ podemos esperar que sean falsos los nodos de $\neg a \neg b$ con mayor certeza si tomamos $\neg a$ como referencia (-0,5 porque faltan dos de cuatro) que si tomamos la totalidad de $\underline{a}$ (-0,33 porque faltan dos de seis).

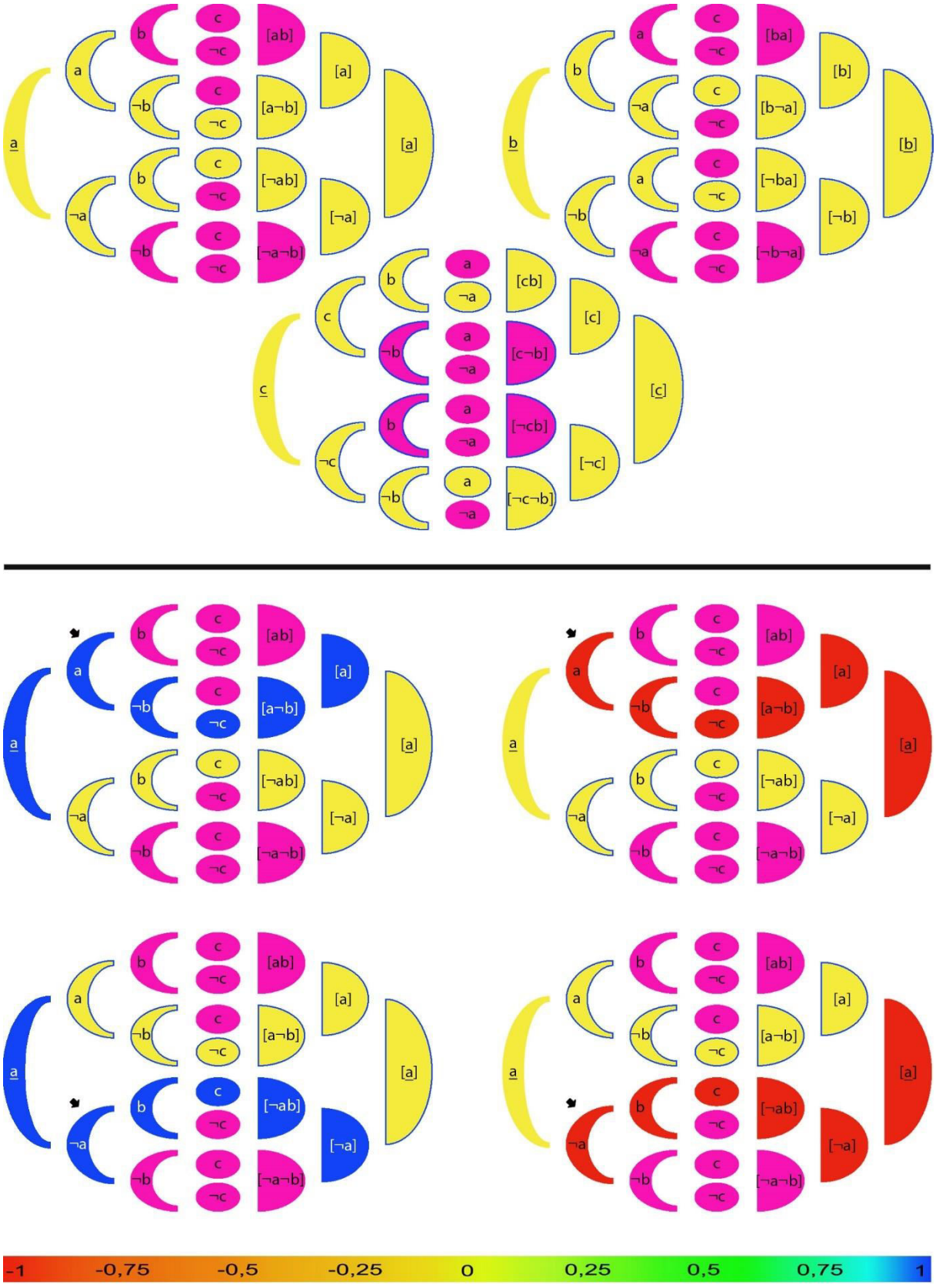
La integración de valores de expectativas acumulados en el pasado en los contornos de los nodos con los valores de expectativas generados por los valores de activación e inhibición en curso es algo que dejamos para futuras investigaciones, siendo un interesante debate la cuestión de si la reiteración de valores probables debería dejar huella o no en los contornos de los núcleos modificando su peso. Por ejemplo, en un juego de lotería en el que obtenemos premio si conseguimos tres figuras iguales tras rascar tres casillas, ¿deja huella en la memoria el hecho de haber obtenido dos iguales al rascar las dos primeras casillas haciéndonos suponer que estábamos cerca del premio? Aunque nosotros nos inclinamos porque los valores probables deben ser olvidados, pensamos que la programación de una tercera inferencia en la calculadora lógica requiere tomar decisiones acerca de los riesgos que nos interesa asumir, sin que sea posible establecer una regla universal en la codificación de expectativas al margen de los intrereses. De lo que sí que estamos más seguros es de que la codificación de las ocurrencias verificadas de ciertos nodos, cuyos contornos señalamos en azul, debería servir para tomar dichos nodos como más seguros que los que son probables sin un historial de evidencias a su favor. Esta podría ser la base de la frecuencia tan elevada en la comisión de la llamada *falacia de la afirmación del consecuente*. Esperamos comprobar, en futuras investigaciones, si los valores que nosotros otorgamos a los nodos de la red cuando resolvemos silogismos, se ajustan de algún modo a los valores otorgados por el sentido común.

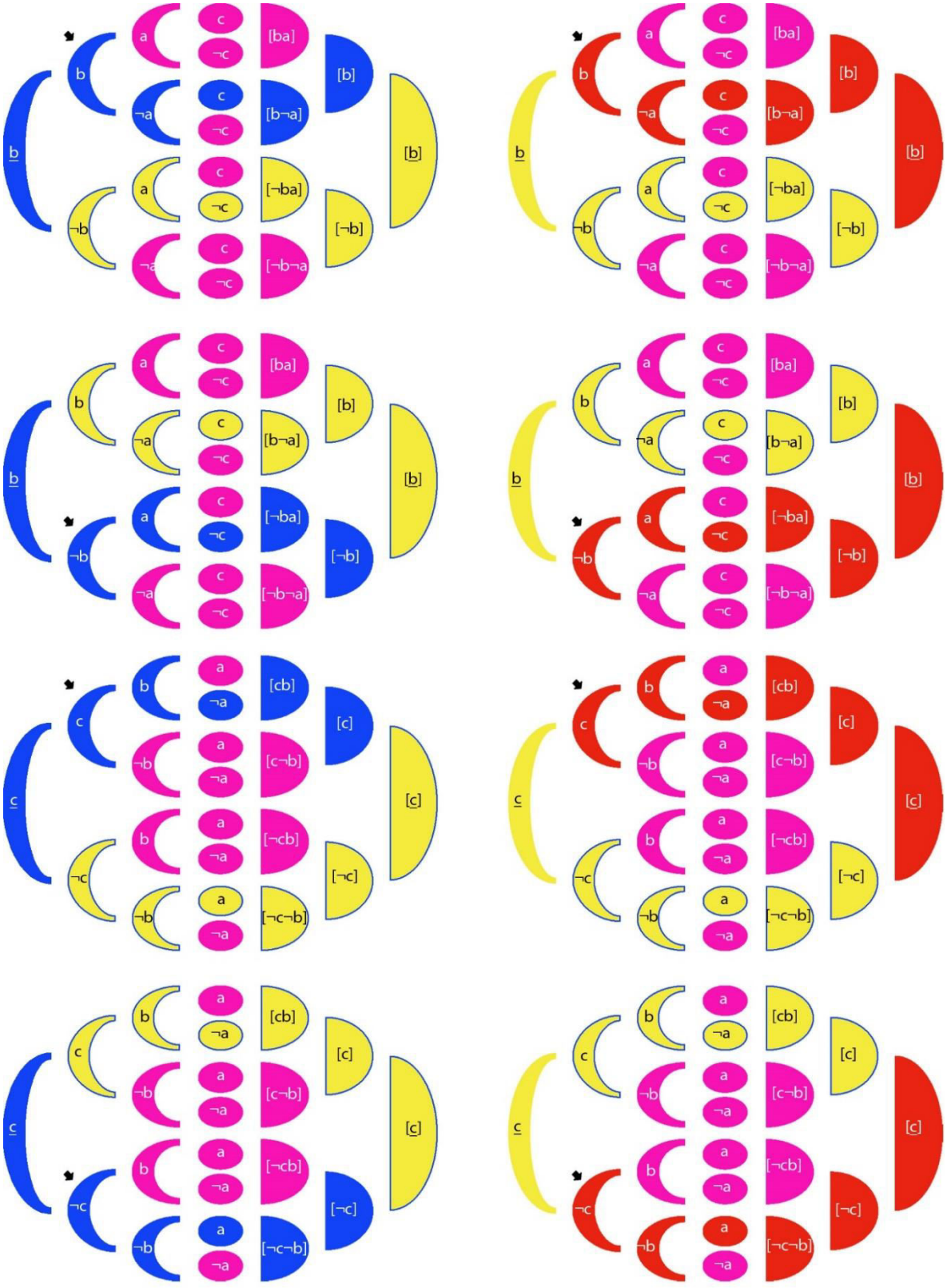
8.1 Ningún A es B. Ninguna C es A. Inferencia completa




Si A, entonces ¬B. Si C, entonces ¬A
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1

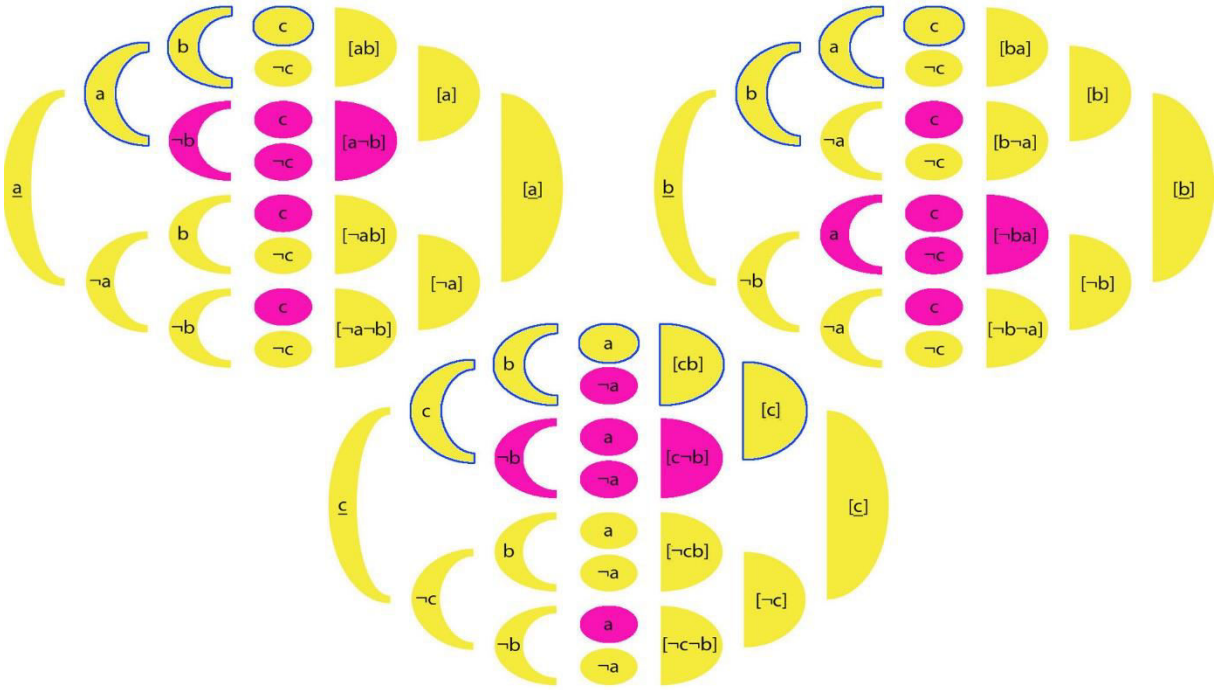
8.2 A⊻B.C⊻A

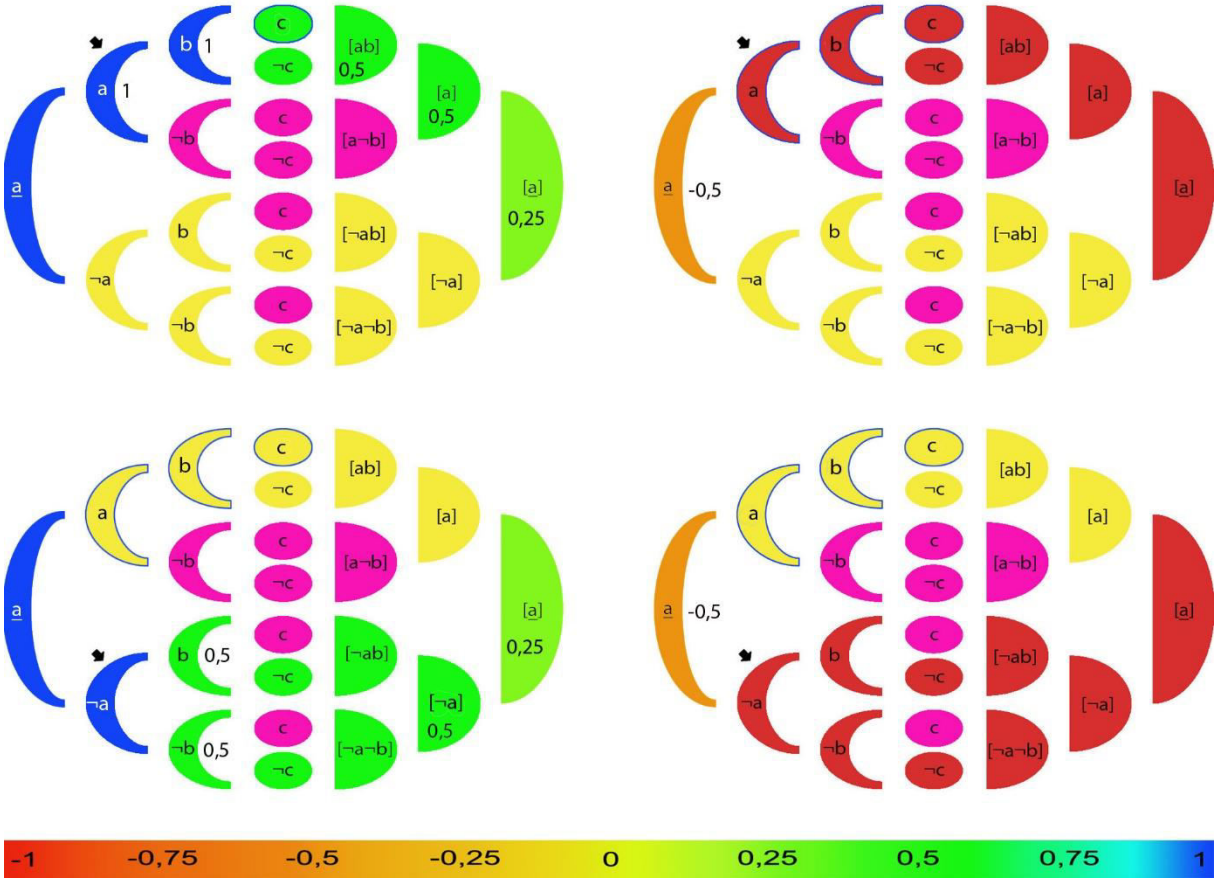

a
b
c
¬a
¬b
¬c
[ab]
[a¬b]
[¬ab]
[¬a¬b]
[a]
[¬a]
[ba]
[b¬a]
[¬ba]
[¬b¬a]
[b]
[¬b]
[cb]
[c¬b]
[¬cb]
[¬c¬b]
[c]
[¬c]
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1

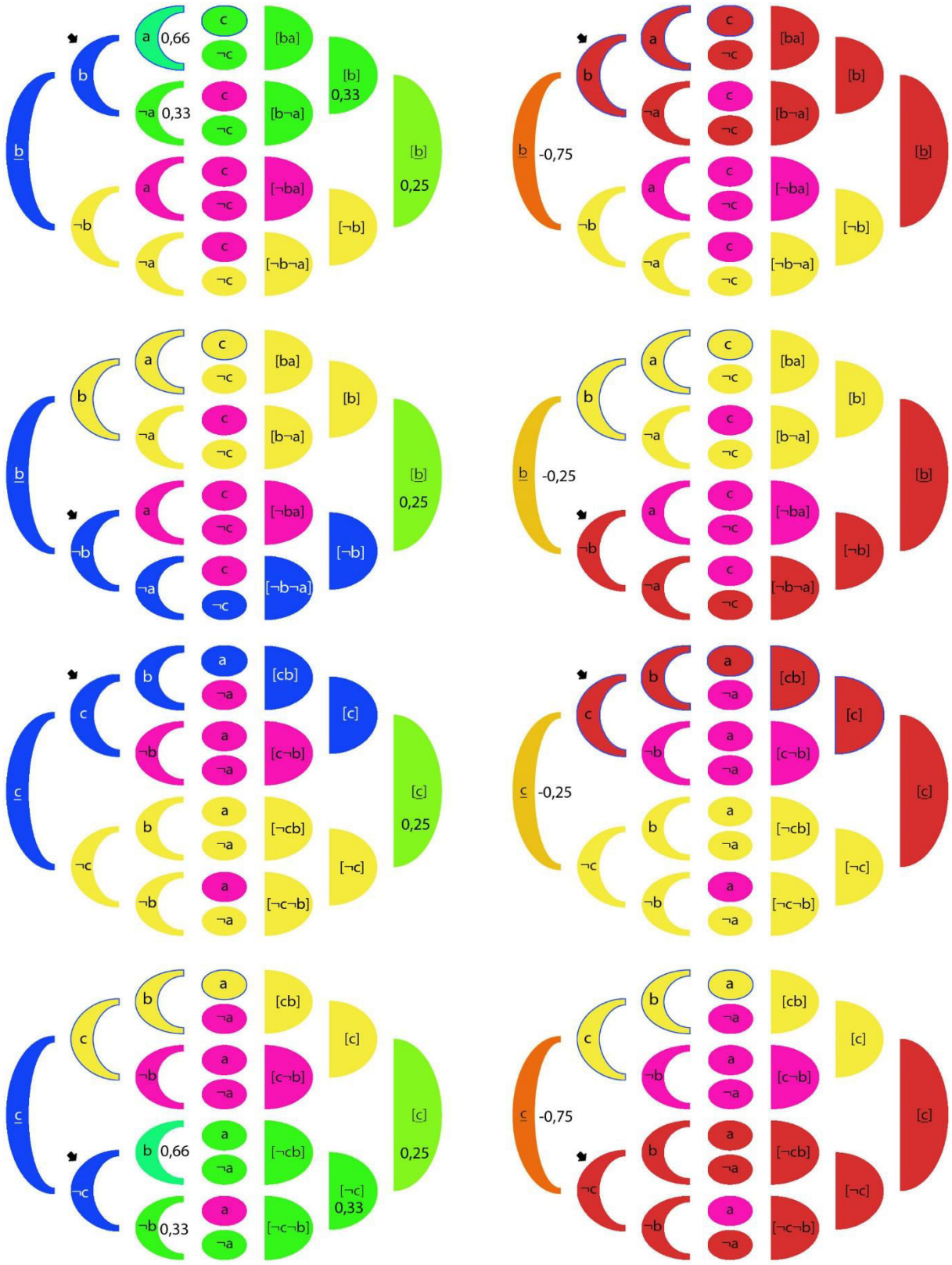


A coimplica ¬B. C coimplica ¬A

8.3 Barbara en redes

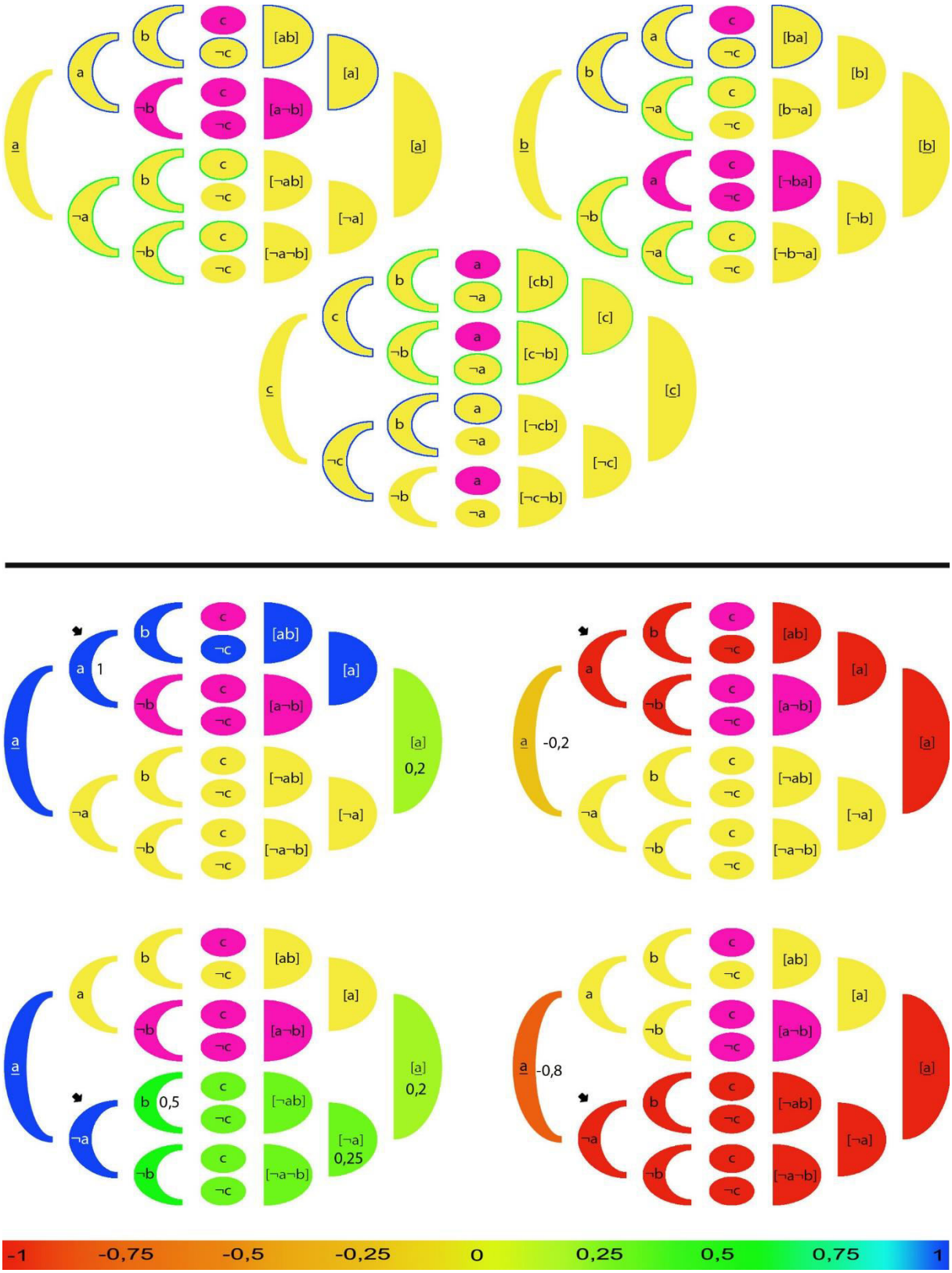


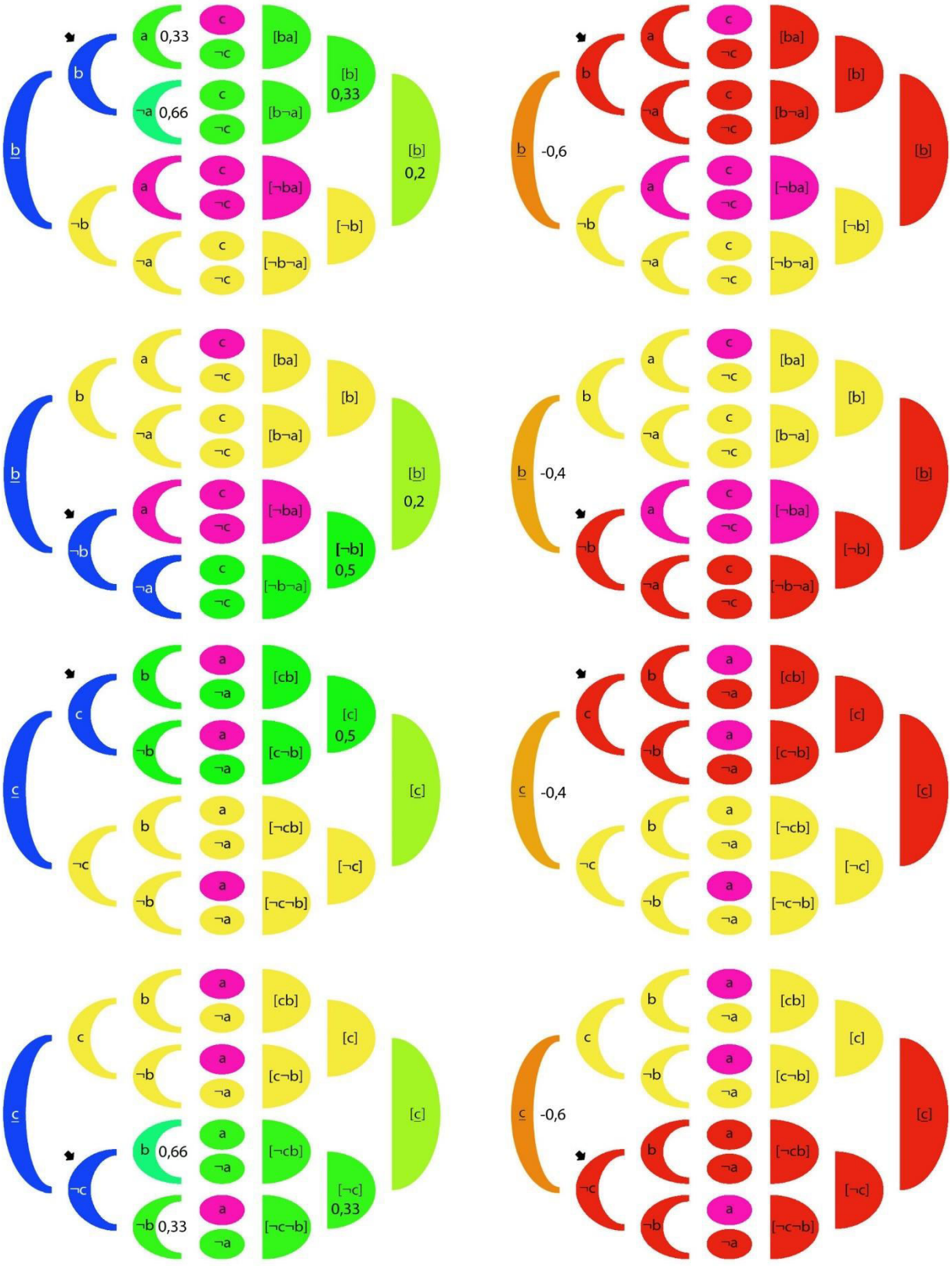




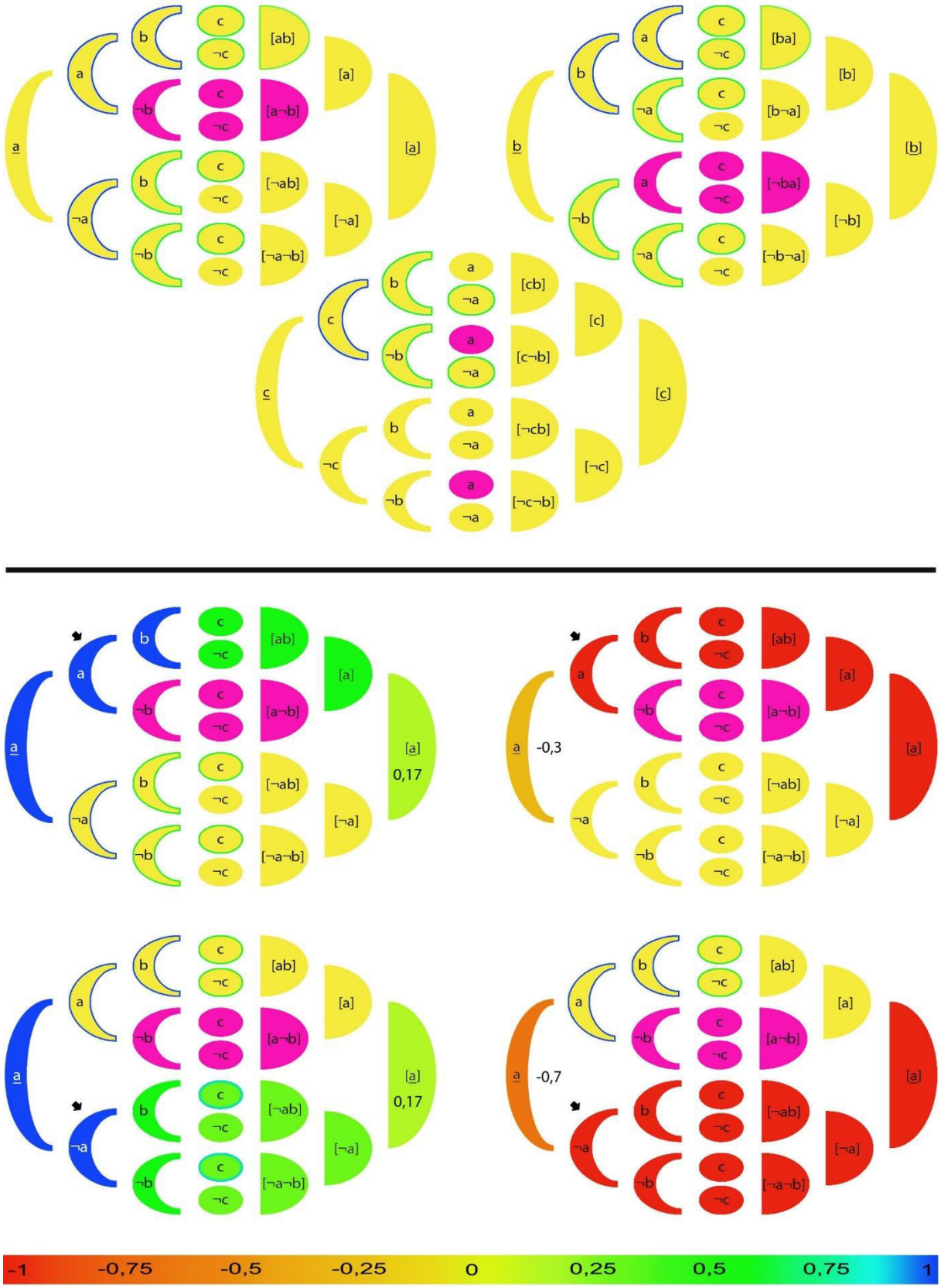
Si A, entonces B. Si C, entonces A

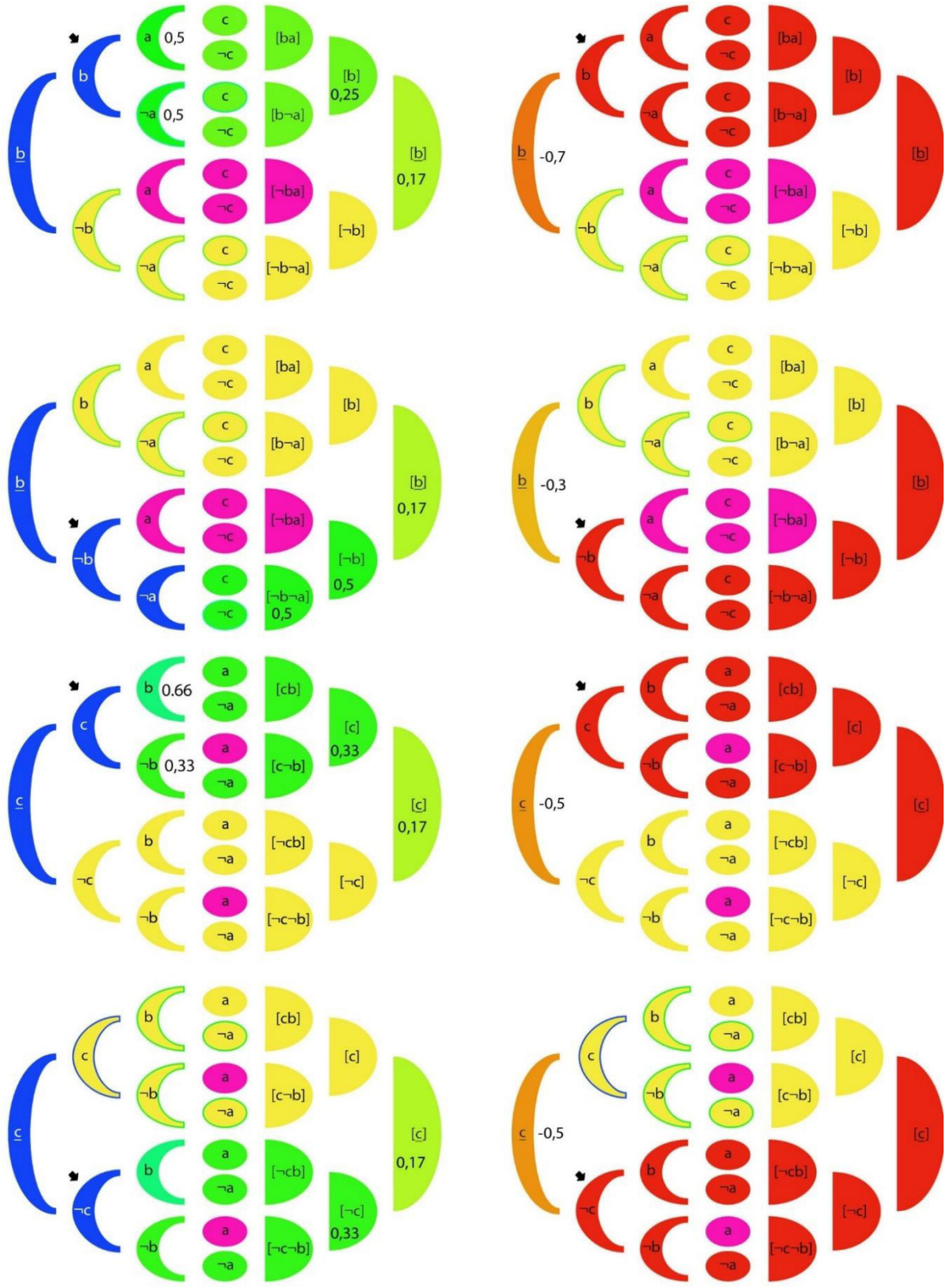
8.4 Toda A es B. Ninguna C es A



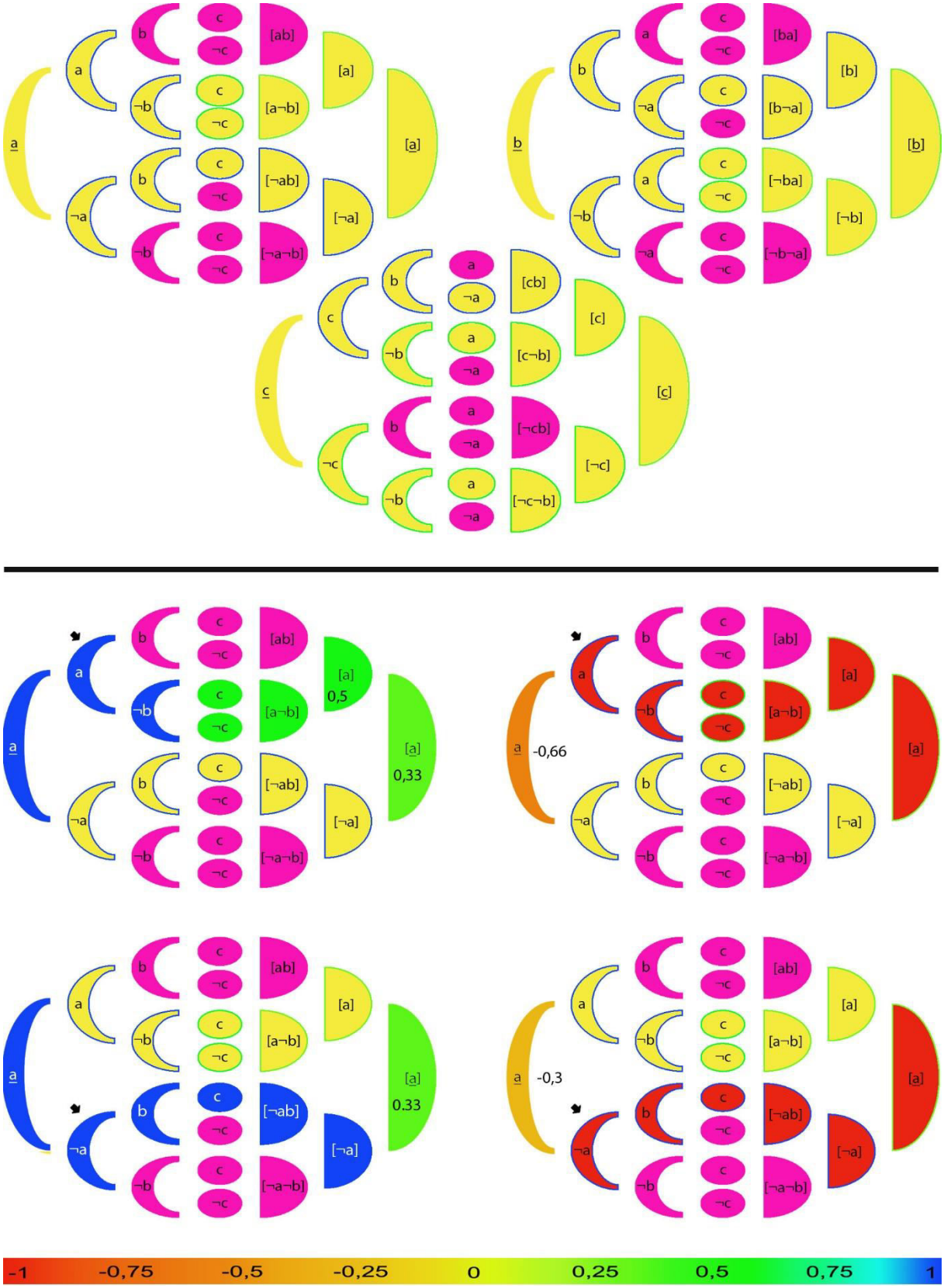

Toda A es B. Ninguna C es A
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1

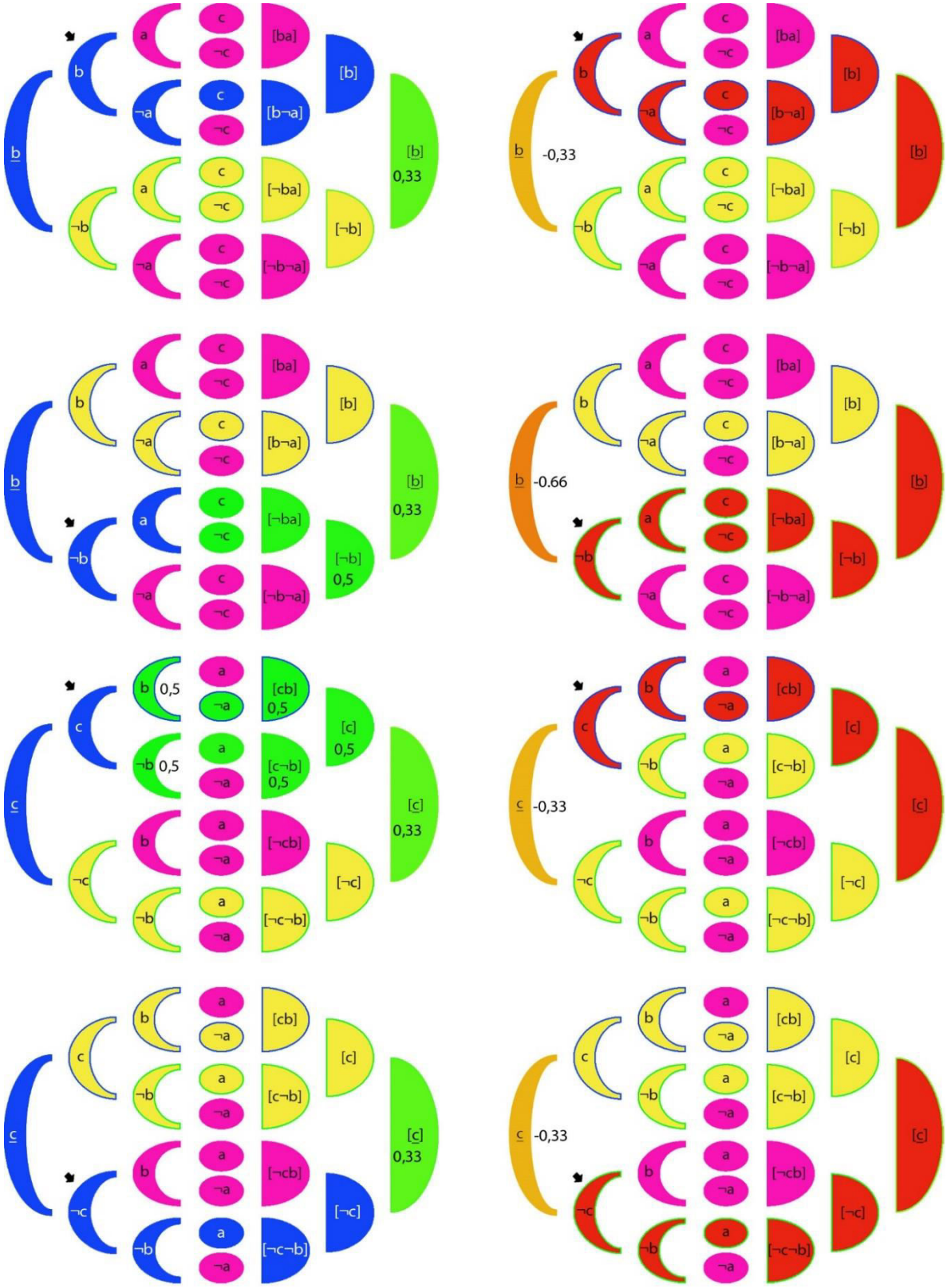
8.5 Toda A es B. Alguna C no es A




Toda A es B. Alguna C no es A
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1

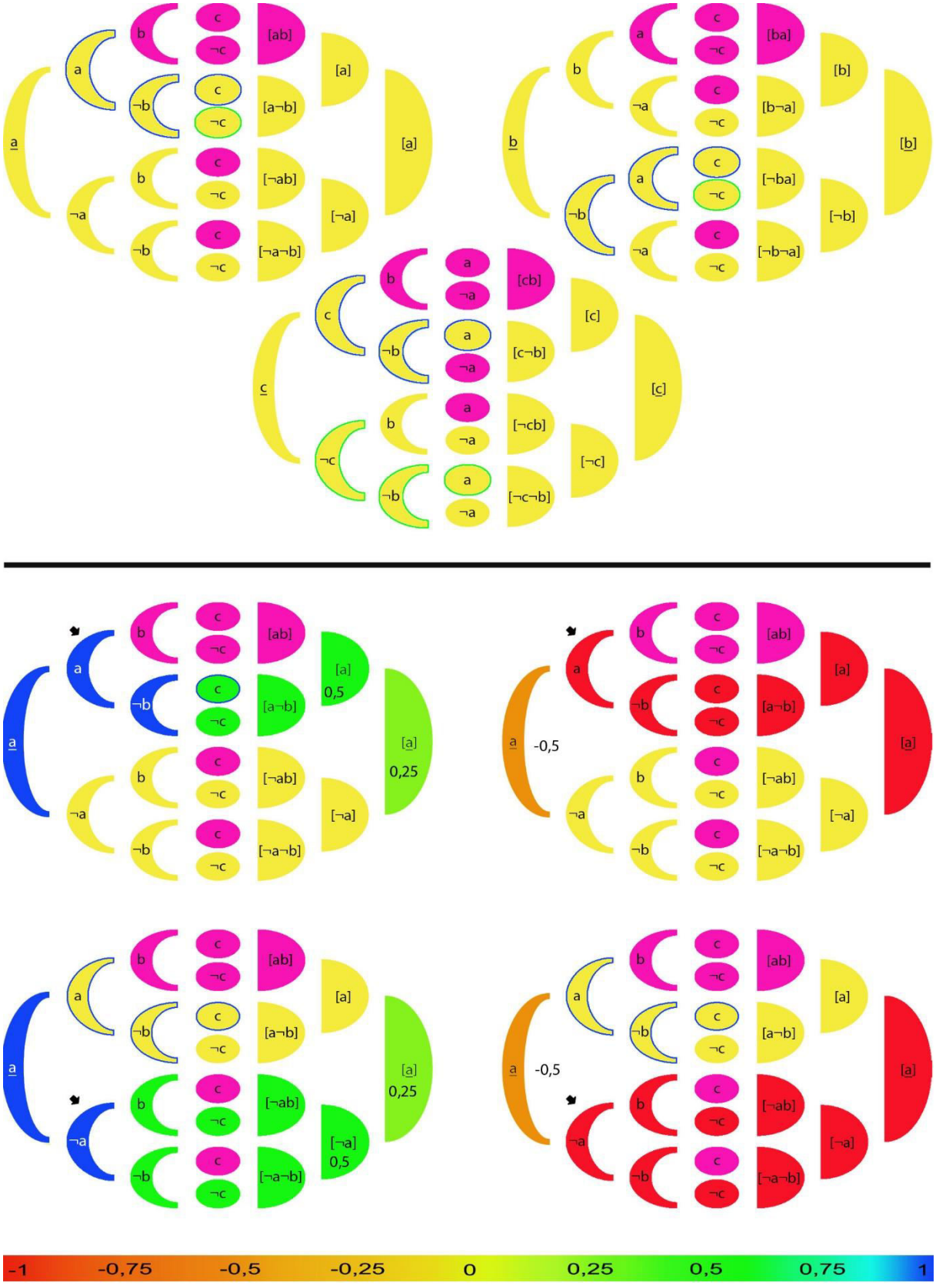
8.6 Si y solo si A, entonces ¬B. Solo si C, entonces ¬A

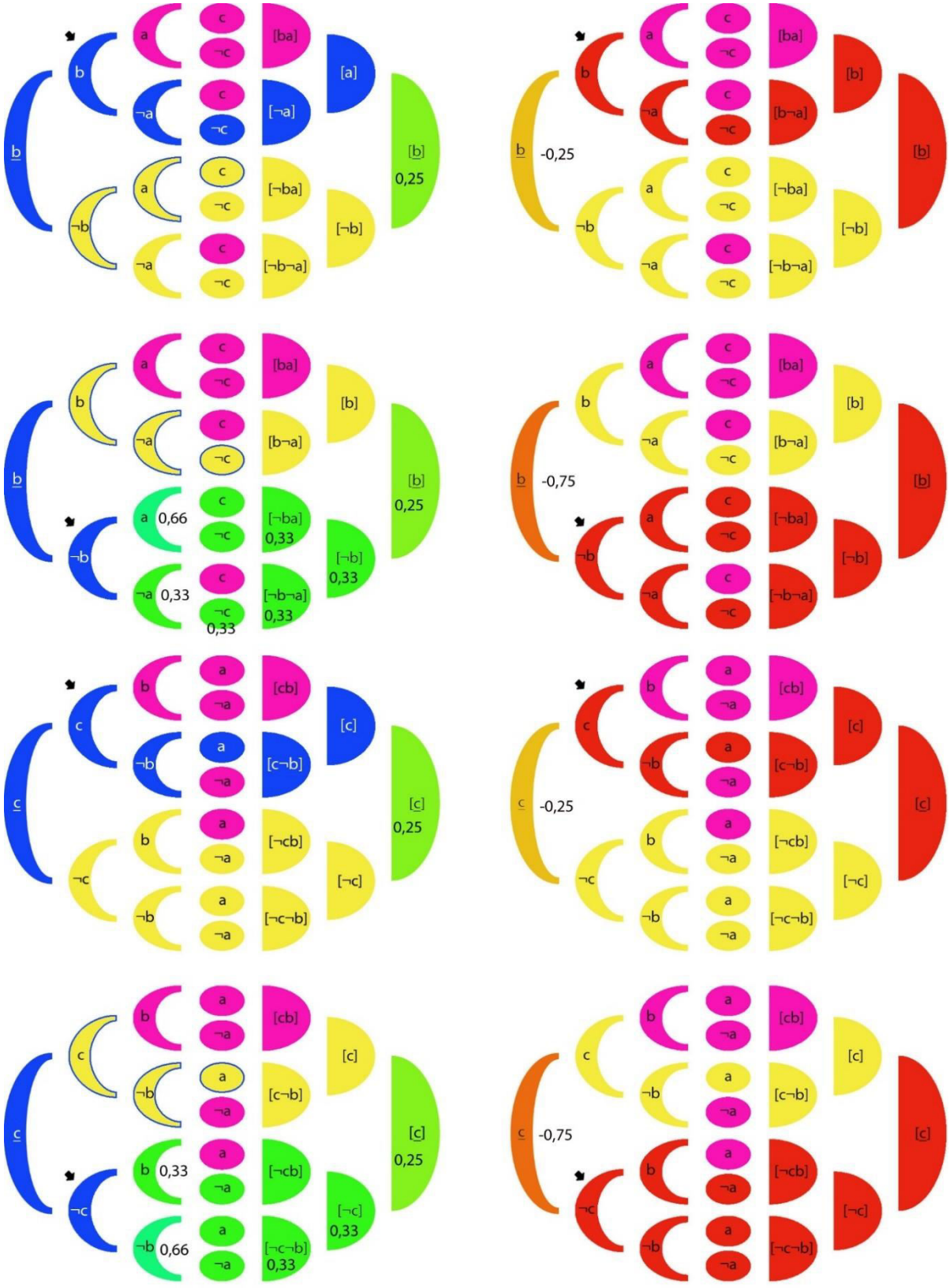




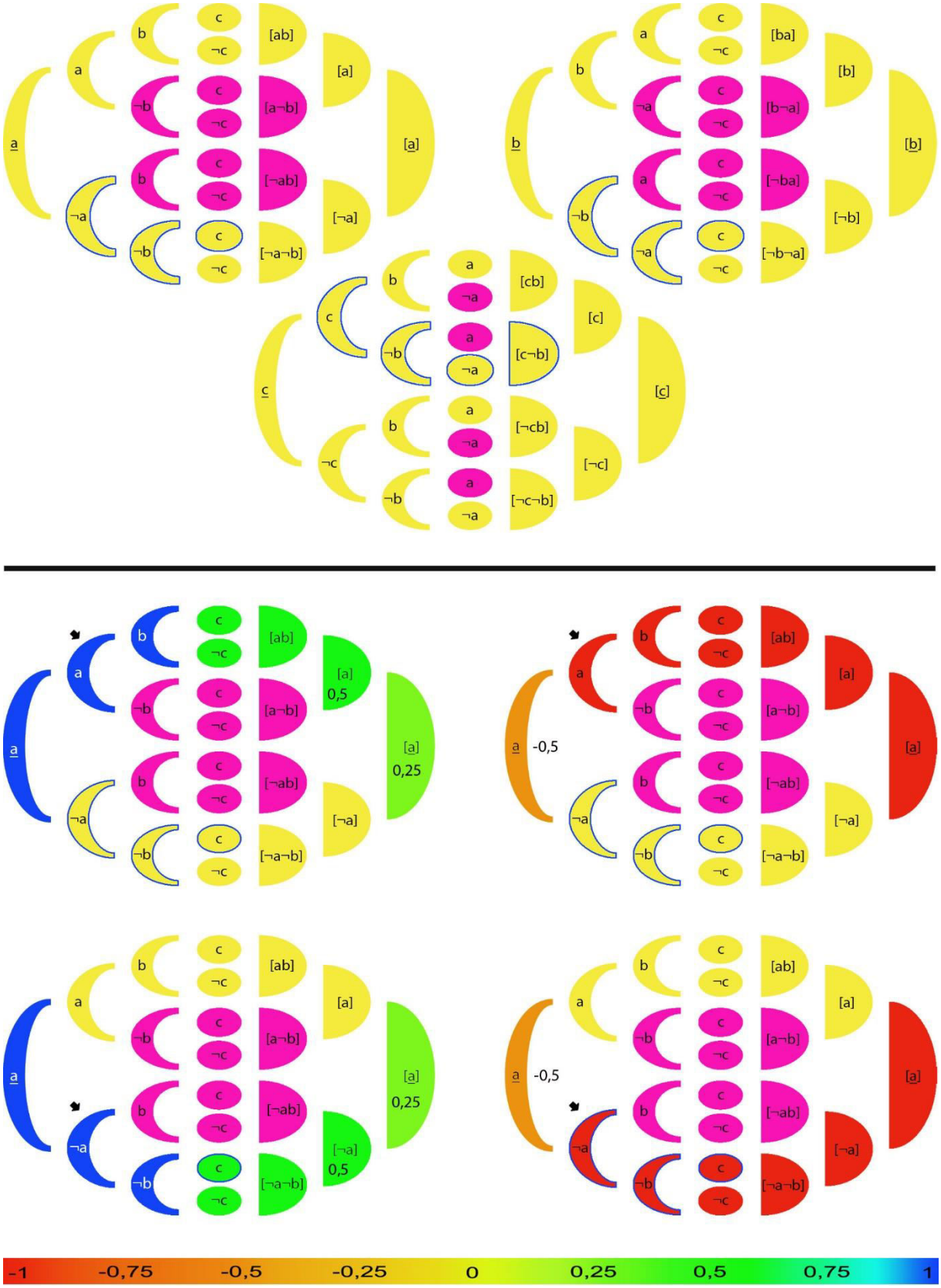
Si y solo si A, ¬B. Solo si C, ¬A

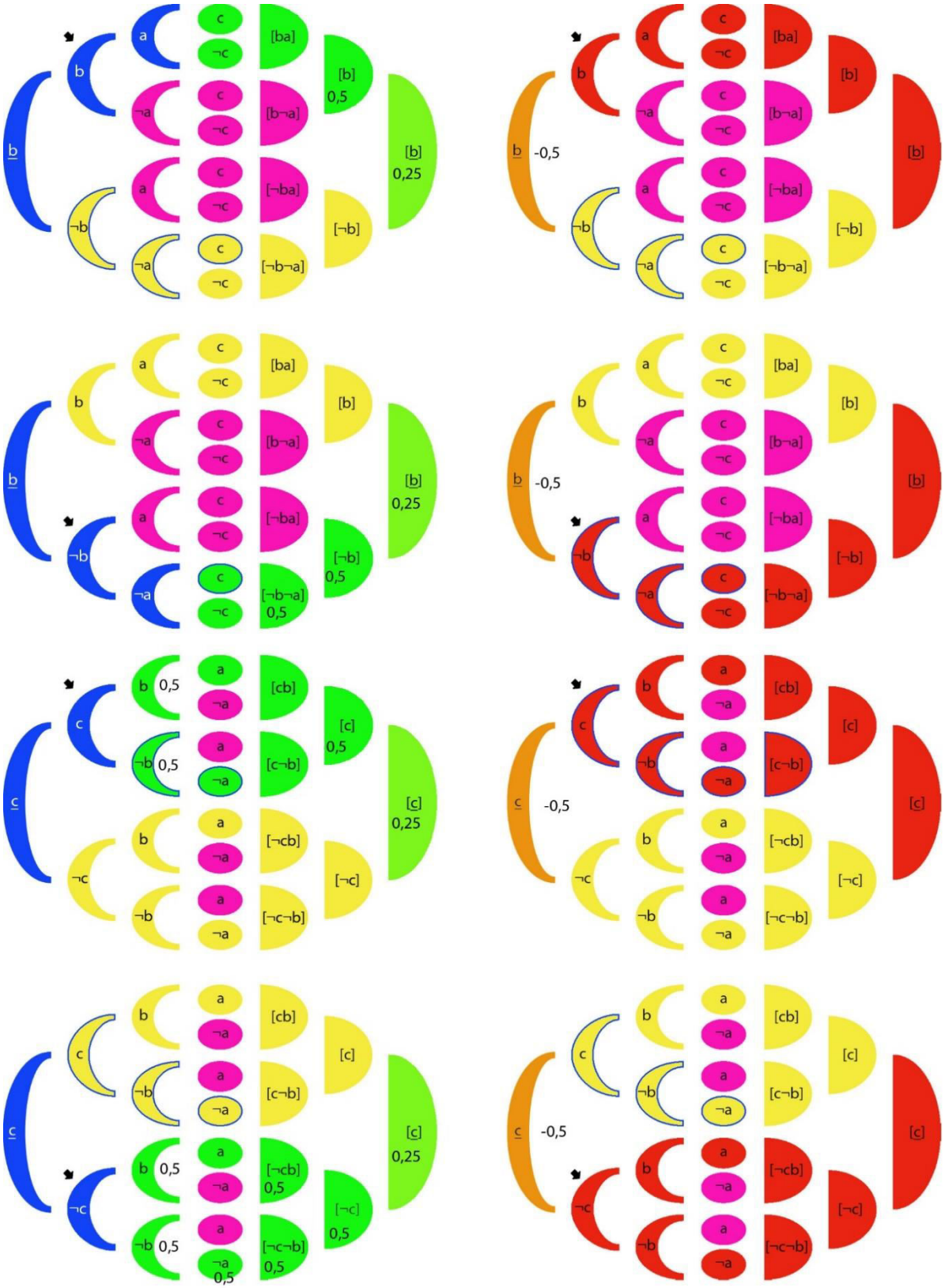
8.7 Si A, entonces ¬B. Si C, entonces A



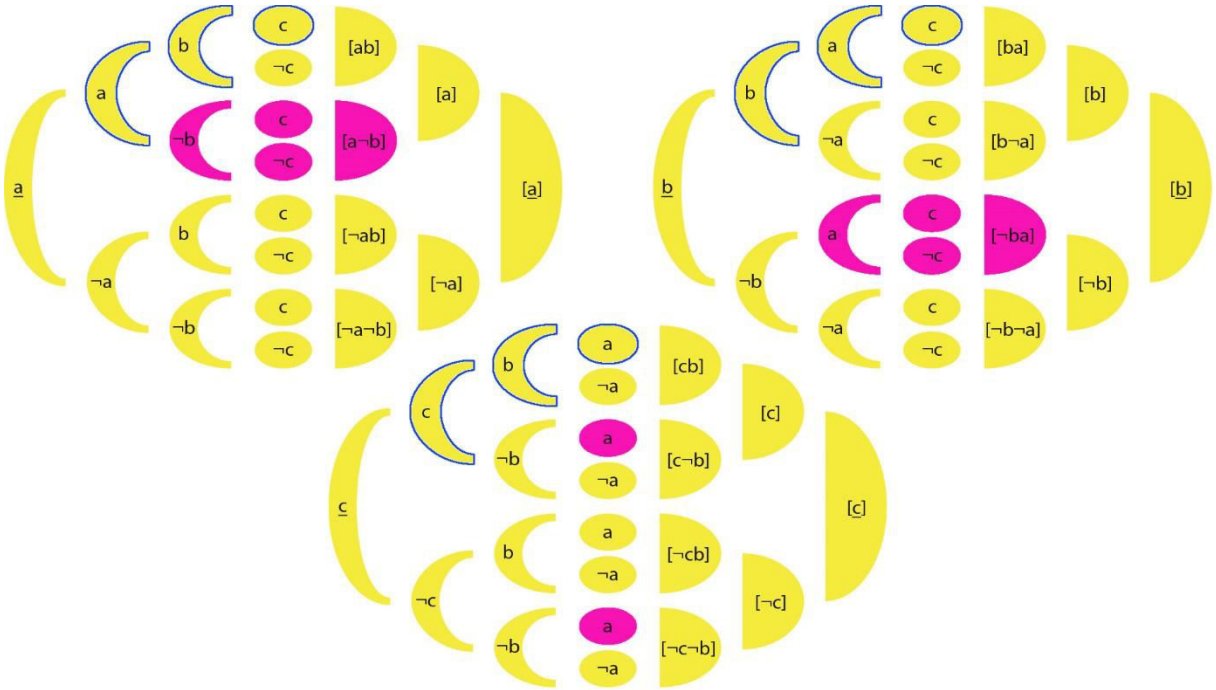

Si A, entonces ¬B. Si C, entonces A
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1

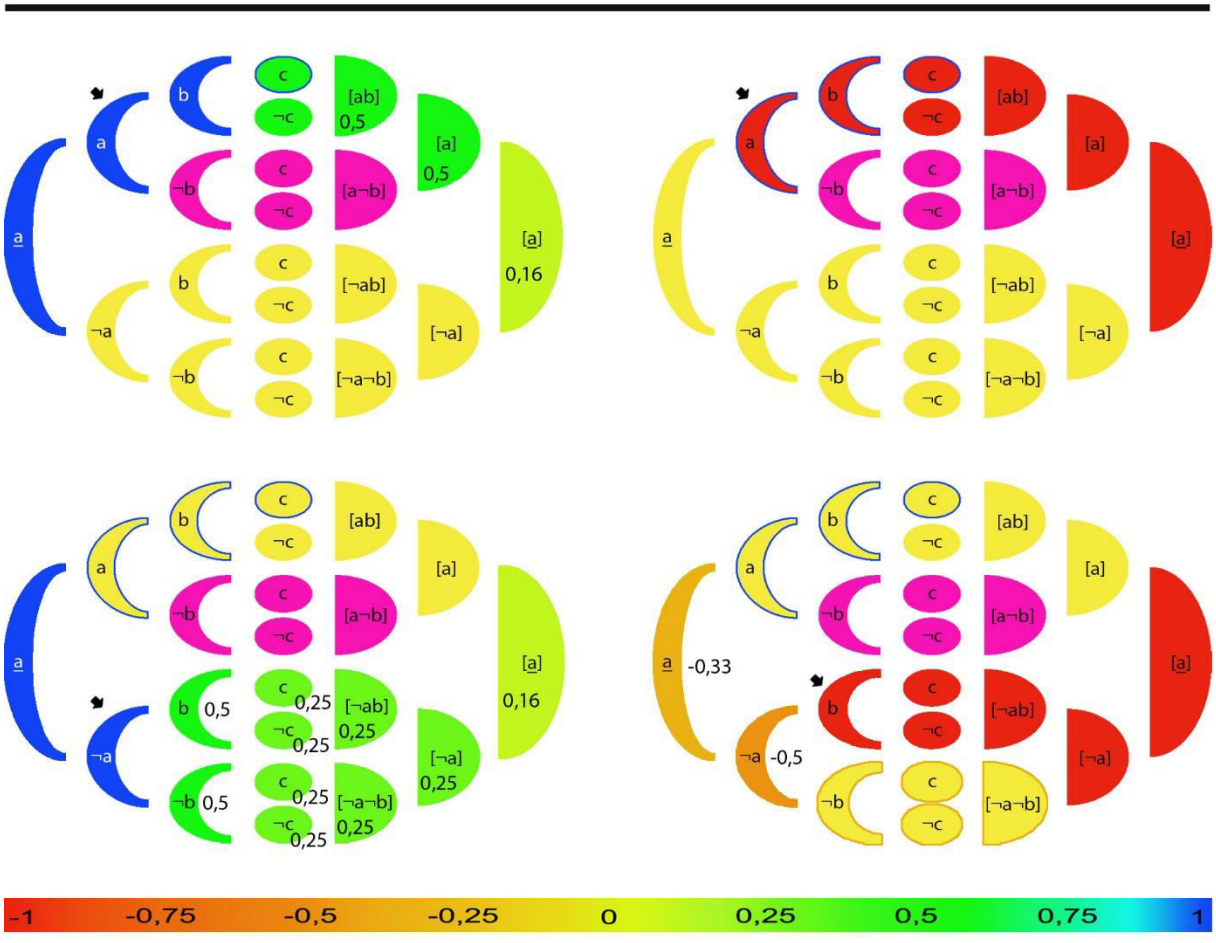
8.8 ¬A equivale a ¬B. Parte de C es ¬A

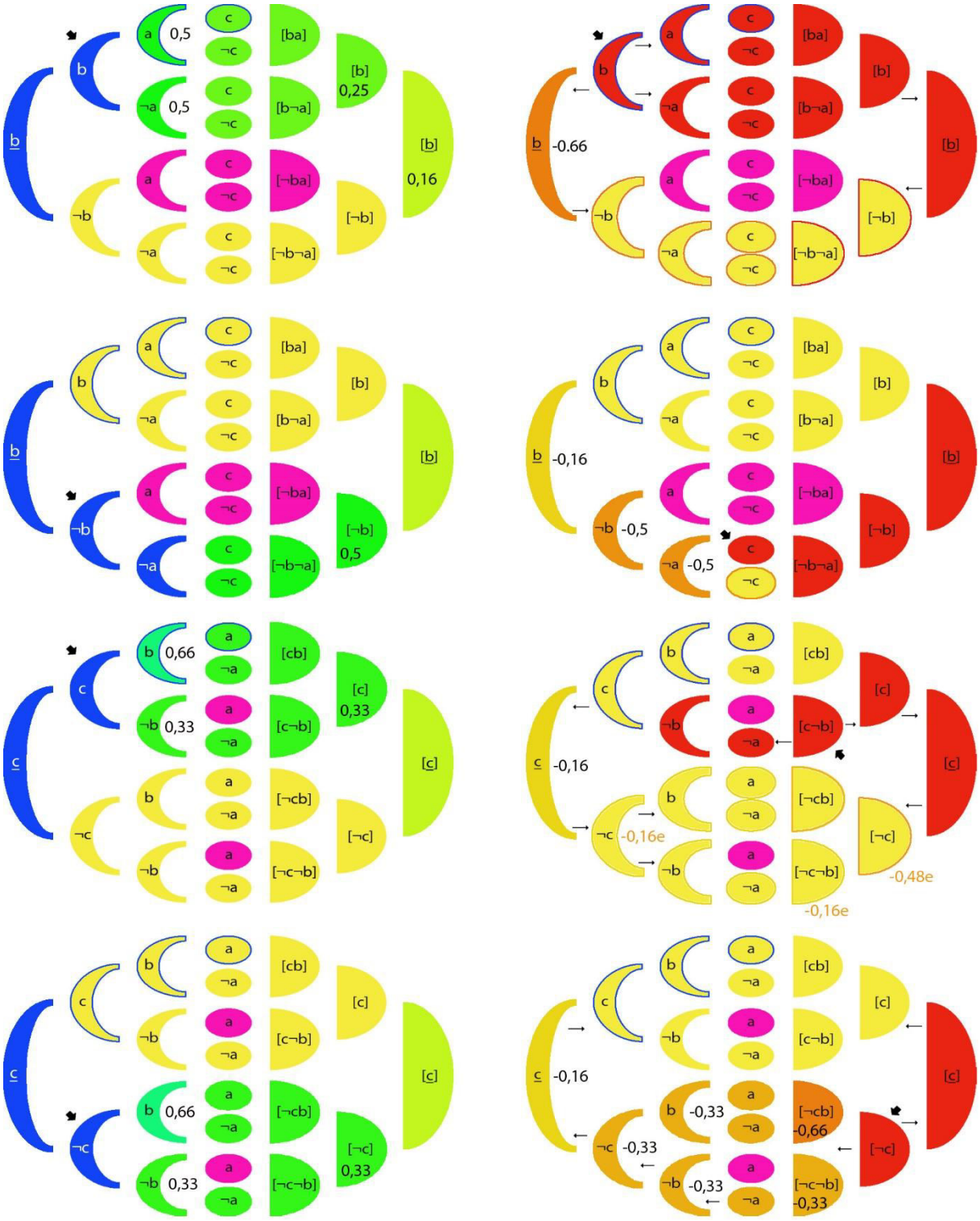



¬A equivale a ¬B. Parte de C es ¬A
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1

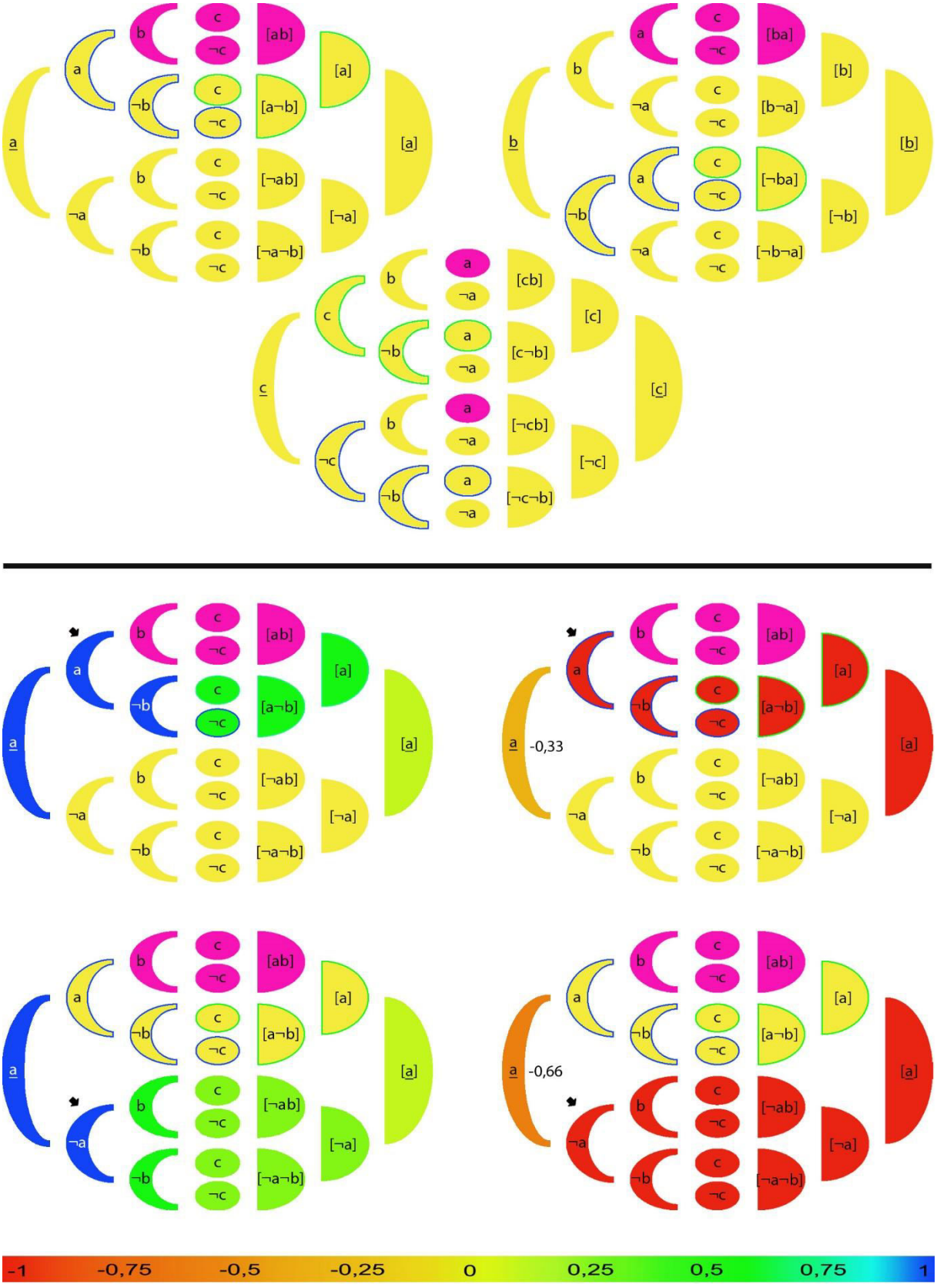
8.9 Darii en redes

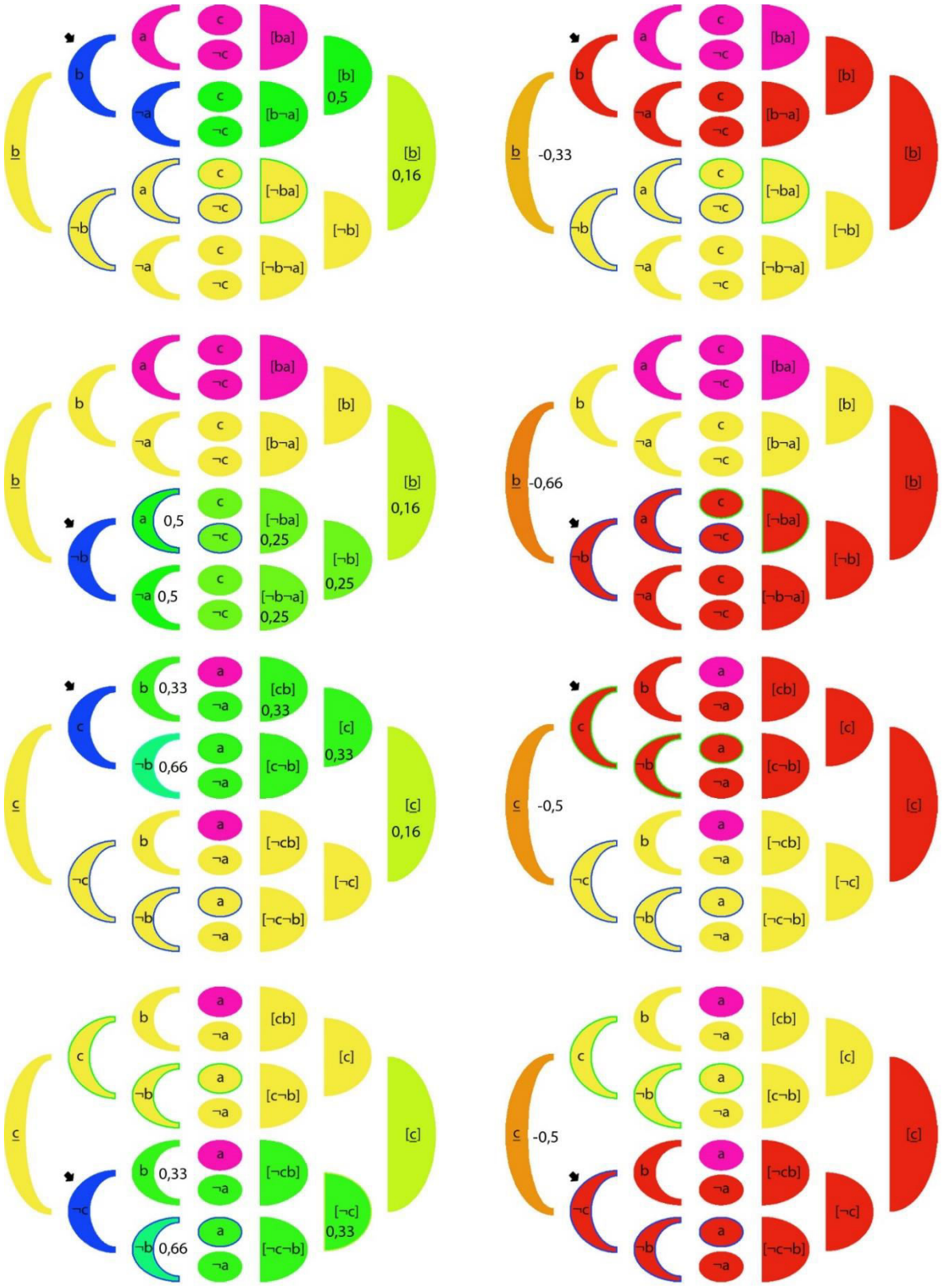




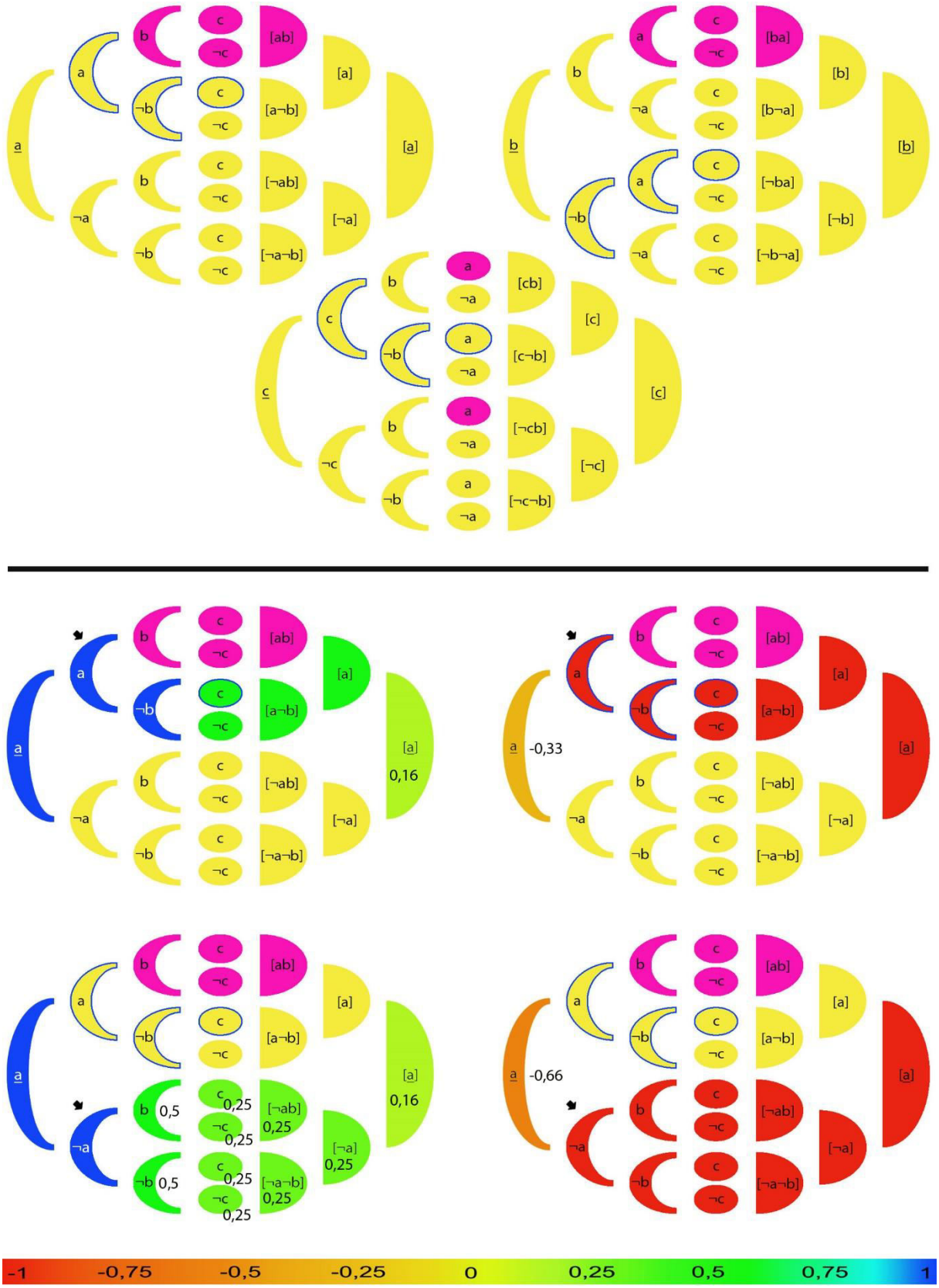

Toda A es B y alguna C es A
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1

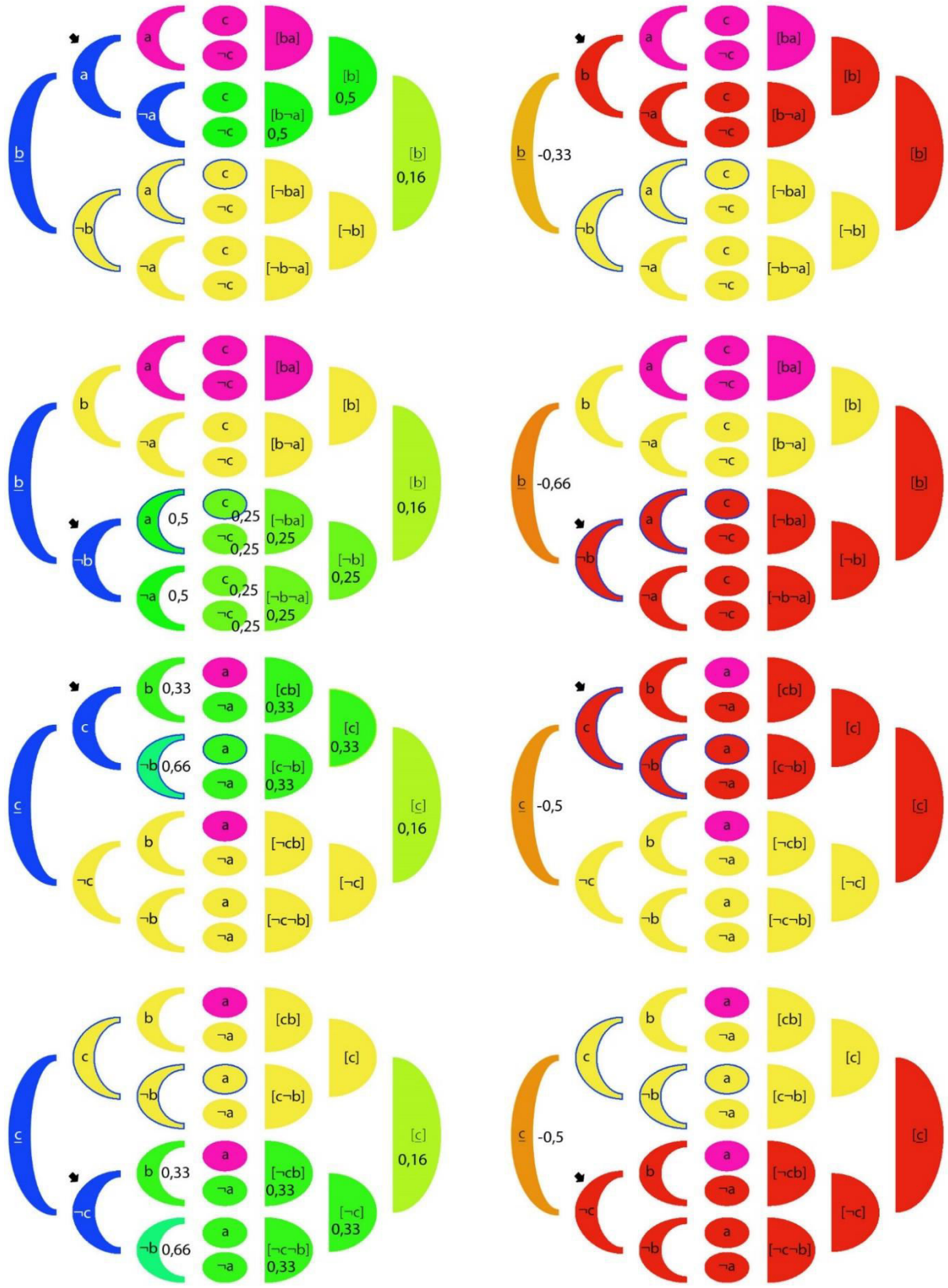
8.10 Ningún A es B. Alguna ¬C es A



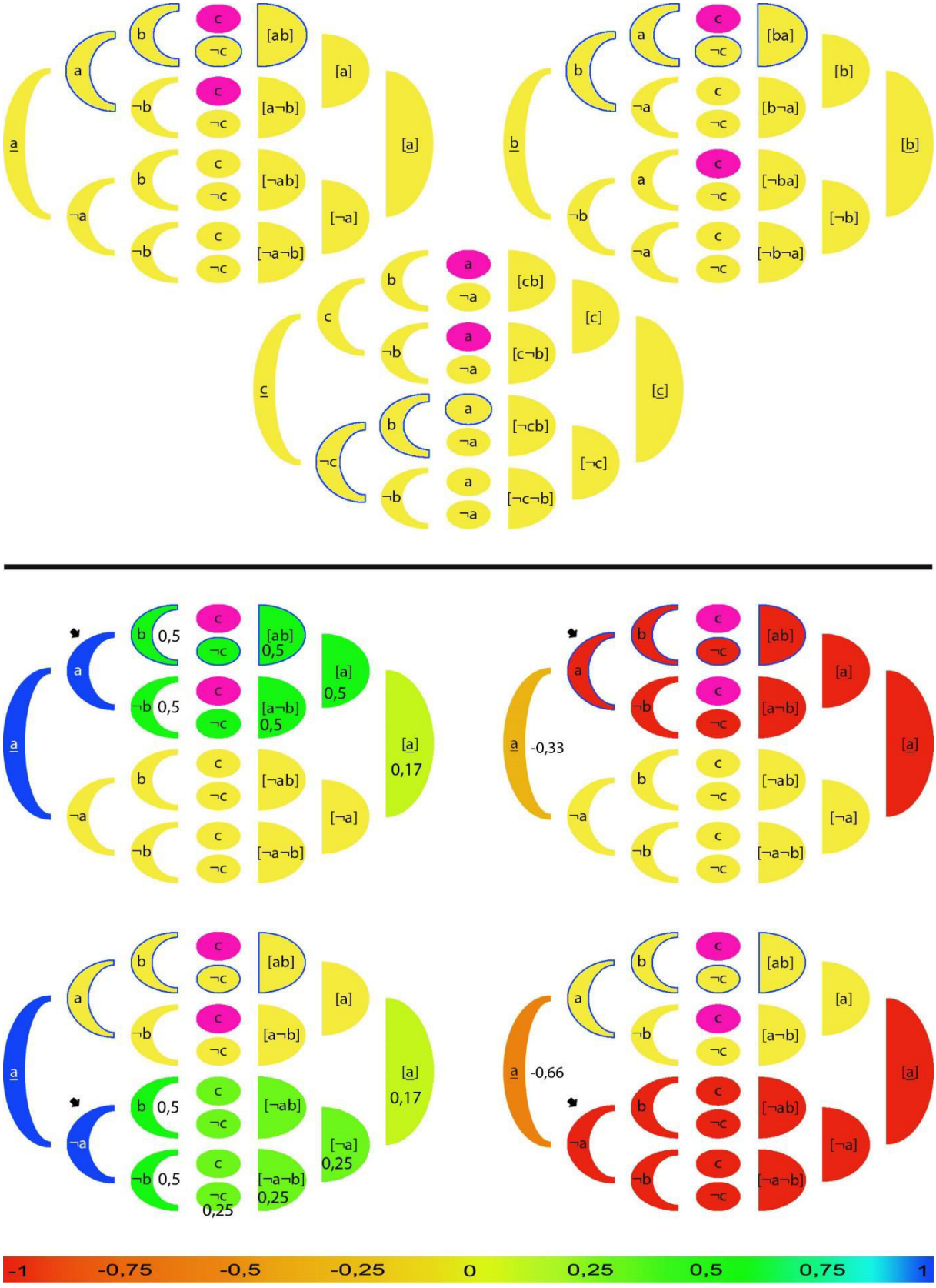

Ninguna A es B. Alguna ¬C es A
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1

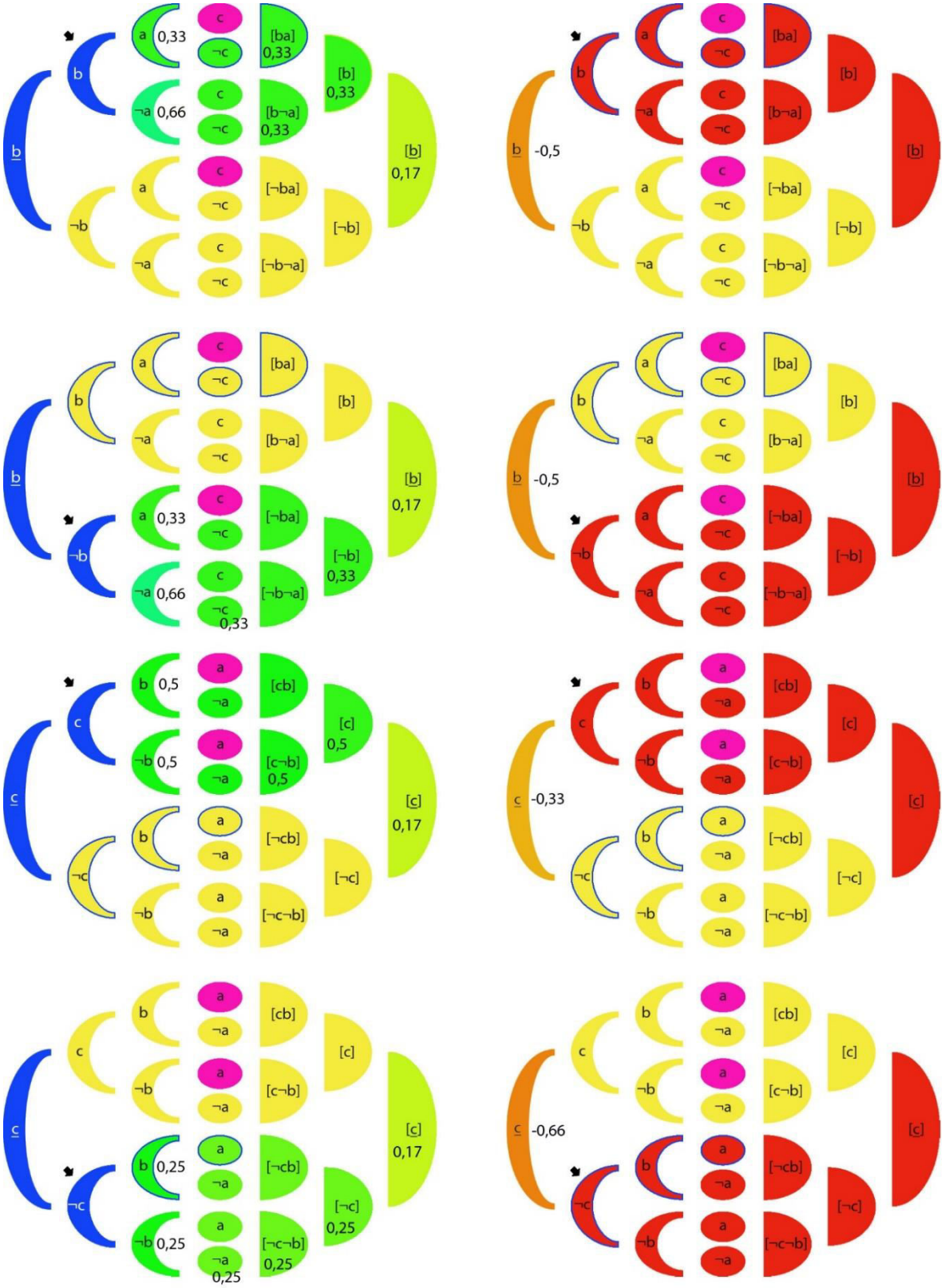
8.11 Ferio en redes



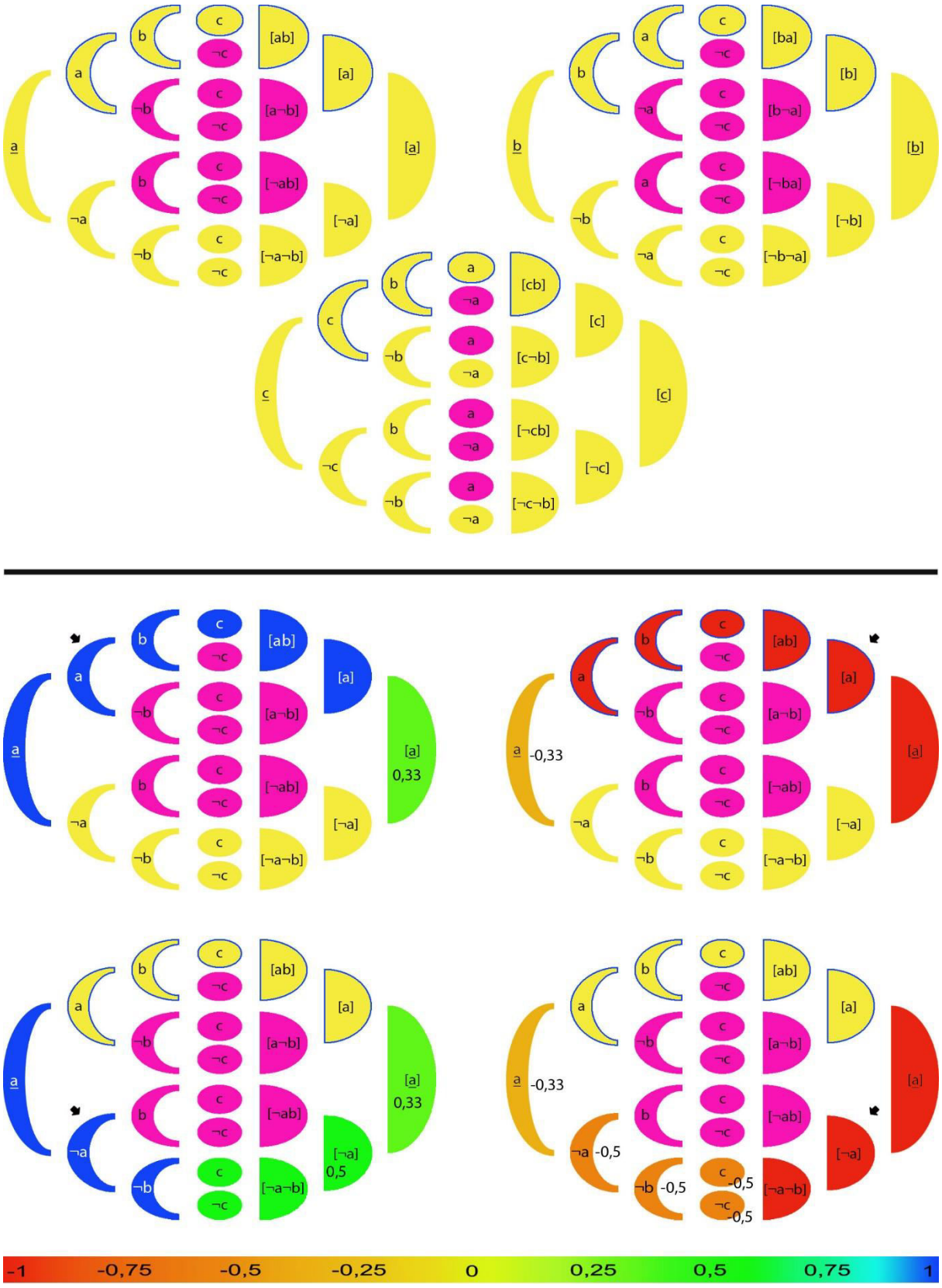

Si A entonces ¬B. Alguna C es A
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1

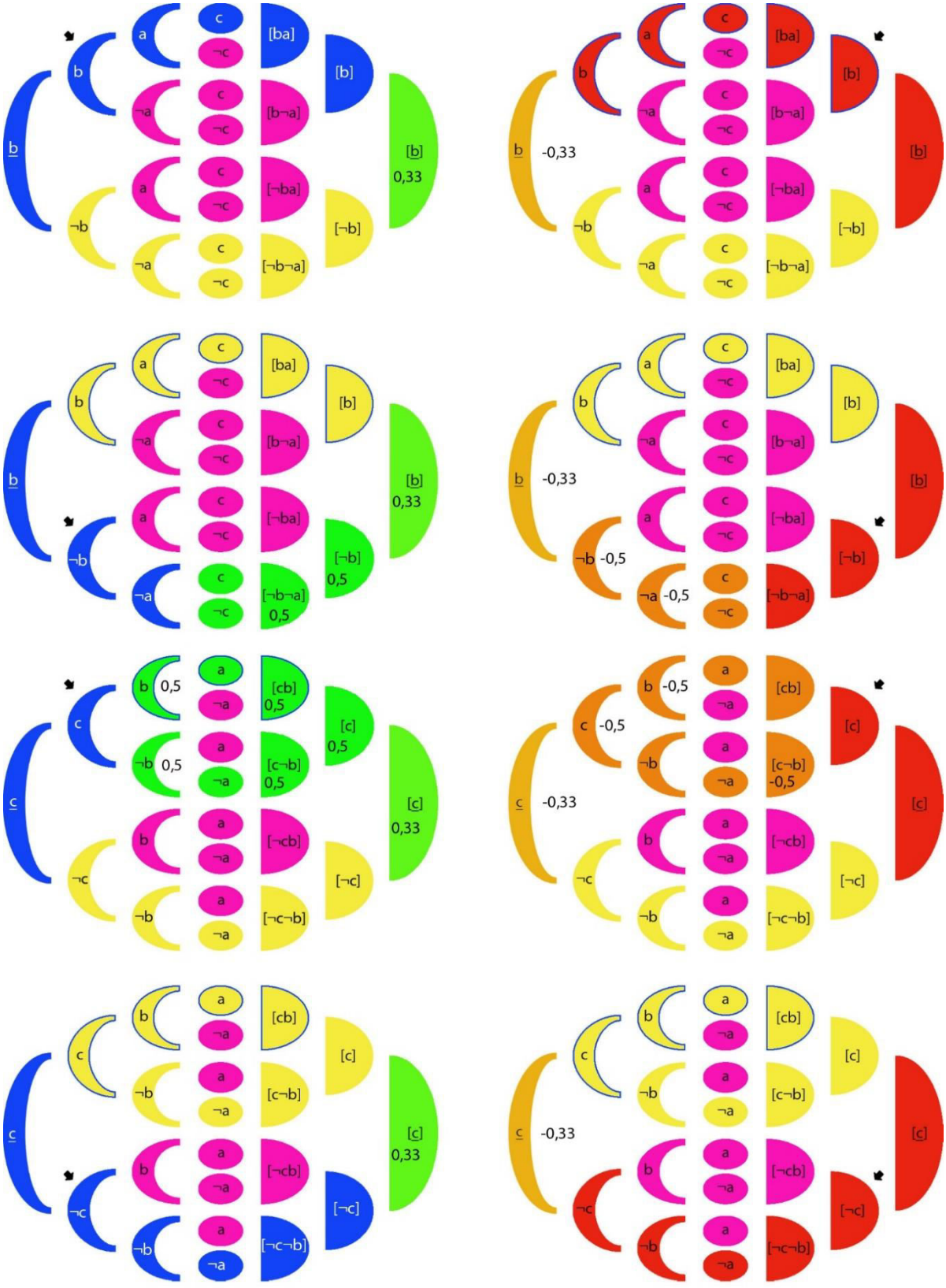
8.12 Alguna A es B. Ninguna C es A




Alguna A es B. Ninguna C es A
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1

8.13 A equivale a B Solo C es A




A equivale a B. Solo C es A
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1

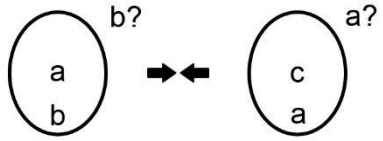
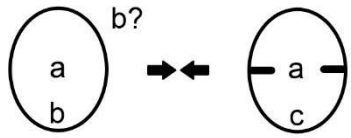
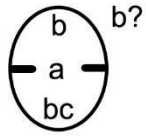
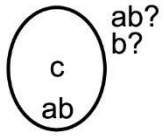
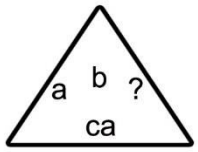
9 EJERCICIOS EN DIAGRAMAS DE MARLO

9.1 Silogismos por síntesis

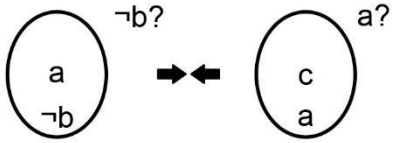
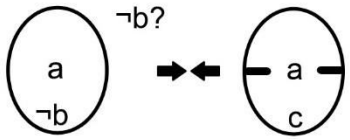
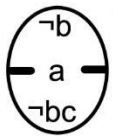
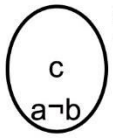
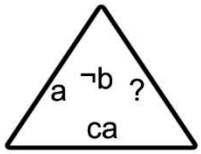
9.1.1 Síntesis particular

9.1.1.1 Primera figura aristotélica (Según la estructura superficial de la sentencia)

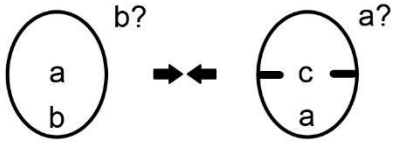
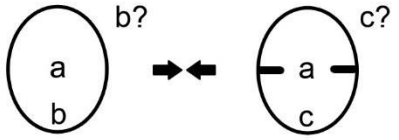
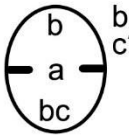
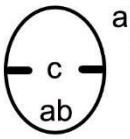
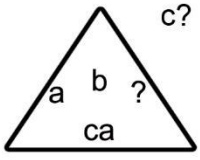
9.1.1.1.1 Barbara

Toda A es B. Toda C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 aXb	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 cXa	La totalidad de C se asocia con parte de A
2	 Conv. 1b		
3	 Sínt. 2		
4	 Conv. 3	3 cXab Gen. a, de 1 a 2	La totalidad de C se asocia con parte de A y parte de B
		4 cXb Cont. 3	Si tengo C, tengo B
5	 Conv. 4	5 bcX Conv. 4	Sólo B es C
		6 bX%cX Def parti 5	Si tengo B es probable la totalidad de C

9.1.1.1.2 Celarent

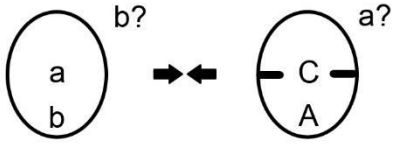
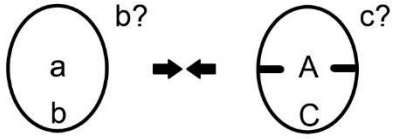
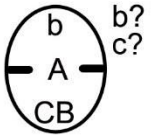
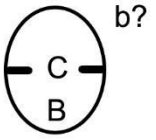
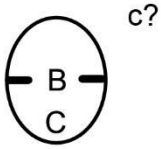
Ningún A es B. Toda C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a_x ¬b	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 $c_x a$	La totalidad de C se asocia con parte de A
2	 Conv. 1b		
3	 Sínt. 2		
4	 Conv. 3	3 $c_x a¬b$ Gen. a, de 1 a 2	La totalidad de C se asocia con parte de A y de ¬B
		4 c_x¬b Cont. 3	Si tengo C, tengo ¬B
5	 Conv. 4	5 ¬bc_x Conv. 4	Sólo ¬B es C
		6 ¬b_x%c_x Def parti 5	Si tengo ¬B es probable tener la totalidad de los tipos de C

9.1.1.1.3 Darii teórico

Toda A es B. Alguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 axb	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 ca	Parte de C se asocia con parte de A
2	 Conv. 1b		
3	 Sínt. 2		
4	 Conv. 3	3 cab Gen. a, de 1 a 2	Al menos parte de C se asocia con parte de A y de B
		4 cb Cont. 3	Parte de C es B
5	 Conv. 4	5 bc Conv. 4	Parte de B es C
		6 bx%c Def parti 5	Si tengo B es probable, al menos, parte de C

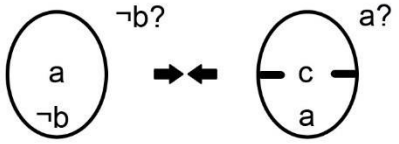
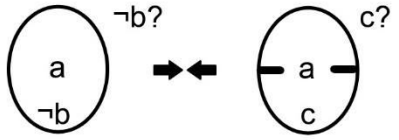
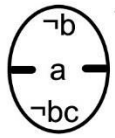
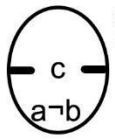
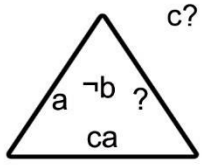
9.1.1.1.4 Darii con razón suficiente para existir

Todo A es B. Algún C es A (y tengo CA).

	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 axb	Si tenemos A, tenemos B
		-2 CA	Alguna C es A
2	 Conv. 1b		
		3 AC Conv. 2	Alguna A es C
3	 Sínt. 2 con RSE.	4 ACB Gen a, 1 a 3 con RSE	Luego esa A es C y B
4	 Cont. 3	5 CB Cont. 5	Alguna C es B
		6 cb Cont. 5	Parte de C es B
5	 Conv. 4	7 BC Conv. 5	Alguna B es C
		8 bx%c Prob. cond. 5	Si tengo B es probable, al menos, parte de C

En el paso 4 hay también una conversión, pero pensamos que la operación de extraer el contenido es más importante y por eso nos quedamos con Cont.

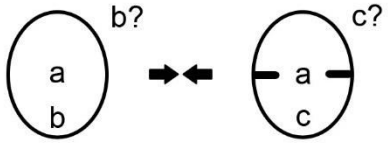
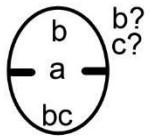
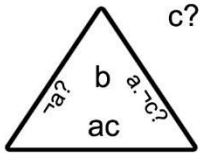
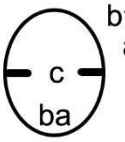
9.1.1.1.5 Ferio

Ningún A es B. Alguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a$_x$¬b	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 ca	Parte de C se asocia con parte de A
2	 Conv. 1b		
3	 Sínt. 2		Es seguro que al menos en parte de A se asocian ¬B y C
4	 Conv. 3	3 ca¬b Gen. a, de 1 a 2	Parte de C se asocia con parte de A y de ¬B
		4 c¬b Cont. 3	Parte de C es ¬B
5	 Conv. 4	5 ¬bc Conv. 4	Parte de ¬B es C
		6 ¬b$_x$%c Def parti 5	Si tengo ¬B, es probable tener parte de C

9.1.1.2 Tercera figura aristotélica (Según la estructura superficial de la sentencia)

9.1.1.2.1 Datisi

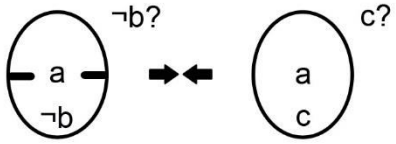
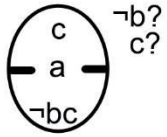
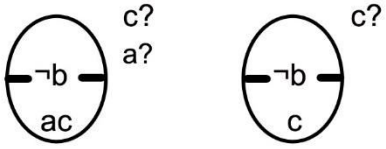
Todo A es B. Alguna A es C.

	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 axb	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 ac	Parte de A se asocia con parte de C
2	 Sínt. 1	3 acb Gen. a, de 1 a 2	Parte de A se asocia con parte de B y parte de C
3	 Conv. 2	4 bc Cont. 3	Parte de B es C
4	 Conv. 3	5 cb Conv. 4	Parte de C es B

En el triángulo del paso 3 aparece en el lado de la derecha "*a.*¬*c*?". Con ello decimos que la *a* es segura, pero ¬c es solo posible. Podríamos decir lo mismo, dado el contexto, escribiendo simplemente *a*.

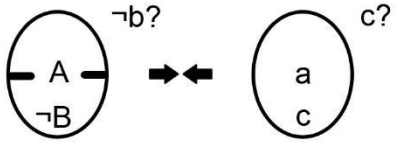
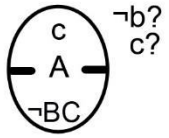
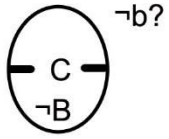
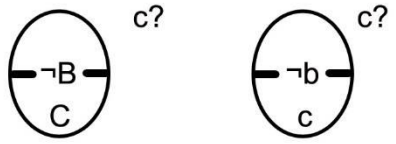
9.1.1.2.2 Bocardo

Alguna A no es B. Toda A es C.

	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a¬b	Parte de A se asocia con parte de ¬B
		-2 axc	Toda A se asocia con C
2	 Sínt. 1	3 a¬bc Sínt.a, de 2 a 1	Parte de A se asocia con parte de ¬B y parte de C
3	 Conv. 2 Cont. 3a	4 ¬bac Conv. 3	
		5 ¬bc Cont. 4	Parte de ¬B es C
4	Conv. 3a Cont. 4a	6 c¬ba Conv. 3	
		7 c¬b Cont. 6	Parte de C es ¬B

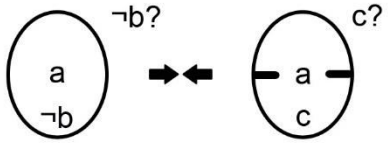
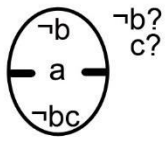
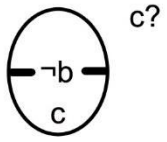
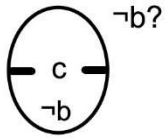
9.1.1.2.3 Bocardo con razón suficiente para existir (RSE)

Alguna A, con la que cuento ahora, no es B. Toda A es C.

	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 A¬B	Alguna A no es B
		-2 a×c	Si hubiera A, sería C
2	 Sínt. 1 con RSE	3 A¬BC Gen.a, de 2 a 1 con RSE	Alguna A no es B y es C
3	 Conv. de contenido en 2	4 C¬B Conv. 3	Alguna C no es B
4	 Conv. 3a Cont. 4a	5 ¬BC Conv. 4	Alguno que no es B es C
		6 ¬bc Contenido 5	Parte de ¬B es C

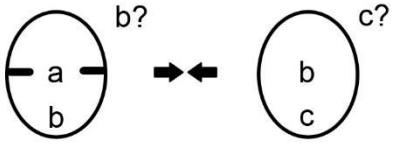
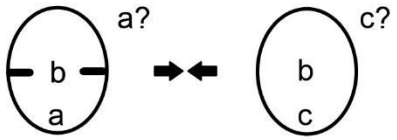
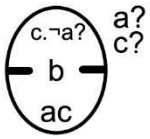
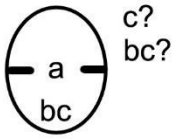
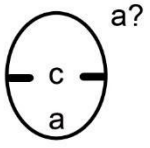
9.1.1.2.4 Ferison

Ninguna A es B. Alguna A es C.

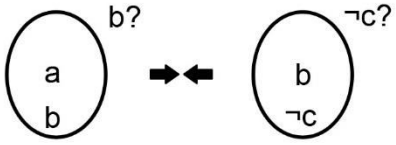
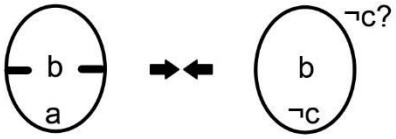
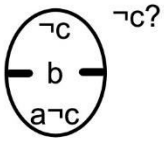
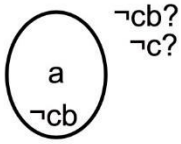
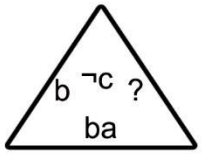
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a_x¬b	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 ac	Parte de A se asocia con parte de C
2	 Sínt. 1	3 ac¬b Gen. a, de 1 a 2	Parte de A se asocia con parte de C y parte de ¬B
3	 Cont. 2	4 ¬bc Cont. 2	Parte de ¬B es C
4	 Conv. 3	5 c¬b Conv. 4	Parte de C es ¬B

9.1.1.3 Cuarta figura aristotélica(Según la estructura superficial de la sentencia)

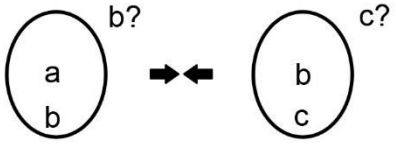
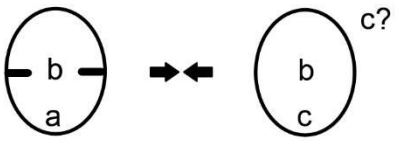
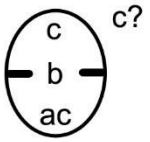
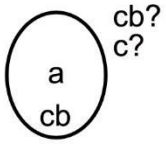
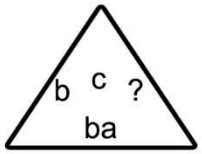
9.1.1.3.1 Disamis

Alguna A es B. Toda B es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ab	Parte de A se asocia con parte de B
		-2 bxc	Toda B se asocia con parte de C
2	 Conv.1a		
3	 Sínt. 2		
4	 Conv. 3	3 abc Gener.b, 2 a 1	Parte de A se asocia con parte de B y de C
		4 ac Cont. 3	Parte de A es C
5	 Conv. 4	5 ca Conv. 4	Parte de C es A

9.1.1.3.2 Camenes

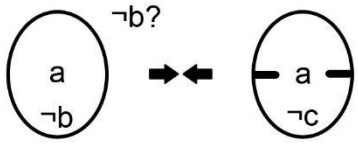
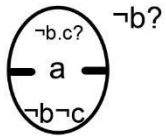
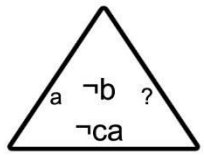
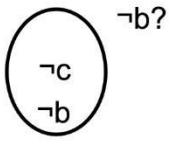
Toda A es B. Ninguna B es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a x b	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 b x ¬c	La totalidad de B se asocia con parte de ¬C
2	 Conv. 1a		
3	 Sínt. 2		
4	 Conv. 3	3 a x b ¬c Gen. b, de 2 a 1	La totalidad de A se asocia con parte de B y parte de ¬C
		4 a x ¬c Cont. 3	Si tengo A, tengo ¬C
5	 Conv. 4	5 ¬c a x Conv. 4	Sólo ¬C es A
		6 ¬c x % a x Def parti 5	Si tengo ¬C es probable tener la totalidad de A

9.1.1.3.3 Bamalip

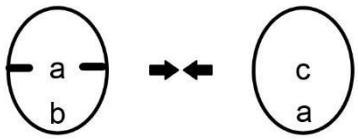
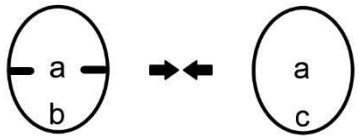
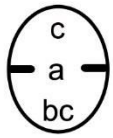
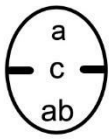
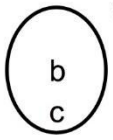
Toda A es B. Toda B es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 axb	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 bxc	La totalidad de B se asocia con parte de C
2	 Conv. 1a		
3	 Sínt. 2		
4	 Conv. 3	3 axbc Gen. b, de 2 a 1	La totalidad de A se asocia con parte de B y parte de C
		4 axc Cont. 3	Si tengo A, tengo C
5	 Conv. 4	5 cax Conv. 4	Sólo C es A
		6 cx%ax Def parti 5	Si tengo C es probable tener la totalidad de A

9.1.2 Otros silogismos que pueden ser categóricos

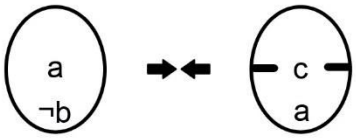
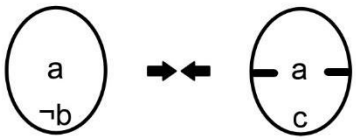
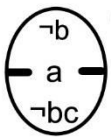
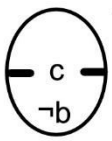
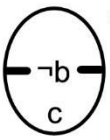
9.1.2.1 Universal negativa y exclusiva

Ninguna A es B. Solo A no es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x\neg b$	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 $a\neg c_x$	Parte de A se asocia con el único tipo de ¬C
2	 Sínt. 1	3 $a\neg c_x\neg b$ Gen. a, de 1 a 2	En A se asocian la totalidad de ¬C y al menos parte de ¬B
3	 Conv. 2	4 $\neg b\neg c_x a$ Conv. 3	Parte de ¬B está asociado con la todalidad de ¬C y al menos parte de A
		5 $\neg b\neg c_x$ Cont. 4	Solo ¬b es ¬C
4	 Conv. 3	6 $\neg c_x\neg b$ Conv. 5	Si tengo ¬C, tengo ¬B

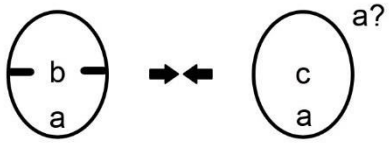
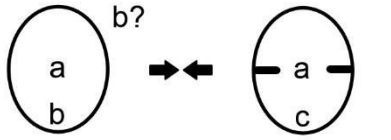
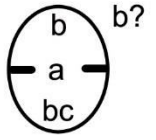
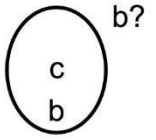
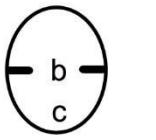
9.1.2.2 Exclusiva y bicondicional

Solo A es B. C equivale a A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ab_x	Solo A es B
		-2 $c_x a_x$	Si y solo si tengo C entonces tengo A
2	 Conv. 1b		
		3 $a_x c_x$ Conv. 2	Si tengo la totalidad de A tengo la totalidad de C
3	 Sínt. 2	4 $ac b_x$ Gen.part. a, 3, 1	Parte de A y C se asocian con la totalidad de B
4	 Conv. 3	5 cab_x Conv. 4	Es necesario que en C se asocien la totalidad de B y al menos parte de A
		6 cb_x Cont. 5	Solo si tengo C tengo B
5	 Cont. 4	7 $b_x ca$ Conv. 5	Si B, entonces C y A
		8 $b_x c$ Cont. 7	Si tengo B, tengo C

9.1.2.3 Bicondicinal y particular

A equivale a ¬B. Alguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x \neg b_x$	Si y solo si tengo A entonces tengo ¬B
		-2 ca	Un tipo de C se asocia con un tipo de A
2	 Conv. 1b		
		3 ac Conv. 2	Parte de A es C
3	 Sínt. 2	4 ac¬b Gener.par. a, 1, 3	Parte de A es C y ¬B
4	 Cont. 3	5 ca¬b Conv. 4	Parte de C se asocia con A y ¬B
		6 c¬b Cont. 5	Parte de C es ¬B
5	 Conv. 4	7 ¬bca Conv. 5	¬B se asocia con parte de C y de A
		8 ¬bc Cont. 7	Parte de ¬B es C

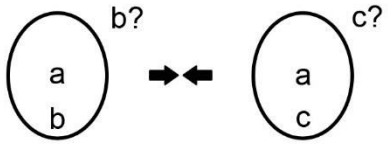
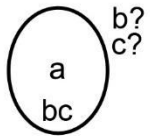
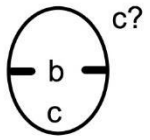
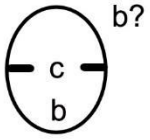
9.1.2.4 Exclusiva y universal afirmativa

Solo B es A. Toda C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ba_x	Parte de B se asocia con la totalidad de A
		-2 c_xa	La totalidad de C se asocia con parte de A
2	 Conv.1a Conv. 1b		
3	 Sínt. 2		
4	 Cont. 3	3 c_xab Gen. a, de 2 a 1	La totalidad de C se asocia con parte de A y parte de B
		4 c_xb Cont. 3	Si tengo C, tengo B
5	 Conv. 4	5 bc_x Conv. 4	Sólo B es C
		6 $b_x\%c_x$ Prob. cond.b,,5	Si tengo B es probable la totalidad de C

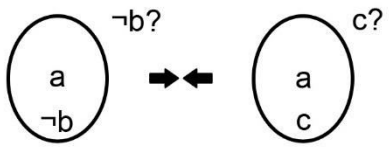
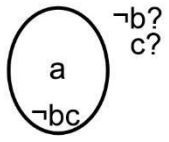
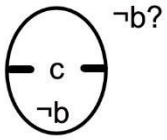
9.1.3 Síntesis universal

9.1.3.1 Tercera figura aristotélica

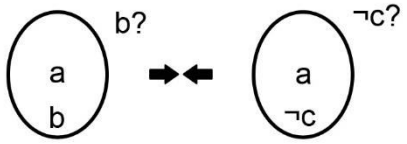
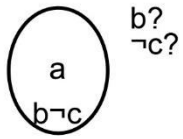
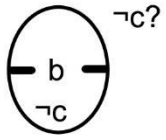
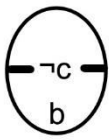
9.1.3.1.1 Darapti

Toda A es B. Toda A es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x b$	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 $a_x c$	La totalidad de A se asocia con parte de C
2	 Sínt. 1	3 $a_x bc$ Gen. a, de 2 a 1	La totalidad de A se asocia con parte de B y parte de C
3	 Cont. 2	4 bc Cont. 3	Parte de B es C
4	 Conv. 3	5 cb Conv. 4	Parte de C es B

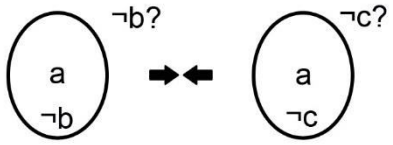
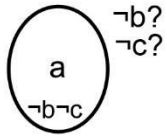
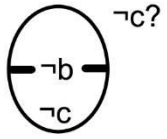
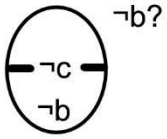
9.1.3.1.2 Felapton

Ningún A es B. Toda A es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x\neg b$	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 a_xc	La totalidad de A se asocia con parte de C
2	 Sínt. 1	3 $a_x\neg bc$ Gen. a, de 2 a 1	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B y parte de C
3	Conv. 2 Cont. 3a		
		4 ¬bc Cont. 3	Parte de ¬B es C
4	 Conv. 3b	5 c¬b Conv. 4	Parte de C es ¬B

9.1.3.1.3 AE de la tercera

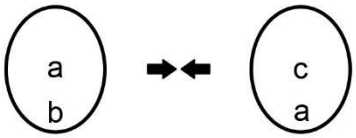
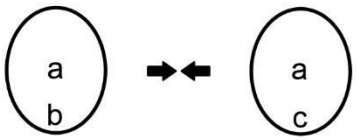
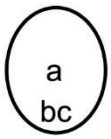
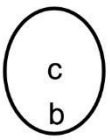
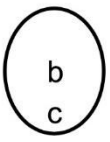
Toda A es B. Ningún A es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a x b	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 a x ¬c	La totalidad de A se asocia con parte de C
2	 Sínt. 1	3 a x b¬c Gen. a, de 2 a 1	La totalidad de A se asocia con parte de B y parte de ¬C
3	 Cont. 2	4 b¬c Cont.3	Parte de B no es C
4	 Conv. 3	5 ¬cb Conv. 4	Parte de ¬C es B

9.1.3.1.4 EEO en la tercera figura

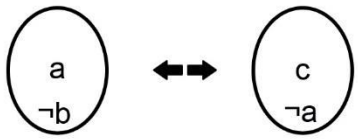
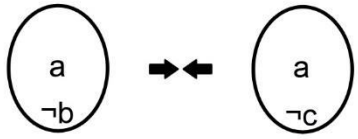
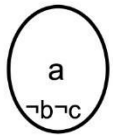
Ningún A es B. Ningún A es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x\neg b$	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 $a_x\neg c$	La totalidad de A se asocia con parte de ¬C
2	 Sínt. 1	3 $a_x\neg b\neg c$ Gen. a, de 2 a 1	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B y parte de ¬C
3	 Cont. 2	4 $\neg b\neg c$ Cont. 3	Parte de ¬B es ¬C
4	 Conv. 3	5 $\neg c\neg b$ Conv. 4	Parte de ¬C es ¬B

9.1.4 Otros silogismos que pueden ser categóricos

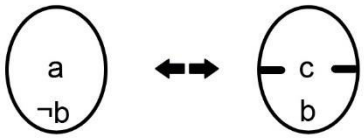
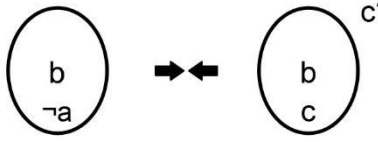
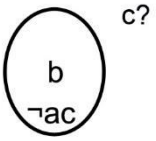
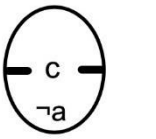
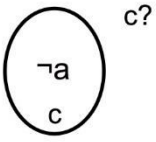
9.1.4.1 Dos bicondicionales afirmativas

A equivale a B. C equivale a A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x b_x$	Si y solo si tengo A entonces tengo B
		-2 $c_x a_x$	Si y solo si tengo C entonces tengo A
2	 Conv. 1b		
		3 $a_x c_x$ Conv. 2	A es lo mismo que C
3	 Sínt. 2	4 $a_x b_x c_x$ Gener. a, 3, 1	A, B y C son equivalentes
4	 Cont. 3	5 $c_x a_x b_x$ Conv. 4	La totalidad de C se asocia con todo A y todo B
		6 $c_x b_x$ Cont. 5	Si y solo si tengo C, tengo B
5	 Conv. 4	7 $b_x c_x$ Conv. 6	Si y solo si tengo B tengo C

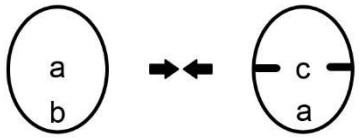
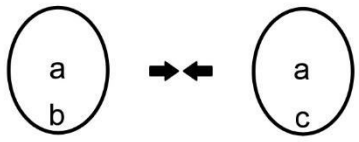
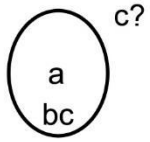
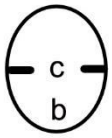
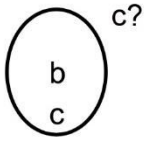
9.1.4.2 Dos bicondicionales negativas

A es lo contrario de B. C es lo contrario de A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x \neg b_x$	Si y solo si tengo A entonces tengo ¬B
		-2 $c_x \neg a_x$	Si y solo si tengo C entonces tengo ¬A
2	 Transf. 1b		
		3 $a_x \neg c_x$ Transf. 2	A es lo mismo que ¬C
3	 Sínt. 2	4 $a_x \neg b_x \neg c_x$ Gener. uni. a, 3, 1	Hay una relación de identidad entre A, ¬B y ¬C
4	Conv. 3 Cont. 4a	5 $\neg c_x a_x \neg b_x$ Conv. 4	La totalidad de ¬C se asocia con todo A y todo ¬B
		6 $\neg c_x \neg b_x$ Cont. 5	Si y solo si tengo ¬C, tengo ¬B
5	Conv. 4b Transf. 5a	7 $\neg b_x \neg c_x$ Conv. 6	¬B equivale a ¬C
		8 $b_x c_x$ Transf. 7	B es lo mismo que C

9.1.4.3 Bicondicional negativa y exclusiva afirmativa

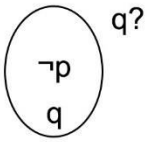
A equivale a ¬B. Solo C es B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x\neg b_x$	La totalidad de A se asocia con toda ¬B
		-2 cb_x	Parte de C se asocia con la totalidad de B
2	 Transf. 1a Conv. 1b	3 $b_x\neg a_x$ Transf. 1	Si y solo si tengo B, entonces tengo ¬A
		4 b_xc Conv. 2	Si tengo B, tengo C
3	 Sínt. 2	4 $b_x\neg a_xc$ Gener. b, 4 a 3	Si tengo B, tengo ¬A y C
4	 Cont. 3	5 $c\neg a_xb_x$ Conv. 4	Parte de C se asocia con todo ¬A y el único tipo posible de B
		6 $c\neg a_x$ Cont 5	Solo C es ¬A
5	 Conv. 4	7 $\neg a_xc$ Conv. 5	Si tengo ¬A, tengo C

9.1.4.4 Bicondicional y exclusiva afirmativas

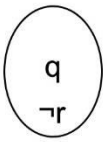
A equivale a B. Solo C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x b_x$	Si y solo si tengo A entonces tengo B
		-2 $c a_x$	Solo C es A
2	 Conv. 1b		
		3 $a_x c$ Conv. 2	Si tengo A, tengo C
3	 Sínt. 2	4 $a_x b_x c$ Gener. a, 3, 1	
4	 Cont. 3	5 $c a_x b_x$ Conv. 4	Parte de C se asocia con toda A y toda B
		6 $c b_x$ Cont. 5	Solo C es B
5	 Conv. 4	7 $b_x c$ Cont. 7	Si tengo B tengo C

9.1.4.5 Síntesis de varias proposiciones simples. Ejemplo 1

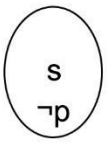
Si tengo ¬P, tengo Q. Si tengo Q, no tengo R. Si tengo S, no tengo P. Tengo S¬R. Luego tengo ¬RQ.



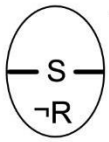
-1 ¬p x q



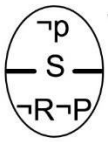
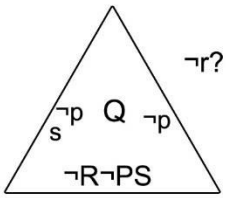
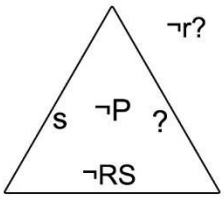
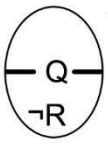
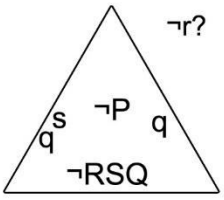
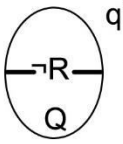
-2 q x ¬r



-3 s x ¬p

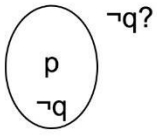


-4 S¬R

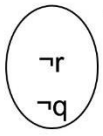
	Diagramática	Formal		Diagramática	Formal
5	 Sínt. 3,4 RS∃	S¬R¬P Gen. s, 3,4, RS∃	8	 Conv. 7	S¬R¬PQ Conv. 7
6	 Conv. 5	¬P¬RS Conv. 5	9	 Cont. 8	Q¬R Cont. 8
7	 Sínt. 1,5 RS∃	¬P¬RSQ Gen.¬p,1,6 RS ∃	10	 Conv. 9	¬RQ Conv. 9

9.1.4.6 Síntesis de varias proposiciones simples. Ejemplo 2

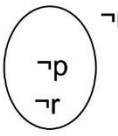
Si tengo P, no tengo Q. Si no tengo R, no tengo Q. Tengo P o tengo ¬R. Si no tengo Q, entonces tengo S. Luego tengo S.



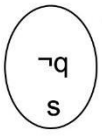
-1p x ¬q



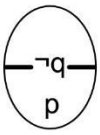
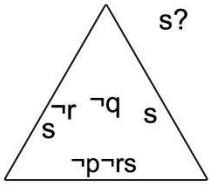
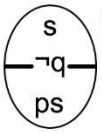
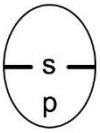
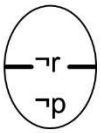
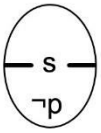
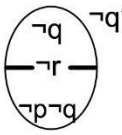
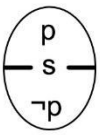
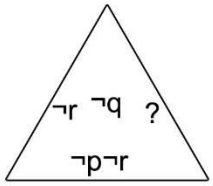
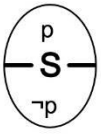
-2 ¬r x ¬q



-3 ¬p x ¬r



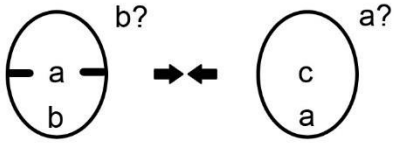
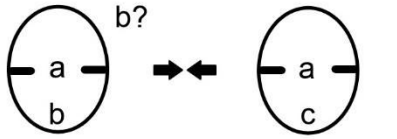
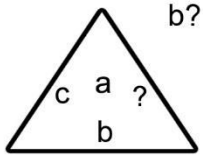
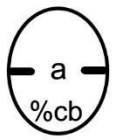
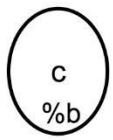
-4 ¬q x s

	Diagramática	Formal		Diagramática	Formal
5	 Conv. 1	¬qpx Conv.1	10	 Sínt. 4,9	¬q¬px¬rs Gen.¬q, 4,9
6	 Sínt. 4, 5	¬qpxs Gen.¬q,4,5	11	 Cont. 6	spx Cont. 6
7	 Conv. 3	¬r¬px Conv. 3	12	 Cont. 10	s¬px Cont.10
8	 Sínt. 2, 7	¬r¬px¬q Gen.¬r, 2,7	13	 Sínt. 11,12	(px, ¬px) s Sínt. 11,12
9	 Conv. 8	¬q¬px¬r Conv.8	14	 RS∃, 13	S Inducción 13 Hay S, suponiendo que hay algo.

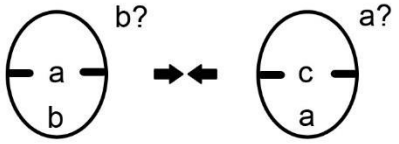
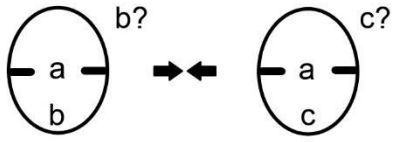
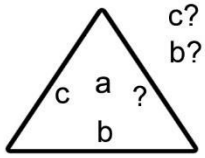
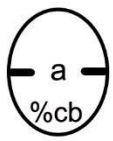
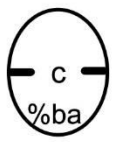
9.1.5 Síntesis probable

9.1.5.1 Primera figura

9.1.5.1.1 IA primera figura

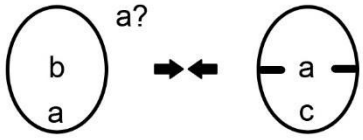
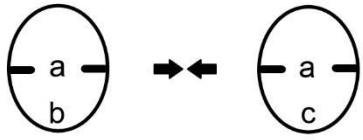
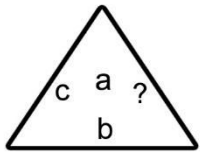
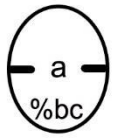
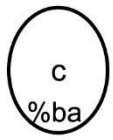
Algún A es B. Toda C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ab	Parte de A se asocia con parte de B
		-2 cxa	Toda C se asocia con parte de A
2	 Conv. 1b	3 ax%b Prob. cond. 1	Si tengo A, tener B es una posibilidad verificada, luego es probable B
		4 ax%cx Prob. cond. 2	Si tengo A, tener C es una posibilidad verificada, luego es probable C
3	 Sínt. 2	5 ax%b%cx Sínt. 3, 4	Si tengo A, es probable B y es probable todo C
			Si tengo A es probable BC
4	 Combin. 3	6 ax%bcx Prob. conjunta 5	BC es una posibilidad probable
5	 Conv. 4	7 %cxb Cont. 6	Es probable que C implique B
		8 cx%b Prob. cond. 7	Partiendo de C es probable tener B

9.1.5.1.2 II Primera figura

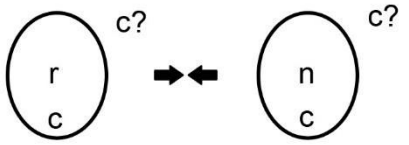
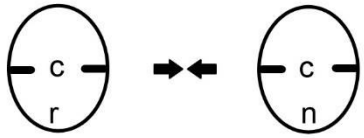
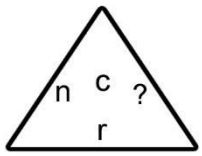
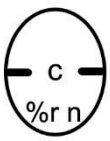
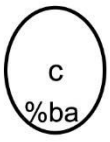
Algún A es B. Alguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ab	Parte de A se asocia con parte de B
		-2 ca	Parte de C se asocia con parte de A
2	 Conv. 1b	3 ax%b Prob. cond. 1	Si tengo A, tener B es una posibilidad verificada, luego es probable B
		4 ax%c Prob. cond. 2	Si tengo A, tener C es una posibilidad verificada, luego es probable C
3	 Sínt. 2	5 ax%b%c Sínt. 3, 4	Si tengo A, es probable B y es probable C
			Si tengo A es probable BC
4	 Combin. 3	6 ax%bc Prob. conjunta 5	BC es una posibilidad probable
5	 Conv. 4	7 %cb Cont. 6	Es probable CB
		8 cx%b Prob. cond. 7	Partiendo de C es probable tener B

9.1.5.2 Segunda figura

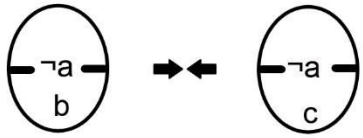
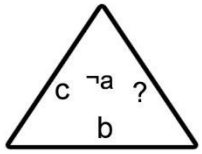
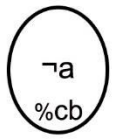
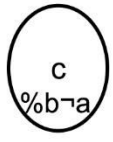
9.1.5.2.1 AI

Si B, entonces A. Solo A es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 bxa	Parte de A se asocia con toda B
		-2 acx	Parte de A se asocia con toda C
2	 Conv. 1a	3 abx Conv. 1	Si tengo A, tener B es una posibilidad verificada, luego es probable B
		4 ax%cx Prob. cond. 2	Si partes de A es probable estar asociado con toda C
3	 Sínt. 2	5 ax%bx Prob. cond. 3	Si partes de A es probable estar asociado con toda B
		6 ax%bx%cx Sínt. 4, 5	Si tengo A, es probable B y es probable C
4	 Combin. 3	7 ax%bxcx Prob. conjunta 5	Si tengo A es probable BC
5	 Conv. 4	8 %cxbx Cont. 7	Es probable que C no sea distinta de B
		9 cx%bx Prob. cond. 8	Partiendo de C es probable incluso tener toda B

9.1.5.2.2 AA segunda figura

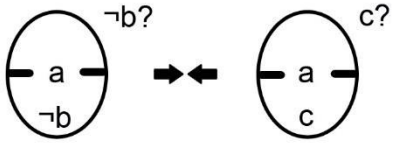
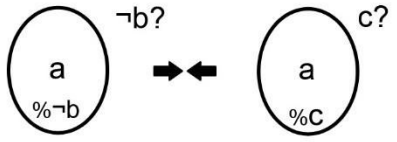
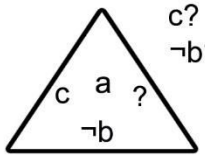
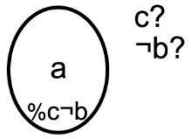
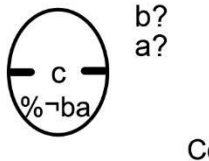
Toda R es C. Toda N es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $r_x c$	Si R, entonces C
		-2 $n_x c$	Si N, entonces C
2	 Conv. 1a Conv. 1b		
			No hay nada necesario
3	 Sínt. Nula 2	3 c_x $\%n_x r_x$ sínt.nula 1,2	
4	 Combin. 3	4 $\%n_x r_x$ Cont.3	Es probable que los nís-calos sean robellones
5	 Conv. 4	8 $\%c_x b_x$ Cont. 7	Es probable que C no sea distinta de B
		9 $c_x \%b_x$ Prob. cond. 8	Partiendo de C es proba-ble incluso tener toda B

9.1.5.2.3 Modo EE segunda figura

Ninguna B es A. Ninguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $b_x\neg a$	Toda B es ¬A
		-2 $c_x\neg a$	Si C, entonces ¬A
2	 Prob. cond. 1a Prob. cond. 1b	3 $\neg a_{x\%}b_x$ Prob. cond. 1	Si tengo A, tener ¬B es una posibilidad verificada, luego es probable ¬B
		4 $\neg a_{x\%}c_x$ Prob. cond. 2	Si tengo A, tener C es una posibilidad verificada, luego es probable C
3	 Sínt. Nula 2	5 $\neg a_{x\%}b_{x\%}c_x$ Sínt. 3, 4	Si tengo A, es probable ¬B y es probable C
4	 Combin. 3	6 $a_{x\%}b_xc_x$ Prob. conjunta 5	Si tengo ¬A, es probable BC
5	 Conv. 4	7 %cb Cont. 6	Es probable CB
		8 $c_{x\%}b$ Prob. cond. 7	Partiendo de C es probable tener B

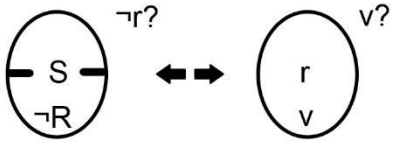
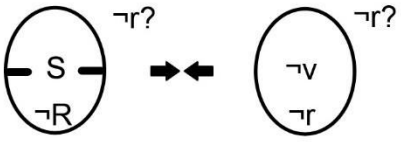
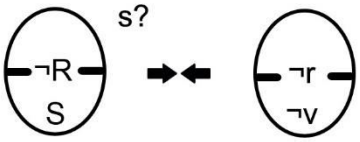
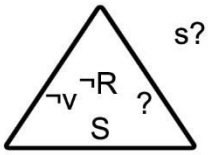
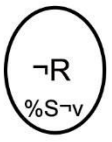
9.1.5.3 Tercera figura

9.1.5.3.1 Modo OI tercera

Algún A no es B. Algún A es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a¬b	Parte de A se asocia con parte de ¬B
		-2 ac	Parte de A se asocia con parte de C
2	 Prob. cond. 1a Prob. cond. 1b	3 ax%¬b Prob. cond. 1	Si tengo A, tener ¬B es una posibilidad verificada, luego es probable ¬B
		4 ax%c Prob. cond. 2	Si tengo A, tener C es una posibilidad verificada, luego es probable C
3	 Sínt. Nula 1	5 ax%¬b%c Sínt. 3, 4	Si tengo A, es probable ¬B y es probable C
4	 Combin. 3 Sínt. 2	6 ax%¬bc Prob. conjunta 5	Si tengo A, es probable ¬BC
5	 Conv. 4	7 %c¬b Cont. 6	Es probable C¬B
		8 cx%¬b Prob. cond. 7	Partiendo de C es probable tener ¬B

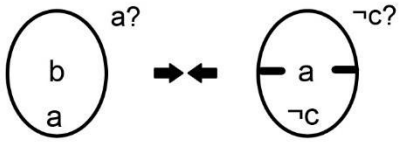
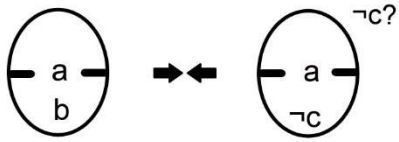
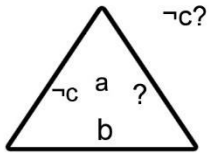
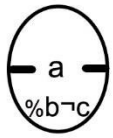
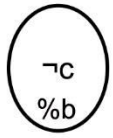
9.1.5.4 Cuarta figura

9.1.5.4.1 Modo IE cuarta figura

Estas setas no son rojas. Si es roja es venenosa			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 S¬R	Algunas setas, presentes ahora, no son rojas.
		-2 rxv	Lo rojo es venenoso
2	 Trans. 1b		Exclusión nula. Nada es imposible.
		3 ¬vx¬r Trans. 2	Si no es venenoso, no es rojo
3			Síntesis nula. Nada es necesario.
4	 Sínt.Nula 2	4 ¬rx%S¬vx Prob. condicionada ¬R 1, 3	Es probable que estas setas no sean venenosas
5	 Combina. 4	5 % S¬vx Cont. 4	Incluso aun existe la posibilidad de que estas setas sean la totalidad de lo que no es venenoso.

Ejercicio propuesto en el examen de Lógica de 2018 a nuestros alumnos.

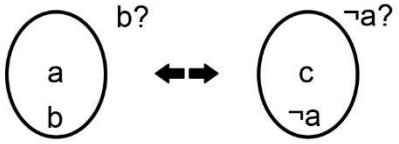
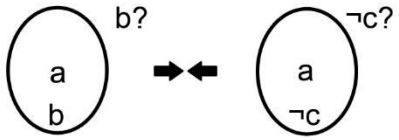
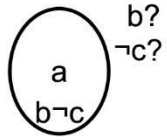
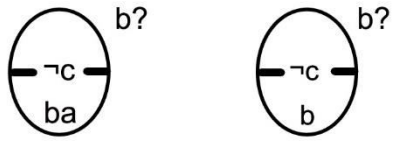
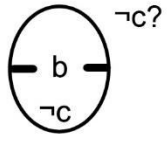
9.1.5.4.2 Modo AO cuarta figura

Toda B es A. Algún A no es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 bxa	Toda B es A
		-2 a¬c	Algún A no es C
2	 Prob. cond. 1a Prob. cond. 1b	3 ax%b Prob. cond. 1	Si tengo A, tener B es una posibilidad verificada, luego es probable B si A
		4 ax%¬c Prob. cond. 2	Si tengo A, tener ¬C es una posibilidad verificada, luego es probable ¬C si A
3	 Sínt. Nula 2	5 ax%bx%¬c Sínt. 3, 4	Si tengo A, es probable B y es probable ¬C
4	 Combin. 3	6 ax%b¬c Prob. conjunta 5	Si tengo A, es probable B¬C
5	 Conv. 4	7 %¬cb Cont. 6	Es probable ¬CB en teoría
		8 ¬cx%b Prob. cond. 7	Partiendo de ¬C es probable tener B

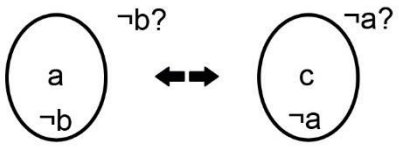
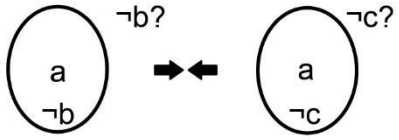
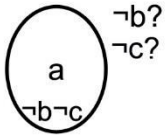
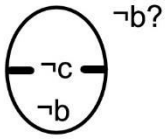
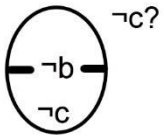
9.2 Silogismos por síntesis mediante transformación

9.2.1 AE primera figura. Exclusión particular pasa a síntesis universal

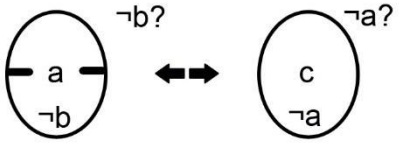
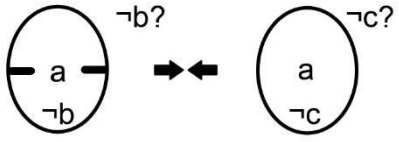
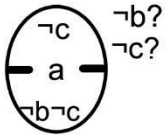
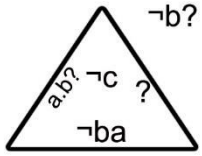
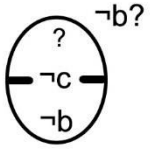
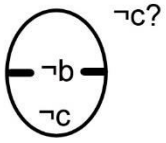
Toda A es B. Ninguna C es A.

	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a x b	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 c x ¬a	Toda C se asocia con parte de ¬A
2	 Trans.1b	3 a x ¬c Trans.2	Toda A se asocia con parte de ¬C
3	 Sínt. 2	4 a x ¬c b Gener. a, 1 a 3	Cualquier A es ¬C y B
4	 Conv. 3 Cont.4a	5 ¬c b a x Conv. 4	Parte de ¬C es equivalen-a A y es también B.
		6 ¬c b Cont. 5	Luego parte de ¬C es B
5	 Conv. 4b	7 b ¬c Conv. 6	Parte de B no es C

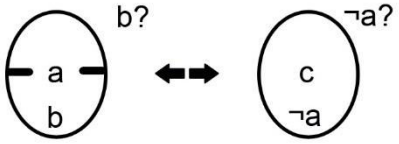
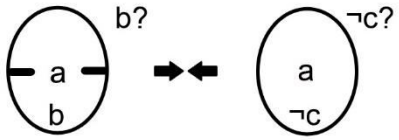
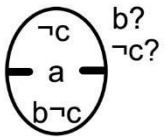
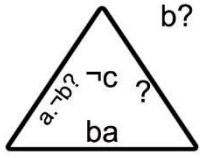
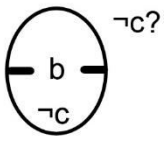
9.2.2 EE de la primera pasa de exclusión particular ¬B con C a síntesis universal

Ningún A es B. Ninguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x\neg b$	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 $c_x\neg a$	Toda C se asocia con parte de ¬A
2	 Trans.1b	3 $a_x\neg c$ Trans. 2	Toda A se asocia con parte de ¬C
3	 Sínt. 2	4 $a_x\neg c\neg b$ Gener. a, 1 a 3	Cualquier A es ¬C y ¬B
4	 Conv. 3	5 $\neg c\neg b$ Conv de cont. 4	Parte de ¬C es ¬B
5	 Conv. 4	6 $\neg b\neg c$ Conv. 5	Parte de ¬B es ¬C

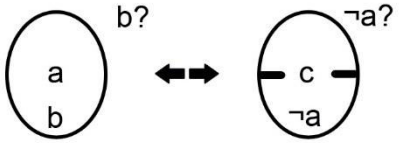
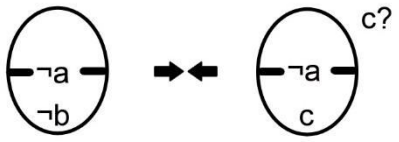
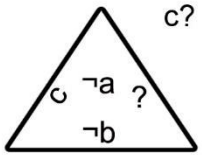
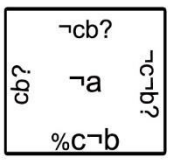
9.2.3 OE de la primera pasa de exclusión parcial a síntesis parcial

Algún A no es B. Ninguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a¬b	Parte de A se asocia con parte de ¬B
		-2 c x ¬a	Toda C se asocia con parte de ¬A
2	 Trans.1b	3 a x ¬c Trans. de 1	Toda A se asocia con parte de ¬C
3	 Sínt. 2	4 a¬b¬c Gener. a, 3 a 1	Parte de A es ¬B y ¬C
4	 Conv. 3  Cont.4a		
		5 ¬c¬b Cont. 4	Parte de ¬C es ¬B
5	 Conv. 4b		
		6 ¬b¬c Conv. 5	Parte de ¬B es ¬C

9.2.4 Modo IE de la primera figura pasa de exclusión particular a síntesis particular

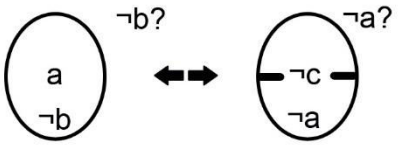
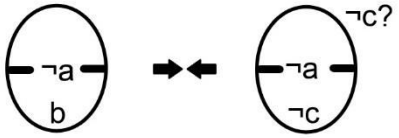
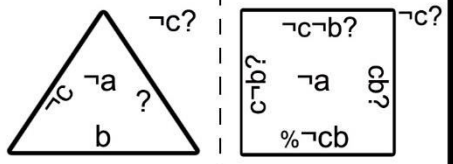
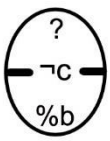
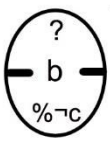
Algún A es B. Ninguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ab	Parte de A se asocia con parte de B
		-2 c x ¬a	Toda C se asocia con parte de ¬A
2	 Transf.1b	3 a x ¬c Transf. de 2	Toda A se asocia con parte de ¬C
3	 Sínt. 2	4 ab¬c Gener. a, 3 a 1	Parte de A es B y ¬C
4	 Conv. 3	5 ¬cba Conv. 4	Parte de ¬C es B y A
5	 Cont. 4	6 b¬ca Conv. 5	
		7 b¬c Cont. 6	Parte de B no es C

9.2.5 AO primera figura. Exclusión nula pasa a síntesis probable

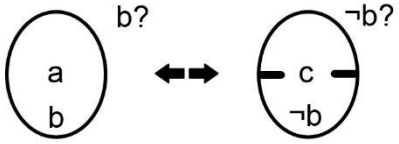
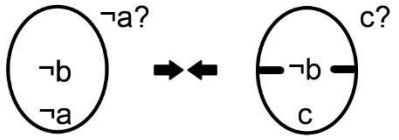
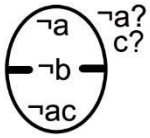
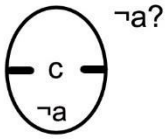
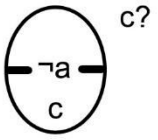
Toda A es B. Alguna C no es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a×b	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 c¬a	Parte de C se asocia con parte de ¬A
2	 Transf. 1a Conv.1b	3 ¬a¬b× Transf. de 1	Solo ¬A es ¬B
		4 ¬a×%¬b Def. parti 3	Si tenemos ¬A es más que posible tener ¬B. Es un suceso probable
3	 Sínt. 2	5 ¬a×%c Def. parti 2	
		6 ¬a×%(c¬b) Sínt ¬a, 5, 6	A partir de ¬A es más que posible tener C¬B, es un suceso probable
4	 c? Combin. 3	7 %(c¬b) Cont. 6	Es probable tener C¬B
		8 %(¬bc) Conv. 7	¬BC es una combinación probable (Si tengo ¬A).

9.2.6 EO de la primera figura de exclusión nula a síntesis probable

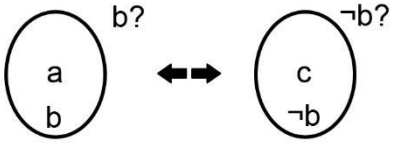
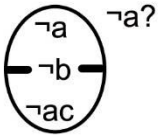
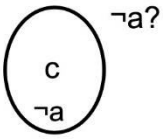
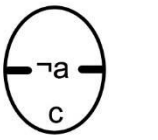
Ningún A es B. Alguna ¬C no es A.

	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a x ¬b	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 ¬c¬a	Alguna ¬C se asocia con parte de ¬A
2	 Transf.1a Conv. 1b	3 ¬ab x Transf. de 1	Solo ¬A es B
		4 ¬a x %¬c Prob. cond. 2	Partiendo de ¬A es probable ¬C
3	 Sínt. 2 Combi. 3a	5 ¬a x %(b x ¬c) Gener. ¬a, 4 a 3	¬A¬CB es una posibilidad probable
		6 ¬a x %(¬cb) Comb. abiertas en 4	Si tengo ¬A, es probable que tenga ¬C y B.
4	 Cont. 3b	7 ¬c x % (b¬a) Prob. condicionada 6	Si tengo ¬C es probable que sea el caso B¬A
		8 %¬cb Cont. 7	¬CB es una combinación más que posible
5	 Conv. 4	9 b x %¬c Prob. condi. 8	Partiendo de B es probable ¬C
		10 %b¬c Contenido 9	Es probable que parte de B no sea C

9.2.7 Baroco por síntesis después de transformar

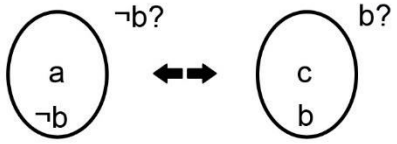
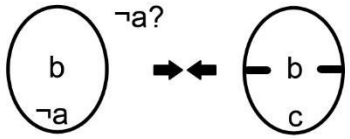
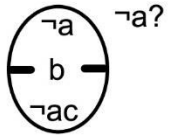
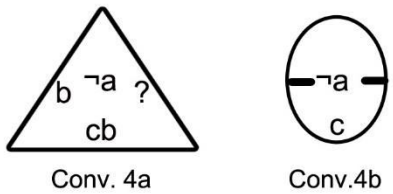
Toda A es B. Alguna C no es B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 axb	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 c¬b	Parte de C se asocia con parte de ¬B
2	 Transf.1a Conv. 1b	3 ¬bx¬a Transf. de 1	Toda ¬B se asocia con parte de ¬A
3	 Sínt. 2	4 ¬bc¬a Gener.¬b, 3 a 2	En teoría, parte de ¬B se asocia con C y ¬A.
4	 Conv.cont. 3		
		5 c¬a Cont. 4	Parte de C no es A
5	 Conv. 4	6 ¬ac Conv. 5	Parte de ¬A es C

9.2.8 Camestres por síntesis

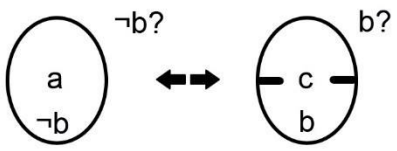
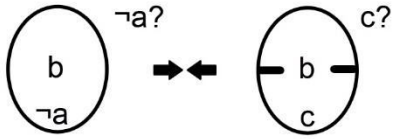
Toda A es B.Ninguna C es B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 axb	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 cx¬b	Toda C se asocia con parte de ¬B
2	Transf.1a Conv. 1b	3 ¬bx¬a Transf. de 1	Toda B se asocia con parte de ¬A
		4 cx¬b¬a Gener. ¬b, 3 a 2	Si tengo C, tengo ¬B y ¬A
3	 Sínt. 2		
4	 Cont. 3	5 cx¬a Cont. 4	Toda C es ¬A, es decir: Ninguna C es A
5	 Conv. 4	6 ¬acx Conv. 5	Sólo ¬A es C

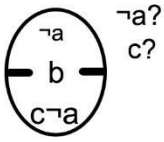
9.2.9 Cesare por síntesis después de transformar

Ningún A es B.Toda C es B.

	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a x ¬b	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 c x b	Toda C se asocia con parte de B
2	 Trans.1a Conv. 1b	3 b x ¬a Trans.1	Toda B se asocia con parte de ¬A
3	 Sínt. 2	4 bc x ¬a Gen.b. 3 a 2	
4	Conv. 3 Cont.4a	5 c x b¬a Conv. 4	Si tengo C, tengo B y ¬A
		6 c x ¬a Cont. 5	Ninguna C es A
5	 Conv. 4a Conv.4b		
		7 ¬ac x Conv. 6	Sólo ¬A es C

9.2.10 Festino por síntesis

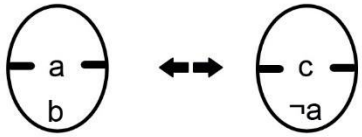
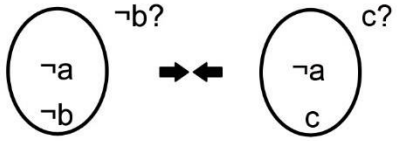
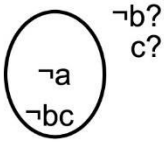
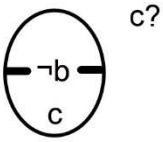
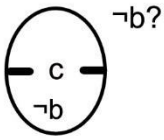
<table>
<tr><th colspan="4">Ningún A es B. Alguna C es B.</th></tr>
<tr><th colspan="2">Resolución diagramática</th><th>Resolución formal</th><th>Interpretación</th></tr>
<tr><td>-1</td><td rowspan="2"> 
</td><td>-1 a_x¬b</td><td>La totalidad de A se asocia con parte de B</td></tr>
<tr><td></td><td>-2 cb</td><td>Parte de C se asocia con parte de B</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="2"> 

Trans.1a Conv. 1b</td><td>3 b_x¬a
Trans. 1</td><td>Toda B se asocia con parte de ¬A. Si B, ¬A</td></tr>
<tr><td></td><td>4 bc
Conv. 2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2"> 

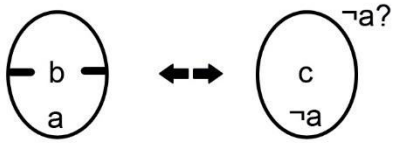
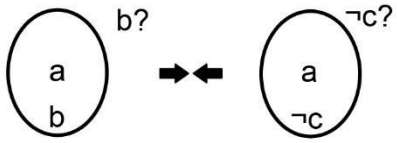
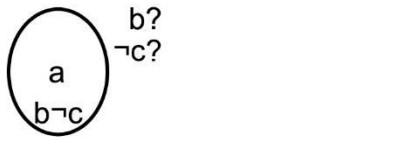
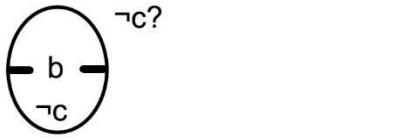
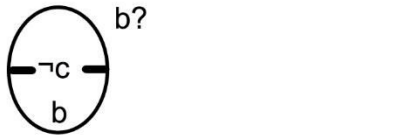
Sínt. 2</td><td>5 bc¬a
Gen. b, 3 a 4</td><td>Parte de B es C¬A</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="2">

Cont. 3 Conv.3a</td><td>6 c¬ a
Cont. 5</td><td>Parte de C no es A</td></tr>
<tr><td></td><td>7 ¬ac
Conv. 6</td><td>Parte de ¬A es C</td></tr>
</table>

9.2.11 Modo con exclusivas en primera AO pasa de exclusión parcial a síntesis universal

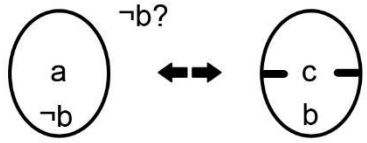
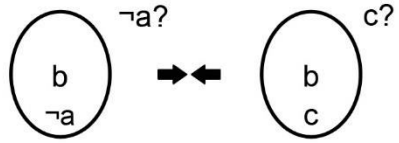
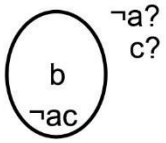
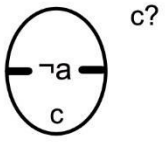
Solo A es B. Solo C no es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ab_x	Parte de A se asocia con el único tipo posible de B
		-2 $c\neg a_x$	Parte de C se asocia con el único tipo posible de ¬A
2	 Transf.1a Conv. 1b	3 $\neg a_x\neg b$ Transf. 1	Cualquiera que se asocie a ¬A se asociará con ¬B
		4 $\neg a_x c$ Conv. 2	Si tengo ¬A tengo C
3	 Sínt. 2	5 $\neg a_x\neg bc$ Gener. ¬b, 3 a 2	Cualquier tipo posible de ¬A se asocia con ¬B y C
4	 Cont. 3	6 $\neg bc$ Cont. 5	Parte de ¬B se asocia con parte de C
5	 Conv. 4	7 $c\neg b$ Conv. 6	Parte de C es ¬B

9.2.12 Modo UE de la segunda por síntesis después de transformar

Solo B es A. Ninguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 bax	Parte de B se asocia con el único tipo de A posible
		-2 cx¬a	Toda C se asocia con parte de ¬A
2	 Conv. 1a Trans.1b	3 axb Conv. 1	Si tengo A, entonces tengo B
		4 ax¬c Trans. 2	Si tengo A, tengo ¬C
3	 Sínt. 2	5 axb¬c Gener. a, 4 a 3	Cualquier A está necesariamente asociada con B y ¬C
4	 Conv. 3	6 b¬c Cont. 5	Parte de los tipos posibles de B se asocia con ¬C necesariamente
5	 Conv. 4	7 ¬cb Conv. 6	Parte de ¬C es B

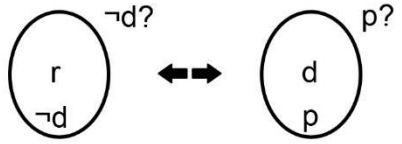
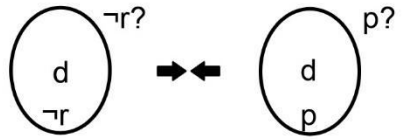
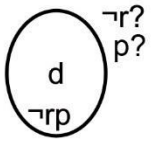
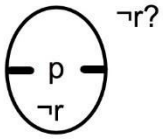
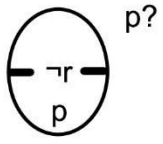
La proposición exclusiva *Solo B es A*, con sujeto particular y predicado universal, se obtiene también al transformar la universal afirmativa *Toda A es B*. Nosotros la etiquetamos como "U" para distinguirla de la particular afirmativa "I".

9.2.13 Modo EU de la segunda pasa de exclusión particular a síntesis universal

Ningún A es B. Solo C es B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x\neg b$	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 cb_x	Parte de C se asocia con la totalidad de B
2	 Trans. 1a Conv. 1b	3 $b_x\neg a$ Transf. 1	Si tengo B, entonces tengo parte de ¬A
		4 b_xc Conv. 2	Si tengo B, tengo C
3	 Sínt. 2	5 $b_x\neg ac$ Gener. b, 4 a 3	Si tengo b, tengo ¬A y C
4	Conv. 3 Conte.4a	6 $c\neg ab_x$ Conv. 5	Parte de C se asocia con parte de ¬A y el único tipo de B
		7 $c\neg a$ Cont 6	Parte de C es ¬A
5	 Conv. 4	8 ¬ac Conv. 7	Parte de ¬A es C

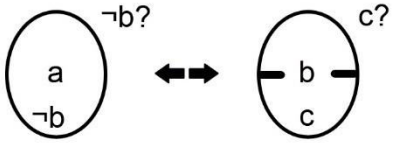
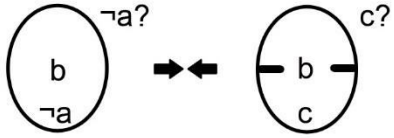
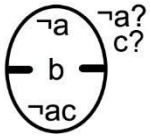
9.2.14 Modo EA de la cuarta por síntesis. Pasa de exclusión particular a síntesis universal

Ningún roedor es diurno. Los seres diurnos son precavidos

	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $r_x\neg d$	Los roedores no son diurnos
		-2 $d_x p$	Los seres diurnos son precavidos
2	 Transf.1a Conv. 1b	3 $d_x\neg r$ Transf. de 1	Si un ser es diurno, no es roedor
3	 Sínt. 2	4 $d_x p\neg r$ Gener. d, 3 a 2	Los seres diurnos no son roedores, pero son precavidos
4	 Cont. 3		
		5 $p\neg r$ Cont. 4	Parte de los seres precavidos no son roedores
5	 Conv. 4		
		6 $\neg rp$ Conv. 5	Parte de los seres que no son roedores son precavidos.

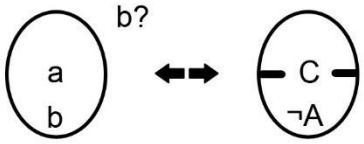
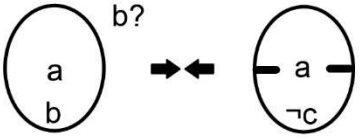
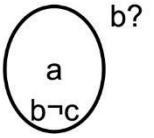
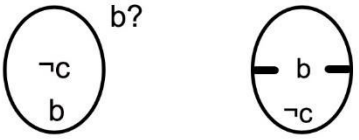
Ejercicio propuesto a nuestros alumnos en el examen de Lógica de 2018.

9.2.15 Fresison por síntesis después de transformar

Ningún A es B. Alguna B es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a×¬b	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 bc	Parte de B se asocia con parte de C
2	 Trans.1a Conv. 1b	3 b×¬a Trans. de 1	Toda B se asocia con parte de ¬A
3	 Sínt. 2	4 bc¬a Gener. b, 3 a 2	Parte de B es C y ¬A
4	Cont. 3 Conv. 4a	5 c¬a Cont. 4	Parte de C es ¬A
		6 ¬ac Conv. 5	Parte de ¬A es C

9.2.16 Modo A-U de la primera pierde la razón suficiente al transformar

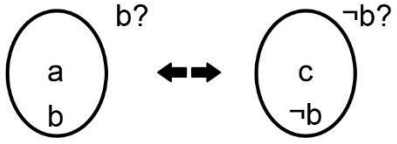
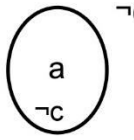
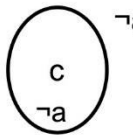
Si A, entonces B. Solo C no es A y hay alguno que no es A.

	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x b$	Si hay A, habrá B
		-2 $\neg a_x c$. $C\neg A$	Tengo C¬A y todo ¬A es C
2	 Trans.1b		
		3 $a\neg c_x$ Trans.2	Luego toda ¬C debe ser A. Solo A puede ser ¬C.
3	 Sínt. 2	4 $a_x\neg c_x b$ Gener. a, 1 a 3	Cualquier A será ¬C y B
4	 Conv. 3 Cont.4a	5 $\neg c_x b$ Cont. 4	Si ¬C, entonces B.
		6 $b\neg c_x$ Cont. 5	Solo B puede ser ¬C

9.3 Silogismos por exclusión

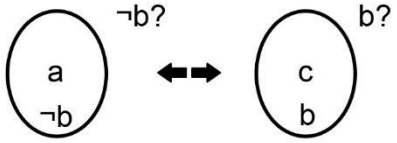
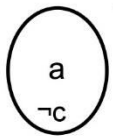
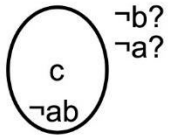
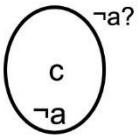
9.3.1 Exclusión universal

9.3.1.1 Camestres por exclusión universal

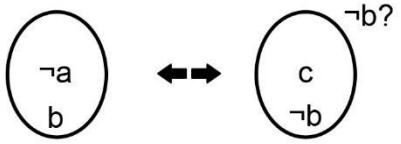
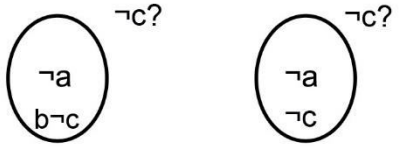
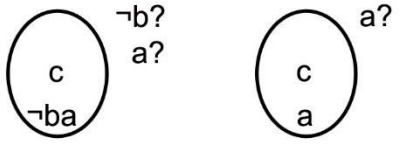
Toda A es B.Ninguna C es B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a_xb	Cualquier tipo de A se asocia con parte de B
		-2 c_x¬b	Toda C se asocia con parte de ¬B
2	 Exclu. uni, b. 1	3 a_x¬c Exclu. uni. b, 1, 2	Si tengo A tengo ¬C
3	 Exclu. uni, b. 1	3 c_x¬a Trans. 3	Ninguna C es A

En el paso número dos podríamos haber conservado la *b* dentroy fuera de *a*. Hemos optado por simplificar las conclusiones. De este modo, ganamos claridad aunque perdamos exhaustividad. Hay que advertir que, en el caso de que hubiéramos concedido carga existencial a las variables *a* y *c*, tendríamos razón suficiente para concluir categóricamente que existen objetos A¬C y C¬A. En los ejercicios resueltos que presentamos a continuación podemos dar por supuesta la no existencia de clases vacías. Solo en algunos casos hemos mostrado cómo resolver por exclusión cuando empleamos términos o variables con y sin carga existencial en el mismo ejercicio.

9.3.1.2 Cesare por exclusión universal

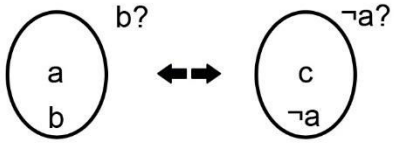
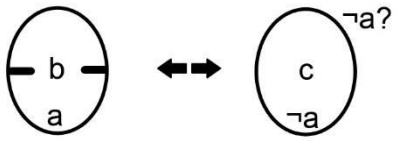
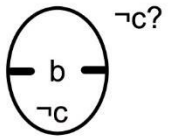
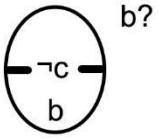
Ningún A es B.Toda C es B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a_x¬b	Cualquier tipo de A se asocia con parte de ¬B
		-2 c_xb	Toda C se asocia con parte de B
2	 Exclu. uni, b. 1	3 a_x¬c Exclu. uni. b, 1, 2	Si tengo A tengo ¬C
3	 Exclu. uni, b. 1  Cont. 3a.	4 c_xb¬a Exclu. uni. b, 2, 1	Toda C es B y ¬A
		5 c_x¬a Cont. 4	Ninguna C es A

9.3.1.3 Disyunción exclusiva y condicional con relaciones de exclusión universal

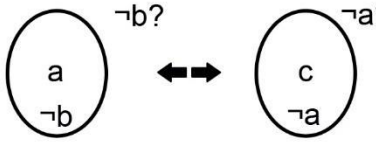
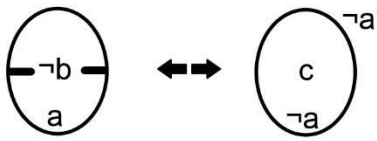
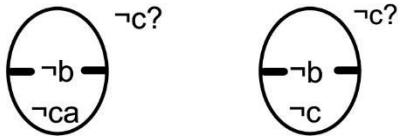
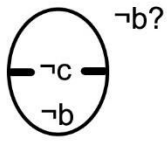
O ¬A o ¬B (excluyentes).Si tengo C tengo ¬B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ¬a_xb_x	La totalidad de ¬A se asocia con parte de B
		-2 c_x¬b	Toda C se asocia con parte de ¬B
2	 Exclu. Uni. 1 Cont. 2a	3 ¬a_xb_x¬c Exclu.Uni.1,2	Ninguna ¬A se puede asociar con C. Si ¬A, entonces ¬C
		4 ¬a_x¬c Cont. 3	Basta ¬A para tener ¬C
3	 Exclu. Uni. 1 Cont. 3a	5 c_x¬b¬(¬a) Exclu.Uni.1,2	
		6 c_xa Cont. 5	Si tengo C, tengo A
4	Conv. 2b Conv. 3b	7 ¬c¬a_x Trans.6	Solo si ¬C es posible ¬A
		8 ac_x Conv. 7 (Cont.5)	A es necesario para C

9.3.2 Exclusión particular

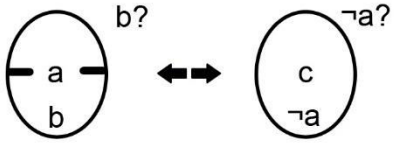
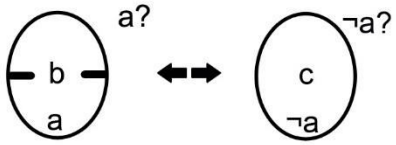
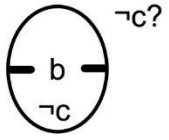
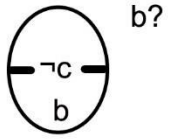
9.3.2.1 Modo AE de la primera

Toda A es B.Ninguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a x b	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 c x ¬a	Toda C se asocia con parte de ¬A
2	 Conv. 1a		
3	 Exclu. part, a. 2	3 b¬c Exclu. part. a, 1, 2	Parte de B no es C
4	 Conv. 3	4 ¬cb Conv. 3	Parte de ¬C es B

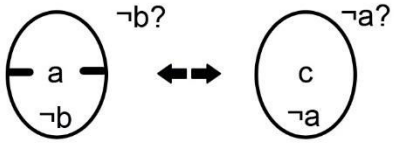
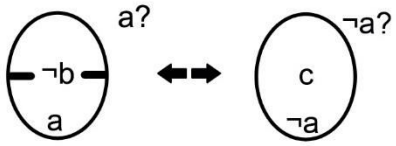
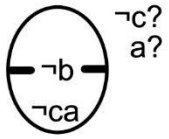
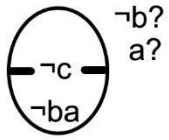
9.3.2.2 Modo EE de la primera

Ningún A es B. Ninguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x\neg b$	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 $c_x\neg a$	Toda C se asocia con parte de ¬A
2	 Conv. 1a		
3	 Exclu. part, a. 2 Cont. 3a	3 $a_x\neg b\neg c$ Exclu. part. a, 1, 2	
		4 $\neg b\neg c$ Cont. 3	Parte de ¬B es ¬C
4	 Conv. 3b	5 $\neg c\neg b$ Cont. 4	Parte de ¬C es ¬B

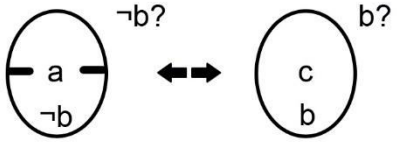
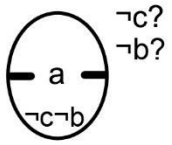
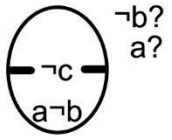
9.3.2.3 Modo IE de la primera

Algún A es B.Ninguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ab	Una parte o tipo de A se asocia con parte de B
		-2 c×¬a	Toda C se asocia con parte de ¬A
2	 Conv. 1a		
3	 Exclu. part, a. 2	3 b¬c Exclu. part. a, 1, 2	Parte de B es ¬C
4	 Conv. 3	4 ¬cb Conv. 3	Parte de ¬C es B

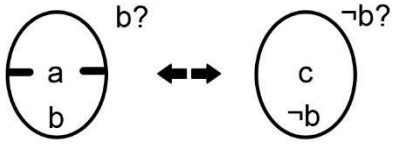
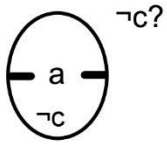
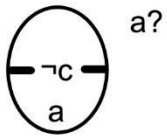
9.3.2.4 Modo OE de la primera figura

Algún A no es B. Ninguna C es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a¬b	Una parte o tipo de A se asocia con parte de ¬B
		-2 c×¬a	Toda C se asocia con parte de ¬A
2	 Conv. 1a		
3	 Exclu. part, a. 2	3 ¬b¬c Exclu. part. a, 1, 2	Parte de ¬B es ¬C
4	 Conv. 3	4 ¬c¬b Conv. 3	Parte de ¬C es ¬B

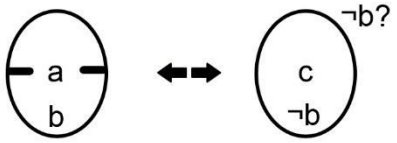
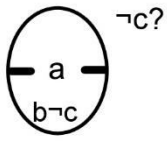
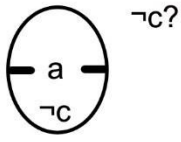
9.3.2.5 Modo OA de la segunda

Algún A no es B.Toda C es B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a¬b	Una parte o tipo de A se asocia con parte de ¬B
		-2 cxb	Toda C se asocia con parte de B
2	 Exclu. part, b. 1	3 a¬c Exclu. part. b, 1, 2	Parte de A es ¬C
3	 Conv. 2	4 ¬ca Conv. 3	Parte de ¬C es A

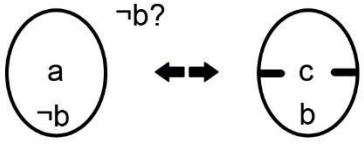
9.3.2.6 Modo IE de la segunda

Algún A es B. Ninguna C es B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ab	Una parte o tipo de A se asocia con parte de B
		-2 c×¬b	Toda C se asocia con parte de ¬B
2	 Exclu. part, b. 1	3 a¬c Exclu. part. b, 1, 2	Parte de A es ¬C
3	 Conv. 2	4 ¬ca Conv. 3	Parte de ¬C es A

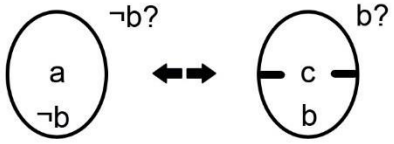
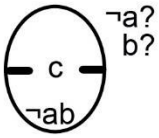
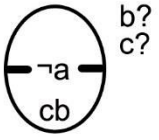
9.3.2.7 Modo U - E de la segunda

Solo A es B. Ninguna C es B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ab_x	Al menos parte de A se asocia con toda B
		-2 $c_x\neg b$	Toda C se asocia con parte de ¬B
2	 Exclu. part, b. 1	3 $ab_x\neg c$ Exclu. part. b, 1, 2	Parte de A es ¬C y toda B
3	 Cont. 2	4 a¬c Cont. 3	Parte de A no es C

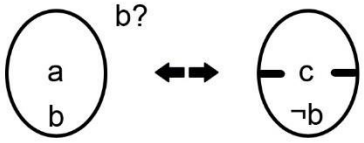
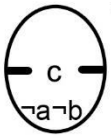
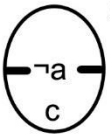
9.3.2.8 Modo E - U segunda figura

Ningún A es B. Solo C es B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x\neg b$	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 cb_x	Parte de C se asocia con la totalidad de B...
2	Exclu. part b, 1 Cont. 2a	3 $cb_x\neg a$ Exclu.par b, 1,2	y por ello parte de C se asocia con parte de ¬A
		4 ¬ac Cont. 3	Parte de ¬A es C

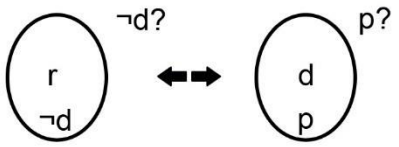
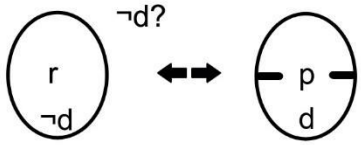
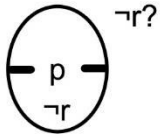
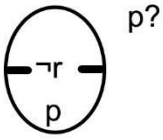
9.3.2.9 Modo EI segunda: Festino por exclusión

Ningún A es B. Alguna C es B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a_x¬b	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 cb	Parte de C se asocia con parte de B
2	 Exclu. Part. 1	3 c¬(a_x) Exclu. b¬b, 1	Parte de C es imposible asociarla con ningún A
		4 c¬a Eliminación,3	Luego parte de C debe ser ¬A. Alguna C no es A
3	 Conv. 2	5 ¬ac Conv.4	Parte de ¬A es C
		6 ¬$a_{x\,\%}$c Def. parti. 5	Si tengo ¬A es probable tener C

9.3.2.10 Modo A – U de la segunda figura

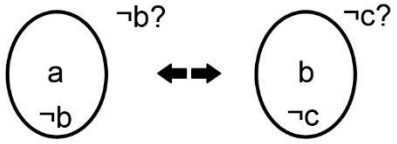
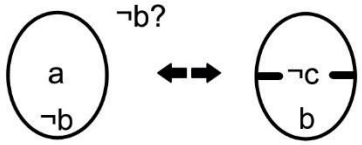
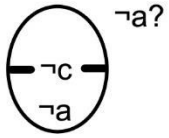
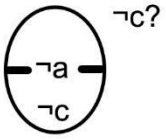
Toda A es B. Solo C es ¬B.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 axb	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 c¬bx	Parte de C se asocia con la totalidad de ¬B
2	 Exclu. part b, 1	3 c¬a Exclu.par b, 1,2	Parte de C se asocia con parte de ¬A
3	 Conv. 2	4 ¬ac Conv. 3	Parte de ¬A es C

9.3.2.11 Modo EA de la cuarta por exclusión

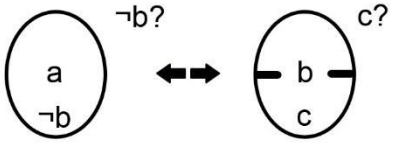
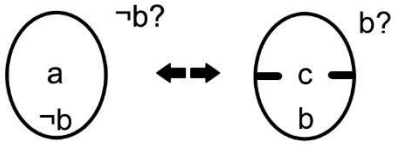
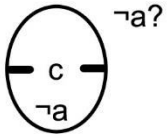
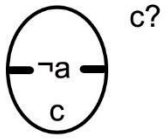
Ningún roedor es diurno. Los seres diurnos son precavidos			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 r x ¬d	Ningún roedor es diurno
		-2 d x p	Los seres diurnos son precavidos
2	 Conv. 1b		
			Solo los seres precavidos son diurnos
3	 Exclu. part, d¬d. 2	3 p¬r Exclu. part. b, 1, 2	Parte de los seres precavidos no son roedores
4	 Conv. 3	4 ¬rp Conv. 3	Parte de los seres que no son roedores son precavidos

Ejercicio propuesto en el examen de Lógica de 2018

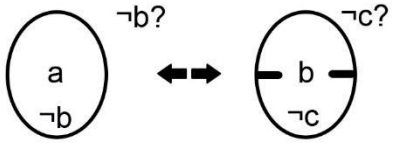
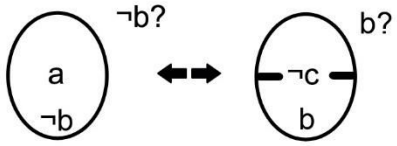
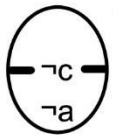
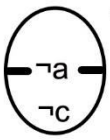
9.3.2.12 Modo EE de la cuarta por exclusión

Ningún A es B. Ninguna B es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ax¬b	Si es A, entonces es ¬B
		-2 bx¬c	Todos los posibles tipos de B se asocian con ¬C
2	 Conv. 1b		
			Solo si no es C puede ser B
3	 Exclu. part, a. 2	3 ¬c¬a Exclu. part. b, 1, 2	Parte de ¬C es ¬A
4	 Conv. 3	4 ¬a¬c Conv. 3	Parte de ¬A es ¬C

9.3.2.13 Modo EI cuarta por exclusión: Fresison

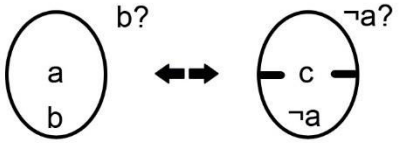
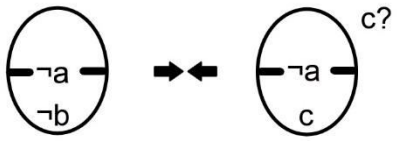
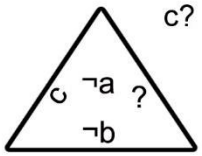
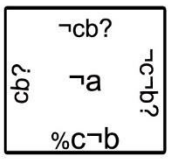
Ningún A es B. Alguna B es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ax¬b	Cualquier tipo de A se asocia con un tipo de ¬B
		-2 bc	Uno de los posibles tipos de B se asocia con C
2	 Conv. 1b		
			Solo C puede ser B
3	 Exclu. part, a. 2	3 c¬a Exclu. part. b, 1, 2	Parte de C es ¬A
4	 Conv. 3	4 ¬ac Conv. 3	Parte de ¬A es C

9.3.2.14 Modo EO de la cuarta por exclusión

Ningún A es B. Alguna B no es C.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a_x¬b	Cualquier tipo de A se asocia con un tipo de ¬B
		-2 b¬c	Uno de los posibles tipos de B se asocia con ¬C
2	 Conv. 1b		
3	 Exclu. part, a. 2	3 ¬c¬a Exclu. part. b, 1, 2	Parte de ¬C es ¬A
4	 Conv. 3	4 ¬a¬c Conv. 3	Parte de ¬A es ¬C

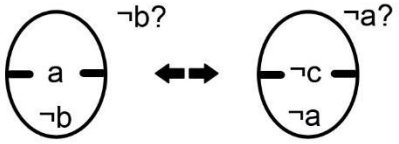
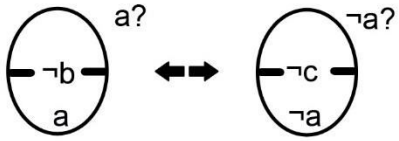
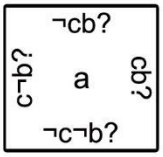
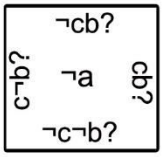
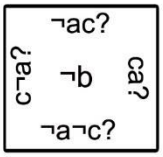
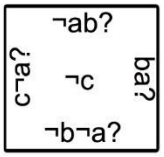
9.3.3 Exclusión nula o probable

9.3.3.1 Modo AO de la primera: Repulsión neutra sin conclusión

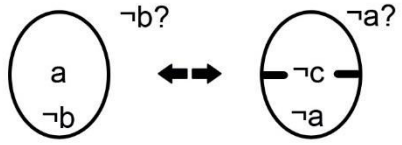
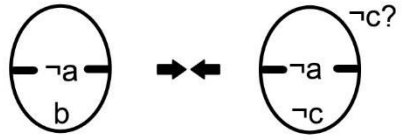
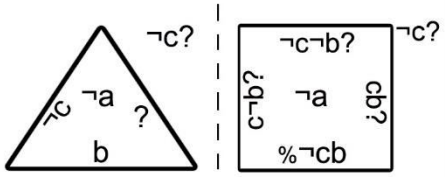
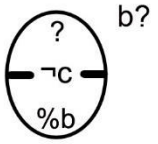
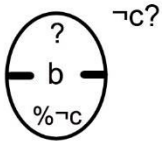
Toda A es B. Alguna C no es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a x b	La totalidad de A se asocia con parte de B
		-2 c¬a	Parte de C se asocia con parte de ¬A
2	 Transf. 1a Conv.1b	3 ¬a¬b x Transf. de 1	Solo ¬A es ¬B
		4 ¬a x %¬b Def. parti 3	Si tenemos ¬A es más que posible tener ¬B. Es un suceso probable
3	 Sínt. 2	5 ¬a x %c Def. parti 2	
		6 ¬a x %(c¬b) Sínt ¬a, 5, 6	A partir de ¬A es más que posible tener C¬B, es un suceso probable
4	 c? Combin. 3	7 %(c¬b) Cont. 6	Es probable tener C¬B
		8 %(¬bc) Conv. 7	¬BC es una combinación probable (Si tengo ¬A).

9.3.3.2 Modo IO de la primera con sujeto negativo y exhaustivo

Algún A es ¬B. Alguna ¬C no es A.

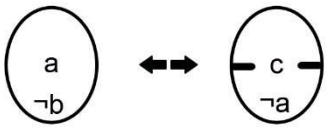
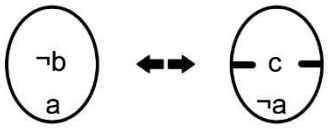
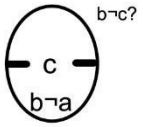
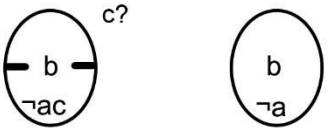
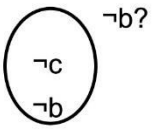
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a¬b	Un tipo de A se define por asociarse con ¬B
		-2 ¬c¬a	Alguna ¬C se asocia con parte de ¬A
2	 Conv.1a	3 ¬ba Conv. 1	
		4 ¬[(¬ba)(¬c¬a)] Exclu.nula. 2,3	Es imposible que el objeto ¬ba sea el mismo que el objeto definido como ¬c¬a
3	 Combi. 2 a-b  Combi. 2 ba	5 (ba,¬b¬a, b¬a,¬c¬a) ,(¬ba, c¬a, ¬ca, ca), (¬ba, b¬a,¬b¬a, c¬a, ¬ca, ca) Decod. Imp.4	Luego al definir un objeto será falso el primero, el segundo o ambos.
		6 (ba,¬b¬a, b¬a,¬c¬a) ,(¬ba, c¬a, ¬ca, ca) Simplif. 5	Y todas las posibilidades admitidas pueden resumirse en ocho sucesos.
4	 Combi. 2 a-b  Combi. 2 a-b	7 abc, ab¬c, a¬bc, a¬b¬c, ¬abc, ¬ab¬c, ¬a¬bc,¬a¬b¬c, Recombi. 6	Es posible cualquiera de los ocho sucesos o tipos de objeto posibles en alfa
		8 a, b, c, ¬a, ¬b,¬c Codif. 7	Cualquier combinación de sucesos elementales es posible

9.3.3.3 Modo EO primera con sujeto negativo

Ningún A es B. Alguna ¬C no es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a x ¬b	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B
		-2 ¬c¬a	Alguna ¬C se asocia con parte de ¬A
2	 Transf.1a Conv. 1b	3 ¬ab x Transf. de 1	Solo ¬A es B
		4 ¬a x %¬c Prob. cond. 2	Partiendo de ¬A es probable ¬C
3	 Sínt. 2 Combi. 3a	5 ¬a x %(b x ¬c) Gener. ¬a, 4 a 3	¬A¬CB es una posibilidad probable
		6 ¬a x %(¬cb) Comb. abiertas en 4	Si tengo ¬A, es probable que tenga ¬C y B.
4	 Cont. 3b	7 ¬c x% (b¬a) Prob. condicionada 6	Si tengo ¬C es probable que sea el caso B¬A
		8 %¬cb Cont. 7	¬CB es una combinación más que posible
5	 Conv. 4	9 b x%¬c Prob. condi. 8	Partiendo de B es probable ¬C
		10 %b¬c Contenido 9	Es probable que parte de B no sea C

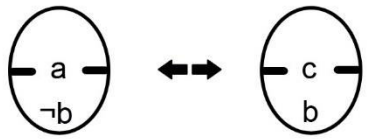
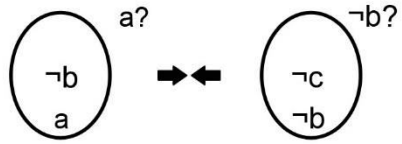
9.3.4 Silogismos por exclusión parcial por términos medios universales

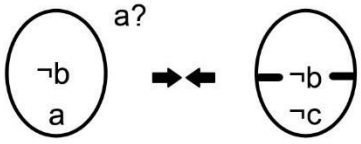
9.3.4.1 Silogismo con disyunción exclusiva y proposición exclusiva[25]

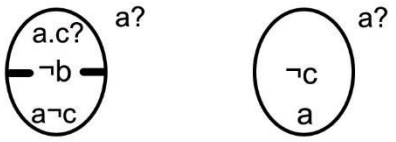
A es lo contrario de B. Solo C es ¬A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x \neg b_x$	Si y solo si tengo A entonces tengo ¬B
		-2 $c \neg a_x$	Solo C es ¬A
2	 Conv. 1a	3 $\neg b_x a_x$ Conv. 1	
			Es imposible unir la parte de C definida por ¬A con algún tipo de ¬B
3	 Exclu. part, a. 2	4 $c \neg a_x b$ Exclu. part, a. 1,2	Una parte de C es lo mismo que ¬A y es B
4	 Conv. 3a Trans. 1a		
		5 $b_x \neg a_x$ Trans.1	Pero B es lo mismo que ¬A
5	Sínt. 4 Cont.5a	6 $b_x \neg a_x c$ Gener ¬a de 4 a 5	Luego la parte de C que es todo ¬A es también todo B
		7 $b_x c$ Cont. 6	Luego solo C es B, o bien, si tengo B, tengo C.
6	 Trans. 5b	8 $\neg c_x \neg b$ Trans. 7	Si no tengo C, no tengo B

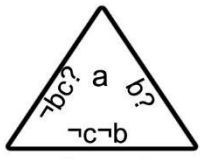
[25] Al resolver por exclusión aparece en 3 $b \neg c$ como posible, aunque no lo es, como se demuestra en 5. Luego, o bien perdemos información respecto a la síntesis, o bien no precisamos bien las leyes de la exclusión.

9.3.4.2 Modo U- U de la segunda

<table>
<tr><th colspan="4">Solo A es ¬B. Solo C es B.</th></tr>
<tr><th colspan="2">Resolución diagramática</th><th>Resolución formal</th><th>Interpretación</th></tr>
<tr><td>-1</td><td rowspan="2"> 
</td><td>-1 a¬bx</td><td>Parte de A se asocia con toda ¬B</td></tr>
<tr><td></td><td>-2 cbx</td><td>Parte de C se asocia con la totalidad de B</td></tr>
<tr><td>2</td><td> 

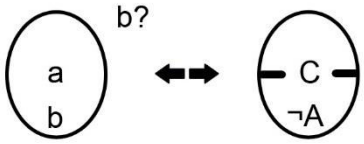
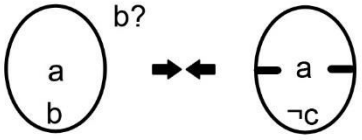
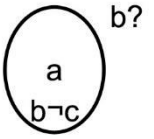
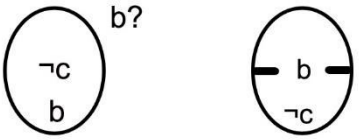
Conv. 1a Trans. 1b</td><td>3 ¬bxa
Conv.1</td><td>Si ¬B, entonces A</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>4 ¬cx¬b
Trans. 2</td><td>Si tengo ¬C, tengo ¬B</td></tr>
<tr><td>3</td><td> 

Conv. 2b</td><td>5 ¬cx¬ba
Gener. ¬b, 3 a 4</td><td>Si tengo ¬C, tengo ¬B y A</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td> 

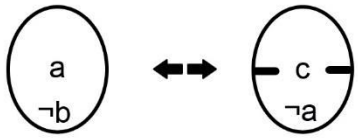
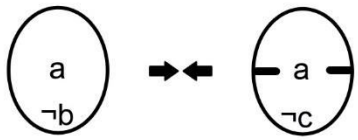
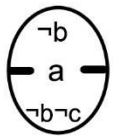
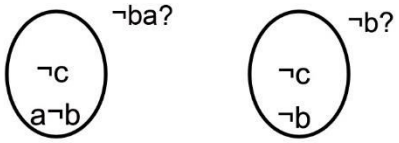
Sínt.particular 3 Cont. 4a</td><td>6 ¬ba¬cx
Conv. 5</td><td>Parte de ¬B se asocia con parte de A y todo ¬C</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>7 ¬cxa
Cont.6</td><td>Todo ¬C es A</td></tr>
<tr><td>5</td><td> 

Conv. 4a</td><td>8 a¬cx¬b
Conv.6</td><td>Parte de A es todo ¬C y parte de ¬B</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

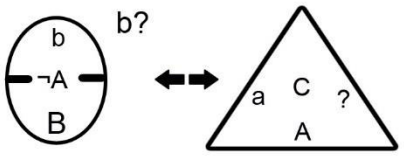
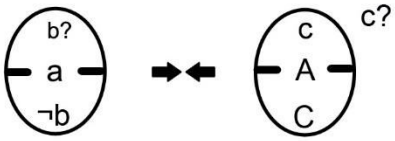
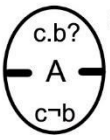
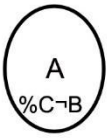
9.3.4.3 Modo A – U de la primera figura con razón suficiente

Si A, entonces B. Solo C no es A y hay alguno que no es A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 axb	Si hay A, habrá B
		-2 ¬axc. C¬A	Tengo C¬A y todo ¬A es C
2	 Trans.1b		
		3 a¬cx Trans.2	Luego todo ¬C debe ser A. Solo A puede ser ¬C.
3	 Sínt. 2	4 ax¬cxb Gener. a, 1 a 3	Cualquier A será ¬C y B
4	 Conv. 3 Cont.4a	5 ¬cxb Cont. 4	Si ¬C, entonces B.
		6 b¬cx Cont. 5	Solo B puede ser ¬C

9.3.4.4 A es lo contrario de B. Solo C es A

A es lo contrario de B. Solo C es ¬A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 $a_x\neg b_x$	Si y solo si tengo A entonces tengo ¬B
		-2 $c\neg a_x$	Solo C es ¬A
2	 Transf. 1b		
		3 $a\neg c_x$ Transf. 2	Solo A es ¬C
3	 Sínt. 2	4 $a\neg c_x\neg b$ Gener. a, 3, 1	Es seguro que al menos hay un tipo de A en el que se asocia todo ¬C con ¬B
4	¬ba? ¬b?  Conv. 3 Cont. 4a	5 $\neg c_x a\neg b$ Conv. 4	La totalidad de ¬C se asocia con parte de A y parte de ¬B
		6 $\neg c_x\neg b$ Cont. 5	Si tengo ¬C, tengo ¬B
5	c? Conv. 4b Trans. 5a	7 $\neg b\neg c_x$ Conv. 6	Solo ¬B es ¬C
		8 $b_x c$ Trans. 7	Si B, entonces C

9.3.4.5 Exclusión de medios universales en los que hay A y ¬A.

Si ¬A, entonces B y hay algún ¬A. Solo C es A y hay A.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 ¬axb.¬A	¬A implica B y hay alguno que es ¬A
		-2 cax. A	Solo C es A y hay alguno que es A
2	 Trans.1a Conv. 1b	3 a¬bx Trans.1	¬B tiene que ser un tipo de A (puede haber AB)
		4 AC. axc Conv. 2 con RSE C	Hay algún A y no puede ser A¬C. Luego hay AC
3	 Sint. 2 Sínt. de A en 2 necesaria en lo esencial, pero no en lo existencial.	4 ac¬bx Gener. a, 3 a 4	Luego, al menos en teoría, si hay ¬B ha de ser AC
		5 (ac)x %¬bx Prob. cond. 4	Es decir, que si hay AC es probable que sea ¬B
4	 Combinaciones. 3	6 AC%¬B Gen. ac de 5 a 4	Luego es probable que lo que es AC sea ¬B
		6 %C¬B Cont. 6	Es decir, que es probable y más que posible C¬B

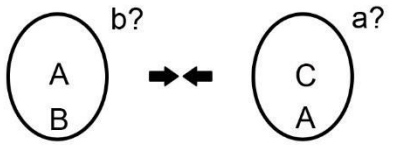
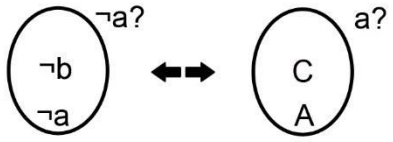
Recordemos que [A] significa que tengo todo tipo de A. Y dado que solo hay ¬B en A, entonces es necesario tener todo B ahora. Por ejemplo, si están la totalidad de mis alumnos en clase y solo hay alumnos de dibujo entre mis alumnos, entonces están todos los alumnos de dibujo.

En el paso número tres de la resolución diagramática observamos que es seguro que tenemos A, pero no sabemos si se trata de C¬B o de CB. En todo caso, nos parece que *ac¬b* cuenta con más motivos a su favor en las premisas. La conjunción *b¬a* es meramente posible, mientras que la conjunción *¬ba* es teóricamente necesaria.

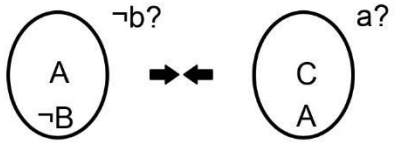
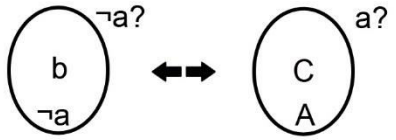
9.4 Silogismos por exclusión después de transformar

9.4.1.1 Barbara pasa de síntesis particular a exclusión universal con razón suficiente para existir CB

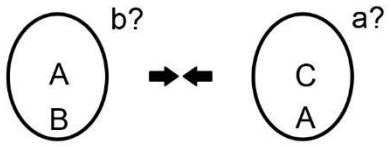
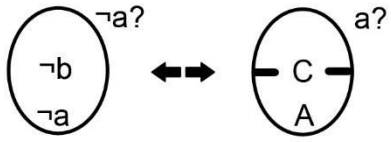
Todo A es B y tengo todo AB. Todo C es A y tengo todo CA..

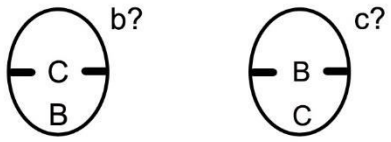
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 axb. [A]B	La totalidad de A se asocia con parte de B y está.
		-2 cxa. [C]A	La totalidad de C se asocia con parte de A y esta-
2	 Trans.1a	3 ¬bx¬a Trans.1	Si hubiera ¬B, sería ¬A
3	Excl. Uni. a en 2 Excl. Uni. a en 2	5 ¬bx¬c Excl. Uni. a, ¬a, 2,3	Si hubiera ¬B sería ¬C
		4 [C]B Excl. Uni. a, ¬a, 2,3	Todo C es B y está.

9.4.1.2 Celarent pasa de síntesis a exclusión con Razón suficiente para existir C¬B

Ningún A es B y están todas. Toda C es A y están todas.			
	Resolución diagramática	Resolución formal	Interpretación
-1		-1 a$_x$¬b. [A]¬B	La totalidad de A se asocia con parte de ¬B y está
		-2 c$_x$a. [C]A	La totalidad de C se asocia con parte de A y está
2	 Trans.1a	3 b$_x$¬a Trans.1	Si hubiera B, sería ¬A
3	Excl. Uni. a en 2 Excl. Uni. a en 2	5 bx¬c Excl. Uni. a, ¬a, 2,3	Si hubiera B,ninguna sería C
		4 [C]¬B Excl. Uni. a, ¬a, 2,3	Ninguna C es B, pero todas están

9.4.1.3 Barbari con razón suficiente de existir BC resuelto mediante exclusión particular

<table>
<tr><th colspan="4">Toda A es B y está. Toda C es A y está.</th></tr>
<tr><th colspan="2">Resolución diagramática</th><th>Resolución formal</th><th>Interpretación</th></tr>
<tr><td>-1</td><td rowspan="2"> 
</td><td>-1 a_xb. [A]B</td><td>Toda A es B y tengo toda A</td></tr>
<tr><td></td><td>-2 c_xa. [C]A</td><td>Toda C es A y tengo toda C</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="2"> 

Trans.1a Cont. 1b</td><td>3 ¬b_x¬a
Trans.1</td><td>Si hubiera ¬B, sería ¬A</td></tr>
<tr><td></td><td>4 CA
Cont. 2</td><td>Alguna C es A
(Conversión accidental 2)</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2"> 

Excl. Parti. a,¬a, 2 Conv. 3a</td><td>5 CB
Excl. par. a,3,4 con RSE</td><td>Alguna C es B</td></tr>
<tr><td></td><td>4 BC
Conv. 5</td><td>Algún B es C</td></tr>
</table>

10 CONCLUSIONES

10.1 Ventajas e inconvenientes a nivel didáctico

Los diagramas de árbol y las figuras geométricas cerradas como círculos, cuadrados y triángulos han sido reiteradamente empleados a lo largo de la historia para expresar relaciones entre variables lógicas. Después de comparar el potencial de nuestras herramientas gráficas con otras formas de representación, cuyo valor ha sido ya reconocido históricamente, podemos señalar algunas ventajas y desventajas con relación a su uso.

Los diagramas de Marlo tienen potencial para representar y resolver problemas en los que intervienen un número ilimitado de posibilidades lógicas, empleando para ello una cantidad de espacio menor que el resto de los diagramas de los que tenemos noticia. Nosotros podemos señalar las relaciones entre términos o variables que se establecen en las premisas sin necesidad de mostrar compartimentos vacíos o irrelevantes, lo cual nos permite obtener mayor claridad y economía en la expresión de las conclusiones. Es obvio que esta ventaja se hace más evidente cuánto mayor es la complejidad de los problemas.

Como ya señalamos anteriormente, creemos que los diagramas de Venn tienen el valor de permitir revisar exhaustivamente todas las posibilidades en juego, asegurando que llegaremos a conclusiones verdaderas gracias a la eliminación de las combinaciones prohibidas por las premisas. En este sentido, los consideramos un instrumento al servicio del rigor, una estrategia simple y adecuada para sostener la firmeza y la solidez de un razonamiento y que requiere un periodo de aprendizaje relativamente corto para ser aplicada. Sin embargo, cuando los problemas tienen un número elevado de variables, la complicación de estos diagramas aumenta en progresión geométrica, hasta el punto de que es muy poco aconsejable su uso con más de cinco variables. Pensemos que un problema con ocho variables dicotómicas requiere construir primero 256 casillas, después precisa eliminar una a una todas las posibilidades prohibidas; finalmente, conlleva revisar visualmente una a una todas las celdas restantes para elaborar las conclusiones. Por el contrario, los diagramas de Marlo requieren una inversión mayor en su aprendizaje, pero permiten desarrollar atajos para llegar a las conclusiones sin necesidad de ser exhaustivo en la construcción, eliminación y revisión de las conjunciones que permanecen.

En este sentido y una vez asumida la rentabilidad de la inversión en su aprendizaje, nos parece que los diagramas de Marlo fomentan un desarrollo mayor de la inteligencia al señalar caminos a la razón capaces de reducir los costes cognitivos que conlleva procesar grandes cantidades de información.

CONCLUSIONES

En los diagramas de Venn no existe correspondencia alguna con las figuras del silogismo que interesaron a Aristóteles y a Boole, dejando al margen cualquier análisis de los procesos implicados en la comunicación de las proposiciones. Al representar una inferencia en estos diagramas no se distinguen los procesos de la síntesis de los procesos de la exclusión, pues en todos los casos se llega a las conclusiones mediante la eliminación y revisión de las combinaciones que permanecen. Por ello nos parece que, aunque los diagramas de Venn pueden ser útiles para revisar las conclusiones de un razonamiento, no admiten distinguir los diversos modos en los que el término medio encadena unas proposiciones con otras durante la inferencia; siendo esta dificultad más evidente en las proposiciones complejas que llamamos secundarias. Así pues, los diagramas de Venn, que son los más extendidos hoy en día en el ámbito de la didáctica de la lógica, emplean esencialmente la eliminación, lo cual, siendo una estrategia formalmente válida, deja completamente de lado aspectos de la inferencia relacionados con los procesos comunicativos en los que intervienen proposiciones verbales. Desde nuestro punto de vista, los diagramas de Venn no pasan de ser un listado exhaustivo de posibilidades que, una vez eliminada la metafísica de la pertenencia, puede ser elaborado en múltiples formatos sin perder funcionalidad; de hecho, las versiones que intersecan celdas cuadradas en lugar de círculos permiten generar de forma exhaustiva y exclusiva todas las combinaciones que forman el universo del discurso de un modo más claro y simple, aunque, sobrepasado cierto número de variables, son también costosas en términos de espacio.

Nosotros no dudamos de que los sistemas cognitivos concluyen en último término y en todos los casos por eliminación, pero tenemos interés por comprender los procesos simbólicos que median la comunicación de los parámetros del universo del discurso, de las posibilidades en juego y del grado de confianza con el que dichas posibilidades deben ser tenidas en cuenta.

En los diagramas de Marlo sí se distinguen diversas figuras para distintas clases de razonamiento y no puede ser casualidad que las figuras a las que nosotros llegamos desarrollando nuestros diagramas se correspondan exactamente con las figuras del silogismo explícitamente señaladas por Boole y con las figuras del silogismo teorizadas por Aristóteles en *Analíticos Primeros*. No obstante, en el caso de Aristóteles la correspondencia se ve al considerar dichas figuras desde su estructura profunda, pero no cuando se clasifican las figuras en base a la estructura superficial basada en la posición del término medio en las premisas. Así, nuestras figuras combinan de manera adecuada los principios de la ilación, basados en la ley de identidad, los principios de la eliminación, sustentados por la ley de no contradicción y el principio de razón suficiente, demostrando que detrás de todo razonamiento lógico en el que intervienen proposiciones verbales operan las leyes del término medio.

Además, en los diagramas de Marlo las variables no están ligadas a los compartimentos. De este modo, a medida que se integra la información de las premisas, las distintas áreas de los modelos proposicionales van siendo progresivamente determinadas, paso a paso, hasta alcanzar, o no, una conjunción necesaria de variables. Desligar las áreas de las variables permite una mayor flexibilidad en el cálculo y un análisis más detallado de la inferencia. Es decir, que a medida que se avanza en el razonamiento, se puede establecer una correspondencia mayor y más intuitiva entre cada uno de los pasos que se desencadenan en los códigos del lenguaje natural, formal y diagramático. Un alumno experimentado emplea la representación gráfica de nuestros diagramas para comprobar la validez de sus inferencias formales, y se apoya al mismo tiempo en dichas inferencias formales, fácilmente convertibles al lenguaje natural, para construir los diagramas.

Así pues, los diagramas de Marlo resuelven los problemas sobre el papel de tal manera que una vez alcanzadas las conclusiones, entendidas como conjunciones necesariamente establecidas entre variables por las premisas, estas se muestran de forma directa, clara e intuitiva, siendo condensadas en un único modelo proposicional que facilita su traducción simbólica al lenguaje formal y natural. Ocurre lo mismo en los diagramas de Peirce, mientras que en otros diagramas, como los de Venn o Carroll, las conjunciones se muestran como intersecciones de celdas no eliminadas y que ocupan un lugar fijo y predeterminado desde el inicio de la inferencia. Las intersecciones de las celdas en estos casos deben ser localizadas interpretando ocularmente las coordenadas espaciales que las definen, lo cual conlleva, cuando el número de celdas aumenta, que la conclusión sea menos clara que en los diagramas que hilan las conexiones necesarias.

No deja de sorprendernos que podamos llegar con los diagramas de Marlo a las mismas conclusiones que empleando las redes de expectativas o la calculadora lógica, cuando unos y otros parecen seguir reglas y caminos totalmente distintos. Sin embargo, sabemos que filósofos como John Locke ya distinguían entre proposiciones del pensamiento y proposiciones verbales, atribuyendo principios de inferencia a unas y otras muy semejantes a los

que respectivamente se observan en nuestras redes y diagramas. Tal vez, las cuestiones que surgen al tratar de relacionar el modo en el que se resuelve la inferencia en las redes de expectativas con los procesos que tienen lugar en los diagramas de Marlo puedan servir para afrontar, desde una nueva perspectiva, las relaciones entre pensamiento y lenguaje. Para nosotros, las redes justifican los enfoques conexionistas del pensamiento y nos parece que encajan bien con la perspectiva de la lógica matemática, mientras que los diagramas de Marlo justifican los enfoques simbólicos de la comunicación que nos parecen encajar mejor con el paradigma aristotélico. En todo caso, creemos que el uso combinado de redes y diagramas de Marlo facilita en nuestros alumnos la sincronización de las herramientas de las que disponen para el cálculo y la comunicación, lo cual, a su vez, consideramos una forma de incrementar el potencial de su razón.

Las redes de expectativas, lo mismo que los diagramas de Venn, también muestran exhaustivamente todas las combinaciones posibles, pero al estar constituidas como diagramas de árbol, consideramos más fácil recodificar la información espacial de las conclusiones en forma de conjunciones simbólicas. Sin embargo, hay que decir que interpretar las conjunciones identificando los nodos de un diagrama de árbol es una habilidad mucho menos intuitiva de lo que esperábamos y que también se requiere práctica para el desarrollo de la coordinación de los movimientos oculares que permiten al alumno situar, por ejemplo, el punto $A\neg B\neg C$ en la red.

Así pues, nuestras redes comparten con los diagramas de Venn el inconveniente de tener que construir de forma exhaustiva celdas o casillas para los nodos que representan a todos y cada uno de los objetos posibles del universo del discurso. Sin embargo, pensamos que la estructura de árbol, sobre todo cuando es implementada con nodos *Or* y *And*, proyecta mejor la jerarquía lógica de las relaciones que en lenguaje natural presuponemos entre objetos, conjuntos y subconjuntos de posibilidades en juego. De este modo, la estructura bayesiana de las redes facilita la comprensión probabilística de la inferencia y permite evidenciar, de un modo más claro que los diagramas de Venn, la validez de las conclusiones plausibles. Las herramientas lógicas que proponemos permiten generar con el máximo rigor conclusiones necesarias, imposibles o meramente probables, sin que el hecho de producir inferencias probables y meramente posibles les reste rigor formal alguno. Al contrario, la calculadora lógica que hemos diseñado utilizando como base una hoja de cálculo nos permite obtener con precisión matemática todas las conclusiones necesarias de la lógica, pero además nos permite obtener, del mismo modo, conclusiones meramente plausibles tradicionalmente ignoradas.

Recuperar la perspectiva probabilística de la lógica, abiertamente mantenida en el siglo XIX, nos pone en disposición de unificar de nuevo los paradigmas del razonamiento deductivo, inductivo, plausible y estadístico, lo cual permitiría, a su vez, adoptar un enfoque multidisciplinar en la didáctica de lo que hoy se llama pensamiento crítico.

También sería nuestra intención acabar con la nefasta idea de que solo existe lógica cuando trabajamos con verdades absolutas o creencias que parten de datos perfectamente conocidos. Los diagramas de Marlo operan con áreas indeterminadas y con variables marcadas por una interrogación como meramente posibles. Del mismo modo, nuestras redes calculan empleando valores de certeza que codificamos con un cero o con color amarillo para representar ignorancia. Y es así porque nuestro punto de partida no es la razón de los viejos racionalistas que criticaba Ortega, sino la razón vital que se las ha de ver con la incertidumbre cuando trata de generar creencias razonables.

Una vez que superamos el llamado *logocentrismo* y los prejuicios autoritarios del racionalismo de las verdades únicas y absolutas, es más fácil asumir que la combinación de información lingüística, cromática y numérica en nuestras representaciones gráficas facilita formas de razonamiento heterogéneo más afines a las diversas capacidades de los estudiantes. Nosotros hemos podido constatar que alumnos con graves dificultades en el manejo de los números y de las proposiciones formales de la lógica se beneficiaban de esta perspectiva heterogénea. Así, una alumna que rozaba la acalculia realizaba sin problemas inferencias en las redes de expectativas cuando las proposiciones estaban codificadas mediante colores, y aunque era menos precisa que los alumnos “numéricos”, estos eran más lentos que ella alcanzando las conclusiones.

Al revisar las aportaciones al campo de la lógica que ya hicieran Aristóteles y otros autores ilustres del siglo XIX como Boole o Jevons, nos parece que nuestros diagramas y redes de expectativas no aportan nada realmente novedoso y que no tienen otro mérito, tal vez, que el de contribuir a despejar el camino de interpretaciones

complejas sobre el modo en el que los sistemas cognitivos codifican, reutilizan y comunican sus experiencias con fines adaptativos.

Además de no proponer ninguna ley realmente original, una de las desventajas de los diagramas de Marlo a nivel didáctico es que su manejo requiere un periodo de aprendizaje mayor que otros diagramas como los de Venn o los de Carroll, aunque pensamos que la inversión se rentabiliza en términos de una mayor comprensión de los procesos constitutivos del razonamiento, así como con una mayor integración y coordinación en nuestros estudiantes de las herramientas lógicas del cálculo y la comunicación.

También debemos reconocer que todavía no han sido demostradas las propiedades metalógicas de nuestros diagramas, mientras que ya han sido reconocidas en el caso de los diagramas de Venn o los Grafos de Peirce. Por eso no podemos presentarlos formalmente como un sistema lógico completo, aun cuando la calculadora lógica nos convence del rigor y la logicidad de sus principios.

> Hoy llamamos logicidad a un conjunto de propiedades que satisfacen ciertos objetos o relaciones de algunos lenguajes para poder considerarlos como objetos o relaciones lógico(a)s. Como ejemplo de estos objetos o relaciones encontramos: constantes, relaciones clausuradas bajo el concepto de consecuencia, objetos de cuantificación y leyes o principios que determinan el proceso inferencial al interior de cada sistema. (Conforti Carlomagno & Jasso Méndez, 2016, p.14)

Aunque las perspectivas que abre nuestro enfoque de las proposiciones secundarias nos resultan ampliamente prometedoras, es evidente que el alcance del diagrama de Marlo y de las redes de expectativas está aún muy limitado a lo que podríamos considerar lógica de primer orden con proposiciones monádicas. Por ello, nosotros solo empleamos nuestros diagramas en el aula para resolver silogismos, ejercicios de lógica de enunciados y de lógica de clases, que no es poco en secundaria.

Otra característica de nuestros diagramas que puede ser considerada por algunos como una desventaja es que pueden llegar a resultar excesivamente complejos cuando pretendemos diferenciar el peso de las posibilidades confirmadas por la fuente y el peso de las posibilidades que no han sido ni verificadas ni falsadas, etiquetando con una interrogación las variables conjetura. Y aunque inicialmente podemos omitir estas dificultades, creemos que son inevitables cuando vamos tras el mismo objetivo que perseguía Aristóteles al establecer las leyes del silogismo demostrativo. Nos parece del todo falso que, partiendo de la proposición *Todas las setas venenosas están en la cesta verde*, sea igual de razonable pensar de una de las setas de la cesta verde que puede ser venenosa y que puede no serlo. Puede que esto sean cuestiones epistémicas secundarias para algunos lógicos hoy, pero son cuestiones que nos interesan como profesores de filosofía licenciados además en Psicología. Siempre hemos pensado que el pensamiento crítico pasa por comprender con exactitud qué diferencia unos grados de conocimiento de otros, y en qué sentido deben pesar más en el conocimiento científico las proposiciones de las que se tiene evidencia que aquellas que son meramente conjeturas ni verificadas ni falsadas.

Igualmente, pudiera parecer una complicación innecesaria de las redes y de la calculadora lógica separar en la proposición el peso de los motivos para afirmar que sí del peso de los motivos para afirmar que no, otorgando un valor igual a cero a la incertidumbre. Sin embargo, creemos que esta perspectiva facilita establecer correspondencias con situaciones de la vida real en las que los individuos no pueden tomar decisiones por tener los mismos motivos para asentir que para negar. Al mismo tiempo, esta separación del sí y del no considerada desde un enfoque bayesiano, nos permite establecer vínculos hipotéticos entre los modelos formales del razonamiento y los impulsos activadores e inhibidores de las sinapsis neuronales.

10.2 Desacuerdos con la lógica matemática

Aunque nuestro conocimiento de la historia de la lógica es muy limitado, nos creemos en disposición de afirmar que los diagramas de Marlo interpretan la proposición y el razonamiento de un modo muy similar al que seguía en el siglo XIX la doctrina de la cuantificación del predicado. Esta corriente no fue capaz entonces de proponer formas de representación que pudieran competir en simplicidad y claridad con los diagramas de Venn, que percibía estas ideas como rivales y aprovechó sus limitaciones para criticarlas injustamente y fomentar su abandono. Cuando en 2016, mucho antes de conocer las ideas de Bentham o Hamilton, nosotros definimos los conectores lógicos en los diagramas de Marlo como expresión de las asociaciones que se dan entre la totalidad o parte de una variable con la totalidad o parte de otra variable, sentamos las bases para concebir la lógica matemática como un desarrollo natural y complementario del silogismo en el que siguen siendo esenciales las leyes que rigen la síntesis y exclusión

del término medio. Es decir, que consideramos, a la luz del modo en el que nuestros diagramas y redes de expectativas se relacionan, que el silogismo de Aristóteles, el álgebra de Boole y todos los desarrollos posteriores de la lógica simbólica basan la validez de sus inferencias en los mismos procesos que subyacen a la organización y comunicación de estructuras lógicas organizadas de forma combinatoria y cuantitativa. No obstante, los fenómenos relacionados con el razonamiento nos parecen tan complejos y laberínticos que, si perdemos la visión de conjunto, es fácil situar en lugares distantes cada una de las perspectivas que surgen al indagar en profundidad alguno de sus muchos recovecos.

Nuestras redes y diagramas permiten procesar información en la que está contenida al mismo tiempo A y $\neg A$, simplemente considerando que se trata de objetos necesariamente distintos en el universo del discurso. En este sentido, nos parece obvio que no es lo mismo razonar sobre sistemas de cosas en las que es posible al mismo tiempo que unas sean y otras no sean, que unas estén y otras no, que operar, como hacen las tablas de verdad, sobre objetos que necesariamente son o no son, que están o no están. En nuestras redes y diagramas es posible afirmar la existencia, la presencia o la ausencia de varios objetos al mismo tiempo, de modo que hay que precisar en los axiomas del sistema que, aunque un nodo *Objeto* no puede ser y no ser o estar y no estar al mismo tiempo, sí es posible que haya simultáneamente nodos que son y no son, independientemente de que estén presentes o ausentes. Así, es interesante observar que no aceptamos que *Si es cierto B, entonces* $A \rightarrow B$, pues sigue siendo posible la combinación $A\neg B$ cuando se tiene en cuenta el conjunto de posibilidades. Por ejemplo, que estén los listos en clase, no significa que de haber alguien en clase que sea trabajador sea listo necesariamente. Y aunque es cierto que formalmente podemos establecer las reglas que libremente queramos en un sistema lógico, nosotros buscamos, para la didáctica del razonamiento, las reglas que subyacen al sentido común y que pensamos que sustentan el lenguaje natural de nuestros alumnos.

Tampoco nos parece igual centrarse en los componentes de la verdad teóricos que se sustentan en el ser, que atender a los componentes fácticos que implican estar. Nosotros nos vimos obligados a diferenciar entre no ser y no estar para salvar la complejidad y las limitaciones de los primeros circuitos en los que usamos puertas lógicas *Or* y *And* para expresar la oposición de los juicios generados con los cuantificadores todo y alguno. Como fácilmente se aprecia a primera vista en la siguiente ilustración, distinguir no ser de no estar en 2016 nos permitió simplificar las redes de un modo más que significativo, aumentando de manera considerable la capacidad expresiva de nuestras representaciones.

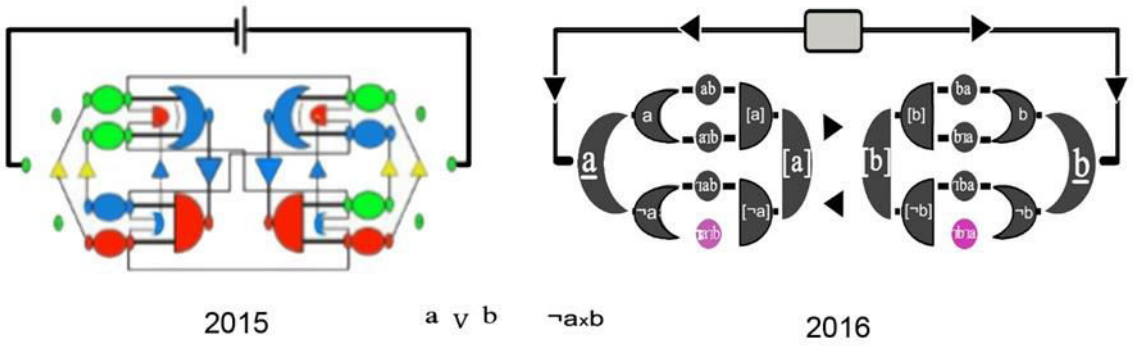


ILUSTRACIÓN 393. REPRESENTACIÓN COMPARATIVA DE LA DISYUNCIÓN DIFERENCIANDO NO *SER/ESTAR*

Distinguir ser de estar nos permite, además, afrontar las dificultades que supone expresar la diferencia entre objetos con los que contamos sin poder verificar su presencia ahora y objetos con los que no contamos sin haber demostrado nunca que no existen. Y aunque podríamos evitar tales complicaciones eliminando las sutiles diferencias que establece Kant entre tipos de juicios, nosotros preferimos atenderlas convencidos de que podemos aprender de ellas algo sobre el funcionamiento de nuestros sistemas cognitivos.

Tampoco es igual separar los grados de ser y de certeza en universos del discurso llenos de infinitos matices que limitar nuestra realidad a sistemas dicotómicos sin zonas grises en los que *ser falso A* o *no ser A* son lo mismo que *ser* $\neg A$. Sistemas con varios grados de certeza no pueden expresarse en las tablas de verdad, pero pueden mostrarse en las redes de expectativas. Sistemas dicotómicos pueden mostrarse en las tablas de verdad y en nuestras redes, de modo que podemos pensar, siguiendo a Wittgenstein, que las tablas de verdad solo muestran los casos en los que la certeza de nuestras redes es igual a uno (o menos uno). Es importante señalar que las leyes de la inferencia

no se ven afectadas por el hecho de que entre no ajustarse nada a un criterio y ajustarse por completo, se establezca un mayor número de divisiones en las variables. Estamos de acuerdo con las lógicas borrosas en que un estímulo no tiene por qué ajustarse necesariamente a un determinado grado de ser y de hecho creemos que el grado en el que se determina, por ejemplo, que algo está caliente, templado o frío, es una cuestión de conveniencia que puede llegar a explicar de forma satisfactoria la *Teoría de Detección de Señales*. Sin embargo, no pensamos que sea posible realizar inferencias mientras no se determine con algún valor, o rango de valores determinado, dicho estímulo.

Nuestros diagramas respaldan la distinción tradicional entre proposiciones primarias y secundarias que todavía mantenía Boole. Una vez recuperada, podemos comprender una de las diferencias fundamentales entre el silogismo aristotélico y las cadenas de enunciados complejos con los que opera la lógica simbólica. En el silogismo clásico la inferencia sigue los caminos establecidos en la génesis combinatoria del universo del discurso, es decir, que basta con las conexiones que van asociando nodos *Or* cada vez más complejos hasta la formación de objetos. Sin embargo, en razonamientos más complejos es necesario generar puentes (activadores o inhibidores) entre nodos que no están inicialmente conectados por la combinatoria, como cuando decimos que *Si hay estudiantes listos, entonces hay estudiantes que no son listos*. Concluimos nuestra tesis al iniciar la investigación de estas proposiciones secundarias, las cuales parecen estar detrás del salto que se produce al pasar de la lógica de clases a la lógica de predicados, suponiendo un aumento en la complejidad de nuestros diagramas cuyo abordaje tendremos que aplazar a futuros trabajos. Sin embargo, nos parece interesante la perspectiva que abre nuestro desarrollo diagramático al considerar que las proposiciones secundarias se refieren a correlaciones en las presencias y ausencias de nodos que no necesariamente tienen que ser nodos objeto, y que bien pueden ser nodos *Or* o incluso nodos *And*. Así podemos expresar en las redes que *cuando están en clase todos los alumnos listos están también todos los alumnos trabajadores*, y decir además que *hay alumnos que no repiten*. De este modo, desconocer qué relaciones esenciales existen entre ser listo, trabajador y no repetidor entre nuestros alumnos no nos impide aumentar nuestro conocimiento estableciendo correlaciones en las presencias de los nodos *And*. En una red bien organizada, conocer las correlaciones en las presencias y ausencias de todos los caracteres podría permitirnos "descubrir" qué tipos de objetos existen, del mismo modo que saber qué tipos de objetos existen nos permite anticipar, dada la presencia o ausencia de uno de tales objetos, la presencia o ausencia de determinados caracteres.

Es cierto que el enfoque epistémico de las redes que adoptamos en el aula nos previene de afirmar proposiciones compuestas por varios conectores encadenados. Así, cuando nosotros enseñamos los principios elementales del razonamiento crítico/científico a nuestros alumnos, evitamos emplear proposiciones cuyo contenido no pudiera ser verificado mediante ningún diseño experimental. Y aunque sea posible traducir al lenguaje natural prácticamente cualquier fórmula compleja, nosotros preferimos no utilizar en el aula sentencias que carezcan de una verdadera capacidad comunicativa.

Por otra parte, en sus inicios, la lógica matemática dejó claro que no existen diferencias lógicas entre sujetos y predicados. En nuestras redes y diagramas de Marlo la conversión de proposiciones permite que las variables puedan ejercer una u otra función indistintamente. De hecho, eliminar las diferencias entre sujetos y predicados es esencial para representar la lógica del pensamiento en nuestras redes, una lógica basada en la propagación en paralelo de la activación y la inhibición entre los nodos de un sistema que opera, como Boole pensaba, con leyes y principios que no son distintos de los que rigen la probabilidad. Sin embargo, los diagramas de Marlo no podrían comunicar los estados de la red de expectativas de forma económica y eficiente sin la vertebración gramatical de las secuencias de información. Estas secuencias gramaticales, que diferencian sujetos de predicados, permiten comprimir grandes cantidades de información potencialmente recombinables. Por ello nos parece que aún tenemos mucho que aprender del modo en el que los sistemas cognitivos se valen de la gramática a la hora de organizar y comunicar información mediante proposiciones. No obstante, debemos dejar claro que, en términos lógicos, nosotros nunca afirmaremos que únicamente corresponda a las sustancias metafísicas ocupar el lugar del sujeto en la proposición.

Estamos de acuerdo con la lógica matemática en que es necesario diferenciar datos de suposiciones, pero no estamos de acuerdo en que solo podemos obtener datos de las unidades-cosas que percibimos con los sentidos. Creemos que existe cierta confusión al otorgar únicamente realidad lógica a la cosa que es considerada una por nuestro cerebro al analizar la información de los receptores externos. Ni es realmente una la cosa vista como individuo, ni es menos uno el concepto de tal cosa pensado como género o como especie. En la vida cotidiana

intercambiamos con frecuencia las funciones de los nodos *Or* y de los nodos objeto. Sin embargo, la persistente tendencia al psicologismo nos persuade una y otra vez de que solo las cosas que vemos moverse en nuestra representación del mundo exterior son individuos reales. Y como consecuencia de ese inevitable error de la razón al que se refería Nietzsche, nos convencemos de que solo tales cosas pueden ser unidades que ocupen legítimamente el lugar central de las redes cuando tratamos de hacer ciencia. Para nosotros el nodo central de las redes es el objeto en cuestión, sea este material, social o meramente psicológico. Pensamos en sentimientos, filiaciones, números, definiciones, átomos o ladrillos, y en todos los casos lo hacemos estableciendo asociaciones más o menos universales de unos con otros en nuestras representaciones cognitivas. Las unidades centrales de la red son las auténticas protagonistas del pensamiento. Las describimos en el capítulo cinco como constituidas por una combinación de todos los criterios que conforman el universo del discurso, el cual a su vez se expande o se contrae permanentemente, adquiriendo distintos grados de generalidad o concreción en base a las posibilidades y conveniencias de la discriminación. Es decir, que el objeto central puede ser ocupado igualmente por *mamífero*, *primate*, *ser humano* o *Sócrates*, sin que se vean modificadas las leyes de la inferencia.

De los nodos centrales de la red depende el número de elementos, el resultado de la suma y de la resta, de la proporción y, seguramente, depende de ellos la totalidad de las operaciones aritméticas basadas en el conteo. Pero nos parece que esa habilidad de la red de expandir y contraer en función de los intereses el número total de elementos centrales nos confunde. Al menos así nos ocurrió a nosotros al teorizar sobre las redes por primera vez, cuando distinguimos entre objetos e individuos. Sin embargo, nuestro antiguo alumno y amigo Guillermo Címbora Acosta no entendía, con justicia, la diferencia que establecimos inicialmente entre objetos e individuos determinados espaciotemporalmente. Después de considerar su crítica detenidamente eliminamos tal división, que ahora se nos antoja únicamente psicológica, quizás ontológica o incluso epistemológica, pero en ningún caso lógica. Así, ya no vemos razón para diferenciar razonamientos que traten sobre géneros, especies e individuos, del mismo modo que no vemos justificado diferenciar proposiciones por el hecho de contener objetos concretos o conceptos generales. En todos los casos, como afirmaba Jevons, los conceptos son conceptos, y podemos justificar su jerarquía en términos de asociación "*toto*-parciales".

En relación con la carga existencial de las proposiciones universales y particulares, nunca hemos compartido la perspectiva asumida por la lógica matemática, según la cual, un hombre podría continuar tranquilamente su visita al zoo tras escuchar que todos los leones se han escapado de sus jaulas, convencido de que solo existiría un peligro real en el caso de que se hubiera escapado alguno en lugar de todos. Para nosotros la clave no está en el hecho de que una proposición sea universal o particular, sino en la intención con la que es proferida. A saber, no es lo mismo hablar de forma teórica acerca de las cosas que referirnos a las cosas que debemos tener en cuenta aquí y ahora durante la acción en curso. Así, nosotros distinguimos el uso teórico del uso fáctico de la proposición, aunque es cierto que no hemos abordado directamente la cuestión de qué uso hacemos de las proposiciones del pasado o del futuro. En todo caso, consideramos que los sistemas cognitivos no consideran los cuantificadores a la hora de valorar la urgencia con la que deben ser atendidas las presencias o ausencias que comunica una fuente de confianza.

10.3 Cuestiones fronterizas y posibles vías de desarrollo

Al exponer el marco filosófico en el que gestamos nuestros diagramas, observamos que las nuevas disciplinas que abordan procesos de razonamiento complejo como la toma de decisiones y la resolución de problemas van mucho más allá de lo que representamos hoy con el diagrama de Marlo y las redes de expectativas. Así, es evidente que no basta con establecer una relación lógica entre los medios y los fines para afirmar que es razonable adoptar ciertos medios para alcanzar ciertos fines: primero, porque no podemos juzgar la racionalidad de nuestras conductas sin haber comprendido la complejidad de las necesidades biopsicosociales a las que nos enfrentamos; segundo, porque es imposible, a priori, hacer un juicio exacto de la mayor eficiencia y rentabilidad de unas conductas sobre otras, como reiteradamente nos muestra la *Teoría de Juegos*. Por ello, desde la perspectiva de la razón vital, creemos que no está justificado afirmar que los seres humanos son irracionales porque no se ajustan, al resolver problemas o tomar decisiones, al marco normativo que establece la lógica de proposiciones o de predicados. Pues, si bien es cierto que existen sesgos y tendencias a errar en las conclusiones, al considerar la *Teoría de Detección de Señales*, nos parece que tales atajos y respuestas imprecisas no están exentas de valor adaptativo a la hora de anticipar y asumir riesgos en la vida real.

CONCLUSIONES

Es evidente que las creencias y expectativas de las personas están condicionadas por la experiencia, por sus necesidades e incluso por la información que reciben de terceras personas. No podemos afirmar que gozamos del mejor de los diseños cognitivos posibles. Sin embargo, sí nos atrevemos a decir que la selección natural ha premiado el desarrollo de formas económicas de procesamiento cognitivo. Sabemos que la precisión tiene un coste en términos de procesamiento cognitivo y sabemos que un individuo puede obtener suculentos beneficios sociales de la conformidad con las creencias de su grupo.

Los sistemas cognitivos parecen estar al servicio de las necesidades del organismo, de los grupos con los que dichos organismos mantienen relaciones cara a cara y de las comunidades de grupos en las que conviven extraños. Por ello, la universalidad de la razón no puede buscarse en la diversidad de creencias, de gustos, de valores y preferencias, ni puede buscarse en la multiplicidad de puntos de vista. Los intereses de individuos, grupos y comunidades no siempre convergen y no existe representación de la realidad que esté libre de intereses.

Nosotros buscamos la universalidad de la razón y de los principios de la lógica en las necesidades de la comunicación, al margen de consideraciones metafísicas y ontológicas sobre la verdad y la realidad. Y lo hacemos convencidos de que el dato radical es el hecho de que nuestros sistemas cognitivos, ya sea con intención de educar y/o manipular, están diseñados a priori para compartir información. Es irrelevante para nosotros que existan *a posteriori* creencias, pensamientos o emociones incomunicables entre culturas, una vez que los sistemas cognitivos han conformado sus marcos de referencia de un modo dispar. Lo relevante para nosotros es que, por definición, cualquier *meme* cultural es comunicable *a priori* o no es cultura.

En este sentido, nuestras redes permiten comprender que es preciso convenir en primer lugar los componentes del universo del discurso. Así debemos aclarar con qué criterios juzgamos un estímulo y en cuántos grados de ser dividimos nuestras escalas de ajuste a dichos criterios. Las redes afrontan con las mismas reglas lógicas universos del discurso formados por cualquier combinación de variables, al margen de que estas sean dicotómicas, tricotómicas o tengan cualquier otro grado de complejidad en los grados de ser.

Así, entendemos la lógica como la estructura que subyace a la comunicabilidad de la información y entendemos por información, siguiendo preceptos elementales de la psicología del aprendizaje, cualquier diferencia que permita la discriminación de una señal, siendo dicha discriminación únicamente observable en términos de especificidad de la respuesta. Así, cualquier estímulo percibido como alteración del campo perceptivo, externo o interno, puede servir como signo cuando su presencia se asocia de forma constante con un movimiento específico del pensamiento. Recordemos que, para una mejor adecuación de nuestras respuestas a las señales del medio, es tarea del pensamiento reorganizar permanentemente nuestra representación de la realidad a la experiencia propia o ajena.

Como explicamos en el marco filosófico, consideramos nuestra representación de la realidad, siguiendo a Ortega y Gasset, única e intransferible en términos absolutos, siendo la lógica el elemento que subyace a cada uno de los puntos de vista permitiendo su integración. Estamos convencidos de que la comunicabilidad es una característica inmanente a la información que manejan los organismos vivos incluso a nivel molecular, y que el modo en el que dicha información se aprovecha y se transmite tiene que ver con la codificación en términos cuantitativos de la regularidad con la que se presentan las presencias y ausencias de una diferencia (en el estado del organismo, del medio, o de la interacción organismo medio) asociadas con las presencias y ausencias de otras diferencias. De este modo, creemos que las teorías sobre la cuantificación del predicado, desarrolladas fundamentalmente en el siglo XIX, nos aproximan de un modo más exacto a la naturaleza profunda de la proposición, entendida esta como codificación comunicable de una relación aprendida entre dos variables durante la filogénesis y/o la ontogénesis. De este modo, no existen diferencias para nosotros entre las leyes de la razón y del aprendizaje, al margen de los procesos de síntesis y exclusión que subyacen a la comunicación y que son, posiblemente, realizados en módulos específicos de nuestro cerebro relacionados con el lenguaje. En todo caso, no disponemos de evidencia de que las células *Or* y *And* que postulan nuestras redes de expectativas existan realmente en nuestras redes neuronales. Igualmente, solo podemos especular, por ahora, con la existencia de células que sinteticen o excluyan segmentos de información formando parte de macroprocesos de codificación y decodificación de las proposiciones lógicas semejantes a los que tienen lugar durante la inferencia en los diagramas de Marlo.

Diseñamos las redes de expectativas confiando en que, tal vez, podrían contribuir en un futuro próximo a mejorar los modelos de procesamiento cognitivo y, de hecho, creemos que percatarnos de que la conjunción no es un

conector que suprima posibilidades, como lo hacen la disyunción o el condicional, permite simplificar los modelos en red del razonamiento lógico. Nosotros podemos expresar los conectores que realmente eliminan posibilidades simplemente eliminando nodos objeto de la red. Luego representamos la conjunción mediante cargas de activación que se propagan por los nodos que subsisten. No tenemos ninguna duda, por ejemplo, de que la representación de la disyunción exclusiva en nuestras redes es mucho más sencilla que las representaciones con capas ocultas de dicho conector que conocimos en 2013 al estudiar Psicología.

Igualmente, creemos que podría facilitar la simulación del funcionamiento de las redes neuronales distinguir entre procesos excitatorios en la propagación de la verdad y procesos inhibitorios en la propagación de la falsedad. Nuestra calculadora lógica opera con rigor y exactitud procesando por separado la verdad y la falsedad antes de generar valores integrados en el resultado; esto nos convence de que es posible suponer que en las redes de nuestro cerebro las proposiciones afirmativas producen una activación electroquímica, mientras que las proposiciones negativas producen un efecto inhibitorio.

Además, nos parece factible complicar las redes hasta el punto de incluir en ellas el efecto de los intereses en términos de potenciación de determinados nodos en detrimento de otros. Así, nos gustaría alcanzar un modelo de razonamiento que pueda reproducir sesgos típicos como el de disponibilidad o el de confirmación, y que incluso pueda recrear la génesis de pensamientos delirantes. Y haríamos esto especulando con hipótesis tan sugerentes como la de que un nodo poco probable, situado en el área de una necesidad importante para el sistema, puede imponerse a un nodo altamente probable cuya área de red goza de menor voltaje por una cuestión de intereses o algún tipo de inhibición anestésica.

Nosotros distinguiríamos la cualidad de la verdad de un nodo, o su color de verdad, de la potencia con la que dicho nodo sobresale del resto de los nodos activados. Así, podemos imaginar activas al mismo tiempo todas las redes que soportan nuestros sistemas de creencias, pero con una intensidad variable en función de la urgencia de las necesidades que deben ser atendidas. Incluso podemos especular con la idea de que solo a partir de cierto grado de energización podría una célula hacer llegar su información a las áreas de la corteza prefrontal, donde parecen tener lugar los procesos conscientes de toma de decisiones.

Podemos terminar concluyendo que los diagramas y redes de expectativas Marlo, aun siendo originales en su forma de representar los procesos de la inferencia, no son más que otro punto de vista entre las muchas propuestas que pretenden hoy facilitar gráficamente la comprensión de los procesos del razonamiento. En todo caso, a día de hoy, abarcan menos campo que los diagramas de Peirce y afrontan cuestiones muy elementales en relación a las que aborda la *Conceptografía* de Frege. Sin embargo, ningún sistema diagramático de representación propuesto históricamente apareció como sistema lógico completo, consistente y perfectamente acabado, del mismo modo que no existe ningún sistema lógico, ni gráfico ni proposicional, capaz de explicarlo todo.

Es nuestra intención seguir desarrollando y contrastando nuestra propuesta en el aula, tal y como como venimos haciendo desde el año 2011, cuando empezamos a esbozar los diagramas de Marlo. Confiamos en que nuestros diagramas y redes, a pesar de poseer todas las limitaciones propias de la juventud y todas las dificultades que acompañan a la novedad, puedan resultar útiles a otros que los encuentren de su interés y decidan usarlos, bien en la didáctica de las cuestiones más elementales de la lógica, bien en la búsqueda de nuevas bases para la comprensión de los complejos procesos del razonamiento.

11 BIBLIOGRAFÍA

Abarca, M. (2008). La escritura como proceso: metodología para la enseñanza de la expresión escrita en español como segunda lengua. Revista de Filología y Lingüística de la Universidad de Costa Rica, 34(1), 127-141. Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/filyling/article/view/1653

Abeles, F. F. (2007). Lewis Carroll's visual logic. History & Philosophy Of Logic, 28(1), 1-17. https://doi.org/10.1080/01445340600704481

Abitbol, P., & Botero, F. (2005). Teoría de la elección racional: estructura conceptual y evolución reciente. Colombia Internacional, 62, 132-145. https://doi.org/10.7440/colombiaint62.2005.08

Abril, A. A. (2001). Fundamentos biológicos de la conducta (Vol. 2). Madrid: Sanz y Torres.

Aguado-Aguilar, L. (2001). Aprendizaje y memoria. Revista de neurología, 32(4), 373-381. https://doi.org/10.33588/rn.3204.2000154

Aguiar González, F. (2004). Teoría de la decisión e incertidumbre: modelos normativos y descriptivos. Empiria. Revista de metodología de ciencias sociales (8), 139-160. https://doi.org/10.5944/empiria.8.2004.982

Aguilera, J., García, M., & Cáceda, G. (2017). La familia como determinante social del intento de suicidio en adultos jóvenes: una mirada desde la complejidad. Revista Ciencia y Tecnología, 12(1), 161-175.

Ahumada, J. (1999). Representación de problemas y representaciones visuales. Selección de trabajos de las IX jornadas. En E. Sota, L. Urtubey (eds.). Epistemología e Historia de la Ciencia, Vol. 5, N° 5, (pp. 8-15). Argentina: Área lógico-epistemológica de la Escuela de Filosofía Centro de Investigaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades Universidad Nacional de Córdoba.

Aiello, L. C., & Wheeler, P. (1995). The expensive-tissue hypothesis – The brain and the digestive-system in human and primate evolution. Current Anthropology, 36(2), 199-221. http://dx.doi.org/10.1086/204350

Albarracín, T. A. (1983). La teoría celular: historia de un paradigma. Madrid: Alianza Editorial.

Alemany, F. S. (1998). Hacia la lógica plástica: emergencia de la lógica del razonamiento visual. Contextos, 16 (31-32), 281-296.

Allwein, G., & Barwise, J. (1996). Logical reasoning with diagrams. New York: Oxford University Press.

Amaya, J. F. (2014). El cambio modal de Ch. S. Peirce: pragmaticismo y posibilidad real. Praxis Filosófica (38), 107-121. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/2090/209031199006.pdf

BIBLIOGRAFÍA

Ambrosio, C., & Campbell, C. (2017). The Chemistry of Relations: Peirce, Perspicuous Representations and Experiments with Diagrams. En R. Kenneth Atkins (ed.). Hull, Peirce on Perception and Reasoning: From Icons to Logic (pp.86-106). New York: Routledge.

Anderson, D. R. (1995). Strands of system: the philosophy of Charles Peirce. West Lafayette: Purdue University Press.

Anderson, J. R., Albert, M. V., & Fincham, J. M. (2005). Tracing problem solving in real time: fMRI analysis of the subject-paced Tower of Hanoi. Journal of cognitive neuroscience, 17(8), 1261-1274. https://doi.org/10.1162/0898929055002427

Anellis, I. H., & Abeles, F. F. (2016). The historical sources of tree graphs and the tree method in the work of Peirce and Gentzen. En Modern Logic 1850-1950, East and West (pp. 35-97). Birkhäuser, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24756-4_3

Angulo, T. Á., & Bravo, R. R. (2006). Teorías o modelos de producción de textos en la enseñanza y el aprendizaje de la escritura. Didáctica (lengua y literatura), 18, 29-60.

Anta, J. Á. (2012). Detección del engaño: polígrafo vs análisis verbo-corporal. Quadernos de criminología: revista de criminología y ciencias forenses (19), 36-46.

Aprile, P. (2006). Elogio del imbécil: el imparable ascenso de la estupidez. Madrid: Temas de Hoy.

Arbós, X., & Giner, S. (1993). La gobernabilidad: ciudadanía y democracia en la encrucijada mundial. Madrid: Siglo XXI de España.

Ardila, A., & Rosselli, M. (2002). Acalculia and dyscalculia. Neuropsychol Review. 12(4), 179-231. https://doi.org/10.1023/A:1021343508573

Argyle, M. (1972). Non-verbal communication in human social interaction. En R. Hinde, Non-verbal communication. Oxford, England: Cambridge U. Press.

─ (1982). Intercultural communication. En S. Bochner (ed.). Cultures in contact: Studies in cross-cultural interaction (pp. 61–80). Oxford: Pergamon

─ (1988). Bodily communication. London: Methuen.

Aristóteles, & Calvo, M. T. (1983). Acerca del alma. Madrid: Gredos.

Aristóteles, & Candel, S. M. (1982). Tratados de lógica (Órganon), Vol. I. Madrid: Gredos.

─ (1995). Tratados de lógica. (Órganon), Vol. II. Madrid: Gredos.

Aristóteles, Euclides, & Ortiz, G. P. (2000). Sobre las líneas indivisibles. Mecánica. Euclides. Madrid: Gredos.

Aristóteles, & García Yebra, V. (1974). Edición trilingüe Poética de Aristóteles (5º ed.). Madrid: Gredos.

─ (1987). Metafísica. Madrid: Gredos.

Aristóteles, & Ross (1957). Aristotle's prior and posterior analytics. Oxford: The Clarendon Press

Arnaiz, G. (2007). Evolución de los talleres filosóficos: de la filosofía para niños a las nuevas prácticas filosóficas. Childhood & philosophy, 3(5), 35-57.

Arnauld, A., &. (1850). Logic, or, The art of thinking: Being the Port-Royal logic. Edinburgh: Sutherland and Knox. Recuperado de http://www.shayashi.jp/courses/2015/getu5kouki/artofthinking00arnauoft.pdf

BIBLIOGRAFÍA

Arredondo, N. L., Sañudo, J. P., Barros, C. A., Acosta, F. J., & Aguirre-Acevedo, D. (2016). Efectividad de un programa de prevención en salud mental mediante el diálogo socrático y el pensamiento crítico. Salud Uninorte, 32(1), 11-24. http://dx.doi.org/10.14482/sun.32.1.8516Arroyo, J. M. (1982). Lógica escolástica postsumulista (1550-1950) (1). Boletín Millares Carlo, (6), 337-458.

Atwatek, L. (1867). Manual of elemntary logic designed especially for the use of teachers and learners. Philadelphia J. B.: Lippincott & CO.
Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=33YBAAAAYAAJ&hl=es&pg=GBS.PP1

Austin, J. L. (1975). How to do things with words (Vol. 88). Oxford University Press.

Avila-Rojas, H. S.Z., & Pérez-Neri, I. (2016). Sistemas de neurotransmisión, alteraciones neuroanatómicas y muerte celular en la esquizofrenia: actualización y perspectivas. Investigación Clínica, 57(2), 217-230.

Ayala Martínez, J. M. (2003). El derecho natural antiguo y medieval. Revista Española de Filosofía Medieval, 10, 377-386.

Aznar, M.B.L. (2014a). Cálculo lógico de modelos proposicionales: la revolución del silogismo en el diagrama de Marlo. Pamplona: Círculo Rojo.

─ (2014b). Niños resolviendo silogismos en el diagrama de Marlo [Archivo de vídeo].
Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=6blBu1EN_EM

─ (2015). Adiós a bArbArA y Venn. Lógica de predicados en el diagrama. Paideia. Revista de Filosofía y didáctica filosófica 35(102), 35-52.

─ (2016a). Estructura formal de los sistemas cognitivos desde el diagrama de Marlo. En C. Alcaide, H. Bustince, & F. J. Fernández (eds.). Libro de Resúmenes del XVIII Congreso Español sobre tecnologías y Lógicas fuzzy (pp. 108-109). Donostia-San Sebastián, España.

─ (2016b). Innovación didáctica de la lógica: el diagrama de Marlo. En Teresita Mijangos (coord.), Rutas didácticas y de investigaciónen lógica, argumentación y pensamiento crítico (pp. 105-154). Academia Mexicana de la Lógica. Recuperado de:
https://www.academia.edu/31603078/Libro_Rutas_Didacticas_y_de_Investigacion_en_Logica_2016

─ (2016c). Lógica de predicados en el diagrama de Marlo, cuando razonar se convierte en un juego de niños. En Rafael V. Orden Jiménez; Juan José García Norro; Emma Ingala Gómez (eds.). Diotima o de la dificultad de enseñar filosofía (pp.335-356). Madrid: Escolar y Mayo.

─ (2017a). Redes de expectativas Marlo: el conjunto como base de la inferencia. En A. Campillo & D. Manzano (coord.). Actas II Congreso Internacional de la Red Española de Filosofía. (Vol.VII, pp. 9-24). Madrid: REF. Recuperado de http://redfilosofia.es/congreso/wp-content/uploads/sites/4/2017/07/Vol-VII.pdf

─ (2017b). Ser y estar en las redes de conocimiento: Resolución de problemas lógico matemáticos. En A. Campillo & D. Manzanero (coord.). Actas II Congreso Internacional de la Red española de Filosofía. (Vol. VII, pp. 25-39). Madrid: REF. Recuperado de http://redfilosofia.es/congreso/wp-content/uploads/sites/4/2017/07/Vol-VII.pdf

─ (2018a). El Diagrama de Marlo, una alternativa para trabajar la inteligencia lógico matemática. En FESPM (ed.). Libro de actas VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM) (pp. 202-211). Madrid. Recuperado de http://cibem.org/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_Posters.pdf

─ (2018b). Redes de expectativas lógico-matemáticas, una herramienta para el desarrollo del razonamiento. En FESPM (ed.). Libro de actas VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM) (pp. 283-293). Madrid. http://cibem.org/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_Posters.pdf

─ (2018c) Desarrollo del pensamiento crítico con circuitos lógico bayesianos. En FEDER. VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM). Madrid.

─ (2018d). Codificación lógica de expectativas en el Diagrama de Marlo. En A. Cuevas Badallo, O. Torres Gonzáles, R. López Orellana, & D. Labrador Montero (eds.). Cultura científica y cultura tecnológica: Actas del IV Congreso Iberoamericano de Filosofía de la Ciencia y la Tecnología (Vol. 250, pp. 477-484). Ediciones Universidad de Salamanca.
Recuperado dehttps://play.google.com/books/reader?id=xpR_DwAAQBAJ&hl=es&pg=GBS.PT476

─ (2018e). Propuesta de un modelo inferencial de expectativas en red. En A. Cuevas Badallo, O. Torres González, R. López Orellana, & D. Labrador Montero (eds.). Cultura científica y cultura tecnológica: Actas del IV Congreso Iberoamericano de Filosofía de la Ciencia y la Tecnología (Vol. 250, pp. 485-492). Ediciones Universidad de Salamanca. Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=xpR_DwAAQBAJ&hl=es&pg=GBS.PT484

─ (2018f). Inferencia lógico-matemática en redes Marlo. En A. C. Badallo, O. T. González, R. L. Orellana, & D. L. Montero (eds.). Cultura científica y cultura tecnológica: Actas del IV Congreso Iberoamericano de Filosofía de la Ciencia y la Tecnología (Vol. 250, pp. 493-500). Ediciones Universidad de Salamanca. Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=xpR_DwAAQBAJ&hl=es&pg=GBS.PT492

─ (2018g). Visual reasoning in the Marlo diagram (Vols. Vol-2116). (Y. Sato, & Z. Shams, Edits.) ceur-ws.org. Recuperado de http://ceur-ws.org/Vol-2116

─ (2020a). Syllogisms with Intermediate Quantifiers Solved in Marlo Logic diagrams. En A.-V. Pietarinen et al. (eds.). Diagrams 2020, LNAI 12169 (pp 473-476). Switzerland AG. Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54249-8_37

─ (2020b). The Indemonstrables of Chrysippus of Soli in Marlo Logical Diagrams. Could Propositional Calculus Be Nothing but Syllogisms? En A.-V. Pietarinen et al. (eds.). Diagrams 2020, LNAI 12169 (pp 477-480). Switzerland AG. Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54249-8_38

─ (2020c) The Marlo Diagram in the Classroom. En A.-V. Pietarinen et al. (eds.). Diagrams 2020, LNAI 12169 (pp 490-493). Switzerland AG. Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54249-8_41

─ (2020d) Marlo's Networks of Expectations in the Classroom: A Tool for Heterogeneous Reasoning. En A.-V. Pietarinen et al. (eds.). Diagrams 2020, LNAI 12169 (pp 503-506). Switzerland AG. Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54249-8_44

Bacon, F. (1620). The new organon or true directions concerning the interpretation of nature. Recuperado de http://www.constitution.org/bacon/nov_org.htm

Baddley, A. (1994). Las memorias humanas. Mundo científico. (Especial monográfico: la memoria). Oct. 14(150), 802-807.

Baer, D. M., & Sherman, J. A. (1964). Reinforcement control of generalized imitation in young children. Journal of Experimental Child Psychology, 1(1), 37-49. http://dx.doi.org/10.1016/0022-0965(64)90005-0

Baldwin, J. M. (1901). Dictionary of Philosophy and Psychology (Vol. 1). New York: Macmillan.

Ballard, D. H., Hayhoe, M. M., Pook, P. K., & Rao, R. P. (1997). Deictic codes for the embodiment of cognition. Behavioral & Brain Sciences, 20(4), 723–767.

Bandura, A. (1962). Social learning through imitation. En M. R. Jones (ed.). Nebraska Symposium on Motivation (pp. 211-269). Lincoln, NE: University of Nebraska Press.

─ (1965). Influence of models' reinforcement contingencies on the acquisition of imitative responses. Journal of Personality and Social Psychology, 1(6), 589-595. http://dx.doi.org/10.1037/h0022070

─ (1969). Social-Learning Theory of Identificatory Processes. En D. A. Goslin (ed.). Handbook of Socialization Theory and Research (pp. 213-262). Chicago, IL: Rand McNally & Company.

Bara, B. G., Bucciarelli, M., & Johnson-Laird, P. N. (1995). Development of syllogistic reasoning. The American journal of psychology, 108(2), 157-193. http://dx.doi.org/10.2307/1423127

BIBLIOGRAFÍA

Baratgin, J., & Politzer, G. (2010). Updating: A psychologically basic situation of probability revision. Thinking & Reasoning, 16(4), 253-287. https://doi.org/10.1080/13546783.2010.519564

Baratgin, J., Over, D. E., & Politzer, G. (2013). Uncertainty and the de Finetti tables. Thinking & Reasoning, 19(3/4), 308-328. https://doi.org/10.1080/13546783.2013.809018

Barker, R. G. (1968). Ecological psychology: concepts and methods for studying the environment of human behavior. Stanford, CA: Stanford University Press.

Barker-Plummer, D., & Bailin, S. (1997). The Role of Diagrams in Mathematical Proofs. Machine Graphis and vision. (Special Issue on Diagrammatic Representation and Reasoning), 6(1), 25-56.

Barkow, H., J., Cosmides, L., & Tooby, J. (1992). The Adapted Mind: Evolutionary Psychology and the Generation of Culture. New York: Oxford University Press.

Baron, E. M. (1969). A Note on the Historical Development of Logic Diagrams: Leibniz, Euler and Venn. The Mathematical Gazette, 53(384), 113-125. https://doi.org/10.2307/3614533

Barracal Mairal, J. (2006). Las terapias conductuales de tercera generación. ¿Parientes políticos o hermanos carnales? EduPsykhé. Revista de Psicología y Educación, 5(2), 145-157.

Barrantes, H. (2006). Matemáticas y razonamiento plausible. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 1(1), 47-60.

Barraza Ibarra, J. (2011). El desarrollo de la escritura en las primeras civilizaciones. Realidad y reflexión, 9(31), 94-110. Recueprado de http://hdl.handle.net/10972/3228

Barrena, S. (2006). La creatividad en Charles S. Peirce. Anthropos. Huellas del conocimiento, (212), 112-120. Recuperado de http://www.unav.es/gep/BarrenaAnthropos2.html

Barrena, S., & Nubiola, J. (2007). Charles Sanders Peirce. En F. Fernández Labastida, & J. A. Mercado (eds.). Philosophica: Enciclopedia filosófica on line. http://doi.org/10.17421/2035_8326_2007_SBA_1-1

Bartlett, F. C., & Bartlett, F. C. (1995). Remembering: A study in experimental and social psychology (Vol. 14). New York: Cambridge University Press.

Bartlett, M. S. (1945). Negative probability. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 41(1), 71-73. http://dx.doi.org/10.1017/S0305004100022398

Bartolotta, M. C. (2017). Teoría del color en el arte contemporáneo. Su vinculación con la textura y el material. Arte e Investigación (13), 40-48.

Barwise, J. (1993). Heterogeneous reasoning. En B. M. G. Mineau, ICCS. Conceptual Graphs for Knowledge Representation, Lecture Notes in Artificial Intelligence (Vol. 699, pp. 64-74). Berlin: Springer Verlag.

Barwise, J., & Etchemendy, J. (1991a). Information, infons and inference. En Cooper, R., Mukai, K., Perry, J., Barwise, J., Aczel, P., & Conference on Situation Theory and its Applications (vol 2, pp. 33-78) Stanford, Calif: Center for the Study of Language and Information.

— (1991b). Tarski's World 3.0 Including the Macintosh Program. [1º ed.: Santa Barbara: Academic Courseware Exchange (1987). Stanford; CSLI and Cambridge: Cambridge University Press. 1º ed. como software para Macintosh (1991), 111+xv; 2º ed. como software para IBM (1993), 122+xviii.

— (1996). Visual Information and Valid reasoning. En G. Allwein & J. Barwise (eds.). Logical reasoning with diagrams (pp. 3-25). New York, NY, USA: Oxford University Press.

Barwise, J., & Shimojima, A. (1995). Surrogate Reasoning. Cognitive Studies: Bulletin of Japanese Cognitive Science Society, 4(2), 7-27.

Bass, B. M. (1985). Leadership and Performance Beyond Expectations. New York: Free Press.

─ (1981). Stogdill's Handbook of Leadership: A Survey of Theory and Research. New York: Free Press.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar, 1-17.
Recuperado de https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/ConferenciaThales2006.pdf

Battro, A. M., Fischer, K. W., & Léna, P. (2016). El Cerebro educado: Ensayos sobre la neuroeducación. Barcelona: Gedisa.

Bayes, T. (1763). LII. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. By the late Rev. Mr. Bayes, FRS communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, AMFR S. Philosophical transactions of the Royal Society of London (53), 370-418. https://doi.org/10.1098/rstl.1763.0053

Baynes, T. S. (1850). An essay on the new analytic of logical forms: Being that which gained the prize proposed by Sir William Hamilton, in the year 1846, for the best exposition of the new doctrine propounded in his lectures; with an historical appendix. Edinburgh: Sutherland and Knox.
Recuperado de https://archive.org/details/essayonnewanalyt00baynrich

─ (1872). MR. Herbert Spencer on sir WM. Hamilton and the quantification of the predicate. The Contemporary review 1866-1900, 21, 796-798.
Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=h_QIAAAAIAAJ&hl=es&pg=GBS.PP8

Beer, R. D. (1995). A dynamical systems perspective on agent- environment interaction. Artificial Intelligence, 72, 173–215. https://doi.org/10.1016/0004-3702(94)00005-L

Bejarano, A. R. (2017). La lingua characteristica: el proyecto lógico de Gottlob Frege. Agora: papeles de Filosofía, 36(1). https://doi.org/10.15304/ag.36.1.3315

Belinchón, C. M., Igoa, G. J., & Rivière, A. (2009). Psicología del lenguaje: Investigación y teoría. Madrid: Trotta.

Bell, F. (2011). Connectivism: Its place in theory-informed research and innovation in technology-enabled learning. The International Review of Research in Open and Distributed Learning, 12(3), 98-118. Recuperado de https://www.learntechlib.org/p/49669/

Bellodi, E., & Fabrizio Riguzzi, F. (2013). Expectation maximization over binary decision diagrams for probabilistic logic programs. Intelligent Data Analysis. 17 (2), 343-363. https://doi.org/10.3233/IDA-130582

Bellucci, F., & Pietarinen, A. (2016). Existential graphs as an instrument of logical analysis: Part I. Alpha. The Review of Symbolic Logic, 9(2), 209-237. https://doi.org/10.1017/S1755020315000362

Bellucci, F., Moktefi, A., & Pietarinen, A. V. (2014). Diagrammatic Autarchy: Linear diagrams in the 17th and 18th centuries. CEUR Workshop Proceedings (vol. 1132, pp. 31-35). Recuperado de http://ceur-ws.org/Vol-1132/paper4.pdf

Bennet-Clark, H. (1970). The mechanisms and efficiency of sound production in mole crickets. Journal of Experimental Biology, 52(3), 619-652.

Bentham, G. (1827). Outline of a new system of logic whit a critical examination of Dr. Whatley's "Elements of logic". London: Hunt and Clarke.

Berger, P. L., & Luckmann, T. (1989). La construcción social de la realidad. Buenos Aires: Amorrortu.

Bergson, H. (1963). La evolución creadora. En H. Bergson, & J.A. Miguez. Obras escogidas. Biblioteca Premios Nobel. Madrid: Aguilar.

Berkeley, G., & Cogolludo, C.M. (1990). Tres diálogos entre Hilas y Filonús. Madrid: Alianza Editorial.

Berkeley, G., & Fuentes B. M. (1980). Ensayo sobre una nueva teoría de la visión. Buenos Aires: Aguilar.

Berkeley, G., & González, V. F. (1948). Tratado sobre el conocimiento humano. Buenos Aires: Espasa Calpe.

BIBLIOGRAFÍA

Berlyne, D. (1975). Behaviorism? Cognitive Theory? Humanistic Psychology? To Hull with them all. Canadian Psychology Review, 16(2), 69-80.

Bermejo Barrera, J. C. (2004). Mito y Filosofía. En C. García Gúal, Historia de la Filosofía Antigua (pp. 21-44). Madrid: Trotta, S.A.

Bermúdez, M. J. (2012). Psicología de la personalidad. Madrid: UNED.

Bernhard, P. (2001). Euler-Diagramme. Zur Morphologie einer Repräsentationsform in der Logik. Paderborn: Mentis.

Bernstein, D. A., & Nietzel, M. T. (2011). Introducción a la psicología clínica. México: McGraw-Hill Interamericana.

Berry, G. D.W. (1952). Peirce's contributions to the logic of statements and quantifiers. En P.P. Wiener & F.H. Young (eds.) Studies in the philosophy of Charles Sanders Peirce (153-165). Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Birdwhistell, R. L. (1979). El lenguaje de la expresión corporal. Barcelona: Gustavo Gili.

Blanco Martín, C. (2005). El Constructivismo Biológico: ¿Una alternativa al realismo? Cinta de Moebio. Revista de Epistemología de Ciencias Sociales, 22, 73-82.
Recuperado de https://revistas.uchile.cl/index.php/CDM/article/view/26086/27391

Blanco Martín, C. (2010). Biosemiótica, constructivismo e inconsciente colectivo. Paideia: Revista de filosofía y didáctica filosófica, 31(89), 283-294.

Blanco, E. C. (2010). Derechos humanos: del iusnaturalismo clásico al iusnaturalismo moderno. Revista logos ciencia y tecnología, 2(1), 58-70. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=517751798005

Block, N. (1983). Mental pictures and cognitive science. The Philosophical Review, 92(4), 499-541.

─ (1981). Imagery. Cambridge, MA: MIT Press.

Boas, F. (1993). Las limitaciones del método comparativo de la antropología. En P. Bohannan, & M. Glazer & R.M.J. Buxó. Antropología: Lecturas (pp. 85-93). Madrid: McGraw-Hill.

Bobzien, S. (2016). Ancient Logic. En The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 edition) ed. Edwar N. Zalta. Stanford University Recuperado de https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logic-ancient/

Bochenski, J. M., & Bravo, L. M. (1985). Historia de la Lógica formal. Madrid: Gredos.

Böcherer-Linder K., Eichler A., Vogel M., (2018). Visualising Conditional Probabilities—Three Perspectives on Unit Squares and Tree Diagrams. En Batanero, C., & Chernoff, E. J. (eds.). Teaching and Learning Stochastics. Advances in Probability Education Research (pp.73-88). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_5

Bode, S., He, A., Soon, C., Trampel, R., Turner, R., & Haynes, J.-D. (2011). Tracking the Unconscious Generation of Free Decisions Using UItra-High Field fMRI. PLoS ONE, 6(6): e21612.
https://doi.org/10.1371/journal.pone.0021612

Boeri, M. D. (1997). Aristóteles, el estoicismo antiguo y lo que depende de nosotros. Méthexis, 10(Issue 1), 161–172. https://doi.org/10.1163/24680974-90000279

Booch, G., Rumbaugh, J., & Jacobson, I. (1999). The Unified Modeling Language Reference Manual (Vol.2). Reading, Mass: Addison-Wesley.

Boole, G. (1847). The Mathematical Analysis of logic. Bein an essay towards a calculus of deductive reasoning. London: Macmillan, Barclay, & Macmillan. Recuperado de http://www.gutenberg.org/ebooks/36884

BIBLIOGRAFÍA

─ (1854). An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. New York: Dover.

─ (2017). An Investigation of the Laws of Thought. Project Gutenberg. Recuperado de http://www.gutenberg.org/files/15114/15114-pdf.pdf?session_id=77163d5e57220559bac2d728c41024fb4ca043d7

Bosley, R. (2013). The Geometry of Diagrams and the Logic of Syllogisms. En A. M.-J. Shin (ed.). Visual reasoning with diagrams (pp. 42-55). Springer Basel.

Botella, L., & Corbella, S. (2005). Neurobiología de la autorregulación afectiva, patrones de apego y compatibilidad en la relación terapeuta-paciente. Revista de psicoterapia, 61(16), 77-104.

Braine, M. D.S., Reiser, B. J., & Rumain, B. (1984). Some empirical justification for a theory of natural propositional logic. En Psychology of learning and motivation (Vol. 18, pp. 313-371). Academic Press.

Braine, M.D.S., & O' Brien, D. (1998). Mental logic. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Brandt, S. A., & Stark, L. W. (1977). Spontaneous Eye Movements during Visual Imagery Reflect the Content of the Visual Scene. Journal of Cognitive Neurosciene, 9(1), 27–38. https://doi.org/10.1162/jocn.1997.9.1.27

Brazil, M., Graham, R. L., Thomas, D., & Zachariasen, M. (2014). On the history of the Euclidean Steiner tree problem. Archive for History of Exact Sciences, 68, 327-354. https://doi.org/10.1007/s00407-013-0127-z

Brenifier, O., & Arnaiz, G. (2011). Filosofar como Sócrates: Introducción a la práctica filosófica. Valencia: Diálogo.

Brillouin, L. (1962). Science and information theory. Academic Press: London.

Brofenbrenner, U. (1960). Freudian theories of identification and their derivatives. Child Development, 31, 15-40. https://doi.org/10.2307/1126378

─ (1979). The ecology of human development. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Brown, A. H. (2005). Principios de neurología, de Adams y Víctor (8ª ed.). México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana.

Brumm, G. L. (1962). The method of possibility-diagrams for testing the validity of certain types of inferences, based on Jevons' logical alphabet. Notre Dame J. Formal Logic, 3(4), 209-233. https://doi.org/10.1305/ndjfl/1093957315

Bruner, J. (2001). Realidad mental y mundos posibles: Los actos de la imaginación que dan sentido a la experiencia. Barcelona: Gedisa Editorial.

Bruner, J. (2006). Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva. Madrid: Alianza Editorial.

Bruno Ramos, M. (2013). Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico en Venn. En O. M. Esquisabel, & F. T. Sautter (eds.). Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico. Historia y teoría. Buenos Aires: Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires.

Bucciarelli, M., & Johnson-Laird, P. (1999). Strategies in syllogistic reasoning. Cognitive Science, 23, 247–303.

Buck, G., & Hunka, S. (10 de 1999). W. Stanley Jevons, Allan Marquand, and the origins of digital computing. IEEE Annals of the History of Computing, 21(4), 21 - 27. https://doi.org/10.1109/85.801529

Bueno, G. (2018). Symploké: Discontinuismo / Pluralismo radical / Monismo continuista / Ateísmo terciario. Diccionario filosófico. Recuperado de http://www.filosofia.org/filomat/df054.htm

Bugental, J. F. (1964). The third force in psychology. Journal of Humanistic Psychology, 4(1), 19-26. https://doi.org/10.1177/002216786400400102

BIBLIOGRAFÍA

Bühler, K. (1990). Theory of language: The representational function of language. Amsterdam: J. Benjamins

Burks, A. R., & Burks, A. W. (1989). The first electronic computer: The Atanasoff story. Ann Arbor: University of Michigan Press.

Burris, S., & Legris, J. (2015). The Algebra of Logic Tradition. En The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring edition), ed. Edwar N. Zalta. Stanford University.
Recuperado de http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/algebra-logic-tradition/

Burton, J., & Stapleton, G. (2015). Special issue on Euler and Venn Diagrams: Guest Editors' introduction. Journal of Logic, Language and Information, 24(4), 357–359. https://doi.org/10.1007/s10849-015-9226-3

Byrne, R., & Russon, A. (1998). Learning by imitation: A hierarchical approach. Behavioral and Brain Sciences, 21(5), 667-684. https://doi.org/10.1017/S0140525X98001745

Cabello Quintero, A. (2000). Introducción a la lógica cuántica. Arbor, 167(659-660), 489-507. https://doi.org/10.3989/arbor.2000.i659-660.1178

Cabrera, C. E. (2017). Pensamiento y escritura, el desafío para los docentes de ciencias. Ciencia y Sociedad, 42(2), 77-83. http://dx.doi.org/10.22206/cys.2017.v42i2.pp77-83

Cáceres, R. D. (2011). Reseña de "oralidad y escritura. tecnologías de la palabra" de Walter J. Ong. Razón y palabra, 75. Recuperado de http://razonypalabra.org.mx/N/N75/monotematico_75/14_Dominguez_M75.pdf

Calderón, D. (2005). Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas (Tesis Doctoral), Universidad del Valle, Cali.

─ (2012). El lenguaje en las matemáticas escolares. Perspectivas en la didáctica de las matemáticas, 79-107.

Caldwell, C., & Whiten, A. (2002). Evolutionary perspectives on imitation:is a comparative psychology of social learning possible? Anim Cogn, 5, 193. https://doi.org/10.1007/s10071-002-0151-x

Cambronero, C. G., & Moreno, I. G. (2006). Algoritmos de aprendizaje: knn & kmeans. Inteligencia en Redes de Comunicación. Madrid: Universidad Carlos III de Madrid.

Capafons, A. (1998a). Rapid self-hypnosis: A suggestion method for self-control. Psicothema, 10(3), 571-581. Recuperado de http://www.psicothema.com/psicothema.asp?id=187

─ (1998b). Hipnosis clínica: Una visión cognitivo-comportamental. Papeles del Psicólogo, 69, 71-78. Recuperado de http://www.papelesdelpsicologo.es/resumen?pii=779

Čapek, M. (1973). El impacto filosófico de la física contemporánea. Madrid: Tecnos.

Cardenete, J. A. L. (2002). La enseñanza de la Lógica en el primer tercio del s. XVIII en el Colegio de S. Pablo de Granada según el manuscrito de Súmulas del P. Blas de Salas (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada.

Carlson, G. (1977). A unified analysis of the English bare. Linguistics and Philosophy, 1, 413-457. https://doi.org/10.1007/BF00353456

Carlson, N. R. (1996). Fisiología de la conducta. Barcelona: Ariel.

Caro, S., & Silva Irarrázaval, T. (2008). Epicuro: Epístola a Heródoto. Onomázein: Revista de lingüística, filología y traducción de la Pontificia Universidad Católica de Chile, 17, 135-170.

Carroll, L. (1886). The game of logic. London: Macmillan.

─ (1896). Symbolic Logic. New York: Dover.

─ (1897). Symbolic Logic. Part I. Elementary (2004 ed.). London: The Macmillan Company.

BIBLIOGRAFÍA

Casanova, Y. (2013). Banalización del conocimiento en el mundo postmoderno. Perspectivas. Revista de Historia, Geografía, Arte y Cultura de la UNERMB, 1(1), 167-182.

Casas Cañas, V. (2012). Historia de las representaciones gráficas y diagramáticas en lógica. (Trabajo Fin de Máster en Filosofía Teórica y Práctica). UNED. Facultad de Filosofía.
Recuperado de http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:masterFilosofiaLogica-Vcasas/Documento.pdf

Castro-Manzano, J. (2017). Remarks on the Idea of Non-monotonic (Diagrammatic) Inference. Open Insight, 8(14), 243-263.

Cavaliere, F. (2013). A Diagrammatic Bridge Between Standard and Non-standard Logics: The Numerical Segment. En A. Moktefi, & S.-J. Shin (eds.). Visual Reasoning with Diagrams (pp. 105-116). Springer Basel. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-0600-8

Секундант, C. (2016). Johann Christoph Sturm. Epistemology and Philosophy of Science, 48(2), 104-120. http://doi.org/10.5840/eps201648212

Cermak, L. S., & Craik, F. I. (2014). Levels of Processing in Human Memory. PLE. Hoboken: Taylor and Francis.

Chandrasekaran, B., Glasgow, J., & Narayanan, N. H. (1995). Diagrammatic Reasoning: Cognitive and Computational Perspectives. Cambridge, MA: AAAI Press/The MIT Press.

Chen, H., & Boutros, P. C. (2011). VennDiagram: a package for the generation of highly-customizable Venn and Euler diagrams. R. BMC bioinformatics, 12(1), 35. https://doi.org/10.1186/1471-2105-12-35

Cheng, P. C.-H. (2012). Visualizing syllogisms: category pattern diagrams versus Venn diagrams. July 2, 2012. 3rd International Workshop on Euler Diagrams. Canterbury, UK. Recuperado de http://ceur-ws.org/Vol-854/paper3.pdf

─ (2014). Graphical notations for syllogisms: How alternative representations impact the accessibility of concepts. Journal of Visual Languages and Computing, 25, 170-185. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.jvlc.2013.08.008

─ (2016). What constitutes an effective representation? In: Jamik, M., Uesaka, Y. and Schwartz, S. (eds.) Diagrammatic Representation and Inference: 9th International Conference, Diagrams 2016. Lecture notes in artificial intelligence (9781, pp. 17-31). Springer, Heidelberg, Germany.
http://doi.org/10.1007/978-3-319-42333-3_2

─ (2018). Sets For Foundational Representations? A Design Case Study With Probability And Distributions. Y. Sato, & Z. Shams (eds.), SetVR 2018 (pp. 1-11). Recuperado de http://ceur-ws.org/Vol-2116/invited.pdf

Cheng, P., & Holyoak, K. (1985). Pragmatic reasoning schemas. Cognitive Psychology, (17), 391–416. https://doi.org/10.1016/0010-0285(85)90014-3

Chiel, H., & Beer, R. (1997). The brain has a body: Adaptive behavior emerges from interactions of nervous system, body, and environment. Trends in Neurosciences, 20, 553–557.
https://doi.org/10.1016/S0166-2236(97)01149-1

Chiesi, F., Primi, C., & Morsanyi, K. (2011). Developmental changes in probabilistic reasoning: The role of cognitive capacity, instructions, thinking styles, and relevant knowledge. Thinking & Reasoning, 17(3), 315-350. https://doi.org/10.1080/13546783.2011.598401

Chow, S., & Ruskey, F. (2004). Drawing Area-Proportional Venn and Euler Diagrams Graph Drawing. GD 2003. En G. Liotta (ed.). Lecture Notes in Computer Science (Vol. 2912). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-24595-7_44

Christoph Sturm, J. (1695). Mathesis enucleata. Publisher, Wolfgang Mauritz.Original from, the Bavarian State Library.

Church, A. (1956). Introduction to Mathematical Logic (Vol 1). Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

BIBLIOGRAFÍA

Churchland, P. S., Ramachandran, V. S., & Sjenowski, T. J. (1994). A critique of pure vision. En C. Koch, & J. L. Davis (eds.). Large-scale neuronal theories of the brain (pp. 23–60). Cambridge, MA: MIT Press.

Címbora Acosta, G. (2017). Lógica en el Diagrama de Marlo. Tratando de hacer evidente la certeza. En A. Campillo & D. Manzanero (coord.). Actas II Congreso Internaciona de la Red española de Filosofía (pp. 41-55). Madrid: REF. Recuperado de http://redfilosofia.es/congreso/wp-content/uploads/sites/4/2017/07/7.5.pdf

Cirilo Flórez, M. (2011). Estudio Introductorio. En Descartes. Biblioteca de grandes pensadores. Madrid: Gredos.

Clark, A. (1997). Being there: Putting brain, body, and world together again. Cambridge, MA: MIT Press.

─ (1998). Embodied, situated, and distributed cognition. In W. Bechtel & G. Graham (eds.). A companion to cognitive science (pp. 506–517). Malden, MA: Blackwell

Clark, J. T. (1958). Conventional Logic and Modern Logic-Revisited. En Proceedings of the American Catholic Philosophical Association (Vol. 32, pp. 108-123). http://doi.org/10.5840/acpaproc19583216

Clayton, E., Cóndor, O. M., & Clayton, E. (2015). La historia de la escritura. Madrid: Siruela.

Cohen, J., Braver, T., & R.C., O. (1996). A computational approach to prefrontal cortex, cognitive control and schizophrenia: recent developments and current challenges. Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci, 29, 1515-27. https://doi.org/10.1098/rstb.1996.0138

Cohen, L. (1963). Reviewed Work(s): The Development of Logic by William Kneale and Martha Kneale Review. The Philosophical Quarterly (1950-), 13(52), 253-262. https://doi.org/10.2307/2218045

Collins, A., & Quillian, M. (1969). Retrieval time from semantic memory. Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 8, (2), 240-247. https://doi.org/10.1016/S0022-5371(69)80069-1

Concha, D., Ramírez, M. Á., Gallardo, I., Rovira, D. P., & Rodríguez, A. F. (2012). Sesgos cognitivos y su relación con el bienestar subjetivo. Salud & Sociedad, 3(2), 115-129. https://doi.org/10.22199/S07187475.2012.0002.00001

Condillac, E. B., Villa, J. A., Gimeno, J., & Rodríguez, A. L. (1985). Lógica: Extracto razonado del tratado de las sensaciones. Barcelona: Orbis.

Conforti Carlomagno, C., & Jasso Méndez, J. (2016). Logicidad y consecuencia lógica: Pluralismo sin rivalidad. En Teresita Mijangos Martínez (coord.). Rutas Didácticas y de Investigación en Lógica, Argumentación y Pensamiento Crítico, (pp. 10-66). México: Académia Mexicana de la Lógica.

Cooley, C. (1909). Social Organitation. A Study of the larger mind. New York: Scribner.

Corballis, M.C. (1989). Laterality and human evolution. Psychological Review, 96(3), 492-505. http://dx.doi.org/10.1037/0033-295X.96.3.492

Corballis, M. C., & Beale, I. L. (1976). The psychology of left and right. Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum Associates

Corcoran, J. (2010). Los primeros días de todo curso de Lógica. Ergo, 25, 31-45.

Cornelius, W. K.-H. (1998). El ars generalis ultima de Ramón LLul. (Estudios sobre un origen secreto de la teoría computacional). Revista Española de Filosofía Medieval, 5, 89-107.

Correia, M. (2006). Actualidad de la lógica arsitotélica. Revista de filosofía, 62, 139-150. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-43602006000100009

─ (2017). La lógica aristotélica y sus perspectivas. Pensamiento. Revista de Investigación e Información Filosófica, 73, (275), pp. 5-19. Recuperado de http://revistas.comillas.edu/index.php/pensamiento/artic

BIBLIOGRAFÍA

Coumet, E. & De Mora, M.C. (2002). Sobre la historia de los diagramas lógicos, "Figuras geométricas". Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 25(52), 167-195. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=266231

Craik, K. J. (1967). The nature of explanation. Cambridge: University Press.

Crespo, A. (2006). Cognición humana. Mente, ordenadores y neuronas. Madrid: Editorial Universitaria Ramón Areces.

Croft, W., & Cruse, A. (2008). Lingüistica cognitiva. Madrid: Akal.

Croom Robertson, G. (1876). Mr. Jevons's Formal Logic. Mind, 1(2), 206-222. https://doi.org/10.1093/mind/os-1.2.206

Crubellier, M. (2017). The programme of Aristotelian analytics. Journal of Humanities of Valparaiso (10), 29-59. http://doi.org/10.22370/rhv.2017.10.1065

Crupi, V., Fitelson, B., & Tentori, K. (2008). Probability, confirmation, and the conjunction fallacy. Thinking & Reasoning, 14(2), 182-199. http://doi.org/10.1080/13546780701643406

Cruz, N., Baratgin, J., Oaksford, M., & Over, D. (2015). Bayesian reasoning with ifs and ands and ors. Front. Psychol. 6, 192. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00192

Cummins, R. (1996). Representations, Targets, and Attitudes. Cambridge, MA: MIT Press.

Cunningham, W. A., & Zelazo, P. D. (2007). Attitudes and evaluations: A social cognitive neuroscience perspective. Trends in cognitive sciences, 11(3), 97-104. http://doi.org/10.1016/j.tics.2006.12.005

Cusick, T. W., & Stanica, P. (2014). Cryptographic Boolean Functions and Applications. Burlington: Elsevier Science

Dales, R. (1990). Philoponus against Aristotle on the Eternity of the World by Johannes Philoponus, Christian Wildberg. Isis, 81(4), 759-759. http://doi.org/10.1086/355577

Damasio, A. (2006). En busca de Spinoza. Neurobiología de la emoción y los sentimientos. Barcelona: Crítica.

─ (2007). El error de Descartes (3º ed.). Barcelona: Crítica.

─ (2011). Y el cerebro creó al hombre: ¿Cómo pudo el cerebro generar emociones, sentimientos, ideas y el yo? Barcelona: Círculo de Lectores.

Darwin, C. (1897). Expression of the Emotions in Man and Animals. New York: D. Appleton and Company. Recuperado de http://darwin-online.org.uk/converted/pdf/1897_Expression_F1152.pdf

Darwin, C., & Josa, L. (2001). El origen de las especies. Madrid: Espasa-Calpe.

Dau, F. (2003). The Logic system of concept graphs with negation: And its relationship to predicate logic. Berlin: Springer.

Dau, F., & Eklund, P. (2008). A diagrammatic reasoning system for the description logic ALC. Journal of Visual Languages and Computing, 19, 539–573. https://doi.org/10.1016/j.jvlc.2007.12.003

Davis, F., & Mourglier, L. (2004). La comunicación no verbal. Madrid: Alianza Editorial.

Dawkins, R. (2004). Good and bad reasons for believing. En R. Dawkins, A devil's chaplain: reflections on hopes, lies, science, and love (pp. 284-291). Boston: Houghton Mifflin Co.

─ (2011). El gen egoísta. Las bases biológicas de nuestra conducta (9º ed.). Barcelona: Salvat.

de Aguiar, V. J. (2017). Diagrams and art: some thoughts based on Peirce and Deleuze. Kínesis-Revista de Estudos dos Pós-Graduandos em Filosofia, 9(20).

BIBLIOGRAFÍA

de Barros, J. A., & Oas, G. (2014). Negative probabilities and counter-factual reasoning in quantum cognition. Physica Scripta (T163), 014008. http://doi.org/10.1088/0031-8949/2014/T163/014008

de Carrillo, J. Z. (1981). George Boole y las leyes de pensamiento. Revista Filosofía Universidad de Costa Rica, 19(49,50), 69-75.

de la Torre Gómez, A. (2006). El método cartesiano y la geometría analítica. Matemáticas: enseñanza universitaria, 14, 75-87.

de Ledesma, L., Pérez, A., Borrajo, D., & Laita, L. M. (1997). A computational approach to George Boole's discovery of mathematical logic. Artificial Intelligence, 91(2), 281-307. https://doi.org/10.1016/S0004-3702(97)00017-9

De Morgan, A. (1847a) Statement in answer to an assertion made by Sir William Hamilton, bart., professor of logic in the University of Edinburgh. London: s.n.
Recuperado de https://archive.org/details/statementinanswe00demoiala

─ (1847b). Formal Logic, Or, The Calculus of Inference, Necessary and Probable. London: Taylor and Walton. Booksellers and Publishers to University College.
Recuperado de https://archive.org/details/formallogicorthe00demouoft/page/n6

─ (1860). Syllabus of a proposed system of logic. By Augustus De Morgan. London: Walton and Maberly. Recuperado de https://archive.org/details/syllabusapropos01morggoog/page/n3

─ (1966). On the syllogism. Londres: P. Heath.

De Rijk, L. M. (1967). Logica Modernorum: The origin and early development of the theory of supposition. (Vol. 2). Assen: Van Gorcum.

De Waal, F., & Ferrer, I., (1997). Bien natural. Barcelona: Herder.

Dejnožka, J. (2010). The concept of relevance and the logic diagram tradition. Logica Universalis (4), 67-135. https://doi.org/10.1007/s11787-010-0014-1

Dejuan Wang, & Lee, J. (1993). Visual Reasoning: its Formal Semantics and Applications. Journal of Visual Languages and Computing, (4), 327-356. https://doi.org/10.1006/jvlc.1993.1020

Delgado Pineda, M., & Medina Albós, A. (2018). Enseñar a pensar: Del juego al razonamiento matemático. Pi-InnovaMath (1). https://doi.org/10.5944/pim.1.2018.21922

Dennett, D.C. (1981). 6. The Nature of Images and the Introspective Trap. The Language and Thought Series (pp. 128–134). https://doi.org/10.4159/harvard.9780674594722.c10

Descartes, R. (2003). Discourse on method. En E. Haldane, & G. Ross (eds.), Philosophical Works.

Descartes, R., & Aurelio Díaz, J. (2011a). Meditaciones metafísicas seguidas de las objeciones y respuestas. En Descartes. Biblioteca de grandes pensadores (pp. 153-414). Madrid: Gredos.

Descartes, R., & García Morente, M. (2011b). Discurso del método. En Descartes. Biblioteca de grandes pensadores (pp. 97-152). Madrid: Gredos.

Descartes, R. & Huescar, A.R. (1983a). Discurso del Método. En R. Descartes, Discurso del Método. Reglas para la dirección de la mente (pp. 41-113). Barcelona: Orbis.

Descartes, R., & Quintás, Guillermo (1995). Los principios de la filosofía. Barcelona: Alianza Editorial.

Descartes, R., & Samaranch, F. D. (1983b). Reglas para la dirección de la mente. En R. Descartes, Discurso del método. Reglas para la dirección de la mente. (pp. 115-263). Barcelona: Orbis.

Descartes, R., & Villoro, L. (2011c). Reglas para la dirección del espíritu. En Descartes. Biblioteca de grandes pensadores (pp. 1-72). Madrid: Gredos.

BIBLIOGRAFÍA

Descartes, R., Weissman, D., Bluhm, W. T., & Descartes, R. (1996). Discourse on the method: And, Meditations on first philosophy. New Haven: Yale University Press.

Díez Martínez, A. (2005). Introducción a la filosofía de la lógica. Madrid: UNED.

Donald, M. (1991). Origins of the Modern Mind. Cambridge MA: Harvard University Press.

─ (1993). Précis of Origins of the modern mind: Three stages in the evolution of culture and cognition. Behavioral and brain sciences, 16(4), 737-748. https://doi.org/10.1017/S0140525X00032647

Downes, S. (2010). Learning networks and connective knowledge. En H. H. Yang, & S. C.-Y. Yuen, Collective intelligence and E-Learning 2.0: Implications of web-based communities and networking (pp. 1-26). Hershey: Information Science Reference.

Dubois, D., Prade, H., & Smets, P. (2001). New Semantics for Quantitative Possibility Theory. 2nd International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications. New York: Ithaca.

Duchenne, G., & de Boulogne, G. B. (1990). The Mechanism of Human Facial Expression. Cambridge University Press.

Duval, R., & Vega Restrepo, M. (2001). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Colombia. Santiago de Cali-Colombia: Merlín ID.

Echevarría, J. (2001). Educación y sociedad de la información. Revista de Investigación Educativa, 19(2), 277-289.

─ (1995). Filosofía de la ciencia. Madrid: Akal.

─ (2002). ¿Internet en la escuela o la escuela en Internet? Revista de educación (Núm. extraordinario), 199-206.

Eco, U. (2016). The ars magna by Ramnon LLul. Contributions to Science, 12(1),47-50 http://doi.org/10.2436/20.7010.01.243

Edelman, G. M., & Tononi, G. (2005). El universo de la conciencia: Cómo la materia se convierte en imaginación. Barcelona: Crítica.

Edwards, A.W. F. (2006) An eleventh-century Venn diagram, BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 21:2, 119-121. https://doi.org/10.1080/17498430600804407

Edwards, A. W. F., & Stewart, I. (2004). Cogwheels of the mind: The story of Venn Diagrams. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.

Edwars, M. B. (1994). Construcción social de la memoria. Mundo científico (Especial monográfico: la Memoria). Oct, 150 (14), 814-817.

Efrón, D. (1970). Gesto, raza y cultura. Buenos Aires: Nueva visión.

Eibl-Eibesfeldt, I. (1989). Foundations of human behavior. Human ethology. Hawthorne, NY, US: Aldine de Gruyter.

Einarson, B. (1936a). On certain mathematical terms in Aristotle's logic: Part I. The American Journal of Philology, 57(1), 33-54. http://doi.org/10.2307/289829

─ (1936b). On certain mathematical terms in Aristotle's logic: part II. The American Journal of Philology, 57(2), 151-172. http://doi.org/10.2307/290473

Ekman, P. (2004). ¿Qué dice este gesto? Barcelona: RBA Libros.

─ (2007). Emotions revealed: Recognizing faces and feelings to improve communication and emotional life. New York, N.Y: Henry Holt and Co.

BIBLIOGRAFÍA

Ekman, P., Sorenson, E. R., & Friesen, W. V. (1969). Pan-cultural elements in the facial display of emotion. Science, 164(875), 86- 88. http://doi.org/10.1126/science.164.3875.86

Elqayam, S., & Over, D. E. (2013). New paradigm psychology of reasoning: An introduction to the special issue edited by Elqayam, Bonnefon, and Over. Thinking & Reasoning, 19(3/4), 249-265. http://doi.org/10.1080/13546783.2013.841591

Emerson, A.E. (1939). Social coordination and the superorganism. The American Midland Naturalist, 21(1), 182-209. http://doi.org/10.2307/2420380

─ (1956). Regenerative behavior and social homeostasis in termites. Ecology, 37(2), 248 -258. http://doi.org/10.2307/1933137

Emery, F. E., & Trist, E. L. (1965). The causal texture of organizational environments. Human relations, 18(1), 21-32. http://dx.doi.org/10.1177/001872676501800103

Empírico, S., Gallego, A., & Muñoz Diego, T. (1993). Esbozos Pirrónicos. Madrid: Biblioteca Clasica Gredos.

Empírico, S., & Martos, M. J. (2012). Contra los dogmáticos. Madrid: Gredos.

Enebral Casares, F. (1994). Memoria y drogadicción. Mundo Científico (Especial monográfico: la memoria). Oct., 150 (14), 818-827.

Erickson, J.R. (1974). A set analysis theory of behavior in formal syllogistic reasoning tasks. En Solso, R. (ed.) Loyola Symposium on Cognition, vol. 2. Erlbaum, Mahwah.

Euler, L. (1843). Lettres à une Princesse d'Allemagne. París: Emile Saisset, Charpentier.

Evans, J. D. G. (1987). Aristotle. New York: ST Martin Press, INC.

Evans, J. S.B.T. (2003). In two minds: dual process accounts of reasoning. TRENDS in Cognitive Sciences, 7(10), 454-459. https://doi.org/10.1016/j.tics.2003.08.012

─ (2012). Questions and challenges for the new psychology of reasoning. Thinking & Reasoning, 18(1), 5-31. http://dx.doi.org/10.1080/13546783.2011.637674

Evans, J.S.B.T., Newstead, S., & Byrne, R. (1993). Human reasoning: The psychology of deduction. Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates Ltd.

Eysenck, H. & Miranda, H. (1986). La rata o el diván. Madrid: Alianza.

Fangmeier, T., Knauff, M., Ruff, C. C., & Sloutsky, V. (2006). fMRI evidence for a three-stage model of deductive reasoning. Journal of Cognitive Neuroscience, 18(3), 320-334. http://dx.doi.org/10.1162/jocn.2006.18.3.320

Feeney, A., Evans, J., & Venn, S. (2008). Rarity, pseudodiagnosticity and Bayesian reasoning. Thinking & Reasoning, 14(3), 209-230. http://dx.doi.org/10.1080/13546780801934549

Feldman, J., & Ballard, D. (1982). Connectionist Models and Their Properties. Cognitive Science, 6, 205-254. http://doi.org/10.1207/s15516709cog0603_1

Fernández Sedano, I., & Basabe Barañano, N. (2007). Psicología social y cultural. En F. J. Morales, E. Gavira, C. Moya, & I. Cuadrado, Psicología social (3ª ed) (pp. 63-96). Madrid: McGrawhill.

Ferrater Mora, J. (1965). Dicionario de Filosofía (5º ed.). Buenos Aires: Ed. Sudamericana.

Ferrero, F. J. (2016). Aprendizaje de Lógica Informal y uso de nuevas tecnologías para la diagramación de argumentos: un estudio de caso en la Universidad de Córdoba. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba.

Festinger, L. (1957). A Theory of Cognitive Dissonance. Standford. CA: Standford University Press.

Feynman, R. P. (2012). Negative Probability. En B. Hiley, & F. D. Peat, Quantum Implications: Essays in Honour of David Bohm (pp. 235–248). Hoboken: Routledge.

BIBLIOGRAFÍA

Figueroa, A. R. (2010). Naturaleza de los razonamientos basados en modelos. Praxis filosófica (30), 7-28. https://doi.org/10.25100/pfilosofica.v0i30.3413

Firth, J. (1957). Papers in Linguistics, 1934-1951. Oxford: Oxford University Press.

Fisch, M. H. (1986). Peirce's Progress from Nominalism toward Realism. En S. a. Peirce, K. Ketner, & C. J. Kloesel (eds.). Bloomington: Indiana University Press.

Fischer Nilsson, J. (2013). Diagrammatic Reasoning with Classes and Relationships. En A. Moktefi, & S.-J. Shin (eds.). Visual Reasoning with Diagrams. Springer Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0600-8_6

Fiske, J. (1992). Introduction to communication studies. London: Routledge

Fiske, J., & Anzola, P. (1985). Teoría de la comunicación. Colombia: Norma, S.A.

Flower J., Howse J. (2002) Generating Euler Diagrams. En M. Hegarty, B. Meyer, N.H. Narayanan (eds) Diagrammatic Representation and Inference. Diagrams 2002. Lecture Notes in Computer Science, vol 2317. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-46037-3_6

Flower, J., Stapleton, G., & Rodgers, P. (2014). On the drawability of 3D Venn and Euler diagrams. Journal of Visual Languages & Computing, 25(3), 186-209. https://doi.org/10.1016/j.jvlc.2013.08.009

Fodor, J.A. (1981). Imagistic representation. En Block (ed.). Imagery (pp. 63-86) Cambridge, MA: MIT Press.

─ (1983). 1983: The modularity of mind. Cambridge, MA: MIT Press.

─ (2010). LOT 2: The language of thought revisited. Oxford: Clarendon Press.

Fodor, J. A., & Pylyshyn, Z. W. (1988). Connectionism and cognitive architecture: A critical analysis. Cognition, 28(1-2), 3-71. https://doi.org/10.1016/0010-0277(88)90031-5

Fogelin, R. (1976). Hamilton's Theory of Quantifying the Predicatea Correction. The Philosophical Quarterly, 26(105), 352-353. https://doi.org/10.2307/2218865

Foolen, A. (2012). The relevance of emotion for language and linguistics. En A. Foolen., U.M. Lüdtke, T.P. Racine y J. Zlatev (eds.). Moving ourselves, moving others: motion and emotion in intersubjectivity, consciousness and language (Vol. 6, pp.349-369). Amsterdam: John Benjamins Publishing

Foss, B. M. (1965). Imitation. En B. M. Foss (ed.). Determinants of infant behaviour III (pp. 185-203). London: Methuen.

Frápolli, M. J. (2017). Reivindicando el proyecto de Frege. La prioridad de las proposiciones y el carácter expresivo de la lógica. Disputatio. Philosophical Research Bulletin, 6(7), 1-42.
Recuperado de http://hdl.handle.net/10366/135566

Frege, G. (1914). Uber Logik in der Mathematik: Fruhling, 1914. Munster i.W: Institut fur Mathematische Logik und Grundlagenforschung, Universitat Munster i.W.

Frege, G., & Padilla, H. (1972). Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. México: Instituto de Investigaciones Filosóficas. UNAM.

Frege, G., & Valdés, V. L. (1998). Ensayos de semántica y filosofía de la lógica. Madrid: Tecnos.

Freud, S., Rey, A. R., & López-Ballesteros, T. L. (2016). El malestar en la cultura y otros ensayos.

Friedman, J. (1991). Teoría de juegos con aplicaciones a la economía. Madrid: Editorial Alianza Universidad.

Gállego Pérez-Larraya, J. T., & Iriarte, J. (2007). Clasificación de los trastornos del sueño. Anales del Sistema Sanitario de Navarra, 30, 19-36.

Gallie, W. B. (1952). Peirce and pragmatism. Harmondsworth: Penguin Books.

BIBLIOGRAFÍA

García Albea, J. E. (1993). Mente y conducta. Madrid: Trotta.

García Cuadrado, J. (2012). La consignificatio verbal. (Peri Hermeneias 16B 8-10): Ammonio, Boecio y Tomás de Aquino. Revista Española de Filosofía Medieval, 19, 87-100.
Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4131156

García Gual, C. (2004). Historia de la Filosofía Antigua. Madrid: Trotta.

García Trevijano, C. (1993). El arte de la lógica. Madrid: Tecnos.

García, A. M. (2005). Sobre el origen de las leyes de Morgan. Enl@ ce: Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento, 2(3), 13-36.
Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1986432

García, G. E. (2018). Somos nuestra memoria: Recordar y olvidar. Barcelona: EMSE EDAPP.

García, M. A., Ordóñez, C., & Ruíz, J. F. (2006). Argumentaciones lógicas: El razonamiento matemático a través del ordenador. Iniciación a la investigación, (1), 11.
Recuperado de https://revistaselectronicas.ujaen.es/index.php/ininv/article/view/266

García, V. A. (2011). Filosofía de la imagen. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Garden, F. (1867). An Outline of Logic. London: Rivingtons.

Gardner, M. (1952). Logic machines. Scientific American. 186(3), 68-74.
Recuperado de http://www.jstor.org/stable/24950629

─ (1958). Logic Machines and Diagrams. New York, Toronto, Londres: McGraw-Hill.

Gardner, M., & Bou, L. (1985). Máquinas y diagramas lógicos. Madrid: Alianza.

Garrido, M. (1981). Lógica simbólica. Madrid: Tecnos.

Gazzaniga, M.S. & Pino, M. M (2006). El cerebro ético. Barcelona: Paidós.

Gea, M. B., & Roa, R. (2014). El sentido de la correlación y regresión. Números, 87, 25-35.

George, C. (1997). Reasoning From Uncertain Premises. Thinking & Reasoning, 3(3), 161-189.
https://doi.org/10.1080/135467897394338

─ (1999). Evaluation of the Plausibility of a Conclusion Derivable from Several Arguments with Uncertain Premises. Thinking & Reasoning, 5(3), 245-281. https://doi.org/10.1080/135467899393995

Gergonne, J. D. (1817). Essai de dialectique rationelle. Annuales de Mathematiques pures et appliqukes, 7, 189-228. Recuperado de http://www.numdam.org/article/AMPA_1816-1817__7__189_0.pdf

Geulincx, A. (1675). De Cubo Logico". En Methodus inveniendi argumenta quae solertia quibusdam dicitur (cap. VII). Lugdunum Batavorum.

─ (1891). Opera philosophica. Hagae Comitum: Martinum Nijhoff.
Recuperado de https://archive.org/details/operaphilosophic03geul/page/n6

Gewirtz, J. L. (1961). A learning analysis of the effects of normal stimulation, privation and deprivation on the acquisition of social motivation and attachment. En B. M. Foss (ed.). Determinants of infant behaviour (pp. 213-299). London: Methuen (New York: Wiley).

─ (1968). Learning of generalized imitation as the basis for identification. Psychological Review, 75(5), 374-397. http://dx.doi.org/10.1037/h0026378

Giannini, H. (2007). Breve historia de la filosofía. Santiago de Chile: Catalonia.

BIBLIOGRAFÍA

Giardino, V. (2015). Introduction: Varieties of Iconicity. Review of Philosophy and Psychology (6), 1-25. https://doi.org/10.1007/s13164-014-0210-7

─ (2017). Diagrammatic reasoning in Mathematics. En Magnani, L., & Bertolotti, T. (eds). Springer Handbook of Model-Based Science. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-30526-4_22

Giardino, V., & De Toffoli, S (2014). Forms and roles of diagrams in knot theory. Erkenntnis, 79(4), 829-842. http://doi.org/10.1007/s10670-013-9568-7

Giménez, G. (1996). La identidad social o el retorno del sujeto en sociología.
Recuperado de http://148.202.18.157/sitios/catedrasnacionales/material/2010a/cristina_palomar/1.pdf

Giner, S. (1993). Religión civil. Reis, 61, 23-55. http://doi.org/doi:10.2307/40183616

Giovannini, E. N., & Legris, J. (2016). Diagramas, Visualización y Formalismo en la Filosofía de la Práctica Matemática. Representaciones. Revista de Estudios sobre Representaciones en Arte, Ciencia y Filosofía, 12(2), 1-14. Recuperado de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/repr/article/view/17391/17166

Glymour, C., & Cooper, G. (1999). Computation, causation, and discovery. Menlo Park, CA: AAAI/MIT Press.

Goel, V., & Dolan, R. (2001). Functional neuroanatomy of three-term relational reasoning. Neuropsychologia, 39, 901-909. http://doi.org/10.1016/s0028-3932(01)00024-0

─ (2004). Differential involvement of left prefrontal cortex in inductive and deductive reasoning. Cognition, 93, 109-121. http://doi.org/10.1016/j.cognition.2004.03.001

Goel, V., Gold, B., Kapur, S., & Houle, S. (1997). The seats of reason? An imaging study of inductive and deductive reasoning. NeuroReport, 8, 1305-1310. http://doi.org/10.1097/00001756-199703240-00049

─ (1998). Neuroanatomical correlates of human reasoning. Journal of Cognitive Neuroscience, 10(3), 293-302. http://dx.doi.org/10.1162/089892998562744

Goldstein, L. (2011, June). Adding a dimension to logic diagramming. En P. Blackburn, H. Ditmarsch, M. Manzano, & F. Soler-Toscano (eds.). International Congress on Tools for Teaching Logic (pp. 101-108). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21350-2_13

Gómez, A. S. (2013). ¿Lógica trivalente aimara? Análisis de una teoría sobre razonamiento no occidental. Revista Iberoamericana de Argumentación, (6), 1-28. Recuperado de https://revistas.uam.es/index.php/ria/article/view/8190

Gómez, Á., López-Rodríguez, L., Vázquez, A., Paredes, B., & Martínez, M. (2016). Morir y matar por un grupo o unos valores. Estrategias para evitar, reducir y/o erradicar el comportamiento grupal extremista. Anuario de Psicología Jurídica, 26(1), 122-129. https://doi.org/10.1016/j.apj.2016.04.001

González Carlomán, A. (1976). Lenguaje Matemático (Algebra I). Oviedo: Universidad de Oviedo.

González Labra, M. (2011). Introducción a la Psicología del Pensamiento. Madrid: Trotta.

González, F. E. (2015). Las Ciencias Cognitivas como contexto para interpretar las nuevas concepciones acerca del aprendizaje. Paradigma, 20(2), 7-43.

González, G., Castro Solano, A., & González, F. (2008). Perfiles aptitudinales, estilos de pensamiento y rendimiento académico. Anuario de investigaciones, 15, 33-41. Recuperado de https://docplayer.es/18392144-Perfiles-aptitudinales-estilos-de-pensamiento-y-rendimiento-academico.html

Goñi, J. M., & Corbalán, F. (2011). Didáctica de las matemáticas. Barcelona: Graó.

Goodman, N. (1968). Languages of Art: an approach to a theory of symbols. London: Oxford University Press.

Gopnik, A., Glymour, C., Sobel, D. M., Schulz, L. E., Kushnir, T., & Danks, D. (2004). A theory of causal learning in children: causal maps and Bayes nets. Psychological review, 111(1), 3-32. http://dx.doi.org/10.1037/0033-295X.111.1.3

Graf, P., & Schacter, D. (1985). Implicit and explicit memory for new associations in normal and amnesic subjects. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 11(3), 501-518. http://doi.org/10.1037/0278-7393.11.3.501

Graham, G. (2015). Scottish Philosophy in the 19th Century. En The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter edition), ed. Edwar N. Zalta. Stanford University.
Recuperado de https://plato.stanford.edu/archives/win2015/entries/scottish-19th/

Grattan-Guinness, I. (1977). The Gergonne relations and the intuitive use of Euler and Venn diagrams. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 8(1), 23-30. https://doi.org/10.1080/0020739770080103

─ (1991). The correspondence between George Boole and Stanley Jevons, 1863–1864. History and Philosophy of Logic, 12(1), 15-35. http://dx.doi.org/10.1080/01445349108837175

Greaves, M. (2002). The Philosophical Status of Diagrams. Stanford: CSLI Publications.

Green, J., & Swets, J. A. (1966). Signal Detection Theory and Psychophysics. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Greenberg, J. H., & Ruhlen, M. (1992). Linguistic origins of native Americans. Scientific American, 267(5), 94-99. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/24939295

Greene, J. D. (2017). The rat-a-gorical imperative: Moral intuition and the limits of affective learning. Cognition, 167, 66-77. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2017.03.004

Greenfield, P. M. (1991). Language, tools and the brain: the ontogeny and phylogeny of hierarchically organized sequential behavior. Behavioral and Brain Sciences, 14, 531- 595. http://dx.doi.org/10.1017/S0140525X00071235

Grice, P. H. (1975). Logic and Conversation. En P. Peter Cole, & J. L. Morgan (eds.). Syntax and Semantics, Speech Acts (Vol. 3, pp. 41–58). New York: Academic Press.

Grigni, M., Papadias, D., & Papadimitriou, C. (1995). Topological Inference. En Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI '95) (pp. 901-907). Montreal, August. San Mateo, CA: Morgan Kauffman.

Grosser, S. (1697). Gründliche Anweisung zur Logica…, Budißin & Görlitz: Johann Wilisch. https://doi.org/10.11588/diglit.30154#0103

Grusec, J. E. (1992). Social learning theory and developmental psychology: The legacies of Robert Sears and Albert Bandura. Developmental Psychology, 28(5), 776-786. http://dx.doi.org/10.1037/0012-1649.28.5.776

Grzib, G. (2007). Bases cognitivas y conductuales de la motivación y emoción. Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.

Guariglia, O. N. (2010). En camino de una justicia global. Madrid: Marcial Pons.

Gurr, C., Lee, J., & Stenning, K. (1998). Theories of diagrammatic reasoning: Distinguishing component problems. Minds and Machines, (8), 533-557. https://doi.org/10.1023/A:1008314528229

Gutiérrez, S. (2007). Euler. El maestro de todos los matemáticos. SUMA, 54, 79-84.

Guzmán Brito, A. (1997). Las teorías antiguas sobre el origen del lenguaje y la relación entre las palabras y las cosas. Boletín De La Academia Chilena De La Historia, 64, 261.

Haaparanta, L. (2009). The development of modern logic. Oxford: Oxford University Press.

BIBLIOGRAFÍA

Habermas, J. (1999). Teoría de la acción comunicativa. Madrid: Taurus.

Habermas, J., & Hoyos, G. (1973). Conocimiento e interés. Ideas Valores (42-45), 61-76. Recuperado de https://revistas.unal.edu.co/index.php/idval/article/view/29111/29384

Habib, M., Landou, J. F., Ansidéi, D., & Lienas, M. B. (1994). Bases neurológicas de las conductas. Barcelona: Masson.

Haigh, M., & Stewart, A. J. (2011). The influence of clause order, congruency, and probability on the processing of conditionals. Thinking & Reasoning, 17(4), 402-423. http://dx.doi.org/10.1080/10463283.2011.628000

Hall, E. T. (1989). El lenguaje silencioso. Madrid: Alianza Editorial.

Hall, G. S. (1894). On the Histori of American college text-Books and teaching in Logic, Ethics, Psichology, and allien subjects. American Antiquarian Society, 137-174. Recuperado de https://www.americanantiquarian.org/proceedings/44769406.pdf

Hamilton, W. (1860). Lectures on metaphysics and logic (Vol. IV). Edinburgh; London: William Blackwood and sons. Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=dFtEAAAAcAAJ&hl=es&printsec=frontcover&pg=GBS.PP1

Hamilton, W., & In Day, H. N. (1865). The logic of Sir William Hamilton, bart. Cincinnati: Moore, Wilstach & Baldwin. Recuperado de: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=nyp.33433070238443&view=1up&seq=10

Hammer, E. (1994). Reasoning with sentences and diagrams. Notre dame Journal of Formal Logic, 35(1), 73-87. http://doi.org/10.1305/ndjfl/1040609295

─ (1995). Diagrammatic Logic. En D. Gabbay, & F. Guenthner (eds.). Handbook of Philosophical Logic (Vol. 4). Amsterdam: Elsevier North Holland.

Hammer, E., & Shin, S. (1998). Euler's Visual Logic. History and Philosophy of Logic, (19), 1-29. https://doi.org/10.1080/01445349808837293

Hampson, P. J., & Morris, P. E. (1996). Understanding cognition. Cambridge, MA.: Blackwell Publishers Inc.

Handley, S. J., & Evans, J. S. (2000). Supposition and representation in human reasoning. Thinking & Reasoning, 6(4), 273-311. https://doi.org/10.1080/135467800750038148

Hardin, R. (1971). Collective Action as an Agreeable N-Prisoner's Dilemma. Behavioral Science, 16(5), 472-481. https://doi.org/10.1002/bs.3830160507

─ (1982). Collective Action. Baltimore: The John Hopkins University Press.

Harel, D. (1988). On Visual Formalisms. Communications of the ACM, 31(5), 514-530. http://doi.org/10.1145/42411.42414

Harley, R. (1879). The Stanhope Demonstrator. Mind, 4(14), 192-210. https://doi.org/10.1093/mind/os-4.14.192

Harris, A. L., Hsu, A. S., & Madsen, J. K. (2012). Because Hitler did it! Quantitative tests of Bayesian argumentation using ad hominem. Thinking & Reasoning, 18(3), 311-343. http://dx.doi.org/10.1080/13546783.2012.670753

Harris, M., & Sánchez, F. J. O. (2012). Vacas, cerdos, guerras y brujas: Los enigmas de la cultura. Madrid: Alianza Editorial.

Harris, R. (1989). How does writing restructure thought? Language and Communication, 9(2/3), 99–106. https://doi.org/10.1016/0271-5309(89)90012-8

Haug, E. G. (2004). Why so Negative to Negative Probabilities. Wilmott Magazine, 34-38.

Havelock, E. (1963). Preface to Plato. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Haynes, S. (2002). Principles and practice of behavioral assessment. New York: Kluwer Academic.

Haynes, S., & O'Brien, W. H. (1990). Functional analysis in behavior therapy. Clinical Psychology Review, 10(6), 649-668. https://doi.org/10.1016/0272-7358(90)90074-K

Heath, T. L. (1921). A history of Greek mathematics. Oxford: Clarendon Press.

Hebb, D. (1949). The organization of behavior. New York: John Wiley and Sons.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. Journal of Educational Psychology, 91(4), 684-689. http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684

Heider, F. (1946). Attitudes and Cognitive Organization. The Journal of Psychology, 21(1), 107-112. https://doi.org/10.1080/00223980.1946.9917275

Heim, S., Opitz, B., & Friederici, A. D. (2003). Distributed cortical networks for syntax processing: Broca's area as the common denominator. Brain and language, 85(3), 402-408. https://doi.org/10.1016/S0093-934X(03)00068-3

Heis, J. (2012). Attempts to Rethink Logic. En A. Wood & S. Hahn (Eds.), The Cambridge History of Philosophy in the Nineteenth Century (1790–1870) (pp. 95-132). Cambridge: Cambridge University Press. http://doi.org/10.1017/CHO9780511975257.008

Henao, R. D., & Moreno-Torres, M. (2016). Didáctica de la lógica para el ejercicio de la razonabilidad. Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 9(2), 85-110. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m9-18.dler

Hernández, R. A. (2004). Kant: introducción a la Crítica de la Razón Pura. San Vicente. Alicante: Club Universitario.

Hervada, J. (1979). Derecho natural, democracia y cultura. Persona y Derecho (6), 193.

Hill, W. F. (1960). Learning theory and the acquisition of values. Psychological Review, 67(5), 317-331. http://dx.doi.org/10.1037/h0043097

Hilpinen, R. (1982). On C. S. Peirce's Theory of the Proposition: Peirce as a Precursor of Game-Theoretical Semantics. The Monist, 65(2), 182–188. https://doi.org/10.5840/monist198265213

Hilton, D. J., & Erb, H. (1996). Mental Models and Causal Explanation: Judgements of Probable Cause and Explanatory Relevance. Thinking & Reasoning, 2(4), 273-308. https://doi.org/10.1080/135467896394447

Hinde, R. A. (1972). Non-verbal communication. Cambridge University Press.

Holt, E. B. (1931). Animal drive and the learning Process (Vol. 1). New York: Holt.

Hopfield, J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. Proceedings of the National Academy of Sciences, 79 (8), 2554-2558. https://doi.org/10.1073/pnas.79.8.2554

Horkheimer, M., Murena, H. A., & Vogelmann, D. J. (2002). Crítica de la razón instrumental. Madrid: Trotta.

Horn, Laurence R. 2011. Only XL: The assertoric asymmetry of exponibles. En Ed Cormany, Satoshi Ito & David Lutz (eds.), Proceedings of semantics and linguistic theory (SALT) (vol. 19, pp. 198–222). eLanguage. http://dx.doi.org/10.3765/salt.v19i0.2542

Howell, R. (1976). Ordinary Pictures, Mental Representations, and Logical Forms. Synthese, (33), 149-174. https://doi.org/10.1007/BF00484712

Howse J., Molina F., Shin SJ., Taylor J. (2002) On Diagram Tokens and Types. En M, Hegarty, B. Meyer, N.H. Narayanan (eds). Diagrammatic Representation and Inference. Diagrams 2002. Lecture Notes in Computer Science, vol 2317. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-46037-3_18

BIBLIOGRAFÍA

Howse, J., Molina, F., Taylor, J., Kent, S., & Gil, J. Y. (2001). Spider diagrams: A diagrammatic reasoning system. Journal of Visual Languages & Computing, 12(3), 299-324. https://doi.org/10.1006/jvlc.2000.0210

Howse, J., Stapleton, G., & Taylor, J. (2005). Spider diagrams. LMS Journal of Computation and Mathematics, 8, 145-194. https://doi.org/10.1112/S1461157000000942

Huici, C., Morales, J. F., & Falomir, P. J. (2011). Psicología de grupos I: Estructura y procesos. Madrid: UNED.

Hume, D. (1896). A Treatise of Human Nature (Reprinted from the Original Edition ed.). Oxford: L.A. SelbyBigge, M.A.

Hume, D., & Duque, F. (1981). Tratado de la naturaleza humana (Vol. I). Madrid: Orbis, S.A.

Humphrey, G. (1921). Imitation and the conditioned reflex. Pedagogical Seminary, 28, 1-21.

Hurley, P. J., & Watson, L. (2018). A concise introduction to logic. Boston, MA: Cengage Learning.

Hurley, S. M., & Novick, L. R. (2006). Context and structure: The nature of students'knowledge about three spatial diagram representations. Thinking and reasoning, 12, (3), 281-308. http://dx.doi.org/10.1080/13546780500363974

Husserl, E. (2008). La Crisis de las ciencias europeas y la fenomenología transcendental. Buenos Aires: Prometeo.

Ingleby, C. M. (1856). Outlines of Theoretical Logic. Founded on the New Analytic of Sir W. Hamilton, etc. Cambridge: Macmillan & CO.
Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=-aU0AAAAMAAJ&hl=es&pg=GBS.PR2

Isler, K., & van Schaik, C. P. (2009). The Expensive Brain: A framework for explaining evolutionary changes in brain size. Journal of Human Evolution, 57, 392-400. http://dx.doi.org/10.1016/j.jhevol.2009.04.009

Jackson, D. (1957). The question of family homeostasis. The Psychiatric quarterly, Supplement,31(Suppl 1), 79-90. http://dx.doi.org/10.1037/h0021565

Jaeger, W. W., Xirau, J., & Roces, W. (1990). Paideia: Los ideales de la cultura griega. México: Fondo de Cultura Económica.

Jakobson, R. (1960). Linguistics and Poetics. En T. Sebeok (ed.). Style in Language (pp. 350-377). Cambridge MA: MIT Press.

James, W. (1890). Principles of Psichology. Nueva York: Henri Holt.

Jamnik, M. (2001). Mathematical Reasoning with Diagrams. Stanford: CSLI Publications.

Jamnik, M., Bundy, A., & Green, I. (1999). On Automating Diagrammatic Proofs of Arithmentic Arguments. Journal of Logic, Language, and Information, 8(3), 297-321. https://doi.org/10.1023/A:1008323427489

Janssen, & M.B.J. Stokhof, (1981). Formal methods in the study of language. Amsterdam: Mathematical Centre Tracts.

Jensen, E. (2009). Cerebro y Aprendizaje. Competencias e implicaciones educativas. Madrid: Narcea S.A. Ediciones.

Jessop, R. (2011). The logic of Sir William Hamilton: tunnelling through sand to place the keystone in the Aristotelic Arch. En D. Gabbay, & J. Woods (eds.), British Logic in the Nineteenth Century. Handbook of the History of Logic (Vol. 4, pp. 93-163). New York: Elsevier.

Jevons, W. (1864). Pure logic or the logic of quality. London: Stanford. Recuperado de https://ia801401.us.archive.org/29/items/purelogicorlogi00jevogoog/purelogicorlogi00jevogoog.pdf

― (1869). The Substitution of Similars, The True Principle of Reasoning, Derived from a Modification of Aristotle's Dictum. London: Macmillan and CO.
Recuperado de https://archive.org/details/substitutionofsi00jevorich/page/n6

― (1870). On the Mechanical Performance of Logical Inference. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 160, pp. 497-518. Recuperado de https://archive.org/details/philtrans01714956

― (1872). Who discovered the quantification of the predicate? The Contemporary review 1866-1900, May, 21, 821-824.

― (1874). The Principles of Science. A Treatise on Logic and Scientific Method. New York: Macmillan and Co. Recuperado de https://archive.org/details/theprinciplesof00jevoiala/page/n7

― (1884). Studies in deductive logic; a manual for students. London: Macmillan. Recuperado de https://archive.org/details/studiesindeduct02jevogoog

― (1886). Letters and journals of William Stanley Jevons. En Harriet A. Jevons (ed.) London: Macmillan. Recuperado de https://ia802705.us.archive.org/34/items/lettersjournalof00jevoiala/lettersjournalof00jevoiala.pdf

Johnson-Laird, P. (1983). Mental models: Towards a cognitive science of language, inference and consciousnes s. Cambridge: Cambridge University Press, MA: Harvard University Press.

― (1995). Mental Models, Deductive Reasoning, and the Brain. En M. S. Gazzaniga, The cognitive neurosciences (pp. 999-1008). Cambridge: MIT Press.

― (2002). Peirce, logic diagrams, and the elementary operations of reasoning. Thinking & Reasoning, 8(1), 69-95. https://doi.org/10.1080/13546780143000099

Johnson-Laird, P., & Byrne, R. (1991). Deduction. Hove, UK: Lawrence Erlbaum Associates Ltd.

Kacprzyk, J., & Zadeh, L. A. (1992). Fuzzy logic for the management of uncertainty. New York: N.Y: Wiley.

Kagan, J. (1958). The concept of identification. Psychological Review, 65, 296-305.
http://dx.doi.org/10.1037/h0041313

Kaholokulaa, J. K., Godoy, A., O´Brien, W. H., Haynes, S. N., & Gavino, A. (2013). Análisis funcional en evaluación conductual y formulación de casos clínicos. Clínica y Salud, 24, 117-127.
http://dx.doi.org/10.1016/S1130-5274(13)70013-6

Kak, S. (2018). George Boole's Laws of Thought and Indian logic. Current Science, 114(12), 2570-2573.
https://doi.org/10.18520/cs%2Fv114%2Fi12%2F2570-2573

Kamp, H., & Reyle, U. (1993). From discourse to logic: Introduction to model theoretic semantics of natural language, formal logic and discourse representation theory. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kandel, E. R., Schwartz, J. H., & Jessell, T. M. (1995). Essentials of neural science and behavior. Norwalk, CT: Appleton & Lange.

Kanizsa, G. (1979). Organization in vision: Essays on Gestalt perception (Vol. 49). New York: Praeger.

Kant, E. (1998). La paz perpetua. Revista de Estudios Sociales (2), 142-146. https://doi.org/10.7440/res2.1998.27

Kant, E., García Moreno, A. Ruvira, J. & Tissot, J. (s/f) Lógica [1875]. infotematica.com. (Publicación original Madrid, Librerías de Francisco Iravedra y Antonio Novo, 1875. Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes 2000). http://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmcrf5q2

Kant, E., & García Morente, M. (1980). Fundamentación metafísica de las costumbres. Madrid: Espasa-Calpe.

Kant, E., García Morente & Miñana, V. E (2000). Crítica de la Razón Práctica. Madrid: Espasa-Calpe.

Kant, E., & Másmela, C. (1989). Principios metafísicos de la ciencia de la naturaleza. Madrid: Alianza

Kant, E., & Ribas, P. (1993). Crítica de la Razón Pura (8º ed.). Madrid: Alfaguara.

Karnaugh, M. (1953). The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, part I, 72(9), 593-599. https://doi.org/10.1109/tce.1953.6371932

Kauffman, L. H., & Weiss, C. (2001). Virtual logic-The key to Frege. Cybernetics and Human Knowing, 8(4), 75-86.

Kempe, A.B. (1886). Memoir on the theory of mathematical form. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 177, 1–70. https://doi.org/10.1098/rstl.1886.0002

─ (1897). Criticisms and Discussions: The Theory of Mathematical Form: A Correction and Explanation. The Monist, 7(3), 453-458. https://doi.org/10.5840/monist18977314

Ketner, K. (1991). Elements of logic. Lubbock, TX: Texas Tech Press.

Kiesewetter, J. G. (1793). Grundriss einer reinen allgemeinen Logik nach Kantischen Grundsätzen zum Gebrauch für Vorlesungen, begleitet mit einer weitern Auseinandersetzung für diejenigen, die keine Vorlesungen. Frankfurt und Leipzig. Recuperado de https://archive.org/details/grundrisseinerre00kiesuoft/page/n4

Kiiveri, H., & Speed, T. (1982). Structural analysis of multivariate data: A review. En S. Leinhardt (ed.). Sociological methodology (pp. 209–220). San Francisco: Jossey Bass

Kimura, D. (1976). The neurological basis of language qua gestures. En H. &. Whitaker (ed.). Current trends in neurolinguistics. Academic Press.

Knapp, M. L. (1982). La comunicación no verbal: El cuerpo y el entorno. Madrid: Paidós Ibérica.

Knapp, M. L., & Hall, J. (2002). Nonverbal behavior in human interaction. Wadsworth/Thomson Learning.

Knapp, M. L., Hall, J. A., & Horgan, T. G. (2014). Nonverbal communication in human interaction. Boston: Wadsworth.

Knoespel, K. J. (2001). Diagrams as piloting devices in the philosophy of Gilles Deleuze. Notes, 101(1), 3947176.

Kohlberg, G. L. (1963). Moral development and identification. En H. Stevenson (ed). Child psychology: The sixty-second year-book of the National Society for the Study of Education (pp. 277-332). Chicago: University of Chicago Press.

Kop, R., & Hill, A. (2008). Connectivism: Learning theory of the future or vestige of the past? The International Review of Research in Open and Distributed Learning, 9(3), 1-13.

Korstanje, M. E. (2010). Reseña de "Defender la Sociedad" de Michel Foucault. Nómadas. Critical Journal of Social and Juridical Sciences, 25(1). Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=181/18112179025

Kosslyn, S. (1980). Image and Mind. Cambridge, MA: Harvard University Press.

─ (1988). Aspects of a cognitive neuroscience of imagery. Science, 240, 1621-1626. https://doi.org/10.1126/science.3289115

─ (1977). Imagery, propositions and the form of internal representations. Cognitive Psychology, (9), 52-76. https://doi.org/10.1016/0010-0285(77)90004-4

Kosslyn, S., DiGirolamo, G. J., Thompson, W. L., & Alpert, N. M. (1998). Mental rotation of objects versus hands: Neural mechanisms revealed by positron emission tomography. Psychophysiology, 35(2), 151-161.

Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Chicago: University of Chicago Press.

Kuhn, T. S. (1962). The structure of scientific revolutions. Chicago: Univ. Pr.

Kull, K. (2000a.). Organisms can be proud to have been their own designers. Cybernetics and HumanKnowing, 7(1), 45-55.

─ (2000b). Copy versus translate, meme versus sign, development of biological textuality. European Journal of Semiotic Studies,12(1), 101-120. Recuperado de http://www.zbi.ee/~kalevi/copytr.htm

Kullman, D. E. (s.f.). Aaron Schuyler 1828-1913.
Recuperado de http://sections.maa.org/ohio/ohio_masters/schuyler.html

Lacey, B. (1967). Somatic response patterning and stress: Some revisions of activation theory. En A. M.H., & R. Trumbull (eds). Psychological stress: Issues in Research. New York: Appleton-Century-Crofts.

Laita, L. M. (1979). Influences on Boole's logic: the controversy between William Hamilton and Augustus De Morgan. *Annals of science*, *36*(1), 45-65. https://doi.org/10.1080/00033797900200121

Lamb, S. M. (1999). Pathways of the brain: The neurocognitive basis of language. Amsterdam: J. Benjamins.

Lamb, S. M., & Newell, L. E. (1968). Outline of stratificational grammar. Washington, D.C: Georgetown University Press.

Lambert, J. H. (1764). Neues Organon oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrthum und Scheinn. Leipzig: Wendler.
Recuperado de https://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/display/bsb10043687_00001.html

─ (1765). De universaliori calculi idea Disquisitio, una cum adnexo specimine, Nova Acta Eruditorum, 441-473. Reprint in microform, 1981, Hildesheim-New York: Olms.

─ (1771). Anlage zur Architectonic, oder Theorie des Einfachen und des Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntniss, durch J.H. Lambert. Riga: Bey J.F. Hartknoch. Reprint in J. H. Lambert (1965). Philosophische Schriften, vols. III-IV, ed. H. W. Arndt, Hildesheim: Olms.

Lane, H. (1984). When the Mind Hears. Random House.

Lane, R. (2007). Peirce's modal shift: From set theory to pragmaticism. Journal of the History of Philosophy, 45(4), 551-576. doi: https://doi.org/10.1353/hph.2007.0087

Larkin, J., & Simon, H. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth 10,000 words. Cognitive Science, (4), 317–345. https://doi.org/10.1111/j.1551-6708.1987.tb00863.x

Larrea, M. L. (2010). Visualización basada en semántica. (Tesis doctoral, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina). Recuperado de http://repositoriodigital.uns.edu.ar/handle/123456789/2157

Laso, E. (2013). Las coordenadas de la obediencia. Milgram a través de la lectura de Zygmunt Bauman. Aesthethika, 9(1), 41-47.

Latham, R. G. (1856). Logic in Its Application to Language. London: Walton and Marbely. Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=76MyAlGLbf0C&hl=es&pg=GBS.PP4

Latorre, Á. (1985). Introducción al estudio del Derecho. Barcelona: Ariel.

Lazarus, A. (1973). «Hypnosis» as a facilitator in behavior therapy. International Journal of Clinical and Experimental Hypnosis, 21, 25-31. https://doi.org/10.1080/00207147308409302

Lazowick, L. M. (1955). On the nature of identifcation. Journal of Abnormal and Social Psychology, 51(2), 175-183. http://dx.doi.org/10.1037/h0041338

Lear, J. (2010). Aristotle and logical theory. Cambridge: Cambridge University Press.

Lecours, A. R., & Joanette, Y. (1980). Linguistic and other aspects of paroxysmal aphasia. Brain and Language, 10(1), 1-23. http://dx.doi.org/10.1016/0093-934X(80)90034-6

Lee, H. (1935). Geometrical Method and Aristotle's Account of First Principles. The Classical Quarterly, 29(2), 113-124. http://dx.doi.org/10.1017/S0009838800020474

Lefebvre, H. (1983). La presencia y la ausencia: Contribución a la teoría de las representaciones. México, D.F: Fondo de Cultura Económica.

Legg, C. (2013). What is a Logical Diagram? En A. Moktefi, & S.-J. Shin (eds.), Visual reasoning with diagrams. Studies in Universal Logic. pp. 20-41). Springer Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0600-8_1

Legris, J. (2012). Visualizar y manipular: sobre el razonamiento diagramático y la naturaleza de la deducción. En Lassalle Cassanave, A. & Thomas Sautter, F. (eds.). Visualização nas Ciências Formais (pp.89-103). Londres: College Publications.

─ (2016a). Iconos y proposiciones en la lógica diagramática de C.S. Peirce. SIRCA Publicaciones Académicas; Representaciones, 12(2), 39-53. Recuperado de http://hdl.handle.net/11336/33802

─ (2016b). Los gráficos existenciales en la historia de la lógica simbólica. En C. Hynes, & J. Nubiola (eds.). Charles S. Peirce: Ciencia, filosofía y verdad (pp. 59-68). San Miguel de Tucumán, Argentina: La Monteagudo.

Legris, J., & Rodrigues, C. (2018). Peirce on Diagrammatic Reasoning and Semeiotic. En Chapman P., Stapleton G., Moktefi A., Perez-Kriz S., Bellucci F. (eds.). Diagrammatic Representation and Inference. Diagrams 2018. Lecture Notes in Computer Science, vol 10871. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91376-6_5

Leibniz, G.W. (1686). General Inquiries about the Analysis of Concepts and of Truths. En H. R. George (ed.). Leibniz: Logical Papers: A Selection Translated and Edited with an Introduction. Published online: October 2015. http://doi.org/10.1093/oseo/instance.00106684

─ (1903). Opuscules et fragments inédits de Leibniz. En L. Couturat (ed.). Extraits des manuscrits de la Bibliothéque royale de Hanovre. Paris: Félix Alcan.

Leibniz, G. W., & Ovejero, M. E. (1950). La Teodicea, o, Tratado sobre la libertad del hombre y el origen del mal. Madrid: Aguila

Leibniz, G.W., E. Ovejero, & Maury (1976). Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano (vol. 1). México: Dirección General de Publicaciones.

Lemanski, J. (2016). Means or end? On the Valuation of Logic Diagrams. Logic-Philosophical Studies, 14, 98-122. Recuperadp de https://philpapers.org/rec/LEMMOE

─ Periods in the Use of Euler-Type Diagrams. Acta Baltica Historiae et Philosophiae Scientiarum 5(1), 50-69. https://.doi.org/10.11590/abhps.2017.1.03

─ (2018a). Logic Diagrams in the Weigel and Weise Circles. History & Philosophy Of Logic, 39(1), 3-28. https://doi.org/10.1080/01445340.2017.1341074

─ (2018b). Calculus CL as Ontology Editor and Inference Engine. En S. G.-K. Chapman P., Diagrammatic Representation and Inference. Diagrams 2018. Lecture Notes in Computer Science, vol 10871. Springer, Cahm. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91376-6_74

Lemanski, J. J Philos Logic (2019). Euler-type Diagrams and the Quantification of the Predicate https://doi.org/10.1007/s10992-019-09522-y

Lemmon, E. J. (1962). Moral dilemmas. The philosophical review, 71(2), 139-158. https://doi.org/10.2307/2182983

Lemon, O., & Pratt, I. (1977). Spatial Logic and the Complexity of Diagrammatic Reasoning. Machine Graphics and Vision 6(1), 89-108.

Lenzen, W. (1990). Das System der Leibnizschen Logik. Berlin & New York: de Gruyter.

─ (2008). Ploucquet's "Refutation" of the Traditional Square of Opposition. Logica Universalis, 2(1), 43-58. https://doi.org/10.1007/s11787-007-0025-8

León, B., Helena, L., Laverde Barrera, Á., Álvarez Rodríguez, A. M., & Estupiñan Vega, L. C. (2015). Análisis de la producción científica publicada entre 2008 y 2013 sobre suicidio en niños, niñas y adolescentes mediante un estudio bibliométrico. Revista del Hospital Psiquiátrico de La Habana, 12(2). Recuperado de http://www.revistahph.sld.cu/2015/Nro%202/analisis%20de%20la%20produccion.html

León-Carrión, J. (2002). Redes neuronales artificiales y la teoría neuropsicológica de Luira. Revista Española de Neuropsicología, 4(2-3), 168-178. Recuperado de http://hdl.handle.net/11441/67719

Leyra, A. M., & Mataix, C. (1992). Arte y ciencia: Una visión especular. Madrid: Ediciones La Palma.

Leyva-Vázquez, M., Escobar-Jara, R., & Smarandache, F. (2018). Modelos mentales y mapas cognitivos neutrosóficos Mental models and neutrosophic cognitive maps. Infinite Study. Neutrosophic Computing and Machine Learning, 1.

Lindsley, D.B. (1951). Emotion. En S. Stevens (ed.). Handbook of experimental Psychology (pp. 473-516). New York: Wiley.

─ (1952). Psychological phenomena and the electroencephalogram. Electroencephalography and clinical neurophysiology, 4(4), 443-456. https://doi.org/10.1016/0013-4694(52)90075-8

Lipman, M. (2013). El descubrimiento de Harry. Madrid: Ediciones de la Torre.

Locke, J. (1825). An essay concerning Human understanding. London: Tegg.
Recuperado de https://archive.org/details/humanunderstandi00lockuoft/page/n8

Locke, J. & García; E. M., Rábade, R.S. (1980). Ensayo sobre el entendimiento humano. Madrid: Editora Nacional.

Locke, J., & Popple, W. (1689). A letter concerning toleration. London

Loemker, L. E. (1956). Gottfried Wilhelm von Leibniz: En L. E. Loemker (ed.). Philosophical Papers and Letters. Chicago: University of Chicago Press.

Lombraña, J. V. (1989). Historia de la Lógica. Gijón: Universidad de Oviedo. Servicio de publicaciones.

Loomis, E. (1936). Life and appreciation of Dr. Aaron Schuyler. United States of America: Cornell University. Recuperado de https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=coo.31924068659923;view=1up;seq=1

López-Casal, B. (2017). Bases de los modelos matemáticos de procesamiento sensorial. Revista Complutense de Ciencias Veterinarias, 11(especial), 53-58. https://doi.org/10.5209/RCCV.55216

López de Mántaras Badía, R. (2015). Algunas reflexiones sobre el presente y futuro de la inteligencia artificial. Novática, (234), 98-101. Recuperado de http://hdl.handle.net/10261/136978

Lozano, D. V. (2013). Pensamiento y realidad: El sistema de Hegel. Madrid: Univ. Francisco de Vitoria.

Lozano, M. (2015). El uso de diagramas de Venn-Euler en la enseñanza de lógicas libres. En Madrigal M. Cuauthémoc y Mijangos M. Teresita (Coord.) (2015), Lógica, argumentación y pensamiento crítico: su investigación y didáctica (pp. 136-144). Universidad de Guadalajara, Academia Mexicana de Lógica A.C.-TRAUCO Editorial, México

Lu-Adler, H. (2012). Kant's Conception of Logical Extension and Its Implications. Dissertation, University of California, Davis.

─ (2017). From Logical Calculus to Logical Formality—What Kant Did with Euler's Circles. En C. Dyck, & W. Falk (Edits.), Kant and His German Contemporaries (pp. 35-55). Cambridge, Cambridge University Press.

Lucrecio & Marchena, J. (2002). De la Naturaleza de las Cosas. Barcelona: Ediciones Folio.

Ludwig, G. (1983). Foundations of Quantum Mechanics. Springer-Verlag.

Łukasiewicz, J. (1951). Aristotle's Syllogistic From the Standpoint of Modern Formal Logic. New York: Garland. http://doi.org/10.2307/628276

─ (1991). Elements of mathematical logic. Oxford: Pergamon Press.

Luna, B. D., & Tudela, G. P. (2011). Percepción visual. Madrid: Trotta.

Maass, J. G. (1793). Grundriß der Logik: Zum Gebrauche bei Vorlesungen. Halle: Michaelis. Recuperado de https://archive.org/details/grundrissderlogi00maas_0

Mac Queen, G. W. (1967). The Logic Diagram. MA Thesis, McMaster University.

Macbeth, D. (2009). Meaning, Use, and Diagrams. Ethics and Politics, 11, 369-384.

─ (2014). Realizing Reason: A Narrative of Truth and Knowing. Oxford: Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198704751.001.0001

Maccoby, E. E. (1959). Role-taking in childhood and its consequences for social learning. Child Development, 30, 239-252.

Macfarlane, A. (1879). Principles of the algebra of logic, with examples. Edinburgh: David Douglas. Recuperado de https://archive.org/details/cu31924031227386

─ (1885). The logical spectrum. Philosophical Magazine, 19(119), 286-290. https://doi.org/10.1080/14786448508627677

Mackinlay, J. (1986). Automating the design of graphical presentations of relational information. ACM Trans. Graph. 5, 2, 110–141. http://doi.org/10.1145/22949.22950

MacNally, R., & Young, D. (1981). Song energetics of the bladder cicada Cystosoma saundersii. Journal of Experimental Biology, 90, 185–196. Recuperado de https://jeb.biologists.org/content/90/1/185

Macula, A. J. (1995). Lewis Carroll and the Enumeration of Minimal Covers. Mathematics Magazine, 68, (4), 269-274. http://doi.org/10.1080/0025570X.1995.11996332

Madridejos, A. (2010). Antonio Damasio: La conciencia es un proceso: no se halla en un lugar concreto. El Periódico. Recuperado de https://www.elperiodico.com/es/tecnologia/20101011/antonio-damasio-la-conciencia-es-un-proceso-no-se-halla-en-un-lugar-concreto-526566

Maher, B. (1988). Anomalous experience and delusions thinking: The logical of explanations. En T. Oltmanns, & A. Maher B (eds.). Delusional beliefs (pp. 15-33). Chichester, U.K.: Wiley.

Maimon, S. (1794). Versuch einer neuen Logik oder Theorie des Denkens, Nebst angehängten Briefen des Philaletes an Aenesidemu. Berlin: E. Felisch.
Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=8mdTUKYPHwkC&hl=es&pg=GBS.PP1

Malinas, G. (1991). A Semantics for Pictures. Canadian Journal of Philosophy, 21(3), 275-298. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/40271296

Malinowski, B. (1923). The meaning of meaning. En C. K. Ogden, I. A. Richards, & F. G. Crookshank. The problem of meaning in primitive languages. London: Kegan Paul.

Malinowsky, B. & Cortazar, A. (1970). Una teoría científica de la cultura. Barcelona: EDHASA.

Mancosu, P. (2008). The Philosophy of Mathematical Practice. New York: Oxford University Press.

Mancosu, P., & Jorgensen, K. (2005). Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics. Springer, Heidelberg.

Mandelbrot, B. B. (1982). The fractal geometry of nature (Vol. 1). New York: WH freeman.

Mandler, J. (1984). Stories, Scripts, and Scenes. Hillsdale, N.J.: Lawrance Erlbaum Associates.

Marciszewski, W., & Murawski, R. (1995). Mechanization of reasoning in a historical perspective. Poznań studies in the philosophy of the sciences and the humanities (Vol. 43). Amsterdam: Rodopi.

Marinkovich, J. (2002). Enfoques de proceso en la producción de textos escritos. Revista signos, 35(51-52), 217-230. http://doi.org/10.4067/S0718-09342002005100014

Marks, I. M., Boix, F., & Pallarés, A. T. (1991). Miedos, fobias y rituales: Los mecanismos de la ansiedad. Barcelona: Martínez Roca, libros universitarios y profesionales.

Marquand, A. (1881). Logical diagrams for n terms. Philosophical Magazine, 12, 266-270. https://doi.org/10.1080/14786448108627104

Martí Sánchez, M. (ene./jun de 2017). La filosofía de las matemáticas de Aristóteles. Tópicos, revista de filosofía, (52), 43-66. http://doi.org/10.21555/top.v0i52.784

Martín García, A. (2012). La Teoría de Redes Relacionales: Correlatos neurológicos de un modelo lingüístico conexionista. Onomázein, (26), 221-257.

Martin, T. (2011). J.-H. Lambert's theory of probable syllogisms. International Journal of Approximate Reasoning, 52(2), 144-152. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2009.06.011

Martínez Liébana, I. (1985). El sentido del tacto como vía de acceso a la objetividad en Condillac. Madrid: EOS.

─ (2000). Mente y cuerpo: Esbozo de análisis fenomenológico. Logos, 33, 339-362.

Martínez, J. M., Cuadra, R., & Heras, A. (2008). Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. 1.º Bachillerato. Madrid: McGraw-Hill.

Maslow, A. (1987). Motivation and personality (3º ed.). New York: Harper & Row Publishers.

Maynard Smith, J. (1979). La Evolución del comportamiento. En Evolución, Libros de Investigación y Ciencia (pp.115-126). Barcelona: Labor.

─ (1982). Evolution and the Theory of Games. Cambridge: Cambridge University Press.

Mays, W., & Henry, D. P. (1952). Exhibition of the work of W. Stanley Jevons. Nature, 170, 696. https://doi.org/10.1038/170696a0

─ (1953). Jevons and Logic. Mind, 62(248), 484-505. http://doi.org/10.2307/2964507

McAllister, D. W., & Brock Jr, F. J. (1990). Using the logic diagram in teaching programming: An overview and preliminary test results. Journal of Research on Computing in Education, 22(3), 348-363. https://doi.org/10.1080/08886504.1990.10781926

McCulloch, W., & Pitts, W. (1943). Bulletin of Mathematical Biophysics 5: 115. https://doi.org/10.1007/BF02478259

─ (1990). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. Bulletin of mathematical biology, 52(1-2), 99-115. https://doi.org/10.1007/BF02459570

McGrath. (1984). Groups: interaction and Performance. Emglewood Cliffs: Prentice Hall.

Mead, G. H. (1934). Mind, self and society (Vol. 111). Chicago: University of Chicago Press.

Meavilla Seguí, V. (2005). Razonamiento visual y matemáticas. Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria, (27), 109-116

Mehrabian, A. (2007). Nonverbal Communication. Chicago: Aldine Transaction.

Meinong, A. (1910). Über Annahmen. Ulm: Kerler.

Mellin, G. (1799). Enzyklopädisches Wörterbuch der kritischen Philosophie / Gewissheit – Lernen 1971, Neudr. d. Ausg. (Vol. 2). Jena, Leipzig, Frommann.

Menary, R. (2007). Writing as thinking. Language Sciences, 29(5), 621-632. http://doi.org/10.1016/j.langsci.2007.01.005

Mendoza García, J. (2004). Las formas del recuerdo. La memoria narrativa. Athenea Digital. Revista de Pensamiento e Investigación Social, otoño, 6. https://doi.org/10.5565/rev/athenead/v1n6.158

Menéndez, R. B. (2009). El pensamiento lógico desde la perspectiva de las neuro-ciencias cognitivas (Tesis Doctoral), Universidad de Oviedo, España.

Menéndez, R.B., & de la Puente, E. (2013). La comprensión lingüística se apoya en las imágenes mentales. Eikasia, Mayo, 243-248. Recuperado de http://revistadefilosofia.com/49-11.pdf

Mignucci, M. (1983). La cuantificación del predicado en la lógica antigua. Anuario Filosófico (16), 11-42. Recuperado de http://hdl.handle.net/10171/2150

Milgram, S. (1974). Obedience to authority: An experimental view. New York: Harper & Row.

Mill, J. (1865). An examination: Sir William Hamilton's Philosophie. London: Longsman, Green and CO. Recuperado de https://archive.org/details/examinationofsir00mill

Millar, S. (1997). La comprensión y la representación del espacio: Teoría y evidencia a partir de estudios con niños ciegos y videntes. Madrid: ONCE.

Miller Moya, L. M. (2004). Acción colectiva y modelos de racionalidad. Estud. front [online], 5(9), 107-130. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0187-69612004000100005&lng=es&tlng=es

Miller, E., & Cohen, J. (2001). Una teoría integradora de la función de la corteza prefrontal. Revisión anual de la neurociencia, 24, 167-202.

Miller, J. W. (1938). The structure of Aristotelian logic. London: K. Paul, Trench, Trubner & Co.

Miller, N. (2007). Euclid and His Twentieth Century Rivals: diagrams in the Logic of Euclidean Geometry. (CSLI Studies in the Theory and Applications of Diagrams), Stanford: CSLI Publications.

Miller, N., & Dollard, J. (1941). Social learninging and imitation. New Haven Yale: University Press.

Milne, P. (2012). Indicative conditionals, conditional probabilities, and the "defective truth-table": A request for more experiments. Thinking & Reasoning, 18(2), 196-224. http://doi.org/10.1080/13546783.2012.670754

Minsky, M., & Papert, S. (1969). Perceptrons: An introduction to computionaly geometry. Cambridge, MA: MIT Press.

Mithen, S., & Aubet, M. J. (1998). Arqueología de la mente. Barcelona: Crítica.

Moktefi, A. (2013). Beyond Syllogisms: Carroll's (Marked). En A. Moktefi, A. &. S.-J. Shin (eds). Visual Reasoning with Diagrams (pp. 84-104). Springer Basel. http://doi.org/10.1007/978-3-0348-0600-8_4

─ (2015). On the social utility of symbolic logic: Lewis Carroll against 'The Logicians'. Studia Metodologiczne (35), 133-150.

─ (2018). Lewis Carroll's Diaries: The Private Journals of Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll)/The Logic Pamphlets of Charles Lutwidge Dodgson and Related Pieces. History and Philosophy of Logic, 39(2), 187-200. https://doi.org/10.1080/01445340.2017.1407621

Moktefi, A., & Edwards, A. W. (2011). One more class: Martin Gardner and logic diagrams. A bouquet for the gardener, 160-174. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/280098558_One_more_class_Martin_Gardner_and_logic_diagrams

Moktefi, A., & Pietarinen, A. (2015). On the Diagrammatic Representation of Existential Statements with Venn Diagrams. Journal of Logic, Language and Information, 24(4), 361–374. https://doi.org/10.1007/s10849-015-9228-1

Moktefi, A., & Shin, S.-J. (2012). A History of Logic Diagrams. En North-Holland, Dov M. Gabbay, Francis Jeffry Pelletier, John Woods (eds). Handbook of the History of Logic, vol. 11: 'Logic: A History of its Central Concepts (pp. 611-682). http://doi.org/10.1016/B978-0-444-52937-4.50011-3

─ (2013). Visual Reasoning with diagrams. Springel Basel, Strasbourg, France: Université de Strasbourg. http://doi.org/10.1007/978-3-0348-0600-8

Molina, F. (2001). Reasoning with extended Venn-Peirce diagrammatic systems (Doctoral dissertation), University of Brighton.

Mondolfo, R., & Heráclito, E. (2007). Heráclito: Textos y problemas de su interpretación. México: Siglo XXI Editores.

Monlau, Y., & Rey, Y. (1856). Curso de Psicología y Lógica, escrito con arreglo al programa oficial de esta asignatura, para uso de los institutos y colegios de segunda enseñanza... (3ª ed.). Madrid: P.F.M. Lógica por ... J.M. Rey y Heredia.
Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=Kf4rDTNClRQC&hl=es&pg=GBS.PP1

Monroy, A. A., & Astudillo, M. T. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de una caso. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 28(1), 73-84. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/189097

Monsalve, R. A. (2003). Teoría de la información y comunicación social. Quito, Ecuador: Abya Yala.

Montavon, G., Orr, G. B., & Müller, K.-R. (2012). Neural Networks: Tricks of the Trade (second ed.). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Mora, T. (2014). Neuroeducación solo se puede aprender aquello que se ama. Madrid: Alianza.

Morado, R. (2003). Racionalidad y lógicas no deductivas. Iztapalata (54), 131-144. Recuperado de file:///C:/Users/Isabel/Downloads/Dialnet-RacionalidadYLogicasNoDeductivas-6092370.pdf

─ (2007). La formalización del sentido común. En M. J. Frápolli Sanz (coord.) Filosofía de la Lógica. Madrid, España: Editorial Tecnos.

Moraga, F. R. (2015). La tríada oscura de la personalidad: maquiavelismo, narcisismo y psicopatía. Una mirada evolutiva. Criminalidad, 57 (2), 253-265.

Morales Luna, G. (2002). Introducción a la lógica difusa. México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados.

Morales, D. J., Moya, M. M., & e-libro, C. (2007). Psicología social (Tercera ed.). España: McGraw-Hill.

Moreira, M. A., & Rodríguez Palmero, M. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. En Actas del encuentro internacional sobre el aprendizaje significativo (pp. 19-44). Burgos, España.

Moretti, A. (2014). Was Lewis Carroll an Amazing Oppositional Geometer? History and Philosophy of Logic, 35(4), 383-409. http://doi.org/10.1080/01445340.2014.981022

Moretti, A., Orayen, R., & Digitalia. (2012). Filosofía de la lógica. Madrid: Trotta.

Morgan, K. A. (2006). Myth and philosophy from the Presocratics to Plato. Cambridge: Cambridge University Press.

Morris, B. J., Croker, S., Masnick, A. M., & Zimmerman, C. (2012). The emergence of scientific reasoning. En Current topics in children's learning and cognition. InTech open. http://doi.org/10.5772/53885

Morris, D. (1970). El zoo humano. Barcelona: Plaza & Janes.

─ (2000). Masculino y femenino: Claves de la sexualidad. Barcelona: Plaza & Janés.

Morris, D., & Ferrer, A. J. (2011). El mono desnudo. Barcelona: DeBolsillo.

Morton, J. (1984). Brain-based and non-brain based models of language. En D. Caplan, A. Lecours, & A. Smith (eds.). Biological Perspectives on Language (pp. 40.64). Cambridge, Mass: MIT Press.

Mosselmans, B. (2017). William Stanley Jevons. En The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter edition), ed. Edwar N. Zalta. Stanford University.
Recuperado de https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/william-jevons/

Mosterín, J. (2001). Ciencia viva. Reflexiones sobre la aventura intelectual de nuestro tiempo. Jesús Mosterín. Pozuelo de Alarcón, Madrid: Espasa.

Mowrer, O. H. (1950). Learning theory and personality dynamics. New York: Ronald Press.

─ (1960). Learning theory and the symbolic processes. New York: Wiley.

Mueller, E. T. (2006). Commonsense reasoning. Amsterdam; Boston: Elsevier Morgan Kaufmann.

Mumma, J., & Panza, M. (2012). Diagrams in mathematics: history and philosophy. Synthese, 186,(1), 1-5. http://doi.org/10.1007/s11229-011-9988-3

Muñoz Delgado, V. (1977). La lógica en las condenaciones de 1277. Cuadernos salmantinos de filosofía, 4, 17-40. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=460452

Nakamura, H., & Kawaguchi, J. (2016). People Like Logical Truth: Testing the Intuitive Detection of Logical Value in Basic Propositions. Plos ONE, 11(12), 1-21. http://doi.org/10.1371/journal.pone.0169166

Nakatsu, R. T. (2009). Reasoning with Diagrams: Decision-Making and Problem-Solving with Diagrams. Hoboken: John Wiley & Sons.

Nash, J. (1950). Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of the USA, 36(1), 48-49. https://doi.org/10.1073/pnas.36.1.48

Navarrete, A. (2012). El coste del cerebro humano. Ciencia cognitiva.
Recuperado de http://www.cienciacognitiva.org/?p=501

Navarrete, A., & Isler, K. (2011). Energetics and the evolution of human brain size. Nature, 480, 91-U252. http://doi.org/10.1038/nature10629

Nestle, W., & Homerus. (1975). Vom Mythos zum Logos. Stuttgart: Kröner.

Nevin, J. A. (1969). Signal detection theory and operant behavior: A review of david m. green and john a. swets' signal detection theory and psychophysics. Journal of the Experimental Analysis of Behavior, 12(3), 475-480. doi: 10.1901/jeab.1969.12-475

Newman, S. D., Carpenter, P. A., Varma, S., & Just, M. A. (2003). Frontal and parietal participation in problem solving in the Tower of London: fMRI and computational modeling of planning and high-level perception. Neuropsychologia, 41(12), 1668-1682. http://doi.org/10.1016/s0028-3932(03)00091-5

Nietzsche, F. (1973). La "razón" en la filosofía y Cómo el «mundo verdadero» acabó convirtiéndose en una fábula. En Nietzsche, F., & Sánchez, P. A. Crepúsculo de los ídolos o Cómo se filosofa con el martillo (pp. 45-52.). Madrid: Alianza Editorial.

Nietzsche, F., & Vaihinger, H. (1990). Sobre Verdad y Mentira en Sentido Extramoral. Madrid: Tecnos.

Nilsson, N. J. (1998). Artificial Intelligence: A New Synthesis (4º ed.). San Francisco: Kaufmann.

Noeh, W. (2012). Charles S. Peirce's theory of information: a theory of the growth of symbols and of knowledge. Cybernetics & Human Knowing, 19(1-2), 137-161.

Oaksford, M., & Chater, N. (1994). A rational analysis of the selection task as optimal data selection. Psychological Review,(101), 608–631. http://dx.doi.org/10.1037/0033-295X.101.4.608

─ (2007). Bayesian rationality: The probabilistic approach to human reasoning. Oxford, UK: Oxford University Press.

─ (2016). Probabilities, causation, and logic programming in conditional reasoning: reply to Stenning and Van Lambalgen. Thinking & Reasoning, 22(3), 336-354. http://doi.org/10.1080/13546783.2016.1139505

Oberauer, K., Wilhelm, O., & Diaz, R. R. (1999). Bayesian Rationality for the Wason Selection Task? A Test of Optimal Data Selection Theory. 115-144. Thinking & Reasoning, 5(2). http://doi.org/10.1080/135467899394020

Obrist, P. (1981). Cardiovascular Psychology: A perspective. New York: Plenum Press.

Ockham, W., & Böhner, P. (1954). Summa Logicae: [2] P. 2. 3,1. St. Bonaventure, NY: Franciscan Institute

Ohm, E., & Thompson, V. (2006). Conditional probability and pragmatic conditionals: Dissociating truth and effectiveness. Thinking & Reasoning, 12(3), 257-280. http://doi.org/10.1080/13546780500172490

O'Keefe, J. M., & Nadel, L. (1978). The Hippocampus as a cognitive map. Oxford: Clarendon Press.

Oldford, R. W., & Cherry, W. H. (2006). Picturing probability: the poverty of Venn diagrams, the richness of eikosograms. Manuscrito no publicado.
Recuperado de http://www.stats.uwaterloo.ca/~rwoldfor/papers/venn/eikosograms/paperpdf.pdf

Oleas, H., & Zúñiga, J. (2014). Trastorno de estrés postraumático. En J. M. Escobar, & M. Uribe, Avances en psiquiatría desde un modelo biopsicosocial (p. 141.). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Oloume, F. M. (2015). Objetividad/Subjetividad: marcas gramaticales y léxicas en la prosa académica en cuestiones de lengua (Español y Fránces) (Tesis doctoral, Universidad de Salamanca, España). Recuperado de http://hdl.handle.net/10366/128246

Olson, R. S. (2015). Scottish Philosophy and British Physics, 1740-1870: A Study in the Foundations of the Victorian Scientific Style (Vol. 1283). Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Ong, W. (1987). Oralidad y escritura. Tecnologías de la palabra. México: Fondo de Cultura Económica.

Oostra, A. (2003). Peirce y los diagramas. II Jornada del Grupo de Estudios Peirceanos, La lógica de Peirce y el mundo hispánico, 10. Recuperado de
http://files.acervopeirceano.webnode.es/200000053-05cf006c92/Oostra-Peirce-y-los-diagramas.pdf

Oriol, M., & Gambra, M. (2015). Lógica aristotélica (2ºed.). Madrid: Dykinson.

Ortega y Gasset, J. (1966). El tema de nuestro tiempo. Obras completas. T.3, cap. 10 (pp 197-203). Madrid: Revista de Occidente.

─ (1983). Obras completas: T 12. Madrid: Alianza Editorial.

─ (1986). Ideas y creencias (y otros ensayos de filosofía). Madrid: Revista de Occidente en Alianza Editorial.

─ (1991). ¿Que es filosofia? España: Alianza Editorial.

Ortega y Gasset, J., & Pellicani, L. (2016). El hombre y la gente. Madrid: Biblioteca Nueva S.L.

Ortiz, Tomás. (2009). Neurociencia y educación. Madrid: Alianza.

Ortiz-Tudela, J., & Lupiáñez, J. (2016). ¿Cómo construimos nuestra experiencia del mundo? Ciencia Cognitiva. Recuperado de http://www.cienciacognitiva.org/?tag=procesamiento-de-arriba-abajo

Osherson, D. N., & Markman, E. (1974). Language and the ability to evaluate contradictions and tautologies. Cognition, 3(3), 213-226. http://dx.doi.org/10.1016/0010-0277(74)90009-2

BIBLIOGRAFÍA

Oteruelo, A.M. (1991). Información y entropía. Arbor: Ciencia, pensamiento y cultura, 549, 111-138.

Over, D. E. (2009). New paradigm psychology of reasoning. Thinking & Reasoning, 15(4), 431-438. http://doi.org/10.1080/13546780903266188

Pabteki, M. (1993). Thomas solly (1816–1875):an unknown pioneer of the mathematization of logic in england, 1839. History and Philosophy of Logic, 14(2), 133-169. http://doi.org/10.1080/01445349308837215

Pagnan, R. J. (2012). A Diagrammatic Calculus of Syllogisms. Journal of Logic, Language and Information, 21(3), 347-364. http://doi.org/10.1007/s10849-011-9156-7

─ (2013). A Diagrammatic Calculus of Syllogisms. En A. Moktefi & S.-J. Shin (eds.), Visual reasoning with diagrams (pp. 57-83). Springer Basel. http://doi.org/10.1007/978-3-0348-0600-8_3

Palau, G. (2016). Frege y la controversia acerca del psicologismo. Disputatio. Philosophical Research Bulletin, 5(6), 417-425. Recuperado de https://gredos.usal.es/bitstream/handle/10366/132036/2016%20Palau%20Frege.pdf?sequence=1

Papalini, V. A. (2010). Libros de autoayuda: Biblioterapia para la felicidad. Athenea Digital. Revista de pensamiento e investigación social, 19, 147-169. https://doi.org/10.5565/rev/athenead/v0n19.722

Parkinson, G. (1966). Leibniz: Logical Papers. Oxford: Clarendon Press.

Parry, W. T. (1966). Quantification of the Predicate and Many-Sorted Logic. Philosophy and Phenomenological Research, 26(3), 342-360.

Parsons, T. (2017). The Traditional Square of Opposition. En The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer edition), ed. Edwar N. Zalta. Stanford University. Recuperado de https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/square/

Pask, G. (1962). The logic and behaviour of self organising systems as illustrated by interaction between men and adaptative machines. England, Richmond: System research LTD.

Pasqualoni, A. M. (2016). Collection and division in Plato's Dialogues. Edinburgh: The University of Edinburgh. Recuperado de https://www.era.lib.ed.ac.uk/bitstream/handle/1842/22927/Pasqualoni2016.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Payá Santos, C., & Delgado Morán, J. J. (2017). Uncertainty of dimensional analysis of intelligence. URVIO Revista Latinoamericana de Estudios de Seguridad (21), 225-239. http://dx.doi.org/10.17141/urvio.21.2017.2962

Peacocke, C. (1987). Depiction. The Philosophical Review, 96(3), 383-410. http://dx.doi.org/10.2307/2185226

Pearl, J. (1988). Probabilistic reasoning in intelligent systems. San Mateo: Morgan Kaufman Press.

─ (2000). Causality. New York: Oxford University Press.

Peckhaus, V. (2000). Was George Boole really the 'father' of modern logic? En J. Gasser (ed.). A Boole Anthology. Synthese Library (Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science), vol 291 (pp. 271-285). Springer, Dordrecht. http://doi.org/10.1007/978-94-015-9385-4_15

Peirce, C. S. (1878). How to make our ideas clear. Popular Science Monthly, Enero, 12, 286-302. Recuperado de https://courses.media.mit.edu/2004spring/mas966/Peirce%201878%20Make%20Ideas%20Clear.pdf

─ (1880). On the Algebra of Logic. American Journal of Mathematics, 3(1), 15-57. http://doi.org/10.2307/2369442

─ (1894). ¿What is a sign? En The Peirce Edition Project (ed.) 1998. Essential Peirce, selected philosophical writings, Vol. 2 (1893-1913) (pp.4-10). Bloomington, IN, USA: Indiana University Press. Recuperado de http://faculty.georgetown.edu/irvinem/theory/Peirce-What-is-a-Sign-1894-excerpts.pdf

─ (1897). The logic of relatives. The Monist, 7(2), 161-217. https://doi.org/10.5840/monist18977231

─ (1906). Prolegomena to an apology for pragmaticism. The Monist, 16(4), 492-546. http://doi.org/10.5840/monist190616436

Peirce, C.S., & Fisch, M. H. (1982). Writings of Charles S. Peirce. 1, 1857-1866. Bloomington: Indiana University Press

Peirce, C. S., Hartshorne, C., & Weiss, P. (1933). Collected papers of Charles Sanders Peirce. Cambridge: Harvard University Press

Peirce, C., & Library, H. (1966). MS The Charles S. Peirce Papers. Cambridge, MA, Cambridge: Harvard University Library: Harvard University Library, Photographic Service. MF.66.

Peláez, Á. (2014). ¿Qué son los diagramas geométricos? Una aproximación kantiano peirceana. Dissertatio, (40), 151-164. Recuperado de file:///C:/Users/Isabel/Downloads/8533-28032-1-PB.pdf

Penfield, W., & Boldrey, E. (1937). Somatic motor and sensory representation in the cerebral cortex of man as studied by electrical stimulation. Brain, 60(4), 389–443. https://doi.org/10.1093/brain/60.4.389

Pereira Fariña, M., & Sobrino, A. (2012). Una propuesta de silogismo encadenado aproximado. Actas del VII Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España (pp. 705-713). Santiago de Compostela.

Pérez Álvarez, M. (2006). La terapia de conducta de tercera generación. eduPsykhé, 5(2), 159-172.

Petersen, W. P., & Arbenz, P. (2004). Introduction to parallel computing: [a practical guide with examples in C]. Oxford: Oxford University Press.

Pfeifer, N. (2013). The new psychology of reasoning: A mental probability logical perspective. Thinking & Reasoning, 19(3/4), 329-345. http://doi.org/10.1080/13546783.2013.838189

Philoponus, J., & Trincavelli, V. (1536). Ioan. Gram. Philoponi Comentaria in priora analytica Aristotelis: Magentini comentaria in eadem libellus de sillogismis. Vittore Trincavellus. Venetiis: Zanettus.

Piaget, J. (1951). Play, dreams and imitation in childhood. New York: Norton.

Pietarinen, A.V. (2011). Existential Graphs: What a Diagrammatic Logic of Cognition Might Look Like. History & Philosophy Of Logic, 32(3), 265-281. http://doi.org/10.1080/01445340.2011.555506

─ (2016). Extensions of euler diagrams in peirce's four manuscripts on logical graphs. En M. Jamnik, Y. Uesaka, & E. Schwartz (Edits.), Diagrammatic Representation and Inference. Diagrams 2016. Lecture Notes in Computer Science (Vol. 9781, pp. 139-154). Springer, Cham. http://doi.org/10.1007/978-3-319-42333-3_11

Pietarinen, A. V., & Bellucci, F. (2015). What is So Special about Logical Diagrams? Working Paper, Diagrammatic Mind Research Group. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/275038305_What_Is_So_Special_about_Logical_Diagrams

PihlsTröm, S. (2010). Peircean Modal Realism? En M. Bergman, S. Paavola, A.-V. Pietarinen, & H. Rydenfelt (edis.). Ideas in Action: Proceedings of the Applying Peirce Conference. Nordic Studies in Pragmatism 1 (Vol. 48, pp. 48-61). Helsinki Pragmatism Network: Nordic.

Pimm, D. (1990). El lenguaje matemático en el aula. Madrid: Ediciones Morata.

Platón, Candel, M., & Azcárate, P. (1997). La república o El estado. Pozuelo de Alarcón (28º ed.). Madrid: Espasa Calpe.

Platón, & Eggers, L. C. (1988). Diálogos IV. Madrid: Gredos.

Platón, & Tovar, L. A. (1970). El sofista. Madrid: Instituto de Estudios Políticos.

Ploucquet, G. (1763). Methodus Calculandi In Logicis: Praemittitur Commentatio De Arte Characteristica. (Methodus Calculandi In Logicis.). Francof. et Lipsiae. Recuperado de http://idb.ub.uni-tuebingen.de/opendigi/Ab97

─ (1766). Sammlung der Schriften welche den logischen Calcul Herrn Prof. Ploucquets betreffen, mit neuen Zusätzen. Francfurt-Leipzig: A. F. Bök. Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=DawAAAAAcAAJ&hl=es&pg=GBS.PP1

─ (1773). Method vs Tam Demonstrandi Directe Omnes Syllogismorvm Species, Qvam Vitia Formae Detegendi, Ope Vnivs Regvlae: Appendicis Loco Addita Priori Fvdamentorvm Philosophiae Specvlativae Parti. Sammlung Der Schriften, Welche Den Logischen Calcul Herrn Prof. Ploucquets Betreffen / [hrsg.: August Friedrich Bök] S. [15] - 28.

Poincaré, H. (2013). The value of science: essential writings of Henri Poincaré. New York: Modern Library.

Poizner, H., Klima, E., & Bellugi, U. (1987). What the Hands Reveal About the Brain. Cambridge Mass: MIT Press.

Politzer, G. (2005). Uncertainty and the suppression of inferences. Thinking & Reasoning, 11(1), 5-33. http://doi.org/10.1080/13546780442000088

Politzer, G., & Baratgin, J. (2016). Deductive schemas with uncertain premises using qualitative probability expressions. Thinking & Reasoning, 22(1), 78-98. http://doi.org/10.1080/13546783.2015.1052561

Polya, G. (1954). Mathematics and Plausible Reasoning, 2 Vols. Princeton: Princeton University Press.

Pool, J. C. (1968). Baser*-semigroups and the logic of quantum mechanics. Communications in Mathematical Physics 9(2), 118-141. https://doi.org/10.1007/BF01645838

Poon, C. S. (2006). Brain calculus and brain logic: A firewall for sensory integration? Comparative Neuroscience, 815, 13-54.

Popkin, R. (1979). The History of Scepticism from Erasmus to Spinoza (Vol. 226). Berkeley: Univ of California Press.

Posible (2019) Real Academia Española. Diccionario de la Lengua Española, 23.ª ed., [versión 23.2 en línea]. Recuperado de https://dle.rae.es/?id=TnPFvOp

Post, E. (1921). Introduction to a general theory of elementary propositions. Americal Journal of Mathematics 43(3), 163-185. http://dx.doi.org/10.2307/2370324

Poundstone, W. (2011). Prisoner's dilemma. New York: Anchor Books.

Poyatos, F. (1994). La comunicación no verbal: Cultura, lenguaje y conversación (Vol. 13). Madrid: Akal.

Prantl, C. (1855). Karl Prantl's Geschichte der Logik im Abendlande. Leipzig, 4, S. Hirzel.

Premack, D., & Woodruff, G. (1978). Does the chimpanzee have a theory of mind? Behavioral and Brain Sciences, 1(4), 515-526. http://doi.org/10.1017/S0140525X00076512

Probable (2019) Real Academia Española. Diccionario de la Lengua Española, 23.ª ed., [versión 23.2 en línea]. Recuperado de https://dle.rae.es/?id=UDy6509

Puebla, A. L., & González, M. Á. (2015). La memoria humana: aportaciones desde la neurociencia cognitiva. Madrid: Pirámide.

Pulvermüller, F., Huss, M., Kherif, F., del Prado Martin, F. M., Hauk, O., & Shtyrov, Y. (2006). Motor cortex maps articulatory features of speech sounds. Proceedings of the National Academy of Sciences, 103(20), 7865-7870. http://dx.doi.org/10.1073/pnas.0509989103

Putnam, H. (1957). Three-valued logic. Philosophical Studies, 8(5), 73-80. https://doi.org/10.2307/2964733

Pyne, D. A. (1997). Probability and Choice in the Selection Task. Thinking & Reasoning, 3(3), 209-235. http://doi.org/10.1080/135467897394356

Quine, W. V. (1935). Review–Collected Papers of Charles Sanders Peirce–Vol. IV. Isis, 22(2), 551-553. http://doi.org/10.1086/346931

─ (1955). Mathematical Logic (Revised ed.). Cambridge, Mass: Harvard University Press.

─ (1959). Methods of Logic (Revised ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston.

Quirós, E. P. (2008). Funciones activadoras: Principios básicos de la motivación y la emoción. Madrid: Editorial Universitaria Ramón Areces.

Rabouin, D. (2010). What Descartes knew of mathematics in 1628. Historia Mathematica, 37(3), 428-459. https://doi.org/10.1016/j.hm.2010.04.002

Radbruch, G., Delos, J. T., Le Fur, L., Breña, D. K., & & Carlyle, A. J. (1975). Los fines del derecho: bien común, justicia, seguridad. México: Unam.

Ramírez Figueroa, A. (2010). Naturaleza de los razonamientos basados en modelos. Praxis filosófica, Nueva serie (30), 7-28. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/2090/209019322001.pdf

Ramos, F., Sandín, B., & Belloch, A. (2011). Manual de Psicopatología (Vol. 2). España: McGraw-Hill.

Ramsey, J., Roush, T., Gazis, P., & Glymour, C. (2002). Automated remote sensing with near-infra-red reflectance spectra: Carbonate recognition. Data Mining and Knowledge Discovery, 6, 277–293. https://doi.org/10.1023/A:1015421711749

Ratzinger, J. (1971). La fraternidad cristiana. CuadMon, 19, 43-89.

Rawls, J. (1972). A Theory of Justice. Oxford: Clarendon Press.

Razonar (2019). Real Academia Española. Diccionario de la Lengua Española, 23.ª ed., [versión 23.2 en línea]. Recuperado de https://dle.rae.es/?id=VFwo7e1

Recalde, L. C., & Murillo, D. M. (2016). Los orígenes de la geometría: de la necesidad pragmática a la búsqueda apodíctica. Revista de Ciencias, 20(2), 99-108. http://doi.org/10.25100/rc.v20i2.4677

Rechea, C., & Seoane, J. (1991). Psicología matemática I. Madrid: UNED.

Redman, C. L., & Picazo, M. (1990). Los orígenes de la civilización: Desde los primeros agricultores hasta la sociedad urbana en el Próximo Oriente. Barcelona: Crítica.

Redondo, T. (2000). Comunicación: teoría y evolución de las señales. En A. J. Carranza (ed.). Etología: Introducción a la Ciencia del Comportamiento (pp. 255-297). Cáceres: Universidad de Extremadura.

Reichenbach, H. (2012). Philosophic foundations of quantum mechanics. Dover Publications.

Renaut, A. (1993). La era del individuo. Contribución a una historia de la subjetividad. Barcelona: Destino.

Rich, E., & Knight, K. (1994). Inteligencia artificial. Madrid: McGraw-Hill.

Richardson, M., & Domingos, P. (2006). Markov logic networks. Machine learning, 62(1-2), 107-136. https://doi.org/10.1007/s10994-006-5833-1

Riche, N. H., & Dwyer, T. (2010). Untangling euler diagrams. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 16(6), 1090-1099. http://doi.org/10.1109/TVCG.2010.210

Ricoeur, P. (1981). The Narrative Function. En J. Thompson (ed.). Hermeneutics and the Human Sciences (p. 277.). Cambridge: Cambridge University Press.

Rips, L.J. (1994). The psychology of proof. Cambridge, MA: MIT Press.

─ (1983). Cognitive processes in propositional reasoning. Psychological review, 90(1), 38. http://dx.doi.org/10.1037/0033-295X.90.1.38

Risso, A., García, M., Durán, M., Brenlla, J. C., Peralbo, M., & Barca, A. (2015). Un análisis de las relaciones entre funciones ejecutivas, lenguaje y habilidades matemáticas. Revista De Estudios E Investigación En Psicología Y Educación, (09), 073-078. https://doi.org/10.17979/reipe.2015.0.09.577

Rivière, A. (1986). Razonamiento y representación. Madrid: Siglo XXI.

Rizzolati, G., Fogassi, L., & Gallese, V. (2001). Neurophysiological Mechanisms Underlying the Understanding and Imitation of Action. Nature Reviews Neuroscience (2), 661-670. http://doi.org/10.1038/35090060

Roberts, D. (1973). The existential graphs of Charles S. Peirce. The Hague, The Netherlands: Mouton.

─ (1992). The Existential Graphs of Charles S. Peirce. Computer and Math. Applic., 23(6-9), 639-663. https://doi.org/10.1016/0898-1221(92)90127-4

Robertson, G. C. (1876). Editor,V.- Mr. Jevons's Formal Logic. Mind, 1(2), 206-222. https://doi.org/10.1093/mind/os-1.2.206

Rodgers, P., Stapleton, G., & Chapman, P. (2015). Visualizing Sets with Linear Diagrams. ACM Transactions on Computer-Human Interaction (TOCHI), 22(6), 27. http://doi.org/10.1145/2810012

Rodríguez, H. A., & Espanya. (1982). La Innovación metafísica de Ortega: Crítica y superación del idealismo. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Dirección General de Enseñanzas Medias.

Rogers, C. (1951). Client-centered therapy. Oxford, England: Houghton Mifflin.

─ (1961). On Becoming a person. Boston: Houghton Mifflin.

Rojí, M. M., & Saúl, G. L. (2011). Introducción a las psicoterapias experienciales y constructivistas. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Romanillos, A. (1789). Las Oraciones y cartas del padre de la eloqüencia Isócrates. Madrid: Imprenta Real. Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=aBMNC0--oaEC&hl=es&lr=&printsec=frontcover&pg=GBS.PA184

Rorty, R. (1982). Consequences of Pragmatism: Essays, 1972-1980. Minneapolis: University of Minessota Press.

Rosaldo, M. Z. (1982). The things we do with words: Ilongot speech acts and speech act theory in philosophy. Language in society, 11(2), 203-237. http://dx.doi.org/10.1017/S0047404500009209

Rose, P., & Woods, J. (2011). Inference as growth: Peirce's ecstatic logic of illation. OSSA Conference Archive (p. 48). University of Windsor. Recuperado de https://scholar.uwindsor.ca/cgi/viewcontent.cgi?article=1047&context=ossaarchive

Rosenblatt, F. (1958). The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. Psychological Review Tomo 65(6), 386-408. http://doi.org/10.1037/h0042519

─ (1961). Principles of neurodynamics. perceptrons and the theory of brain mechanisms (No. VG-1196-G-8). Buffalo, N.Y.: Cornell aeronautical Lab Inc.

Rousseau, J. J. (2003). El contrato social [1762]. Madrid: Alianza Editorial.

Rubin, D. B. (1978). Bayesian inference for causal effects: The role of randomization. The Annals of Statistics, 6(1), 34-58. Recuperado de https://projecteuclid.org/euclid.aos/1176344064

Rueda, M. R., & Paz-Alonso, P. M. (2013). Las funciones ejecutivas y el desarrollo afectivo. Enciclopedia sobre el desarrollo de la primera infancia. Recuperado de http://www.enciclopedia-infantes.com/sites/default/files/textes-experts/es/2480/las-funciones-ejecutivas-y-el-desarrollo-afectivo.pdf

Ruesch, J. (1956). Nonverbal communication: Notes on the Visual Perception of Human Relations. Univ of California Press.

Ruff, C. C., Knauff, M., Fangmeier, T., & Spreer, J. (2003). Reasoning and working memory: common and distinct neuronal processes. Neuropsychologia, 41(9), 1241-1253. https://doi.org/10.1016/S0028-3932(03)00016-2

Ruiz, R. M. (2004). Las Caras de la memoria. Madrid: Pearson Educación.

Rumelhart, D. E., MacClelland, J. L., & PDP Research Group. (1986). Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition: Vol. 1: Foundations. Cambridge, Mass: The MIT Press.

Ruse, M., Pérez Sedeño, E. & De Bustos, E. (2007). ¿Puede un darwinista ser cristiano?: La relacion entre la ciencia y religion. Madrid: Siglo XXI.

Russell, B. (1905). Necessity and possibility. En The Collected Papers of Bertrand Russell. Foundations of Logic: 1903–13 (Vol. 4, pp.507–520). London: Routledge.

─ (1923). Vagueness. The Australasian Journal of Psychology and Philosophy, 1(2), 84-92. https://doi.org/10.1080/00048402308540623

─ (2005). A critical exposition of the philosophy of Leibniz: With an appendix of leading passages. London: Taylor & Francis e-Library.

Russell, S. J., & Norvig, P. (2010). Artificial intelligence: A modern approach. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall.

Russell, B., & Whitehead, A. N. (1925). Principia Mathematica. Cambridge: Cambridge University Press.

Russon, A. E., & Galdikas, B. M. (1995). Constraints on great apes' imitation: Model and action selectivity in rehabilitant orangutan (Pongo pygmaeus) imitation. Journal of Comparative Psychology, 109((1), 5-17. http://dx.doi.org/10.1037/0735-7036.109.1.5

Ryan, M. J. (1985). Energetic efficiency of vocalization by the frog Physalaemus pustulosus. Journal of Experimental Biology, 116(1), 47-52. Recuperado de https://jeb.biologists.org/content/116/1/47

Sabine, G. (2002). Historia de la teoría política. México: Fondo de Cultura Económica.

Sacks, O. (2001). Un antropólogo en marte. Barcelona: Anagrama.

San Ginés, A. (2011). Visual tools for teaching propositional logic. En Tools for Teaching Logic (pp. 215-222). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21350-2_26

Sánchez, F., Rabade, S., Artola, J.M., &, Pérez, M.F. (1984). Quod nihil scitur. Madrid: Consejo superior de Investigaciones Científicas. Instituto de Filosofía Luis Vives.

Sanderson, R. (1680). Logic artis compendium. Oxoni: Excudebat Leon. Lichfield, impensis Ric. Davis.

Sanford, N. (1955). The dynamics of identification. Psychological Review, 62(2), 106-118. http://dx.doi.org/10.1037/h0044055

Santibáñez Yañez, C. (2017). Si no fuera por las imágenes: discutiendo el significado de las imágenes en la argumentación. Cogency, 9(1), 73-105. Recuperado de http://www.cogency.udp.cl/index.php/cogency/article/view/289

Sartre, J., & Fernández, V.P. (1973). El existencialismo es un humanismo. Sur, Buenos Aires: Facultad de Filosofía de San Dámaso.

Sathiyanarayanan, M., Stapleton, G., Burton, J., & Howse, J. (2014). Properties of euler diagrams and graphs in combination. En 2014 IEEE Symposium on Visual Languages and Human-Centric Computing (VL/HCC) (pp. 217-218). IEEE. http://doi.org/10.1109/VLHCC.2014.6883063

Sato, Y., & Mineshima, K. (2015). How Diagrams Can Support Syllogistic Reasoning: An Experimental Study. Journal of Logic, Language and Information, 24, 409-455. https://doi.org/10.1007/s10849-015-9225-4

Sato Y., Mineshima K., Takemura R. (2010) The Efficacy of Euler and Venn Diagrams in Deductive Reasoning: Empirical Findings. En Goel A.K., Jamnik M., Narayanan N.H. (eds). Diagrammatic Representation and Inference. Diagrams 2010. Lecture Notes in Computer Science, vol 6170 (pp.6-22). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14600-8_6

Schaal, S. (1999). Is imitation learning the route to humanoid robots? Trends in cognitive sciences, 3(6), 233-242. https://doi.org/10.1016/S1364-6613(99)01327-3

Scherer, K. (1990). Theorien und aktuelle Probleme der Emotionspsychologie. En K. Scherer (ed.). Enzyclopädie der Psychologie (C.IV.3). Psychologie der Emotion (pp. 1-38). Góttingen: Hogrefe.

Schnoebelen, T. J. (2012). Emotions are relational: positioning and the use of affective linguistic resources. (Doctoral dissertation, Stanford University, Stanford, California). Recuperado de https://purl.stanford.edu/fm335ct1355

Schopenhauer, A., & López de Santa María, P. (2009). El mundo como voluntad y representación. Madrid: Trotta.

Schroyens, W., Schaeken, W., & d' Ydewalle, G. (2001). The processing of negations in conditional reasoning: A meta-analytic case study in mental model and/or mental logic theory. Thinking and Reasoning, 7(2), 121–172. https://doi.org/10.1080/13546780042000091

Schuyler, M. A. (1869). Principles of logic for high school and colleges. Cincinnati: Wilson, Hinkle & CO. Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=7gxVAAAAMAAJ&hl=es&pg=GBS.PP1

Schwartz, S. B. (2007). Imperios intolerantes. Las raíces de la unidad religiosa y la tolerancia en los imperios ibéricos. Op. Cit. Revista del Centro de Investigaciones Históricas (18), 31-61. Recuperado de https://revistas.upr.edu/index.php/opcit/article/view/933

Scott, J. (1976). The Scientific Work of René Descartes. London: Routledge.

Searle, J. R. (1976). A classification of illocutionary acts. Language in society, 5(1), 1-23. http://dx.doi.org/10.1017/S0047404500006837

Searle, J. R., & Searle, J. R. (1969). Speech acts: An essay in the philosophy of language. Cambridge: Cambridge university press.

Sears, R. R. (1957). Identification as a form of behavioral development. En D. Harris (ed.). The concept of development (pp. 149-161). Minneapolis: University of Minnesota Press.

Sears, R. R., Rau, L., & Alpert, R. (1965). Identication and child rearing. Stanford: Stanford University Press.

Semler, C. A. (1811). Versuch über die combinatorische Methode; ein Beytrag zur angewandten Logik und allgemeinen Logik. Dresden: Walther.

Seoane, J. (2016). Demostraciones heterogéneas: revisando las preguntas. Representaciones, 12(2), 87-108. Recuperado de file:///C:/Users/Isabel/Downloads/17459-48580-1-SM.pdf

Shallice, T. (1986). Single and multiple component central dyslexic syndromes. En M. Coltheart, K. Patterson, & J. Marshall (eds.). Deep dyslexia (pp. 119-145). London: Routledge & Kegan Paul.

— (1988). From Neuropsychology to Mental Structure. Cambridge: Cambridge University Press.

Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. Bell system technical journal, 27(3), 379-423. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x

Sheffer, H. (1913). A set of five independent postulates for Boolean algebra, with application to logical constants. Transactions of the American Mathematical Society, (14), 481–488. Recuperado de https://archive.org/details/jstor-1988701

Shennan, S. (2002). Genes, memes, and human history: Darwinian archaeology and cultural evolution. New York: Thames & Hudson.

Shepard, R. N., & Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. Science, 171(3972), 701-703. http://dx.doi.org/10.1126/science.171.3972.701

Shimojima, A. (1995). Operational Constraints in Diagrammatic Reasoning. En J. Barwise (ed.). Logical Reasoning with Diagrams (pp. 27–48). Oxford University Press, Oxford.

Shimojima, A., & Katagiri, Y. (2008). Hypothetical Drawing in Embodied Spatial Reasoning. Proceedings of the 30Th Annual Meeting of the Cognitive Science Society (pp. 2247-2251). Washington DC, USA.

Shin, S.-J. (1995). Logical Status of Diagrams. Cambridge: Cambridge University Press.

─ (1999). Reconstituting Beta Graphs into an Efficacious System. Journal of Logic, Language and Information, 8, 273-295. https://doi.org/10.1023/A:1008303204427

─ (2002). The Iconic Logic of Peirce's Graphs. Cambridge, MA: MIT Press.

─ (2004). Heterogeneous Reasoning and Its Logic. The Bulletin of Symbolic Logic, 10, (1), 86-10. https://doi.org/10.2178/bsl/1080330275

─ (2009). Logical Status of Diagrams. Cambridge, GBR: University Press.

Shin, S.-J., Lemon, O., & Mumma, J. (2018). Diagrams. En The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer edition), ed. Edwar N. Zalta. Stanford University: https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/diagrams/

Shipley, B. (2000). Cause and correlation in biology. Oxford, England: Oxford University Press.

Shotter, J. (1990). The social construction of remembering and forgetting. En D. Middleton, & D. Edwards (eds.). Collective remembering (pp. 120-138.). London: Sage Publications.

Shultz, S. (2013). Diagramas, iconididad y conocimiento simbólico. En O. M. Esquisabel (ed.). Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico. Historia y teoría (pp. 121-130). Buenos Aires: Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires.

Silva, L. C. (2014). Causalidad y predicción: diferencias y puntos de contacto. Medwave, 14(08), e6016. http://doi.org/10.5867/medwave.2014.08.6016

Simon, H. A. (1983a). Reason in Human Affairs. Stanford, California: Stanford University Press.

─ (1983b). Why should machines learn? En J. R. Anderson, R. S. Michalski, J. G. Carbonell, & T. M. Mitchell (eds). Machine learning: An artificial intelligence approach, (pp. 25-37). Palo Alto, Calif: Tioga Pub. Co. http://doi.org/10.1016/B978-0-08-051054-5.50006-6

Simon, H.A., & Kaplan, C. (1989). Foundations of cognitive science. En M. I. Posner (ed.). Foundations of cognitive science (pp. 1-47). Cambridge, Mass: MIT Press.

Skinner, B. (1986). Sobre el conductismo. Barcelona: Orbis. Muy interesante. Biblioteca de divulgación científica.

Sloman, A. (1971). Interaction between philosophy and AI: The role of intuition and non-logical reasoning in intelligence. En Proceedings Second International Joint Conference on Artificial Intelligence (pp.209-226). London: William Kaufmann.

─ (1985). Why we need many knowledge representation formalisms. En M. Bramer (ed.). Research and Development in Expert Systems (pp. 163-183). Cambridge: Cambridge University Press.

─ (1995). Musings on the roles of logical and nonlogical representations in intelligence. En Janice Glasgow, Hari Narayanan, Chandrasekaran (eds.). Diagrammatic Reasoning: Computational and Cognitive Perspectives (pp. 7-32). AAAI Press

Smarandache, F. (2016). The Encyclopedia of Neutrosophic Researchers. Brussels, Belgium, EU: Pons Editions.

Smith, A. C., Surridge, A. K., Prescott, M. J., Osorio, D., Mundy, N. I., & Buchanan-Smith, H. M. (2012). Effect of colour vision status on insect prey capture efficiency of captive and wild tamarins (Saguinus spp.). Animal Behaviour, 83(2), 479-486. http://doi.org/10.1242/jeb.00536

Smith, E. E., Shoben, E. J., & Rips, L. J. (1974). Psychological Review, 81(3), 214-241. http://dx.doi.org/10.1037/h0036351

Śnieżyński, B., Szymacha, R., & Michalski, R. (2005). Knowledge Visualization Using Optimized General Logic Diagrams. En W. S. Kłopotek M.A., Intelligent Information Processing and Web Mining. Advances in Soft Computing, vol 31. https://doi.org/10.1007/3-540-32392-9_15

Sobel, D. M., Tenenbaum, J. B., & Gopnik, A. (2004). Children's causal inferences from indirect evidence: Backwards blocking and Bayesian reasoning in preschoolers. Cognitive science, 28(3), 303-333. https://doi.org/10.1207/s15516709cog2803_1

Sober, E. (1976). Mental Representations. Synthese, 33(2-4), 101-148. https://doi.org/10.1007/BF00484711

Sokolovski, D., & Connor, J. N. (1991). Negative probability and the distributions of dwell, transmission, and reflection times for quantum tunneling. Physical Review A, 44(3), 1500. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.44.1500

Sowa, J. (1984). Conceptual structures: Information processing in mind and machine. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.

─ (1997). Logic: Graphical and Algebraic. Manuskript. Croton-on-Hudson.

─ (2000). Knowledge Representation: Logical, Philosophical, Computational Foundations. London: Brooks/Cole.

Sperry, R. W. (1984). Consciousness, personal identity and the divided brain. Neuropsychologia, 22(6), 661-673. http://doi.org/10.1016/0028-3932(84)90093-9

Spinoza, B., & Gaos, J. (1977). Ética demostrada según el orden geométrico. México: UNAM.

Spirtes, P., Glymour, C., & Scheines, R. (1993). Causation, prediction, and search. New York, NY: Springer-New York.

Square-Storer, P., Roy, E., & Hogg, S. (1990). The dissociation of aphasia from apraxia of speech, ideomotor limb, and buccofacial apraxia. En G.R. Hammond (ed.). Cerebral Control of Speech and Limb Movements, (Vol.70, pp. 451- 476). Amsterdam: North-Holland.

Stanoulov, N. (1962). Notas preliminares sobre un esquema funcional del pensamiento humano. En N. Wiener, & J. P. Schadé (eds.). Sobre modelos de los nervios, del cerebro y la memoria. Madrid: Tecnos.

Stanovich, K. E., & West, R. F. (2000). Individual differences in reasoning: Implications for the rationality debate? Behavioral and brain sciences, 23(5), 645-665. http://dx.doi.org/10.1017/S0140525X00003435

Stapleton, G. (2005). A Survey of Reasoning Systems Based on Euler Diagrams. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 134, 127-151. https://doi.org/10.1016/j.entcs.2005.02.022

Stekeler-Weithofer, P. (1986). Grundprobleme der Logik: Elemente einer Kritik der formalen Vernunft. Berlin & New York: de Gruy.

Stenning, K., & Lemon, O. (2001). Aligning logical and psychological perspectives on diagrammatic reasoning. Artificial Intelligence Review, 15(1-2), 29-62. https://doi.org/10.1023/A:1006617525134

Stenning, K., & Oberlander, J. (1995). A cognitive theory of graphical and linguistic reasoning: logic and implementation. Cognitive Science, 19(1), 97–140. https://doi.org/10.1016/0364-0213(95)90005-5

Styazhkin, N. (1969). History of mathematical logic from Leibniz to Peano. Cambridge, MA: MIT Press.

Sutherland, S., & Gonzalez, C. (1996). Irracionalidad: El enemigo interior. Madrid: Alianza.

Sutton III, G. G., Reggia, J. A., Armentrout, S. L., & D'Autrechy, C. L. (1994). Cortical map reorganization as a competitive process. Neural Computation, 6(1), 1-13. http://dx.doi.org/10.1162/neco.1994.6.1.1

Svenbro, J. (1993). Phrasikleia: an anthropology of reading in ancient Greece. Ithaca, N.Y: Cornell University Press.

Tamayo, M. (1986). El proceso de la investigación científica. Fundamentos de investigacion. Mexico: Editorial Limusa.

Tanner Jr, W. P., & Swets, J. A. (1954). A decision-making theory of visual detection. Psychological review, 61(6), 401. http://dx.doi.org/10.1037/h0058700

Tarn, W. (1927). Hellenestic Civilisation. London: Edward Arnold and Co.

Tarpy, R. M. (2000). Aprendizaje: teoría e investigación contemporáneas. Madrid: McGraw-Hill.

Tennant, N. (1986). The Withering Away of Formal Semantics? Mind and Lenguaje, 1(4), 302-318. https://doi.org/10.1111/j.1468-0017.1986.tb00328.x

Tenorio, J. R. (2017). Instante y momento oportuno en los grafos existenciales de Charles S. Peirce. Por una dimensión kairológica de la creatividad. Pensamiento. Revista de Investigación e Información Filosófica, 73(276), 301-318. Recuperado de https://proyectoscio.ucv.es/wp-content/uploads/2017/09/04-Jose-Romero-Tenorio.pdf

Tesouro Cid, M. (2004). Evolución y utilización de Internet en la educación. Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación, 24, 59-67. Recuperado de http://hdl.handle.net/11441/45584

The American News Company. (1869). The American Booksellers' Guide. Published Monthly, 1(8). Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=bFa2QSdGIG0C&hl=es&pg=GBS.PA1

Thibaud, P. (1982). La Lógica de Charles Sanders Peirce: Del álgebra a los gráficos. Madrid: Paraninfo.

Thiel, C. (1982). From Leibniz to Frege: Mathematical logic between 1679 and 1879. En L. Jonathan Cohen, Jerzy Łoś, Helmut Pfeiffer, Klaus-Peter Podewski (eds.). Logic, methodology, and philosophy of science VI: Proceedings of the Sixth International Congress of Logic, Methodology, and Philosophy of Science (Vol. 104, pp. 755-770). Amsterdam: North-Holland Pub. Co.http://doi.org/10.1016/S0049-237X(09)70232-0

Thomson, W. (1842). Outline of the laws of thought. London: William Graham. Recuperado de https://archive.org/details/outlinelawsthou00thomgoog

─. (1871). An Outline of the Necessary Laws of Thought, A Treatise on Pure and Applied Logic (Fourth ed.). New York: Sheldon & CO. Recuperado de https://play.google.com/books/reader?id=u4xWAAAAYAAJ&hl=es&pg=GBS.PP1

Tirapu-Ustárroz, J., Pérez-Sayes, G., Erekatxo-Bilbao, M., & Pelegrín-Valero, C. (2007). ¿Qué es la teoría de la mente? Revista de neurología, 44(8), 479-489. DOI: https://doi.org/10.33588/rn.4408.2006295

Toader I.D. (2004) On Frege's Logical Diagrams. En: Blackwell A.F., Marriott K., Shimojima A. (eds) Diagrammatic Representation and Inference. Diagrams 2004. Lecture Notes in Computer Science, vol 2980 (pp. 22-25). Berlín: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-25931-2_4

Tolman, E. (1932). Purposive Behavior in animals and men. New York: Century Crofts.

Tomás de Aquino (1955). In Aristotelis libros Peri hermeneias et posteriorum analyticorum expositio. Taurini, Marietti

Tomasello, M. (2008). Origins of human communication. Cambridge, Mass: MIT Press.

Trafton, J.G., Trickett, S.B (2001). A new model of graph and visualization usage. En: Moore, J.D., Stenning, K. (eds.) The Proceedings of the Twenty Third Annual Conference of the Cognitive Science Society (Vol 23, Nº 23, pp. 1048–1053). Erlbaum, Mahwah. Recuperado de https://escholarship.org/content/qt4j33h1qp/qt4j33h1qp.pdf

Trillas, E. (2015). Razonamiento, significado, incertidumbre y borrosidad. Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Tulving, E., Schacter, D. L., & Stark, H. A. (1982). Priming Effects in Word Fragment Completion are independent of Recognition Memory. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 8(4), 336-342. http://dx.doi.org/10.1037/0278-7393.8.4.336

Turing, A. (1936). On computable numbers, with an aplicationto the Entscheidungs-Problem. Proceedings of the London Mathematical Society, serie 2, (42), 230-265. https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230

Tversky, A., & Kahneman, D. (septiembre de 1973). Availability: A heuristic for judging frequency and probability. Cognitive Psychology, 5(2), 207-232. http://doi.org//10.1016/0010-0285(73)90033-9

Tversky, B. (2011). Visualizing thought. Topics in Cognitive Science, 3(3), 499-535. https://doi.org/10.1111/j.1756-8765.2010.01113.x

Uche, M. G., & Alonso, L. E. E. (2015). Homeostasis y representaciones intelectuales: una aproximación a la conducta moral desde la teoría de la emoción de Antonio Damasio. Persona y bioética, 19(1), 80-98. Recuperado de https://personaybioetica.unisabana.edu.co/index.php/personaybioetica/article/view/4260

Ueberweg, F. (. (2001). System of Logic and history of logical doctrines. Bristol, England: Thoemmes Press.

Uerberweg, F., & Lindsay, T. (1871). System of Logic and History of Logical Doctrines. London: Longmans, Green & CO.

Ustárroz, J. T., Molina, A. G., Lario, P. L., & García, A. V. (2012). Corteza prefrontal, funciones ejecutivas y regulación de la conducta. En J. Tirapu Ustárroz, A. García Molina, M. Ríos Lago, A. Ardila Ardila (eds). Neuropsicología de la corteza prefrontal y las funciones ejecutivas (pp. 87-120). Barcelona: Viguera

Valentine, C. W. (1930). The psychology of imitation with special reference to early childhood. British Journal of Psychology, 21, 105-132. https://doi.org/10.1111/j.2044-8295.1930.tb00580.x

Valiño, V. (2013). ¿Es la Begriffsschrift de Frege un sistema diagramático? En O. M. Esquisabel, & F. T. Sautter (eds.). Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico. Historia y teoría. (p. 136). Buenos Aires, Argentina: Centro de Estudios Filosóficos Eugenio Pucciarelli.

van der Heijden, A. (1999). Cognition for Selection. Visual Cognition, 6(1), 83-87. http://doi.org//10.1080/713756802

Van Heuveln, B. (2006). Using existential graphs to integrate mental logic theory and mental model theory. Journal Of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence, 18(2), 149-155. http://doi.org/10.1080/09528130600575863

Vargas Melgarejo, L. M. (1994). Sobre el concepto de percepción. Alteridades, 4(8), 47-53. Recupeado de https://alteridades.izt.uam.mx/index.php/Alte/article/view/588

Vázquez Alonso, A., & Manassero Mas, M. A. (1993). La atribución causal del éxito y el fracaso escolar en matemáticas y física y química de Bachillerato. Enseñanza, 10-11, 237-258. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=95668

Veitch, J. (1883). Sir William Hamilton: The man and his philosophy: two lectures delivered before the Edinburgh Philosophical Institution, January and February 1883. Edinburgh: W. Blackwood.

Venn, J. (1880) I. On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 10:59, 1-18, http://doi.org/10.1080/14786448008626877

BIBLIOGRAFÍA

─ (1881). Symbolic logic. London: MacMillan. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1037/14127-000

─ (1894). Symbolic Logic (2º ed.). London: Macmillan.

Villalobos, M., & Dewhurst, J. (2016). Cognición, computación y sistemas dinámicos: vías para una posible integración teórica. Límite. Revista Interdisciplinaria de Filosofía y Psicología, 10(10), 10-20. Recuperado de http://limite.uta.cl/index.php/limite/article/view/189

Villar, A. (1998). Resolviendo problemas de Matemáticas y lógica con Lewis Carroll. Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 34, 39-45. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2344726

Villegas Besora, M. (2011). Los valores: Análisis existencial. En B. Rojí Menchaca, & L. Á. Saúl Gutierrez, Introducción a las piscoterapias experienciales y constructivistas (pp. 69-118). Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Visacovsky, S. E. (1999). Edipo: interpretando por el mito. Revista de Investigaciones Folclóricas, 14, 18-24.

Visokolskis, S. (2008). Peirce y la Creatividad como Plasticidad del Hábito. III Jornadas "Peirce en Argentina". Recuperado de http://www.unav.es/gep/IIIPeirceArgentinaVisokolskis.html

Visokolskis, S., & Carrión, G. (2013). Charles Sanders Peirce y Giambattista Vico. Acerca de la fertilidad del ingenio en la ciencia. Revista de Filosofía Conceptos, 3(4), 166-192. Recuperado de http://hdl.handle.net/11336/23187

─ (2017). Saltos cognitivos: asociaciones y abducción en Peirce. VII Jornadas "Peirce en Argentina". Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires. Recuperado de file:///C:/Users/Isabel/Downloads/VIIJornadasVisokolskisCarri%C3%B3n.pdf

Vives, I. L. (1531). De censura veri et falsi in De disciplinis Libri XX, Tertio tomo de artibus libri octo, Antverpia: Michael Hillenivs.

Vlasits, J. J. (2017). Platonic Division and the Origins of Aristotelian Logic (Doctoral dissertation, University of California, Berkeley). Recuperado de https://escholarship.org/uc/item/5ts6f7z4

Von Bertalanffy, L. (1968). General System Theory Foundations, Development. New York George Braziller.

─ (1972). The history and status of general systems theory. Academy of Management Journal, 15(4), 407-426. https://doi.org/10.5465/255139

Von Neumann, J. (2018). Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. En N. A. Wheeler, & R. T. Beyer (eds.). Princeton: Princenton University Press.

Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944). Theory of games and economic behavior. Princenton: Princeton university press.

Vygotsky, L. S. (1962). Thought and language. Cambridge, Mass: MIT Press.

Vygotsky, L. S., Cole, M., Luria, A. R., & Furió, S. (1979). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Buenos Aires: Grijalbo

Vygotski, L. S., Kozulin, A., & Abadía, P. T. (1995). Pensamiento y lenguaje. En Obras escogidas (Vol. 2, pp. 97-115). Barcelona: Paidós. Recuperado de http://www.unifal-mg.edu.br/humanizacao/wp-content/uploads/sites/14/2017/04/Vygotsky_Obras_escogidas_TOMO_2.pdf

Wason, P. (1959). The processing of positive and negative information. Quarterly Journal of Experimental Psychology, 11(2), 92–107. https://doi.org/10.1080/17470215908416296

Weber, M., & Gavilán, D. E. (2014). Sociología de la religión. Madrid: Akal.

Weik, M. (2000). logic diagram. En Computer Science and Communications Dictionary.Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/1-4020-0613-6

Weiner, B. (1986). An attibution theory of motivation and emotion. New York: Springer-Verlag.

Weiner, B., & Graham, S. (1989). Understanding the motivational role of affect: Life-span research from an attributional perspective. Cognition & Emotion, 3(4), 401-419. https://doi.org/10.1080/02699938908412714

Weise, C., & Lange, J. C. (1712). Johannis Christiani Langii Nucleus logicae Weisianae. Gissae-Hassorum: H. Müller. Recuperado de https://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/weise1712/0477/image

Weiss, H. M. (1977). Subordinate imitation of supervisor behavior: The role of modeling in organizational socialization. Organizational behavior and human performance, 19(1), 89-105. http://dx.doi.org/10.1016/0030-5073(77)90056-3

Westbury, C., & Dennet, D. (2000). Mining the past to construct the future: Memory and beliefs as Forms of Knowledge. En D. Schacter, & E. Scarry (eds.). Memory, Brain and Belief (1-32). Cambridge Mass: Harvard University Press.

Whately, R. (1853). Elements of Logic. New York: Harper and Brothers publishers.

Whiting, J. W. (1960). Resource mediation and learning by identification. En L. Iscoe, & W. Stevenson (eds.). Personality development in children (pp. 112-126). Austin: University of Texas Press.

Wicker, A. W. (1979). An introduction to ecological psychology. Monterey, CA: Brooks/Cole.

Wilce, J. M. (2010). Language and emotion. Cambridge: Cambridge University Press.

Wildberg, C. (2018). Juan Filopón. En The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter edition), ed. Edwar N. Zalta. Stanford University. Recuperado de https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/philoponus/

Wilson, E. O. (1998). Sociobiology. Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard Univ. Press.

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. Psychonomic Bulletin & Review, 9(4), 625-636. http://doi.org/10.3758/BF03196322

Wilson, J. C., & Farquharson, A. S. L. (1926). Statement and inference: With other philosophical papers. Oxford: The Clarendon Press

Winston, P. H. (1993). Artificial intelligence. Reading, Mass: Addison-Wesley.

Wittgenstein, L. (1922). Tractatus Logico-Philosophicu s. London: London: Routledge & Kegan Paul.

─ (1958). Philosohical investigations. (G. E. Anscombe, Trad.) Oxford: Basil Blackwell Ltd.

Wittgenstein, L., & Regera, J.M. (1992). Tractatus logico-Philosophicus. Alianza Editorial.

Xing, C., Corter, J., & Zahner, D. (2016). Diagrams Affect Choice of Strategy in Probability Problem Solving. En U. Y. Jamnik M. (ed.). Diagrammatic Representation and Inference. Diagrams 2016. Lecture Notes in Computer Science, vol 9781. Springer, Cham. http://doi.org/10.1007/978-3-319-42333-3_1

Yagüe, E. F. (1998). Didáctica e historia de la geometría euclidiana. México: Iberoamérica.

Zalamea, F. (1993). Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de CS Peirce a la lógica matemática del siglo XX. Mathesis, 9(4), 391-404.
Recuperado de http://mathesis.digital/wp-content/uploads/2018/04/2.Zalamea.Jabalina.pdf

Zeki, S. (1992). La imagen visual en la mente y el cerebro. Investigación y Ciencia, 194, 26-35. Recuperado de https://www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/procesamiento-cerebral-de-las-palabras-65/la-imagen-visual-en-la-mente-y-en-el-cerebro-4951

Zelazo, P. D., & Müller, U. (2002). Executive function in typical and atypical development. En U. Goswami (ed.). Blackwell handbook of childhood cognitive development (pp. 445-469). Oxford: Blackwell.

Zeman, J. (1962). La información y el cerebro. En N. Wiener, & J. P. Schadé (eds.). Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria. Madrid: Tecnos.

─ (1964). The Graphical Logic of C. S. Peirce. (Ph.D. thesis), University of Chicago.

Zerpa Morloy, L. (2001). Fundamentos lógicos de las redes neurales artificiales: Reconstrucción estructuralista del perceptrón de una y dos capas. 28. Caracas: Universidad Central de Venezuela, Facultad de Humanidades y Educación Instituto de Filosofía.

Zhang, N. L., & Poole, D. (1996). Exploiting causal independence in Bayesian network inference. Journal of Artificial Intelligence Research, 5(1), 301-328. Recuperado de http://hdl.handle.net/1783.1/26228

12 ANEXOS

12.1 Tabla de ilustraciones más relevantes

30. EL CONJUNTO COMO UNIDAD LÓGICA ELEMENTAL DE LAS REDES DE EXPECTATIVAS 81
31. PROPAGACIÓN DE LA ACTIVACIÓN POR LOS NODOS DE UN CONJUNTO 82
34. SEGUNDA INFERENCIA 87
38. SUBSISTEMA DICOTÓMICO TEÓRICO ALFA 90
39. DEFINICIÓN DE LOS CONECTORES EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS MARLO 92
46. INFERENCIA LOGO-NUMÉRICA EN LAS REDES 101
54. SISTEMA ALFA COMPLETO CON RELACIONES CONTRARIAS Y COMPLEMENTARIAS 108
55. NI ESTÁN TODOS LOS QUE SON (A) NI SON TODOS LOS QUE ESTÁN 109
64. DISTINTOS TIPOS DE CONDICIONAL EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS 135
67. ISOMORFISMO DIAGRAMAS DE MARLO Y REDES DE EXPECTATIVAS 154
70. ESTRUCTURA ELEMENTAL DE LAS PROPOSICIONES EN EL DIAGRAMA DE MARLO 156
73. DIECISÉIS MODELOS PROPOSICIONALES SEGÚN LA CUALIDAD Y LA CANTIDAD DE SUJETO Y PREDICADO 159
74. EJEMPLOS DE INTERPRETACIÓN DE MODELOS COMPLEJOS 162
83. DIFERENTES PERSPECTIVAS DE UNA PROPOSICIÓN CONDICIONAL 173
86. DIFERENTES MODELOS DE LA PROPOSICIÓN NO EXISTE ¬B 174
87. CONECTORES LÓGICOS EN EL DIAGRAMA DE MARLO 175
88. EJEMPLOS DE CONVERSIÓN DE MODELOS 176
93. PROPOSICIÓN INDEFINIDA *"A NO ES B"* EN DIAGRAMAS DE MARLO, REDES Y TABLAS DE VERDAD 180
103. LEYES EN LA SÍNTESIS DE MODELOS PROPOSICIONALES 194
105. LEYES DE LA INFERENCIA POR EXCLUSIÓN 195
112. CORRESPONDENCIA FIGURAS ARISTÓTELES, BOOLE Y DIAGRAMA DE MARLO 206
123. MODO AE DE LA PRIMERA FIGURA SUPERFICIAL QUE SE CORRESPONDE CON LA SEGUNDA FIGURA LÓGICA . 216
129. CESARE EN LAS REDES CON LA CONVENCIÓN ARISTOTÉLICA 219
132. CAMESTRES POR INVERSIÓN Y POR ABSURDO EN DIAGRAMA DE MARLO 222
138. DEMOSTRACIÓN DE LA CONCLUSIÓN DE BAROCO REDUCIÉNDOLO A LA PRIMERA FIGURA POR ABSURDO 227
145. DEMOSTRACIÓN DE DARAPTI POR DARII EN *ANALÍTICOS PRIMEROS* 233
146. DARAPTI A DARII POR ÉCTESIS, BASADO EN *ANALÍTICOS PRIMEROS* 234
156. FELAPTON POR ABSURDO EN EL DIAGRAMA DE MARLO, BASADO EN *ANALÍTICOS PRIMEROS* 241
168. DIFERENCIA EN LAS REDES DE *TODO A ES B* EN BASE A SU CARÁCTER DE NECESARIA Y/O ASERTÓRICA 250
175. PRIMER INDEMOSTRABLE EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS 259
176. PRIMER INDEMOSTRABLE EN EL DIAGRAMA DE MARLO 260
189. IMPLEMENTOS DE RELACIÓN PROPOSICIONES SECUNDARIAS 274
193. "(A→B) →(¬C→¬D)" Y CINCO PREMISAS MÁS EN EL DIAGRAMA DE MARLO PARA CONJUNTOS 281
194. EJERCICIO EN REDES CON CÉLULAS COMPLEJAS 282
195. EJEMPLO DE RELACIONES COMPLEJAS ENCADENANDO CONDICIONES 283
201. PROPOSICIÓN DE SEGUNDO GRADO EN DIAGRAMA DE MARLO "(A→B) →(¬C→D)" 289
202. CORRESPONDENCIA DEL MODELO QUE CONDENSA *(A→B) →(¬C→D)* CON LAS TABLAS DE VERDAD 290
205. DILEMA DEL MENTIROSO. ADAPTADO DE LA PELÍCULA DE 1986 DENTRO DEL LABERINTO 300
216. LAS TRES FIGURAS DEL SILOGISMO ARISTOTÉLICO EN DIAGRAMAS LINEALES 313
257. COMPARACIÓN DE LOS CÍRCULOS DE RAMÓN LLUL, LEIBNIZ, EULER Y VENN 332
272. SILOGISMO NUMÉRICO CON INCERTIDUMBRE EN DIAGRAMAS DE MARLO Y DIAGRAMAS DE VENN 353
286. *NINGUNA A ES B* EN DIAGRAMAS DE VENN, DE MARLO, REDES DE EXPECTATIVAS Y TABLAS DE VERDAD 369
293. CAMENES EN VENN Y MARLO 378
298. PROBLEMA COMPLEJO DE VENN COMPARADO CON MARLO 384
300. SILOGISMO CON SIETE TÉRMINOS QUE GENERARÍA EN VENN 128 COMPARTIMENTOS 386
319. SILOGISMO CON CUANTIFICADORES INDETERMINADOS EN EL DIAGRAMA DE MARLO 400
334. COMPARATIVA MARQUAND-MARLO 416
340. PROPOSICIONES DE RELACIONES SIN DENOTACIÓN EXISTENCIAL: CARROLL, MARLO Y REDES 422
356. PROPOSICIONES CLÁSICAS DEL SILOGISMO EN PEIRCE Y MARLO 434
374. PASO DEL MODUS PONENS AL MODUS TOLLENS EN FREGE, DIAGRAMA DE MARLO Y REDES 452
377. COMPARATIVA SISTEMAS DIAGRAMÁTICOS: LEIBNIZ, EULER, HAMILTON, VENN, PEIRCE Y MARLO 454
386. INFOGRAFÍA PARA RESOLVER SILOGISMOS EN LAS REDES DE EXPECTATIVAS 464
387. INFOGRAFÍA PARA TRABAJAR ÁRBOLES LÓGICOS CON LOS PRINCIPIOS DE LAS REDES DE EXPECTATIVAS 465

12.2 Índice de tablas más significativas

3. PRINCIPIOS CUANTITATIVOS DEL SISTEMA 109
5. ESQUEMA BÁSICO DE LA CALCULADORA LÓGICA 120
6. RELACIÓN ENTRE CONECTORES LÓGICOS Y ACTIVACIÓN DE LOS NODOS 124
9. "NINGÚN HOMBRE ES UNA QUIMERA" POR OBVERSIÓN Y CONTRAPOSICIÓN 144
14. PROPOSICIONES CONSIDERANDO LA CUALIDAD DE LA CÓPULA, CON TÉRMINOS POSITIVOS Y NEGATIVOS 159
15. EJEMPLOS DE LAS DIECISÉIS PROPOSICIONES BÁSICAS CONSIDERANDO LA CUALIDAD DE LAS VARIABLES 161
17. NOTACIÓN CON Y SIN OMISIONES 168
20. TRANSFORMACIÓN DE PROPOSICIONES EN EL DIAGRAMA DE MARLO 171
21.DIFERENCIA ENTRE CONVERTIR Y TRANSFORMAR 173
25.FIGURAS SUPERFICIALES Y PROFUNDAS DEL SILOGISMO EN EL DIAGRAMA DE MARLO 207
31. IMPLEMENTO DE CELDAS PARA PROPOSICIONES SECUNDARIAS EN LA CALCULADORA LÓGICA 269
32. RESULTADO DE LA CONJUNCIÓN DE DISTINTOS GRADOS DE CERTEZA 277
33. VARIABLES DE EXISTENCIA 278
34. CONVENCIONES EMPLEADAS PARA EXPRESAR RELACIONES Y ACCIONES 297
42. AUMENTO DE LA ENTROPÍA PRODUCIDO POR LA CONDENSACIÓN DEL MENSAJE EN CAMENES 379
43. COMPARACIÓN DE LA DIAGRAMATIZACIÓN CONDICIONAL HAMILTON-VENN-MARLO 391
47. RESULTADOS DEL PRIMER EXAMEN DE SILOGISMOS CON LA VERSIÓN INICIAL DEL DIAGRAMA DE MARLO 456
48. COMPARACIÓN ACIERTO EJERCICIO CON MÉTODO TRADICIONAL Y NOTACIÓN DE DIAGRAMAS DE MARLO 459
49. FORMALIZACIÓN DE UNIVERSAL NEGATIVA EN ALUMNOS DE CIENCIAS Y LETRAS DEL IES PABLO NERUDA 468

12.3 Anexos en memoria externa

ANEXO 1. CAP 5, CONECTORES EN LAS REDES. ARCHIVO DE VÍDEO

ANEXO 2. CAP, 5, CALCULADORA LÓGICA NO EDITABLE. ARCHIVO EXCELL

ANEXO 3. CAP 7, FORMALIZAR PROPOSICIONES. ARCHIVO DE VÍDEO

ANEXO 4. CAP 7, CONVERSIÓN. ARCHIVO DE VÍDEO

ANEXO 5. CAP 7, SÍNTESIS. ARCHIVO DE VÍDEO

ANEXO 6. CAP 7, EXCLUSIÓN. ARCHIVO DE VÍDEO

ANEXO 7. CAP. 9, PRACTICAR INFERENCIAS. INFOGRAFÍA EN CHROME HTLM

ANEXO 8. CAP 9, REDES SILOGISMO. INFOGRAFÍA EN CHROME HTLM

ANEXO 9. CAP. 9, REDES PROPOSICIONES. INFOGRAFÍA EN CHROME HTLM

ANEXO 10. RAZONAR CON EL HEMISFERIO DERECHO. ARCHIVO DE VÍDEO