

# Universidad de Huelva

Departamento de Ingeniería Electrónica, de Sistemas  
Informáticos y Automática



Universidad  
de Huelva

**Sobre las curvas tensión-deformación de hormigones y  
otros materiales sometidos a ensayos de tensión uniaxial**

**Memoria para optar al grado de doctor  
presentada por:**

**Francisco Jesús Salguero Andújar**

Fecha de lectura: 9 de febrero de 2012

Bajo la dirección del doctor:

Sixto Romero Sánchez

**Huelva, 2014**

**ISBN: 978-84-16061-05-1**

**D.L.: H 29-2014**

FRANCISCO JESÚS SALGUERO ANDÚJAR

SOBRE LAS CURVAS TENSIÓN-DEFORMACIÓN DE  
HORMIGONES Y OTROS MATERIALES SOMETIDOS A  
ENSAYOS DE TENSIÓN UNIAXIAL

TESIS DOCTORAL

dirigida por el Prof. Dr. Sixto Romero Sánchez

Departamento de Ingeniería Electrónica, de Sistemas  
Informáticos y Automática



**Universidad  
de Huelva**

Palos de la Frontera  
Enero 2012











SOBRE LAS CURVAS TENSIÓN-DEFORMACIÓN DE HORMIGONES Y OTROS  
MATERIALES SOMETIDOS A ENSAYOS DE TENSIÓN UNIAXIAL

TESIS DOCTORAL



FRANCISCO JESÚS SALGUERO ANDÚJAR

SOBRE LAS CURVAS TENSIÓN-DEFORMACIÓN DE  
HORMIGONES Y OTROS MATERIALES SOMETIDOS A  
ENSAYOS DE TENSIÓN UNIAXIAL

TESIS DOCTORAL

dirigida por el Prof. Dr. Sixto Romero Sánchez

Departamento de Ingeniería Electrónica, de Sistemas  
Informáticos y Automática



**Universidad  
de Huelva**

Palos de la Frontera  
Enero 2012

MATLAB<sup>®</sup> es una marca registrada de The MathWorks, Inc. La versión utilizada en este trabajo es la 7.1.0.246 (R14) con licencia número 15353636.

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X es software libre bajo licencia LaTeX Project Public License (LPPL) versión 1.3c y WinEdt<sup>®</sup> es una marca registrada de WinEdt Inc. El texto del presente trabajo ha sido compuesto usando WinEdt versión 5.4 con licencia número 1640127943465255329.



DEPARTAMENTO  
DE MATEMÁTICAS

**Universidad de Huelva**

Avda. de las Fuerzas Armadas, s/n  
21071 Huelva  
Tel. (+34) 959219910  
Fax (+34) 959219900

Sixto Romero Sánchez, Catedrático de Escuela Universitaria del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Huelva,

CERTIFICO:

Que el presente trabajo, intitulado “Sobre las curvas tensión-deformación de hormigones y otros materiales sometidos a ensayos de tensión uniaxial”, que presenta Francisco Jesús Salguero Andújar para la obtención del título de Doctor, ha sido realizado bajo mi dirección en el Departamento de Ingeniería Electrónica, de Sistemas Informáticos y Automática de esta Universidad.

Revisado el presente trabajo, estimo que puede ser presentado al Tribunal que ha de juzgarlo.

Y para que conste a efectos de lo establecido en el *Reglamento de Estudios Oficiales de Posgrado de la Universidad de Huelva*, autorizo la presentación de este trabajo.

Palos de la Frontera, 19 de diciembre de 2011

Director: Dr. Sixto Romero Sánchez

Doctorando: Francisco Jesús Salguero Andújar



*A mi mujer, Manuela  
y a mis hijos, Paco y Enrique.*

*A las personas que dedican su vida  
a hacer posible que otras personas  
dediquen su vida a la investigación.*



## AGRADECIMIENTOS

Toda vez que el apartado “agradecimientos” aparece en los manuales de redacción de tesis doctorales al uso como *opcional*, incluirlo en ésta es un acto *voluntario*, es decir, que obedece a mi voluntad y, por tanto, que acometo consciente y decididamente pues considero que omitirlo, —máxime habiendo desarrollado todo el trabajo en el seno de una institución pública—, sería injusto. Por ello, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a algunas personas e instituciones que me han facilitado y ayudado, por un lado, a concebir, desarrollar y ordenar las ideas que contiene el texto y, por otro, a obtener los datos experimentales necesarios para contrastarlas. Y como quiera que los agradecimientos, para serlos realmente, han de ser explícitos y razonados, me gustaría nombrar a las personas que de una u otra forma me han ayudado directamente a realizar este trabajo.

En primer lugar, a Fernando de Cos, catedrático de la *vieja escuela*, mi primer profesor universitario de *Cálculo*, que tuvo el valor de poner en práctica una fórmula de mi querido Antonio Sáseta que recomiendo a menudo a mis compañeros docentes: *atrévete a llevarte lo que impartes en el doctorado, a primero y el programa de primero, impártelo en los cursos de doctorado*. Sus inolvidables clases despertaron en mí el espíritu investigador. Gracias *maestro*.

A Sixto Romero, director de esta tesis —quien, por otra parte, en aquella primera época de mis estudios daba perfecta réplica a Fernando en la otra mitad de la asignatura: *Álgebra*—, por dirigirla como él sólo sabe y por soportar mis continuos cambios de dirección —e incluso de sentido—, a la hora de fijar un tema en el que concentrar los esfuerzos, actitud sólo esperada de aquéllos pocos investigadores que disfrutaban más del camino recorrido que de los resultados del trabajo. Mi gratitud.

A mi amigo, Fulgencio Prat. Su ayuda ha sido decisiva en la construcción de esta tesis. Porque siendo director del departamento apostó *contra viento y marea*, por dotarlo de un laboratorio de hormigones sin el que nada de lo que resta hubiese podido ser escrito; por su aliento constante y su ayuda ubicua y por escucharme una y mil veces las hipótesis que no puedo contar a nadie. Pero como le gusta decir que los amigos no se dan las gracias: sea.

A José Manuel Andújar, que me ha brindado generosamente tantas sesiones de su escaso tiempo para exponerle mis ideas, atender mis múltiples dudas, sugerirme nuevos caminos y apoyarme en todo cuanto le solicité. Quiero hacer extensivo este agradecimiento al elenco de profesores del *Máster en Ingeniería de Control, Sistemas*

*Electrónicos e Informática Industrial*, que cursé antes de comenzar este trabajo de investigación, por su excelencia docente y por poner en mis manos herramientas informáticas sin las que la labor hubiese sido mucho más penosa.

A Paco Moreno, que pacientemente me ha dado a conocer el manejo del compilador y del editor con el que escribo estas líneas y porque fue uno de los primeros amigos —también Antonio Tomé—, en ofrecerse para escuchar y darme su opinión sobre la tesis que pretendía poner en pie.

A Pepe Carbajo, a Joaquín Maraver, a Juan Daniel Mozo y a Manuel López, profesores del *Departamento de Ingeniería Química, Química Física y Química Orgánica de la Universidad de Huelva*, les debo algunas amables sesiones críticas y valiosas sugerencias cuando la investigación aún avanzaba al paio.

En la parte experimental del trabajo he contado con la inestimable e indispensable colaboración, por un lado, de Ramón Garrido, responsable de los laboratorios del departamento, de Aritz Areta, alumno becario que se dejó seducir por los *encantos* del estudio del hormigón y de Laura Gómez, que suele proporcionarnos muestras de una microsílíce finísima ideal para fabricar hormigones de alta resistencia; y por otro, del conglomerado de empresas *Grupo Cementos Portland Valderrivas*. La planta del *Pol. Ind. Nuevo Puerto* de la empresa *Hympsa* perteneciente al citado grupo, puso a mi disposición su laboratorio cuando el de mi departamento no era más que un sueño: gracias a su director, Andrés Espuela y especialmente, a su laborante, Manuel Bendala. También la fábrica de cementos del grupo en Alcalá de Guadaíra, suministró amable y desinteresadamente el cemento con el que se elaboraron las probetas de hormigón y, por qué no decirlo, con el que hacen las prácticas mis alumnos cotidianamente.

A mis compañeros del *Departamento de Ingeniería Minera, Mecánica y Energética de la Universidad de Huelva* por permitir, con su apoyo, que poco a poco se vaya configurando un espacio experimental de docencia e investigación en torno al hormigón y, en especial, a su directora María Luisa de la Torre.

A Federico Blasco, mi gran amigo, por *malale08*. Él sabe.

Por último, a Manuela, a Paco y a Enrique, que me soportan, me ayudan y me quieren.

*Francisco J. Salguero*

En Palos de la Frontera, a tantos

## RESUMEN

### **Sobre las curvas tensión-deformación de hormigones y otros materiales sometidos a ensayos de tensión uniaxial**

Autor: Francisco J. Salguero Andújar  
Director: Prof. Dr. Sixto Romero Sánchez

El hormigón, material estructural más usado en el mundo, es un material compuesto, heterogéneo, multifase, anisotrópico y de una reología harto compleja. A través de los años se ha considerado material *elástico*, *plástico*, *elasto-plástico*, *visco-elasto-plástico* e incluso perfectamente *frágil*. La curva que relaciona la deformación relativa que se produce en una probeta de hormigón con la tensión de compresión uniaxial aplicada para producir dicha deformación, depende de numerosos factores entre los que destacan el tiempo de curado, la forma y proporciones de la probeta, la resistencia última de la misma, la velocidad con que se impone la deformación o la tasa de incremento de la tensión que se le aplica. Así, desde los años 50 del siglo pasado, se han ido construyendo verdaderas dinastías de curvas tensión-deformación, en el mejor de los casos basadas en modelos teóricos de comportamiento y en otros, obtenidas simplemente mediante técnicas de ajuste de curvas a partir de datos experimentales.

La existencia de más de una treintena de fórmulas que relacionan la deformación relativa que se produce en una probeta de hormigón cuando se le aplica una carga de compresión uniaxial con la deformación relativa que experimenta, incluyendo las propuestas por la normativa oficial de muchos países, parecía indicar que en este tema era necesaria una investigación unificadora y, al mismo tiempo, generalizadora. Otras tantas expresiones pueden encontrarse a la hora de fijar o determinar el módulo de elasticidad inicial del hormigón, i. e., el módulo de elasticidad del hormigón cuando aún no se ha aplicado sobre éste carga alguna. Resultaba a la vez paradójico y alentador que, con la precisión de los métodos actuales de ensayo, no hubiese dos instituciones de investigación en el mundo que se pusieran de acuerdo a la hora de fijar una fórmula para su determinación o un valor universalmente aceptado para el citado módulo de elasticidad inicial del hormigón.

Recientemente, la Mecánica del Daño Continuo —CDM— (*Continuum Damage Mechanics*), ha proporcionado enfoques que, junto a consideraciones propias de la física estadística, han permitido vislumbrar resultados hacia una generalización de las expresiones que relacionan la tensión aplicada con la deformación producida en los ensayos

de compresión del hormigón. La tesis que se propone es una generalización de dichas expresiones.

Probada la bondad de los resultados en todo tipo de materiales y en ensayos, no sólo de compresión, sin también de tracción, esta tesis presenta una ecuación que relaciona la deformación que experimenta un material sometido a cargas uniaxiales aplicable a todo tipo de sólidos —tanto los usados comúnmente en ingeniería estructural (dúctiles o frágiles) como los tipo goma e incluso a los denominados biomateriales (colágeno, tendones o arterias)—, que contempla cualquier tasa de deformación impuesta en el ensayo y libre de constantes elásticas que haya que suponer inherentes a los materiales. Además, la ecuación permite modelar tanto la parte ascendente de la curva tensión-deformación como la descendente, incluyendo la zona post-fractura, es decir, *incluye* el propio ensayo en la formulación. La ecuación propuesta ha sido obtenida a partir de una generalización completa del concepto de respuesta de las partículas del material, de los postulados del modelo de daño continuo y de una función de distribución estadística de amplia aplicabilidad. El trabajo de estructura en cinco capítulos:

- En el *capítulo 1*, de carácter introductorio, se exponen las características generales de los ensayos, se describen las variables que entran en juego en el proceso y se presentan los resultados del ensayo de una *probeta tipo* que servirá para comparar la bondad de las ecuaciones que se analizan en el capítulo siguiente.
- En el *capítulo 2* se realiza una revisión bibliográfica de la literatura relacionada con el objeto de la tesis, centrándonos en las ecuaciones propuestas para modelar el comportamiento tenso-deformacional del hormigón bajo cargas de compresión uniaxial y en las fórmulas y valores mayoritariamente aceptados para el valor del módulo de elasticidad inicial de dicho material.
- En el *capítulo 3*, se propone una función general que modela el comportamiento del hormigón sometido a cargas uniaxiales de compresión basada en la CDM y en una distribución de probabilidad generalizada. Asimismo, se analiza la posibilidad de incluir una función núcleo —*kernel*— para *incluir* el desarrollo del ensayo en la formulación y se analizan las consecuencias de esa inclusión en el papel que juega el módulo de elasticidad inicial del hormigón en el proceso.
- El *capítulo 4* constituye la verificación experimental de los resultados, en primer lugar, en el caso del hormigón, para lo que se somete a la ecuación propuesta al contraste con los resultados de una campaña de ensayos realizada a tal fin. A continuación, se propone y realiza la extensión del modelo a otros materiales y otro tipo de ensayo —tracción—, con especial atención a materiales metálicos estructurales —aceros al carbono, inoxidables, aleaciones de aluminio—, e incluso a materiales no estructurales —polímeros, gomas, fibras de colágeno o pelo humano.
- El *capítulo 5* es el dedicado a exponer las conclusiones y a bosquejar posibles líneas futuras de investigación.

## ABSTRACT

### On the stress-strain curves for concrete and other materials under uniaxial stress testing

Author: Francisco J. Salguero Andújar  
Supervisor: Prof. Dr. Sixto Romero Sánchez

Concrete, the world's most used structural material, is a composite, heterogeneous, multi-phase, and anisotropic highly complex rheology material. Over the years has been considered an *elastic, plastic, elasto-plastic, viscoelasto-plastic* and even perfectly *brittle* material. The stress-strain curve for a concrete specimen when applying a uniaxial compressive load, depends on numerous factors among which stand the curing process, the shape and proportions of the specimen, its ultimate strength or the imposed strain rate. Thus, since the 50's of last century have been built true dynasties of stress-strain curves, the best based on behavior models and others, obtained simply by curve fitting techniques using experimental data.

The existence of more than thirty stress-strain equations, including those proposed by the Government regulations in many countries seemed to indicate that in this matter, unifying, and at the same time, generalizing research was needed. So many expressions can be found to fix or determine the initial modulus of concrete, i. e., the modulus of elasticity of concrete when hasn't been applied any load. Was both paradoxical and encouraging that, with the precision of current tests methods, there weren't two research institutions in the world to agree in setting a formula for its determination or a universally accepted value for the above mentioned initial elastic modulus of concrete.

Recently, *Continuum Damage Mechanics* —CDM—, has provided approaches, with specific considerations of statistical physics, that allow to glimpse a generalization of stress-strain equations for the uniaxial compression tests of concrete. The proposed thesis is a generalization of these expressions.

Tested the goodness of the results in all kinds of materials and trials, not only in compression but also in tension, this thesis presents an equation that relates the deformation of a material under uniaxial load applied to all types of solids — both commonly used in structural engineering (ductile or brittle) and the rubber-like materials and even the so-called bio-materials (collagen, tendons or arteries )—, which holds good for any strain rate imposed in the test and is free of elastic constants that have to be assumed inherent to materials. In addition, the equation allows us to model both the ascending

branch of the stress-strain curve as the descending, including post-fracture zone, i. e., *includes* the test itself in the formulation. The proposed equation has been obtained from a complete generalization of the concept of response of the material particles, from the continuum damage model postulates and from a statistical distribution function of wide applicability. The work divided into five chapters:

- In *Chapter 1*, as an introduction, we present general characteristics of the tests, with special attention in the concrete compression test, describe the variables related to process and present the results from a *standard specimen* that will serve to compare goodness of the equations discussed in the next chapter.
- In *Chapter 2*, we review the literature concerning the subject of the thesis, focusing on the equations to model the stress-strain behavior of concrete under uniaxial compressive loads and in the equations and values for the most widely accepted value of the initial modulus of this material.
- In *Chapter 3*, we propose a general function that models concrete behavior under uniaxial compression loads based on the CDM and on a generalized probability distribution. It also discusses the possibility of using a *kernel function* to *include* the development of the test in the formulation and discusses the implications of such inclusion on the role of the initial modulus of concrete in the process.
- *Chapter 4* is the experimental verification of results first in the case of concrete, in which the proposed equation is submitted to the contrast with the results of a series of tests conducted for this purpose. Then proposes and carries out the extension of the model to other materials and other types of test —tension— with emphasis on structural metallic materials —plain-carbon steels, stainless steels, aluminum alloys—, and even non-structural materials —rubber-like materials, polymers, collagen or human hair.
- *Chapter 5* is devoted to exposing the conclusions and outline possible future research lines.

## ÍNDICE DE FIGURAS

1. Julius Carl von Bach .....	6
2. Tres curvas típicas para hormigones sometidos a compresión uniaxial .....	10
3. Curvas tensión-deformación relativa de dos tipos de acero .....	11
4. Definiciones de extensiones .....	14
5. Definiciones de límites superior e inferior de cedencia .....	15
6. Representación de las velocidades de ensayo (método A) .....	17
7. Representación de las velocidades de ensayo (método B) .....	18
8. Métodos de evaluación para la <i>extensión porcentual del escalón de cedencia</i> ....	19
9. Curvas tensión-deformación de dos probetas modelo de hormigón medio .....	21
10. Portada del número 33 de la revista <i>Schweizerische Bauzeitung</i> .....	24
11. Karl Wilhelm Ritter (1847-1906) .....	25
12. Comparación entre los datos experimentales de la probeta ensayada con tasa de incremento de la tensión constante (M1) y la ecuación propuesta por Ritter —ec. (5)— .....	27
13. Comparación entre los datos experimentales de la probeta ensayada con tasa de incremento de la tensión constante (M1) y la ecuación propuesta por Bach —ec. (2)— .....	29
14. Comparación entre los datos experimentales de la probeta ensayada con tasa de incremento de la deformación constante —curva completa (M2)— y la ecuación propuesta por Smith y Young .....	30
15. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Sturman, Shah y Winter .....	32
16. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Desayi y Krishnan .....	33
17. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Saenz .....	34
18. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M1 y la ecuación propuesta por Saenz .....	34
19. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Tulin y Gerstle .....	35

20. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Popovics o Carreira y Chu.....	36
21. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Alexander.....	37
22. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Tsai.....	38
23. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y las ecuaciones propuestas por Wang, Shah y Naaman.....	39
24. Esquema del microelemento estructural de hormigón según Shah y Winter.....	41
25. Portada del artículo de Weibull de 1939.....	42
26. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Shah y Winter.....	43
27. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y las ecuaciones y el algoritmo incremental propuestos por Blechman.....	47
28. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Collins, Mitchel y MacGregor.....	48
29. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Tasnimi.....	50
30. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y las ecuaciones propuestas en el Código modelo CEB-FIP MC 90.....	52
31. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y las ecuaciones propuestas por Gysel y Taerwe —Boletín de Información no. 228 del CEB—...	53
32. E. H. Waloddi Weibull (1887-1979).....	60
33. Valores, por defecto y por exceso, del parámetro $\varepsilon_a$ que hace a la distribución de Weibull lineal en el plano $x = \ln \ln \left( \frac{1}{1-P} \right)$ .....	64
34. Analogía entre exponentes y órdenes de derivación fraccionarios.....	67
35. Página 410 del tratado de Silvestre François Lacroix: <i>Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral</i> (2ª Ed., Courcier, París, 1819).....	69
36. Esquemas para los modelos de Hooke y Newton.....	72
37. Esquema del modelo de Maxwell.....	73
38. Esquema del modelo de Voigt.....	73
39. Esquema del modelo de Kelvin.....	74
40. Esquema del modelo de Zener.....	74

41. Las tres leyes de comportamiento clásicas: Hooke, fluencia constante y ecuación de Bach .....	82
42. Representación <i>incompleta</i> —izquierda— y <i>completa</i> —derecha— de una curva tensión-deformación genérica .....	83
43. Representación de una <i>barrera de potencial</i> entre $\varepsilon_a = 2$ y $\varepsilon_u = 3$ .....	85
44. Microscopía electrónica de un acero estructural .....	86
45. Curva típica del comportamiento tenso-deformacional de un acero estructural ..	87
46. Comparación entre los datos experimentales de Kato <i>et al.</i> [102] y la ecuación propuesta .....	88
47. Modelo ideal de material unidimensional perfectamente elástico .....	91
48. Parte compleja —en rojo— de la función de la ec. (145) cuando $\xi_u$ es real .....	95
49. Probabilidad de obtener una respuesta afirmativa —1— a la pregunta <i>¿estoy realizando el experimento?</i> respondida con ayuda de un medidor de tiempos de precisión infinita .....	96
50. Probabilidad de obtener una respuesta afirmativa —1— a la pregunta <i>¿estoy realizando el experimento?</i> respondida con la única ayuda de la observación del sol .....	97
51. Probabilidad de obtener una respuesta afirmativa —1— a la pregunta <i>¿estoy realizando el experimento?</i> respondida con la ayuda de un medidor de tiempos de precisión representada por el exponente real $m = 6.453$ .....	98
52. Probabilidad de obtener una respuesta afirmativa —1— a la pregunta <i>¿estoy realizando el experimento?</i> respondida sin hacer mediciones (exponente $m = 0.5$ ). La función de onda no colapsa .....	98
53. Curva granulométrica del árido grueso .....	102
54. Curva granulométrica del árido fino, comprendida en los límites recomendados por la EHE-08 .....	103
55. Marcado CE del aditivo utilizado para la elaboración de las probetas de alta resistencia .....	104
56. Ficha técnica del humo de sílice usado como adición para la elaboración de probetas de hormigones de alta resistencia .....	105
57. Ficha técnica de la microsílíce usada como adición para la elaboración de probetas de hormigones de alta resistencia .....	106
58. Pundit Plus .....	107
59. Acoplamiento de los transductores a la probeta .....	107

60. Prensa utilizada en los ensayos a compresión del hormigón.....	108
61. Colocación del extensómetro utilizado para medir la deformación en los ensayos.....	109
62. Inicio del ensayo .....	110
63. Fin del ensayo (tasa de incremento de la deformación constante).....	110
64. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M1 —ensayada con tasa de incremento de la tensión constante— y la ecuación propuesta en la tesis .....	111
65. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 —ensayada con tasa de incremento de la deformación constante— y la ecuación propuesta en la tesis.....	112
66. Comparación entre los datos experimentales de la probeta B2 —ensayada con tasa de incremento de la deformación constante— y la ecuación propuesta en la tesis.....	113
67. Comparación entre los datos experimentales de la probeta H2 —ensayada con tasa de incremento de la deformación constante— y la ecuación propuesta en la tesis.....	115
68. Comparación entre los datos experimentales de una probeta de latón y la ecuación propuesta en la tesis.....	118
69. Placa que transporta la astronave <i>Pioneer 10</i> .....	119
70. Comparación entre los datos experimentales de una probeta de aleación de aluminio 6061-T6 y la ecuación propuesta en la tesis.....	119
71. Comparación entre los datos experimentales de una probeta de acero inoxidable y la ecuación propuesta en la tesis.....	121
72. Curva tensión-deformación idealizada en la que se aprecia un tramo en el que aparece el efecto Portevin-Le Chatelier .....	121
73. Onda cuadrada de amplitud y semiperiodo unitarios, y 10 <i>crestas</i> .....	122
74. Comparación entre una onda cuadrada periódica y una onda cuadrada exponencial.....	123
75. Comparación entre los datos experimentales de una probeta de acero 1045 y la ecuación propuesta en la tesis.....	124
76. Comparación entre los datos experimentales de una probeta de poli(metil metacrilato) —PMMA— y la ecuación propuesta en la tesis.....	125
77. Comparación entre los datos experimentales de una probeta de polipropileno y la ecuación propuesta en la tesis.....	126

78. Comparación entre los datos experimentales de una probeta de elastómero termoplástico —TPE— Elastollan<sup>®</sup> C 95 A y la ecuación propuesta en la tesis . 128
79. Comparación entre los datos experimentales de un tendón ensayado a tracción y la ecuación propuesta en la tesis..... 129
80. Comparación entre los datos experimentales del pelo humano ensayado a tracción y la ecuación propuesta en la tesis..... 130



## ÍNDICE DE TABLAS

1. Velocidades de puesta en carga .....	18
2. Dosificación por $m^3$ de un hormigón de características medias.....	20
3. Valores característicos obtenidos en los ensayos de las probetas de hormigón medio utilizadas como patrones de comparación .....	21
4. Cuadro resumen de las ecuaciones analizadas y sus resultados de ajuste.....	56
5. Forma de las distribuciones límite para máximos extraídos de muestras cuya distribución inicial es $F(x)$ .....	80
6. Resultados del análisis granulométrico del árido grueso .....	102
7. Resultados del análisis granulométrico del árido fino .....	102
8. Dosificación por $m^3$ de un hormigón de características mínimas.....	113
9. Valores característicos obtenidos en los ensayos de las probetas de hormigón bajo, utilizadas para comprobar experimentalmente el ajuste de la ecuación propuesta .....	113
10. Dosificación por $m^3$ de un hormigón de altas características.....	114
11. Valores característicos obtenidos en los ensayos de las probetas de hormigón alto, utilizadas para comprobar experimentalmente el ajuste de la ecuación propuesta .....	114



## ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	xi
RESUMEN	xiii
ABSTRACT	xv
ÍNDICE DE FIGURAS	xvii
ÍNDICE DE TABLAS	xxii

### CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

<b>1.1 Alcance de la tesis</b> .....	8
<b>1.2 Los ensayos de tensión uniaxial</b> .....	9
1.2.1 El ensayo de compresión de probetas de hormigón.....	9
1.2.2 Las curvas tensión-deformación del hormigón.....	10
1.2.3 Las curvas tensión-deformación de aceros y otros materiales metálicos.....	11
1.2.4 El ensayo de tracción de probetas de acero y otros materiales.....	12
<b>1.3 Probeta y curva modelo</b> .....	20

### CAPÍTULO 2 REVISIÓN DE LA BIBLIOGRAFÍA

<b>2.1 Las primeras propuestas</b> .....	25
2.1.1 Karl Wilhelm Ritter.....	25
2.1.2 La ecuación de Bach.....	28
<b>2.2 Smith y Young</b> .....	29
<b>2.3 Modelos basados en funciones racionales</b> .....	31
2.3.1 Introducción.....	31
2.3.2 Sturman, Shah y Winter.....	31
2.3.3 Desayi y Krishnan.....	32

2.3.4 Saenz .....	33
2.3.5 Generalizaciones de la ecuación de Desayi y Krishnan: Tulin y Gerstle, Popovics y Carreira y Chu .....	35
2.3.6 Alexander .....	36
2.3.7 Tsai .....	37
2.3.8 Primer modelo disociado: la ecuación de Wang, Shah y Naaman .....	38
<b>2.4 Modelos basados en distribuciones estadísticas del concepto de daño ..</b>	<b>40</b>
2.4.1 Introducción .....	40
2.4.2 Shah y Winter .....	40
2.4.3 Las ecuaciones de Blechman .....	44
<b>2.5 Modelos multiexponente.....</b>	<b>47</b>
2.5.1 Collins, Mitchel y MacGregor .....	47
2.5.2 Tasnimi .....	49
<b>2.6 El Código Modelo y la EHE-08.....</b>	<b>50</b>
2.6.1 Introducción .....	50
2.6.2 El Código Modelo de 1990.....	51
2.6.3 El Código modelo de 2010.....	53
2.6.4 La Instrucción de Hormigón Estructural EHE-08.....	54
<b>2.7 Cuadro resumen.....</b>	<b>55</b>

### CAPÍTULO 3 METODOLOGÍA

<b>3.1 La teoría estadística de la resistencia de materiales de Weibull.....</b>	<b>59</b>
3.1.1 Introducción .....	59
3.1.2 La distribución de Weibull.....	63
3.2.3 La Distribución del Valor Extremo Generalizada.....	65
<b>3.2 Cálculo fraccional.....</b>	<b>66</b>
3.2.1 Introducción .....	66
3.2.2 Definiciones de derivada e integral de orden fraccional. Cálculo difer- integral .....	68
3.2.3 El cálculo diferintegral y los modelos constitutivos .....	72
<b>3.3 Generalizar, generalizar y generalizar.....</b>	<b>76</b>
3.3.1 Introducción .....	76
3.3.2 Primera generalización: ley de Hooke <i>ampliada</i> .....	78
3.3.3 Segunda generalización: la distribución de Weibull.....	79
3.3.4 Tercera generalización: la Distribución del Valor Extremo Generalizada....	79
3.3.5 Directriz general de la tesis.....	80
3.3.6 Formulación básica de la ecuación tensión-deformación: forma restringida..	80
3.3.7 Las leyes clásicas como casos límite de la ecuación propuesta.....	82
<b>3.4 Ampliaciones de la ecuación.....</b>	<b>83</b>
3.4.1 Las curvas tensión-deformación <i>completas</i> .....	83

3.4.2 Los materiales <i>compuestos</i> .....	86
3.4.3 Forma general de la ecuación .....	88
<b>3.5 Sobre el módulo de elasticidad y la incertidumbre inicial en los experimentos</b> .....	89
3.5.1 La tangente en el origen .....	89
3.5.2 Principio de indeterminación .....	93
3.5.3 Función de onda para los ensayos .....	95

## CAPÍTULO 4 VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL

<b>4.1 Materiales empleados para obtener las probetas de hormigón</b> .....	101
4.1.1 Cementos .....	101
4.1.2 Áridos .....	101
4.1.3 Reductor de agua de alta actividad/superplastificante .....	103
4.1.4 Microsílice y humo de sílice .....	103
<b>4.2 Instrumental</b> .....	106
4.2.1 Medidor del tiempo de tránsito de los pulsos ultrasónicos a través del hormigón .....	106
4.2.2 Máquina de compresión .....	108
4.2.3 Compresómetro/extensómetro .....	108
4.2.4 Inicio y fin del ensayo .....	109
<b>4.3 Verificación experimental de los resultados en hormigones</b> .....	111
4.3.1 Probeta M1. Tasa de incremento de la tensión constante .....	111
4.3.2 Probeta M2. Tasa de incremento de la deformación constante .....	111
4.3.3 Hormigones de baja resistencia. Probeta B2 .....	112
4.3.4 Hormigones de alta resistencia. Probeta A2 .....	114
<b>4.4 Aplicabilidad de la ecuación propuesta a otros materiales.</b>	
<b>Metales no férricos</b> .....	115
4.4.1 Introducción .....	115
4.4.2 Latón .....	117
4.4.3 Aleación de aluminio 6061-T6 .....	118
<b>4.5 Aceros de construcción. Modelado del efecto Portevin-Le Chatelier</b> ..	120
4.5.1 Acero inoxidable 304 .....	120
4.5.2 Acero 1045: modelando el efecto Portevin-Le Chatelier .....	121
<b>4.6 Resultados en polímeros: plásticos y gomas</b> .....	125
4.6.1 Poli(metil metacrilato) .....	125
4.6.2 Polipropileno .....	126
4.6.3 Elastómero termoplástico Elastollan <sup>®</sup> C 95 A .....	127
<b>4.7 Ajuste observado en biomateriales</b> .....	128
4.7.1 Tendones .....	128

4.7.2 Pelo humano .....	129
-------------------------	-----

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

<b>5.1 Conclusiones</b> .....	131
<b>5.2 Líneas de investigación abiertas</b> .....	133
<b>REFERENCIAS</b> .....	137

## CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

*No hace falta renunciar al pasado  
al entrar en el porvenir. Al cambiar  
las cosas no es necesario perderlas.*

John Cage.

Sólo considerando que la *ingeniería clásica* —representada por el ingeniero práctico en el ejercicio de la profesión libre—, y la *ingeniería científica* —representada por la teoría académica— simbolizan dos caras de una misma moneda, fue posible que el actual sistema de ciencias de la ingeniería comenzara a surgir durante la Revolución Industrial. Su cooperación supuso el punto de partida en la formación del sistema de ciencias de la ingeniería y su posterior consolidación en el conjunto de ramas del conocimiento humano. Ello fue debido a que esta cooperación marcó el fin de la dualidad entre ingeniería clásica e ingeniería científica, que tenía su base en la disputa entre ambos tipos de ingenieros acerca de los principios generales sobre los que debía fundarse la disciplina.

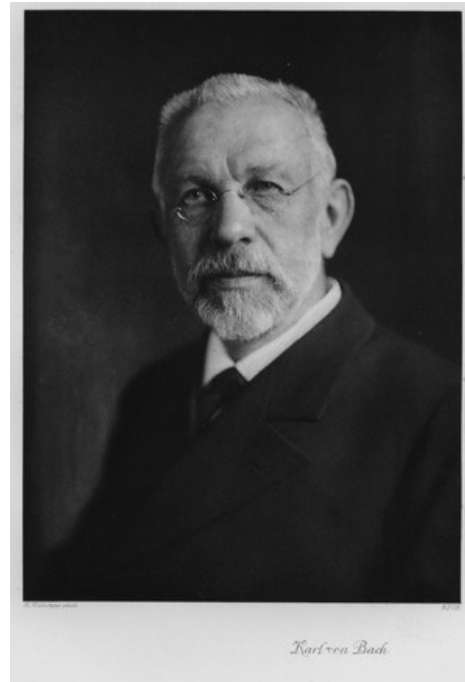
Desde entonces, el punto de partida y el objetivo en la interpretación y modelado técnico de métodos, materiales y objetos fue el conocimiento de las relaciones *causales* existentes entre éstos. Sólo de esta manera fue posible la interacción entre lo analítico y lo sintético; lo deductivo y lo inductivo; lo teórico y lo práctico; lo abstracto y lo concreto; lo *a posteriori* y lo *a priori* y lo universal y lo particular, para producir un sistema de ciencias ingenieriles efectivo en la práctica [1].

En términos, tanto del conocimiento empírico como del de carácter marcadamente teórico, de las relaciones causales existentes como objetivo del modelado técnico, el cambio de rumbo hacia las deseadas relaciones de objetivación de materiales y métodos técnicos se convirtieron en el ideal de conocimiento de la ingeniería científica.

En ese sentido, —y paradójicamente, dado el tiempo transcurrido—, no encuentro mejores palabras para introducir este trabajo que las de Julius Carl von Bach —nacido en Stolberg el 8 de marzo de 1847 y fallecido en Stuttgart el 10 de octubre de 1931, fue uno de los pioneros en el trabajo experimental sobre materiales— quien, en el prólogo de su *Elasticität und Festigkeit*<sup>1</sup>, publicado en 1899, sentencia:

---

<sup>1</sup>Elasticidad y Resistencia



**Fig. 1.** Julius Carl von Bach (1874-1931).

*[...]puede que este trabajo no sea más que un paso en una nueva dirección encaminado a exponer la importancia del conocimiento del comportamiento real de los materiales y para clarificar lo inadecuado de utilizar únicamente las leyes de proporcionalidad entre esfuerzos y deformaciones para construir el corpus de conocimiento completo de la elasticidad y resistencia [de materiales] sobre la base de las matemáticas. Al contrario, se mostrará la necesidad del ingeniero de diseño de comprender, una y otra vez, las condiciones para las que las ecuaciones concretas que utiliza, sobre la base de la experiencia, están disponibles, i. e., cuándo calcula las dimensiones con pleno conocimiento de las verdaderas relaciones, sin permanecer atado al corsé de fórmulas estándar. También se demostrará la necesidad de crítica para valorar las expresiones obtenidas matemáticamente en relación a su grado de exactitud en la medida en la que esto sea posible, con el nivel de conocimientos actuales, y que si aquellas —incluyendo la selección [de] y la formación en nuevos métodos— resultan inadecuadas, entonces nuestro primer objetivo debería ser volver a remitir nuestro interés hacia La Naturaleza —por el engrandecimiento de la ingeniería y, por consiguiente, de la industria [2].*

Considerado el fundador de la moderna *Elasticidad y Resistencia de Materiales*, en sus artículos de entre 1895 y 1900 para la *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*<sup>2</sup> [3-7], Bach fue el primero en proponer una ley potencial para la curva tensión-deformación del hormigón —y de otros materiales—, con base en los numerosos experimentos realizados

<sup>2</sup>Revista de las Asociaciones de Ingenieros Alemanes.

por él en el *Materialprüfungsanalt der Stuttgart Technische Hochschule*<sup>3</sup>, patrocinado por la firma Wayss & Freytag, que intentaba conseguir la supremacía en Alemania en la construcción de obras de hormigón armado a costa de su directo competidor, el *emprendedor* francés François Hennebique [8]. La ecuación propuesta —de la que da cuenta Emil Mörsch en su *Der Betoneisenbau* (también publicado por Wayss & Freytag) cuando dice: *las curvas de deformación encontradas por Bach son tan regulares que pueden ser representadas por una ecuación exponencial* [9]—, se escribía:

$$\varepsilon = \alpha \sigma^m \quad (1)$$

donde  $\varepsilon$  es la deformación por unidad de longitud o *deformación relativa*,  $\sigma$  es la tensión aplicada o fuerza por unidad de superficie y  $\alpha$  y  $m$  son constantes que dependen de las propiedades del material. En la representación más empleada actualmente tendríamos:

$$\sigma = K \varepsilon^n \quad (2)$$

con  $K = \alpha^{\frac{-1}{m}}$  y  $n = \frac{1}{m}$ . Los resultados obtenidos por los ensayos de Bach —expresados en kp y cm<sup>2</sup>—, arrojaban unos valores medios de  $\alpha = \frac{1}{315000}$  y  $m = 1.15$ , lo que en términos actuales supondría:

$$\sigma = 60414.28 \varepsilon^{0.87} \quad (3)$$

Retengamos en la memoria las ecuaciones (2) y (3) ya que —aunque propuestas en 1897—, parecerán tener el don de la ubicuidad en el desarrollo de la tesis.

Sin embargo, —quizá influenciado por algunos hechos catastróficos acaecidos en torno a 1900, como el colapso (con una decena de muertos) que sufrió en 1901 el recién terminado edificio para el *Hotel zum Bären* en Basilea, de 5 plantas y construido bajo licencia Hennebique—, Mörsch critica la adopción de modelos de dimensionamiento que asuman las verdaderas curvas tensión-deformación que se obtenían en los ensayos, argumentando que tales asunciones —como la del diagrama parabólico o la consideración de la resistencia a tracción—, producen expresiones demasiado complicadas para los ingenieros de cálculo, aunque sus autores consideren dicha complejidad como una característica particular de su exactitud. La linealización de la distribución de esfuerzos de compresión y la negación de la resistencia a tracción, son suficientes para el modelo de cálculo de Mörsch porque, aunque considera los ensayos fundamentales para el modelado científico ingenieril, en su opinión, el propósito de cualquier cálculo estructural es únicamente, verificar el cumplimiento de un coeficiente de seguridad aceptable, mientras que la determinación exacta de los esfuerzos y deformaciones que tienen lugar en el interior de una edificación para un estado de cargas determinado, sería menos importante. Es decir, se colocó la seguridad de las estructuras en lo más alto del escalafón de prioridades de la comunidad internacional de ingenieros dedicados al diseño y cálculo de estructuras de hormigón armado.

Desde entonces, el paradigma ha cambiado drásticamente. Una vez superada la fase en la que la preocupación fundamental era asegurar la seguridad de las estructuras, el aumento exponencial que ha experimentado el uso del hormigón armado como material estructural primario en la edificación de estructuras complejas —como rascacielos, vasijas para reactores nucleares o bases de plataformas petrolíferas oceánicas—, ha hecho

<sup>3</sup>Instituto de Ensayo de Materiales de la Escuela Técnica Superior de Stuttgart, de la que fue director entre 1885 y 1888.

imprescindible el desarrollo de modelos de comportamiento cada vez más sofisticados, necesarios para la predicción precisa de la respuesta del material ante una gran variedad de situaciones de carga.

Por otra parte, los nuevos desarrollos que están teniendo lugar en el área de la tecnología de fabricación de este material, están dando como resultado una nueva generación de hormigones mejores en términos de rendimiento, prestaciones, resistencia y durabilidad, lo que acentúa aún más la necesidad de disponer de modelos precisos y completos para estos *nuevos materiales*. Como ejemplo pueden citarse los hormigones de alta resistencia (HAR)<sup>4</sup> —de resistencia característica a compresión superior a los 50 MPa—, los reforzados con fibras (HRF)<sup>5</sup>, los hormigones autocompactantes (HAC)<sup>6</sup>, los hormigones ultra resistentes de polvo reactivo (RPC)<sup>7</sup> —armados con pequeñas fibras metálicas y que alcanzan una resistencia característica a compresión de entre 200 y 800 MPa—, los hormigones reciclados (HR), los sorprendentes hormigones translúcidos (LTC)<sup>8</sup> o —por qué no decirlo—, dada la continua innovación en este terreno, los nuevos que se hayan desarrollado desde que escribimos este párrafo hasta que se concluya el trabajo.

### 1.1 Alcance de la tesis

Antes de proseguir, queremos realizar algunas precisiones sobre el verdadero propósito y alcance del presente trabajo de investigación que nos ayuden a delimitar exactamente lo que debe esperarse del mismo.

Si bien una *ecuación constitutiva* es una relación entre las variables termodinámicas o mecánicas de un sistema físico, en Mecánica de los Medios Continuos, el término ecuación o *modelo constitutivo* ha derivado más bien hacia relaciones entre *magnitudes tensoriales* que no son derivables de leyes generales de conservación o de otro tipo de leyes universales y que son específicas del tipo de problema estudiado. Otra de las misiones normalmente encomendadas a los modelos constitutivos es que, una vez establecidos, deben proporcionar predicciones sobre el comportamiento del sistema o material que modelan, de tal manera que nos permitan diseñar o dimensionar elementos fabricados con dicho material sin que el espécimen concreto haya sido ensayado previamente. En ese sentido, esta tesis no preconiza un modelo constitutivo. Por un lado, porque las magnitudes con las que se trabajará serán magnitudes *escalares*<sup>9</sup> y, por otro, porque, aunque de las relaciones propuestas pueda derivarse una ecuación constitutiva, preferimos hablar de una ecuación que modela la *forma* de la curva tensión-deformación. Así, la forma de dicha curva se estudia aquí como lo haría un forense por lo que podríamos ver este trabajo a modo de *autopsia* efectuada a la probeta a través de la huella impresa en el plano  $\varepsilon$ - $\sigma$  por el proceso de deformación hasta su fatal desenlace. Es decir, se apuesta por un enfoque

---

<sup>4</sup>En inglés HSC: *High Strength Concrete*.

<sup>5</sup>En inglés FRC: *Fiber Reinforced Concrete*. También pueden citarse los HPFRCC: *High-Performance Fiber-Reinforced Cementitious Composites* (compuestos cementicios de altas prestaciones reforzados con fibras).

<sup>6</sup>En inglés SCC: *Self-Compacting Concrete*.

<sup>7</sup>*Reactive Powder Concrete* (hormigón de polvo reactivo), también conocidos como UHPC: *Ultra-High Performance Concrete* (hormigón de prestaciones ultra-altas).

<sup>8</sup>*Light Translucent Concrete*.

<sup>9</sup>Si bien la tensión es, en general, un vector, las tensiones uniaxiales de tracción o compresión aquí estudiadas pueden ser correctamente representadas mediante un único escalar.

*fenomenológico.*

Por otra parte, esta tesis se denominaba en un principio: *Sobre las curvas tensión-deformación de hormigones sometidos a cargas monotónicas de compresión uniaxial*, título bastante más restrictivo que el que tiene actualmente. Aunque está centrada básicamente en el ensayo de compresión de probetas estándar de hormigón, el propio desarrollo de la investigación fue mostrando cómo las ecuaciones que íbamos obteniendo se adaptaban de manera sorprendentemente precisa a otros materiales y a otras formas de imprimir la deformación que la compresión monotónica, lo que nos obligó a extender el campo de investigación, incluyendo en el título *otros materiales*. Dado que los ensayos de otros materiales —como el acero— se realizan mayoritariamente en tracción, decidimos sustituir el término compresión por el de tensión, que en castellano engloba esfuerzos tanto de compresión como de tracción.

Así pues, presentamos aquí una ecuación que relaciona la tensión con la deformación relativa que experimenta un material sometido a cargas uniaxiales —de compresión o de tracción— aplicable a todo tipo de sólidos —tanto los usados comúnmente en ingeniería estructural (dúctiles o frágiles) como elastómeros (tipo goma) o poliméricos (tipo PMMA<sup>10</sup>) e incluso a los denominados biomateriales (colágeno, tendones o arterias)— que contempla cualquier tasa de deformación impuesta en el ensayo y libre de constantes elásticas que haya que suponer inherentes a los materiales. Además, después de asumir que la propia realización del ensayo era una variable más del proceso a tener en cuenta, la ecuación permite modelar tanto la parte ascendente de la curva tensión-deformación como la descendente, incluyendo la zona post-fractura.

## 1.2 Los ensayos de tensión uniaxial

### 1.2.1 El ensayo de compresión de probetas de hormigón

En el ensayo de compresión de probetas de hormigón, básicamente, se someten a cargas cada vez mayores a probetas cilíndricas o cúbicas del citado material hasta su rotura. Eventualmente, si se quiere obtener una gráfica de las deformaciones producidas mientras se produce el proceso de carga, se colocan extensómetros o galgas extensiométricas sobre la probeta para medir y registrar la deformación que experimenta la misma durante el ensayo.

Todas y cada una de las variables *externas* —i. e., que no son propias del material en sí— que intervienen en el ensayo de compresión de una probeta de hormigón —tipo de máquina de ensayo, forma y proporciones de la probeta (si es cilíndrica especialmente su diámetro y su *tasa de esbeltez*<sup>11</sup>), la *tasa de incremento de la tensión*<sup>12</sup> o la *tasa de incremento de la deformación relativa*<sup>13</sup>, el diámetro del plato sobre el que se coloca la probeta, la forma de contacto de la misma con dichos platos (que puede ser directa, mediante refrentado con mortero de azufre, mediante lechos de arena o neopreno, etc)—, modifican sustancialmente la forma de la curva tensión-deformación que se obtiene tras el

---

<sup>10</sup>Polimetilmetacrilato.

<sup>11</sup>Relación entre el diámetro y la altura de la probeta.

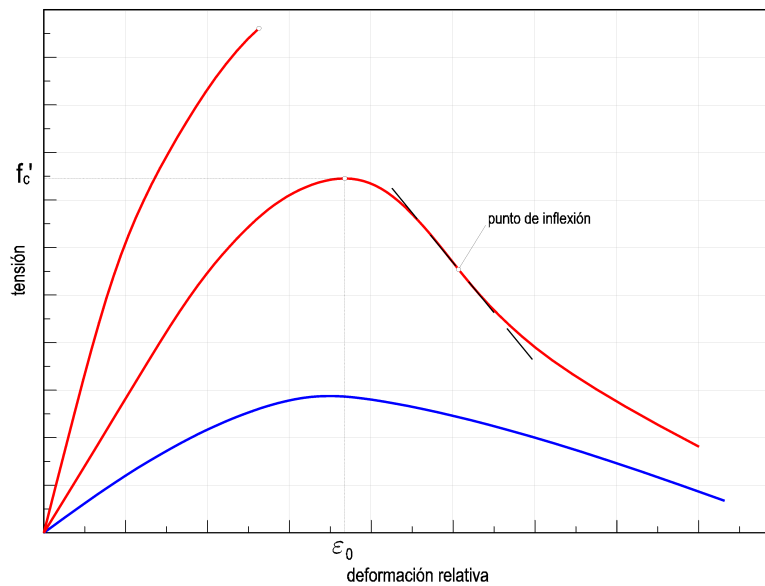
<sup>12</sup>Velocidad con la que se incrementa la carga aplicada ( $\frac{d\sigma}{dt}$ ). Se mide en MPa/s. En los ensayos a rotura normalmente es constante.

<sup>13</sup>Velocidad con la que se impone la deformación relativa ( $\frac{d\varepsilon}{dt}$ ). En los ensayos en los que se pretende obtener la curva completa de tensión-deformación suele ser constante. Se mide en  $s^{-1}$ .

ensayo [10]. Por ello, los distintos estados e instituciones concernidos por la investigación y regulación del uso del hormigón armado como material estructural, han desarrollado distintas series de normativas, con objeto de posibilitar la contrastación y comparación de resultados, aunque en la actualidad no existe acuerdo universal en el procedimiento de realización de los tests ni en la forma de las probetas. En la Comunidad Europea y, por ende, en España, la norma que regula la realización de ensayos para la determinación de la resistencia a compresión de probetas de hormigón es la UNE-EN 12390 —partes 1 a 4— [11-14]. El parámetro que regula esta norma con más incidencia en nuestra investigación es la velocidad de carga o tasa de incremento de la tensión que se fija en  $0,6 \pm 0,2$  MPa/s, lo que conduce a un intervalo de  $(7068 \leq \frac{dF}{dt} \leq 14137)$ , siendo  $F$  la fuerza aplicada por la máquina de ensayos en Newtons en el caso más general de probetas cilíndricas de 150 mm de diámetro por 300 mm de altura. Esto es lo prescrito para hormigones de resistencia *normal*, puesto que la norma deja abierta la posibilidad de emplear otras velocidades para hormigones de resistencia inferior a 20 MPa o superior a 80 MPa.

### 1.2.2 Las curvas tensión-deformación del hormigón

Una probeta de hormigón cargada con una tasa de incremento de la tensión constante romperá a su resistencia última — $f'_c$ — debido a la liberación de la energía elástica almacenada en la máquina de ensayo. Esta resistencia última obtenida bajo las citadas condiciones de incremento de carga constante no es una propiedad intrínseca de hormigón, pues depende de la tasa impuesta [10].

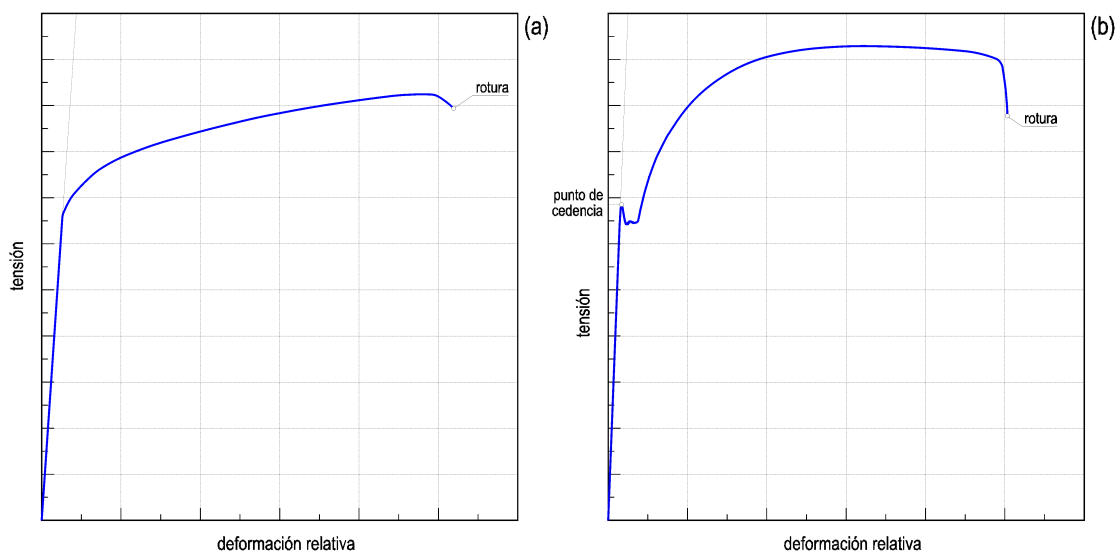


**Fig. 2.** Tres curvas típicas para hormigones sometidos a compresión uniaxial. La curva roja superior es característica de un proceso de carga donde la tasa de incremento de tensión se mantiene constante durante el ensayo para un hormigón de resistencia media. La curva roja inferior se obtiene para el mismo hormigón si lo que se mantiene constante es la tasa de incremento de deformación. (Nótese la aparición de un punto de inflexión en la parte descendente de la curva). La curva azul corresponde ahora a un hormigón de baja resistencia sometido a ensayo con tasa de incremento de la deformación constante donde no suele aparecer punto de inflexión.

La curva tensión-deformación que se obtiene procediendo de esta manera no suele presentar un máximo, por lo que bajo estas condiciones, el hormigón parece mostrar un comportamiento *frágil*<sup>14</sup>. Por el contrario, si lo que se mantiene constante es la tasa de incremento de la deformación relativa, es posible obtener la denominada curva tensión-deformación *completa* del hormigón siempre que la rigidez de la máquina de ensayo sea mayor que la rigidez del material. Esta curva suele presentar un punto de inflexión en su parte descendente si la resistencia del hormigón es media-alta, mientras que no suele presentarlo si la resistencia es baja (figura 2).

### 1.2.3 Las curvas tensión-deformación de aceros y otros materiales metálicos

La figura 3(a) muestra la forma general de la curva tensión-deformación relativa, obtenida para la mayoría de metales y aleaciones, ensayados en condiciones de recocido y sin ninguna deformación previa.



**Fig. 3** Curvas tensión-deformación relativa de dos tipos de acero; (a) representativa de un metal dúctil, como el acero aleado; (b) representativa de un acero suave, mostrando su peculiar límite de cedencia.

Según cualquier texto al uso [15], cuando la deformación es pequeña, se *ve* que la tensión es directamente proporcional a la deformación —ley de Hooke—. En esa zona, el gráfico es *aproximadamente* una recta hasta un punto conocido como *límite de proporcionalidad*. La pendiente de la recta se *identifica* con el *módulo de Young*. La zona de deformación elástica se define como la zona dentro de la cual la probeta recuperará sus dimensiones originales cuando se retire la carga. Por encima del límite elástico, el metal conservará una deformación permanente. Las posiciones atribuidas tanto al límite de proporcionalidad como al límite elástico dependerán de la sensibilidad del aparato de medida. Con metales recocidos, los verdaderos valores pueden ser muy bajos; pero para fines prácticos se puede considerar que los dos puntos coinciden y, con metales trabajados, la transición de la deformación elástica a la deformación plástica tiene lugar dentro de una región bastante bien definida.

<sup>14</sup>Podríamos definir cualitativamente los materiales frágiles como aquellos que experimentan colapso por fractura antes de que la curva tensión-deformación haya alcanzado un máximo (aunque sea relativo).

En ciertos materiales complejos, especialmente en los aceros suaves —figura 3(b)—, la zona de transición está marcada mucho más claramente en los ensayos de tracción sobre piezas no trabajadas. Estos materiales presentan un *escalón* o *punto de cedencia* definido —que es más o menos pronunciado, según la rigidez de la máquina de ensayo—, seguido inmediatamente por un alargamiento posterior bajo carga reducida.

Este alargamiento repentino, o región de deslizamiento libre, se localiza en ciertas zonas del metal, produciendo unas marcas superficialmente visibles conocidas como *rugosidades superficiales* o bandas de Lüder. Este fenómeno sólo se presenta en relativamente pocos materiales, aunque el comportamiento del acero suave o de bajo contenido en carbono, con un punto de cedencia superior y otro inferior es tan conocido debido a la importancia comercial de este material —pues es el mayoritariamente utilizado en las estructuras metálicas de edificación— y a la importancia que las pequeñas deformaciones tienen en ingeniería, que con frecuencia no nos damos cuenta que la figura 3(b) es excepcional, no típica, desde el punto de vista general de los materiales metálicos.

#### 1.2.4 El ensayo de tracción de probetas de acero y otros materiales

El ensayo de materiales metálicos suele realizarse a tracción y su regulación ha sido recientemente actualizada [16] por la norma UNE-EN ISO 6982-1:2009. Sus normas complementarias se relacionan en la referencias [17-20]. Dicho ensayo, mucho más técnico que el de probetas de hormigón, consiste básicamente en someter a una probeta del material a ensayar a un esfuerzo de tracción, generalmente hasta su rotura, con el fin de determinar una o varias de las características mecánicas que definiremos más adelante. Salvo especificación en contra, el ensayo se lleva a cabo a temperatura ambiente entre 10°C y 35°C. Para los ensayos realizados bajo condiciones controladas, la temperatura ambiente debe mantenerse a 23°C±5°C.

Las probetas se obtienen, normalmente, mecanizando una muestra obtenida del producto o de una muestra moldeada. Sin embargo, en los productos de sección transversal constante —secciones, barras, cables, etc.— o de muestras de ensayo moldeadas —v. g. fundiciones de hierro y aleaciones no ferrosas— se pueden utilizar muestras sin mecanizar. La sección transversal de las probetas puede ser circular, cuadrada, rectangular, anular o, en casos especiales, de otra forma constante.

En el ensayo de tracción de materiales metálicos a temperatura ambiente se aplican algunos de los términos y definiciones siguientes:

- *Alargamiento*: incremento en la *longitud inicial entre puntos* en cualquier momento durante el ensayo.
- *L*; *longitud entre puntos*: longitud de la parte cilíndrica o prismática de la probeta sobre la que se mide el *alargamiento* en cualquier momento durante el ensayo.
- *L<sub>0</sub>*; *longitud inicial entre puntos*: marcas de la *longitud entre puntos* sobre la probeta, medida a temperatura ambiente antes del ensayo.
- *L<sub>u</sub>*; *longitud final entre puntos*: marcas de la *longitud entre puntos* sobre la probeta después de la rotura, a temperatura ambiente, y tras unir cuidadosamente las dos partes de la probeta de forma que sus ejes estén en prolongación.

- $L_c$ ; *longitud calibrada*: longitud de la parte calibrada de la probeta que presenta una sección más reducida.
- $A$ ; *alargamiento porcentual de rotura*: alargamiento remanente de la longitud entre puntos después de la rotura, expresada como tanto por ciento de la *longitud inicial entre puntos*.  $A = \frac{(L_u - L_0)}{L_0} \times 100$ .
- $L_e$ ; *longitud base del extensómetro*: longitud base inicial del extensómetro que se utiliza para la medición del alargamiento con un extensómetro.
- *Extensión*: incremento en la *longitud base del extensómetro* en cualquier momento del ensayo.
- $F_m$ ; *fuerza máxima*: en materiales sin escalón de cedencia, la mayor fuerza que soporta la probeta durante el ensayo. En materiales con escalón de cedencia, la mayor fuerza que soporta la probeta durante el ensayo después del endurecimiento por deformación uniforme<sup>15</sup>.
- *Carga unitaria*: en cualquier momento del ensayo, cociente entre la fuerza y el área de la sección transversal inicial ( $S_0$ ) de la probeta.
- $\Delta L_m$ ; *extensión bajo fuerza máxima*.
- $R_m$ ; *resistencia a la tracción*: *carga unitaria* correspondiente a la *fuerza máxima*.
- *Rotura*: fenómeno que se considera que ocurre cuando se produce la reparación total de la probeta en dos partes o cuando la fuerza disminuye hasta ser nominalmente cero.
- $\Delta L_f$ ; *extensión en el momento de la rotura*.
- $m_E$ ; pendiente de la parte elástica de la curva carga unitaria-extensión porcentual<sup>16</sup>.
- $A_g$ ; *extensión plástica porcentual bajo fuerza máxima*: alargamiento plástico, obtenido bajo *fuerza máxima*, expresado como tanto por ciento de la *longitud base del extensómetro*.  $A_g = \left( \frac{\Delta L_m}{L_e} - \frac{R_m}{m_E} \right) \times 100$ .  $A_e$ .
- $A_e$ ; *extensión porcentual del escalón de cedencia*: en materiales que presentan escalón de cedencia, el alargamiento desde el comienzo de dicho escalón y el endurecimiento por deformación uniforme, expresado en tanto por ciento de la *longitud base del extensómetro*.
- $A_{gt}$ ; *extensión total porcentual bajo fuerza máxima*: alargamiento total (alargamiento elástico más alargamiento plástico) obtenido bajo *fuerza máxima*, expresado como tanto por ciento de la *longitud base del extensómetro*.  $A_{gt} = \frac{\Delta L_m}{L_e} \times 100$ .

<sup>15</sup>Para materiales con escalón de cedencia, pero para los que no pueda establecerse endurecimiento por deformación uniforme,  $F_m$  no se define en la UNE-EN ISO 6892-1:2009.

<sup>16</sup>Retengamos en la memoria esta reveladora nota que aparece en este punto en la norma: “En la parte elástica de la curva carga unitaria-extensión porcentual, el valor de la pendiente puede no representar necesariamente el módulo de elasticidad. Este valor puede ser bastante similar al del módulo de elasticidad si se utilizan condiciones óptimas (extensómetros calibrados con alta resolución y a doble cara, alineación perfecta de la probeta, etc.)”.

- $A_t$ ; *extensión total porcentual de rotura*: alargamiento total (alargamiento elástico más alargamiento plástico) en el momento de la rotura, expresado como tanto por ciento de la *longitud base del extensómetro*.  $A_t = \frac{\Delta L_f}{L_e} \times 100$ .

Algunas de estas magnitudes pueden visualizarse en la figura 4:

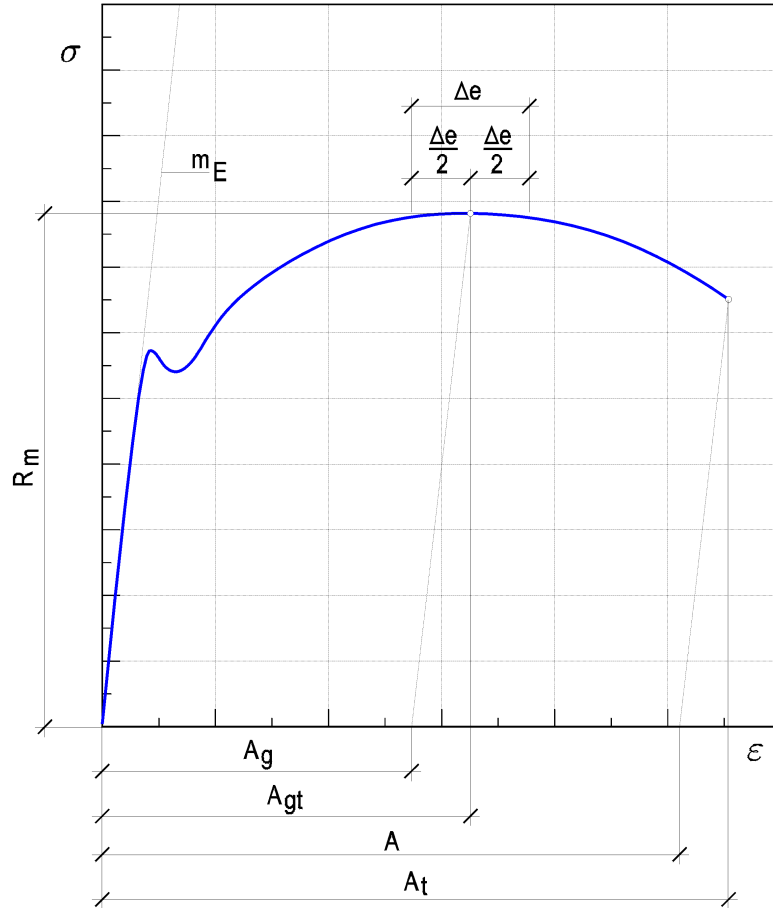
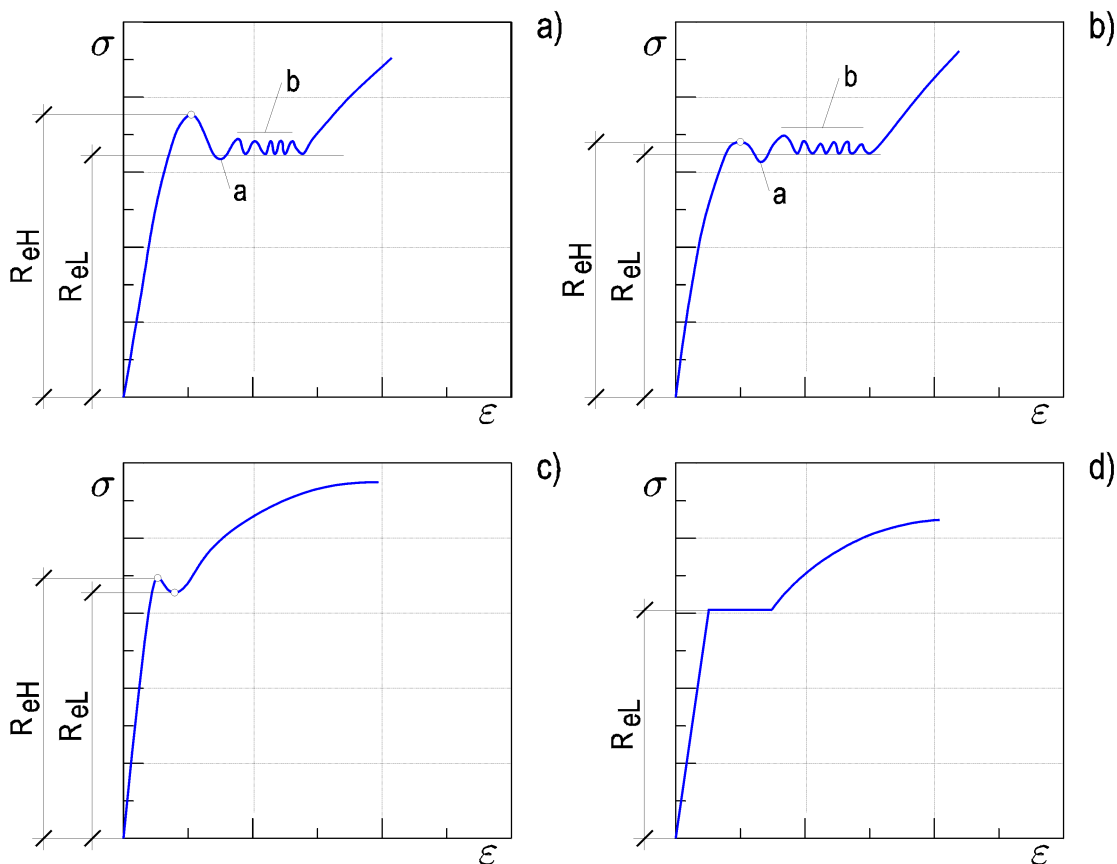


Fig. 4 Definiciones de extensiones.  $\Delta e$  es la longitud de la meseta.

Otras definiciones necesarias a la hora de establecer los métodos para determinar algunas características mecánicas que pueden extraerse del ensayo son las siguientes:

- $\dot{\varepsilon}_{L_e}$ ; *velocidad de deformación*: incremento de la deformación, medida con un extensómetro, en la *longitud base del extensómetro* por unidad de tiempo.  $\dot{\varepsilon}_{L_e} = \frac{de_{L_e}}{dt}$ .
- $\dot{\varepsilon}_{L_c}$ ; *velocidad estimada de deformación en la longitud calibrada*: valor del incremento de la deformación, en la *longitud calibrada* de la probeta por unidad de tiempo.  $\dot{\varepsilon}_{L_c} = \frac{de_{L_c}}{dt}$ .
- $v_c$ ; *velocidad de separación de las mordazas*: desplazamiento de las mordazas por unidad de tiempo.
- $\dot{R}$ ; *velocidad de puesta en carga*: incremento de la tensión por unidad de tiempo.

- $R_{eH}$ ; *límite superior de cedencia*: valor más alto de la *carga unitaria* previo a la primera caída de la fuerza.
- $R_{eL}$ ; *límite inferior de cedencia*: valor más bajo de la *carga unitaria* durante la cedencia, despreciando los eventuales fenómenos transitorios (fig. 5).



**Fig. 5** Definiciones de límites superior e inferior de cedencia para distintos tipos de curvas. En las gráficas a) y b), a es un efecto transitorio inicial y b es un intervalo de alargamiento del escalón de cedencia serrado conocido como efecto Portevin-Le Chatelier.

Al igual que en el caso del hormigón, los valores de estas propiedades no parecen ser intrínsecos del material, sino que dependen fuertemente de las tasas de incremento de la tensión o de la deformación. Por ello, la determinación de dichos valores, según la norma UNE-EN ISO 6982-1:2009, puede hacerse mediante dos métodos denominados por dicha norma, método A, basado en el control de la *velocidad de deformación* y método B, basado en la *velocidad de puesta en carga*.

En el método A existen dos tipos de controles de la velocidad de deformación. El primero es el control de la velocidad de deformación en sí misma,  $\dot{\epsilon}_{Le}$ , que se basa en la información arrojada por un extensómetro. El segundo es el control de la velocidad estimada de deformación en la longitud calibrada,  $\dot{\epsilon}_{Lc}$ , que se obtiene controlando la velocidad de separación de las mordazas a una velocidad igual a la velocidad de deformación deseada multiplicada por la longitud calibrada.

Si un material muestra un comportamiento homogéneo en deformación y la fuerza permanece nominalmente constante, la velocidad de deformación  $\dot{\varepsilon}_{L_e}$ , y la velocidad estimada de deformación en la longitud calibrada,  $\dot{\varepsilon}_{L_c}$ , son aproximadamente iguales. Existen diferencias cuando el material presenta escalón de cedencia<sup>17</sup> o fluencia serrada —por ejemplo, algunos aceros y aleaciones de AlMg en el intervalo de alargamiento del escalón de cedencia, o materiales que presentan fluencias serradas como el efecto Portevin-Le Chatelier<sup>18</sup> [21, 22]— o si se produce estricción. Si la fuerza es creciente, la velocidad estimada de deformación puede ser sustancialmente inferior que el rango de deformación buscada debido a la rigidez de la máquina de ensayo.

La velocidad de ensayo en este método A, debe cumplir los siguientes requisitos:

1. En el intervalo hasta e inclusive la determinación de  $R_{eH}$ , debe aplicarse la velocidad de deformación preestablecida,  $\dot{\varepsilon}_{L_e}$ . En este intervalo, con el fin de eliminar la influencia de la rigidez de la máquina de ensayo de tracción, es necesario utilizar un extensómetro amordazado sobre la probeta de modo que haya un control preciso de la velocidad de deformación. (Para máquinas de ensayo que no puedan controlar la velocidad de deformación, se puede recurrir a un procedimiento que utilice la velocidad estimada de deformación en la longitud calibrada,  $\dot{\varepsilon}_{L_c}$ ).
2. Durante el escalón de cedencia, deberá aplicarse la velocidad estimada de deformación en la longitud calibrada,  $\dot{\varepsilon}_{L_c}$ . En este intervalo es imposible controlar la velocidad de deformación utilizando el extensómetro amordazado sobre la probeta porque pueden aparecer cedencias locales fuera de la longitud base del extensómetro. La velocidad estimada de deformación requerida en la longitud calibrada puede mantenerse en este intervalo de forma suficientemente precisa utilizando una velocidad de separación de las mordazas constante,  $v_c$ :

$$v_c = L_c \dot{\varepsilon}_{L_c} \quad (4)$$

La velocidad de deformación,  $\dot{\varepsilon}_{L_e}$ , debe mantenerse tan constante como sea posible hasta e incluyendo la determinación de  $R_{eH}$ . Durante la determinación de esta propiedad del material, la velocidad de deformación,  $\dot{\varepsilon}_{L_e}$ , debe encontrarse en uno de los intervalos establecidos siguientes (figura 6):

Intervalo 1:  $\dot{\varepsilon}_{L_e} = 0.00007 \text{ s}^{-1}$ , con una tolerancia relativa de  $\pm 20\%$ .

Intervalo 2:  $\dot{\varepsilon}_{L_e} = 0.00025 \text{ s}^{-1}$ , con una tolerancia relativa de  $\pm 20\%$ .

Si la máquina de ensayo no puede controlar la velocidad de deformación directamente, debe utilizarse la velocidad estimada de deformación de la longitud calibrada,  $\dot{\varepsilon}_{L_c}$ , es decir, una velocidad de separación entre las mordazas constante. Esta velocidad debe calcularse utilizando la ecuación (4).

<sup>17</sup>Se define como escalón de cedencia a la zona del gráfico tensión-deformación del acero, en la que tiene lugar un aumento de deformación sin aumento de carga.

<sup>18</sup>El efecto Portevin-Le Chatelier describe un curva tensión-deformación en diente de sierra o de *flujo espasmódico* que presentan algunos materiales cuando se someten a deformación plástica. Este efecto ha sido ampliamente asociado con el envejecimiento por deformación dinámica y consiste en episodios alternativos de anclaje y desanclaje de dislocaciones cuando la velocidad de los defectos que obstaculizan su movimiento y la velocidad de deslizamiento de las propias dislocaciones son del mismo orden de magnitud.

Para la determinación del límite inferior de cedencia,  $R_{eL}$  y la extensión porcentual del escalón de cedencia,  $A_e$  (fig. 7), la velocidad estimada de deformación,  $\dot{\epsilon}_{Lc}$ , debe encontrarse en uno de los dos intervalos establecidos siguientes (fig. 6), hasta que finalice el escalón de cedencia:

Intervalo 2:  $\dot{\epsilon}_{Lc} = 0.00025 \text{ s}^{-1}$ , con una tolerancia relativa de  $\pm 20\%$ .

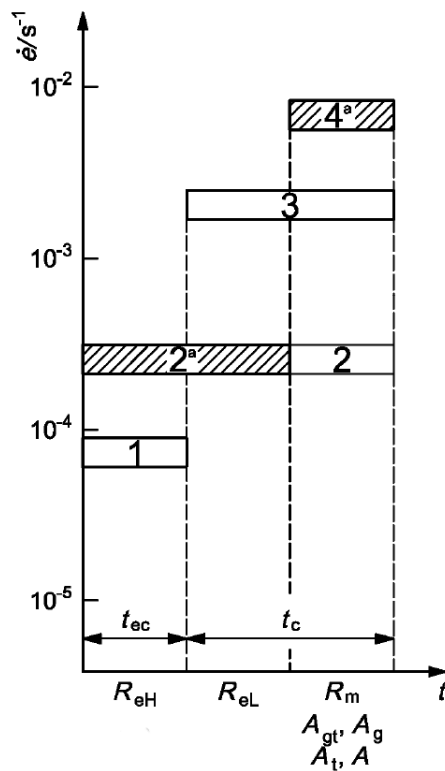
Intervalo 3:  $\dot{\epsilon}_{Lc} = 0.002 \text{ s}^{-1}$ , con una tolerancia relativa de  $\pm 20\%$ .

Para la determinación de la resistencia a la tracción,  $R_m$ , el alargamiento porcentual de rotura,  $A$ , la extensión total porcentual bajo fuerza máxima,  $A_{gt}$  y la extensión plástica porcentual bajo fuerza máxima,  $A_g$ , la velocidad estimada de deformación en la longitud calibrada, debe cambiarse a uno de los intervalos establecidos siguientes:

Intervalo 2:  $\dot{\epsilon}_{Lc} = 0.00025 \text{ s}^{-1}$ , con una tolerancia relativa de  $\pm 20\%$ .

Intervalo 3:  $\dot{\epsilon}_{Lc} = 0.002 \text{ s}^{-1}$ , con una tolerancia relativa de  $\pm 20\%$ .

Intervalo 4:  $\dot{\epsilon}_{Lc} = 0.0067 \text{ s}^{-1}$ , con una tolerancia relativa de  $\pm 20\%$ .



**Fig. 6** Representación de las velocidades de ensayo que se deben emplear durante el ensayo de tracción para determinar por el método A los valores de  $R_{eH}$ ,  $R_{eL}$ ,  $R_m$ ,  $A$ ,  $A_g$ ,  $A_{gt}$  y  $A_t$ ;  $t$  es el el paso del tiempo en el ensayo de tracción,  $t_{ec}$  es el tiempo de control del extensómetro o tiempo de control de separación de las mordazas y  $t_c$  es la velocidad de control de las mordazas.

Por otro lado, en el método B, se puede utilizar cualquier velocidad de ensayo conveniente hasta una carga unitaria equivalente a la mitad del límite elástico aparente preestablecido. Las velocidades de ensayo por encima de este punto se especifican a continuación:

Para la determinación del límite superior de cedencia,  $R_{eH}$ , la velocidad de separación

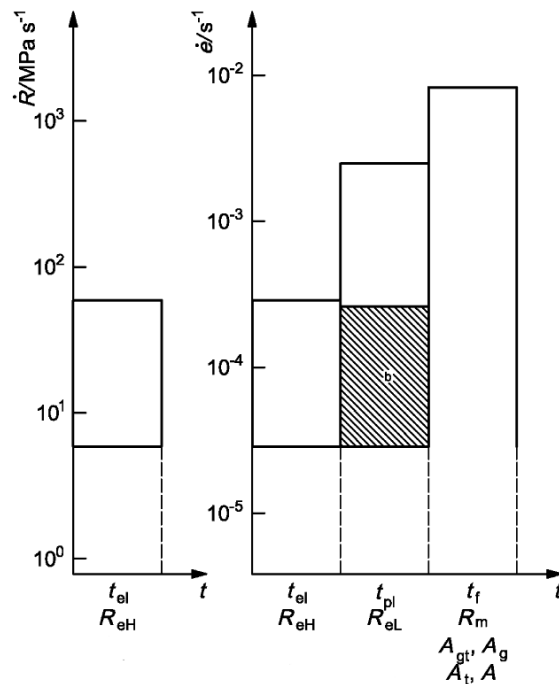
de las mordazas debe ser lo más constante posible y estar comprendida entre los límites correspondientes a la velocidades de puesta en carga indicadas en la tabla 1.

Módulo de elasticidad del material $E$ MPa	Velocidad de puesta en carga $\dot{R}$ MPa s <sup>-1</sup>	
	mín.	max.
< 150000	2	60
≥ 150000	6	60

**Tabla 1** Velocidades de puesta en carga.

Si sólo se va a determinar el límite inferior de cedencia, la velocidad de deformación de la parte calibrada de la probeta en la zona de cedencia, debe estar comprendida entre  $0.00025 \text{ s}^{-1}$  y  $0.0025 \text{ s}^{-1}$ . La velocidad de deformación de la parte calibrada debe mantenerse tan constante como sea posible. Si esta velocidad no puede controlarse directamente, debe ajustarse regulando la velocidad de aplicación de la carga justo antes del comienzo de la cedencia, sin tocar los controles de la máquina hasta que se completa la cedencia. En ningún caso la velocidad de puesta en carga en la zona elástica debe superar los valores máximos fijados en la tabla 1.

Si se desea determinar en el mismo ensayo los dos límites de cedencia, superior e inferior, se deben cumplir las condiciones establecidas en el párrafo anterior para el límite de cedencia inferior.



**Fig. 7** Representación de las velocidades de ensayo que se deben emplear durante el ensayo de tracción para determinar por el método B los valores de  $R_{eH}$ ,  $R_{eL}$ ,  $R_m$ ,  $A$ ,  $A_g$ ,  $A_{gt}$  y  $A_t$ ;  $t$  es el el paso del tiempo en el ensayo de tracción,  $t_{el}$  es el intervalo de tiempo en comportamiento elástico,  $t_f$  es el intervalo de tiempo hasta rotura y  $t_{pl}$  es el intervalo de tiempo en comportamiento plástico de los parámetros enumerados.

Si la máquina de ensayo no es capaz de medir o controlar la velocidad de deformación o de puesta en carga, debe utilizarse una velocidad de separación de las mordazas equivalente a la velocidad de puesta en carga indicada en la tabla 3 hasta la finalización de la cedencia.

Para la determinación de la resistencia a tracción,  $R_m$ , el alargamiento porcentual de rotura,  $A$ , la extensión porcentual bajo fuerza máxima,  $A_{gt}$  y la extensión porcentual bajo fuerza máxima,  $A_g$ , una vez determinadas las propiedades requeridas de límites de cedencia/elásticas convencionales, la velocidad puede incrementarse hasta una velocidad de deformación —o velocidad de separación de las mordazas equivalente— no superior a  $0.008 \text{ s}^{-1}$ . Si sólo se requiere medir la resistencia a tracción, la velocidad de deformación no debe superar los  $0.008 \text{ s}^{-1}$  durante todo el ensayo.

$R_{eH}$  y  $R_{eL}$  pueden determinarse a partir del diagrama fuerza-extensión. Sus valores se obtienen dividiendo la fuerza entre el área de la sección transversal inicial de la probeta,  $S_0$ . Sin embargo, para el ensayo debe presentarse un valor nominal de  $R_{eL}$  como la carga unitaria más baja dentro del primer 0.25% de deformación después de  $R_{eH}$ , sin tener en cuenta ningún efecto transitorio inicial. Tras determinar  $R_{eL}$  mediante este procedimiento, puede aumentarse la velocidad de ensayo a los intervalos 2, 3 ó 4. Cuando se usa este procedimiento abreviado, debería indicarse en el informe de ensayo.

Por último, cuando los materiales presentan escalón de cedencia,  $A_e$  se determina a partir del diagrama fuerza-extensión restando la extensión correspondiente a  $R_{eH}$  de la extensión al comienzo del endurecimiento uniforme. La extensión al comienzo del endurecimiento uniforme viene definida por la intersección de una línea horizontal que pasa por el último punto mínimo local —fig. 8 a)—, o por una línea de regresión que atraviesa el escalón de cedencia antes del endurecimiento y una línea que corresponde a la pendiente más alta de la curva al comienzo del endurecimiento uniforme —fig. 8 b)—. Se expresa como un porcentaje de la longitud base del extensómetro,  $L_e$ . En el informe de ensayo debería indicarse el método empleado.

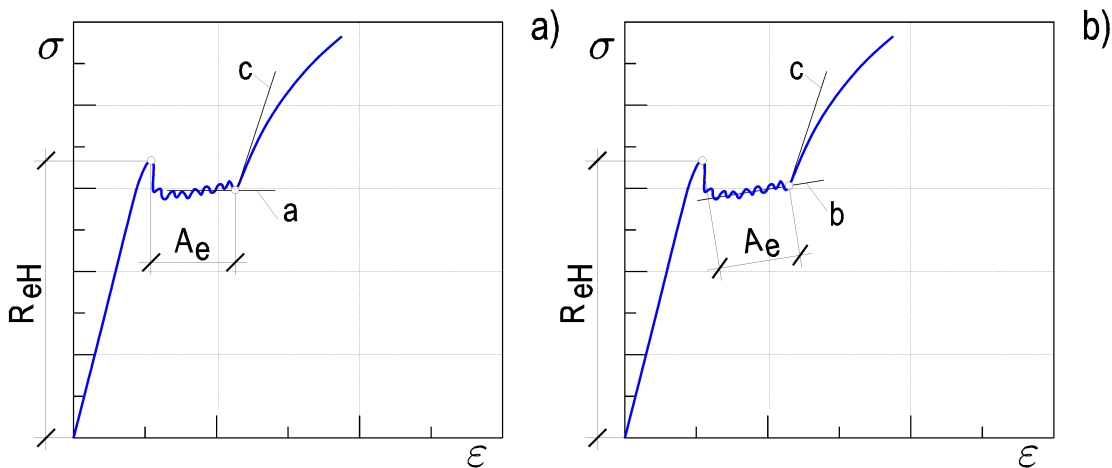


Fig. 8 Diferentes métodos de evaluación para la *extensión porcentual del escalón de cedencia*,  $A_e$ . En ambos casos, c representa la pendiente más alta de la curva al comienzo del endurecimiento uniforme.

### 1.3 Probeta y curva modelo

En el próximo capítulo realizaremos una revisión bibliográfica de las distintas ecuaciones cronológicamente propuestas para modelar la curva tensión-deformación del hormigón, verificando la *bondad* de dichas ecuaciones. Para ello, hemos elaborado, curado y ensayado a compresión una anasada modelo de hormigón de valores *medios*. Del ensayo se han obtenido dos curvas patrón con las que compararemos las ecuaciones propuestas en la bibliografía para estimar su mayor o menor grado de ajuste con los resultados experimentales obtenidos al ensayar dichas probetas modelo.

Cuando hablamos de hormigón de valores medios, nos referimos a que en el diseño de su dosificación se ha empleado la media de los valores extremos permitidos o señalados por la norma EHE-08 [23]. Así, el contenido mínimo de cemento que permite la norma es de  $250 \text{ kg/m}^3$  y el máximo de  $500 \text{ kg/m}^3$ , de donde resulta una dosificación media de  $375 \text{ kg/m}^3$ . De la misma manera, la máxima relación agua cemento permitida por la citada norma es de 0.65, por lo que si consideramos un límite inferior de tal relación para que se produzca una hidratación completa del cemento de 0.23, obtenemos una relación agua-cemento media de 0.44.

El cemento utilizado ha sido un cemento EN 197-1 CEM I 52,5 R designado así de acuerdo con la norma RC-08 [24], suministrado por la fábrica de cementos del *Grupo Cementos Portland Valderrivas* en Alcalá de Guadaíra (Sevilla).

Los áridos son rodados y de naturaleza silíceo, y proceden —tanto la grava como la arena— de la cantera de *Áridos y Transportes Cabañas, S. L.* en Palos de la Frontera (Huelva). La fracción gruesa, designada conforme a la norma UNE 146901 [25], corresponde a un árido AG-4/16-R-S y presenta un módulo granulométrico de 7.54. El árido fino, designado de igual manera corresponde a un AF-0/4-R-S con módulo granulométrico igual a 4.06. Utilizando el *método racional*<sup>19</sup> y las consideraciones previas, resulta la dosificación expresada en la tabla 2:

Amasada	Cemento (kg)	A/C	Agua (l)	Grava (kg)	Arena (kg)	Fluidificante (kg)
1	375	0.44	165	925.76	995.71	4.69

**Tabla 2** Dosificación por  $\text{m}^3$  de un hormigón de características medias.

Por último, cabe destacar que se ha añadido un 1.25% en peso del cemento de un aditivo superplastificante/reductor de agua de alta actividad —del que daremos cuenta

<sup>19</sup>El denominado *Método Racional* propugna que si  $M_a$  es el módulo granulométrico del árido fino y  $M_g$  es el módulo granulométrico del árido grueso y  $P_a$  y  $P_g$  son los porcentajes en peso del árido fino y del árido grueso, respectivamente, en la composición de la mezcla, para obtener un árido de módulo granulométrico  $M_F$  —en nuestro caso el módulo granulométrico de un árido ideal de Fuller—, se ha de cumplir:

$$P_a M_a + P_g M_g = 100 M_F$$

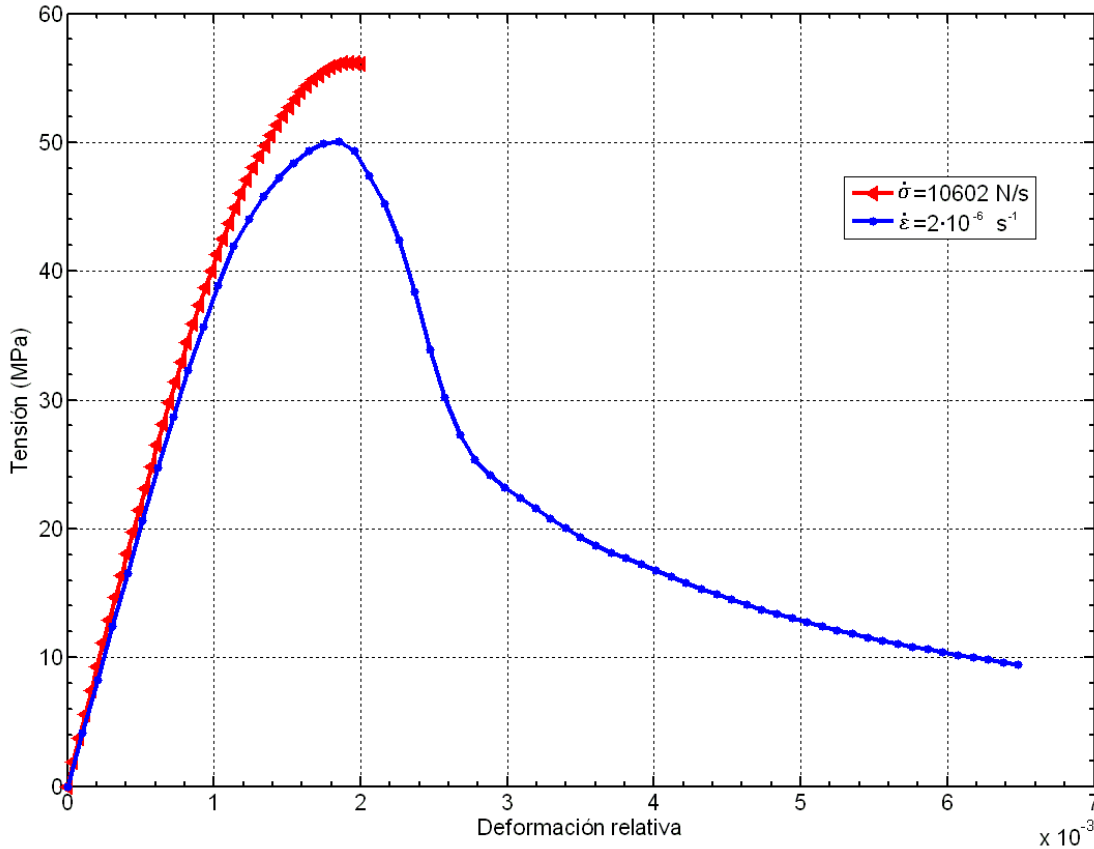
$$P_a + P_g = 100$$

Resolviendo el sistema:

$$P_a = \frac{100(M_g - M_F)}{M_g - M_a}; \quad P_g = \frac{100(M_F - M_a)}{M_g - M_a}.$$

en el capítulo correspondiente a materiales—, para conseguir una mezcla más dócil sin aumentar el agua de amasado.

Las probetas han sido fabricadas, curadas y ensayadas a compresión a los 28 días de edad siguiendo la normativa europea en vigor ya citada [11-14] excepto en una de ellas, en la que se mantuvo constante la velocidad de deformación en  $\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$  para obtener la curva completa tensión-deformación. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 9 y en la tabla 3:



**Fig. 9** Curvas tensión-deformación de dos probetas modelo de hormigón medio. La curva roja se ha obtenido sometiendo a la probeta a un incremento de carga constante de  $10602 \text{ N s}^{-1}$  ( $0.6 \text{ MPa s}^{-1}$ ). La curva azul corresponde a un ensayo en el que lo que se mantiene constante es la tasa de incremento de la deformación en  $2 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ .

Probeta	Método de ensayo	Densidad $\rho$ ( $\text{kg/m}^3$ )	Vel. de transmisión de pulsos ultrasónicos $v$ (m/s)	Resist. máx. a compresión $f'_c$ (MPa)	Def. a resistencia máxima $\epsilon_0$
M1	$\dot{\sigma} = 10602 \text{ MPa/s}$	2350.30	4615.24	56.18	0.001921
M2	$\dot{\epsilon} = 2 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$	2335.21	4593.06	50.06	0.001852

**Tabla 3** Valores característicos obtenidos en los ensayos de las probetas de hormigón medio utilizadas como patrones de comparación.



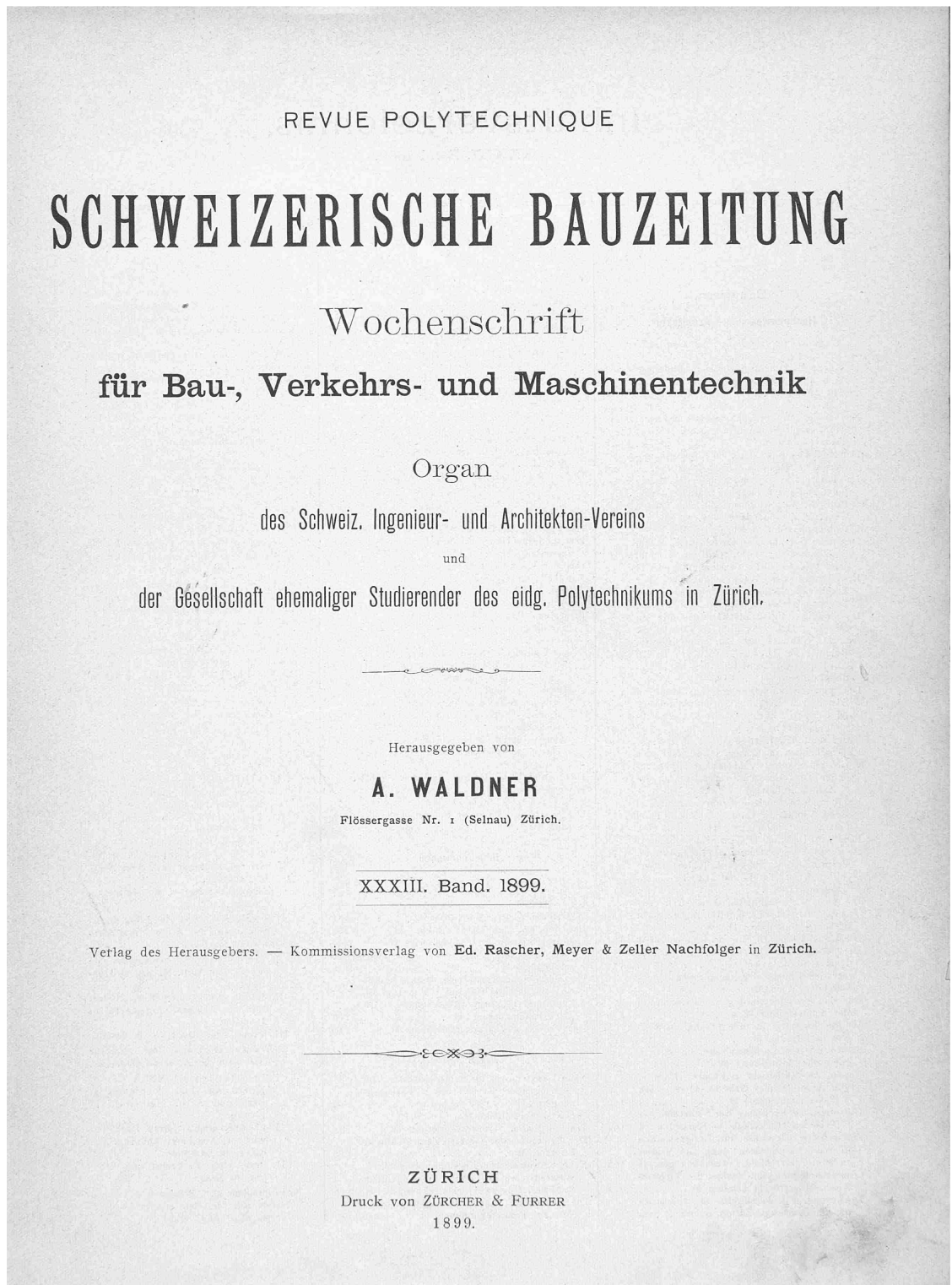
## CAPÍTULO 2

### REVISIÓN DE LA BIBLIOGRAFÍA

*Ordenar bibliotecas es ejercer de un modo silencioso el arte de la crítica.*

Jorge Luis Borges.

La naturaleza parece poco proclive a diseñar constantes. Los físicos nos aseguran que sólo un puñado de ellas gobierna el funcionamiento de todo el universo y se afanan permanentemente en reducir aún más ese pequeño número de constantes, por lo que parece poco probable que la naturaleza se haya tomado el trabajo de crear una constante elástica propia para cada material. Por otra parte, pocas leyes de la mecánica se han revelado tan inexactas y, al mismo tiempo, han sido tan aplicadas como la ley de Hooke [26]. Su desviación de los datos experimentales extremos es debida, sin duda, a haber sido obtenida a través de experiencias hartamente incompletas y su éxito, a la facilidad que conlleva su introducción en todo tipo de ecuaciones constitutivas, sobre todo, si es posible admitir que las deformaciones del material durante el proceso en estudio son *suficientemente pequeñas*, aunque, como tendremos ocasión de comprobar, incluso —y muy especialmente—, en la escala nanométrica de esfuerzos y deformaciones, es donde la linealidad preconizada por esta ley no para de ponerse en entredicho a la luz de experimentos cada vez más precisos [27-29]. Mientras que, sólo dos párrafos antes de definir el módulo de elasticidad, el propio Young [30] especula sobre la posibilidad de la existencia de sustancias con módulo de elasticidad inicial incognoscible, v. g. infinito, el devenir de esta cantidad prosperó exponencialmente, pasando de ser un mero factor de proporcionalidad experimentalmente observado, a una constante intrínseca que los materiales poseían *per se*, antes incluso de que un observador interactuase con el material para comprobar su existencia. Más aún, era entonces, cuando no se aplicaba ningún esfuerzo sobre el material, cuando su módulo elástico existía prístina y verdaderamente, lo que conllevó a la identificación del módulo de elasticidad con la tangente a la curva tensión-deformación en el origen, i. e.,  $E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ , en  $\varepsilon = 0$ , induciendo así la creencia de que los materiales, al menos, cumplen la ley de Hooke *cuando nada los perturba*. Así, por ejemplo, los ingenieros llevan más de un siglo intentando determinar cual es el módulo de elasticidad inicial del hormigón, i. e., su valor cuando aún no ha sido cargado y todavía no se han puesto de acuerdo en un valor universalmente aceptado [31-33].



**Fig. 10.** Portada del número 33 (1899) de la revista *Schweizerische Bauzeitung* —Revista de la Construcción Suiza— en el que K. W. Ritter propone por primera vez una ley de tipo exponencial para la curva de deformación del hormigón.

## 2.1 Las primeras propuestas

### 2.1.1 Karl Wilhelm Ritter

Podría decirse que el accidente, ya mencionado en el capítulo anterior, que se produjo el 28 de agosto de 1901, en el que se derrumbó el edificio en construcción para el *Hotel zum Bären* en Basilea, causando la muerte de varios de los trabajadores que se encontraban trabajando en la obra, marcó un antes y un después en la todavía incipiente investigación sobre el hormigón armado. Inmediatamente a la catástrofe, siguió una amplia y agria controversia en contra del nuevo material en la prensa suiza de la época realizada, entre otros, por J. Rosshändler [34], a la sazón, ingeniero de una empresa de construcción de estructuras metálicas, que ataca violentamente al sistema Hennebique.

El debate finalmente se tranquilizará gracias a la intervención de dos profesores del *Eidgenössische Technische Hochschule*<sup>1</sup>, —archiconocido como ETH de Zúrich—, Karl Wilhelm Ritter y François Schüle, expertos llamados al rescate del hormigón armado por las autoridades políticas.



**Fig. 11.** Karl Wilhelm Ritter (1847-1906).

Ritter, profesor de estática gráfica y de construcción de puentes en el ETH, nos interesa porque, además de haber asistido a las primeras demostraciones del sistema Hennebique e intervenir en el debate que siguió al accidente de Basilea, fue uno de los primeros en profundizar en el control científico del hormigón armado, proponiendo en 1899, en la revista *Schweizerische Bauzeitung* [35] —figura 10— una ley de tipo exponencial para la curva de deformación del hormigón.

La ecuación propuesta por Ritter se escribía:

$$\sigma = f'_c(1 - e^{-1000\varepsilon}) \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>Instituto de Tecnología Federal Suizo.

donde  $f'_c$  representa la tensión máxima alcanzada en el ensayo de rotura a compresión de la probeta de hormigón.

En favor de esta ecuación, Ritter argumenta que, además de ser la que más se ajusta a la curva tensión-deformación del hormigón, por analogía con el comportamiento elástico del hierro fundido, es coherente con la fórmula de pandeo de columnas de hierro fundido de Schwarz-Rankine:

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{1 + 0.0001\left(\frac{l}{i}\right)^2} \quad (6)$$

donde  $\sigma_k$  es la tensión admisible de pandeo,  $\sigma$  es la tensión máxima admisible del material,  $l$  es la longitud efectiva de la columna e  $i$  es el radio de giro de su sección transversal.

En efecto, calculando el módulo de elasticidad como la derivada de la curva  $\sigma$ - $\varepsilon$ , obtenemos:

$$\frac{d\sigma_k}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ f'_c(1 - e^{-1000\varepsilon}) \right] = f'_c 1000 e^{-1000\varepsilon} = 1000(f'_c - \sigma).$$

Si, ahora, en la fórmula de la carga crítica de pandeo de Euler:

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (7)$$

sustituimos el módulo de elasticidad por el valor obtenido derivando la ec. (5), obtenemos:

$$P_k = \frac{\pi^2 1000(f'_c - \sigma)I}{l^2}$$

sustituyendo  $P_k$  por  $A\sigma_k$  —donde  $A$  es el área de la sección transversal de la columna—,  $I$  por  $i^2 A$  y  $\pi^2$  por 10, volvemos a obtener:

$$\sigma_k = \frac{f'_c}{1 + 0.0001\left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

lo que mostraría la coherencia de la ecuación propuesta con la fórmula para la tensión crítica de pandeo de Schwarz-Rankine.

En lo que afecta a nuestra investigación, las características destacables de la ecuación propuesta por Ritter son:

1. Su estructura implica un cierto *modelo de daño*, ya que tanto la evolución de la tensión  $\sigma = f'_c[1 - e^{-1000\varepsilon}]$  como la del módulo de elasticidad  $E = 1000(f'_c - \sigma)$ , están gobernados por términos que evolucionan decreciendo monotónicamente hacia 1 en el caso de la tensión ( $1 - e^{-1000\varepsilon}$ ) y hacia cero en el caso de módulo de elasticidad ( $1000(f'_c - \sigma)$ ).
2. El valor de la derivada de la función en el origen es un valor discreto que depende de la resistencia máxima del material:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 1000f'_c$$

3. La gráfica de la ecuación no presenta un máximo.

El método de evaluación de la bondad del ajuste de las curvas se basará en el cálculo de tres estimadores, a saber:

1. La Suma de los Errores Cuadráticos —*Sum of Squared Errors* (SSE)—, definida como:

$$SSE = \sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma(\varepsilon_i))^2$$

donde  $\sigma_i$  representa cada uno de los valores de la tensión medidos experimentalmente,  $\sigma(\varepsilon_i)$  los correspondientes valores predichos por la curva que se analiza y  $N$  el número de valores tomados para comparar.

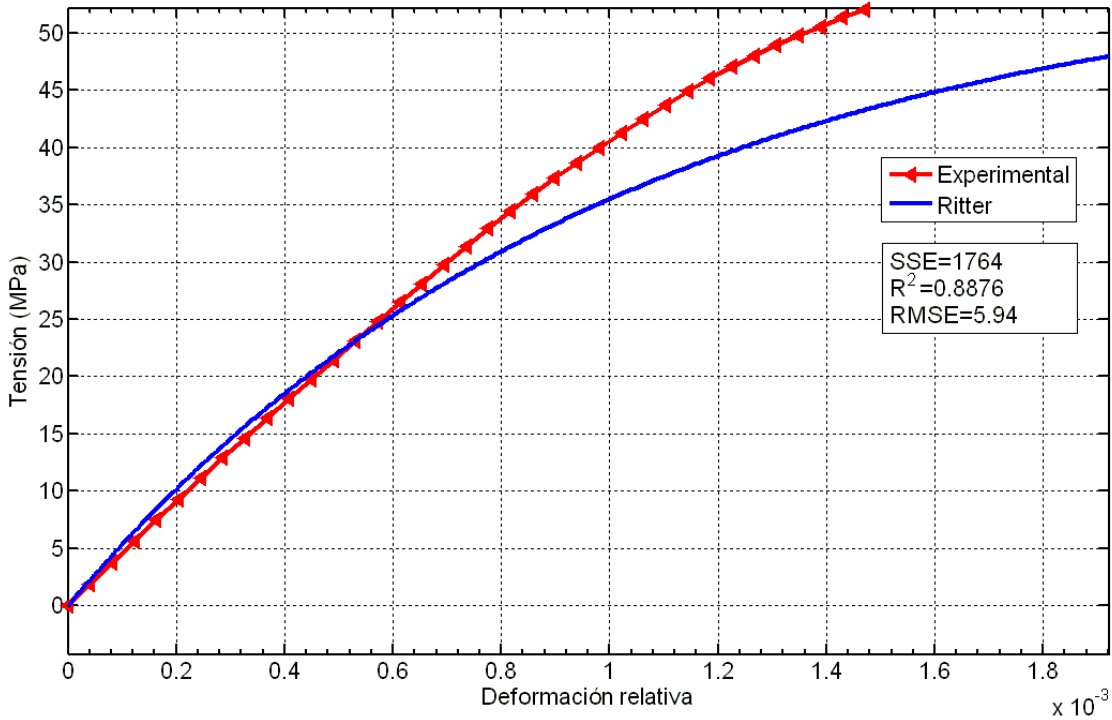
2. El Coeficiente de determinación — $R^2$ —:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma(\varepsilon_i))^2}{\sum_{i=1}^N (\sigma_i - \bar{\sigma})^2} = 1 - \frac{SSE}{\sum_{i=1}^N (\sigma_i - \bar{\sigma})^2}$$

donde  $\bar{\sigma}$  es la media aritmética de los valores de la tensión medidos experimentalmente.

3. La Raíz del Error Cuadrático Medio —*Root Mean Square Error* (RMSE)—, es decir:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma(\varepsilon_i))^2}{N}}$$



**Fig. 12.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta ensayada con tasa de incremento de la tensión constante (M1) y la ecuación propuesta por Ritter —ec. (5)—.

La desviación de la ecuación de Ritter de los datos experimentales es debida a que el valor  $f'_c$  es sólo alcanzado por dicha ecuación en el límite, cuando la deformación tiende a infinito, por lo que decíamos que no presenta un máximo<sup>2</sup>, aunque su ajuste probablemente fuese mucho mejor en la época en que fue propuesta, en la que la resistencia de los hormigones era mucho más baja que en la actualidad y los métodos y máquinas de ensayo distaban mucho de los hoy empleados.

### 2.1.2 La ecuación de Bach

Otra ecuación, aparecida en los primeros años de investigación científica relativa al hormigón en la que nos detendremos, corresponde con la ecuación ya citada en el capítulo anterior, propuesta por Julius Carl von Bach en 1897, que en términos generales escribimos como:

$$\sigma = K\varepsilon^n \quad (2)$$

con  $0 < n < 1$ , cuya derivada resulta:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = Kn\varepsilon^{n-1} = \frac{Kn\varepsilon^n}{\varepsilon} \quad (8)$$

lo que implica que en el origen, la pendiente de la curva tensión-deformación se haga infinita.

Esta ecuación, cuya eficacia ha sido puesta de manifiesto en numerosas ocasiones en el caso de materiales que experimentan *endurecimiento por deformación*, ha sido, sin embargo, denostada por algunos autores, por lo que, en nuestra opinión, no es más que un prejuicio.

En efecto, Rowe [15] considera que suponer un módulo de Young  $E$  infinito es poco tangible, mientras que Popovics [36], aunque admite que se corresponde bastante bien con un grupo de datos experimentales desde tensiones no demasiado bajas hasta casi la tensión máxima —citando a Walker [31]—, la critica por dos razones:

*Primero, porque la tangente a la curva representada por la ec. (2) en el origen es vertical, lo que indica un módulo de elasticidad inicial infinitamente grande. Esto, por supuesto<sup>3</sup>, está en conflicto con la experiencia. En segundo lugar, la ec. (2) no tiene un máximo en  $\varepsilon = \varepsilon_0$ .*

Aunque volveremos sobre este punto más adelante, diremos aquí que no sabemos a qué *experiencias* se refiere Popovics con las que la ecuación de Bach está en conflicto, ya que cuando  $\varepsilon = 0$ ,  $\sigma = 0$ , es decir, no se ha podido interactuar con el material para comprobar si un módulo de elasticidad impuesto como condición de contorno está de acuerdo o no con unos datos experimentales que aún no se han podido obtener.

Por el momento retengamos que la ecuación de Bach no presenta un máximo —por lo que también la compararemos únicamente con la probeta M1—, y que su derivada en el origen presenta un valor infinito.

La comparación con los datos experimentales y los estimadores de la bondad del ajuste de la curva a dichos datos se muestran en la figura 12.

<sup>2</sup>Hemos realizado la comparación sólo con la probeta M1, ensayada con tasa de incremento de la tensión contrante, ya que la ecuación propuesta por Ritter no contempla la parte descendente de la curva.

<sup>3</sup>El enfatizado es nuestro.

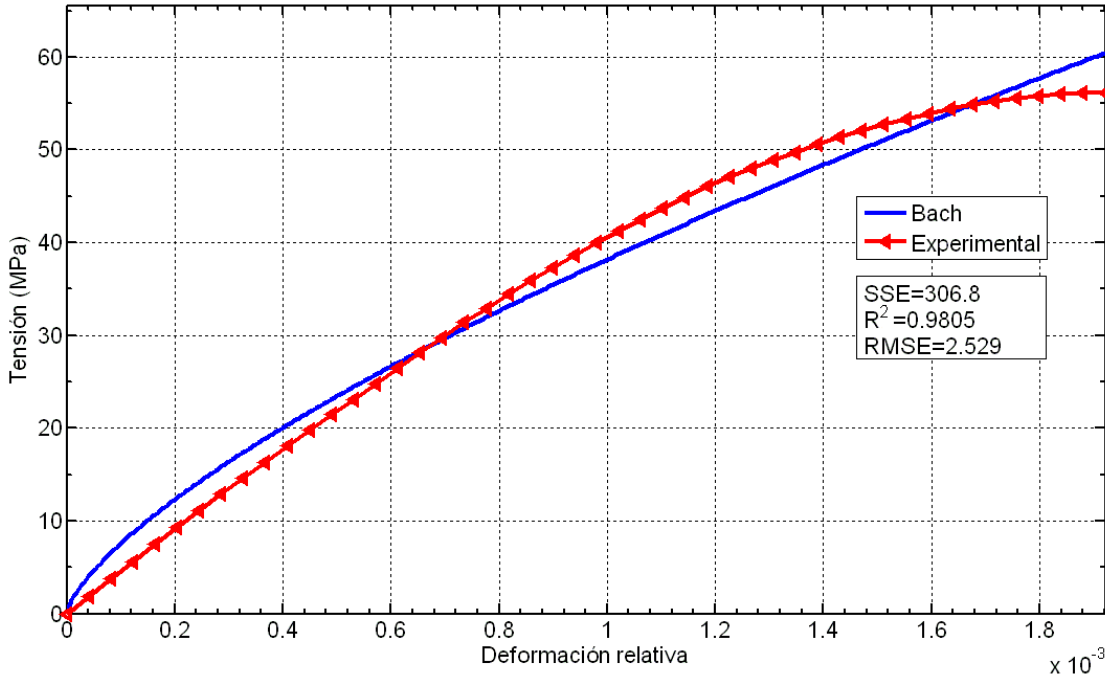


Fig. 13. Comparación entre los datos experimentales de la probeta ensayada con tasa de incremento de la tensión constante (M1) y la ecuación propuesta por Bach —ec. (2)—.

Esta curva ha sido comparada actualizando y adaptando los parámetros propuestos por Bach en 1897 para nuestro hormigón medio actual, con lo que el mejor ajuste se ha obtenido tomando como valores de los parámetros:  $K = 4923 \text{ N/mm}^2$  y  $n = 0.7035$ , con lo que se obtiene la ecuación:

$$\sigma = 4926\varepsilon^{0.7035}$$

## 2.2 Smith y Young

La propuesta de Smith y Young merece un apartado exclusivo, por un lado, por ser la más citada entre todas las ecuaciones propuestas sobre el comportamiento tenso-deformacional del hormigón y, por otro, por la estrecha relación que dicha ecuación mantendrá con la preconizada en la presente tesis. En un primer artículo de 1955, Smith y Young [37], diseñan un cálculo en flexión basado en la ecuación de Bach, proponiendo que el valor del exponente  $n$  debe ser proporcional a la resistencia última a compresión del hormigón. Inmediatamente después, abandonan la ecuación de Bach en su artículo de 1956 [38] para proponer una función exponencial en los siguientes términos: se había encontrado —sin cita alguna— que la relación tenso-deformacional:

$$\sigma = \varepsilon M e^{-N\varepsilon} \quad (9)$$

se ajustaba bastante bien a los resultados de los ensayos de rotura de probetas cilíndricas que presentaban un decrecimiento de la tensión más allá de la tensión máxima. Los valores de  $M$  y de  $N$  son constantes evaluadas en términos de las propiedades del hormigón, imponiendo las siguientes condiciones de contorno:

$$\sigma = f'_c \iff \varepsilon = \varepsilon_0$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = 0$$

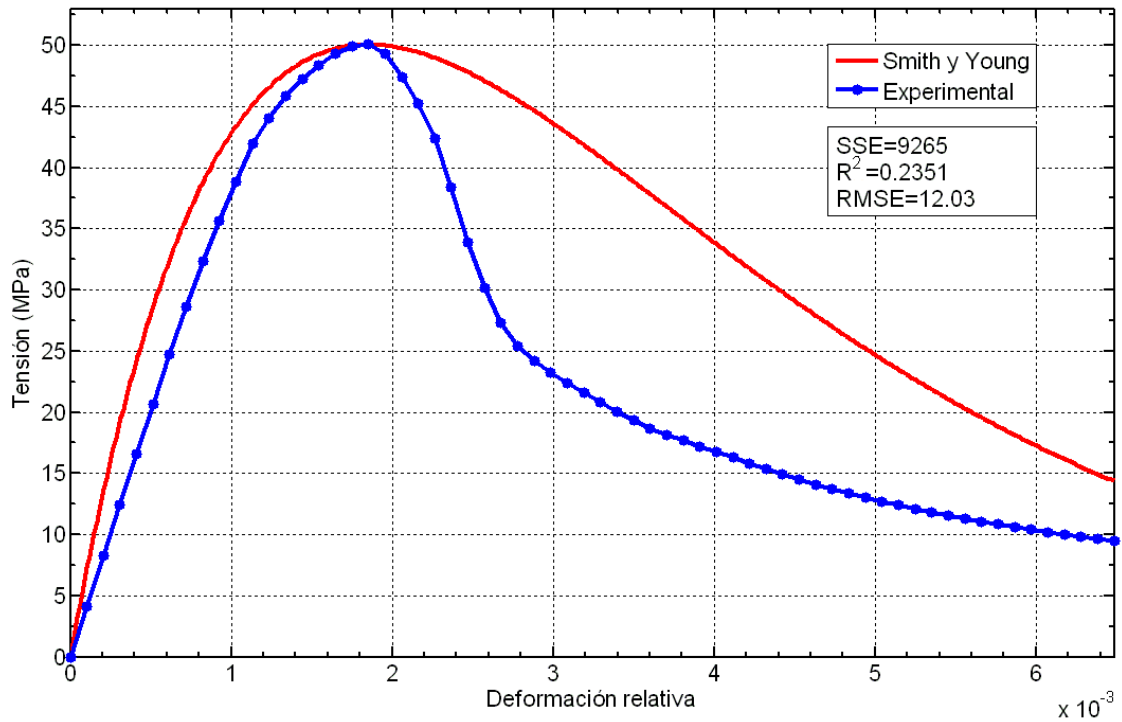
Con ello, la ec. (9) se transforma en:

$$\sigma = \frac{f'_c}{\varepsilon_0} \varepsilon e^{(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})} \quad (10)$$

Que por razones que se verán claras más adelante, preferiremos expresar la ec. (10) en la forma equivalente:

$$\sigma = \frac{f'_c}{\varepsilon_0} \varepsilon \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) \right] \quad (11)$$

Compararemos la ec. (10), propuesta por Smith y Young con la curva experimental obtenida al ensayar la probeta de hormigón medio con tasa de incremento de la deformación constante ( $\dot{\varepsilon} = 2 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ) —curva M2—. En este caso, sí presenta un máximo.



**Fig. 14.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta ensayada con tasa de incremento de la deformación constante —curva completa (M2)— y la ecuación propuesta por Smith y Young.

Las características más destacables de la ecuación propuesta por Smith y Young pueden resumirse en:

1. Representa un *modelo de daño*, pues la tensión  $\sigma = \frac{f'_c}{\varepsilon_0} \varepsilon \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right) \right]$  evoluciona decreciendo monótonicamente hacia cero. —Se verá con mayor claridad en el capítulo dedicado a materiales y métodos—.

2. El valor de la derivada de la función en el origen es un valor discreto que depende de los datos experimentales  $f'_c$  y  $\varepsilon_0$ :  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} = \frac{f'_c}{\varepsilon_0} e$ .
3. La gráfica de la ecuación presenta un máximo impuesto por las condiciones de contorno en  $\varepsilon = \varepsilon_0$ .
4. Al ser  $f'_c$  y  $\varepsilon_0$  datos experimentalmente obtenidos, la ecuación no depende de ningún parámetro, por lo que carece de grados de libertad para adaptarse a posibles cambios de forma de la curva experimental producidos, por ejemplo, por fenómenos de inestabilidad.

## 2.3 Modelos basados en funciones racionales

### 2.3.1 Introducción

A partir de los años sesenta del siglo pasado, comienzan a aparecer una gran cantidad de propuestas basadas en funciones racionales del tipo:

$$\sigma = \frac{P(\varepsilon)}{Q(\varepsilon)}$$

donde  $P(\varepsilon)$  y  $Q(\varepsilon)$  son polinomios de diversos grados de la deformación relativa  $\varepsilon$ .

Si seguimos a Yip [39], las diversas dinastías de propuestas basadas en funciones racionales no son más que aproximaciones a la propuesta de Smith y Young revisada en el epígrafe anterior. En efecto, si desarrollamos en serie de potencias la ec. (10) obtenemos:

$$\sigma = \frac{f'_c}{\varepsilon_0} \varepsilon e^{(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})} = \frac{f'_c \varepsilon}{\varepsilon_0 e^{(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}-1)}} = \frac{e f'_c \varepsilon}{\varepsilon_0 \left[ 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^3 + \dots \right]} \quad (12)$$

donde, a veces directamente mediante truncamientos otras mediante algunas manipulaciones y algoritmos algebraicos irían surgiendo diversas propuestas que revisaremos a continuación.

### 2.3.2 Sturman, Shah y Winter

En la propuesta de Sturman, Shah y Winter [40] de 1965, el denominador  $Q(\varepsilon)$  desaparece por completo, transformándose el numerador en una parábola invertida. La ecuación propuesta por estos autores se escribía:

$$\sigma = K_1 \varepsilon - K_2 \varepsilon^n \quad (13)$$

donde  $n$ ,  $K_1$  y  $K_2$  eran parámetros desconocidos a determinar experimentalmente. Según sus autores,  $n$ ,  $K_1$  y  $K_2$  fueron elegidos de tal manera que se minimizara la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de la tensión calculados y los experimentalmente medidos, llegando a los valores de  $K_1 = 4000$  ksi (27579.03 MPa),  $K_2 = 517000$  ksi (3564588.52 MPa) y  $n = 1.9$ , y concluyendo:

Es posible que otras funciones distintas de la polinómica usada en la ec. (13) puedan conducir a curvas tensión-deformación que muestren menores desviaciones que la encontrada aquí. Sin embargo, el tipo particular de función ciertamente no afectará a las conclusiones cualitativas y no parece producir diferencias significativas cuantitativamente.

Por nuestra parte, hemos adaptado los valores de las constantes  $K_1$ ,  $K_2$  y  $n$  al hormigón medio que venimos usando como comparador y a los métodos de ensayo actuales, obteniendo como mejor aproximación<sup>4</sup> a la curva experimental los valores de  $K_1 = 57045.76$  MPa y  $K_2 = 8639149.24$  MPa, manteniendo el exponente  $n = 1.9$ . Los resultados se muestran en la figura 15.

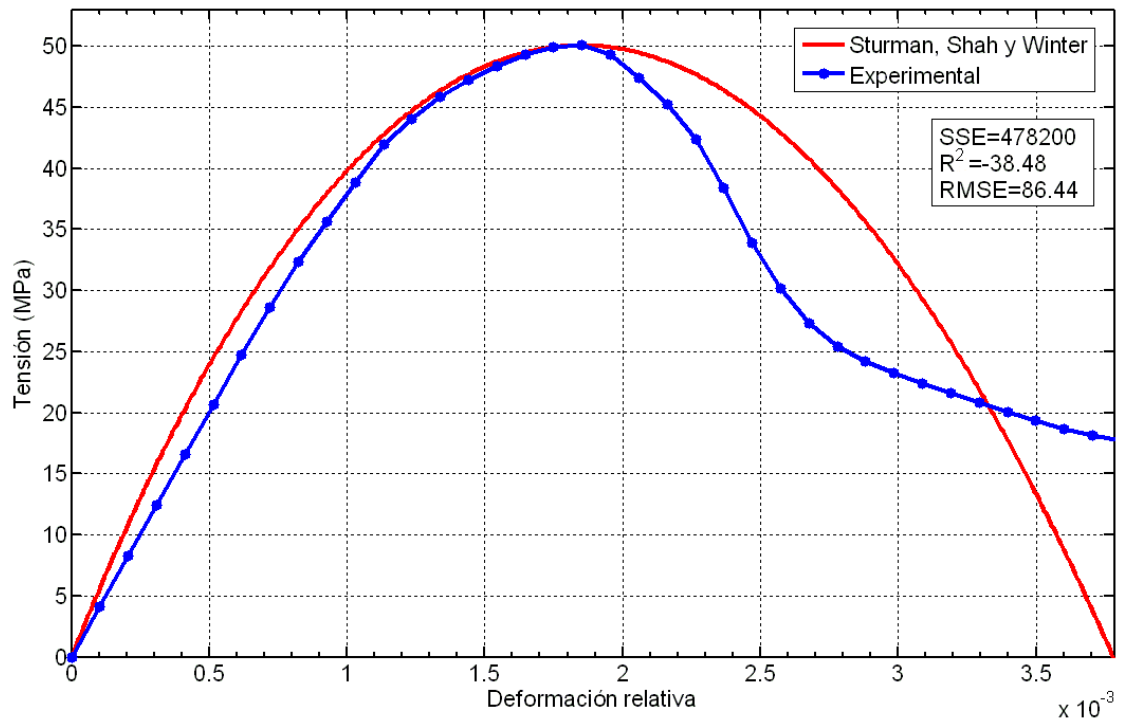


Fig. 15. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Sturman, Shah y Winter.

### 2.3.3 Desayi y Krishnan

El caso más paradigmático del truncamiento descrito en 2.3.1 es la propuesta de 1964 de Desayi y Krishnan [41]:

$$\sigma = \frac{K\varepsilon}{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2} \quad (14)$$

donde se dice de  $K$  que<sup>5</sup> es una constante (el módulo de elasticidad tangente inicial) tal

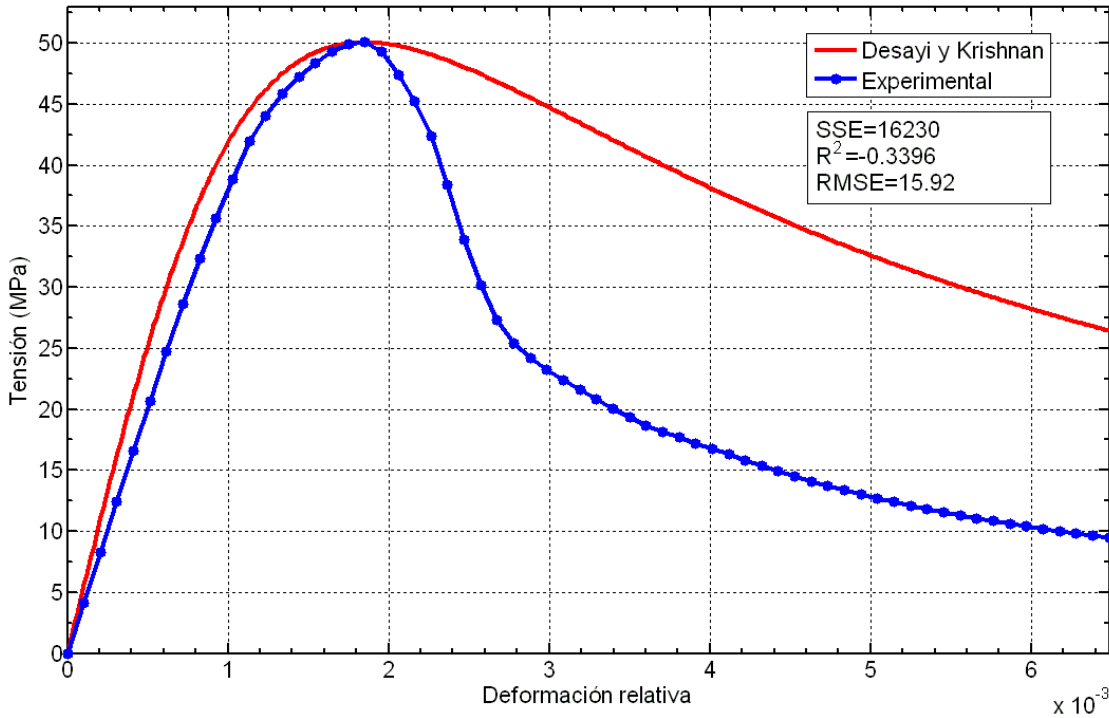
<sup>4</sup>El valor de  $K_2$  se ha calculado de manera que la curva alcance un máximo de valor  $f'_c = 50.06$  para  $\varepsilon_0 = 0.001856$  correspondiente al mostrado por la curva experimental de la probeta M2.

<sup>5</sup>En realidad, Desayi y Krishnan, en su artículo de 1964 emplean la letra  $E$  en vez de  $K$ , pero por razones que se harán claras más adelante, intentaremos no usar dicha notación —salvo fuerza mayor—, en lo que resta de tesis.

que  $K = \frac{2f'_c}{\epsilon_0}$ , de modo que la ec. (14) se reescribiría:

$$\sigma = \frac{2f'_c \epsilon}{\epsilon_0 \left[ 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right]}$$

que, como puede observarse, coincide con la ec. (12) si truncamos la primera potencia de  $\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)$  y las de orden superior a dos, eliminamos el factor  $\frac{1}{2}$  del término  $\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^2$  y sustituimos el valor de  $e = 2.71828\dots$  por 2.



**Fig. 16.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Desayi y Krishnan.

La ecuación de Desayi y Krishnan goza, lógicamente, de similares propiedades que la propuesta por Smith y Young y, aunque en la parte ascendente de la curva parece adaptarse mejor a los datos experimentales que la de Smith y Young, en términos generales se adapta tan mal que incluso muestra un valor de  $R^2$  negativo.

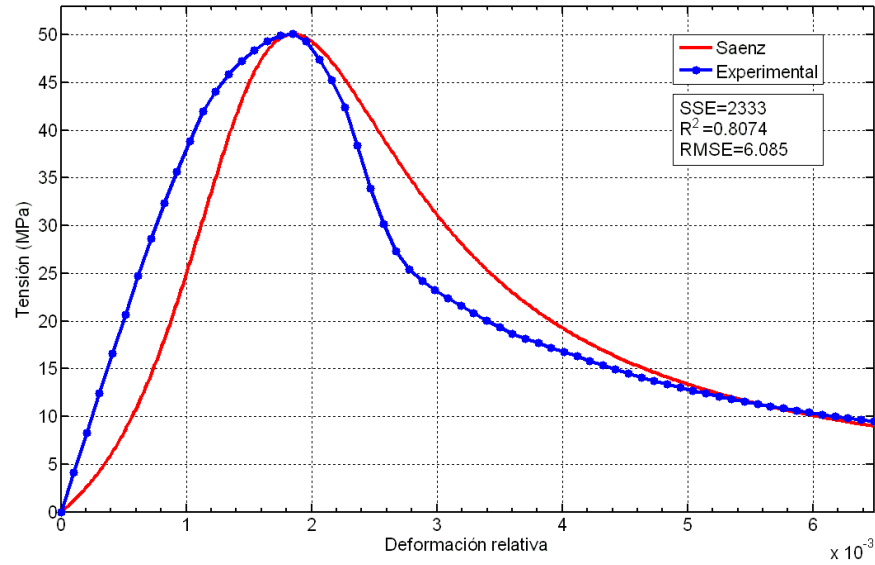
### 2.3.4 Saenz

También en 1964, Saenz [42] introduce la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{K \epsilon}{1 + \left( \frac{K \epsilon_0}{f'_c} - 2 \right) \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2} \tag{15}$$

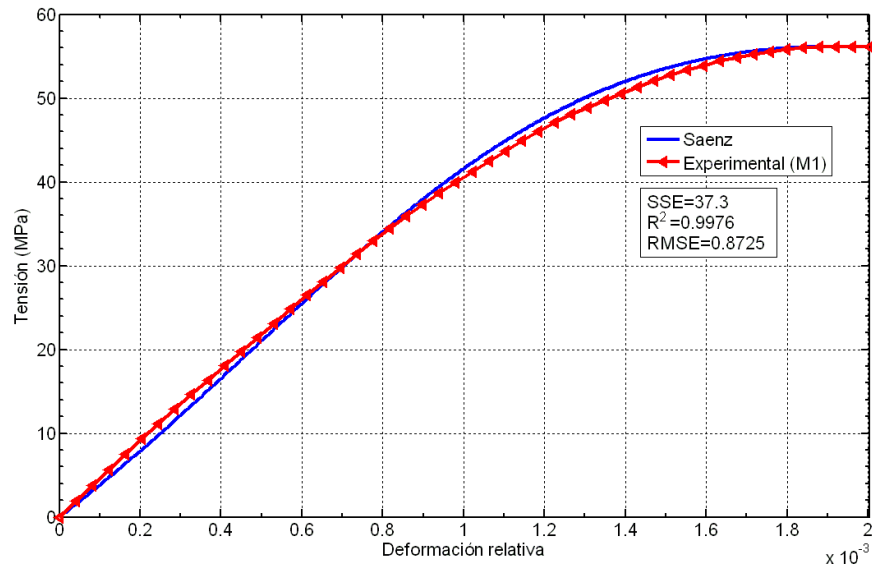
Comparándola con el desarrollo en serie de la ec. (12), rescata el término de la primera potencia de  $\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)$  que habían eliminado Desayi y Krishnan, ponderándolo con el factor

$(\frac{K\varepsilon_0}{f'_c} - 2)$  e introduciendo la constante  $K = \frac{E f'_c}{\varepsilon_0}$ . Los efectos de tales manipulaciones se muestran en la fig. 17, resultando un valor de  $K = 10550$  MPa.



**Fig. 17.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Saenz.

En este punto, creemos necesaria una aclaración: como pone de manifiesto Popovics [36] en su comentario a la ecuación de Saenz, si ésta pretende cubrir la parte descendente del diagrama tensión-deformación, entonces, al menos habría que añadir un término de  $(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})$  elevado al cubo. Esto revela que la ecuación de Saenz no está diseñada para modelar la curva completa tensión-deformación del hormigón, por lo que, si la comparamos con los resultados de la curva incompleta M1 obtenemos resultados parciales mucho mejores que los obtenidos para la curva completa M2, con un valor de  $K = 36780$  MPa, (fig. 18).



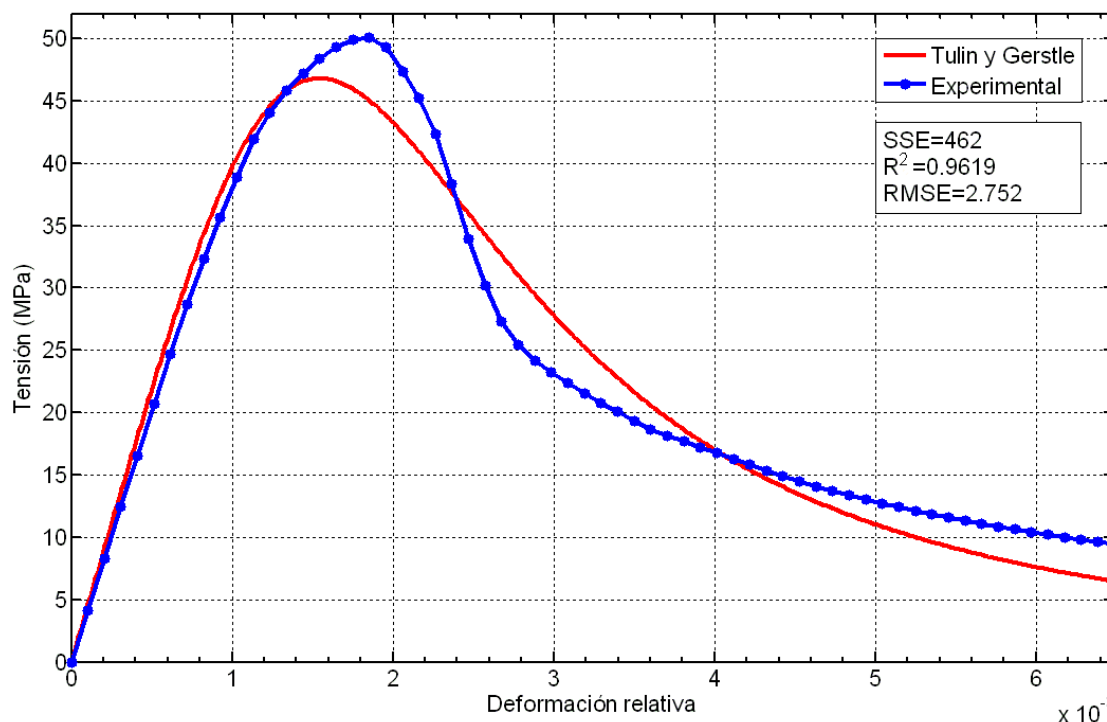
**Fig. 18.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M1 y la ecuación propuesta por Saenz.

### 2.3.5 Generalizaciones de la ecuación de Desayi y Krishnan: Tulin y Gerstle, Popovics y Carreira y Chu

Con Tulin y Gerstle [43] aparece, en 1964, la primera *generalización* de la ecuación de Desayi y Krishnan, en el sentido de que el exponente cuadrático de  $(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})$  pasa a ser un exponente genérico  $-n-$  que, junto con la aparición de una constante adicional, permite dotar de mayor flexibilidad a la ecuación de Desayi y Krishnan para adaptarse a distintas circunstancias de materiales o métodos. La ecuación propuesta era:

$$\sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{K_2 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n} \quad (16)$$

La comparación<sup>6</sup> con los resultados experimentales se muestra en la siguiente figura, (fig. 19):



**Fig. 19.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Tulin y Gerstle.

Por su parte, Popovics [44] —saltamos ahora hasta el año 1972— utiliza la función propuesta por Tulin y Gerstle ya que presenta un máximo en  $\varepsilon = \varepsilon_0$  si  $K_2 = n - 1$ , lo que le lleva a proponer la variante:

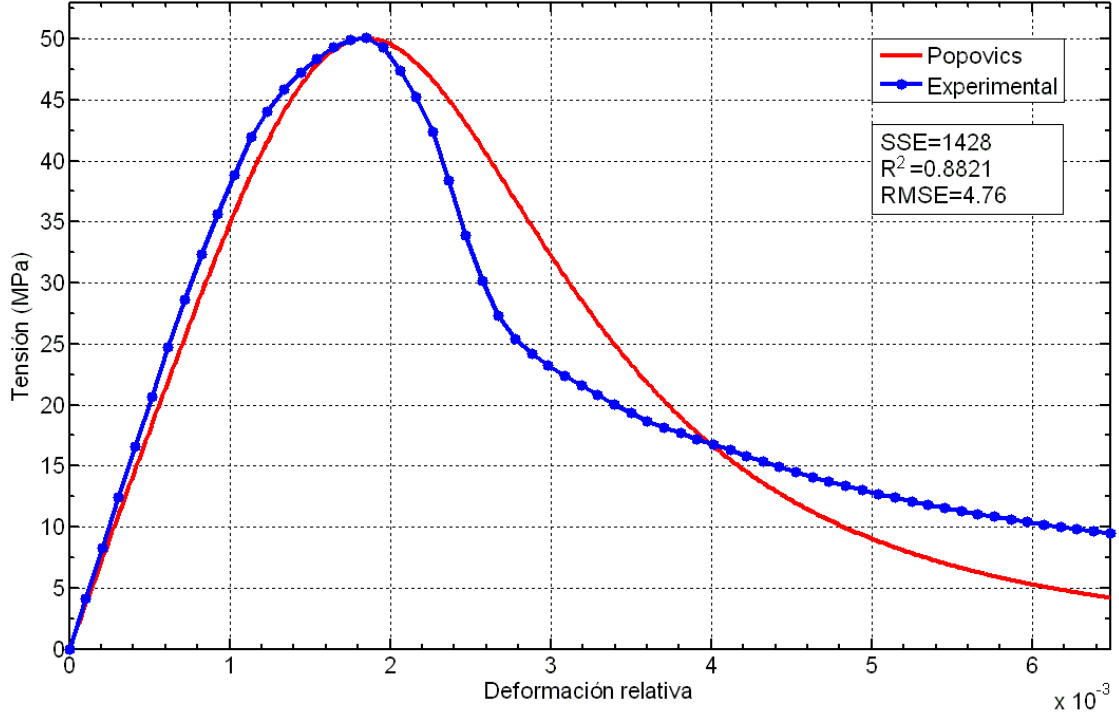
$$\sigma = \frac{n \frac{f_c}{\varepsilon_0} \varepsilon}{n - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n} \quad (17)$$

<sup>6</sup>Volvemos a hacer hincapié aquí en que si se compara la ecuación con los resultados experimentales de la probeta M1, con parte sólo ascendente, el ajuste que se consigue es bastante mejor, aunque preferimos mantener la comparación con la probeta M2, ya que el objetivo de la tesis se centra en la curva tensión-deformación *completa* del hormigón.

introduciendo, como novedad, que  $n$  y  $\varepsilon_0$  puedan ser expresados como función aproximada de la resistencia máxima del hormigón  $f'_c$ , mediante las fórmulas:

$$n = K_1 f'_c + 1, \quad \varepsilon_0 = K_2 \sqrt[4]{f'_c}$$

La curva más ajustada a los datos experimentales de la probeta M2 se ha obtenido para los valores  $n = 4.089$ ,  $K_1 = 0.062$  y  $K_2 = 0.000696$ , con lo que se obtiene la gráfica que muestra la fig. 20:



**Fig. 20.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Popovics o Carreira y Chu.

Por último, la función propuesta en 1985 por Carreira y Chu [45], es igual a la de Popovics:

$$\sigma = \frac{\beta \frac{f'_c}{\varepsilon_0} \varepsilon}{\beta - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^\beta} \quad (18)$$

donde el exponente  $\beta$  y el valor de  $\varepsilon_0$  vendrían ahora determinados por las fórmulas<sup>7</sup>:

$$\beta = \left(\frac{f'_c}{C_1}\right)^3 + 1.55, \quad \varepsilon_0 = (C_2 f'_c + 168)10^{-5}$$

lo que arroja unos valores<sup>8</sup> de  $C_1 = 36.69$  MPa y  $C_2 = 0.345$ .

### 2.3.6 Alexander

La ecuación de Alexander [46] de 1965 puede considerarse una variante de la de Saez de

<sup>7</sup>Carreira y Chu advierten en su artículo que la validez de las fórmulas para  $f'_c$  y  $\varepsilon_0$  se restringe a hormigones en los que  $f'_c \leq 34.47$  MPa.

<sup>8</sup>Los valores propuestos por Carreira y Chu en su artículo de 1985 eran  $C_1 = 32.4$  MPa y  $C_2 = 0.71$ .

1964. En efecto: la ecuación de Saez (eq. 15) se escribía:

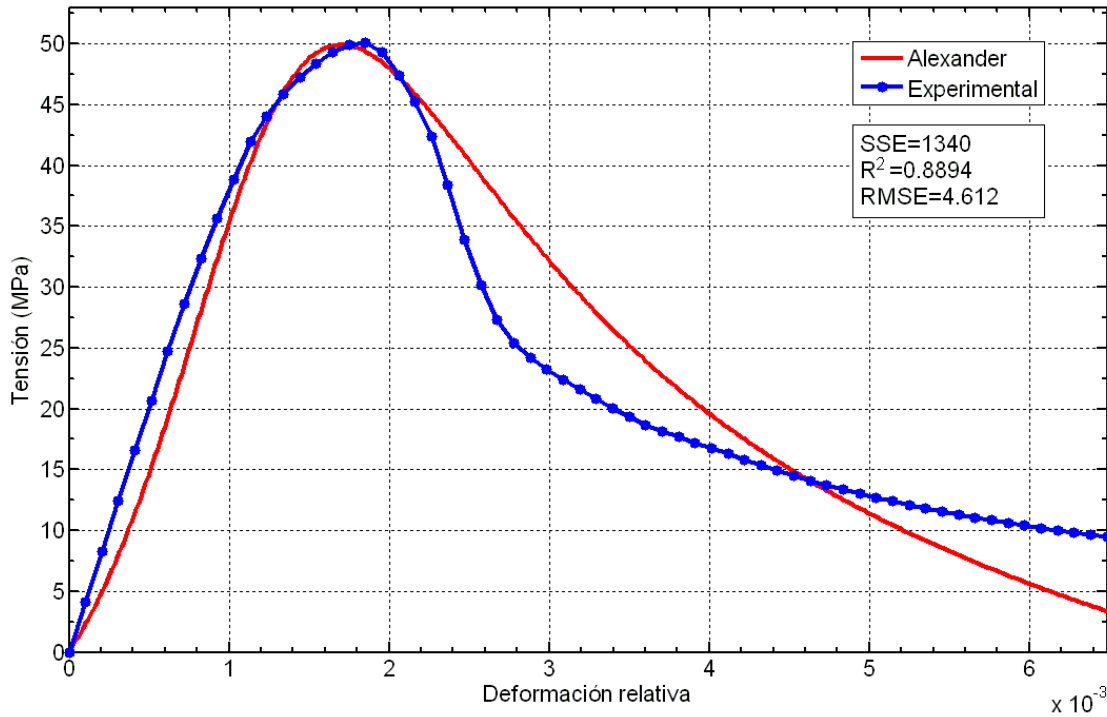
$$\sigma = \frac{K\varepsilon}{1 + \left(\frac{K\varepsilon_0}{f'_c} - 2\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}$$

mientras que la ecuación propuesta por Alexander es:

$$\sigma = \frac{K_1\varepsilon}{K_2 + (\varepsilon + K_3)^2} - K_4\varepsilon \tag{19}$$

Identificando términos, vemos claramente que la ecuación de Alexander coincide con la de Saenz haciendo  $K_1 = K\varepsilon_0^2$ ,  $K_3 = \frac{K\varepsilon_0^2}{2f'_c} - \varepsilon_0$  y  $K_2 = \varepsilon_0^2 - K_3^2$ , más el monomio  $-K_4\varepsilon$ .

Utilizando técnicas de ajuste de curvas, hemos podido determinar los valores de las constantes de la ecuación de Alexander para mejorar un poco el ajuste que proporcionaba la ecuación de Saenz. Los valores encontrados son:  $K_1 = 0.067$ ,  $K_2 = 1.8 \cdot 10^{-6}$ ,  $K_3 = -0.0011$  y  $K_4 = 1656$ . Los resultados se muestran en la figura 20:



**Fig. 21.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Alexander.

### 2.3.7 Tsai

Según sus propias palabras [47], la ecuación propuesta por Tsai en 1988 puede ser considerada como una generalización de la de Popovics y de la de Saenz. Su expresión es la siguiente:

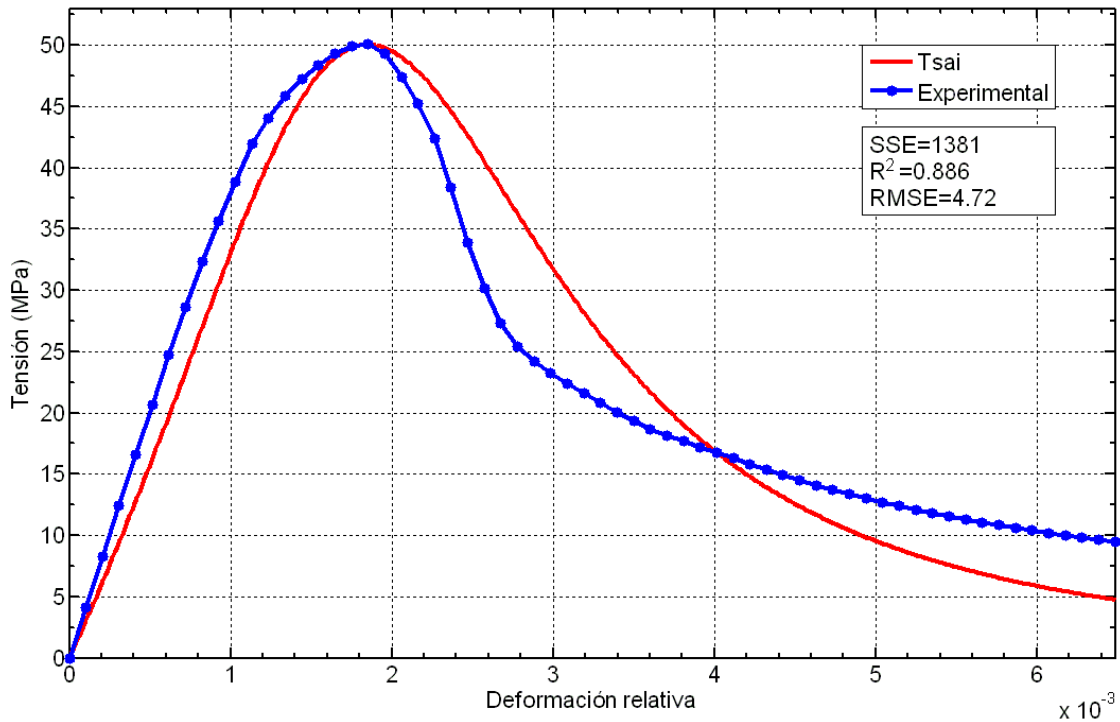
$$\sigma = \frac{K f'_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{1 + \left(K - \frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n}{n-1}} \tag{20}$$

En efecto, haciendo  $K = \frac{n}{n-1}$ , la ec. (20) deviene en la de Popovics (ec. 17). Por otro lado, si  $n = 2$ , se transforma en la de Saenz (eq. 15).

Siguiendo a Popovics, Tsai hace depender los parámetros  $K$  y  $n$  de la resistencia última del hormigón  $f'_c$  según las fórmulas:

$$K = 1 + \frac{17.9}{f'_c}, \quad n = \frac{f'_c}{6.68} - 1.85 > 1$$

Utilizando estas fórmulas, nuestra probeta de hormigón medio M2 arrojaba unos valores de  $K = 1.358$  y  $n = 5.644$ , con lo que se obtiene un ajuste peor al que se logra si actualizamos dichos parámetros a nuestro hormigón actual tomando  $K = 1.08$  y  $n = 3.747$ . Con estos valores se ha trazado la curva de la figura 22, mostrándose los resultados del ajuste en dicha figura.



**Fig. 21.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Tsai.

### 2.3.8 Primer modelo disociado: la ecuación de Wang, Shah y Naaman<sup>9</sup>

Partiendo de la propuesta de la tesis doctoral de 1971 de Sargin [48] correspondiente a ecuaciones ya estudiadas del tipo:

$$Y = \frac{AX + BX^2}{1 + CX + DX^2} \quad (21)$$

donde  $Y = \frac{\sigma}{f'_c}$ ,  $X = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  y  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son constantes, merece una especial atención, la reinterpretación de 1978 de Wang, Shah y Naaman [49], porque es la primera vez que se

<sup>9</sup>Attard y Setunge [74] vuelven a proponer un enfoque prácticamente idéntico en 1996.

proponen dos ecuaciones o, más bien, dos variantes de la misma ecuación, distintas en función de si modelan la parte ascendente o la descendente de la curva. En efecto: los autores afirman que la exactitud de la ec. (21) se mejora mucho cuando  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  toman valores distintos según evalúen la parte ascendente o descendente de la curva.

En función de los parámetros típicos que venimos estudiando en esta revisión bibliográfica, la ec. (21) puede reescribirse como:

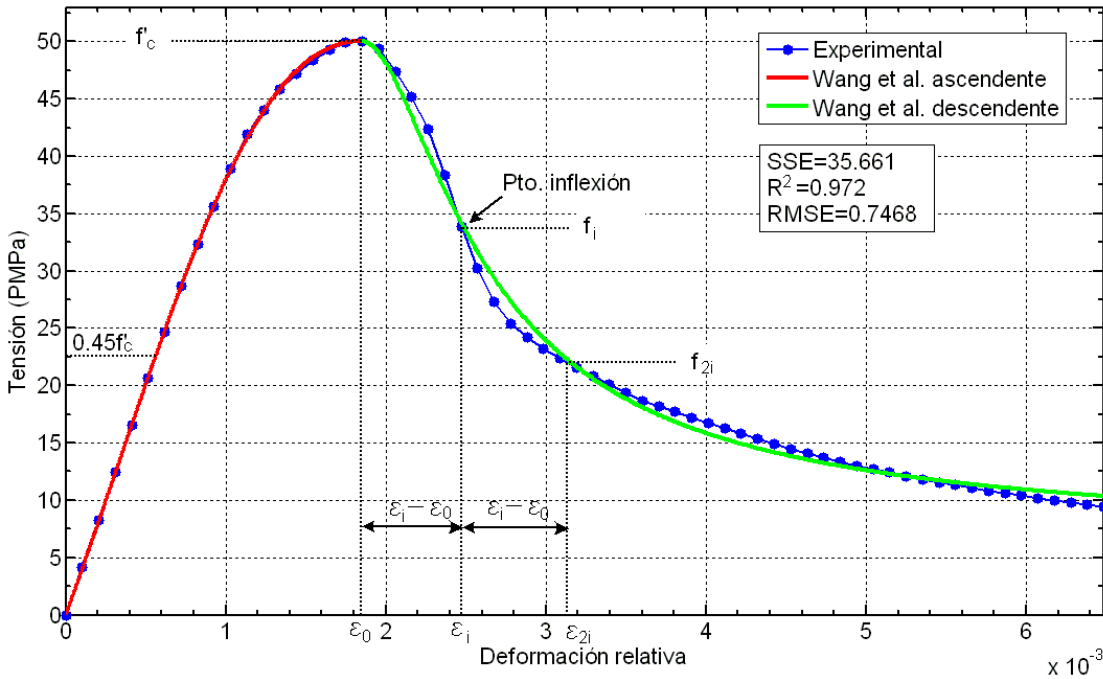
$$\sigma = \frac{f'_c \left[ K_1 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + K_2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]}{1 + K_3 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + K_4 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2} \quad (22)$$

Tanto para la parte ascendente como para la descendente, imponen las siguientes condiciones de contorno:

$$\sigma = f'_c \iff \varepsilon = \varepsilon_0, \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 0 \iff \varepsilon = \varepsilon_0$$

lo que obliga a que  $K_1 = \frac{K_2 + 2K_3}{K_4 - 1}$  y que  $K_4 = K_2 + 1$ , por lo que podemos eliminar dos constantes de la ec. (22) y reducirla a:

$$\sigma = \frac{f'_c \left[ \left( 1 + \frac{2K_3}{K_2} \right) \varepsilon + K_2 \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0} \right]}{\varepsilon_0 \left[ 1 + K_3 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + (K_2 + 1) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]} \quad (23)$$



**Fig. 23.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y las ecuaciones propuestas por Wang, Shah y Naaman.

Para la determinación de las dos constantes de la parte ascendente se imponen estas otras dos condiciones:

$$\sigma = 0.45 f'_c \iff \varepsilon = 0.45 \frac{f'_c}{E_c}, \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{E_c \varepsilon_0}{f'_c} \iff \varepsilon = 0$$

donde  $E_c$  representa la pendiente de la recta que pasa por el origen y por el punto de la curva de ordenada igual a  $0.45f'_c$  (fig. 23). Con estas condiciones, se obtiene un ajuste de la parte ascendente casi perfecto para los valores  $K_2 = -0.3508$  y  $K_3 = -0.5752$ .

Para la determinación de los parámetros  $K_2$  y  $K_3$  de la *versión* descendente de la ec. (23), las condiciones impuestas son:

$$\sigma = f_i \iff \varepsilon = \varepsilon_i, \quad \sigma = f_{2i} \iff \varepsilon = \varepsilon_{2i}$$

donde  $f_i$  y  $\varepsilon_i$  son, respectivamente, la tensión y la deformación del punto de inflexión y  $f_{2i}$  y  $\varepsilon_{2i}$  se refieren a un punto arbitrariamente elegido tal que:  $\varepsilon_{2i} - \varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_0$  (fig. 23). Así se obtiene un ajuste aceptable de la parte descendente para los valores de  $K_2 = 0.132$  y  $K_3 = -1.996$ .

Mediante este enfoque se pueden obtener dos expresiones parciales que se ajustan bastante bien, cada una a una parte de la curva experimental, mediante el conocimiento de cuatro puntos clave, a saber: tensión y deformación en el máximo de la curva, tensión y deformación para  $0.45f'_c$  —o bien el denominado *módulo de elasticidad secante* ( $E_c$ ) en ese punto—, tensión y deformación en el punto de inflexión y, por último, tensión y deformación en un punto simétrico del máximo respecto del punto de inflexión. Los resultados del ajuste se muestran en la figura 23.

## 2.4 Modelos basados en distribuciones estadísticas del concepto de daño

### 2.4.1 Introducción

Originalmente propuesta por Kachanov [50] en 1956, modificada posteriormente por Rabotnov [51] y desarrollada sobre todo a partir de los años ochenta del siglo pasado [52-55], la Mecánica del Daño Continuo —CDM<sup>10</sup>— ha sido ampliamente aceptada para simular el complejo comportamiento constitutivo de muchos materiales utilizados en ingeniería. En especial, los modelos basados en una variable interna de daño representada por una función escalar —daño isótropo—, se caracterizan por su simplicidad de implementación y versatilidad. Esta variable de daño refleja el nivel de deterioro del material a medida que se va deformando y transforma las tensiones reales en tensiones efectivas, de tal manera que una ecuación general que relacione tensiones con deformaciones puede escribirse en la forma:

$$\sigma = \Psi(\varepsilon)[1 - \omega(\varepsilon)] \quad (24)$$

donde  $\Psi(\varepsilon)$  representa la respuesta del material no dañado y  $\omega(\varepsilon)$  una función escalar de daño que varía entre 0 —cuando el material aún no ha sido tensionado— y 1 —cuando se produce el colapso de dicho material—.

Las propuestas que presentaremos a continuación, asumen que la función  $\omega(\varepsilon)$  responde a una función de distribución de probabilidad —CDF<sup>11</sup>— de ocurrencia del daño de las partículas del material y se diferencian dependiendo del tipo de distribución estadística elegida para simular la evolución de dicho daño en función de la deformación relativa impuesta por el ensayo.

### 2.4.2 Shah y Winter

La ecuación propuesta en 1966 por Shah y Winter [56] podría considerarse una mera

<sup>10</sup> *Cotinum Damage Mechanics.*

<sup>11</sup> *Cumulative Distribution Function.*

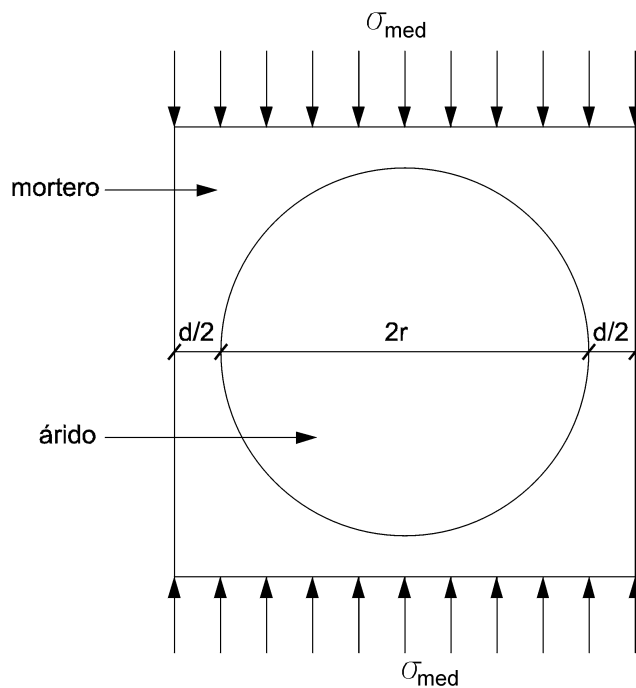
generalización de la de Smith y Young (ec. 11),

$$\sigma = K_1 \varepsilon \exp \left[ - \left( \frac{K_1 \varepsilon - 2}{K_2} \right)^m \right] \quad (25)$$

donde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $m$  han de determinarse experimentalmente.

Sin embargo, este artículo es de capital importancia para el desarrollo de esta tesis, puesto que en él se deduce, por primera vez, la fórmula exponencial —usada también por Smith y Young con ligeras diferencias— a través de la teoría estadística de la resistencia de materiales de Weibull [57, 58].

Shah y Winter introducen un microelemento estructural de hormigón, compuesto de una partícula cilíndrica de árido rodeada por la matriz de mortero de cemento (fig. 24) con un comportamiento perfectamente elástico y perfectamente frágil. Por razones de simplicidad analítica, suponen además que el *módulo de elasticidad* del árido y del mortero es el mismo.



**Fig. 24.** Esquema del microelemento estructural de hormigón según Shah y Winter.

Sobre esta base, el hormigón podría ser concebido como un material compuesto por un número muy grande de estas unidades estructurales. La resistencia individual de cada elemento podría determinarse por un ensayo de rotura, aunque si este ensayo se repitiese para cada elemento, el valor de la carga de rotura no sería siempre exactamente el mismo —debido, por ejemplo, a la variabilidad de la relación  $\frac{d}{r}$  en cada elemento—, sino que presentaría cierta dispersión en torno a un valor medio central. Por tanto, no es posible indicar un valor exacto de la carga de rotura para el elemento, aunque sí lo sería indicar una probabilidad definida de rotura para cada valor  $\sigma$  de la tensión aplicada.

# A STATISTICAL THEORY OF THE STRENGTH OF MATERIALS

BY

*W. WEIBULL*

Professor, Royal Technical University, Stockholm



INGENIÖRSVETENSKAPSAKADEMIENS

HANDLINGAR NR 151

1939

---

GENERALETABENS LITOGRAFISKA ANSTALTS FÖRLAG  
STOCKHOLM

Fig. 25. Portada del artículo de Weibull de 1939.

La idea de Shah y Winter fue adoptar la función de distribución de probabilidad propuesta en 1939 por Weibull para la resistencia de las unidades estructurales elementales de que estaría compuesto el hormigón, de manera que a medida que éste es cargado, aquellas de dichas unidades que presenten menor resistencia, romperían en primer lugar, mientras que aquellas con mayor resistencia continuarían resistiendo produciéndose una redistribución de esfuerzos y un proceso de rotura progresivo.

La función de distribución de Weibull desplazada se puede escribir así:

$$F(x; m, x_0, x_a) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x - x_a}{x_0} \right)^m \right] \tag{26}$$

por lo que si, como suponen Shah y Winter, el comportamiento de los microelementos es linealmente elástico hasta su rotura frágil, en la ec. (24), hacemos  $\Psi(\varepsilon) = K_1\varepsilon$  e identificamos la función de daño  $\omega(\varepsilon)$  con la función de distribución de Weibull, obtenemos:

$$\sigma = K_1\varepsilon \left( 1 - \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon - x_a}{x_0} \right)^m \right] \right) \right) = K_1\varepsilon \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon - x_a}{x_0} \right)^m \right]$$

En la formulación definitiva de Shah y Winter, se modifica un tanto la expresión anterior —entendemos que para que se cumplan algunas condiciones de contorno que no especifican—, quedando finalmente en la forma:

$$\sigma = K_1\varepsilon \exp \left[ - \left( \frac{K_1\varepsilon - 2}{K_2} \right)^m \right] \tag{27}$$

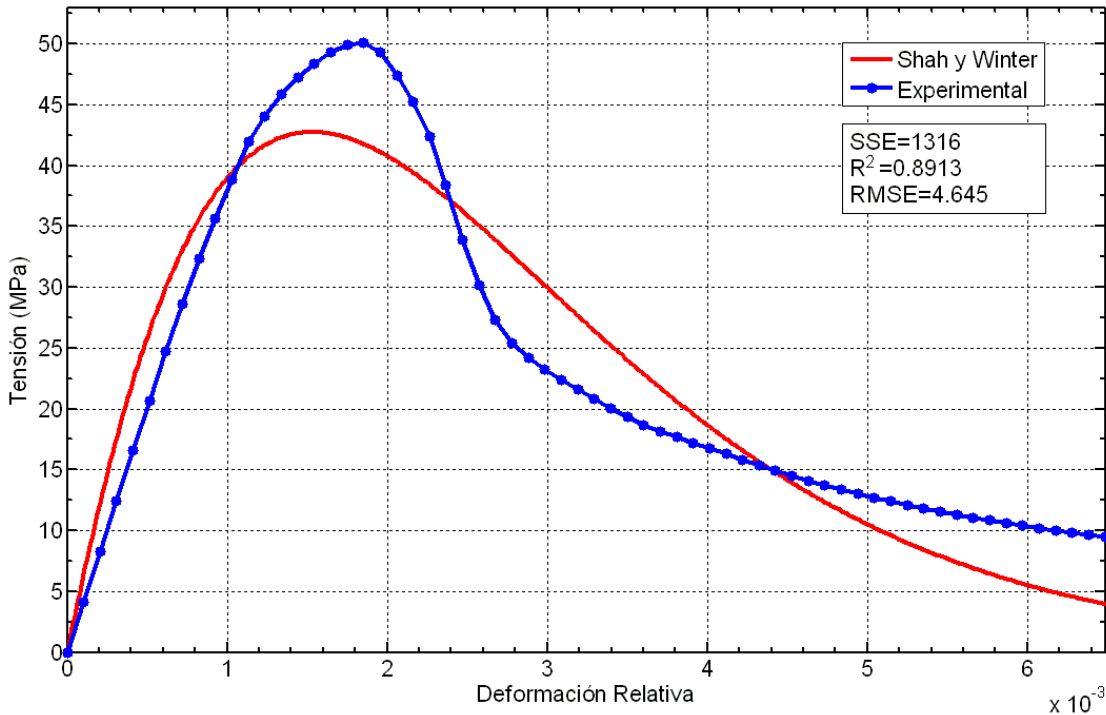


Fig. 26. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Shah y Winter.

El mejor ajuste se obtuvo (fig. 26) para los valores  $K_1 = 63690$ ,  $K_2 = 112.4$  y  $m = 1.185$ .

Como colofón de esta breve reseña del artículo de Shah y Winter nos quedamos con su conclusión número 7:

*La teoría de comportamiento [aquí expuesta] demuestra que la breve inelasticidad del hormigón puede ser explicada sobre la base del microcomportamiento frágil sin tener que invocar ningún proceso de fluencia que [por otra parte] no ha sido observado experimentalmente.*

### 2.4.3 Las ecuaciones de Blechman

La serie de tres artículos [59-61] que publicó Blechman entre 1988 y 1989, destaca, más que por las ecuaciones propuestas, por sus consideraciones teóricas sobre el proceso de rotura del hormigón en el ensayo de compresión uniaxial.

En efecto: en primer lugar, parte de la firme convicción de que el intento de encontrar una simple y única ecuación para modelar la curva tensión-deformación completa del hormigón es un trabajo inútil, debido a que en ella se concitan tres estados esencialmente diferentes, a saber: una primera fase perfectamente elástica, otra en la que se produce un fenómeno creciente de *atrofia* de las características resistentes del material y, por último, la fase final en la que se produce un proceso de *destrucción* macroscópica en la que el hormigón no *acepta* incremento de carga alguno.

Por ello, divide la curva tensión-deformación en tres tramos. El primero —tramo verde de la gráfica de la figura 27—, gobernado por la Ley de Hooke hasta un cierto valor de la deformación,  $\varepsilon_a$ , que se determinará más adelante, es decir:

$$\sigma_1 = K\varepsilon \iff 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_a \quad (28)$$

Obteniéndose, para nuestro hormigón medio, el mejor ajuste con un valor aproximado de  $K = 39990$  MPa.

El segundo representaría el citado proceso de *atrofia* de las características resistentes del hormigón y que podemos identificar con el proceso de daño presentado en 2.4.1 mediante la ecuación:

$$\text{Atr}(\varepsilon) = 1 - G(\varepsilon)$$

donde la función  $G(\varepsilon) = \exp[-\varepsilon^2/2\varepsilon_0^2]$  es la función Gaussiana convencional para valores positivos, también conocida como distribución seminormal. El proceso de razonamiento era como sigue:

Blechman parte de la extraordinaria similitud que observa entre la función de densidad de probabilidad de Lord Rayleigh:

$$f(x; d) = \frac{x}{d^2} \exp\left[\frac{-x^2}{2d^2}\right]$$

y la parte ascendente de la curva tensión-deformación del hormigón. En términos de tensiones y deformaciones tendríamos:

$$\sigma = K\varepsilon \exp\left[\frac{-\varepsilon^2}{2d^2}\right] \quad (29)$$

Imponiendo  $\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = 0$ , se obtiene  $d = \varepsilon_0$  y la ec. (29) se reescribe ahora:

$$\sigma = K\varepsilon \exp \left[ \frac{-\varepsilon^2}{2\varepsilon_0^2} \right] \quad (30)$$

La ec. (30) sería válida si la atrofia del material se manifestase desde el principio, es decir, desde  $\varepsilon = 0$ . Sin embargo, Blechman mantiene que existe un intervalo, entre 0 y  $\varepsilon_a$  en el que el comportamiento del hormigón es perfectamente elástico, sin que se produzca el fenómeno de atrofia. Por tanto, si  $\varepsilon \leq \varepsilon_a$ , entonces  $G(\varepsilon) = 1$  y  $\sigma_1 = K\varepsilon$ . Para el intervalo  $\varepsilon_a < \varepsilon < \varepsilon_0$  tendremos:

$$G(\varepsilon) = \exp \left[ \frac{-(\varepsilon - \varepsilon_a)^2}{2d^2} \right] \quad (31)$$

con lo que la función para las tensiones más allá de  $\varepsilon_a$  valdrá ahora:

$$\sigma = K\varepsilon \exp \left[ \frac{-(\varepsilon - \varepsilon_a)^2}{2d^2} \right] \quad (32)$$

ecuación a la que Blechman denomina *función central*.

Para que la gráfica propuesta por Blechman sea *continua*, las derivadas laterales correspondientes de las ecuaciones (28) y (32) deben igualarse, por lo que la ec. (32) debe modificarse y escribirse ahora como:

$$\sigma = K(\varepsilon - \varepsilon_a) \exp \left[ \frac{-(\varepsilon - \varepsilon_a)^2}{2d^2} \right] + K\varepsilon_a \exp \left[ \frac{-(\varepsilon - \varepsilon_a)^2}{2d^2} \right] \quad (33)$$

Volviendo a imponer  $\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0} = 0$ , se obtiene  $d^2 = \varepsilon_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_a)$ , por lo que la ec. (33) debe reescribirse en la siguiente forma:

$$\sigma_2 = K\varepsilon \exp \left[ \frac{-(\varepsilon - \varepsilon_a)^2}{2\varepsilon_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_a)} \right] \quad (34)$$

donde  $\sigma_2$  es el modelo propuesto por Blechman para el tramo de la curva tensión-deformación entre  $\varepsilon_a$  y  $\varepsilon_0$  —tramo verde de la gráfica de la figura 27—.

Sabiendo que  $\varepsilon = \varepsilon_0 \iff \sigma = f'_c$  es posible encontrar un valor bien definido para  $\varepsilon_a$ , obteniéndose:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \left[ 1 + 2 \ln \left( \frac{f'_c}{K\varepsilon_0} \right) \right] \quad (35)$$

Si bien la concordancia de las ecuaciones propuestas por Blechman en estos dos primeros tramos es excelente, su ajuste con los datos experimentales en la rama descendente de la curva deja bastante más que desear, además de proponer una estrategia un tanto *barroca*.

Blechman parte de la base de que, mientras en el tramo entre el límite elástico  $\varepsilon_a$ , y el límite máximo  $\varepsilon_0$ , las micro rupturas de sus gránulos tensionados no afectan a su *macro-continuidad* o *macrorrigidez*, en la parte descendente la situación cambia drásticamente, dándose la aparición y crecimiento de grietas macroscópicas —observables a simple vista—, reduciéndose la rigidez global de la pieza y, en definitiva, produciéndose un

mecanismo creciente de *destrucción* de la misma, gobernado fundamentalmente por la forma de aplicar la tensión o la deformación mediante la máquina de ensayo.

Por ello considera inaplicable el concepto de tensión en esta fase, reemplazando la relación tensión-deformación por la relación deformación-*respuesta* del hormigón, regida por dos *macrofunciones*:  $\sigma(\varepsilon)$  —descrita por la *función central* de la ec. (32) adaptada a las características específicas de la rama descendente de la curva— y  $F(\varepsilon)$ , una función especial que daría cuenta del estado de *confinamiento* de la probeta.

Estas dos *macrofunciones* podrían ser obtenidas sólo a través del algoritmo numérico iterativo que se presenta a continuación, comenzando en  $\varepsilon = \varepsilon_0$  y computándose hasta  $\varepsilon_{max}$  —el último punto obtenido de la curva—, en pasos de anchura  $\Delta\varepsilon$ :

$$\Delta\xi = R(\varepsilon)\Delta\varepsilon \quad (36)$$

$$\xi = \varepsilon_0 + \sum_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \Delta\xi \quad (37)$$

$$G(\xi) = \exp\left[\frac{-(\xi - \varepsilon_a)^2}{2d^2}\right] \quad (38)$$

$$\sigma(\varepsilon) = K\xi G(\xi) \quad (39)$$

$$\Delta C_a = \Delta R(\varepsilon)C(\varepsilon) \quad (40)$$

$$\Delta C_d = K_d(1 - R(\varepsilon))\Delta\varepsilon \quad (41)$$

$$F(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} (\Delta C_a - \Delta C_d) \quad (42)$$

$$C(\varepsilon) = C_0 + \sum_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \Delta C_a \quad (43)$$

$$f(\varepsilon) = \frac{F(\varepsilon)}{f'_c} \quad (44)$$

$$G_R(\varepsilon) = \exp\left[\frac{-(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{2d_R^2}\right] \quad (45)$$

$$R(\varepsilon) = f(\varepsilon) + (1 - f(\varepsilon))G_R(\varepsilon) \quad (46)$$

$$\sigma_3(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon) + F(\varepsilon) \quad (47)$$

donde:

$\xi, \Delta\xi$ : deformaciones *efectivas* en la rama descendente de la curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  del hormigón y su incremento.

$C_0, C(\varepsilon)$ : Potencial de confinamiento por fricción, valor inicial y valor actual.

$R(\varepsilon), \Delta R(\varepsilon)$ : función adimensional que describe la disminución de *macrorrigidez* debida a la *macrodestrucción* de la probeta y su incremento.

$F(\varepsilon), f(\varepsilon)$ : funciones que describen la componente de la respuesta debida al confinamiento. — $f(\varepsilon)$  es adimensional—.

$G(\xi)$ : Gaussiana de la *atrofia* en la rama descendente.

$\Delta C_a$ : incremento de la función de confinamiento debido a la manifestación de un potencial de fricción durante el proceso de *macrodestrucción*.

$\Delta C_d$ : incremento del factor de consumo del confinamiento.

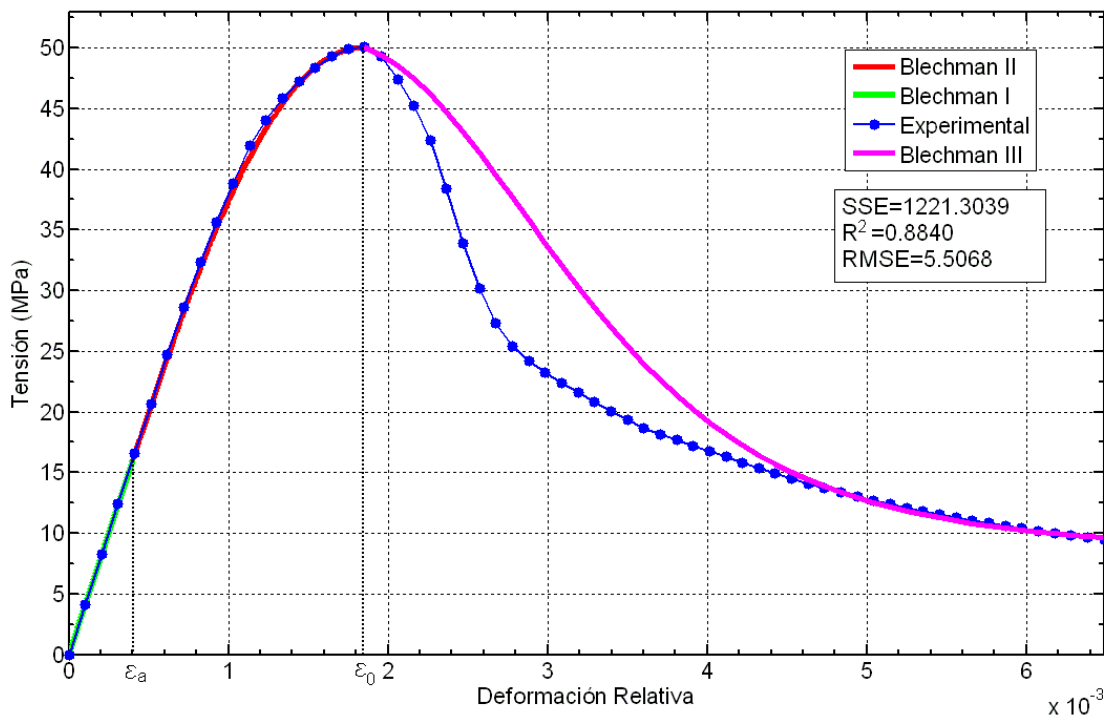
$K_d$ : coeficiente experimental.

$G_R(\varepsilon)$ : Gaussiana de la destrucción de la *macrorrigidez*.

$\sigma_3(\varepsilon)$ : *respuesta* resultante del hormigón en la rama descendente —tramo magenta de la gráfica de la figura 27—.

Para sortear la evidente circularidad del algoritmo, son necesarios los siguientes valores iniciales:  $R(\varepsilon_0) = 1$ ,  $\Delta R(\varepsilon_0) = 0$  y  $F(\varepsilon_0) = 0$ .

Las constantes a determinar experimentalmente en esta parte de la curva son  $K_d$ ,  $C_0$  y  $d_R^2$ . Desgraciadamente, en los artículos de Blechman no se proporcionan valores para estas constantes, por lo que para establecer una comparación con nuestros resultados experimentales, hemos ido ajustándolos a través de numerosas pruebas hasta obtener la que estimamos mejor aproximación, —mostrada en la fig. 27— para los valores  $K_d = 0.001$ ,  $C_0 = -10$  y  $d_R^2 = 5.5 \times 10^{-6}$  que, aunque se ajusta bastante bien en las partes inicial y final de la curva, no consigue hacerlo en la zona *inestable* del proceso.



**Fig. 27.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y las ecuaciones y el algoritmo incremental propuestos por Blechman.

## 2.5 Modelos multiexponente

### 2.5.1 Collins, Mitchell y MacGregor

La ecuación propuesta por Collins, Mitchell y MacGregor [62] en 1993, en principio, no se diferencia en nada de las ya examinadas de Popovics o Carreira y Chu:

$$\sigma = \frac{nf'_c(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})}{n - 1 + (\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})^{nk}} \tag{48}$$

En efecto, basta hacer  $n = nk$  en la ec. (17) para obtener la de Popovics, o  $\beta = nk$  en la

ec. (18) para identificarla como la de Carreira y Chu. Sin embargo, su enfoque diferente, que estudiaremos a continuación, justifica su inclusión en este apartado.

La variante se produce, por un lado, porque Collins *et al.* también consideran — como Wang *et al.* o Blechman— que son necesarias dos expresiones distintas, una para la parte ascendente de la curva y otra para la descendente, coincidiendo ambas en el pico de tensión  $f'_c$  y por otro, porque mientras que Wang *et al.*, —ec. (23)— proponen que han de cambiarse las constantes de la ecuación según el tramo considerado, Collins *et al.* sostienen que lo que debe modificarse en dicha ecuación es el exponente, para adaptarse a la parte ascendente o descendente, según el caso.

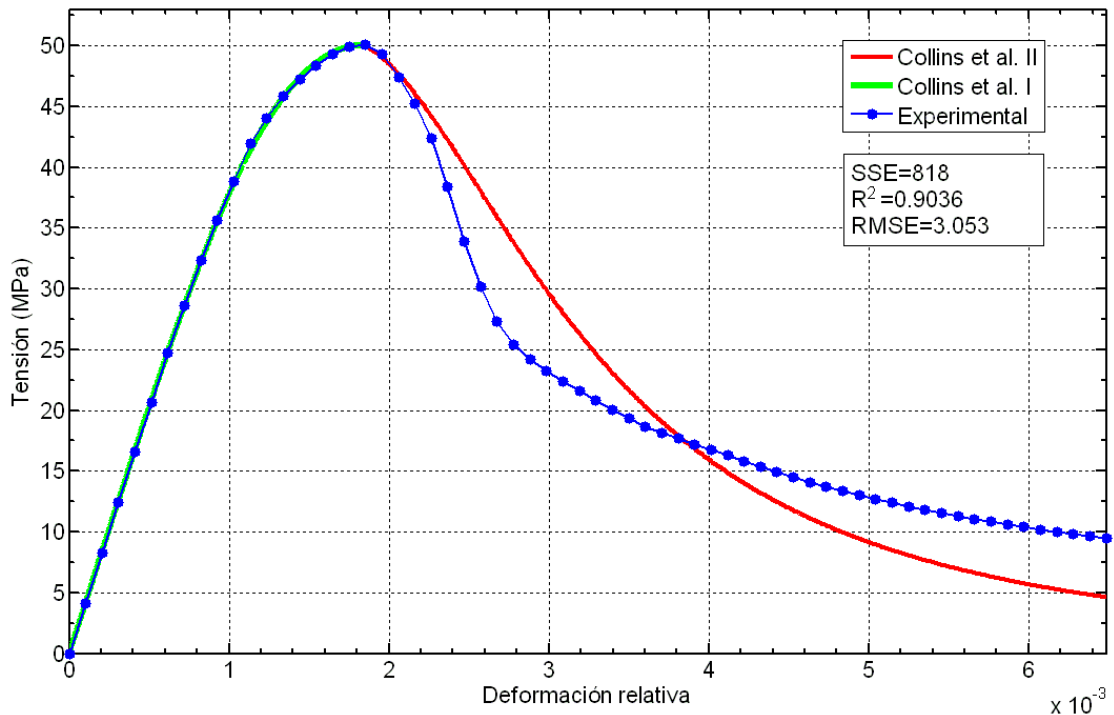
Para la parte ascendente de la curva, el valor de  $k$  sería igual a 1, con lo que, en este tramo, la ecuación sería idéntica a la de Popovics o Carreira y Chu. Para el exponente  $n$ , tanto en la parte ascendente como en la descendente, proponen la fórmula:

$$n = 0.8 + \left(\frac{f'_c}{17}\right) \quad (49)$$

Es en la parte descendente donde el exponente se *adapta* a la nueva forma de la curva mediante:

$$k = 0.67 + \left(\frac{f'_c}{62}\right) \quad (50)$$

Aunque en el artículo se proporciona una fórmula para el cálculo de  $\varepsilon_0$ , el mejor resultado se ha obtenido tomando su valor experimental, y para  $n$  y  $k$  los valores  $n = 2.922$  y  $k = 1.281$ . Sin embargo, como se aprecia en la figura 28, los resultados sólo mejoran muy ligeramente los de Popovics o Carreira y Chu.



**Fig. 28.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Collins, Mitchell y MacGregor.

2.5.2 *Tasnimi*

Otra formulación idéntica corresponde a la propuesta por Tasnimi [63] en 2004. Partiendo de la misma fórmula que Popovics, Carreira y Chu o Collins *et al.* —en la que sólo se modifica  $n$ ,  $\beta$  o  $nk$  por  $n^{pq}$ — y de similares consideraciones sobre partes ascendente y descendente de la curva y variabilidad del exponente propone:

$$\sigma = \frac{n^{pq} f'_c \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)}{\left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{n^{pq}} + n^{pq} - 1} \quad (51)$$

donde para la parte ascendente de la curva, el valor de  $n^{pq}$  vendría dado por:

$$n^{pq} = \frac{1}{1 - \frac{f'_c}{\varepsilon_0 E}} \quad (52)$$

siendo  $E = \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ , es decir, el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el origen.

Tanto para la parte ascendente como para la descendente, el valor de  $n$  se mantiene constante —ya que, según Tasnimi, sólo depende de características que se suponen generales del tipo de hormigón—, aunque  $p$  y  $q$  variarán según modelen la parte ascendente o la descendente, atendiendo a los siguientes razonamientos:

En la ascendente, por *conveniencia*, asume  $p = 3$  y  $q = 1$ , mientras que en la descendente, manteniendo fijo el valor de  $p = 3$ , Tasnimi determina el valor de  $q$  de manera que se mantenga la *continuidad* de la curva y, además, pase por el punto de inflexión si éste se produce<sup>12</sup>; es decir, si  $P_i = (\varepsilon_i, f_i)$  es el punto de inflexión, resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \right)^{n^{3q}} - \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \right) - 1 &= 0 \\ \frac{f_i}{f'_c} \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \right)^{n^{3q}} + n^{3q} \left( \frac{f_i}{f'_c} - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \right) - \frac{f_i}{f'_c} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

lo que conduce a:

$$q = \frac{\ln \left[ \frac{\ln \left( \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right)}{\ln \left( \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \right)} \right]}{3 \ln n} \quad (54)$$

Si bien en el artículo de Tasnimi se proporcionan fórmulas empíricas para el cálculo de  $\varepsilon_0$  y  $E$  para tres *grandes tipos* de hormigones — de peso ligero, de peso normal y de *alta* resistencia—, su desviación de los datos experimentales actuales nos ha llevado a utilizar nuestro valor experimental para  $\varepsilon_0$  y a buscar el valor de  $E$  —mediante iteraciones— que produjese el mejor ajuste posible, encontrándose el óptimo para  $E = 41080$  MPa.

Los resultados se muestran en la fig. 28 —representa la curva obtenida para los valores calculados de  $n = 1.4297$  y  $q = 1.8443$ —, de la que cabe destacar que, mientras el ajuste es bastante bueno en la parte ascendente y en la descendente hasta el punto de inflexión, más allá de éste la curva tiende a cero con excesiva rapidez.

<sup>12</sup>Si la curva no presenta punto de inflexión, Tasnimi propone la siguiente expresión alternativa para la curva tensión-deformación del hormigón sin punto de inflexión:  $\sigma = (2\beta - 3) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^4 + (4 - 3\beta) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^3 + \beta \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)$ , con  $\beta = \frac{E\varepsilon_0}{f'_c}$ .

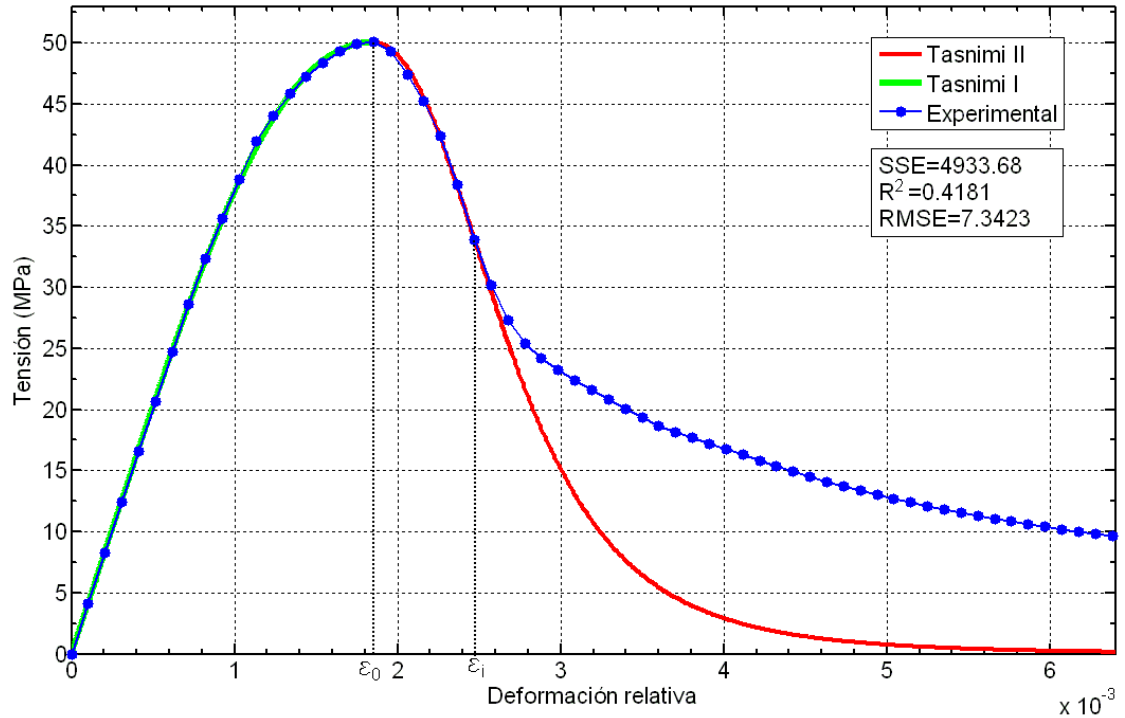


Fig. 29. Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y la ecuación propuesta por Tasnimi.

## 2.6 El Código Modelo y la EHE-08

### 2.6.1 Introducción

Terminamos esta revisión, necesariamente selectiva, de las propuestas más destacables encontradas en la bibliografía sobre modelización matemática de las curvas tensión-deformación de hormigones sometidos a ensayos de compresión uniaxial realizando un repaso sobre las propuestas *oficiales*, como las del *Comité Euro-International du Béton* —CEB—, la *Fédération Internationale de la Précontrainte* —FIP—, o la española<sup>13</sup> Instrucción de Hormigón Estructural EHE-08 [23].

El Código Modelo para Estructuras de Hormigón fue una iniciativa de la época en que no existían códigos internacionales. Debido a que, en aquellos momentos iniciales, CBE-FIP eran organizaciones destinadas a sintetizar y compilar las investigaciones y experimentos científicos internacionales, se consideró como un paso adelante importante convertir esos conocimientos y experiencias en documentos prácticos de diseño y cálculo, de tal manera que las comisiones normativas nacionales pudiesen aprovecharlos. De hecho, los *primeros* códigos —redactados en forma de *recomendaciones*— de 1964 y 1970 se usaron de esta manera. Finalmente, el primer Código Modelo para Estructuras de Hormigón [64] fue publicado en 1978 después de su aprobación por el CEB en su décima novena Sesión Plenaria celebrada en Granada en septiembre de 1977 —su publicación se asoció con el octavo Congreso de la FIP celebrado en Londres en mayo de 1978—.

Desde aquella época, el Código Modelo ha tenido un considerable impacto en las

<sup>13</sup>Para una revisión de las ecuaciones propuestas por las comisiones de algunos otros países véase, por ejemplo [65].

normativas nacionales de muchos países y, más concretamente en la armonización de los procesos de normalización, como ejemplifican las actividades de la Comisión Europea, los países del este, el Comité Nórdico para la Regulación de la Edificación y los miembros de la Asociación Europea de Libre Comercio. En realidad, el *Eurocode 2: Design of Concrete Structures, Part 1: General Rules and Rules for Buildings* —publicado en España como Norma UNE [66, 67]— utilizó como documento básico de referencia el Código Modelo de 1978.

Naturalmente, el trabajo del CEB de sintetización de resultados de investigación e información técnica, con el objetivo de trasladarlos a la práctica, continuó y, llegado un cierto momento, se vio la necesidad de realizar una revisión del Código Modelo. Así, se puso en marcha el objetivo de redactar el primer borrador completo del Código Modelo de 1990, poniéndose manos a la obra la tanto el CEB como la FIP y el primer borrador completo del Código Modelo de 1990 fue presentado durante el undécimo congreso de la FIP en Hamburgo en junio de 1990 y su aprobación tuvo lugar durante la vigésima séptima Sesión Plenaria del CEB en septiembre de 1990, en París. La versión definitiva [68] fue ratificada en la siguiente Sesión Plenaria del CEB en septiembre de 1991.

### 2.6.2 El Código Modelo de 1990

La ecuación propuesta por el Código Modelo de 1990 tanto para la rama ascendente como para una parte de la rama descendente se escribe:

$$\sigma = \frac{f'_c \left[ \frac{E}{E_s} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]}{1 + \left( \frac{E}{E_s} - 2 \right) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)} \quad (55)$$

donde  $E = \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$  y  $E_s = \frac{f'_c}{\varepsilon_0}$ , es decir, la tangente del ángulo que forma la recta que une el origen con el pico de tensión  $(\varepsilon_0, f'_c)$ , denominado *módulo secante* desde el origen hasta el pico de tensión.

Esta ecuación, que puede ser derivada de la propuesta de Sargin<sup>14</sup> haciendo en la ec. (21)  $A = \frac{E}{E_s}$ ,  $B = 1$ ,  $C = \left( \frac{E}{E_s} - 2 \right)$  y  $D = 0$ , se declara válida sólo para el tramo comprendido entre el origen y una cierta deformación límite,  $\varepsilon_{lim}$ , correspondiente a la tensión de  $0.5f'_c$  que se produce pasado  $\varepsilon_0$  y para hormigones de resistencia característica inferior a 80 MPa. Para el resto de la rama descendente, el código propone otra ecuación opcional —ya que se transcribe en la columna izquierda del texto— dada por las expresiones:

$$\sigma = \frac{f'_c}{\left( \frac{\xi}{\frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0}} - \frac{2}{\frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0}} \right) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 + \left( \frac{4}{\frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0}} - \xi \right) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)} \quad (56)$$

<sup>14</sup>En realidad coincide con la propuesta de Sargin y Handa [69] de 1969, que se escribía:

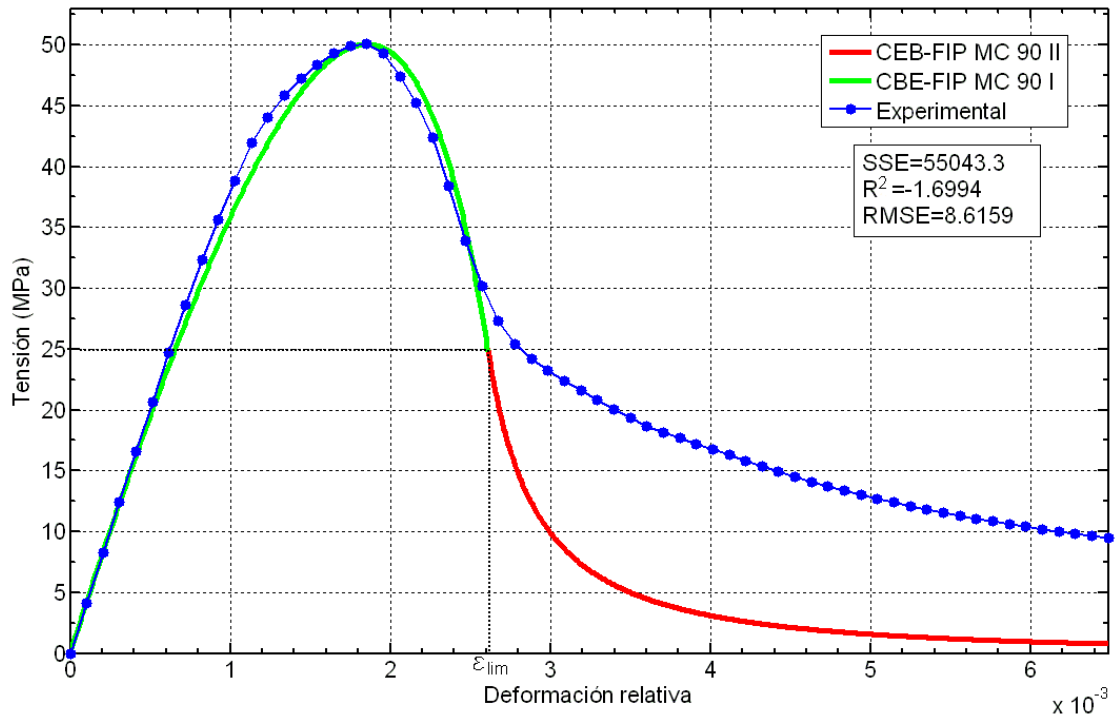
$$\sigma = \frac{f'_c \left[ A \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - (D - 1) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]}{1 + (A - 2) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) + D \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2}$$

haciendo  $A = \frac{E}{E_s}$  y  $D = 0$  en la parte ascendente, aunque Sargin y Handa mantienen el parámetro  $D \neq 0$  en la parte descendente de la curva.

con

$$\xi = \frac{4 \left[ \left( \frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0} \right)^2 \left( \frac{E}{E_s} - 2 \right) + 2 \frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0} - \frac{E}{E_s} \right]}{\left[ \frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0} \left( \frac{E}{E_s} - 2 \right) + 1 \right]^2} \quad (57)$$

Aunque el código proporciona expresiones para  $E$ ,  $\varepsilon_{lim}$  y fija el valor de  $\varepsilon_0 = 0.0022$ , los valores obtenidos con las expresiones del código no se adaptan a los que arrojan nuestros datos experimentales de la probeta M2, por lo que el mejor ajuste se ha obtenido para los valores  $E = 41210$  MPa y  $\varepsilon_{lim} = 0.00261$ . Los resultados se muestran en la figura 30:



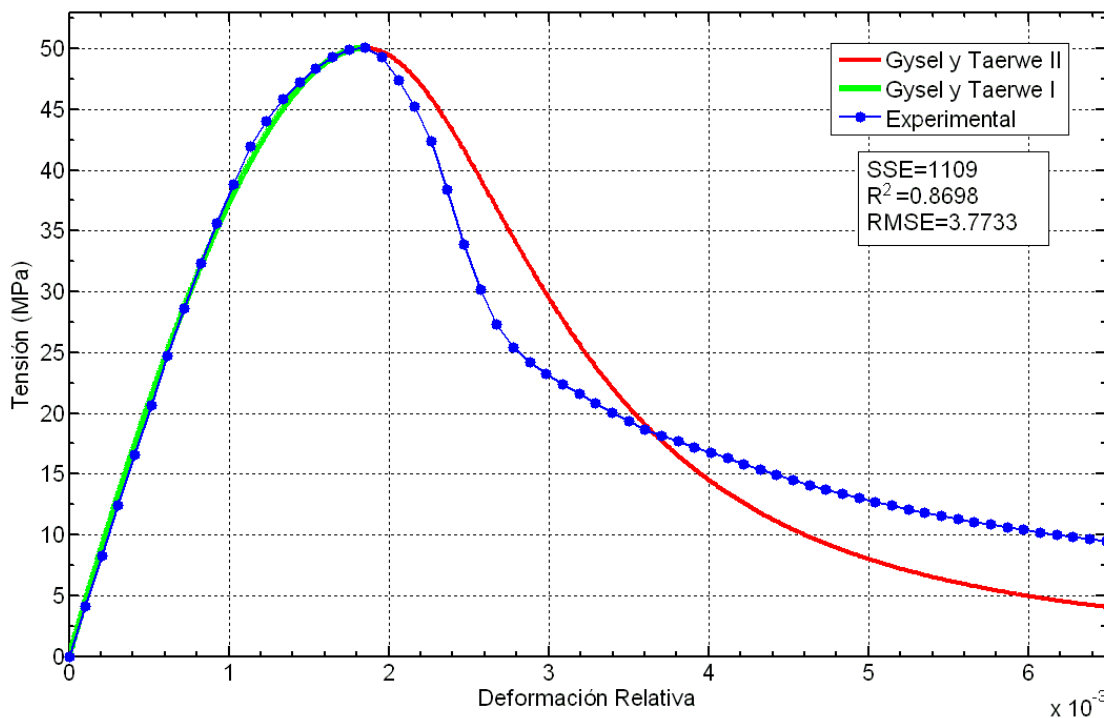
**Fig. 30.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y las ecuaciones propuestas en el Código Modelo CBE-FIP MC 90.

El Código modelo de 1990 fue reformado parcialmente en 1995 por el Boletín de Información no. 228 del CEB [70] en el que —siguiendo el modelo propuesto por Gysel y Taerwe [71]—, se amplía el intervalo de validez de las ecuaciones a  $50 \text{ MPa} \leq f'_c \leq 100 \text{ MPa}$ , se propone la misma ecuación que en el Código Modelo de 1990 para la rama ascendente —ahora válida sólo hasta el pico de tensión  $f'_c$ — y se modifica la ecuación de la rama descendente mediante la siguiente expresión:

$$\sigma = \frac{f'_c}{1 + \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\eta - 1} \right)^2} \quad (58)$$

donde  $\eta = \varepsilon_0 + t$  y  $t$  se determina experimentalmente para cada resistencia característica del hormigón. El valor propuesto para un hormigón de  $f'_c = 50$  MPa —como el de la

probeta M2—, por Gysel y Taerwe era de  $t = 0.00807$ . Nosotros hemos encontrado el mejor ajuste de la curva —que se muestra en la fig. 31— para un valor de  $t = 0.007236$ .



**Fig. 31.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 y las ecuaciones propuestas por Gysel y Taerwe —Boletín de Información no. 228 del CEB—.

### 2.6.3 El Código Modelo de 2010

En el momento que escribimos estas líneas, el Código Modelo de 2010 es todavía un borrador [72,73] pendiente de aprobación por la Asamblea General de la *fib*<sup>15</sup>, en el que la ecuación que se propone es la misma que la del Código modelo de 1990, con la diferencia de que su aplicabilidad se amplía ahora hasta hormigones de 120 MPa de resistencia característica. Por otra parte, se vuelve al campo de validez restringido del Código Modelo de 1990 —olvidando el modelo de Gysel y Taerwe del Boletín no. 288 del CEB—, un poco más allá del pico de tensión, hasta un cierto  $\varepsilon_{lim}$  cuyo valor se proporciona en una tabla, siendo  $\varepsilon_{lim} = 0.0034$  para hormigones de  $f'_c = 50$  MPa. Para la rama descendente más allá de  $\varepsilon_{lim}$  no se ofrece ecuación pero sí el siguiente comentario:

*La parte descendente de la curva tensión-deformación depende fuertemente de la probeta y su geometría, de las condiciones de contorno y de las posibilidades de redistribución de esfuerzos en la estructura. En los ensayos, puede observarse una fuerte dependencia de la rigidez de la máquina empleada. Durante el proceso, más allá de  $\varepsilon_{lim}$ , se producen microfisuras en una zona de fractura de extensión y ancho limitados. Se supone decisiva para la fractura de una determinada probeta una zona de fractura simple. La tensión en la*

<sup>15</sup> *Fédération internationale du béton*. Asociación creada en 1998, con sede en Lausana, procedente de la fusión del CEB y la FIP.

*zona de fractura desciende con un desplazamiento a cortante en bandas locales de cortante de anchura de fisura  $w_c \approx 0.5$  mm. La deformación última,  $\varepsilon_{lim}$ , es debida al desplazamiento  $w_c$  relacionado con una cierta longitud dada en la Figura 4-4 del Boletín 42 de la fib. La parte descendente de la curva tensión-deformación depende del tamaño y, por tanto, no es sólo una propiedad del material (véase la Figura 4-5 del Boletín 42 de la fib).*

*El diagrama tensión-deformación del hormigón, generalmente cumple con la representación esquemática mostrada en la Figura 5.1-3. La rama descendente de la curva tensión-deformación debería ser considerada como la envolvente de todas las posibles curvas tensión-deformación del hormigón, que tiende a suavizarse como consecuencia de su microfisuración.*

Además de estas consideraciones, que nos servirán de inspiración a la hora de hacer nuestra propuesta en el siguiente capítulo, lo más destacable, siendo uno de los ejes principales en esta tesis, es la inclusión, por primera vez, del enfoque basado en la teoría del daño que aparece en el apartado dedicado a estados de tensión multiaxiales.

En efecto: en las páginas 124 a 126 del texto principal del borrador, después de exponer las características generales del modelo elasto-plástico, el cual se declara apto para describir el comportamiento triaxial no lineal del hormigón, también se admite el modelo de daño para tal descripción, partiendo de una ecuación tensorial dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (59)$$

siendo  $\mathbf{E}$  el tensor de elasticidad que variará de acuerdo con el modelo de daño. Como caso especial se considera el daño isótropo escalar:

$$\mathbf{E} = (1 - D(\beta))\mathbf{E}_0 \quad (60)$$

siendo  $\mathbf{E}_0$  el tensor de constantes elásticas del material no dañado,  $0 \leq D(\beta) \leq 1$  y  $\beta$  una medida de la deformación equivalente con la restricción  $\beta \geq 0$ . Además, en el caso de estados simples de carga, se afirma que expresiones para  $D(\beta)$  como:

$$D(\beta) = \begin{cases} 0 & \beta \leq \beta_0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{\beta - \beta_0}{\beta_d}\right)^g} & \beta > \beta_0 \end{cases} \quad (61)$$

son apropiadas, donde los parámetros  $\beta_0$ ,  $\beta_d$  y  $g$  pueden ser derivados del comportamiento uniaxial del material. Notemos aquí que la expresión propuesta para  $D(\beta)$  —ec. (66)— no es otra que la función de distribución de Weibull desplazada —ec. (26)—.

#### 2.6.4 La Instrucción de Hormigón Estructural EHE-08

El Real Decreto 1247/2008 de 18 de julio, por el que se aprueba la Instrucción de Hormigón Estructural (EHE-08) [23], compila la reglamentación técnica —de obligado cumplimiento— relativa al proyecto y ejecución de las estructuras de hormigón en nuestro país.

Como marco normativo de un país perteneciente a la Comunidad Europea, su contenido ha de adaptarse al grupo de normas ya citado EN-1992 “Eurocódigo 2. Proyecto

de estructuras de hormigón” [66,67] que, a su vez, como ya se ha visto, tienen como documento básico de referencia el Código Modelo. Por ello, la ecuación propuesta —en los comentarios de la Comisión Permanente del Hormigón, no en el articulado de obligado cumplimiento— por la EHE-08 coincide con la propuesta por el Código modelo de 1990 con ligeras modificaciones. La ecuación propuesta por la EHE-08 es:

$$\sigma = \frac{f'_c \left[ k \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right]}{1 + (k - 2) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)} \quad (62)$$

es decir, se ha sustituido el término  $\frac{E}{E_s}$  de la ecuación del Código Modelo de 1990 —ec. (55)— por el parámetro  $k$ , que ahora se da mediante la ecuación:

$$k = 1 + 2e^{-\left(\frac{f'_c}{40}\right)} \quad (63)$$

además, para el valor de  $\varepsilon_0$ , se proporciona la expresión:

$$\varepsilon_0 = \left[ 4 + 3k + \sqrt{(4 + 3k)^2 - 40} \right] \frac{f'_c}{10E_{(0.4f'_c)}} \quad (64)$$

donde  $E_{(0.4f'_c)}$  es la tangente del ángulo que forma la recta que pasa por el origen y por el punto de la curva de ordenada  $\sigma = 0.4f'_c$  con la horizontal.

Esta curva se declara válida sólo hasta una cierta deformación límite,  $\varepsilon_{lim}$  que, a diferencia con el Código Modelo de 1990, se obtiene de la ecuación:

$$\varepsilon_{lim} = \left[ 1 + 3.1e^{-\left(\frac{1}{k-1}\right)} \right] \varepsilon_0 \quad (65)$$

Al contemplarse su validez sólo para la parte ascendente más un pequeño tramo de la descendente —hasta  $\varepsilon_{lim}$ —, excusamos su comparación con nuestros datos experimentales.

## 2.7 Cuadro resumen

Finalizamos este capítulo mostrando en la tabla 4 un resumen de las ecuaciones analizadas, ordenadas cronológicamente, conjuntamente con los valores de su tangente en el origen,  $\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ , así como los valores de la suma de los errores cuadráticos —SSE—, del coeficiente de determinación — $R^2$ — y de la raíz del error cuadrático medio —RMSE—, calculados al compararlas con nuestra curva modelo experimental completa —obtenida al ensayar el hormigón medio de la probeta M2<sup>16</sup>—.

<sup>16</sup>Excepto para la ecuación de Ritter y la ecuación de Bach, que se han comparado con la probeta M1, al no ser aptas para representar la curva tensión-deformación completa.

Ref.	Año	Autor(es)	Ecuación	$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right _{\varepsilon=0}$	Ajuste
9	1897	Bach	$\sigma = K\varepsilon^n$	$\infty$	SSE=306.8 $R^2 = 0.9805$ RMSE=2.528
35	1899	Ritter	$\sigma = f'_c(1 - e^{-1000\varepsilon})$	$10^3 f'_c$	SSE=1764 $R^2 = 0.8876$ RMSE=5.94
38	1956	Smith y Young	$\sigma = \frac{f'_c}{\varepsilon_0} \varepsilon e^{-\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\right)}$	$e \frac{f'_c}{\varepsilon_0}$	SSE=9265 $R^2 = 0.2351$ RMSE=12.03
41	1964	Desayi y Krishnan	$\sigma = \frac{2f'_c \varepsilon}{\varepsilon_0 \left[ 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 \right]}$	$2 \frac{f'_c}{\varepsilon_0}$	SSE=16230 $R^2 = -0.3396$ RMSE=15.92
42	1964	Saenz	$\sigma = \frac{K\varepsilon}{1 + \left(\frac{K\varepsilon_0}{f'_c} - 2\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}$	$K$	SSE=2333 $R^2 = 0.8074$ RMSE=6.085
43	1964	Tulin y Gerstle	$\sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{K_2 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n}$	$\frac{K_1}{K_2}$	SSE=462 $R^2 = 0.9619$ RMSE=2.752
40	1965	Sturman, Shah y Winter	$\sigma = K_1 \varepsilon - K_2 \varepsilon^n$	$K_1$	SSE=478200 $R^2 = -38.48$ RMSE=86.44
46	1965	Alexander	$\sigma = \frac{K_1 \varepsilon}{K_2 + (\varepsilon + K_3)^2} - K_4 \varepsilon$	$\frac{K_1}{K_2 + K_3^2} - K_4$	SSE=1340 $R^2 = 0.8894$ RMSE=4.612
56	1966	Shah y Winter	$\sigma = K_1 \varepsilon e^{-\left(\frac{K_1 \varepsilon - 2}{K_2}\right)^m}$	$\frac{K_1}{e^{-\left(\frac{-2}{K_2}\right)^m}}$	SSE=1316 $R^2 = 0.8913$ RMSE=4.645
44	1972	Popovics	$\sigma = \frac{n f'_c (\varepsilon/\varepsilon_0)}{n-1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n}$ $n = K_1 f'_c + 1$ $\varepsilon_0 = K_2 \sqrt[4]{f'_c}$	$\frac{f'_c n}{\varepsilon_0 (n-1)}$	SSE=1428 $R^2 = 0.8821$ RMSE=4.76
49	1978	Wang, Shah y Naaman	$\sigma = \frac{f'_c \left[ \left(1 + \frac{2K_2}{K_1}\right) \varepsilon + K_1 \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0} \right]}{\varepsilon_0 \left[ 1 + K_2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + (K_1 + 1) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 \right]}$	$1 + 2 \frac{K_2}{K_1}$	SSE=35.661 $R^2 = 0.9941$ RMSE=0.9939
45	1985	Carreira y Chu	$\sigma = \frac{\beta f'_c (\varepsilon/\varepsilon_0)}{\beta - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^\beta}$ $\varepsilon_0 = (0.71 f'_c + 168) 10^{-5}$ $\beta = (f'_c/32.4)^3 + 1.55$	$\frac{f'_c \beta}{\varepsilon_0 (\beta - 1)}$	SSE=1428 $R^2 = 0.8821$ RMSE=4.76

**Tabla 4** Cuadro resumen de las ecuaciones analizadas y sus resultados de ajuste.

Ref.	Año	Autor(es)	Ecuación	$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big _{\varepsilon=0}$	Ajuste
59-61	1988	Blechman	$\sigma = K\varepsilon \quad (0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_a)$ $\sigma = K\varepsilon e^{\frac{-(\varepsilon-\varepsilon_a)^2}{2\varepsilon_0(\varepsilon_0-\varepsilon_a)}} \quad (\varepsilon_a \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \left(1 + 2 \ln \left(\frac{f'_c}{\varepsilon_0 K}\right)\right)$ algoritmo incremental ( $\varepsilon > \varepsilon_0$ )	$K$	SSE=1221 $R^2 = 0.884$ RMSE=5.5068
47	1988	Tsai	$\sigma = \frac{K f'_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{1 + \left(K - \frac{n}{n-1}\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) + \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n}{n-1}}$ $K = 1 + \frac{17.9}{f'_c}$ $n = \frac{f'_c}{6.68} - 1.85 > 1$	$\frac{K f'_c}{\varepsilon_0}$	SSE=1381 $R^2 = 0.886$ RMSE=4.72
68	1990	MC 90	$\sigma = \frac{f'_c \left[ \frac{K_1}{K_2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{K_1}{K_2} - 2\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)} \quad (\varepsilon \leq \varepsilon_{lim})$ $\sigma = \frac{f'_c}{\left(\frac{\xi}{\varepsilon_{lim}} - \frac{2}{\varepsilon_{lim}}\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{4}{\varepsilon_{lim}} - \xi\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}$ $\xi = \frac{4 \left[ \left(\frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{K_1}{K_2} - 2\right) + 2 \frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0} \frac{K_1}{K_2} \right]}{\left[ \frac{\varepsilon_{lim}}{\varepsilon_0} \left(\frac{K_1}{K_2} - 2\right) + 1 \right]^2}$	$K_1$	SSE=5504 $R^2 = -1.6994$ RMSE=8.62
70,71	1995	Gysel y Taerwe (CEB 228)	$\sigma = \frac{f'_c \left[ \frac{K_1}{K_2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{K_1}{K_2} - 2\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)} \quad (\varepsilon \leq \varepsilon_0)$ $\sigma = \frac{f'_c}{1 + \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\eta - 1}\right)^2}$ $\eta = \varepsilon_0 + K_3$	$K_1$	SSE=1109 $R^2 = 0.8698$ RMSE=3.77
62	2004	Tasnimi	$\sigma = \frac{n^{pq} f'_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{n^{pq}} + n^{pq} - 1}$	$\frac{f'_c}{\varepsilon_0} \left(\frac{n^{pq}}{n^{pq}-1}\right)$	SSE=4933 $R^2 = 0.4181$ RMSE=7.3423

Tabla 4 (Continuación). Cuadro resumen de las ecuaciones analizadas y sus resultados de ajuste.



## CAPÍTULO 3 METODOLOGÍA

*¿Por qué se ha de temer a los cambios? Toda la vida es un cambio.*

H. G. Wells.

*No existe en las ideas nada de positivo que permita llamarlas falsas.*

Spinoza.

**E**n este tercer capítulo, verdadero *núcleo* de la tesis, expondremos, en primer lugar, los métodos o teorías en que se apoya, haciendo un pequeño repaso sobre sus orígenes y principales aplicaciones para continuar, en una presentación *in crescendo* con el desarrollo de cada una de las propuestas parciales sobre las que se irá completando la ecuación definitiva que se preconiza en el presente trabajo de investigación.

En el proceso de construcción de esta ecuación, eventualmente, será necesario que nos detengamos sobre algunos aspectos esenciales en el desarrollo de la misma, entre los que destacamos el papel del módulo de elasticidad clásico y su relación con la velocidad de transmisión de los impulsos mecánicos a través del material ensayado, la naturaleza del propio hecho de ensayar la probeta o la inmanencia de la incertidumbre que afecta a todo el proceso.

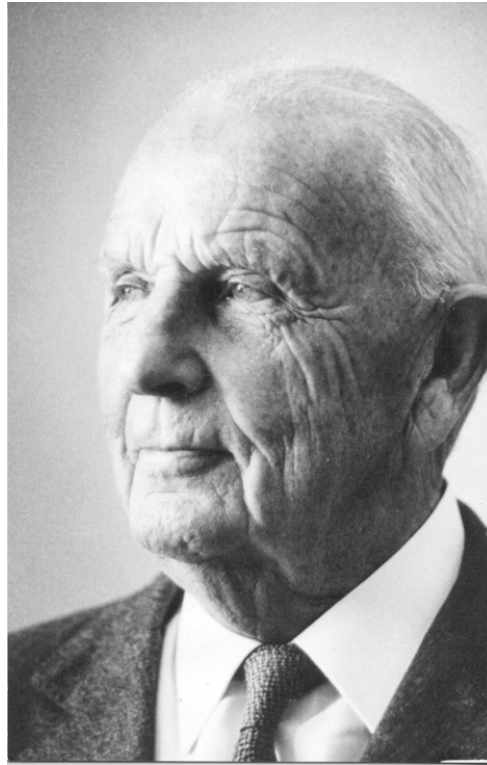
### 3.1 La teoría estadística de la resistencia de materiales de Weibull

#### 3.1.1 Introducción

Aunque el artículo más famoso y más citado de Ernst Hjalmar Waloddi Weibull —nacido en Vittsköve, Kristianstads (Suecia) el 18 de junio de 1887 y fallecido en Annecy, Rhône-Alpes (Francia) el 12 de octubre de 1979— fue el que publicó en el *Journal of Applied Mechanics* [58], de la *American Society of Mechanical Engineers* en 1951, ya, en su artículo de 1939 [57], su teoría estadística de la resistencia de materiales estaba completamente desarrollada aunque, debido al estallido de la Segunda Guerra Mundial durante aquellas fechas<sup>1</sup> y a haber aparecido en *proceedings* de relativamente poca distribución, el artículo quedó relegado al ostracismo, lo que originó que Weibull sintetizara los resul-

---

<sup>1</sup>No olvidemos que la neutralidad de Suecia durante la Segunda Guerra Mundial ha sido puesta en entredicho pues estuvo bajo la influencia alemana durante la mayor parte de la guerra y quedó aislada del resto del mundo por medio de bloqueos.



**Fig. 32.** E. H. Waloddi Weibull (1887-1979).

tados del artículo original y los volviese a publicar doce años más tarde para la ASME. La reacción a este artículo de 1951 varió desde el escepticismo —siendo el propio autor uno de los escépticos— hasta el rechazo total: la afirmación de Weibull de que los datos podrían seleccionar la distribución y ajustar los parámetros parecía demasiado buena para ser verdad. No obstante, la fuerza aérea estadounidense reconoció el potencial de la teoría y financió su investigación hasta 1975. En la actualidad, el análisis de Weibull es el principal método a nivel mundial para el análisis y ajuste de datos de ciclo de vida de todo tipo de materiales, elementos de máquinas o sistemas más complejos, tanto artificiales como biológicos. En el artículo original, las ideas principales de la teoría desarrollada por Weibull pueden seguirse a través del sencillo experimento mental que exponemos a continuación:

Sea una barra de un determinado material de longitud  $l$  y área de la sección transversal  $A$  sometida a una tensión que la lleva hasta rotura por acción de una fuerza  $F$ , y sea  $\sigma$  la tensión interna que experimentan los puntos materiales de la barra uniformemente distribuida sobre el área de la sección. Si este experimento se repite con otras barras, el valor obtenido en cada experimento de la carga de rotura para las distintas barras no será exactamente el mismo, aunque los valores obtenidos podrán ser agrupados en torno a su valor medio e indefectiblemente mostrarán cierta dispersión que, en algunos casos, será bastante considerable. Así pues, no es posible indicar un valor de la carga de rotura absolutamente exacto —una afirmación que, evidentemente, sigue siendo válida sea cual sea la magnitud física de la que estemos hablando—, pero sí es posible —o, al menos, Weibull asume que lo es— indicar una probabilidad de ruptura definida para una tensión dada. Si  $P$  es la probabilidad, entonces  $P = f(\sigma)$ , o también  $P = \omega(\varepsilon)$ , es decir,  $P$  será

una función monótonicamente creciente de la tensión o de la deformación<sup>2</sup>. Si la tensión —o la deformación— es muy pequeña,  $P \approx 0$  y, para tensiones —o deformaciones— muy grandes,  $P = 1$ .

Sea ahora el sistema tensionado compuesto, no de una, sino de dos barras idénticas colocadas una al lado de la otra. Supongamos que este sistema está sometido a una carga doble  $2F$ , es decir, a la misma tensión que en el caso de la barra simple y, por tanto, experimenta la misma deformación. Si a la tensión  $\sigma_1$ , la deformación alcanza un valor  $\varepsilon_1$  para el que podemos saber —por el experimento anterior— que la probabilidad de ruptura de una sólo de las dos barras idénticas es  $P = 0.5$ , la probabilidad de que la barra resista la tensión, es decir, su probabilidad de *supervivencia* será  $S = 1 - P$ . De acuerdo con la teoría de la probabilidad, la probabilidad  $P(1 \cap 2)$  de que dos sucesos independientes, con probabilidades de ocurrencia individual  $P(1)$  y  $P(2)$  respectivamente, ocurran simultáneamente se obtiene multiplicando las dos probabilidades individuales, es decir:

$$P(1 \cap 2) = P(1) \cdot P(2)$$

De ello se sigue que, en el caso que acabamos de mencionar, la probabilidad de que ambas barras resistan la tensión es  $S(1 \cap 2) = S^2$ . Así pues, en este ejemplo, para la deformación  $\varepsilon_1$ , la probabilidad de supervivencia se ha reducido a 0.25, mientras que la de rotura ha aumentado a 0.75.

Si el sistema está compuesto por dos barras, ahora acopladas en serie y sometidas a una fuerza  $F$ , produciendo una tensión  $\sigma$  en ambas barras, el resultado será exactamente el mismo que en el caso en que las barras estaban acopladas en paralelo, es decir, la probabilidad de rotura a la tensión  $\sigma_1$ , —que produce una deformación  $\varepsilon_1$ — habrá aumentado del 50% al 75%. De una manera general, la curva de distribución  $P_L$ , para cualquier longitud de barra  $L$  puede ser obtenida de la curva de distribución  $P$  para la longitud unitaria  $l$  de acuerdo con la fórmula:  $1 - P_L = (1 - P)^L$ , o también:

$$\ln(1 - P_L) = L \cdot \ln(1 - P) \quad (66)$$

Si tenemos un conjunto de barras acopladas en serie y en paralelo, el volumen  $V$  del sistema tensionado será proporcional a la longitud total  $L$  y, si  $P_v$  es la curva de distribución para la longitud de barra  $l$  que corresponde al volumen unitario, tendremos:

$$\ln(1 - P_L) = V \cdot \ln(1 - P_v) \quad (67)$$

Ahora, si hacemos  $B = -\ln(1 - P_v)$  y lo llamamos *riesgo de rotura*,  $B$  será proporcional al volumen  $V$  y a  $\ln(1 - P_v)$  que es función únicamente de la tensión —o de su correspondiente deformación—.

Consideremos ahora el material desde un punto de vista fenomenológico y asumamos que es un medio continuo, como habitualmente hacemos en teoría de la elasticidad y asumamos, además, que las propiedades del material —desde un punto de vista macroscópico—, sean tales que la probabilidad de que se produzca la rotura sea igual para todos sus puntos: entonces diremos que el material es isótropo. Respecto de tales materiales,

<sup>2</sup>Aunque en el artículo de Weibull, la variable independiente es siempre  $\sigma$ , nosotros, atendiendo al objetivo de la tesis, tomaremos como variable independiente la deformación relativa  $\varepsilon$  que experimenta la barra, sin pérdida de generalidad, ya que, precisamente, nuestro objetivo es encontrar la función  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  que asumimos que existe.

encontramos que el *riesgo de rotura*  $dB$  para un pequeño elemento de volumen  $dv$  se determina por la ecuación:

$$dB = -\ln(1 - P_v)dv \quad (68)$$

Como ha sido mencionado anteriormente,  $\ln(1 - P_v)$  es función sólo de  $\sigma$  o de  $\varepsilon$  y es negativo, ya que  $(1 - P_v) < 1$ . Entonces podemos escribir

$$dB = \omega(\varepsilon)dv \quad (69)$$

luego si la distribución de tensiones —o deformaciones— es arbitraria, el *riesgo de rotura* será:

$$B = \int \omega(\varepsilon)dv \quad (70)$$

donde  $\omega(\varepsilon)$  es una función característica del material que *contiene* sus propiedades resistentes.

La probabilidad de rotura de la barra será, por tanto:

$$P_L = 1 - e^{-B} = 1 - e^{-\int \omega(\varepsilon)dv} \quad (71)$$

ecuación que, según Weibull, expresa la ley fundamental de un material frágil isótropo.

Definiendo la función  $B = \int \omega(\varepsilon)dv$  o bien  $\omega(\varepsilon) = \frac{dB}{dv}$  y tomándola como punto de partida, hemos derivado la ec. (71) de manera puramente fenomenológica. Sin embargo, se puede vislumbrar una idea bastante gráfica de dicha función poniéndola en relación con las hipótesis de Griffith [75] y Smekal [76]. De hecho, asumiendo la existencia de numerosas *zonas débiles* en el interior del material, ya sea, en forma de microfisuras —de acuerdo con Griffith—, o en forma de *dislocaciones* en la malla atómica —de acuerdo con Taylor<sup>3</sup> [77-79]—, la resistencia se reduciría. Asumiendo además que todas esas *zonas débiles* son de tal naturaleza que alcanzan la rotura en cuanto se encuentren en un volumen sometido a la tensión  $\sigma$  y suponiendo que existen  $n$  *zonas débiles* por unidad de volumen y que la tensión  $\sigma$  está concentrada en el interior de un pequeño volumen  $dv$ , entonces la probabilidad de rotura del elemento de volumen será  $dP = ndv$ . Si, en lugar de uno, tenemos  $N$  elementos de volumen  $dv$  y la probabilidad de rotura es  $P$ , entonces, la probabilidad de *supervivencia* será  $S = 1 - P = (1 - dP)^N = (1 - ndv)^N$ , luego:

$$P = 1 - (1 - ndv)^N.$$

El volumen total sometido a tensión, será entonces  $V = Ndv$  y tendremos

$$P = 1 - \left(1 - \frac{nV}{N}\right)^N = 1 - \left(1 - \frac{nV}{N}\right)^{\frac{N}{nV}nV}$$

Ahora bien, si  $N$  aumenta tal como  $dv$  disminuye indefinidamente hasta que  $V$  se hace constante, obtenemos:

$$P = 1 - \lim_{\frac{N}{nV} \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{nV}{N}\right)^{\frac{N}{nV}nV} = 1 - e^{-nV} \quad (72)$$

<sup>3</sup>En 1934, Egon Orowan, Michael Polanyi y Geoffrey Ingram Taylor, más o menos al mismo tiempo, pero independientemente, se dieron cuenta de que las deformaciones plásticas de los materiales dúctiles podían ser explicados en términos de la teoría de dislocaciones desarrollada por Vito Volterra en 1921.

Nótese que la ecuación (72) concuerda con la ecuación (71) por lo que  $\omega(\varepsilon)$ , en consecuencia, puede ser interpretada como el número de *zonas débiles* por unidad de volumen que causan la rotura a una tensión —o deformación— menor o igual que  $\sigma$  —o que  $\varepsilon$ —. Consecuentemente, la función  $\omega(\varepsilon)$  debe ser una función monótonamente creciente de la deformación  $\varepsilon$ .

### 3.1.2 La distribución de Weibull

Finalizamos este apartado, repasando las consideraciones que llevaron a Weibull a proponer la distribución que lleva su nombre. En la segunda parte de su artículo fundacional, sostiene que si bien las ecuaciones (71) ó (72) están basadas en especulaciones puramente teóricas —y, por tanto, no estarán dotadas de ningún significado físico a menos que sea posible determinar mediante experimentos una función del material,  $\omega(\varepsilon)$ , cuya expresión pueda ser supuesta válida con cierta seguridad para un determinado material— los resultados de los ensayos pueden llevar a demostrar la existencia de una función de distribución característica para cada material concreto y que, usando dichos datos experimentales es posible encontrar la forma matemática de esa función.

Para ello, elige un sistema de coordenadas que considera el más adecuado a la hora de calcular la función de distribución atendiendo a la ec. (71), según la cual, la probabilidad de rotura era  $P = 1 - e^{-\int \omega(\varepsilon) dv}$ . Para una distribución uniforme de tensiones en el interior del volumen  $V$ , tenemos  $P = 1 - e^{-V\omega(\varepsilon)}$  y, por tanto:

$$\ln \ln \left( \frac{1}{1-P} \right) = \ln \omega(\varepsilon) + \ln V \quad (73)$$

Haciendo el cambio de variable  $y = \ln \ln \left( \frac{1}{1-P} \right)$  obtenemos  $y = \ln \omega(\varepsilon) + \ln V$ , de forma que una variación del volumen  $V$  de la probeta sólo implicará una traslación paralela de la función de distribución.

En este momento, introduce su celeberrima propuesta: si elegimos la función  $\omega(\varepsilon)$  de la forma:

$$\omega(\varepsilon) = \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_a}{\varepsilon_0} \right)^m \quad (74)$$

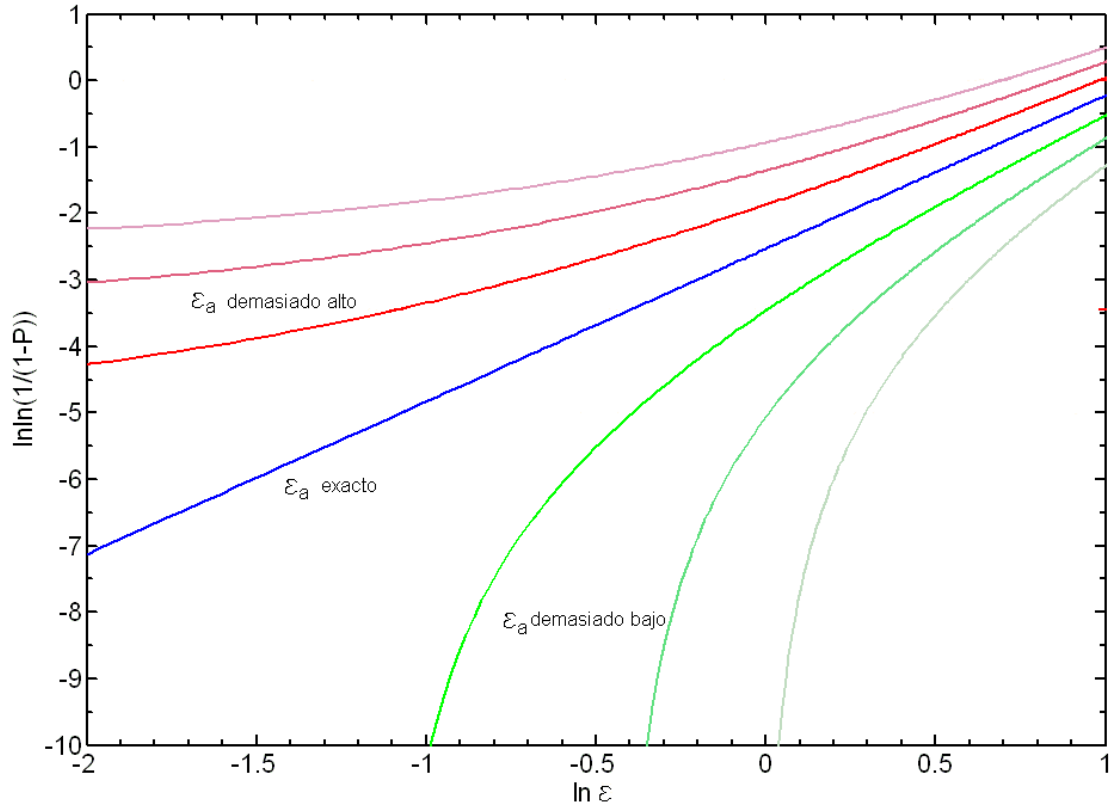
entonces, haciendo el cambio de variable  $x = \ln(\varepsilon - \varepsilon_a)$ , la ec. (73) se vuelve lineal en  $x$ , resultando:

$$y = m(x - \ln \varepsilon_0) + K \quad (75)$$

con  $K = \ln V$ . De esta manera, representando los datos en este nuevo sistema de coordenadas, obtendremos una recta cuya pendiente nos proporcionará el valor del exponente  $m$  que, como preconizaba Weibull, *son los datos los que nos dan la función de distribución*.

El método adolece del inconveniente de presuponer el conocimiento de la constante  $\varepsilon_a$ , la cual, por definición, es desconocida. Para soslayar este inconveniente, Weibull aconseja representar primero los datos en el sistema de coordenadas  $y = \ln \ln \left( \frac{1}{1-P} \right)$ ,  $x = \ln \varepsilon$ . Si de este modo la gráfica obtenida sigue una línea recta, ello implicará que  $\varepsilon_a = 0$ . Si, por el contrario, la gráfica se sitúa sobre una línea curva, ello querrá decir que  $\varepsilon_a \neq 0$  y habrá que hacer intentos sucesivos —fig. 33—, para encontrar el valor correcto de  $\varepsilon_a$  que haga que la curva se convierta en línea recta<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>En los años en que fueron escritos los artículos de Weibull este proceso era necesariamente gráfico, por lo que resultaba tedioso. Hoy en día, con el uso de un ordenador y *software* adecuado puede tomar sólo unos segundos.



**Fig. 33.** Valores, por defecto y por exceso, del parámetro  $\varepsilon_a$  que hace a la distribución de Weibull lineal en el plano  $x = \ln \varepsilon$ ,  $y = \ln \ln \left( \frac{1}{1-P} \right)$ .

Si el valor estimado de la constante  $\varepsilon_a$  es demasiado alto, la curva obtenida será convexa, mientras que si es demasiado bajo, la curva se inclinará hacia el lado opuesto mostrándose cóncava, circunstancias que nos ayudarán a ir ajustando el valor de  $\varepsilon_a$  hasta que la curva se aproxime a una línea recta tanto como sea posible.

Llegados a este punto, estamos en condiciones de escribir las expresiones de la distribución de Weibull —desplazada<sup>5</sup>—, en función de la deformación que experimenta una probeta de volumen unitario de un material genérico.

- Función de distribución:

$$F(\varepsilon; \varepsilon_a, \varepsilon_0, m) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_a}{\varepsilon_0} \right)^m \right] \quad (76)$$

- Función de densidad:

$$f(\varepsilon; \varepsilon_a, \varepsilon_0, m) = \frac{m}{\varepsilon_0} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_a}{\varepsilon_0} \right)^{m-1} \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_a}{\varepsilon_0} \right)^m \right] \quad (77)$$

- Esperanza matemática:

$$E(X) = \varepsilon_a + \varepsilon_0 \Gamma \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \quad (78)$$

donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función Gamma de Euler.

<sup>5</sup>Aunque Weibull la escribió como en la ec. (76), en la actualidad se conoce de manera estándar la distribución de Weibull como  $F(\varepsilon; m, \varepsilon_0) = 1 - \exp \left( - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^m \right)$ , es decir, sin el parámetro de desplazamiento.

### 3.1.3 La Distribución del Valor Extremo Generalizada

En estadística, la Teoría del Valor Extremo analiza las condiciones bajo las cuales, los extremos de una muestra aleatoria convergen hacia una distribución límite no degenerada cuando el tamaño de la muestra  $n$  tiende hacia infinito. El desarrollo de los modelos fundamentales de esta teoría se deben, entre otros, a Fréchet [80], Fisher y Tippett [81] y Gnedenko [82].

El teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko —también conocido como teorema de Fisher-Tippett o Teorema del Valor Extremo— es un resultado general de la Teoría del Valor Extremo que llevó al desarrollo de la distribución asintótica para modelizar máximos, o mínimos, denominada Distribución Generalizada del Valor Extremo —GEVD<sup>6</sup>—. En la Teoría del Valor Extremo, este teorema juega análogo papel que el Teorema Central del Límite en el estudio de medias. Su enunciado puede formalizarse como sigue:

Sean  $X_{1,n} \geq \dots \geq X_{i,n} \geq \dots \geq X_{n,n}$  un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una función de distribución común  $F$ , es decir,  $F(x) = P(X_{i,n} \leq x)$ , y sea  $M_n$  el máximo de todas ellas, esto es,  $M_n = X_{1,n} = \max(X_{1,n} \geq \dots \geq X_{i,n} \geq \dots \geq X_{n,n})$ , que tendrá como función de distribución:

$$P(M_n \leq x) = P(X_{1,n} \leq x; \dots; X_{i,n} \leq x; \dots; X_{n,n} \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_{i,n} \leq x) = F^n(x)$$

El Postulado de Estabilidad establece que para obtener una distribución límite no degenerada, es necesario *reducir* el máximo mediante la aplicación de una transformación lineal con coeficientes  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $b_n > 0$  que dependan sólo del tamaño de la muestra  $n$ , esto es:

$$P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = F^n(a_n + b_n x) = F(x) \quad (79)$$

en cuyo caso se dice de  $F(x)$  que es una distribución *max-estable*<sup>7</sup>.

Entonces, si existen las constantes  $a_n \in \mathbb{R}$  y  $b_n > 0$ , se cumple:

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) \quad (80)$$

donde  $G(x)$  es una distribución asintótica no degenerada que representa la función de distribución estándar del valor extremo —GEVD— y que pertenece a alguna de las familias siguientes: la distribución de Gumbel [83], la distribución de Fréchet o la distribución de Weibull.

Con más propiedad, podría decirse que las distribuciones citadas son casos particulares de una distribución asintótica general denominada Distribución del Valor Extremo Generalizada, cuyas ecuaciones pueden tomar la forma<sup>8</sup>:

<sup>6</sup>Generalized Extreme Value Distribution.

<sup>7</sup>Ya que  $F^n$  es la función de distribución de  $M_n = \max(X_{1,n} \geq \dots \geq X_{i,n} \geq \dots \geq X_{n,n})$ , donde  $X_{i,n}$  son variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución común  $F$ , la propiedad de *max-estabilidad* la satisfacen aquellas distribuciones para las cuales la operación de tomar máximos muestrales da lugar a una distribución idéntica.

<sup>8</sup>En realidad, en Teoría del Valor Extremo, la GEVD se expresa:  $G(x) = \exp\left[-\left(1 + \xi\left(\frac{x-a_n}{b_n}\right)\right)^{\frac{-1}{\xi}}\right]$ , pero por coherencia con la Mecánica del Daño Continuo, en cuyo seno trabajaremos más adelante, preferimos expresar su *opuesta*, restándola de la unidad. De la misma manera, tomamos  $\xi$  en vez de  $\frac{1}{\xi}$  por concordancia con la forma con que hemos venido expresando la distribución de Weibull.

- Función de distribución:

$$G(x; a_n, b_n, \xi) = 1 - \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \left( \frac{x - a_n}{b_n} \right) \right)^{-\xi} \right] \quad (81)$$

- Función de densidad:

$$g(x; a_n, b_n, \xi) = \frac{1}{b_n} \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \left( \frac{x - a_n}{b_n} \right) \right)^{-\xi} \right] \left[ 1 + \frac{1}{\xi} \left( \frac{x - a_n}{b_n} \right) \right]^{-\xi-1} \quad (82)$$

- Esperanza matemática:

$$E(X) = a_n + \xi b_n \left[ \Gamma \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) - 1 \right] \quad (83)$$

En efecto: tomando  $\xi = 0$ , la DGVD no está definida, pero sí el límite:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{1}{\xi} \left( \frac{x - a_n}{b_n} \right) \right]^{-\xi} = e^{-\left( \frac{x - a_n}{b_n} \right)}$$

luego se obtiene

$$\text{GEVD}_I = 1 - \exp \left[ - \exp \left( - \left( \frac{x - a_n}{b_n} \right) \right) \right] \quad (84)$$

que es la GEVD de tipo I o distribución —opuesta— de Gumbel.

Por otra parte, tomando  $m = \xi$ , obtenemos:

$$\text{GEVD}_{II} = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x - x_a}{x_0} \right)^{-m} \right] \quad (85)$$

que es la distribución —opuesta— de Fréchet con  $x_a = a_n + mb_n$  y  $x_0 = mb_n$ , que dan cumplimiento al Postulado de Estabilidad —ec. (79)—.

Por último, haciendo  $m = -\xi$ :

$$\text{GEVD}_{III} = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{x - x_a}{x_0} \right)^m \right] \quad (86)$$

que, como sabemos, es la expresión más habitual de la distribución de Weibull trasladada<sup>9</sup> o GEVD tipo III.

## 3.2 Cálculo fraccional

### 3.2.1 Introducción

Mientras las derivadas e integrales *tradicionales* son, por no decir más, elementos básicos para el ingeniero, esenciales como medio de conocimiento y trabajo con sistemas tanto artificiales como naturales, el cálculo fraccional es un campo, de uso poco frecuente, de los estudios matemáticos que surge de las definiciones clásicas de los operadores del cálculo

<sup>9</sup>Al deducir la GEVD tipo III se obtiene  $x_a = a_n + mb_n$  y  $x_0 = -mb_n$ , lo que estaría en contradicción con la exigencia de que  $b_n > 0$ . La Teoría del Valor Extremo salva esta dificultad redefiniendo la distribución de Weibull como  $\text{GEVD}_{III} = 0 \Leftrightarrow x > 0$  y  $\text{GEVD}_{III} = 1 - \exp[-(\frac{x-x_a}{x_0})^m] \Leftrightarrow x \leq 0$

diferencial e integral de forma similar a cómo los exponentes fraccionarios se consideran una ampliación de los exponentes de valor entero.

Consideremos el significado del exponente: de acuerdo con nuestros profesores de primaria, los exponentes proporcionan una notación abreviada de lo que es, esencialmente, una multiplicación repetida de un valor numérico por sí mismo. Pero esta definición física se vuelve confusa si consideramos exponentes de valor no entero antes de que, en el bachillerato, se introduzcan los logaritmos. Mientras —casi— cualquiera puede comprender que  $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ , es decir, la cantidad  $x$  multiplicada por sí misma cinco veces, ¿cómo podríamos describir el significado físico de  $x^{2.3}$ ? O, todavía peor, ¿cual es el significado físico del exponente trascendente  $x^\pi$ ? No es fácil concebir lo que sería multiplicar una cosa o una cantidad por sí misma 2.3 veces, o  $\pi$  veces<sup>10</sup> y, sin embargo, estas expresiones tienen un valor definido para cualquier valor de  $x$  verificable mediante desarrollos infinitos en serie o, como es más común hoy en día, usando una calculadora.

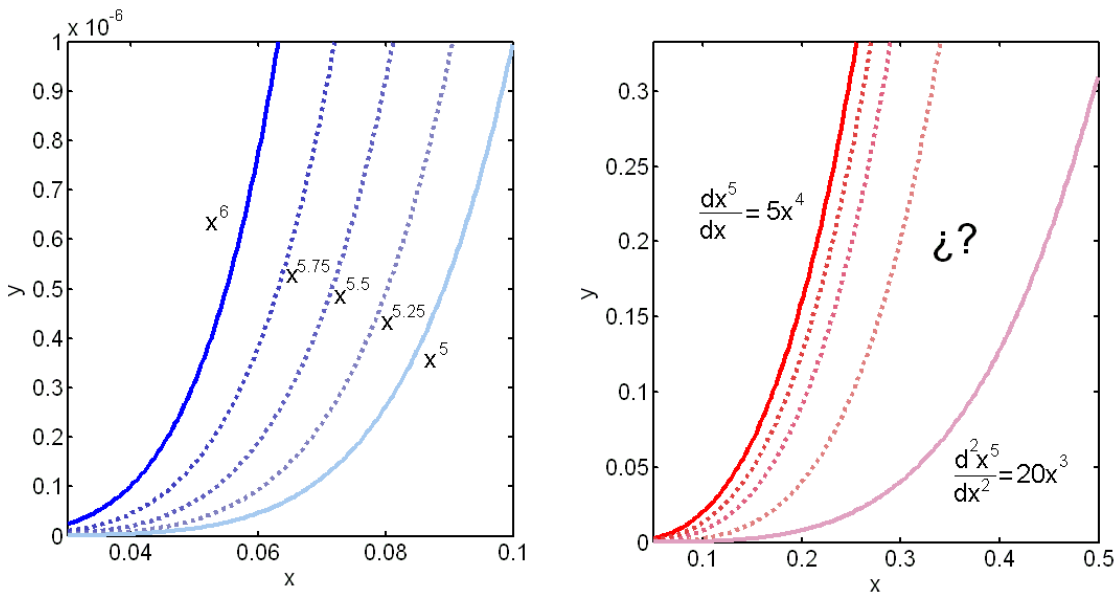


Fig. 34. Analogía entre exponentes y órdenes de derivación fraccionarios.

Para ilustrar el razonamiento, nos ayudaremos de la fig. 34. A la izquierda representamos la gráfica de las funciones  $f_1(x) = x^5$  y  $f_2(x) = x^6$ . Los exponentes fraccionarios aparecen como funciones que van ocupando las posiciones *intermedias* entre  $f_1$  y  $f_2$ . En el lado derecho se representan las derivadas primera y segunda de  $f_1(x) = x^5$ , es decir:  $f_1'(x) = \frac{dx^5}{dx} = 5x^4$  y  $f_1''(x) = \frac{d^2x^5}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{dx^5}{dx}) = \frac{d}{dx}(5x^4) = 20x^3$ . Ahora cabría preguntarse: ¿sería posible definir *otras derivadas* de orden fraccionario entre 1 y 2 que ocupen las posiciones intermedias entre  $\frac{dx^5}{dx}$  y  $\frac{d^2x^5}{dx^2}$  de manera similar a como se definen los exponentes fraccionarios entre 5 y 6?

En esta pregunta sitúan la mayoría de los autores el nacimiento del concepto de cálculo fraccional y fue formulada por primera vez en 1695 por Guillaume de l'Hôpital en una carta a Gottfried Wilhelm Leibniz en la que se interesaba por el significado de la notación —hoy en día la más popular— de Leibniz  $\frac{d^n y}{dx^n}$  para la derivada de orden  $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$  ¿Qué pasaría si  $n = \frac{1}{2}$ ? —preguntaba l'Hôpital—. En su respuesta,

<sup>10</sup>Por no nombrar la considerada *fórmula matemática más bella del mundo*, debida a Euler:  $e^{i\pi} - 1 = 0$ .

fecha el 30 de septiembre de 1695, Leibniz contestó a l'Hôpital lo siguiente: ...*Esta es una aparente paradoja de la que, algún día, se sacarán consecuencias muy útiles.*

Las siguientes menciones a las derivadas fraccionales fueron hechas, en diversos contextos por —a modo de ejemplos—, Euler en 1730, Lagrange en 1772, Laplace en 1812, Lacroix en 1819, Fourier en 1822, Liouville en 1832, Riemann en 1847, Greer en 1859, Holmgren en 1865, Grünwald en 1867, Letnikov en 1868, Sonin en 1869, Laurent en 1884, Nekrassov en 1888, Krug en 1868 y Weil en 1917. Así, por ejemplo, en su libro de texto de 771 páginas titulado *Traité de Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* [84], Silvestre François Lacroix dedica dos páginas —409-410, fig. 35— al cálculo fraccional, mostrando finalmente que:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}v}{dv^{\frac{1}{2}}} = \frac{v dv}{\sqrt{\pi}} = \frac{2\sqrt{v}}{\sqrt{\pi}}.$$

Además de —evidentemente— a la teoría de las ecuaciones diferenciales, integrales e integro-diferenciales y a las funciones especiales de la física matemática, así como a sus extensiones y generalizaciones en una o varias variables, algunas de las áreas de aplicación actual del cálculo fraccional incluyen el flujo de fluidos, la reología, los procesos dinámicos de estructuras porosas y auto-semicolones —fractales—, la teoría del transporte difuso, las redes eléctricas, probabilidad y estadística, teoría de control de sistemas dinámicos, viscoelasticidad, electroquímica de la corrosión, físico-química, óptica, procesamiento de señales, etc.

### 3.2.2 Definiciones de derivada e integral de orden fraccional. Cálculo diferintegral

Partiendo de la fórmula de Cauchy para el cálculo de la integral iterada:

$$D^{-n}f(x) = \int \int \cdots \int f(x) dx^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt \quad (87)$$

y de la generalización de la noción de  $n!$  introducida por Euler a través de la función Gamma:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \Rightarrow \Gamma(z) = (z-1)!$$

donde  $z$  es ahora cualquier número complejo con  $\text{Re}(z) > 0$ , Liouville [85] llegó a la integral que lleva su nombre, generalizando el número natural  $n$  a cualquier complejo<sup>11</sup>  $\alpha$  con  $\text{Re}(z) > 0$ , con lo que surge la primera expresión formal para una integral de orden fraccional —no entero—:

$$D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (88)$$

Más tarde, Riemann, siendo estudiante, modifica o generaliza la integral de Liouville, cambiando el límite inferior 0 por  $a$  o el superior  $x$  por  $b$ , dando paso a las integrales de Riemann-Liouville, que constituyen una de las definiciones que veremos de la integración fraccional:

$${}_a D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a; \text{Re}(\alpha) > 0) \quad (89)$$

$${}_x D_b^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x < b; \text{Re}(\alpha) > 0) \quad (90)$$

<sup>11</sup>Para los fines perseguidos en esta tesis nos bastará con que  $\alpha$  sea un número real positivo.

410 CHAP. V. APPLICATION DU CALCUL INTÉGRAL

Si l'on fait  $m = 1$ ,  $n = \frac{1}{2}$ , il viendra

$$d^{\frac{1}{2}}v = \sqrt{v}dv \frac{\int dx 1^{\frac{1}{2}}}{\int dx \left(1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{v}dv}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

en observant qu'entre les limites 0 et 1,

$$\int dx 1^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \int dx \left(1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$\pi$  étant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1 (1160).

C'est ainsi que l'on parviendrait à l'équation primitive de la courbe correspondante à l'équation différentielle

$$y d^{\frac{1}{2}}v = v \sqrt{dy},$$

dans laquelle  $dv$  est supposée constante. Au moyen de la valeur précédente de  $d^{\frac{1}{2}}v$ , on la transformerait d'abord en  $\frac{y\sqrt{v}dv}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = v \sqrt{dy}$ ; et quarrant ensuite chacun de ses membres, on obtiendrait  $\frac{y^2 dv}{\frac{1}{4}\pi} = v dy$ , d'où l'on conclurait

$$\frac{1}{\frac{1}{4}\pi} l v = C - \frac{1}{y}, \quad \text{ou} \quad y l v = \frac{1}{4} C \pi y - \frac{1}{4} \pi.$$

1163. L'interpolation dont nous venons de donner un exemple, s'opère facilement sur toutes les fonctions qui sont données par des intégrales définies; et elle fournit en même temps des expressions fort simples des différentielles de certaines fonctions du genre de celles que nous avons examinées dans les nos 1016 et suivans. De l'équation  $[p] = \int dx \left(1^{\frac{1}{x}}\right)^p$ , par exemple, on conclut sans difficulté les suivantes (note du n° 546),

$$\begin{aligned} d.[p] &= dp \int dx \left(1^{\frac{1}{x}}\right)^p \left(\frac{1}{x}\right), & d^{\cdot}[p] &= dp^{\cdot} \int dx \left(1^{\frac{1}{x}}\right)^p \left(\frac{1}{x}\right)^{\cdot}, \\ \dots\dots\dots d^{\cdot}[p] &= dp^{\cdot} \int dx \left(1^{\frac{1}{x}}\right)^p \left(\frac{1}{x}\right)^{\cdot}. \end{aligned}$$

Les différences s'obtiennent d'une manière analogue, en observant que  $\Delta^{\cdot} f X dx = f \Delta^{\cdot} (X dx)$ ; il vient alors

Fig. 35. Página 410 del tratado de Silvestre François Lacroix: *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* (2ª Ed., Courcier, París, 1819).

donde  ${}_a D_x^{-\alpha} f(x)$  y  ${}_x D_b^{-\alpha} f(x)$  se denominan integrales fraccionales por la izquierda y por la derecha, respectivamente<sup>12</sup>.

Las ecuaciones (89) y (90), sólo permiten calcular integrales fraccionales, no derivadas. Para el cálculo de las derivadas fraccionales, Riemann propone primero aplicar la integral fraccionaria<sup>13</sup> y luego derivar de forma entera<sup>14</sup>, es decir:

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left( {}_a D_x^{n-\alpha} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\text{Re}(\alpha)]+1) \quad (91)$$

$${}_x D_b^\alpha f(x) = \frac{-d^n}{dx^n} \left( {}_x D_b^{n-\alpha} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{-d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\text{Re}(\alpha)] + 1) \quad (92)$$

donde  $[\text{Re}(\alpha)]$  es la parte entera de  $\text{Re}(\alpha)$ . Por ejemplo, si queremos encontrar la derivada de orden  $\alpha = 3.4$ ,  $n = [\text{Re}(3.4)] + 1 = [3.4] + 1 = 3 + 1 = 4$ , por tanto se integra primero con orden  $n - \alpha = 4 - 3.4 = 0.6$  y luego se deriva normalmente 4 veces.

En 1967, Caputo [86] propone calcular las derivadas fraccionales a partir de la integral de Riemann-Liouville de manera exactamente inversa, es decir, derivando primero reiteradamente de forma convencional e integrando con orden fraccional al final, definiendo así una nueva versión de las derivadas de orden fraccional:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^{n-\alpha} \left( \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{\frac{d^n}{dx^n} f(x)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\text{Re}(\alpha)] + 1) \quad (93)$$

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = {}_x D_b^{n-\alpha} \left( \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{\frac{-d^n}{dx^n} f(x)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\text{Re}(\alpha)] + 1) \quad (94)$$

conocidas como las derivadas fraccionales de Caputo. Así, si queremos encontrar la derivada de orden  $\alpha = 3.4$ ,  $n = [\text{Re}(3.4)] + 1 = [3.4] + 1 = 3 + 1 = 4$ , por tanto se calcula primero la derivada cuarta de  $f(x)$  y luego se calcula la integral fraccional de orden  $n - \alpha = 4 - 3.4 = 0.6$ .

En efecto, si calculamos la derivada de orden  $\alpha = 3.4$  de la función  $f(x) = x^5$  —entre 0 y  $x$ — mediante la propuesta de Riemann —o de la *mano izquierda*—, obtenemos:

$${}_a D_x^{3.4}(x^5) = \frac{1}{\Gamma(0.6)} \frac{d^4}{dx^4} \int_0^x \frac{t^5 dt}{(x-t)^{0.4}} = \frac{1}{\Gamma(0.6)} \frac{d^4}{dx^4} \left( \frac{78125x^{5.6}}{150696} \right) = \frac{125x^{1.6}}{\Gamma(0.6)} = 83.94x^{1.6}$$

Si hacemos lo mismo aplicando el método de Caputo —o de la *mano derecha*—, obtenemos el mismo resultado:

$${}_a^C D_x^{3.4}(x^5) = \frac{1}{\Gamma(0.6)} \int_0^x \frac{\frac{d^4}{dt^4}(t^5)dt}{(x-t)^{0.4}} = \frac{1}{\Gamma(0.6)} \int_0^x \frac{120tdt}{(x-t)^{0.4}} = \frac{125x^{1.6}}{\Gamma(0.6)} = 83.94x^{1.6}$$

Sin embargo, si intentamos lo mismo con la función constante  $f(x) = K$ , mediante el procedimiento de Riemann obtenemos  ${}_a D_x^\alpha(K) = \frac{Kx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ , mientras que por Caputo

<sup>12</sup>Es posible ampliar el dominio de definición  $[a, b]$  de las integrales de Riemann-Liouville hasta  $(-\infty, \infty)$ , con lo que podríamos escribir:  ${}_{-\infty} D_x^{-\alpha} f(x) = D_+^{-\alpha} f(x)$  y  ${}_x D_{\infty}^{-\alpha} f(x) = D_-^{-\alpha} f(x)$ .

<sup>13</sup>Nótese que las derivadas fraccionales, al provenir de una integración previa a la derivación, tienen límites. Por ello la notación  ${}_a D_x^\alpha$  o  ${}_x D_b^\alpha$ .

<sup>14</sup>Por ello se conoce también al cálculo fraccional como cálculo *diferintegral*.

resulta  ${}_a^C D_x^\alpha(K) = 0$ , ya que la derivada enésima de una constante es idénticamente cero.

Efectivamente, si  $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ , las derivadas fraccionales de Riemann-Liouville y Caputo sólo coinciden en los siguientes casos:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x) \iff f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1)$$

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = {}_x D_b^\alpha f(x) \iff f(b) = f'(b) = \dots = f^{(n-1)}(b) = 0 \quad (n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1)$$

Concluimos este apartado dando la definición de *diferintegral* de Grünwald-Letnikov [87,88]. Al contrario que en el enfoque de Riemann-Liouville, que deriva su definición de la integral repetida, la formulación de Grünwald-Letnikov se aproxima al problema desde el lado de la derivada. Para ello, partimos de la definición de derivada como límite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aplicando esta fórmula de nuevo podemos hallar la derivada segunda

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2}}{h_1}$$

Eligiendo ahora  $h = h_1 = h_2$  la expresión anterior se reduce a:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

e iterando el proceso  $n$  veces, podemos encontrar la definición de derivada enésima

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(x - mh) \quad (95)$$

La ecuación (95) puede generalizarse para valores no enteros de  $n$ , ya que en el coeficiente  $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  los factoriales no enteros pueden expresarse, como ya hemos visto, mediante la función Gamma de Euler. Además, el límite superior de la sumatoria,  $n$  tiende a infinito tal como  $\frac{t-a}{h}$  —donde  $t$  y  $a$  son los límites de derivación superior e inferior respectivamente—, con lo que obtenemos:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x - mh) \quad (96)$$

que es la definición de derivada fraccional de Grünwald-Letnikov en forma generalizada.

Por otra parte, es razonable pensar que, al igual que la definición de integral fraccional de Riemann-Liouville puede ser usada para hallar la derivada, la ec. (96) podría ser modificada para hallar la definición de integral fraccional de Grünwald-Letnikov. Esta modificación pasa por cambiar  $n$  en la ec. (95) por  $-n$ , con lo que aparece el coeficiente  $\binom{-n}{m}$ , que aunque no está definido para números enteros negativos, sí puede generalizarse para reales negativos haciendo uso una vez más de la función Gamma:

$$\binom{-\alpha}{m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m! \Gamma(\alpha)}$$

Con lo que obtenemos para la integral fraccional de Grünwald-Letnikov:

$$D^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha + m)}{m! \Gamma(\alpha)} f(x - mh) \quad (97)$$

Tenemos pues, dos definiciones de cálculo fraccional, la propuesta por Riemann-Liouville y la de Grünwald-Letnikov. La pregunta inmediata es: ¿son equivalentes las dos definiciones? La respuesta es que sí, aunque su demostración excede los objetivos de la presente tesis, por lo que únicamente añadiremos que, mientras que la versión de Riemann-Liouville se presta muy bien para el cálculo analítico de *diferintegrales* de funciones relativamente simples ( $x^a$ ,  $e^x$ ,  $\text{sen}(x)$ , etc.), la forma de Grünwald-Letnikov es más adecuada cuando las funciones son de difícil o imposible integración, pues permite la utilización del análisis numérico.

### 3.2.3 El cálculo diferintegral y los modelos constitutivos

Podría decirse que los modelos constitutivos más simples son la ley de Hooke

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) \quad (98)$$

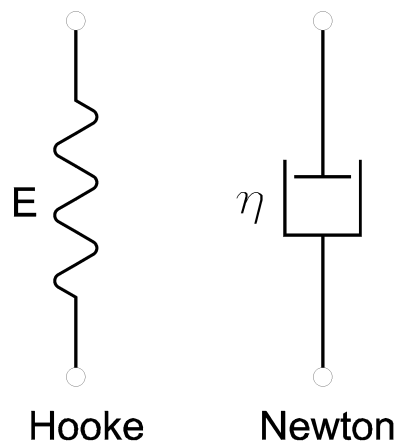
para sólidos perfecta e indefinidamente elásticos y la ecuación de los fluidos ideales Newtonianos

$$\sigma(t) = \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (99)$$

donde  $E$  y  $\eta$  son constantes.

Las ecuaciones (98) y (99) representan modelos matemáticos para materiales sólidos y fluidos ideales respectivamente, ninguno de los cuales existen en la naturaleza. De hecho, los materiales reales combinan comportamientos de esos dos casos límite, quedando en algún lugar intermedio entre los sólidos y los fluidos ideales, si ordenamos los materiales respecto de su firmeza.

La fig. 36 muestra una esquematización de ambos modelos. El elemento elástico de Hooke se representa como un muelle, mientras que el elemento viscoso de Newton se muestra como un amortiguador. En reología, es práctica común trabajar con estas representaciones en vez de escribir las correspondientes ecuaciones.



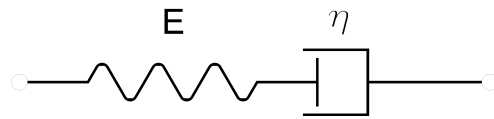
**Fig. 36.** Esquemas para los modelos de Hooke y Newton.

Históricamente, los elementos de Hooke y Newton fueron combinados con el propósito de dotar de las propiedades de ambos materiales ideales a modelos *más reales*. Son posibles dos combinaciones: en serie y en paralelo. De la conexión en serie de los dos elementos básicos resulta el modelo de material viscoelástico de Maxwell y de la conexión en paralelo se obtiene el modelo de Voigt. Ambos modelos todavía dejan mucho que desear.

En el caso del modelo de Maxwell —fig. 37—, descrito por la ec. (100)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \tag{100}$$

si  $\sigma = const \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = const$ , lo que significa que si la tensión es constante, la deformación crece hasta infinito, lo que no corresponde con ninguna observación experimental.



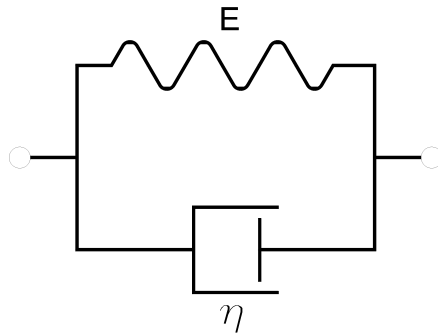
**Maxwell**

**Fig. 37.** Esquema del modelo de Maxwell.

En el caso del modelo de Voigt —fig. 38—,  $\sigma$  y  $\varepsilon$  están relacionados por:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \tag{101}$$

de lo que se sigue que si  $\varepsilon = const \Rightarrow \sigma = const$ , por lo que el modelo de Voigt no refleja el fenómeno de relajación de tensiones experimentalmente observado.

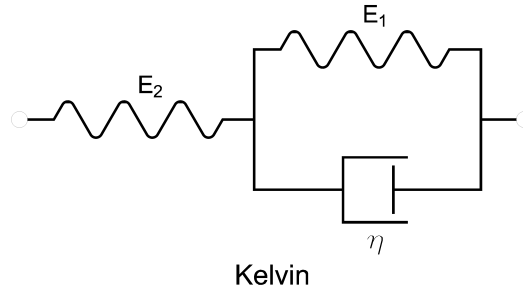


**Voigt**

**Fig. 38.** Esquema del modelo de Voigt.

En el siguiente nivel de complejidad, las desventajas de los modelos de Maxwell y Voigt fueron objeto de mejora: el acoplamiento en serie de un elemento de Voigt viscoelástico con un elemento elástico de Hooke, proporciona el modelo de Kelvin —fig. 39—:

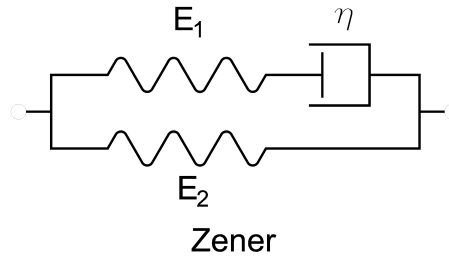
$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma = E_1 \left( \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_2}{\eta} \varepsilon \right) \tag{102}$$



**Fig. 39.** Esquema del modelo de Kelvin.

mientras que conectando un elemento de Maxwell con uno de Hooke en paralelo obtenemos el modelo de Zener:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_2}{\eta}\sigma = (E_1 + E_2)\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1 E_2}{\eta}\varepsilon \quad (103)$$



**Fig. 40.** Esquema del modelo de Zener.

Tanto el modelo de Kelvin como el modelo de Zener proporcionan una buena descripción cualitativa, pero no son considerados satisfactorios desde el punto de vista cuantitativo [89,90]. Por ello, se desarrollaron posteriores modelos reológicos de materiales viscoelásticos más complejos que consisten en la combinación de varios —a veces muchísimos— elementos de Kelvin o Máxwell combinados con elementos elásticos de Hooke. Estos modelos implican una complejidad creciente de las expresiones que relacionan tensión y deformación, en las que aparecen combinaciones lineales de las derivadas de cualquier orden entero de la tensión respecto a la deformación. En el caso más general, se llega a un modelo de la forma:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k} \quad (104)$$

obteniéndose los mejores resultados cuando  $n = m$  —esta propiedad proviene de los modelos de Kelvin y Zener, en los cuales  $n = m = 1$ —.

Usar la ec. (104), como ley básica de la deformación de los materiales viscoelásticos, conduce a ecuaciones diferenciales complicadas y a altos órdenes de derivación en la formulación y resolución de problemas aplicados<sup>15</sup>, a pesar del hecho de que las ecuaciones

<sup>15</sup>Para ofrecer una idea de dicha complicación, en el contexto del Máster en Ingeniería de Control, Sistemas Electrónicos e Informática Industrial, el autor ha trabajado precisamente en este problema desde el enfoque del Modelado e Identificación de Sistemas Dinámicos para resolver la ec. (104) de manera que

diferenciales resultantes sean lineales —debido a la linealidad de la ley básica de la deformación—.

Sin embargo, existe un nuevo y fascinante enfoque que, preservando la linealidad de los modelos, proporciona mejores niveles de aplicación:

En efecto, en 1947, Blair [91,92], señalando que la tensión es proporcional a la derivada de orden cero de la deformación en los sólidos y proporcional a la derivada primera en los fluidos, propone materiales *intermedios*, dotados de *cuasi-propiedades* para los que la tensión sería proporcional a la derivada de orden intermedio —no entero— de la deformación, es decir:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= E \frac{d^0 \varepsilon(t)}{dt^0} && \text{Hooke} \\ \sigma(t) &= K_0 D_t^\alpha \varepsilon(t) && \text{Blair} \\ \sigma(t) &= \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} && \text{Newton}\end{aligned}\tag{105}$$

donde  $K$  y  $\alpha$  serían constantes dependientes del material y ( $0 < \alpha < 1$ ).

Al mismo tiempo, Gerasimov [93] sugiere una generalización similar de la ley básica de la deformación, que puede ser escrita en términos de la derivada fraccional de Riemann-Liouville como:

$$\sigma(t) = \kappa_{-\infty} D_t^\alpha \varepsilon(t) \quad (0 < \alpha < 1)\tag{106}$$

en la que  $\kappa$  jugaría el papel de coeficiente de *viscosidad generalizada*.

Y aún puede ser mencionada una tercera formulación de una generalización de la ley básica de la deformación, debida a Slonimsky [94], quien en 1961 propuso:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\kappa} {}_0 D_t^{-\alpha} \sigma(t)\tag{107}$$

Bajo las condiciones de que  $\varepsilon(0) = 0$ , y de que las funciones son iguales a cero para  $t < 0$ , las tres ecuaciones (105), (106) y (107) son equivalentes.

Al lado de estas aproximaciones, centradas en el cálculo fraccional, a la viscoelasticidad lineal, citaremos también dos enfoques adicionales estrechamente relacionados.

Las consideraciones anteriores pueden considerarse como una *transición* desde la viscoelasticidad lineal clásica basada en modelos de orden entero hacia los modelos de orden fraccional desde el punto de vista de la descripción matemática de las leyes de la deformación en términos de derivadas fraccionales. Sin embargo, los modelos de viscoelasticidad de orden fraccionario pueden también derivarse a partir de la denominada ley potencial de la relajación de tensiones en materiales reales, formulada por primera vez claramente por Nutting [95] en la forma<sup>16</sup>:

$$\varepsilon = at^\alpha \sigma^b\tag{108}$$

---

se ajustase a la curva tensión-deformación de un acero al carbono usando los modelos más utilizados en la citada disciplina —ARX, ARMAX, OE, Box-Jenkins, etc.—, obteniendo el mejor resultado —99.35% de ajuste— para un modelo OE —*Output-error*— con 13 parámetros y función de transferencia  $\frac{B(s)}{F(s)}$ , donde  $B(s) = 276.1s^6 + 1.833 \cdot 10^6 s^5 + 6.211 \cdot 10^9 s^4 + 1.148 \cdot 10^{13} s^3 + 9.294 \cdot 10^{15} s^2 - 1.902 \cdot 10^{16} s + 4.414 \cdot 10^{15}$  y  $F(s) = s^7 + 784.6s^6 + 5.901 \cdot 10^5 s^5 + 1.824 \cdot 10^8 s^4 + 3.6 \cdot 10^{10} s^3 + 1.863 \cdot 10^{12} s^2 + 1.734 \cdot 10^{13} s - 3.684 \cdot 10^{13}$ .

<sup>16</sup>Nótese que para procesos cuasi estáticos, con  $t = \text{const}$ , la ec. (108) de Nutting no es otra cosa que la ecuación de Bach, ec. (1), con la que principia esta tesis.

donde  $a$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son los parámetros del modelo.

Tomando  $\beta = 1$  y haciendo  $c_0 = \frac{1}{a}$ , vemos que para una deformación constante ( $\varepsilon = \text{const}$ ) la relajación de tensiones se describe por la relación potencial:

$$\sigma(t) = c_0 \varepsilon t^{-\alpha} \quad (109)$$

Por otra parte, para una tensión constante ( $\sigma = \text{const}$ ), la deformación vendría dada por:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{c_0} t^\alpha \quad (110)$$

Como ha puesto de manifiesto Nonnenmacher [96], de las ecuaciones (109) o (110), se sigue que las funciones  $\sigma(t)$  y  $\varepsilon(t)$  satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales fraccionales:

$$D^\alpha \sigma(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-2\alpha)} \sigma(t) \quad (111)$$

$$D^\alpha \varepsilon(t) = \Gamma(1+\alpha)t^{-\alpha} \varepsilon(t) \quad (112)$$

Lo que indica la estrecha relación que existe entre la representación del comportamiento viscoelástico por medio de una ley potencial y las derivadas fraccionales.

### 3.3 Generalizar, generalizar y generalizar

#### 3.3.1 Introducción

Para ilustrar el proceso de generalización que ha llevado a proponer la ecuación que preconiza la presente tesis, nos apoyaremos en la serie de artículos que publicaron Yip *et al.* entre 1995 y 1997 [97,98,39] en el que justifican la propuesta de Smith y Young —[38], ec. (10)— a través de la teoría de la *densidad isoenergética* [99] y la distribución de Weibull.

Según la teoría de la densidad isoenergética, el hormigón podría modelarse como un continuo compuesto por un conjunto arbitrariamente grande de *elementos isoenergéticos* de volumen elemental, cada uno de los cuales se considera linealmente elástico, es decir, cumpliendo la ley de Hooke, y que pueden ser elementos constitutivos de cualquiera de las tres fases del hormigón, esto es, partículas de pasta de cemento endurecido, partículas de mortero —arena-cemento— o partículas de grava, o sea, pueden estar localizados en cualquier punto de la masa del hormigón. La *microfractura* del material microestructural en el interior de un elemento isoenergético representaría la formación de microfisuras en el hormigón. En la teoría de la densidad isoenergética, la densidad de energía de la *isosuperficie crítica* en un elemento isoenergético en el momento de microfisuración estaría dada por:

$$s_{cr} = v_{cr} w_{cr} \quad (113)$$

donde  $v_{cr}$  es el valor crítico de la tasa de cambio de volumen por unidad de superficie de un elemento isoenergético que interactúa con los correspondientes valores críticos del volumen y las densidades de energía de la isosuperficie,  $w_{cr}$  y  $s_{cr}$  respectivamente para llevar a cabo la fractura del elemento isoenergético a un valor impuesto de la *isodeformación* inducida  $e$ . La densidad de energía del volumen crítico de un elemento isoenergético en el momento de la microfractura viene dada por:

$$w_{cr} = \lambda \int \int v_{cr} dede \quad (114)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro que se introduce para ajustar las dimensiones de la ecuación. Sustituyendo la ec. (114) en la ec. (113) se obtiene la expresión de la densidad de energía de la isosuperficie de un elemento isoenergético:

$$s_{cr} = \lambda \int \int (v_{cr})^2 dede \quad (115)$$

En este punto, Yip considera los elementos isoenergéticos como individuos de una población representados por una variable aleatoria  $s$ . Para cada valor  $s_{cr}$ , cierto número de elementos isoenergéticos —modelos microscópicos del material— se romperán. La distribución acumulada de  $s_{cr}$  —denotada por  $F(s)$  se define como el número de modelos microscópicos sometidos a una densidad de energía  $s$  igual o menor que  $s_{cr}$ , dividido por el número total de modelos microscópicos en el material:

$$P(s \leq s_{cr}) = F(s)$$

Postulando que, en cualquier punto del material la isotensión  $\tau$  —o tensión a la que se encuentra sometido un elemento isoenergético— y la isodeformación  $e$  cumplen:

$$\frac{d\tau}{de} = \lambda v_{cr}$$

se llega a que la densidad de energía de la isosuperficie crítica,  $s_{cr}$ , es proporcional al cuadrado de la correspondiente isodeformación, por lo que:

$$P(s \leq s_{cr}) = F\left(\frac{e}{e_0}\right)^2 = F\left(\frac{s}{s_0}\right) \quad (116)$$

donde  $e_0$  y  $s_0$  son factores de normalización.

Para la función de distribución, —desarrollando el argumento corriente de Weibull de 1939 [57]— elige su función de distribución sin parámetro de desplazamiento — el parámetro  $e_a$  debe ser cero pues representa la probabilidad de que un microelemento isoenergético se rompa a deformación cero— y, recordando que para obtener los parámetros de la distribución de Weibull no es necesario conocer todos los estados de isodeformación individuales  $e_p$  de los elementos isoenergéticos, sino sólo los valores globales de la deformación  $\varepsilon$ , obtiene:

$$P = 1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m}$$

Invocando que el término  $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m$  debe depender de la densidad de energía de la isosuperficie,  $s$ , de una microfisura que se propaga en el seno del material microestructural de un elemento isoenergético y que, como se ha visto,  $s$  es función del cuadrado de la isodeformación,  $e$ , establece que el valor de  $m$  debe ser 2 y escribe:

$$P = 1 - \exp\left[-\left(\frac{e}{e_0}\right)^2\right] = 1 - \exp\left[-\left(\frac{s}{s_0}\right)\right]$$

que, considerando que ha obtenido una línea recta al representar  $y = \ln \ln\left(\frac{1}{1-P}\right)$  frente a  $x = \ln(\varepsilon)^2$  de los resultados experimentales arrojados por un ensayo de compresión de una probeta de hormigón, podría escribirse como:

$$P = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\right]$$

Para finalizar, utilizando el argumento corriente de la teoría de la variable interna de daño isótropo —expuesta en el capítulo anterior, ec. (24)— y recordando que se había supuesto un comportamiento de los elementos isoenergéticos perfectamente elásticos, se llega a la ecuación de Smith y Young:

$$F = K\delta \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \right] \Leftrightarrow \sigma = E\varepsilon \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \right]$$

donde  $F = \sigma A$ ,  $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$  y  $E = \frac{K}{AL}$ , siendo  $A$  el área de la sección transversal y  $L$  la longitud de la probeta, respectivamente.

En resumen:

Yip *redescubre* la ecuación de Smith y Young de 1956 practicando dos *restricciones*: la primera consiste en imponer que el exponente  $m$  de la distribución de Weibull sea igual a la unidad —cercenando así la gran *versatilidad* de dicha distribución, sin duda, su cualidad más destacada— y la segunda, la que se opera al imputar a las partículas de volumen elemental de las que estarían compuestos los materiales en el seno de la Mecánica del Medio Continuo un comportamiento perfectamente elástico, siguiendo la ley de Hooke.

Por el contrario, nosotros seguiremos el camino justamente opuesto al seguido por Yip, es decir, construir la ecuación que modela las curvas tensión-deformación a partir de generalizaciones.

### 3.3.2 Primera generalización: ley de Hooke ampliada

Toda vez que la ley de Hooke puede expresarse como:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \quad (117)$$

cabría, a la luz de los enfoques del cálculo diferintegral que hemos repasado en §3.2, generalizar el orden de derivación de esta ecuación diferencial —ec. (117)— y proponer una ley de Hooke *ampliada*<sup>17</sup> a órdenes de derivación no enteros:

$${}_0D_\varepsilon^\alpha \sigma = K \quad (118)$$

ecuación diferencial de orden fraccional de solución inmediata:

$${}_0D_\varepsilon^{-\alpha} {}_0D_\varepsilon^\alpha \sigma = {}_0D_\varepsilon^{-\alpha} K \Rightarrow \sigma = {}_0D_\varepsilon^{-\alpha} K$$

que, invocando la definición de integral fraccional de Riemann-Liouville por la izquierda —ec. (89)— resulta

$$\sigma = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\varepsilon \frac{K dt}{(\varepsilon - t)^{1-\alpha}}$$

de donde se obtiene, integrando:

$$\sigma = \frac{K}{\alpha \Gamma(\alpha)} \varepsilon^\alpha \quad (119)$$

<sup>17</sup>Utilizamos el término *ampliada* y no el de *generalizada* puesto que la expresión *ley de Hooke generalizada* ya está bien establecido en el ámbito de la elasticidad lineal tensorial de deformaciones infinitesimales.

Así pues, utilizaremos la ec. (119) —en los supuestos de continuidad, isotropía y homogeneidad en los que se enmarca la presente tesis— para representar el comportamiento de los puntos materiales, notando cómo ahora la constante  $K$  ha perdido —de momento— el significado físico que poseía  $E$  —módulo de elasticidad de la ec. (117)— en la formulación clásica del problema.

### 3.3.3 Segunda generalización: la distribución de Weibull

Más parece que el discurso teórico desarrollado por Yip, basado en la teoría de la *densidad isoenergética* [99], estuviese encaminado a forzar que su resultado coincida con la ecuación de Smith y Young que a encontrar una ecuación que modele el mayor número de curvas tensión-deformación para los distintos tipos de hormigones puesto que, como hemos comentado, al asignar un valor fijo al exponente  $m = 1$ , la distribución de Weibull pierde toda su versatilidad.

Efectivamente, una de las razones por la que la distribución de Weibull es tan usada es porque es capaz de modelar procesos en los que la *tasa de fallos*,  $h$ :

$$h(\varepsilon; \varepsilon_a, \varepsilon_0, m) = \frac{m}{\varepsilon_0} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_a}{\varepsilon_0} \right)^{m-1} \quad (120)$$

1. Crece con el *tiempo*<sup>18</sup> si  $m > 1$  —cual es el caso más normal de gran parte de los materiales estructurales—.
2. Es constante con el tiempo si  $m = 1$  —hipótesis defendida por Yip—, o
3. Disminuye con el tiempo si  $m < 1$  —posibilitando el modelado del endurecimiento por deformación en algunas aleaciones de acero o el aumento de la resistencia del hormigón con la edad—.

Por ello, —en primera aproximación— adoptaremos la distribución de Weibull para representar la evolución del daño de los materiales tal como fue expuesta por este autor —ec. (76)—, manteniendo su exponente  $m$  variable en función de cada material e incluso, como veremos, para cada espécimen individual.

### 3.3.4 Tercera generalización: la Distribución del Valor Extremo Generalizada

Iríamos contra el necesario espíritu generalizador de toda ciencia si, conociendo que una expresión matemática es un caso particular de otra más general, empleásemos la primera en vez de esta otra última para modelar un determinado proceso físico mediante una fórmula.

Aunque en los primeros tanteos de propuesta de una ecuación para modelar las curvas tensión-deformación del hormigón, la utilización de la distribución de Weibull como función de daño parecía ajustarse bastante bien a los datos experimentales, la existencia —expuesta en 3.1.3— de una distribución generalizada que engloba a la mayoría de distribuciones continuas conocidas, nos ha llevado a adoptarla como función de distribución del daño en nuestra propuesta.

Como ejemplo de caso, citamos un artículo aparecido recientemente —2009— firmado por Basu *et al.* [100] en el que los autores se preguntan si la distribución de Weibull es

<sup>18</sup>Nos referimos a un tiempo *abstracto* relacionado con el ensayo o proceso particular que estemos modelando, no únicamente al tiempo cronológico.

la distribución estadística más apropiada para los materiales frágiles y, para intentar responder a la pregunta, realizan diversos ensayos sobre distintos materiales estructurales cerámicos y sobre un vidrio, contrastando los resultados con cuatro distribuciones estadísticas, a saber: la distribución de Weibull, la distribución normal, la log-normal, la distribución gamma y la distribución exponencial *generalizada*<sup>19</sup>. Como resultado de su análisis, concluyen que las distribuciones gamma o log-normal, en contraste con la de Weibull o la distribución exponencial generalizada parecen describir, en ciertos casos, más apropiadamente los datos de resistencia experimentalmente medidos.

Sin embargo, como nos autoriza a afirmar el teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko, —apartado 3.1.3— las distribuciones usadas para comparar del artículo de Basu *et al.*, no son más que casos particulares —límites— de la Distribución del Valor Extremo Generalizada. La forma de las distribuciones límite para máximos extraídos de muestras cuya distribución inicial es  $F(x)$  se resumen en la siguiente tabla.

Distribución inicial $F(x)$	Distribución límite para los máximos $G(x)$
Exponencial	GEVD Tipo I (Gumbel)
Gamma	GEVD Tipo I (Gumbel)
Normal	GEVD Tipo I (Gumbel)
Log-normal	GEVD Tipo I (Gumbel)
Pareto	GEVD Tipo II (Fréchet)
Cauchy	GEVD Tipo II (Fréchet)
Burr	GEVD Tipo II (Fréchet)
Log-gamma	GEVD Tipo II (Fréchet)
Uniforme	GEVD Tipo III (Weibull)
Beta	GEVD Tipo III (Weibull)

**Tabla 5** Forma de las distribuciones límite para máximos extraídos de muestras cuya distribución inicial es  $F(x)$ .

### 3.3.5 *Directriz general de la tesis*

Estamos casi a punto de escribir, por primera vez, la ecuación —restringida— que se propone en esta tesis pero, antes, creemos necesario expresar la *directriz general* que nos ha guiado en todo el proceso de evolución, desde la primera intuición hasta la definición completa de la misma, que se hará en 3.4.3.

Si en lugar del concepto *material estructural* tomamos la noción de *materia sólida*, entonces, una ecuación que pretenda describir ajustada y completamente la evolución de la curva tensión-deformación de un *material estructural* concreto, debe ser *autosemejante*, esto es, toda vez que los *materiales estructurales* están compuestos por combinaciones más o menos complejas de *materia sólida* y que dicha *materia sólida* —sea cual sea su *naturaleza*— debe responder también al ensayo tensión-deformación atendiendo a una ecuación *determinada*, ésta debe poder ser constantemente aplicada para describir el

<sup>19</sup>Debida a Gupta y Kundu [101], que tiene como función de distribución  $F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha$  y como función de densidad  $f(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}$  y que, evidentemente, coincide con la distribución exponencial cuando  $\alpha = 1$ .

comportamiento tensión-deformación de cualquiera de las posibles combinaciones que dan lugar a los *materiales estructurales*, razonamiento que debilita completamente la separación clásica de los sólidos en elásticos, plásticos, viscosos, frágiles, dúctiles, etc.

En otras palabras: *si una ecuación pretende modelar de manera rigurosa el comportamiento tensión-deformación de UNO de los materiales estructurales, tendrá que comenzar por modelar dicho comportamiento para TODOS los materiales.*

Newton lo sabía bien —si pretendes encontrar una ley que describa el movimiento de *un* planeta concreto, debes iniciar tu investigación encontrando primero la ley que describe el movimiento de *todos* los planetas— y, a su manera, Einstein venía a decir lo mismo cuando escribía:

*...Si una sólo de las conclusiones que se extraigan de ella [la teoría general de la relatividad] resulta ser errada, tendremos que abandonarla, pues modificarla sin destruir toda su estructura parece ser imposible<sup>20</sup>.*

Por otra parte, el otro *faro* que nos ha guiado ha sido procurar que las leyes clásicas sobre el comportamiento tensión-deformación de materiales, tanto de resistencia infinita como de resistencia limitada, —ley de Hooke para materiales elásticos ideales, ley uniforme para materiales perfectamente plásticos o ecuación de Bach para materiales plásticos que presentan endurecimiento por deformación— quedaran contenidas en la ecuación propuesta como casos límites pues, volviendo a parafrasear a Einstein<sup>21</sup>:

*...El sino más hermoso de una teoría física es el de señalar el camino para establecer otra más amplia, en cuyo seno pervive como caso límite.*

### 3.3.6 Formulación básica de la ecuación tensión-deformación: forma restringida

Partiendo de un modelo de daño basado en una variable interna de daño representada por una función escalar —daño isótropo— de ecuación general

$$\sigma = \Psi(\varepsilon) \left(1 - \omega(\varepsilon)\right) \quad (24)$$

donde  $\sigma$  representa la tensión aplicada,  $\varepsilon$  la deformación *ingenieril*<sup>22</sup> experimentada por la probeta,  $\Psi(\varepsilon)$  la respuesta del material no dañado y  $\omega(\varepsilon)$  la función escalar de de daño ( $0 \leq \omega(\varepsilon) \leq 1$ ), digo que:

1. Si asumimos que el material está compuesto por un número suficientemente grande de *partículas* suficientemente pequeñas —medio continuo— e idénticas —material homogéneo—, entonces  $\omega(\varepsilon)$  puede considerarse como una variable aleatoria con función de distribución de probabilidad dada por la función de distribución del Valor Extremo Generalizado —ec. (81)— y así, la ec. (24) se escribirá ahora:

$$\sigma = \Psi(\varepsilon) \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\varepsilon - a_n}{b_n} \right) \right)^{-\xi} \right] \quad (121)$$

<sup>20</sup>Fragmento del artículo escrito por Einstein a petición del *The London Times*, publicado el 28 de noviembre de 1919.

<sup>21</sup>Einstein, A. Sobre la teoría de la relatividad especial y general (Altaya, Madrid, 1984).

<sup>22</sup>La deformación ingenieril se define como la razón entre el incremento de longitud  $\Delta L$  que experimente la probeta al ser tensionada y su longitud inicial  $L_0$ :  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$

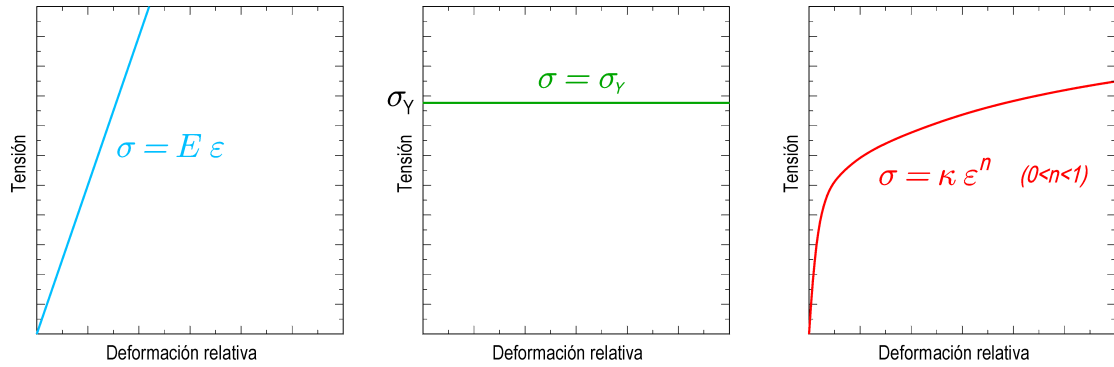
2. Por otra parte, si la función  $\Psi(\varepsilon)$ , que representa el comportamiento de las *partículas* del material en ausencia de daño, adopta la forma de la ley de Hooke *ampliada* propuesta en la ec. (119), la ecuación que proponemos para modelar las curvas tensión-deformación de materiales *simples* o bien ensayados con una tasa de incremento de la tensión constante hasta el punto inmediatamente anterior a su rotura toma la forma:

$$\sigma = \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha)} \varepsilon^\alpha \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\varepsilon - a_n}{b_n} \right) \right)^{-\xi} \right] \quad (122)$$

donde  $\Gamma(\cdot)$  es la función Gamma de Euler y  $K$ ,  $\alpha$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  y  $\xi$  son parámetros sin un sentido físico formalmente atribuido —de momento—, que no tienen por qué ser todos distintos de cero y a determinar experimentalmente.

### 3.3.7 Las leyes clásicas como casos límite de la ecuación propuesta

Comprobemos que, como requiere la directriz general de la tesis, las leyes clásicas, en las que el comportamiento es perfecto y la resistencia del material es infinita, a saber: la ley de Hooke, la de la tensión de fluencia constante y la ley potencial —ecuación de Bach—, son casos límite de la ecuación propuesta (fig. 41).



**Fig. 41.** Las tres leyes de comportamiento clásicas: Hooke, fluencia constante y ecuación de Bach.

En efecto: haciendo  $\xi = 0$ , la GEVD deviene en la distribución de Gumbel, por lo que la ecuación propuesta —ec. 122— se transforma en:

$$\sigma = \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha)} \varepsilon^\alpha \exp \left[ - \exp \left( - \left( \frac{x - a_n}{b_n} \right) \right) \right]$$

Por otra parte, si  $b_n \rightarrow \infty$  y  $a_n = 0$ , la resistencia del material será ilimitada —la probabilidad de daño de las partículas del material no aumenta al aumentar la deformación—, obteniéndose:

$$\sigma = \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha)} \varepsilon^\alpha e^{-1}$$

ecuación que toma la forma de las leyes clásicas en los tres siguientes supuestos:

1. Si  $0 < \alpha < 1$  obtenemos la ecuación de Bach

$$\sigma = \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha)} \varepsilon^\alpha \quad (123)$$

con  $\kappa = \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha)}$  y  $n = \alpha$ , —fig. 41 (derecha)—.

2. Si  $\alpha = 1$ , la integral de la ec. (118) es de orden entero, y entonces  $\int_0^\varepsilon K d\varepsilon = K\varepsilon$ , de lo que resulta la ley de Hooke

$$\sigma = \frac{K}{e} \varepsilon \tag{124}$$

si identificamos  $E$  con  $\frac{K}{e}$ , —fig. 41 (izquierda)—.

3. Por último, si  $\alpha = 0$ , entonces la integral de la ec. (118) no opera sobre  $K$ , es decir,  ${}_0D_\varepsilon^0 K = K$  y, por tanto, obtenemos la ley de fluencia constante

$$\sigma = \frac{K}{e} \tag{125}$$

siendo  $\sigma_Y = \frac{K}{e}$  el valor de la tensión de fluencia —fig. 41 (centro)—.

### 3.4 Ampliaciones de la ecuación

#### 3.4.1 Las curvas tensión-deformación completas

En 3.3.6, hemos definido la ec. (122) como una ecuación apropiada para modelar las curvas tensión-deformación de materiales simples o bien ensayados con una tasa de incremento de la tensión constante *hasta el punto inmediatamente anterior a su rotura*. Entonces, ¿qué ocurre más allá de ese punto? ¿Deja de ser válida la ecuación?

Lo que ocurre más allá de ese punto es, evidentemente, que la probeta se rompe separándose en dos mitades, la tensión cae constante y nominalmente a cero y la deformación —como medida proporcionada por la lectura del extensómetro— aumenta indefinidamente.

Los diagramas tensión-deformación al uso no suelen representar este hecho, sino que se limitan, la mejor de las veces, a representar una estrellita u otro símbolo sobre el punto de rotura y otras, simplemente, a dejar la curva *colgando* —fig. 42 (izquierda)—.

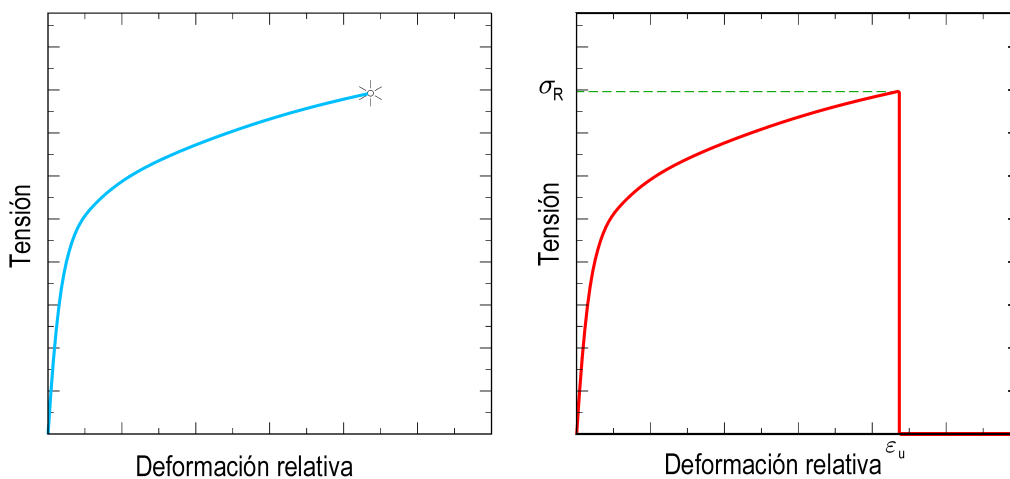


Fig. 42. Representaciones *incompleta* —izquierda— y *completa* —derecha— de una curva tensión-deformación genérica.

Sin embargo, si representamos el proceso completo, el diagrama tensión-deformación debería tener un aspecto semejante al de la fig. 42 (derecha), en el que el tramo vertical señala la deformación última o de rotura  $-\varepsilon_u$ , la tensión de rotura  $-\sigma_R$  y que el ensayo ha finalizado.

Para tratar de modelar también este hecho experimentalmente observado —pues si mantenemos los extensómetros y la célula de carga enviando datos al sistema de adquisición y almacenamiento obtenemos una representación similar a la de la fig. 42 (derecha)—, razonaremos del siguiente modo:

Supongamos que el ensayo, en sí mismo, es también parte del proceso de deformación. Entonces podrá definirse la probabilidad de que el ensayo esté teniendo lugar, que será igual a 1 mientras que la probeta aún no se haya roto y 0 después de la rotura o, visto de otro modo, podremos definir la probabilidad de que durante el ensayo no se haya producido una inestabilidad del sistema que lo dé por finalizado. Estos dos puntos de vista pueden relacionarse con la forma de rotura de los distintos materiales. En los ensayos de tracción de materiales metálicos, generalmente conductores, la rotura —división de la probeta en dos partes separadas—, puede detectarse perfectamente mediante un circuito eléctrico que quede abierto cuando las dos mitades se separen, mientras que para materiales cuya división en dos partes resulta más difícil —o imposible— de detectar —v. g. en el ensayo a compresión de una probeta de madera— la rotura puede determinarse fijando un escalón de inestabilidad superado el cual la probeta se considera rota —por ejemplo, cuando la tensión caiga más de 20 kN entre una medición y la inmediatamente siguiente—.

Entonces, teniendo en cuenta la propiedad que muestra el *núcleo* de la GEVD por la cual, conforme crece  $|\xi|$  converge hacia una *barrera de potencial*<sup>23</sup> soportada en el intervalo  $(2\varepsilon_a - \varepsilon_u < \varepsilon_a < \varepsilon_u)$  con  $\varepsilon_a = a_u - \xi_u b_u$  y  $\varepsilon_u = \xi_u b_u$ , podemos expresar la probabilidad de que el ensayo se esté realizando mediante la función de distribución:

$$F(\varepsilon; a_u, b_u, \xi_u) = \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi_u} \left( \frac{\varepsilon - a_u}{b_u} \right) \right)^{-\xi_u} \right] \quad (126)$$

donde  $|\xi_u|$  es un número<sup>24</sup> tan grande como requiera la exactitud y sensibilidad del método utilizado para detectar o *certificar* la rotura. En la fig. 43, se representa dicha función de distribución para los parámetros  $\varepsilon_a = 2$ ,  $\varepsilon_u = 3$  y  $\xi_u = -50$ .

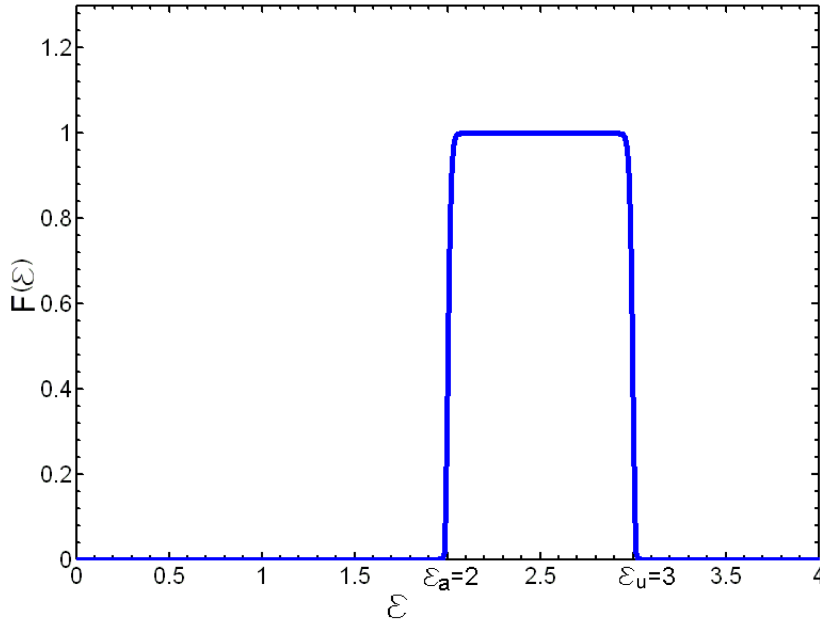
Si estamos completamente seguros<sup>25</sup> de que el ensayo comienza en  $\varepsilon = 0$ , entonces  $\varepsilon_a = 0$ , y podremos escribir:

$$F(\varepsilon; \varepsilon_u, \xi_u) = \exp \left[ - \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\xi_u \varepsilon_u} \right)^{-\xi_u} \right] \quad (127)$$

<sup>23</sup>Término usado en mecánica cuántica para describir una zona acotada de potencial constante, en nuestro caso de la forma:  $F(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon < \varepsilon_a \\ 1, & \varepsilon_a < \varepsilon < \varepsilon_u \\ 0, & \varepsilon_u < \varepsilon \end{cases}$  y que se representa en la fig. 43.

<sup>24</sup>De momento entero y par.

<sup>25</sup>Más adelante pondremos en tela de juicio esta seguridad.



**Fig. 43.** Representación de una *barrera de potencial* entre  $\varepsilon_a = 2$  y  $\varepsilon_u = 3$ .

Por lo que una ecuación aún más general que la ec. (122) puede ser escrita para modelizar situaciones como la de la figura 42 (derecha), con la forma general:

$$\sigma = \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha)}\varepsilon^\alpha \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\varepsilon - a}{b} \right) \right)^{-\xi} \right] \frac{K_u}{\alpha_u\Gamma(\alpha_u)}\varepsilon^{\alpha_u} \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi_u} \left( \frac{\varepsilon - a_u}{b_u} \right) \right)^{-\xi_u} \right]$$

en la que algunos de los parámetros que habíamos definido *sin sentido físico*, comienzan a cobrarlo. En efecto, particularizando, para  $\varepsilon_a = a_u - b_u\xi_u = 0 \Leftrightarrow a_u = b_u\xi_u$ ,  $\varepsilon_u = b_u\xi_u$ ,  $\alpha_u = 0$  y  $K_u = 0$  podemos escribir:

$$\sigma = \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha)}\varepsilon^\alpha \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\varepsilon - a_n}{b_n} \right) \right)^{-\xi} \right] \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right)^{\xi_u} \right] \quad (128)$$

que es la ecuación que proponemos para modelar curvas tensión-deformación de materiales simples o bien ensayados con una tasa de incremento de la tensión constante, desde el inicio del ensayo hasta más allá del punto de rotura.

La función de ponderación

$$\exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi_u} \left( \frac{\varepsilon - a_u}{b_u} \right) \right)^{-\xi_u} \right]$$

se relaciona directamente con la utilización de funciones *núcleo*<sup>26</sup>, del tipo:

$$K_{er} \left( \frac{x - x_a}{h} \right) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \varepsilon_a - h < \varepsilon < \varepsilon_a + h \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

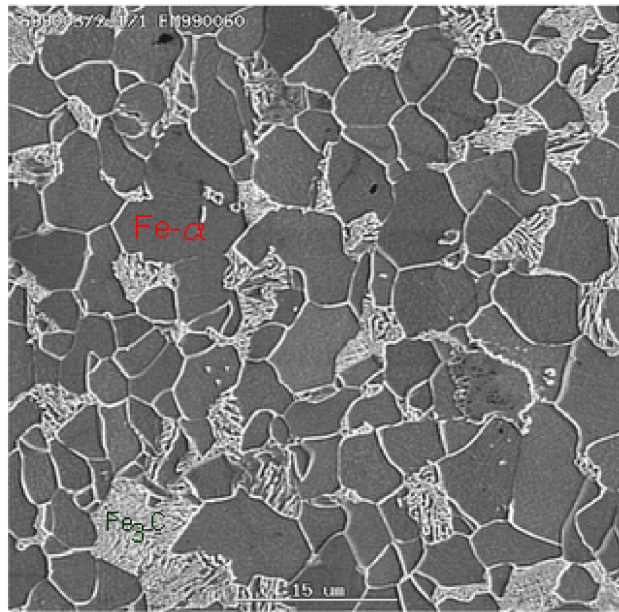
<sup>26</sup>Otro ejemplo de aplicación de funciones núcleo, esta vez en el contexto del tratamiento digital de imágenes, puede consultarse en Salguero, F., Prat, F., Moreno, F. y Romero, S. *Mean shift: a non-parametric algorithm for the segmentation of anomalies in geophysical images obtained from magnetic prospection data. Archaeometry*, v. 53, pp. 642-659 (2011).

### 3.4.2 *Los materiales compuestos*

En 3.4.1, hemos definido la ec. (128) como una ecuación apropiada para modelar las curvas tensión-deformación de materiales simples o bien ensayados con una tasa de incremento de la tensión constante, desde el inicio del ensayo hasta más allá del punto de rotura. En este apartado extenderemos su aplicación a materiales que no presentan comportamientos simples y/o a ensayos en los que lo que se mantiene constante es la tasa de incremento de la deformación.

Para ello, tomaremos como ejemplo el comportamiento tenso-deformacional de los aceros al carbono comúnmente utilizados como materiales estructurales de edificación.

Explicado muy sucintamente, el acero al carbono es una aleación binaria Fe-C con un contenido en carbono mayor del 0.008 % y menor del 2.11% —generalmente contiene menos del 1%— que, a temperatura ambiente presenta una estructura prácticamente estable formada por granos de una fase denominada *ferrita* o Fe- $\alpha$  en la que se encuentran disueltas *colonias* de otro compuesto intermedio, —Fe<sub>3</sub>C— conocido como carburo de hierro o *cementita*. El carburo de hierro es un soluto intersticial en el hierro y forma disoluciones sólidas con la ferrita, que en la fig. 44 corresponde a los granos de color gris, mientras que la cementita corresponde a las zonas claras de aspecto vermicular. El Fe- $\alpha$  tiene una estructura CCI —Cúbica Centrada en el Interior— y en los intersticios de sus granos se sitúa muy poco Fe<sub>3</sub>C, como se aprecia en la citada figura.



**Fig. 44.** Microscopía electrónica de un acero estructural.

Aunque presente en proporción muy baja, el carbono afecta mucho a las propiedades mecánicas del acero. La fase Fe- $\alpha$  es relativamente blanda y dúctil, mientras que la cementita, desde el punto de vista mecánico es dura y frágil. La *mezcla* de ambos comportamientos parece ser la responsable del característico diagrama tensión-deformación que presentan estos aceros, con los típicos puntos de cedencia —superior e inferior—, la meseta plástica —que puede presentar o no el fenómeno de Portevin-Le Chatelier descrito en el capítulo 1— y el posterior endurecimiento por deformación que muestra la

curva-tipo de la figura 45:

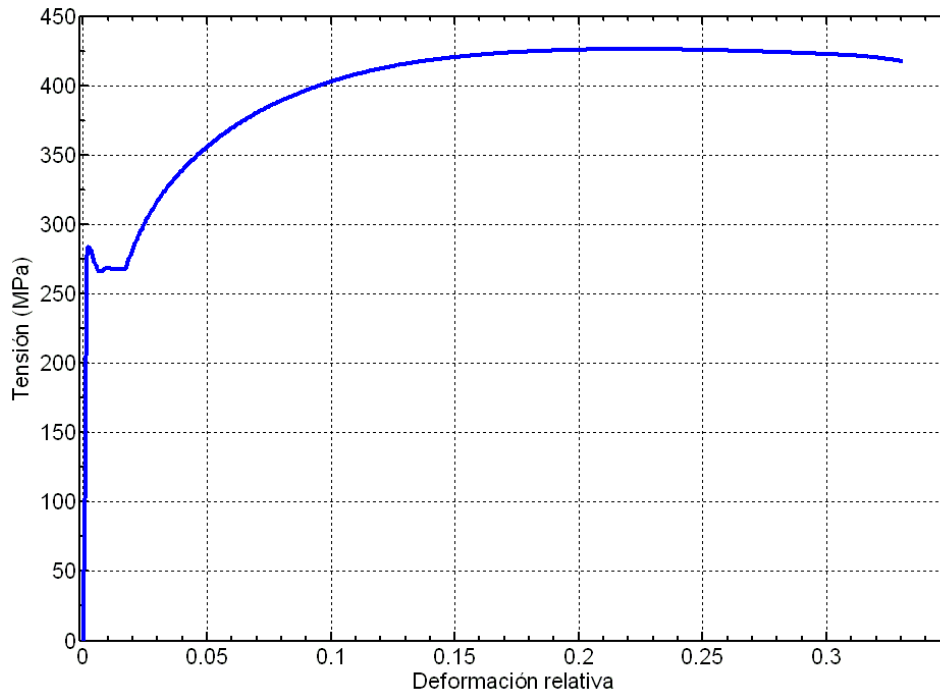


Fig. 45. Curva típica del comportamiento tenso-deformacional de un acero estructural.

*Todo sucede como si* las partículas de la fase más frágil —la cementita—, llegado el punto de su resistencia máxima, se *rompiesen* en cadena siguiendo la teoría del *eslabón más débil* de Weibull [58], dando lugar a que la tensión a la que estarían sometidas las partículas de ferrita aumentase bruscamente —debido a que las partículas de cementita se descargan al *romperse*— provocando la inestabilidad del sistema máquina-probeta y, por ello, la aparición de los escalones de cedencia y la meseta plástica hasta que, transcurrido el tiempo necesario, se produzca la redistribución de tensiones que lo haga otra vez estable, comenzando de nuevo el aumento de tensión, en el que ahora el comportamiento predominante es el plástico, más propio de la ferrita.

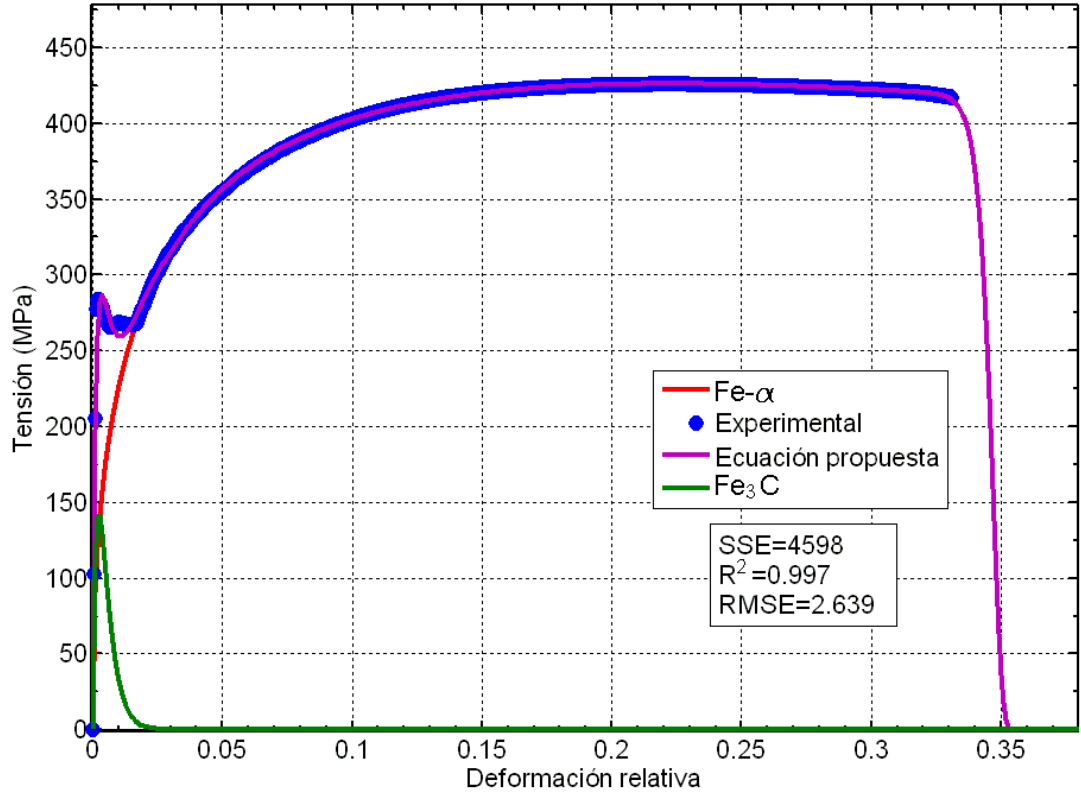
Atendiendo a la directriz general de la tesis, cabe ahora preguntarse: ¿es posible ampliar la ecuación propuesta para modelar un comportamiento de este tipo *sin* modificar su forma? O, dicho de otro modo, ¿podría esta ecuación simular el proceso sin tener que escribir —como se hace en la teoría clásica— dos expresiones distintas, una para la *deformación elástica*  $\varepsilon_e$  y otra para la *deformación plástica*  $\varepsilon_p$ ? La respuesta, como cabe también esperar, es afirmativa.

Si consideramos el acero como un material compuesto por dos fases, con leyes de comportamiento de sus partículas  ${}_0D_\varepsilon^{\alpha_1}K_1$  y  ${}_0D_\varepsilon^{\alpha_2}K_2$  y funciones de distribución de probabilidad de daño  $F_1(\varepsilon; a_1, b_1, \xi_1)$  y  $F_2(\varepsilon; a_2, b_2, \xi_2)$ , podemos proponer una ecuación tenso-deformacional de la forma:

$$\sigma = \frac{K_1\varepsilon^{\alpha_1}}{\alpha_1\Gamma(\alpha_1)} \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi_1} \left( \frac{\varepsilon - a_1}{b_1} \right) \right)^{-\xi_1} \right] + \frac{K_2\varepsilon^{\alpha_2}}{\alpha_2\Gamma(\alpha_2)} \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi_2} \left( \frac{\varepsilon - a_2}{b_2} \right) \right)^{-\xi_2} \right]$$

y, si lo deseamos, ponderarla mediante una función núcleo  $K_{er} = \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right)^{-\xi_u} \right]$  con  $\xi_u$  lo suficientemente grande como para representar la rigidez y exactitud de la máquina de ensayos, ecuación válida si se nos asegura que el ensayo comienza en  $\varepsilon = 0$ .

Para contrastar la bondad de la ecuación, la comparamos con los datos experimentales tomados del artículo de Kato *et al.* [102], obteniéndose los resultados provisionales mostrados en la fig. 46, en la que se representa en rojo el comportamiento asignado por la ecuación a la fase Fe- $\alpha$ , en verde el asignado a la fase Fe<sub>3</sub>C y en magenta la curva total resultante de aplicar la ecuación propuesta. El ajuste obtenido presenta los estimadores SSE=4598,  $R^2 = 0.997$  y RMSE=2.639, obtenidos para los valores que figuran en la fórmula que sigue a la fig. 46.



**Fig. 46.** Comparación entre los datos experimentales de Kato *et al.* [102] y la ecuación propuesta.

$$\sigma = \frac{184800\varepsilon}{\Gamma(1)} e^{-\left(1 - \frac{1}{0.866} \left( \frac{0.002 - \varepsilon}{0.00231} \right)\right)^{0.866}} + \frac{2330\varepsilon^{0.4662}}{0.4662\Gamma(0.4662)} e^{-\left(1 - \frac{1}{0.416} \left( \frac{0.1696 - \varepsilon}{0.4077} \right)\right)^{0.416}} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{0.344}\right)^{115}}$$

$$= 184800\varepsilon e^{-\left(\frac{\varepsilon}{0.002}\right)^{0.866}} + 2631\varepsilon^{0.4662} e^{-\left[\left(\frac{\varepsilon}{0.1696}\right)^{0.416} + \left(\frac{\varepsilon}{0.344}\right)^{115}\right]}$$

### 3.4.3 Forma general de la ecuación

Después de las consideraciones hechas sobre las curvas tensión-deformación *completas* y sobre los materiales *compuestos*, nos es posible proponer la forma más general de la ecuación objeto de esta tesis, cuyo ajuste con los resultados de los ensayos examinaremos en el capítulo dedicado a la verificación experimental.

La forma más general de la ecuación se escribe:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{K_i \varepsilon^{\alpha_i}}{\alpha_i \Gamma(\alpha_i)} \exp \left[ - \sum_{j=1}^m \left( 1 + \frac{1}{\xi_j} \left( \frac{\varepsilon - a_j}{b_j} \right) \right)^{-\xi_j} \right] \quad (129)$$

donde  $K_i \geq 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $b_j > 0$  y  $\xi_j < 0$  son parámetros —de los materiales, de la forma y tamaño de las probetas usadas para ensayarlos, de la temperatura y de las máquinas y métodos de ensayo— a determinar experimentalmente; y  $n, m \in \mathbb{N}$  representan —respectivamente—, el número de *fases* o *subcomportamientos* que presentan los materiales y el número de *procesos de inestabilidad* o *transiciones* que experimenta la probeta durante el ensayo, incluida la rotura. El dominio de aplicación de la ecuación (129) puede extenderse, desde *antes* de comenzar el ensayo —como veremos en §3.5—, hasta *después* de finalizado el mismo —como hemos visto en 3.4.1—.

En la ec. (129) es posible realizar algunas manipulaciones algebraicas y, atendiendo a una notación más *ingenieril*, expresarla también como:

$$\sigma = \sum_{i=1}^p C_i \varepsilon^{n_i} e^{- \sum_{j=1}^q \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_{aj}}{\varepsilon_{0j}} \right)^{m_j}} \quad (130)$$

donde ahora  $C_i = \frac{K_i}{\alpha_i \Gamma(\alpha_i)}$ ,  $n_i = \alpha_i$ ,  $\varepsilon_{aj} = a_j - \xi_j b_j$ ,  $\varepsilon_{0j} = \xi_j b_j$ ,  $m_j = -\xi_j > 0$ ,  $p = n$  y  $q = m$ .

El caso  $\xi_j = m_j = 0$ ,  $a_j = 0$ ,  $b_j = \varepsilon_{0j} \rightarrow \infty$ ,  $n = p = 1$  y  $m = q = 1$  produce:

$$\sigma = \frac{K}{\alpha \Gamma(\alpha)} \varepsilon^\alpha = \frac{C}{e} \varepsilon^n \quad (131)$$

que es la conocida ecuación de Bach o ley de la potencia.

El caso  $\xi_j = m_j = 0$ ,  $a_j = 0$ ,  $\alpha_i = n_1 = 1$ ,  $b_j = \varepsilon_{0j} \rightarrow \infty$ ,  $n = p = 1$  y  $m = q = 1$  conduce a:

$$\sigma = \frac{K}{e} \varepsilon = \frac{C}{e} \varepsilon = E \varepsilon \quad (132)$$

que es la ley de Hooke, mientras que del caso  $\xi_j = m_j = 0$ ,  $a_j = 0$ ,  $\alpha_i = n_1 = 0$ ,  $b_j = \varepsilon_{0j} \rightarrow \infty$ ,  $n = p = 1$ , resulta la ley de fluencia constante:

$$\sigma = K = C = \sigma_Y \quad (133)$$

### 3.5 Sobre el módulo de elasticidad, la incertidumbre inicial en los ensayos y la velocidad de transmisión de los impulsos mecánicos a través de los materiales

#### 3.5.1 La tangente en el origen

Una de las objeciones que pueden hacerse a la ecuación propuesta es que de su formulación se deduce, salvando algunos casos límite clásicos, que la pendiente de la recta tangente en el origen a la curva es infinita —recordemos [15,36] del capítulo 2—. Para enfrentar esas posibles críticas hemos introducido este apartado en el que trataremos el problema desde un punto de vista puramente fenomenológico, poniendo en duda los posicionamientos dogmáticos sobre el tema.

Para ello, volvamos a los orígenes. El módulo de elasticidad o módulo de Young [30, p. 106] fue definido por él mismo con estas palabras:

[...]we may express the elasticity of any substance by the weight of a certain column of the same substance, which may be denominated the modulus of its elasticity, and of which the weight is such, that any addition to it would increase it in the same proportion as the weight added would shorten, by its pressure, a portion of the substance of equal diameter.[...] This supposition is sufficiently confirmed by experiments to be considered at least as a good approximation<sup>27</sup>.

Esta definición —algo enrevesada para algunos autores [103]— se explica sencillamente con el siguiente experimento mental, propuesto por el propio Young: si tomamos una probeta cilíndrica de un determinado material de 100 mm de longitud y al cargarla con un peso de 1000 kp experimenta un acortamiento de 1 mm por la acción de la tensión que induce dicha carga sobre la probeta, el módulo de su elasticidad —expresado como peso de una columna del mismo material y mismo diámetro— será de 99000 kp, esto es, en la misma proporción que 99 es a 100 —la longitud que tiene ahora, después de cargada, a la longitud que tenía inicialmente—.

Algebraicamente, si  $L$  es la longitud de la probeta,  $\Delta L$  el acortamiento que sufre al someterla a la carga de prueba  $F$  y  $P$  es el módulo de su elasticidad expresado como peso de una columna cilíndrica del material en cuestión de la misma sección que la de la probeta:

$$P = \frac{(P + F)(L - \Delta L)}{L} \Rightarrow P = F \left( \frac{L - \Delta L}{\Delta L} \right) \quad (134)$$

Hasta que, en 1822, Cauchy no introdujese los conceptos de tensión y deformación relativa, esta fórmula tenía poco interés práctico. En términos de tensión y deformación relativa, la ec. (134) se escribiría:

$$\frac{P}{A} = \frac{F}{A} \left( \frac{L - \Delta L}{\Delta L} \right) \Rightarrow \sigma = E \left( \frac{\Delta L}{L - \Delta L} \right) \neq E\varepsilon$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal de la columna y  $E$  es la versión actual del módulo de elasticidad; luego la definición de Young sólo coincide con la definición actual del módulo de elasticidad cuando  $L - \Delta L \approx L$ , es decir, cuando la deformación es infinitamente pequeña.

Realicemos, otra vez, el experimento mental anteriormente descrito pero ahora intentando que la definición de Young del módulo de elasticidad coincida con la actual. Es muy fácil someter a una probeta cilíndrica de hormigón de, digamos, 300 mm de altura y 150 mm de diámetro a un incremento de carga de 1 micronewton ( $1\mu\text{N} = 10^{-6}\text{N}$ ): basta dejarle caer encima, por ejemplo, una mínima pero visible, mota de ceniza. Sin embargo, es extremadamente difícil —*imposible*, diría Erwin Schrödinger— medir la deformación que experimenta con la precisión requerida para verificar el cumplimiento de *ninguna* ley. Si la ley de Hooke, como se afirma corrientemente, se cumple con mayor exactitud cuanto menores son las tensiones a las que se someten a los materiales, este será un caso idóneo

<sup>27</sup>[...]podemos expresar la elasticidad de una sustancia por el peso de cierta columna de la misma sustancia, que puede ser denominado el módulo de su elasticidad, y de la cual el peso es tal que cualquier adición a éste lo incrementaría en la misma proporción que el peso añadido acortaría, por su presión, una porción de la sustancia de igual diámetro.[...] Esta suposición está lo suficientemente confirmada por la experiencia para ser considerada al menos como una buena aproximación.

para su aplicación y, teniendo en cuenta que el área de la sección transversal de una probeta cilíndrica de 150 mm de diámetro es de  $17671.45 \text{ mm}^2$  y el módulo de elasticidad oficial para el hormigón ronda los  $30000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ , tendremos:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{10^{-6}}{\frac{17671.46}{30000}} = 1.866 \cdot 10^{-18} \text{ m},$$

luego la deformación que ha experimentado la probeta, según la ley de Hooke, será:

$$\Delta L = \varepsilon L = 1.886 \cdot 10^{-18} \cdot 300 = 5.659 \cdot 10^{-16} \text{ m}.$$

Si recordamos que el diámetro del electrón se cifra en unos  $10^{-15} \text{ m}$ , realizar la medida de una deformación tal excede, en mucho, el campo de validez de la mecánica clásica, por lo que el módulo de elasticidad para cargas muy pequeñas debe considerarse absolutamente incognoscible, careciendo de cualquier validez la ley de Hooke en el entorno  $\sigma \approx 0$ , al menos, fenomenológicamente hablando.

Sin embargo, el desarrollo de una teoría de la elasticidad lineal de deformaciones infinitesimales requería el cumplimiento de la ley de Hooke para deformaciones infinitamente pequeñas, esto es,  $d\sigma = E d\varepsilon$ , por lo que, siendo esta teoría de absoluta implantación en la gran mayoría de aplicaciones prácticas de la mecánica clásica —como por ejemplo, en ingeniería estructural y acústica, entre muchas otras—, la identificación por la cual el módulo de Young correspondería con el valor de la derivada a la curva tensión-deformación en el origen, es decir,

$$\left. \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = E \tag{135}$$

se convirtió, a fuerza de aplicarla, en un auténtico *argumentum ad nauseam*. Tanto fue así que —como hemos visto en el capítulo 2— la mayoría de ingenieros, al buscar una ecuación que modelase el comportamiento tenso-deformacional, por ejemplo, del hormigón, imponían como primera condición de contorno, que la función candidata cumpliera la ec. (135) si ésta era lo bastante flexible para ello, y si no, era directamente rechazada como candidata a poder servir de modelo tenso-deformacional.

Por otra parte, según la misma teoría clásica, sería posible determinar el valor de  $E$  sin tener que medir deformaciones de escala subatómica: únicamente midiendo la densidad del material y la velocidad de propagación de los ultrasonidos —en definitiva, impulsos mecánicos— a través del mismo. En efecto, el argumento corriente [104] es el siguiente:

Supongamos que tenemos una barra —para simplificar unidimensional— de un material de densidad  $\rho$  dividida en una serie de finas secciones de masa  $m$ , y área  $a$  que están interconectadas por muelles ideales sin masa de longitud  $h$  y rigidez  $k$  —fig. 47—.

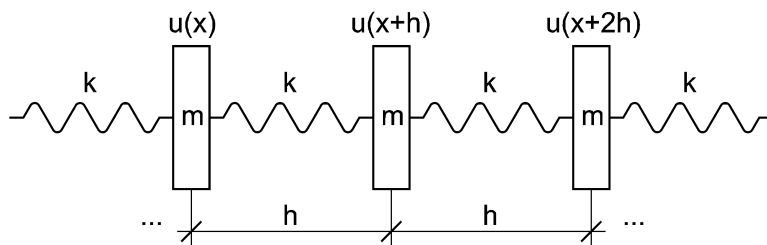


Fig. 47. Modelo ideal de material unidimensional perfectamente elástico.

Si un impulso mecánico viaja a través del material, hará oscilar el sistema y sacará a las láminas del equilibrio que tenían en la posición  $x$ , situándolas en una nueva posición  $u(x)$ . Las fuerzas ejercidas sobre la rebanada situada en la posición central ( $x+h$ ) serán:

$$F_{\text{Newton}} = m \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x+h, t)$$

$$F_{\text{Hooke}} = F_{x+2h} + F_x = k[u(x+2h, t) - u(x+h, t)] + k[u(x, t) - u(x+h, t)]$$

Equilibrando ambas fuerzas tendremos la ecuación del movimiento

$$m \frac{\partial^2 u(x+h, t)}{\partial t^2} = k[u(x+2h, t) - u(x+h, t) - u(x+h, t) + u(x, t)]$$

Si la serie consta de  $n$  rebanadas espaciadas uniformemente a lo largo de la longitud total de la barra, la masa total será  $M = nm$  y la rigidez total de la serie  $K = \frac{k}{n}$ , podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\frac{\partial^2 u(x+h, t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{[u(x+2h, t) - 2u(x+h, t) + u(x, t)]}{h^2}$$

entonces, suponiendo que el número de rebanadas  $n$  aumenta tal como disminuye la distancia entre una y otra  $—h—$  indefinidamente, tenemos:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{KL^2}{M} \frac{[u(x+2h, t) - 2u(x+h, t) + u(x, t)]}{h^2}$$

lo que, si consideramos que  $K$ ,  $L$  y  $M$  son independientes de  $u(x, t)$ , después de un poco de álgebra, conduce a:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{KL^2}{M} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (136)$$

La ec. (136), comparada con la ecuación de onda clásica en una dimensión:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (137)$$

nos lleva a identificar  $\frac{KL^2}{M}$  con  $v^2$ , es decir, con la velocidad de propagación de la onda en el medio, proponiendo

$$v^2 = \frac{KL^2}{M} \quad (138)$$

Expresando la ec. (138) en términos del módulo de elasticidad obtenemos finalmente:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (139)$$

que es la ecuación de Newton-Leibniz por la que  $E$ , como decíamos, podría ser calculado midiendo la densidad del material y la velocidad de transmisión de los impulsos mecánicos a través de dicho material. Sin embargo, un principio comprobado experimentalmente en numerosos ensayos, que expondremos en el siguiente apartado, nos llevará a exponer una conjetura que conduciría a esperar valores de  $E$  —calculados a través de la fórmula

clásica de la ec. (139)— tanto más erráticos cuanto más nos acerquemos al punto  $\varepsilon = 0$ .

### 3.5.2 Principio de indeterminación

El principio de incertidumbre fue establecido por Werner Heisenberg en 1927 en los siguientes términos: si se preparan varias muestras idénticas de un sistema en un estado determinado, las medidas de la posición  $x$  y de la cantidad de movimiento  $p = mv$  variarán con una cierta distribución de probabilidad característica del estado del sistema. Las medidas de la posición tendrán una desviación estándar  $\sigma_x$  y, de la misma manera, las medidas de la cantidad de movimiento tendrán una desviación estándar  $\sigma_p$ . Entonces, el principio de incertidumbre se expresa matemáticamente como:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (140)$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck reducida de valor  $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ .

Con mayor generalidad, si en un sistema  $\mathcal{S}$  existen dos magnitudes físicas  $a$  y  $b$  representadas por sus observables  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ , en general, no será posible preparar una colección de sistemas todos ellos en el estado  $\psi$ , donde las desviaciones estándar de las magnitudes de  $a$  y  $b$  no satisfagan la condición:

$$\sigma_{\hat{A}} \sigma_{\hat{B}} \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle|$$

donde  $[\hat{A}, \hat{B}]$  es el *conmutador* o corchete de Lie<sup>28</sup> y  $\langle \psi | X | \psi \rangle = \sum_{ij} \psi_i^* X_{ij} \psi_j$  es el valor esperado del observable  $X$  para el sistema en el estado representado por el vector unitario  $\psi$  de conjugado complejo  $\psi^*$ . El resultado de la ec. (140) es debido al postulado mecanocuántico por el cual los operadores de posición  $x$  y momento  $p = mv$  satisfacen la siguiente regla de conmutación:  $[x, p] = i\hbar$ , donde  $i$  es la unidad imaginaria.

Dado que las unidades de  $\hbar$  son Julios por segundo ( $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} = \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ ), la extensión del postulado anterior a otros observables cuyo producto se exprese en las mismas unidades —es decir, que su conmutador también valga  $i\hbar$ — ha llevado a la aparición de algunas variantes del principio formulado por Heisenberg, entre las que destacan:

- Relación de incertidumbre entre la energía cinética  $T$  y la posición  $x$  de un objeto;

$$\sigma_T \sigma_x \geq \frac{\hbar}{2m} |\langle p_x \rangle|$$

donde  $m$  es la masa del objeto y  $p_x = mv_x$  su momento.

- Entre la energía y el tiempo:

$$\sigma_E \frac{\sigma_B}{\left| \frac{d\langle \hat{B} \rangle}{dt} \right|} \geq \frac{\hbar}{2}$$

donde  $t$  es el tiempo después del cual el valor esperado  $\langle \hat{B} \rangle$  del observable  $\hat{B}$  cambia apreciablemente.

<sup>28</sup>En topología diferencial, dados dos campos vectoriales diferenciables  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  definidos sobre una variedad diferenciable  $\mathcal{S}$ , se define el corchete de Lie de los campos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  como el único campo de vectores que cumple:  $[\hat{A}, \hat{B}](f) = \hat{A}(\hat{B}(f)) - \hat{B}(\hat{A}(f))$ .

- Entre dos componentes ortogonales  $J_i$  y  $J_j$  del momento angular total  $J_k$  de un objeto:

$$\sigma_{J_i}\sigma_{J_j} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle J_k \rangle|$$

Recientemente, en un artículo de 2009, Schürmann y Hoffmann [105] han propuesto una nueva relación para el caso en el que una partícula atraviesa una rendija de ancho  $\Delta x$ , es decir, que la probabilidad de encontrar la partícula en el entorno  $[\pm \frac{\Delta x}{2}]$  es 1, midiendo la desviación estándar del momento mediante su patrón de difracción sobre una pantalla. En este caso ya no tenemos la desviación estándar de la posición,  $\sigma_x$ , sino  $\Delta x \in [-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}]$ , es decir que, dado que la partícula atraviesa de hecho la rendija, el máximo error que podemos cometer en la determinación de su posición es  $\frac{\Delta x}{2}$ , o también que  $\sigma_x \leq \frac{\Delta x}{2}$ . En el citado artículo, los autores muestran que la relación:

$$\Delta x \sigma_p \geq \pi \hbar$$

no puede ser mejorada.

Estas variaciones nos llevan a conjeturar que, en el caso de la determinación de la velocidad de transmisión de una onda a través de una *larga barra* —para considerarla simplificada unidimensional— de sección  $A$  de un material de densidad  $\rho$ , en la que  $\Delta F \in [-\frac{\Delta F}{2}, \frac{\Delta F}{2}]$  —tracción o compresión— representaría la mayor variación posible de la fuerza necesaria para producir la propagación de la onda mecánica, se podría mantener la condición:

$$\Delta F \frac{\sigma_v}{|\frac{d\sigma}{d\varepsilon}|} \geq \frac{\pi \hbar}{\rho A} \quad (141)$$

donde  $\sigma$  sería la *tensión por encima de la cual el valor esperado de la deformación  $\varepsilon$  cambia apreciablemente* —en el sentido de que, por debajo de esa tensión sería *físicamente imposible* detectar ninguna deformación— y  $\sigma_v$  la desviación estándar o *indeterminación* en la medida de  $v$ , la velocidad de transmisión a través del medio del impulso mecánico provocado por la fuerza acotada en  $\Delta F$ .

Teniendo en cuenta que  $m_l = \rho A$  es la masa por unidad de longitud de la barra, la ec. (141) también puede escribirse como

$$\Delta F \frac{\sigma_v}{|\frac{d\sigma}{d\varepsilon}|} \geq \frac{\pi \hbar}{m_l} \quad (142)$$

pero la información más relevante que contiene este enunciado para nuestra tesis se pone mejor de manifiesto dándole la vuelta a la inecuación, reescribiéndola así:

$$\left| \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right| \leq \frac{\Delta F \sigma_v m_l}{\pi \hbar} \quad (143)$$

En efecto: supongamos un material que, en ausencia de daño, sigue la ley de Hooke *ampliada* propuesta por la ec. (119) con  $\sigma = \frac{K\varepsilon^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}$ . Su derivada es  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{K\varepsilon^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$  que, particularizando para  $\varepsilon = 0$  vale  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \infty$ . Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación (143) obtenemos:

$$\left| \frac{\varepsilon_{inf}}{2} \right| \geq \frac{\alpha \pi \hbar}{\sigma_v \rho A^2}$$

que, en función de la relación tenso-deformacional propuesta, también puede escribirse como:

$$\left| \frac{\sigma_{inf}}{2} \right| \geq \frac{K}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left( \frac{\alpha \pi \hbar}{\sigma_v \rho A^2} \right)^\alpha \quad (144)$$

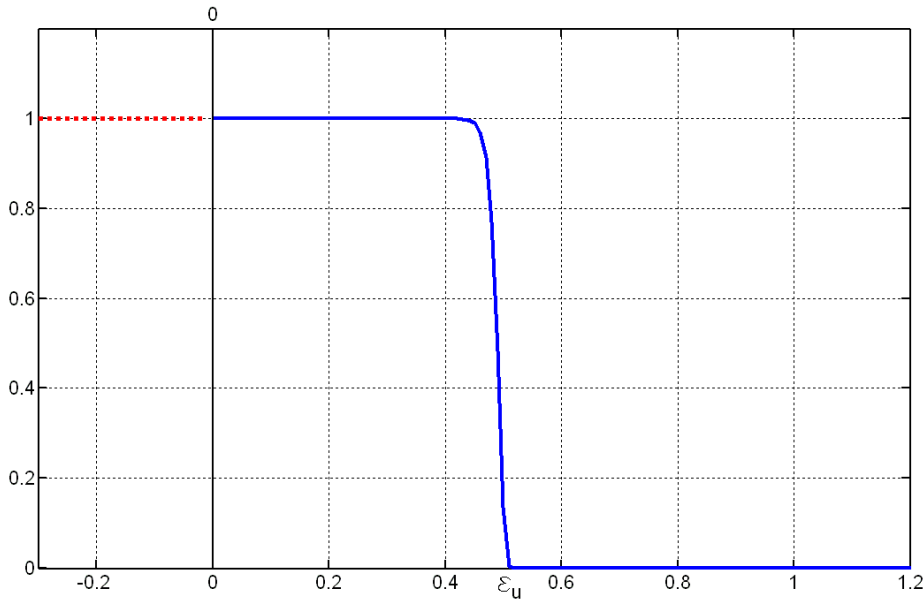
lo que indicaría que para una tensión inferior a  $\sigma_{inf}$ , la variación de  $\varepsilon$  no sería apreciable físicamente, por lo que, desde el punto de vista macroscópico, el experimento —clásico— *aún no habría comenzado*, es decir, que para tensiones inferiores a  $\sigma_{inf}$ , el experimento mostraría resultados cuánticos, no cabiendo esperar valores de  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  clásicamente determinados por  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{K\varepsilon^\alpha}{\varepsilon\Gamma(\alpha)}$ , sino por una función de onda compleja, cuyo cuadrado expresaría la función de densidad de probabilidad de obtener un valor de  $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$  determinado. El siguiente apartado lo dedicaremos a tratar de reconocer esa función de onda.

### 3.5.3 Función de onda para los ensayos

En 3.4.1 propusimos la expresión

$$F(\varepsilon; \varepsilon_u, \xi_u) = \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_u} \right)^{\xi_u} \right] \quad (145)$$

—con  $\xi_u$  lo suficientemente grande como requiera la exactitud y sensibilidad del método utilizado para detectar o certificar la rotura—, como función de distribución apropiada para representar la probabilidad de que el ensayo se esté realizando si estábamos absolutamente seguros de que el ensayo comenzaba en  $\varepsilon = 0$  (fig. 48) sin hacer, para  $\xi_u$ , ninguna restricción más que ser un número lo suficientemente grande.



**Fig. 48.** Parte compleja —en rojo— de la función de la ec. (145) cuando  $\xi_u$  es real.

Ello es debido a que sólo *utilizamos* la mitad de la función al considerar valores de  $\varepsilon \geq 0$ , puesto que para valores  $\varepsilon < 0$  la función toma valores complejos y, como decíamos que estábamos absolutamente seguros de que el ensayo comenzaba en  $\varepsilon = 0$ , la parte izquierda de la función no era necesaria para representar la probabilidad de que el ensayo se estuviese realizando.

Pero, justamente en el apartado anterior, hemos puesto en duda esa confianza total en que el ensayo comenzase en  $\varepsilon = 0$ , en virtud del principio de indeterminación.

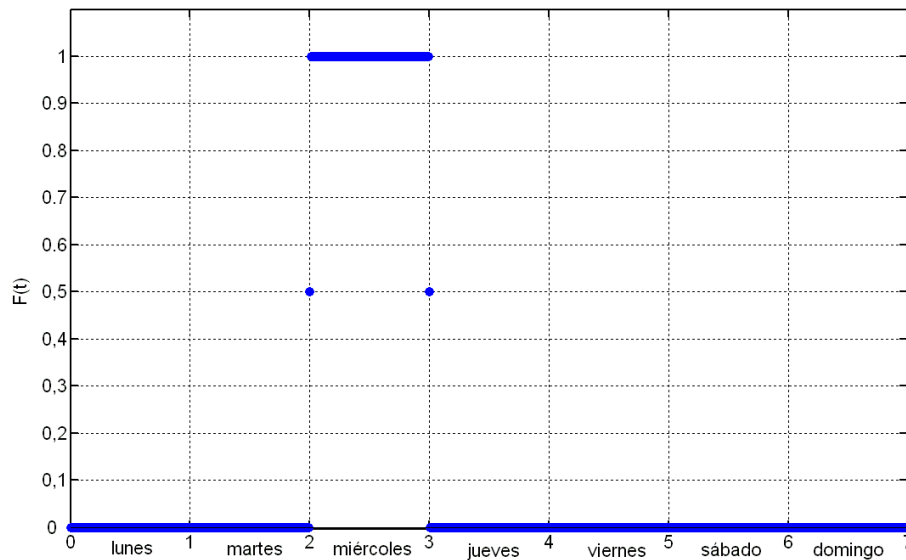
Entonces, habrá que añadir un parámetro en la ecuación (145) para representar la incertidumbre adicional de que el ensayo haya comenzado, escribiendo:

$$F(\varepsilon; \varepsilon_a, \varepsilon_u, m) = \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_a}{\varepsilon_u} \right)^{2m} \right] \quad (146)$$

donde  $2m = \xi_u$ , es decir que,  $\xi_u$  ha de ser entero y par si queremos *visualizar* la distribución completa —fig. 43—, puesto que si  $\xi_u$  no fuese entero y par, la función toma valores complejos para  $\varepsilon < \varepsilon_a$ .

La expresión *probabilidad de que el experimento se esté realizando*, desde el punto de vista actual, puede resultar algo chocante, sobre todo, porque la mayoría de los experimentos hoy en día comienzan presionando un interruptor eléctrico. Para entenderlo mejor, utilicemos la función representada por la ec. (146) para evaluar el siguiente experimento mental.

Imaginemos un *ser* infinitamente bien dotado para medir el tiempo —un ser así es, sin duda, un ser *clásico*—, y que accede a responder a la siguiente pregunta: *si durante todo y sólo este miércoles, voy a realizar un experimento, ¿estoy realizando el experimento?* Su respuesta *debería* ser —fig. 48—:



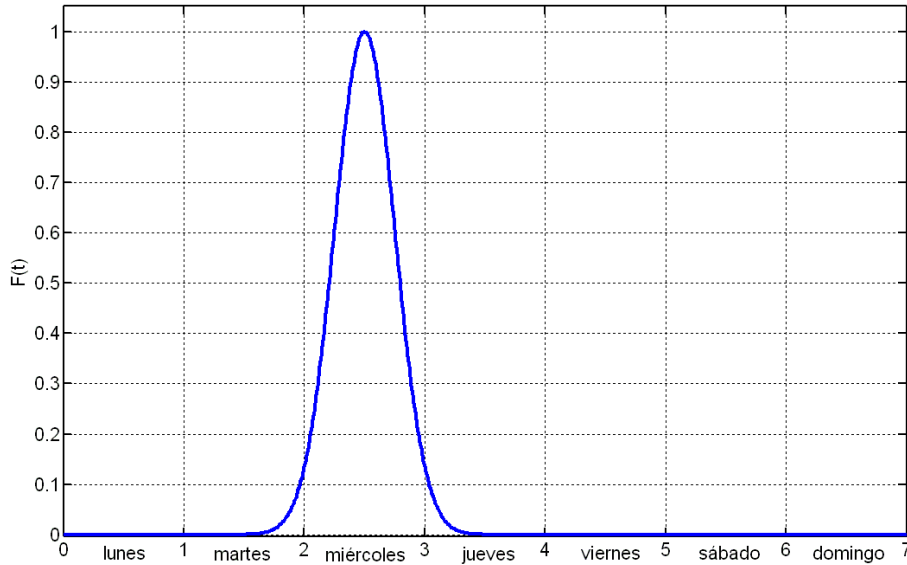
**Fig. 49.** Probabilidad de obtener una respuesta afirmativa —1— a la pregunta *¿estoy realizando el experimento?* respondida con ayuda de un medidor de tiempos de precisión infinita.

Es decir, si hoy no es miércoles, la probabilidad de estar realizando el experimento es 0, si hoy es miércoles, será 1 y preguntando lo mismo en los dos instantes exactos —00:00:00 y 24:00:00— de entrada y salida del miércoles, la probabilidad será  $\frac{1}{2}$ .

La gráfica de la figura 48 podría obtenerse —excepto los dos puntos de valor  $\frac{1}{2}$  que se suelen situar por convenio—, del límite:

$$F(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \left[ - \left( \frac{t - t_a}{t_0} \right)^m \right]$$

Ahora bien, si hacemos la misma pregunta a una persona dotada únicamente de la posibilidad de ver el sol, la función se relajará bastante, puesto que ya no puede determinar exactamente el cambio de día, aunque sí estar *seguro* en el momento en que observa el sol en el zenit, obteniéndose una distribución algo menos rígida como, por ejemplo, la de la fig. 50, con  $m = 2$ .



**Fig. 50.** Probabilidad de obtener una respuesta afirmativa —1— a la pregunta *¿estoy realizando el experimento?* respondida con la única ayuda de la observación del sol.

En estos dos anteriores supuestos, hemos utilizado un exponente entero y par: ¿y si, en nuestro afán por generalizar, extendemos el exponente a cualquier<sup>29</sup> número real?

La respuesta es que obtendremos, en lugar de una función de distribución de probabilidad, una función de onda compleja o *función de estado*  $\Psi$  representada por el vector unitario  $|\Psi\rangle$  para la que la probabilidad de obtener la cantidad  $c$  como resultado de una medición es:

$$P = |\langle c|\Psi\rangle|^2$$

Veámoslo con un ejemplo: especifiquemos la función

$$\Psi = \exp \left[ - \left( \frac{t - 2.5}{0.5} \right)^{6.453} \right]$$

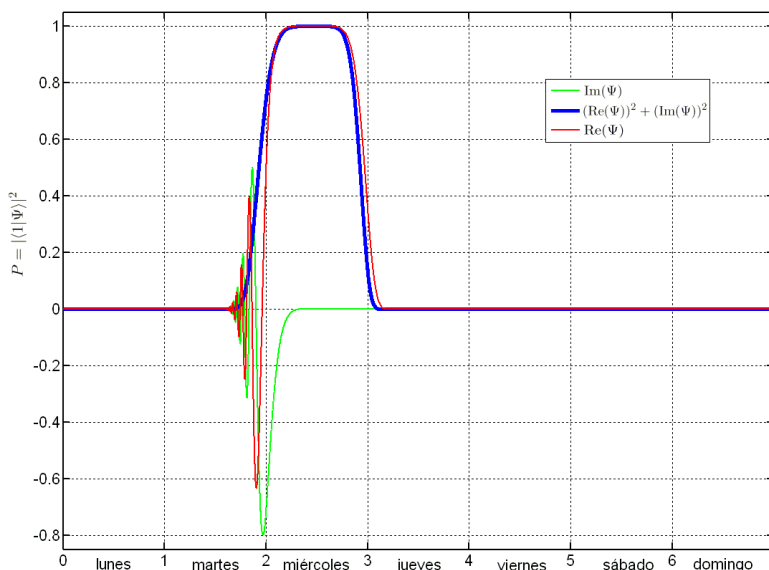
como función de onda para la pregunta *¿estoy realizando el experimento?* que venimos ilustrando, utilizando esta vez un instrumento de medición temporal<sup>30</sup> cuya precisión —bastante mala, ciertamente— vendría representada por el exponente real  $m = 6.453$ . Los resultados se muestran en la fig. 51, en la que la línea roja es la parte real de la función  $\Psi$  — $\text{Re}(\Psi)$ —, la verde, su parte imaginaria — $\text{Im}(\Psi)$ —, mientras que la línea azul

<sup>29</sup>Positivo, en este caso para que la función de distribución sea un caso de la GEVD.

<sup>30</sup>En este caso no es necesario normalizar el vector  $|\Psi\rangle$  ya que utilizando una unidad temporal igual a 1 día, queda automáticamente normalizado y la suma de todas las probabilidades parciales de los posibles resultados —área bajo la curva azul—, es igual a 1.

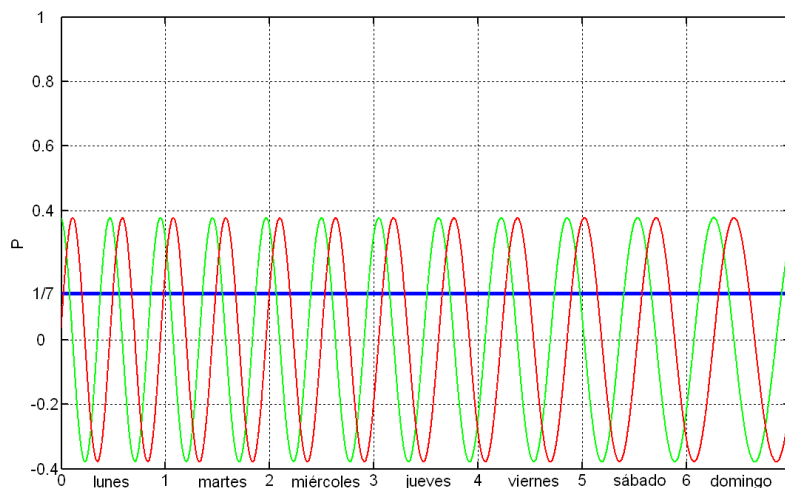
representa la probabilidad de obtener un valor afirmativo —igual a 1— de la medición efectuada para contestar a la pregunta *¿estoy realizando el experimento?*, es decir:

$$P = |\langle 1 | \Psi \rangle|^2 = 1 \cdot [(\operatorname{Re}(\Psi))^2 + (\operatorname{Im}(\Psi))^2]$$



**Fig. 51.** Probabilidad de obtener una respuesta afirmativa —1— a la pregunta *¿estoy realizando el experimento?* respondida con ayuda de un medidor de tiempos de precisión representada por el exponente real  $m = 6.453$ . Obsérvese el *colapso* de la función de onda.

Supongamos, por último, que hacemos la misma consulta *¿estoy realizando el experimento?* a una persona que no tiene ninguna forma de medir el tiempo, ni siquiera ver el sol pues lleva mucho tiempo aislada en una habitación sin ventanas. Entonces, dado que ni siquiera sabe qué día de la semana es, su respuesta puede representarse mediante la línea azul de la fig. 52:



**Fig. 52.** Probabilidad de obtener una respuesta afirmativa —1— a la pregunta *¿estoy realizando el experimento?* respondida sin hacer mediciones (exponente  $m = 0.5$ ). La función de onda no colapsa.

La respuesta afirmativa —1—, tiene la misma probabilidad de ocurrencia sea cual sea el día de la semana<sup>31</sup> que hagamos la pregunta, es decir:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{7}} \exp \left[ - \left( \frac{t-7}{0.5} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$P = \left| \langle 1 | \frac{\Psi}{\sqrt{7}} \rangle \right|^2 = \frac{1}{7} [(\text{Re}(\Psi))^2 + (\text{Im}(\Psi))^2] = \frac{1}{7} \left[ \cos^2 \left( \frac{t-7}{0.5} \right) + \text{sen}^2 \left( \frac{t-7}{0.5} \right) \right] = \frac{1}{7}$$

donde el exponente  $m = \frac{1}{2}$  impide el colapso de la función de onda al proporcionar para el argumento de la exponencial, en virtud de la fórmula de Euler, un resultado imaginario puro.

En general, tomando el instante inicial del experimento en  $t = t_a - t_0$  y denotando como  $E(m)$  y  $d(m)$  las partes entera y decimal, respectivamente de  $m$ , se obtiene la ecuación  $\Psi = \exp[-(-1)^m]$  y, si queremos *visualizar* qué sería conocer cuándo comienza el experimento con la *máxima* precisión, habrá que evaluar el límite:

$$\lim_{E(m)+d(m) \rightarrow \infty} e^{-(-1)^{(E(m)+d(m))}} = \begin{cases} 1. e^1 & \Leftrightarrow E(m) = 2k + 1 \quad \text{y} \quad d(m) = 0 \\ 2. e^{-1} & \Leftrightarrow E(m) = 2k \quad \text{y} \quad d(m) = 0 \\ 3. e^i & \Leftrightarrow E(m) = 2k \quad \text{y} \quad d(m) = \frac{1}{2} \\ 4. e^{-i} & \Leftrightarrow E(m) = 2k + 1 \quad \text{y} \quad d(m) = \frac{1}{2} \\ 5. e^{id(m)} & \Leftrightarrow E(m) = 2k \quad \text{y} \quad d(m) \neq \frac{1}{2} \\ 6. e^{-id(m)} & \Leftrightarrow E(m) = 2k + 1 \quad \text{y} \quad d(m) \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

lo que arroja las siguientes distribuciones:

1.  $e^1$ : no es función de distribución de probabilidad ya que  $e^1 > 1$ .
2.  $e^{-1}$ : GEVD clásica con  $\xi = 0$ .
3.  $e^i$ : función de onda con argumento de la exponencial imaginario puro (sin *colapso*).
4.  $e^{-i}$ : función de onda recíproca del caso anterior.
5.  $e^{id(m)}$ : función de onda con argumento de la exponencial imaginario (*colapsa*).
6.  $e^{-id(m)}$ : función de onda recíproca de la anterior.

Entonces, dado que el postulado V de la mecánica cuántica establece que la evolución temporal de la función de estado está gobernada por la ecuación:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \check{\mathbf{H}} |\Psi(t)\rangle \tag{147}$$

donde  $\check{\mathbf{H}}$  es el operador energía del sistema y que, para estados estacionarios —estados en los que el operador energía no depende del tiempo con lo que  $\check{\mathbf{H}}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ —, tiene como solución general

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\left[\frac{iEt}{\hbar}\right]} \tag{148}$$

---

<sup>31</sup>Si el experimento que voy a realizar consiste en introducir una serpiente mortalmente venenosa en la habitación en la que está aislada la persona, con probabilidad  $\frac{1}{2}$  de que le muerda, entonces, ese miércoles, dicha persona se sentiría más bien como cierto gato universalmente conocido.

es posible establecer una correspondencia entre la descripción matemática de la evolución temporal de un sistema mecanocuántico estacionario y la operación de generalizar el exponente  $m$  a valores no enteros para valores de  $x < 0$  —antes de comenzar el ensayo— en la ecuación:

$$F(x; x_0, m) = e^{-\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^m\right]}$$

En efecto, para valores de  $x < 0$  y  $m = \frac{1}{2}$  se tiene

$$F(x < 0) = e^{-\left[\left(-1\frac{|x|}{x_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right]} = e^{-\left[i\left(\frac{|x|}{x_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

de donde, si tomamos  $x_0 = \frac{h^2}{E^2}$  y hacemos el cambio de variable  $x = \varepsilon^2$  se obtiene:

$$F(\varepsilon) = e^{-\left[\frac{iE\varepsilon}{h}\right]}$$

análoga a la ec. (148).

Concluimos pues este capítulo dedicado a los métodos utilizados en la presente memoria subrayando, después del estudio fenomenológico abordado en 3.5.2 y 3.5.3, que la objeción que afirma que un modelo tenso-deformacional que implique una tangente en el origen infinita está en conflicto con la experiencia, puede ser refutada con base en dos argumentos:

Primero, porque el valor de la tangente a la curva tensión-deformación para  $\sigma = 0$  no es un *observable físico*, ya que dicho valor de la tangente ha de ser obtenido sin aplicar tensión alguna sobre la probeta, es decir, sin interactuar con ella. Por tanto, afirmar que una tangente en el origen vertical está en conflicto con la experiencia o que sea una suposición poco tangible supone atribuir al módulo de elasticidad en el origen su pertenencia a la categoría de los *universales* —en el sentido que le atribuye Bertrand Russell [106]—, de los que sólo se tendría conocimiento directo como conceptos, no como fenómenos físicos. Así, en la teoría clásica, se asigna un valor de  $E$  operando el cociente  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ . Si aplicamos una tensión pequeña, obtenemos una deformación pequeña y, por tanto, un valor definido para  $E$ , pero ello no nos autoriza a asignar ningún valor determinado a  $E$  cuando pasamos al punto en el que tensión y deformación son nulas:

$$E = \frac{0}{0} = \text{indeterminado}$$

de ahí la denominación que hemos empleado en 3.5.2: *principio de indeterminación*.

Segundo, porque si consideramos  $\Delta\varepsilon = 0$  —es decir, una deformación nula—, estaríamos conociendo el valor del operador asociado a un observable físico con precisión infinita por lo que, atendiendo al principio de incertidumbre de Heisenberg, habrían de esperarse desviaciones estándar de la medida del módulo de elasticidad —es decir, errores en su determinación— arbitrariamente grandes.

## CAPÍTULO 4 VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL

*Ningún hecho que se refiera a algo capaz  
de ser experimentado puede ser conocido  
independientemente de la experiencia.*

Bertrand Rusell.

La primera parte de este cuarto capítulo se dedica a exponer las características generales de los materiales empleados, la metodología desarrollada para obtener las probetas y el instrumental utilizado en la realización de los correspondientes ensayos de dichas probetas.

La segunda parte comprende el proceso de verificación experimental de la ecuación propuesta en la presente memoria, particularizada en un primer momento al hormigón como material estructural y generalizada, después, a una amplia gama de materiales como los metales, los polímeros y algunos *biomateriales*.

### 4.1 Materiales empleados para obtener las probetas de hormigón

#### 4.1.1 Cementos

El cemento utilizado en la confección de todas las amasadas ha sido un cemento EN 197-1 CEM I 52,5 R designado así de acuerdo con la norma RC-08 [24], suministrado por la fábrica de cementos del *Grupo Cementos Portland Valderrivas* en Alcalá de Guadaíra (Sevilla).

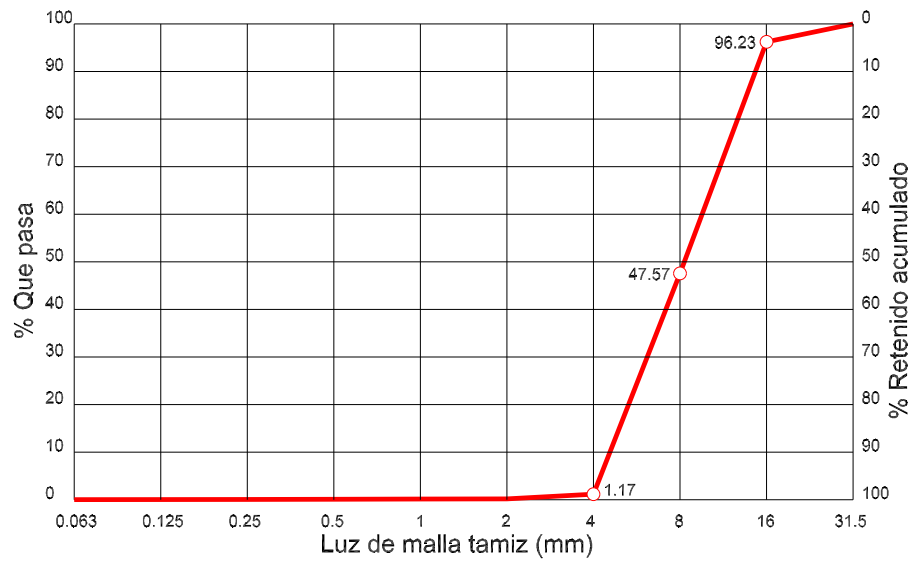
#### 4.1.2 Áridos

Los áridos empleados para la fabricación de los distintos hormigones ensayados son rodados y de naturaleza silícea, y proceden —tanto la grava como la arena— de la cantera de *Áridos y Transportes Cabañas, S. L.* en Palos de la Frontera (Huelva). La fracción gruesa, designada conforme a la norma UNE 146901 [25], corresponde a un árido AG-4/16-R-S y presenta un módulo granulométrico de 7.54. El análisis granulométrico de la fracción gruesa se muestra en la tabla 6 y la fig. 53.

En cuanto al árido fino —arena—, designado de igual manera, corresponde a un AF-0/4-R-S con módulo granulométrico igual a 4.06. Los resultados de su análisis granulométrico se muestran en la tabla 7 y la fig. 54, donde también aparece reflejado el huso granulométrico recomendado por la tabla 28.4.1.b del comentario al art. 28.4.1 de la EHE-08.

Luz de malla tamiz (mm)	Peso retenido (gr)	Retenido (%)	Retenido acumulado (%)	% que pasa
125	0	0	0	100
63	0	0	0	100
31.5	0	0	0	100
16	113.2	3.77	3.77	96.23
8	1459.7	48.66	52.43	47.57
4	139.2	46.4	98.83	1.17
2	29.5	0.98	99.81	0.18
1	1.0	0.033	99.85	0.15
0.5	1.6	0.053	99.90	0.10
0.25	1.2	0.04	99.94	0.060
0.125	0.6	0.020	99.96	0.040
0.063	0.4	0.013	99.97	0.023

**Tabla 6** Resultados del análisis granulométrico del árido grueso.



**Fig. 53.** Curva granulométrica del árido grueso.

Luz de malla tamiz (mm)	Peso retenido (gr)	Retenido (%)	Retenido acumulado (%)	% que pasa
125	0	0	0	100
63	0	0	0	100
31.5	0	0	0	100
16	0	0	0	100
8	0	0	0	100
4	41.4	6.90	6.90	93.10
2	71.4	11.90	18.80	81.20
1	87.2	14.53	33.33	66.67
0.5	145.9	24.32	57.65	42.35
0.25	200.7	33.45	91.10	8.90
0.125	46.5	7.75	98.85	1.15
0.063	5.5	0.92	99.77	0.23

**Tabla 7** Resultados del análisis granulométrico del árido fino.

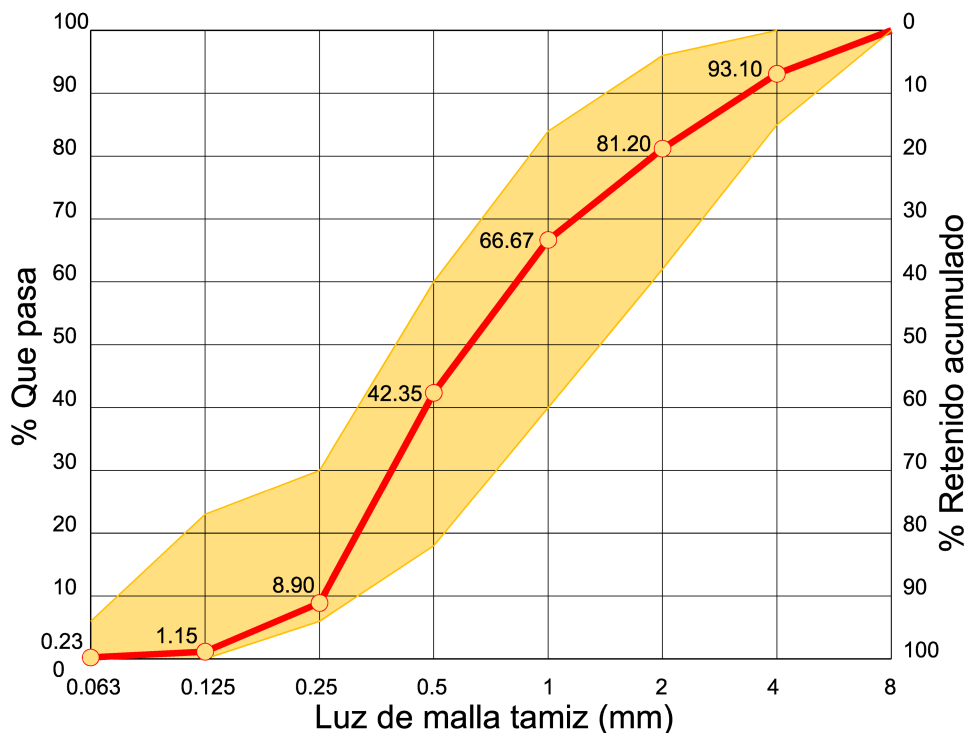


Fig. 54. Curva granulométrico del árido fino, comprendida en los límites recomendados por la EHE-08.

#### 4.1.3 Reductor de agua de alta actividad/Superplastificante

Eventualmente, en los hormigones preparados con una baja relación agua/cemento, se ha empleado el superplastificante/reductor de agua de alta actividad GLENIUM ACE 324 de la firma BASF —fig. 55—, aditivo basado en la tecnología de los éteres policarboxílicos para la fabricación de hormigones fluidos y líquidos de elevada resistencia mecánica y elevadas prestaciones de durabilidad con gran mantenimiento de la consistencia y sin provocar retrasos de fraguado. Además, en su formulación incorpora un agente cohesionante que minimiza la sensibilidad de los hormigones aditivados frente a pequeños excesos de agua.

El superplastificante se adiciona con la última parte del agua de amasado o directamente en la hormigonera mientras se está mezclando la amasada, asegurando un suficiente tiempo de mezclado, para su total homogeneización.

La dosificación recomendada por el fabricante es de entre el 0.5 y el 2.5% del peso del cemento. En nuestro caso hemos empleado una dosificación del 1.25% del peso del cemento.

#### 4.1.4 Microsílice y humo de sílice

De la misma manera, en la fabricación de probetas de hormigones de alta resistencia, se han incorporado a los áridos, adiciones de *microsílice*, i.e., partículas de  $\text{SiO}_2$  con una pureza superior al 99% de tamaño inferior a  $63 \mu\text{m}$ , (fig. 55), y de humo de sílice, en proporción inferior al 10% del peso del cemento, como prescribe el art. 30 de la EHE-08, formado por partículas de tamaño inferior a  $0.1 \mu\text{m}$  de  $\text{SiO}_2$  reactivo (fig.56).



0099/CPD/A45/0019  
0099/CPD/A45/0020  
0099/CPD/A45/0049

## Declaración de conformidad

### MARCADO CE DE ADITIVOS PARA HORMIGÓN BAJO LA DIRECTIVA UE DE PRODUCTOS DE LA CONSTRUCCIÓN DE LA UNIÓN EUROPEA

#### Producto

## GLENIUM ACE 324

#### Fabricante

### BASF Construction Chemicals España, S.L.

Pol. Ind. Riera de Caldes  
C/ Basters, 13-15  
08184 Palau-Solità i Plegamans  
Barcelona  
Telf: 93-8620000 Fax: 93-8620042

Pol. Ind. Las Acacias  
C/ Duero, 23  
28840 Mejorada del Campo  
Madrid  
Telf: 91-6680900 Fax: 91-3138304

BASF Construction Chemicals España, S.L. declara que su producto **GLENIUM ACE 324**, según las disposiciones del Anexo ZA de la normativa UNE-EN 934-2:2006, cumple como:

**Reductor de agua de alta actividad / Superplastificante** según UNE-EN 934-2:2006 (T3.1/T3.2)  
**Acelerador de endurecimiento** según UNE-EN 934-2:2006 (T7)

en su uso previsto para hormigón y dentro del límite prescrito por el fabricante para la utilización del producto y en su dosificación de ensayo, aplicando las directrices para el Ensayo de Tipo Inicial prescrito en la vigente norma UNE-EN 934-2:2006.

**BASF Construction Chemicals España, S.L.**  
Admixture Systems



Eduardo Brandao  
Head Admixture Systems Spain

Declaración de Conformidad elaborada siguiendo los requisitos y disposiciones de la edición vigente de la normativa UNE-EN 934-2:2006. Esta Declaración perderá su validez con la aparición de una nueva edición o ante cualquier modificación de la normativa de referencia que implique modificaciones en las condiciones de Ensayo de Tipo Inicial o en sus resultados. Para más información pueden solicitarse los Ensayos de Tipo Inicial del aditivo específico.  
Este documento consta de 1 página. Prohibida la reproducción total o parcial de este documento y su difusión sin la autorización previa de BASF Construction Chemicals España, S.L.

Edición: 20/07/2010

**Fig. 55.** Marcado CE del aditivo utilizado para la elaboración de las probetas de alta resistencia.

Construcción

**Hoja de Datos de Producto**  
 Edición 06/10/2008  
 Identificación nº 2.10.1  
 Versión nº 1  
 Sika® Fume S-92-D

2.10.1

## Sika® Fume S-92-D

Adición a base de humo de sílice

---

<b>Descripción del Producto</b>	Es una adición a base de humo de sílice que se utiliza para aumentar la cohesión del hormigón fresco y las resistencias mecánicas y a agentes agresivos en el hormigón endurecido.
<b>Usos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Hormigones estructurales de altas prestaciones.</li> <li>■ Hormigón bombeado.</li> <li>■ Hormigón proyectado tanto por vía seca como por vía húmeda.</li> <li>■ Hormigones resistentes a agentes agresivos.</li> </ul>
<b>Características/Ventajas</b>	<p>Contiene partículas microscópicas (0,1 micras) de dióxido de silicio reactivo. La presencia de dichas sustancias aumenta la retención del agua en el hormigón fresco.</p> <p>En el hormigón endurecido reacciona con la cal libre aumentando sus resistencias mecánicas y a agentes agresivos.</p> <p>Aumenta las resistencias químicas a cloruros, sulfatos, ácidos, ciclos de hielo-deshielo, reacción álcali-árido.</p> <p>No contiene cloruros ni elementos que puedan producir corrosión en las armaduras.</p> <p><i>Hormigones bombeados:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Mejor cohesión.</li> <li>■ Reducción de la energía de bombeo.</li> <li>■ Mayor densidad y compacidad.</li> <li>■ Altas resistencias mecánicas.</li> </ul> <p><i>Hormigones proyectados:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Mayor densidad.</li> <li>■ Reduce el rechazo.</li> <li>■ Alta resistencia a los sulfatos.</li> <li>■ Altas resistencias mecánicas.</li> </ul>

---

**Datos del Producto**

**Forma**

---

<b>Apariencia/Color</b>	Polvo gris.
<b>Presentación</b>	Saco de 20 kg.

---

**Fig. 56.** Ficha técnica del humo de sílice usado como adición para la elaboración de probetas de hormigones de alta resistencia.



## FICHA TÉCNICA

DATA SHEET / NOTICE TECHNIQUE

PRODUTO: FARINHA SILICA

REF<sup>3</sup>: SS70



1329 - CPD - 0033

NATUREZA / NATURE

Silica de Alta Pureza / High Purity Silica / Silice Très Pure

APRESENTAÇÃO / Présentation

Pó / Powder / Poudre

VALORES TIPO / TYPICAL VALUES / VALEURS TYPE

Materia Prima / Raw Material / Matière Première

CARACTERÍSTICAS QUÍMICAS / Chemical Specifications / Caractéristiques Chimiques

SiO<sub>2</sub> Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> TiO<sub>2</sub> Na<sub>2</sub>O K<sub>2</sub>O CaO MgO Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>

99.1% 0.27% 0.053% 0.016% 0.02% 0.009% 0.006% 0.016% 0.002% 0.17%

CARACTERÍSTICAS FÍSICAS / Physical Specifications / Caractéristiques Physiques

Pk	7	ISO 7079
DENSIDADE APARENTE (Non Compacted Bulk Density / D.A. Non Te)	1,02 g/ml	EN 12902
DUREZA MOHS (Mohs Hardness / Dureté Mohs)	7	
ÍNDICE de REFRAÇÃO (Refractive index / Índice de Réfraction)	1,54	
PESO ESPECÍFICO (Specific Gravity / Poids Spécifique)	2,64 mg/m <sup>3</sup>	NP EN 1097-7
BRANCURA (Whiteness / Blancheur)	L*94,36 a*0,23 b*1,63	Mitsubishi CR 300
PARTÍCULAS < 45µm (Mass Finer Than 45µm / Particules Inférieures à 45µm)	98,50%	ISO 7277
PARTÍCULAS < 5µm (Mass Finer Than 5µm / Particules Inférieures à 5µm)	20%	Mastersizer Micro
DIÂMETRO MÉDIO (Mean Particle Size / Diamètre Moyen)	16,25µm	Mastersizer Micro
CORTE SUPERIOR (Top Cut / Coupure)	100µm	



A elaboração deste produto baseia-se numa matéria prima natural, pelo que nos reservamos o direito de alteração dos valores apresentados.

As this product is based on naturally occurring raw materials we reserve the right to change this should it become necessary.

Ce produit é basé sur une matière première naturelle, nous nous réservons le droit de modifier les valeurs données.

Capital Social: 700 000,00 €  
C.R.C. Rio Maior, sob o n.º 89  
NIF: 500 247 587

Zona Industrial Apartado 15  
2040-998 RIO MAIOR PORTUGAL  
Tel.: + 351 243 996 768 Fax: + 351 243 994 668  
Email: sifucel@parapedra.pt www.parapedra.pt

Fig. 57. Ficha técnica de la microsíllica usada como adición para la elaboración de probetas de hormigones de alta resistencia.

## 4.2 Instrumental

### 4.2.1 Medidor del tiempo de tránsito de los pulsos ultrasónicos a través del hormigón

Antes de proceder a la realización del ensayo de compresión, en cada probeta se ha efectuado la medición de la velocidad de transmisión de los impulsos ultrasónicos mediante

el uso de un medidor del tiempo de vuelo de un impulso ultrasónico a través del material a ensayar.

El aparato utilizado ha sido el PUNDIT<sup>1</sup> *plus*, de la firma CNS FARNELL —fig. 58—, provisto de dos transductores de 54 kHz que emite pulsos de 1.5  $\mu$ s de duración a 250, 500 ó 1200 V, con un límite de desviación de  $\pm 0.1 \mu$ s y una precisión del 2% según establece la norma UNE-EN 12504-4:2006. Ensayos de hormigón en estructuras. Parte 4: Determinación de la velocidad de los impulsos ultrasónicos.



Fig. 58. Pundit Plus.

Para la puesta en práctica de las mediciones se ha utilizado un sistema compuesto por dos mordazas —fig. 59— que mantienen los transductores acoplados a la probeta a tensión constante.



Fig. 59. Acoplamiento de los transductores a la probeta.

<sup>1</sup>Siglas de *Portable Ultrasonic Non-destructive Digital Indicating Tester*.

#### 4.2.2 Máquina de compresión

La máquina utilizada para la realización de los ensayos a compresión del hormigón ha sido un sistema de la casa CONTROLS, compuesto por una consola automática de control AUTOMAX 5 y una máquina de compresión modelo 50-C5652 —fig. 60— de 3000 kN de capacidad de carga.

La consola de control permite efectuar ensayos con tasa de incremento de la tensión constante seleccionada por el usuario de forma automática. Por otra parte, la velocidad máxima de aproximación de platos de 40 mm/min, lo que permite también realizar ensayos de tasa de incremento de la deformación constante sobre probetas de hormigón cilíndricas de 150×300 mm —nuestro caso— de entre  $2.2 \cdot 10^{-6}$  y  $2.2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .



Fig. 60. Prensa utilizada en los ensayos a compresión del hormigón.

#### 4.2.3 Compresómetro/Extensómetro

El instrumento utilizado para medir la deformación que experimentan las probetas durante el ensayo ha sido un sensor electrónico modelo 55-C0222/F también de la firma CONTROLS compuesto por dos piezas, una fija y la otra deslizante a lo largo del propio eje del sensor —fig. 61—, que conectado a un sistema de adquisición de datos compatible, permite medir con alta precisión el desplazamiento de la pieza móvil.

El sistema está compuesto de una estructura de acero y aluminio que alberga un transductor de desplazamiento de alta precisión, dos bandas elásticas de longitud ajustable usadas para fijar el sensor a la probeta y una placa calibradora usada para fijar la longitud inicial. En todos nuestros ensayos se ha optado por una longitud inicial de 160 mm que es la máxima que permite el dispositivo.

El transductor de desplazamientos es del tipo magnetostrictivo de 4 hilos, alimentado a 10 V, con una sensibilidad de  $0.02 \mu\text{m}$ , 1.5 mm de carrera y una linealidad mejor del 1%.

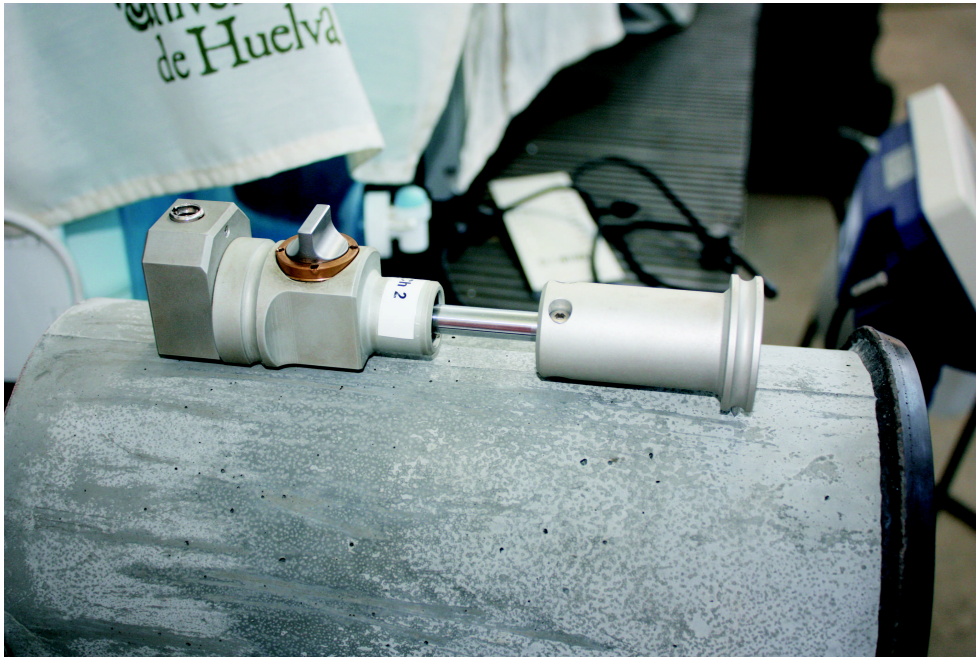


Fig. 61. Colocación del extensómetro utilizado para medir la deformación en los ensayos.

#### 4.2.4 Inicio y fin del ensayo

Las probetas de hormigón son previamente elaboradas, curadas y preparadas conforme a la normativa UNE-EN ya citada [12-13]. Al inicio del ensayo, se taran las lecturas a cero, tanto las de la célula de carga de la prensa como las del extensómetro y se inicia el movimiento de aproximación del pistón de la máquina sin que, inicialmente, exista contacto entre el plato superior y la cara superior de la probeta, por lo que tanto la tensión como la deformación serían nominalmente cero.

Sin embargo, dado que la sensibilidad del extensómetro es de  $0.02 \mu\text{m}$ , con una apreciación de 0.001 mm, lo que supone un umbral de deformación relativa detectable en un recorrido de 160 mm de  $6.25 \cdot 10^{-6}$  y que la apreciación de la célula de carga de la prensa es de 0.1 kN, en probetas de 150 mm de diámetro de 0.00565 MPa, durante el lapso de tiempo en que el pistón se aproxima a la cara superior de la probeta y aún algo más allá, obtendremos lecturas *aleatorias*, que analizaremos más adelante, impidiendo fijar de forma precisa el verdadero *comienzo* del ensayo (fig. 62).



**Fig. 62.** Inicio del ensayo.

En cuanto a la finalización del mismo, debemos distinguir entre ensayos realizados con tasa constante de incremento de la tensión y ensayos realizados con tasa constante de incremento de la deformación (fig.63).



**Fig. 63.** Fin del ensayo (tasa de incremento de la deformación constante).

En los primeros, la finalización se certifica por la rotura brusca de la probeta (ocurre normalmente con probetas de hormigones de resistencia relativamente alta) o bien porque

entre dos lecturas de tensión consecutivas se produzca una diferencia superior a un umbral previamente especificado, en nuestro caso, 20 kN.

Cuando la tasa de incremento de la deformación es constante, no suele producirse la rotura brusca, sino la sucesión de pequeños y continuos fenómenos de inestabilidad debido al paulatino proceso de deterioro de la probeta, finalizando el ensayo por pérdida de anclaje del extensómetro si la probeta sufre una grieta en alguno de los puntos de anclaje de dicho aparato o, si esto no sucede, a criterio de la persona que realiza el ensayo (normalmente cuando la curva tensión-deformación tiende a hacerse horizontal).

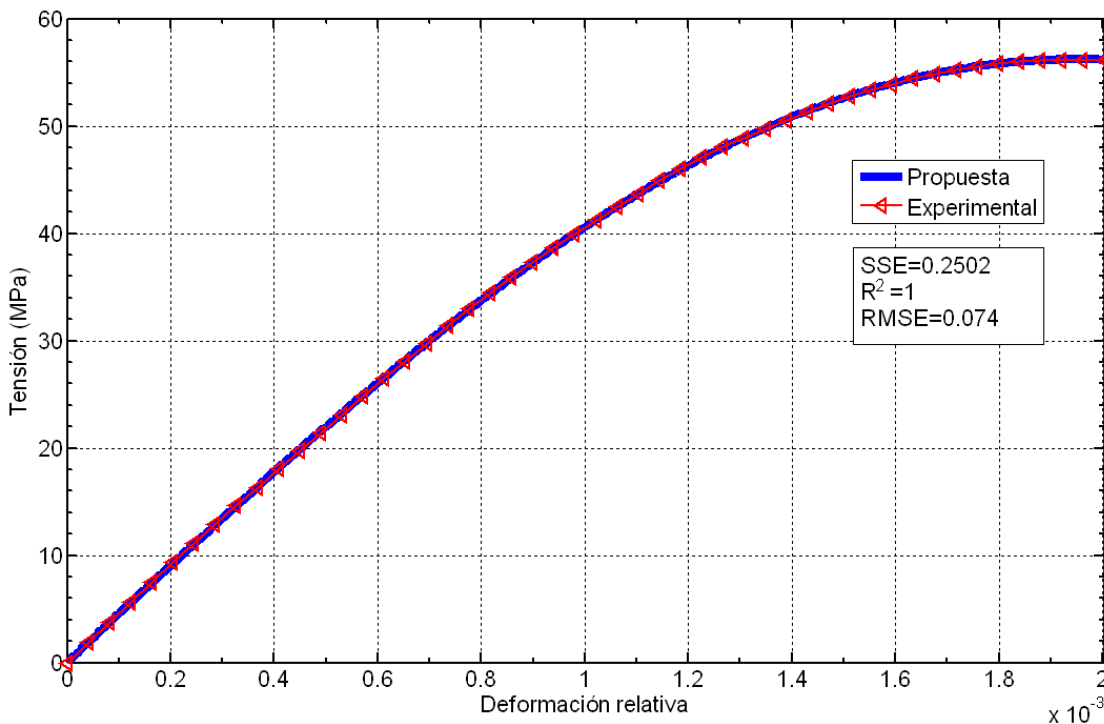
### 4.3 Verificación experimental de los resultados en hormigones

#### 4.3.1 Probeta M1. Tasa de incremento de la tensión constante

Comenzamos la verificación experimental de la tesis comprobando las dos curvas patrón que hemos utilizado para verificar la idoneidad de las propuestas que hemos revisado en el capítulo 2. Su dosificación y valores característicos fueron mostrados en el capítulo 1 (tablas 2 y 3).

El ajuste de los resultados experimentales de la probeta M1, ensayada con tasa de incremento de la deformación constante igual a  $0.6 \text{ MPa}\cdot\text{s}^{-1}$ , muestra un ajuste excelente —fig. 64— para la ecuación:

$$\sigma = \frac{40803}{0.9885\Gamma(0.9885)} \varepsilon^{0.9885} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{0.00282}\right)^{2.325}} = 41000 \varepsilon^{0.9885} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{0.00282}\right)^{2.325}}$$



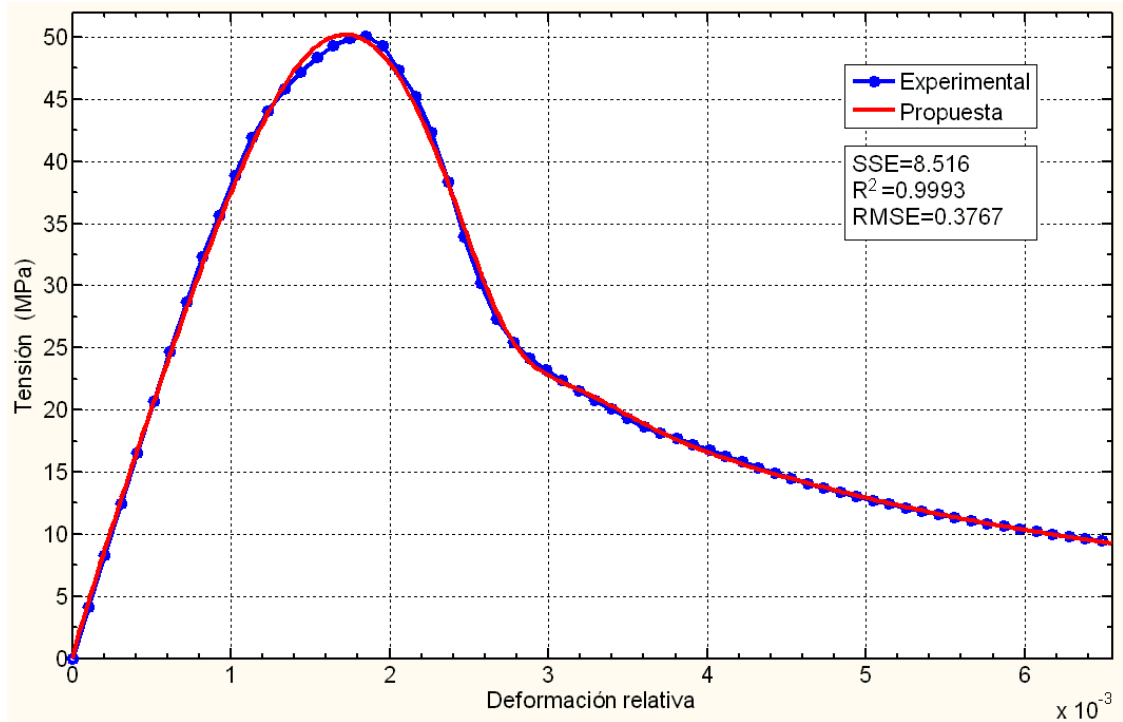
**Fig. 64.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M1 —ensayada con tasa de incremento de la tensión constante— y la ecuación propuesta en la tesis.

#### 4.3.2 Probeta M2. Tasa de incremento de la deformación constante

El caso de tasa de incremento de la deformación constante — $2 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ — de la probeta

M2 es, como señalaba Blechman [60,61], algo más complejo, ya que, después del pico de tensión se produce un fenómeno de cambio de fase, evolucionando posteriormente hacia una especie de *fluencia inestable*.

Tenemos pues dos fases, por lo que nuestra ecuación se compondrá de dos términos, uno por cada fase, el último de ellos ponderado por una exponencial adicional que modela el cambio de fase.



**Fig. 65.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta M2 —ensayada con tasa de incremento de la deformación constante— y la ecuación propuesta en la tesis.

Los valores de los parámetros que mejor ajustan la ecuación propuesta a los datos experimentales de la probeta M2, son los señalados en la expresión siguiente. Obsérvese (fig. 65), que el ajuste es bastante mejor que cualquiera de los revisados en el capítulo 2.

$$\sigma = 25220\varepsilon^{0.9405}e^{-\left(\frac{\varepsilon}{0.00253}\right)^{3.708}} + 17470\varepsilon^{0.00319}e^{-\left(\frac{\varepsilon}{4.624 \cdot 10^{-8}}\right)^{0.169}} \text{Mod}\left[e^{-\left(\frac{\varepsilon-0.3046}{0.3015}\right)^{962.1}}\right]$$

donde  $\text{Mod}[\cdot]$  es el módulo de la función de onda compleja:  $e^{-\left(\frac{\varepsilon-0.3046}{0.3015}\right)^{962.1}}$ , es decir, representa la probabilidad de que se produzca el cambio de fase para un valor de la deformación relativa igual a  $(0.3046 - 0.3015) = 0.0031$ .

#### 4.3.3 Hormigones de baja resistencia. Probeta B2

Las probetas de hormigones de *baja resistencia* se han dosificado tomando el mínimo contenido en cemento que permite la EHE-08 a la vez que la máxima relación agua/cemento que se autoriza en dicha norma para fabricar hormigones estructurales. Su dosificación pormenorizada se muestra en la tabla 8 y las características físicas y los valores globales obtenidos de los ensayos realizados en la tabla 9:

Amasada	Cemento (kg)	A/C (l)	Agua (kg)	Grava (kg)	Arena (kg)	Fluidificante (kg)
2	250	0.65	162.5	975.41	1056.6	-

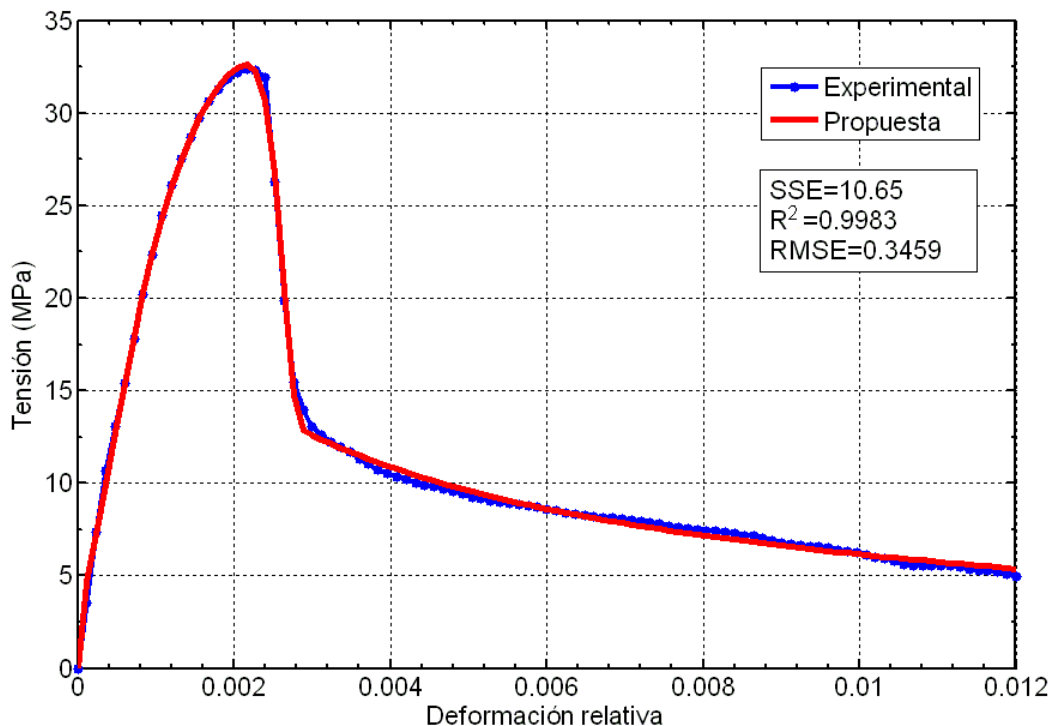
**Tabla 8** Dosificación por m<sup>3</sup> de un hormigón de características mínimas.

Probeta	Método de ensayo	Densidad $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Vel. de transmisión de pulsos ultrasónicos $v$ (m/s)	Resist. máx. a compresión $f'_c$ (MPa)	Def. a resistencia máxima $\epsilon_0$
B1	$\dot{\sigma} = 10602$ MPa/s	2309.21	4451.12	34.23	0.002276
B2	$\dot{\epsilon} = 6.74 \times 10^{-6}$ s <sup>-1</sup>	2305.04	4453.28	32.35	0.002161

**Tabla 9** Valores característicos obtenidos en los ensayos de las probetas de hormigón bajo, utilizadas para comprobar experimentalmente el ajuste de la ecuación propuesta.

La virtual exactitud obtenida para todos los casos de tasa de incremento de la tensión constante, hace innecesaria su representación para el resto de tipos de hormigones elaborados. Nos centraremos, por tanto, en los ensayos con tasa de incremento de la deformación constante.

En el caso de la probeta B2, ensayada con  $\dot{\epsilon} = 6.74 \cdot 10^{-6}$  s<sup>-1</sup>, se observa un tramo prácticamente vertical de la curva casi inmediatamente después del pico de tensión (fig. 66), probablemente debido al aumento de la tasa de incremento de la deformación con respecto al ensayo de la probeta M2, lo que revela la existencia de un proceso de inestabilidad global que se recupera cerca de la deformación correspondiente a 0.003.



**Fig. 66.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta B2 —ensayada con tasa de incremento de la deformación constante— y la ecuación propuesta en la tesis.

Esta inestabilidad puede modelizarse mediante la ecuación

$$\sigma = C_1 \varepsilon^{n_1} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{01}}\right)^{m_1}} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{02}}\right)^{m_2}} + C_2 \varepsilon^{n_2} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{03}}\right)^{m_3}} \text{Mod} \left[ e^{-\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_a}{\varepsilon_{04}}\right)^{m_4}} \right]$$

donde:

Fase I:  $C_1 = 11410$  MPa,  $n_1 = 0.978$ ,  $\varepsilon_{01} = 0.00541$ ,  $m_1 = 1$ .

Inestabilidad:  $\varepsilon_{02} = 0.00263$ ,  $m_2 = 19.31$ .

Fase II:  $C_2 = 997.6$  MPa,  $n_2 = 0.185$ ,  $\varepsilon_{03} = 1 \cdot 10^{-5}$ ,  $m_3 = 0.209$ .

Cambio de fase:  $\varepsilon_a = 0.00753$ ,  $\varepsilon_{04} = 0.00664$   $m_4 = 12.28$ .

#### 4.3.4 Hormigones de alta resistencia. Probeta H2

Para dosificar hormigones de alta resistencia hemos tomado, siguiendo el mismo criterio que en casos anteriores, los valores máximos que permite la EHE-08 para la dosificación de hormigones estructurales, esto es, 500 kg/m<sup>3</sup> de cemento adicionando, en este caso, sendas cantidades iguales al 5% del peso del cemento de humo de sílice y microsíllice (descritos en 4.1.4). La relación agua/cemento se toma tan baja como 0.23, por lo que, para conseguir una adecuada hidratación del cemento, será necesaria la adición de un 2.5% del peso del cemento del superplastificante/reductor de agua de alta actividad descrito en 4.1.3. Los valores exactos de la dosificación empleada y los valores globales obtenidos en los ensayos se muestran en las tablas 10 y 11, respectivamente.

Amasada	Cem. (kg)	A/C	Agua (l)	Grava (kg)	Arena (kg)	Fluidif. (kg)	H. de sílice (kg)	Microsíllice (kg)
3	500	0.23	115	907.80	982.26	12.5	25	25

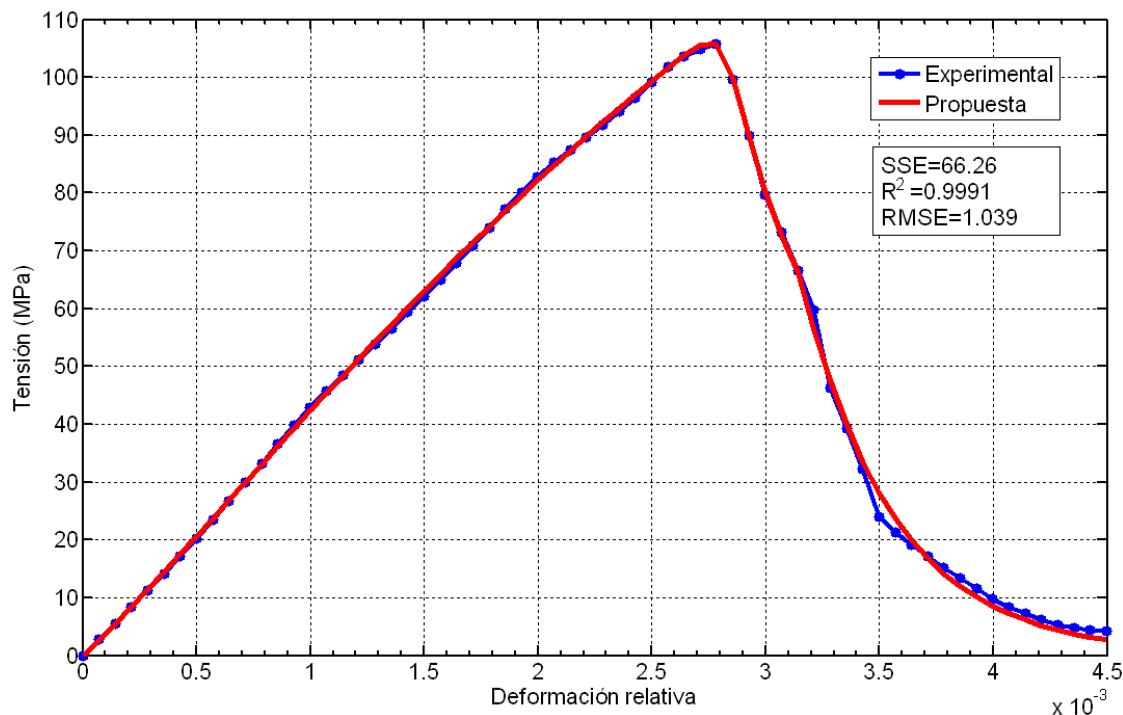
**Tabla 10** Dosificación por m<sup>3</sup> de un hormigón de altas características.

Probeta	Método de ensayo	Densidad $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Vel. de transmisión de pulsos ultrasónicos $v$ (m/s)	Resist. máx. a compresión $f'_c$ (MPa)	Def. a resistencia máxima $\varepsilon_0$
H1	$\dot{\sigma} = 10602$ MPa/s	2385.67	4892.13	112.36	0.00283
H2	$\dot{\varepsilon} = 0.5 \times 10^{-6}$ s <sup>-1</sup>	2380.49	4884.42	105.78	0.00278

**Tabla 11** Valores característicos obtenidos en los ensayos de las probetas de hormigón alto utilizadas para comprobar experimentalmente el ajuste de la ecuación propuesta.

En la fig. 67, puede observarse cómo típicamente los hormigones de alta resistencia presentan una rama ascendente más *lineal*, resultando más pronunciado el descenso de tensión inmediatamente después del máximo. La *cola* de tensión residual final que Blechman achacaba a un factor de confinamiento resulta más baja que en hormigones normales.

Los valores encontrados para los parámetros que mejor ajustan la ecuación propuesta a los resultados experimentales de la probeta H2 se muestran a continuación de la figura 67.



**Fig. 67.** Comparación entre los datos experimentales de la probeta H2 —ensayada con tasa de incremento de la deformación constante— y la ecuación propuesta en la tesis.

Fase I:  $C_1 = 11410$  MPa,  $n_1 = 0.978$ ,  $\varepsilon_{01} = 0.00541$ ,  $m_1 = 1$ .

Inestabilidad:  $\varepsilon_{02} = 0.00263$ ,  $m_2 = 19.31$ .

Fase II:  $C_2 = 997.6$  MPa,  $n_2 = 0.185$ ,  $\varepsilon_{03} = 1 \cdot 10^{-5}$ ,  $m_3 = 0.209$ .

Cambio de fase:  $\varepsilon_a = 0.00753$ ,  $\varepsilon_{04} = 0.00664$ ,  $m_2 = 12.28$ .

#### 4.4 Aplicabilidad de la ecuación propuesta a otros materiales. Metales no férricos

##### 4.4.1 Introducción

Como ya se ha adelantado en apartados anteriores de la tesis, la amplísima aplicabilidad de la ecuación propuesta en la presente memoria, nos ha llevado a comprobar su idoneidad para modelar el comportamiento tenso-deformacional de una relativamente nutrida selección de tipos de materiales que expondremos en los apartados que restan del presente capítulo.

Comenzaremos por los metales, realizando un breve repaso de las ecuaciones propuestas en la bibliografía relacionada con las curvas tensión-deformación para materiales metálicos.

Las curvas tensión-deformación de metales policristalinos ha sido también sujeto de investigación durante más de un siglo. En la actualidad, está bien establecido que el comportamiento de dichos metales puede dividirse en tres fases distintas, designadas por I, II y III y se han desarrollado descripciones detalladas para explicar los procesos básicos de deformación de dichas tres regiones [107, 108]. Al contrario que cierto número de descripciones empíricas o fenomenológicas, no se ha desarrollado ninguna descripción funcional físicamente fundamentada para representar estas regiones debido a que, en la

práctica, la presencia de límites de grano y la existencia de mecanismos de deformación de dichos límites tienden a complicar cualquier interpretación del proceso de deformación en metales policristalinos.

Probablemente, la primera ecuación propuesta para describir las curvas tensión deformación de estos metales fue la propuesta en 1909 (ec. 149) por Ludwik [109],

$$\sigma = \sigma_y + K\varepsilon^n \quad (149)$$

similar y tradicionalmente asociada en la bibliografía a la ecuación propuesta por Hollomon [110] en 1945:

$$\sigma = K\varepsilon^n \quad (150)$$

en las que  $\sigma_y$  es la tensión de fluencia y  $K$  y  $n$  son parámetros del material con  $n$  variando normalmente entre 0.2 y 0.5. Nótese la correspondencia de estas ecuaciones con la ley potencial, ya estudiada, propuesta por Bach para el hormigón y cómo, la comunidad científica dedicada al estudio de las curvas tensión-deformación de los materiales metálicos, no percibe ninguna incomodidad en el hecho de que ambas ecuaciones presenten una derivada en el origen de valor infinito.

Les sigue cronológicamente, la ecuación propuesta en 1943 por Ramberg y Osgood [111], que expresa la relación deformación-tensión también mediante una ley potencial:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K\left(\frac{\sigma}{E}\right)^n \quad (151)$$

aunque, en dicha ecuación, no es posible expresar  $\sigma$  en función de  $\varepsilon$  de manera explícita.

A pesar de que la ecuación de Ludwik pueda presentar buenos resultados de ajuste para bajas deformaciones, un análisis más atento de dicha ecuación revela una deficiencia: la ec. 149 no presenta un máximo para el valor de la tensión, ya que  $\sigma \rightarrow \infty$  tal como  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , en contra de lo que ponen de manifiesto los datos experimentales.

Esta deficiencia es la que pretende soslayar la ecuación propuesta por Voce [112], que puede expresarse en la forma:

$$\sigma = \sigma_s \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)} \right] + \sigma_0 e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)} \quad (152)$$

donde  $\sigma_s$ ,  $\sigma_0$ , y  $\varepsilon_c$  son también parámetros dependientes del material. La ec. (152) fue desarrollada originalmente para describir el endurecimiento por deformación de probetas de cobre ensayadas a compresión e implica que la tensión de fluencia se aproxima exponencialmente a un valor asintótico de saturación,  $\sigma_s$ , para altas deformaciones sin contemplar, por tanto, un decaimiento de la tensión más allá de la tensión máxima.

El siguiente hito a destacar es el modelo de Richard y Abbott [113] de 1975, que propugnaba la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{(E - E_p)\varepsilon}{\left[ 1 + \left| \frac{(E - E_p)\varepsilon}{\sigma_0} \right|^n \right]^{\frac{1}{n}}} + E_p\varepsilon \quad (153)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad clásico,  $E_p$  es un módulo plástico,  $\sigma_0$  una tensión plástica de referencia y  $n$  el parámetro deforma de la curva tensión-deformación.

La primera ecuación no definida a trozos para modelar materiales metálicos que presentan escalón de cedencia y meseta plástica es, según la bibliografía consultada, la propuesta de Poh [114] de 1997, mezcla de comportamientos lineales y de la ec. 153 de Richard y Abbott:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} [g(\varepsilon) + h(\varepsilon)] \quad (154)$$

donde

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left\{ E|\varepsilon| + \sigma_y + \sigma_1 - |(E|\varepsilon| - \sigma_y - \sigma_1)| - \sigma_1 \left[ 1 + \frac{|(E|\varepsilon| - \sigma_y - E\varepsilon_1)| - |(E|\varepsilon| - \sigma_y - \sigma_1)|}{\sigma_1 - E\varepsilon_1} \right] \right\}$$

y

$$h(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(E_h - E_p)(|\varepsilon| - \varepsilon_h)}{\left[ 1 + \left| \frac{(E_h - E_p)(|\varepsilon| - \varepsilon_h)}{\sigma_0} \right|^n \right]^{\frac{1}{n}}} + E_p(|\varepsilon| - \varepsilon_h) \right\} \left[ 1 + \frac{|(|\varepsilon| - \varepsilon_h)| - |(|\varepsilon| - \varepsilon_h - m)|}{m} \right]$$

en las que  $\sigma_1$  es la altura del pico superior de fluencia,  $\varepsilon_1$  es la anchura del pico superior de fluencia,  $\varepsilon_h$  es la deformación al comienzo del endurecimiento por deformación,  $E_h$  es la pendiente de la curva al comienzo del endurecimiento por deformación y  $m$  es un parámetro de transición entre la meseta plástica y la zona curva de endurecimiento. El resto de parámetros tienen el mismo significado que en la ecuación de Richard y Abbott (ec. 153).

Aunque esta ecuación representa un avance por cuanto es capaz de modelar la transición de la fase lineal a la de endurecimiento por deformación, incluyendo el escalón de fluencia y al meseta plástica mediante una expresión *única*, hemos de hacer notar que no presenta un máximo de tensión y no es capaz de modelar el efecto Portevin-Le Chatelier.

Por último, destacamos el enfoque de Chinh *et al.* [115] por constituir una aproximación parcial a la ecuación que se propone en esta tesis. En efecto: tomando como punto de partida la propuesta de Voce (ec. 152), los autores proponen una modificación de dicha ecuación para valores altos de la deformación, que vendría representada por la expresión:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^n} \right] \quad (155)$$

donde  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $\varepsilon_c$  y el exponente  $n$  son constantes que pueden ser usadas para ajustar la ecuación a los datos experimentales. Cuando  $n = 1$ , conduciría a una ecuación tipo Voce y, si las deformaciones son pequeñas y se desarrolla en serie de Taylor, al desprestigiar términos de orden superior, conduce a la ecuación de Ludwik (ec. 149) cuando  $n = m$ .

A continuación procederemos a verificar la aplicación de la ecuación propuesta en la presente memoria comenzando por metales policristalinos no férricos.

#### 4.4.2 Latón

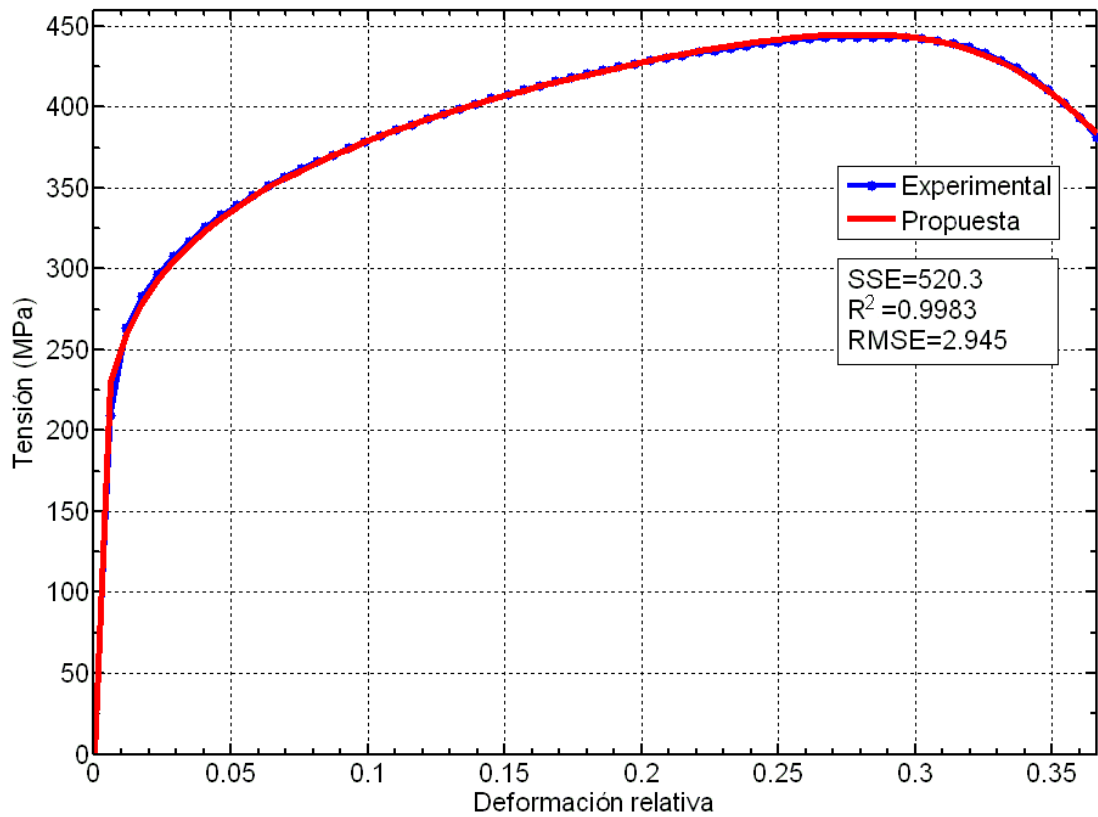
Los datos para la realización de la verificación han sido tomados<sup>2</sup> de [116], y los resultados del ajuste muestran cómo su comportamiento tenso-deformacional puede ser modelado mediante la forma de la ecuación típicamente monofásica, es decir:

$$\sigma = C\varepsilon^n e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m}$$

<sup>2</sup>A falta de disponer de una máquina universal de ensayos.

donde:  $C = 567.9$  MPa,  $n = 0.1757$ ,  $\varepsilon_0 = 0.4361$  y  $m = 8.792$ .

Los resultados del ajuste se muestran en la siguiente figura:



**Fig. 68.** Comparación entre los datos experimentales de una probeta de latón y la ecuación propuesta en la tesis.

#### 4.4.3 Aleación de aluminio 6061-T6

La aleación de aluminio denominada 6061-T6 es altamente soldable mediante los procedimientos TIG<sup>3</sup> o MIG<sup>4</sup> y presenta la siguiente composición en peso:

Aluminio: 95.85-98.56%.

Magnesio: 0.8-1.2%.

Silicio: 0.4-0.8%.

Cobre: 0.15-0.40%.

Cromo: 0.04-0.34%.

Hierro: 0.7% (máximo).

Zinc: 0.25% (máximo).

Titanio: 0.15% (máximo).

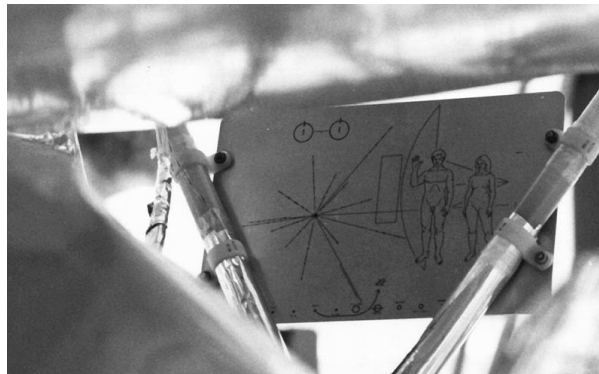
Manganeso: 0.15% (máximo).

Es conocida por ser el material con el que están fabricadas las placas que transportan las astronaves *Pioneer 10* —1972— y *Pioneer 11* —1973— en las que se grabaron sendos

<sup>3</sup> *Tungsten Inert Gas.*

<sup>4</sup> *Metal Inert Gas.*

mensajes pictóricos para proporcionar información sobre el origen y fisonomía de los constructores de dichas astronaves —fig. 69—.



**Fig. 69.** Placa que transporta la astronave *Pioneer 10*.

Los datos brutos, así como las características del ensayo, que se relacionan a continuación, han sido tomados del directorio [117] del *Mechanical Testing Instructional Laboratory* del *College of Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign*:

Máquina de ensayos: *Instrom Model 4483*.

Tipo de ensato: Tracción.

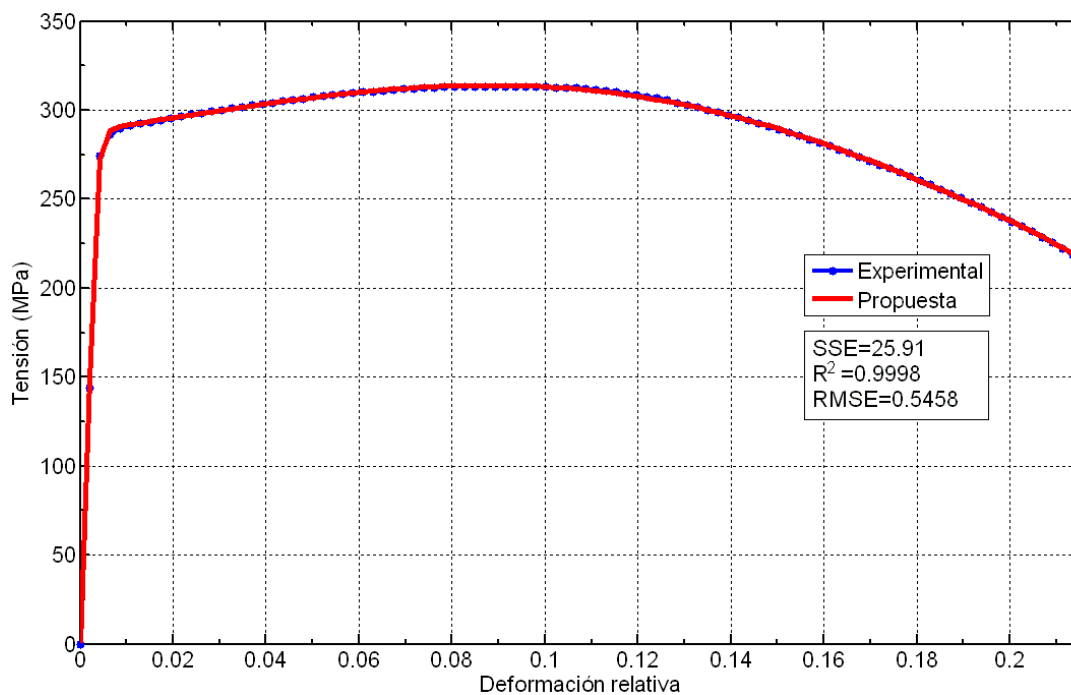
Sección transversal de la probeta:  $40.2639 \text{ mm}^2$ .

Longitud de la galga extensiométrica:  $25.40 \text{ mm}$ .

Tasa de incremento de la deformación —constante—:  $2.62 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

Intervalo de muestreo:  $0.5 \text{ s}$ .

Los resultados del ajuste se muestran en la siguiente figura:



**Fig. 70.** Comparación entre los datos experimentales de una probeta de aleación de aluminio 6061-T6 y la ecuación propuesta en la tesis.

La ecuación que produce el ajuste de la figura 70 se escribe:

$$\sigma = C_1 e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{01}}\right)^{m_1}} \text{Mod}\left[e^{-\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{02}}\right)^{m_2}}\right] + C_2 \varepsilon^{n_1} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{03}}\right)^{m_3}} \text{Mod}\left[e^{-\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{04}}\right)^{m_4}}\right]$$

Los valores encontrados para los parámetros que mejor ajustan la ecuación anterior a los resultados experimentales de la probeta de aluminio 6061-T6 se anotan a continuación.

Fase I:  $C_1 = 286.5$  MPa,  $\varepsilon_{01} = 0.235$ ,  $m_1 = 3.2$ .

Incertidumbre I:  $\varepsilon_{a1} = 0.1109$ ,  $\varepsilon_{02} = 0.1089$ ,  $m_2 = 120.2$ .

Fase II:  $C_2 = 779.3$  MPa,  $n_1 = 0.7949$ ,  $\varepsilon_{03} = 0.02313$ ,  $m_3 = 3.519 \cdot 10^{-6}$ .

Incertidumbre II:  $\varepsilon_{a2} = 0.1853$ ,  $\varepsilon_{04} = 0.07327$ ,  $m_4 = 3.506$ .

#### 4.5 Aceros de construcción. Modelado del efecto Portevin-Le Chatelier

##### 4.5.1 Acero inoxidable 304

El acero inoxidable 304, también conocido como 18/10 por los porcentajes en peso de cromo y níquel que integran su composición, es el acero inoxidable austenítico más versátil y más ampliamente usado. La lista completa de los elementos que lo integran (porcentaje en peso) es la siguiente:

Hierro: 66.86-74.5%.

Cromo: 17.5-19.5%.

Níquel: 8-10.5%.

Silicio: 0-1%.

Manganeso: 0-2%.

Carbono: 0-0.07%.

Fósforo: 0-0.05%.

Azufre: 0-0.02%.

Los datos brutos, así como las características del ensayo, que se relacionan a continuación, han sido tomados también de [117].

Máquina de ensayos: *Instrom Model 4483*.

Tipo de ensayo: Tracción.

Sección transversal de la probeta: 39.5919 mm<sup>2</sup>.

Longitud de la galga extensiométrica: 25.40 mm.

Tasa de incremento de la deformación —constante—:  $2.62 \cdot 10^{-3}$  s<sup>-1</sup>.

Intervalo de muestreo: 0.5 s.

Los resultados del ajuste muestran un comportamiento típicamente bifásico y, en esta ocasión, hemos querido modelar también el proceso de rotura mediante un término probabilidad de inestabilidad global que incluimos en la ecuación que transcribimos a continuación. La fig. 71 muestra los resultados.

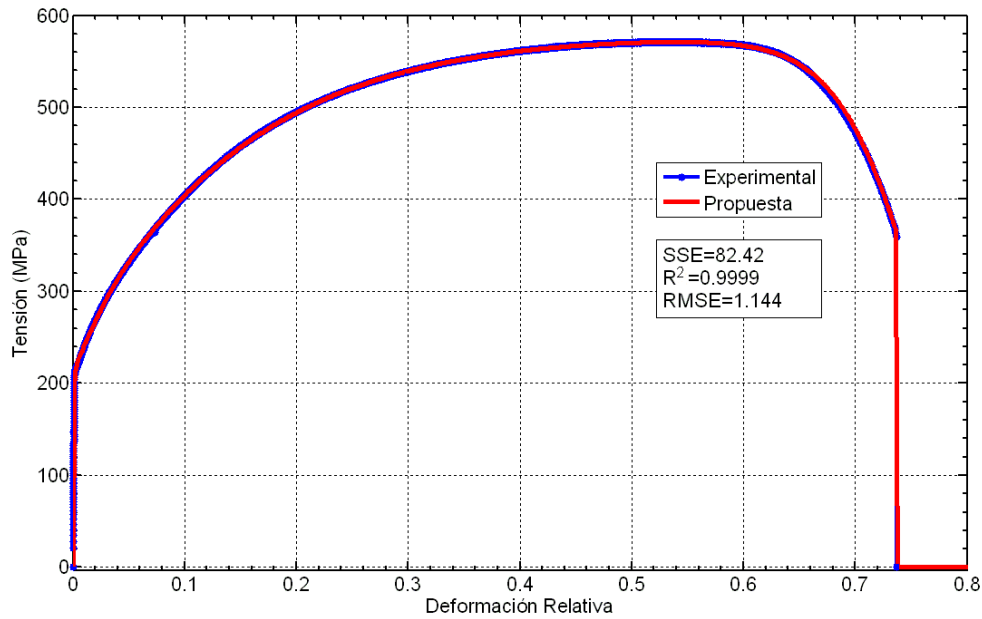
$$\sigma = \left[ C_1 \varepsilon^{n_1} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{01}}\right)^{m_1}} + C_2 \varepsilon^{n_2} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{02}}\right)^{m_2}} \text{Mod}\left[e^{-\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{03}}\right)^{m_3}}\right] \right] e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_u}\right)^{m_u}}$$

Fase I:  $C_1 = 656400$  MPa,  $n_1 = 0.8332$ ,  $\varepsilon_{01} = 3.726 \cdot 10^{-5}$ ,  $m_1 = 0.2873$ .

Fase II:  $C_2 = 11220$  MPa,  $n_2 = 0.8676$ ,  $\varepsilon_{02} = 0.04147$ ,  $m_2 = 0.348$ .

Cambio de fase:  $\varepsilon_{a1} = 0.3621$ ,  $\varepsilon_{03} = 0.4107$ ,  $m_3 = 8.926$ .

Rotura:  $\varepsilon_u = 0.7371$ ,  $m_u = 10000$ .

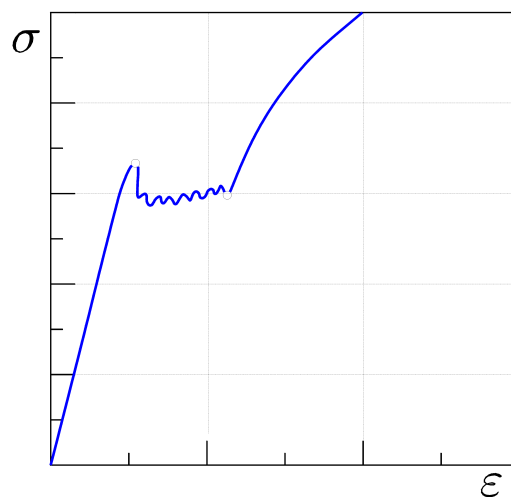


**Fig. 71.** Comparación entre los datos experimentales de una probeta de acero inoxidable 304 y la ecuación propuesta en la tesis.

#### 4.5.2 Acero 1045: modelando el efecto Portevin-Le Chatelier

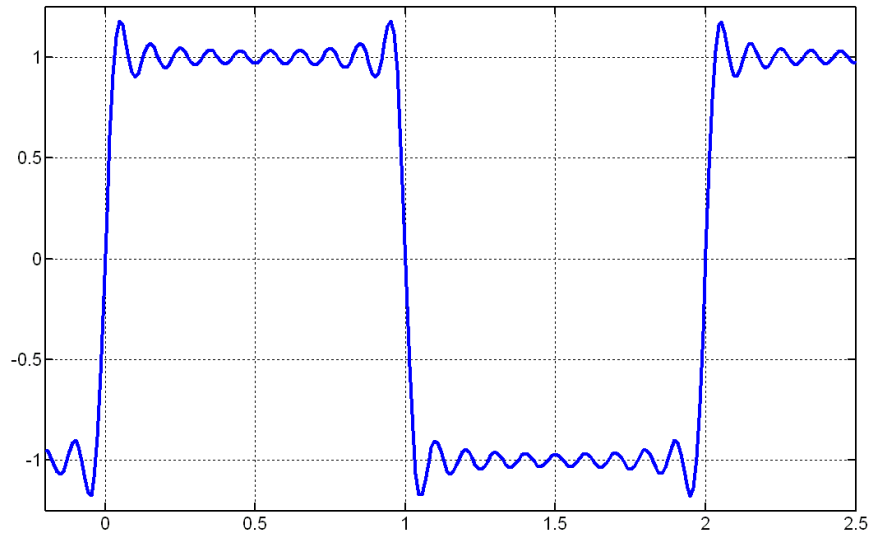
Quizá el reto más difícil al que se pueda enfrentar esta tesis es la modelización, cumpliendo los requisitos de 3.3.5, del efecto Portevin-Le Chatelier —PLC—, del que dábamos cuenta en el capítulo 1, y que experimentan algunos aceros al carbono en la zona de meseta plástica. La bibliografía al respecto es relativamente reciente [118-121] y se centra básicamente en la modelización numérica por el Método de los Elementos Finitos.

La manifestación del efecto PLC sobre las curvas tensión-deformación se traduce en tramos de dichas curvas que presentan un aspecto *aserrado* o *en diente de sierra* (fig. 72).



**Fig. 72.** Curva tensión-deformación idealizada en la que se aprecia un tramo en el que aparece el efecto portevin-Le Chatelier.

Por ello, nuestra primera intuición fue ponderar las curvas tensión-deformación de los materiales que presentaban el efecto PLC mediante una *onda cuadrada* de amplitud unitaria (fig. 73).



**Fig. 73.** Onda cuadrada de amplitud y semiperiodo unitarios, y 10 *crestas*.

Como es sabido, se conoce como onda cuadrada a una onda exclusivamente compuesta por armónicos impares cuyas amplitudes son inversamente proporcionales al número de armónicos, (ec. 156)

$$f(x) = \frac{4A}{\pi} \sum_{j=1}^m \frac{1}{2j-1} \text{sen} \left[ (2j-1) \frac{2\pi}{T} x \right] \quad (156)$$

donde  $A$  es la amplitud del primer armónico,  $m$  es el número de *crestas* o máximos locales presentes en un semiperiodo y  $T$  es el periodo.

Sin embargo, de proceder así, estaríamos violando la directriz general de la tesis por la cual, la ecuación propuesta para modelar las curvas tensión-deformación de los materiales, habría de estar únicamente compuesta por una combinación lineal de funciones potenciales y exponenciales de la forma general expresada mediante la ec. 130, es decir:

$$\sigma = \sum_{i=1}^p C_i \varepsilon^{n_i} e^{-\sum_{j=1}^q \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_{a_j}}{\varepsilon_{0j}} \right)^{m_j}}$$

Ello nos llevó a plantearnos si sería posible modelar una onda cuadrada no periódica mediante funciones exponenciales, encontrando una expresión adecuada combinando una función exponencial válida para modelar el primer armónico, con una suma algebraica también de pequeñas exponenciales que modelan las pequeñas oscilaciones que producen el resto de armónicos de la onda cuadrada periódica, mediante la expresión:

$$f(x) = e^{-\left(\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right)^n} + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^{j-1}}{C} e^{-\left(\frac{x-\frac{(2j-1)a}{n}}{\frac{a}{n}}\right)^p} \quad (157)$$

donde, con relación a la ec. 156,  $a = \frac{T}{2}$ ,  $n = 4m - 2$ ,  $C$  es un parámetro —o incluso, si fuese necesario, una función de  $j$ — de escala para la amplitud de las pequeñas *crestas* y  $p$  es un exponente que modela la rigidez de dichas *crestas*. En la fig. 74, se muestra la comparación gráfica entre una onda cuadrada exponencial con  $m = 20$ ,  $A = 1$ ,  $T = 2$  y  $p = 2$ , y su correspondiente modelo exponencial.

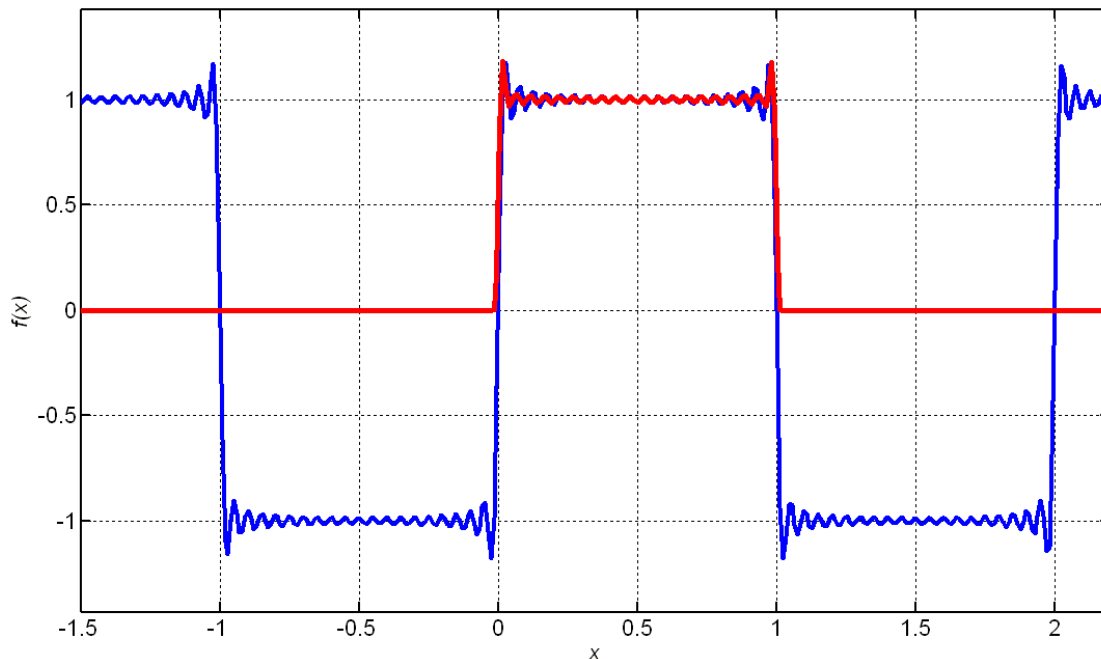


Fig. 74. Comparación entre una onda cuadrada periódica y una onda cuadrada exponencial.

Comprobada la versatilidad de la ecuación propuesta en la tesis para modelar el efecto PLC, nos decidimos a probar con un material que presenta habitualmente dicho efecto en la zona correspondiente a su meseta plástica: el acero 1045.

Este material es un acero de contenido medio de carbono, de resistencia media y baja templabilidad. Se caracteriza por una resistencia a la tracción —500-700 MPa— y al impacto bastante buenas, además de una buena trabajabilidad y una soldabilidad razonable. El acero 1045 es ampliamente utilizado por todos los sectores de la industria para aplicaciones que requieran mayor resistencia a la tracción y al desgaste que la que presentan los aceros suaves de bajo contenido en carbono. Los principales usos de este acero son, entre otros: piñones, cuñas, ejes, tornillos, partes de maquinaria, herramientas agrícolas y remaches. Los elementos que integran su composición química son los siguientes:

Hierro: 98.16-98.82%.

Carbono: 0.43-0.5%.

Manganeso: 0.60-0.90%.

Silicio: 0.15-0.35%.

Azufre: 0-0.05%.

Fósforo: 0-0.04%.

Los datos brutos, así como las características del ensayo, que se relacionan a continuación, han sido tomados también de [117].

Máquina de ensayos: *Instrom Model 4483*.

Tipo de ensayo: Tracción.

Sección transversal de la probeta: 39.8153 mm<sup>2</sup>.

Longitud de la galga extensiométrica: 25.40 mm.

Tasa de incremento de la deformación —constante—:  $2.62 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

Intervalo de muestreo: 0.5 s.

Para la modelización del efecto PLC hemos considerado suficiente el uso de tres funciones exponenciales (modelamos 3 *crestas*) combinadas con otras dos funciones exponenciales que modelan la fase correspondiente a un metal policristalino sin carbono, añadiendo, por último, un término adicional que da cuenta de la rotura de la probeta. La ecuación que organiza los parámetros encontrados se muestra a continuación y los resultados del ajuste se representan gráficamente en la fig. 73.

$$\sigma = \left[ \sum_{j=1}^5 C_j \varepsilon^{n_j} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{0j}}\right)^{m_j}} \right] e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_u}\right)^{m_u}}$$

Efecto PLC:  $C_1 = 80610000 \text{ MPa}$ ,  $C_2 = 1393000 \text{ MPa}$ ,  $C_3 = 99850 \text{ MPa}$ ,  $n_1 = 1.964$ ,  $n_2 = 1.34$ ,  $n_3 = 0.956$ ,  $\varepsilon_{01} = 0.001354$ ,  $\varepsilon_{02} = 0.00184$ ,  $\varepsilon_{03} = 0.003858$ ,  $m_1 = 8.853$ ,  $m_2 = 2.61$ ,  $m_3 = 1.763$ .

Fase policristalina:  $C_4 = 322200 \text{ MPa}$ ,  $C_5 = 262900 \text{ MPa}$ ,  $n_4 = 2.907$ ,  $n_5 = 1.046$ ,  $\varepsilon_{04} = 0.1015$ ,  $\varepsilon_{05} = 0.003392$ ,  $m_4 = 2.232$ ,  $m_5 = 0.3955$ .

Rotura:  $\varepsilon_u = 0.14136097$ ,  $m_u = 10000$ .

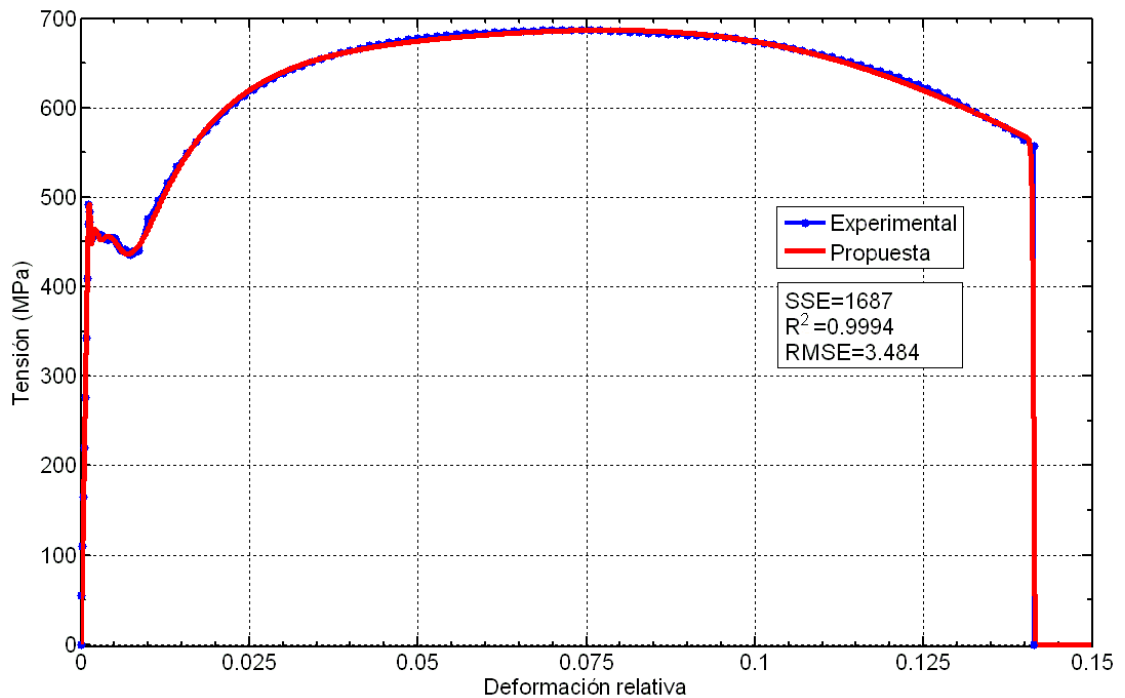


Fig. 75. Comparación entre los datos experimentales de una probeta de acero 1045 y la ecuación propuesta en la tesis.

#### 4.6 Resultados en polímeros: plásticos y gomas

Los resultados obtenidos hasta el momento, nos animan a comprobar la aplicabilidad de la ecuación propuesta en todo tipo de materiales. Por ello, a continuación expondremos los resultados de la verificación experimental de la capacidad de modelización de dicha ecuación del comportamiento tenso-deformacional de materiales poliméricos sintéticos.

##### 4.6.1 Poli(metil metacrilato)

El poli(metil metacrilato), también polimetacrilato de metilo o PMMA, es un termoplástico transparente que se usa a menudo como alternativa al vidrio por ser más ligera o resistente a los golpes que éste, denominándosele a veces *crystal acrílico*. Químicamente es el polímero sintético del metacrilato de metilo, de fórmula molecular  $(C_5O_2H_8)_n$ . El material fue desarrollado en 1928 por varios laboratorios y se comercializó por primera vez en 1933 por la *Rohm and Haas Company* bajo la marca *Plexiglas*.

Los datos para la realización de la verificación han sido tomados, otra vez, de [117], siendo éstos:

Máquina de ensayos: *Instrom Model 4483*.

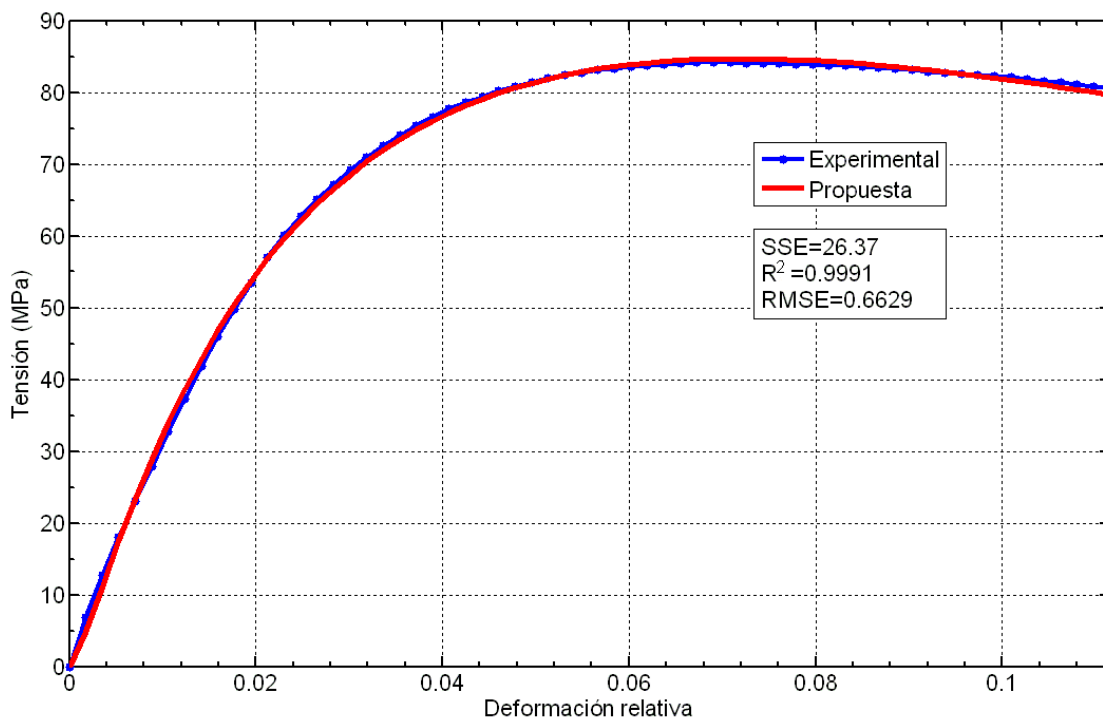
Tipo de ensato: Tracción.

Sección transversal de la probeta:  $50.6432 \text{ mm}^2$ .

Longitud de la galga extensiométrica: 25.40 mm.

Tasa de incremento de la deformación —constante—:  $2.62 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .

Intervalo de muestreo: 0.5 s.



**Fig. 76.** Comparación entre los datos experimentales de una probeta de poli(metil metacrilato) —PMMA— y la ecuación propuesta en la tesis.

Los resultados del ajuste muestran cómo su comportamiento tenso-deformacional

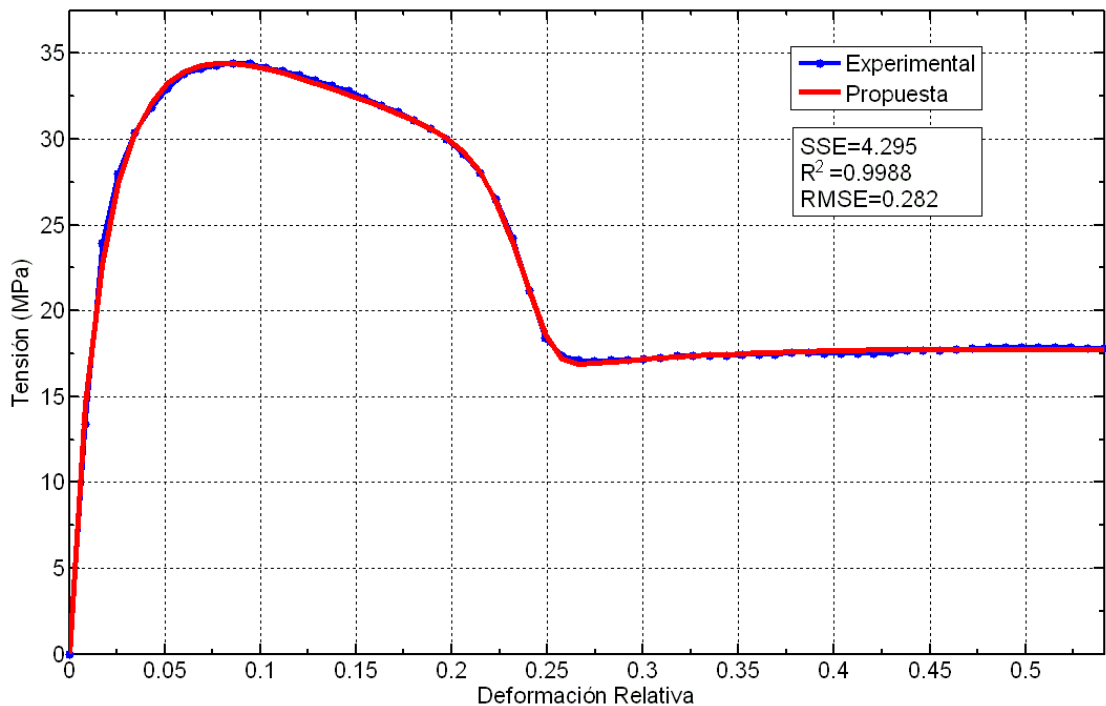
puede ser modelado mediante la forma de la ecuación típicamente monofásica, es decir:

$$\sigma = C\varepsilon^n e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m}$$

donde:  $C = 1963000$  MPa,  $n = 1.803$ ,  $\varepsilon_0 = 0.0005283$  y  $m = 0.3396$ . Estos resultados se muestran en la fig. 76.

#### 4.6.2 Polipropileno

El polipropileno —PP— es el polímero termoplástico, parcialmente cristalino, que se obtiene de la polimerización del propileno o propeno. Pertenece al grupo de las poliolefinas y es utilizado en una amplia variedad de aplicaciones que incluyen embalajes para alimentos, tejidos, equipos de laboratorio, componentes automotrices y películas transparentes. Tiene gran resistencia contra diversos solventes químicos, así como contra álcalis y ácidos. Las moléculas de PP (de fórmula  $-(C_3H_6)_n$ ) se componen de una cadena principal de átomos de carbono enlazados entre sí, de la cual cuelgan grupos metilo ( $CH_3$ )— a uno u otro lado de la cadena. Cuando todos los grupos metilo están del mismo lado se habla de *polipropileno isotáctico*; cuando están alternados a uno u otro lado, de *polipropileno sindiotáctico*; cuando no tienen un orden aparente, de *polipropileno atáctico*. Las propiedades del PP homopolímero, obtenido de la polimerización de propileno puro, dependen enormemente del tipo de tacticidad que presenten sus moléculas. El más utilizado, que corresponde al material del que provienen los datos experimentales utilizados para comparar en este apartado, es el PP homopolímero isotáctico (fig. 77).



**Fig. 77.** Comparación entre los datos experimentales de una probeta de polipropileno y la ecuación propuesta en la tesis.

La curva tensión-deformación para el PP, puede construirse a partir de dos fases y

un cambio de fase, es decir, mediante la ecuación:

$$\sigma = C_1 \varepsilon^{n_1} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{01}}\right)^{m_1}} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{02}}\right)^{m_2}} + C_2 \varepsilon^{n_2} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{03}}\right)^{m_3}}$$

Con los siguientes parámetros:

Fase I:  $C_1 = 7850000$  MPa,  $n_1 = 1.892$ ,  $\varepsilon_{01} = 3.26 \cdot 10^{-5}$ ,  $m_1 = 0.2657$ .

Cambio de fase:  $\varepsilon_{02} = 0.2408$ ,  $m_2 = 17.21$ .

Fase II:  $C_2 = 3739$  MPa,  $n_2 = 1.213$ ,  $\varepsilon_{03} = 0.001977$ ,  $m_3 = 0.2722$ .

#### 4.6.3 Elastómero termoplástico Elastollan<sup>®</sup> C 95 A

Concluimos este grupo dedicado a los polímeros sintéticos comprobando la capacidad modelizadora de la ecuación propuesta en materiales tipo goma —*rubber-like materials*— que suelen presentar, constituyendo este caso un preámbulo a algunos biomateriales que examinaremos en el apartado siguiente, lo que en la literatura anglosajona se denominan *J-shaped curves*<sup>5</sup>. Para ello hemos tomado los datos de [123] del polímero Elastollan<sup>®</sup> C 95 A. Este material es un elastómero termoplástico —TPE— de poliéster-poliuretano fabricado por la empresa BASF que presenta buenas propiedades de resistencia al desgaste, al desgarro, resistencia a tracción, amortiguamiento y resiliencia. Es procesable mediante moldeo por inyección, extrusión o soplado.

Realizado el ajuste, se comprueba que este material es modelizable mediante dos fases bien diferenciadas: una parabólica sin término exponencial de daño —de ahí la forma de J— y otra lineal con daño que modela la contracurva inicial.

Este tipo de curvas muestran que inicialmente un pequeño aumento de la tensión produce grandes extensiones. Sin embargo, posteriormente, cuando se imponen grandes extensiones, el material se vuelve más rígido y es más difícil de deformar. La piel de los mamíferos y la carne son dos de los muchos biomateriales que muestran una curva en forma de J. Como ejemplo, si tiramos del lóbulo de una oreja hacia abajo, notaremos al principio que es muy fácil de estirar pero, si continuamos, comprobaremos que cada vez necesitamos más fuerza para seguir estirándolo.

La carga y la descarga se producen a lo largo de la misma curva, es decir, la deformación es completamente reversible y elástica —sin daño—. Esto asegura que toda la energía utilizada en la deformación del sistema se recupera una vez retirada la carga, tal como requiere, por ejemplo, la deformación de las paredes arteriales.

La ecuación encontrada y los parámetros que la definen son los siguientes:

$$\sigma = C_1 \varepsilon^{n_1} + C_2 \varepsilon e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{01}}\right)^{m_1}}$$

Fase I:  $C_1 = 0.6768$  MPa,  $n_1 = 2.76$ .

Fase II:  $C_2 = 1192$  MPa,  $\varepsilon_{01} = 0.0003769$ ,  $m_1 = 0.1981$ .

Los resultados del ajuste se muestran gráficamente en la figura 78.

---

<sup>5</sup>Curvas en forma de J.

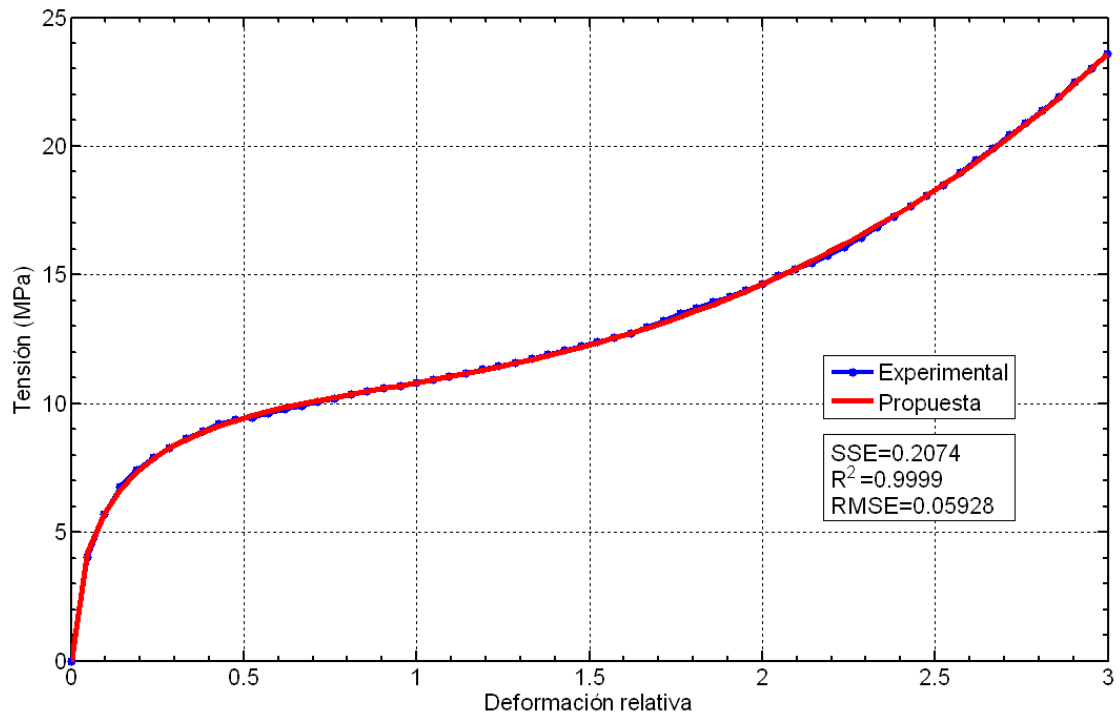


Fig. 78. Comparación entre los datos experimentales de una probeta de elastómero termoplástico —TPE— Elastollan<sup>®</sup> C 95 A y la ecuación propuesta en la tesis.

#### 4.7 Ajuste observado en biomateriales

Concluimos este capítulo de verificación experimental de la tesis probando la aplicabilidad de la ecuación a las curvas tensión-deformación que presentan algunos *materiales orgánicos* como el conglomerado de fibras de colágeno que constituyen los tendones, por un lado, o el pelo humano, por otro.

##### 4.7.1 Tendones

Los tendones son los responsables de la transmisión mecánica de la fuerza de los músculos a los huesos y, al hacerlo, permitir la locomoción y la mejora de la estabilidad articular. Por otra parte, los tendones son un tejido vivo y responden a las fuerzas mecánicas cambiando tanto su metabolismo como sus propiedades mecánicas y estructurales. Por ejemplo, los tendones muestran un incremento del área de su sección transversal y su resistencia a la tracción y los fibroblastos aumentan la producción de colágeno tipo I como respuesta a un apropiado entrenamiento físico.

Los tendones están formados por fibras de colágeno, proteoglicanos, glicoproteínas y agua. El principal componente es el colágeno tipo I, que constituye cerca del 60% de la masa seca del tendón y cerca del 95% de colágeno total. El 5% restante lo constituyen los colágenos tipo III y V en los tendones normales. El colágeno tipo III está principalmente localizado en el *endotendón* y el *epitendón*.

Los tendones están sujetos a fuerzas mecánicas dinámicas *in vivo* y presentan formas de fibra y características viscoelásticas que contribuyen al comportamiento mecánico del tendón como un todo. Una curva tensión-deformación típica de un tendón presenta una región inicial en forma de *pezuña* o *puntera* —*toe* en inglés— mientras experimenta una

deformación relativa inferior al 2%. Esta *toe region* representa el estiramiento de las fibras con *forma de rizo* del tendón en estado de reposo. Posteriormente se produce una región lineal mientras el tendón se alarga por debajo del 4%, en la que las fibras de tensan perdiendo esta configuración *enrollada*. Si el tendón se alarga más allá del 4% de deformación relativa, se producen desgarros microscópicos en sus fibras y, más allá del 8-10% de deformación, se produce el fallo macroscópico del tendón como elemento estructural.

Los datos para la verificación de la capacidad modelizadora de la ecuación propuesta del comportamiento tenso-deformacional de los tendones han sido tomados de [124] y los resultados muestran cómo puede modelizarse dicho comportamiento mediante una ecuación *trifásica*, con un término para la *toe region*, otro para la fase *cuasi-elástica* y otro para el daño macroscópico final, según la ecuación:

$$\sigma = C_1 \varepsilon^{n_1} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{01}}\right)^{m_1}} + C_2 \varepsilon^{n_2} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{02}}\right)^{m_2}} + C_3 \varepsilon^{n_3} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{03}}\right)^{m_3}}$$

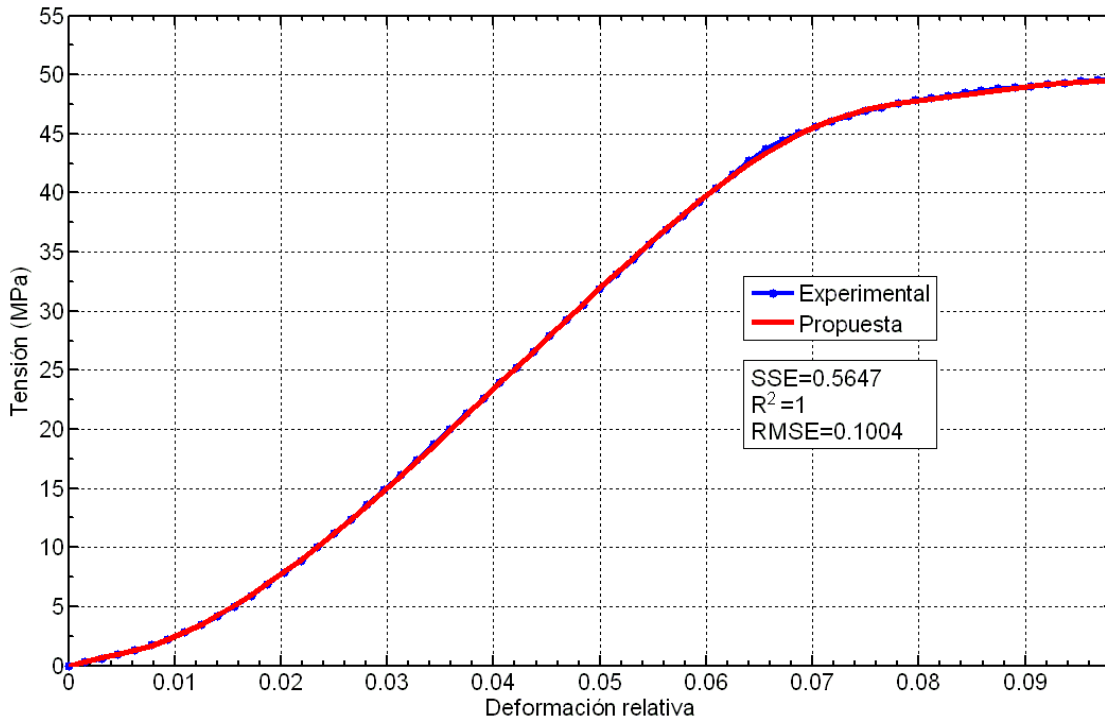
Con los siguientes parámetros:

Fase I (*toe region*):  $C_1 = 30140$  MPa,  $n_1 = 1.739$ ,  $\varepsilon_{01} = 0.002324$ ,  $m_1 = 1.092$ .

Fase II (*cuasi-elástica*):  $C_2 = 7038$  MPa,  $n_2 = 1.744$ ,  $\varepsilon_{02} = 0.1032$ ,  $m_2 = 1.932$ .

Fase III (daño macroscópico):  $C_3 = 979.8$  MPa,  $n_3 = 2.008$ ,  $\varepsilon_{03} = 0.07613$ ,  $m_3 = 10$ .

Los resultados del ajuste se muestran en la siguiente figura:



**Fig. 79.** Comparación entre los datos experimentales de un tendón ensayado a tracción y la ecuación propuesta en la tesis.

#### 4.7.2 Pelo humano

En el caso del pelo humano, las curvas tensión-deformación presentan una región inicial

*cuasi-lineal* seguida de una meseta plástica para finalizar con un tramo que recuerda las curvas en forma de J analizadas en 4.6.3, antes de la rotura.

Los datos han sido tomados de [125] y pueden ser modelizados mediante un modelo de tres fases. Adicionalmente, en este caso, hemos dispuesto también un término que da cuenta de la rotura.

La ecuación que modela la evolución tenso-deformacional del cabello ensayado se escribe:

$$\sigma = \left[ C_1 \varepsilon^{n_1} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{01}}\right)^{m_1}} + C_2 \varepsilon^{n_2} \text{Mod} \left[ e^{-\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{02}}\right)^{m_2}} \right] + C_3 \varepsilon^{n_3} e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{03}}\right)^{m_3}} \right] e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_u}\right)^{m_u}}$$

Con los siguientes parámetros

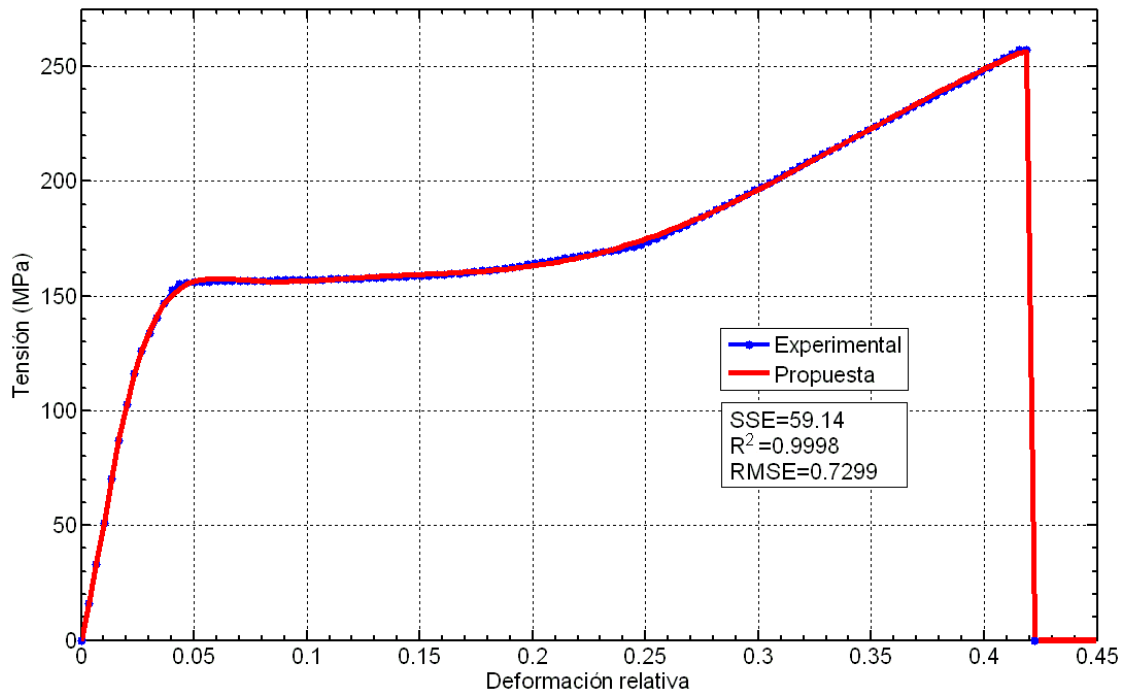
Fase I:  $C_1 = 169600$  MPa,  $n_1 = 2.048$ ,  $\varepsilon_{01} = 0.03136$ ,  $m_1 = 0.7478$ .

Fase II:  $C_2 = 5557$  MPa,  $n_2 = 1.069$ ,  $\varepsilon_{a1} = 0.01359$ ,  $\varepsilon_{02} = 0.03133$ ,  $m_2 = 1.306$ .

Fase III:  $C_3 = 75290$  MPa,  $n_3 = 4$ ,  $\varepsilon_{03} = 0.2127$ ,  $m_3 = 1.236$ .

Rotura:  $\varepsilon_u = 0.408$ ,  $m_u = 860$ .

Los resultados se grafican en la siguiente figura:



**Fig. 80.** Comparación entre los datos experimentales del pelo humano ensayado a tracción y la ecuación propuesta en la tesis.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

*La primera piedra del éxito de un trabajo de investigación es la humildad científica de cómo se aborda.*

Sixto Romero.

Estas últimas páginas del trabajo resumen los principales resultados obtenidos en los capítulos previos, sintetizando la pequeña contribución que se ha aportado al conocimiento global del tema tratado mediante la cual se intenta arrojar algo más de luz a algunas de las múltiples cuestiones que todavía quedan por resolver sobre el comportamiento tenso-deformacional de los materiales.

Además, en un último apartado, desgranamos las líneas futuras de investigación que deja abiertas la presente memoria puesto que, como me han enseñado mis maestros, una tesis doctoral no es el fin de un trabajo de investigación, sino el comienzo de una carrera investigadora, por lo que los considero trabajos a acometer inmediatamente.

#### 5.1 Conclusiones

Las conclusiones que arroja el presente trabajo de investigación se enumeran en la siguiente relación:

1. En primer lugar, se ha propuesto una ley de Hooke *ampliada*, basada en el cálculo *diferintegral*, por la que, lejos de ser distintas, la ley de Hooke (ec. 117) y la ecuación de Bach (ec. 2) —o ecuación de Hollomon (ec. 150)— no serían sino casos particulares de la ecuación diferencial fraccionaria propuesta en 3.3.2 (ec. 118):

$${}_0D_\varepsilon^\alpha \sigma = K \Leftrightarrow \sigma = \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha)} \varepsilon^\alpha$$

2. A continuación, partiendo de los postulados de la Mecánica del Daño Continuo (ec. 24), se ha propuesto una ecuación que modela la evolución tenso-deformacional de materiales que presentan un comportamiento *simple*, que puede escribirse (ec. 122):

$$\sigma = \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha)} \varepsilon^\alpha \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\varepsilon}{b_n} \right) \right)^{-\xi} \right] = C \varepsilon^n e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m}$$

donde  $C = \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha)}$ ,  $n = \alpha$ ,  $\varepsilon_a = a_n - \xi b_n$ ,  $\varepsilon_0 = \xi b_n$  y  $m = -\xi$ .

Las leyes clásicas, en las que el comportamiento es perfecto y la resistencia del material es infinita, a saber: la ley de Hooke, la de la tensión de fluencia constante y la ley potencial —ecuación de Bach o ecuación de Hollomon—, son casos límite de dicha ecuación.

Por otra parte, se ha verificado experimentalmente que la ec. 122 modela con excelente precisión las curvas tensión-deformación que denominamos *simples*, como las del hormigón ensayado con tasa de incremento de la tensión constante (4.3.1), algunos metales policristalinos (4.4.2) y ciertos polímeros sintéticos (4.6.1).

3. Siguiendo la vieja idea de J. von Neumann [126] de aplicar la mecánica cuántica, no sólo a los sistemas microscópicos cuánticos, sino también al proceso completo de medida, incluyendo sus aparatos macroscópicos, de la que nace la interpretación actual más seguida de dicha teoría, hemos definido la probabilidad de que el ensayo, *en sí*, se esté realizando con una determinada precisión, utilizando la misma función de distribución que la que usamos para caracterizar el proceso de daño en los materiales que presentan curvas *simples*, con lo que la ec. 122 se amplía ahora a:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{K}{\alpha\Gamma(\alpha)} \varepsilon^\alpha \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \left( \frac{\varepsilon - a_n}{b_n} \right) \right)^{-\xi} \right] \exp \left[ - \left( 1 + \frac{1}{\xi_s} \left( \frac{\varepsilon - a_s}{b_s} \right) \right)^{-\xi_s} \right] = \\ &= C \varepsilon^n e^{-\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_a}{\varepsilon_0}\right)^m} e^{-\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_s}{\varepsilon_{0s}}\right)^{m_s}}\end{aligned}$$

donde el exponente  $m_s$  da cuenta de la exactitud o precisión del proceso de medida como un todo. Permitir a  $m_s$  ser un número real positivo cualquiera conduce a *saltar* al espacio de Hilbert sobre los complejos y a tener que considerar el tercer postulado mecanocuántico por el que, ahora, la probabilidad de obtener la cantidad  $c$  como resultado de una medición es (*vid.* 3.5.3):

$$P = |\langle c | \Psi \rangle|^2$$

4. Una ecuación que pretenda describir ajustada y completamente la evolución de la curva tensión-deformación de un *material estructural* concreto, debe ser *autosemejante*, esto es, toda vez que los *materiales estructurales* están compuestos por combinaciones más o menos complejas de *materia sólida* y que dicha *materia sólida* —sea cual sea su *naturaleza*— debe responder también al ensayo tensión-deformación atendiendo a una ecuación *determinada*, ésta debe poder ser constantemente aplicada para describir el comportamiento tensión-deformación de cualquiera de las posibles combinaciones que dan lugar a los *materiales estructurales*, razonamiento que debilita completamente la separación clásica de los sólidos en elásticos, plásticos, viscosos, frágiles, dúctiles, etc.

Por tanto, la forma más general de la ecuación objeto de esta tesis, debe estar compuesta por una *combinación* de comportamientos y de influencias de métodos y aparatos de medida (ec. 129).

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{K_i \varepsilon^{\alpha_i}}{\alpha_i \Gamma(\alpha_i)} \exp \left[ - \sum_{j=1}^m \left( 1 + \frac{1}{\xi_j} \left( \frac{\varepsilon - a_j}{b_j} \right) \right)^{-\xi_j} \right]$$

donde  $K_i \geq 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $b_j > 0$  y  $\xi_j < 0$  son parámetros de los materiales, de la forma y tamaño de las probetas usadas para ensayarlos, de la temperatura y de las máquinas y métodos de ensayo a determinar experimentalmente; y  $n, m \in \mathbb{N}$  representan, respectivamente, el número de *fases* o *subcomportamientos* que presentan los materiales y el número de *procesos de inestabilidad* o *transiciones* que experimenta la probeta durante el ensayo, incluida la rotura. El dominio de aplicación de esta ecuación puede extenderse, desde *antes* de comenzar el ensayo —como vimos en §3.5—, hasta *después* de finalizado el mismo —como hemos visto en 3.4.1—.

En la ec. (129) es posible realizar algunas manipulaciones algebraicas y, atendiendo a una notación más *ingenieril*, expresarla también como (ec. 130):

$$\sigma = \sum_{i=1}^p C_i \varepsilon^{n_i} e^{-\sum_{j=1}^q \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_{a_j}}{\varepsilon_{0j}} \right)^{m_j}}$$

donde ahora  $C_i = \frac{K_i}{\alpha_i \Gamma(\alpha_i)}$ ,  $n_i = \alpha_i$ ,  $\varepsilon_{a_j} = a_j - \xi_j b_j$ ,  $\varepsilon_{0j} = \xi_j b_j$ ,  $m_j = -\xi_j > 0$ ,  $p = n$  y  $q = m$ .

5. Por todo lo anteriormente expuesto, si tuviésemos que resumir la idea central que subyace en la presente tesis en unas pocas palabras, podríamos decir que, mientras las teorías clásicas propugnan modelos de los materiales *reales* como *mezclas* o *combinaciones* de materiales *ideales* o *puros* —i. e. combinaciones en serie, en paralelo o ambas del modelo de Hooke y del modelo de Newton que dan lugar, entre otros, a los modelos de Maxwell, Voigt, Kelvin, Zener, etc., estudiados en 3.2.3—, esta tesis sostiene que el comportamiento de los materiales *reales* vendría caracterizado por una *mezcla* o *combinación* del comportamiento de materiales *impuros* o —por así decirlo— ya inicialmente *mestizos* por la propia naturaleza *intermedia* de la propuesta ley de Hooke *ampliada*, ponderada por la influencia de los métodos de ensayo y la *exactitud* o *precisión* de los aparatos usados para ensayarlos, es decir, por la incertidumbre inherente al propio hecho de *medir*.
6. Dejar constancia de que la verificación experimental de la tesis ha arrojado excelentes resultados en todo tipo de materiales, desde los hormigones en una amplia gama de resistencias características —objeto inicial único de la investigación—, hasta algunos biomateriales, pasando por una representativa selección de materiales metálicos —incluyendo el modelado del efecto Portevin-Le Chatelier— y por algunos polímeros sintéticos como los plásticos y las gomas, por lo que la ecuación propuesta puede considerarse un paso adelante hacia una ecuación tensión-deformación de carácter universal.

## 5.2 Líneas de investigación abiertas

La posibilidad de que los resultados de la presente investigación conduzcan a un nuevo paradigma en el estudio de las curvas tensión-deformación de los materiales, nos produce la sensación de que *todo queda por hacer*, en el sentido de reiniciar el estudio de los ensayos de tensión uniaxial de todo tipo de materiales bajo la óptica de dotar de significado físico a cada uno de los parámetros que integran la ecuación propuesta en esta tesis.

En concreto, se vislumbran las siguientes líneas de investigación que quedan abiertas a la luz de los resultados expuestos en las conclusiones:

1. En 3.4.3, se propone que los parámetros de la ec. 129 —o, equivalentemente, de la ec. 130— deben depender de las características de los materiales, de la forma y tamaño de las probetas usadas para ensayarlos, de la temperatura y de las máquinas y métodos de ensayo, por lo que, desde un primer momento parece evidente la necesidad de investigar dichos parámetros aisladamente al variar, continua y progresivamente, tanto las características de los materiales como el resto de variables citadas —temperatura, forma y tamaño de las probetas, métodos de ensayo, etc.— con un objetivo básicamente *caracterizador*.
2. Aunque la resistencia del hormigón colocado en obra es una variable aleatoria con función de distribución, en general, desconocida, la EHE-08 admite que, en bastantes casos, puede suponerse que los valores de las resistencias que alcanzan las probetas de hormigón se distribuirán en forma Gaussiana, por lo que el cuantil del 5 por 100 vendría dado por:

$$f_{ck} = \bar{f}'_c(1 - 1.645\sigma)$$

donde  $\bar{f}'_c$  es la media de las resistencias máximas alcanzadas por las probetas de hormigón en un ensayo a compresión normalizado y  $\sigma$  es el valor de la desviación típica correspondiente a la producción del tipo de hormigón suministrado. Así pues, la EHE-08 centra su interés en la mayor o menor dispersión de la resistencia alcanzada por un conjunto de  $N$  probetas ensayadas.

Dado que en la ecuación propuesta para hormigones ensayados con tasa de aumento de la tensión constante (ec. 122), el término:

$$e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m}$$

representa la evolución del daño de las partículas de hormigón al aumentar la deformación, donde  $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m$  fue definido en 3.1.1 como el *riesgo de rotura*, si limitamos dicho riesgo a 0.05, estaremos, de alguna manera, proponiendo un coeficiente de seguridad basado en las características que definen al material que se está ensayando realmente, y no en la mayor o menor dispersión que presenta la planta que lo fabrica. Introduciendo esta limitación en la ec. 122, después de un poco de álgebra, se obtiene:

$$f_{ck} = 0.95C\varepsilon_0^n(-\ln 0.95)^{\frac{n}{m}}$$

Que, comparada con la resistencia máxima — $f'_c$ —, ofrece el siguiente coeficiente de seguridad para el material:

$$\gamma_c = \frac{f'_c}{f_{ck}} \Rightarrow f_{ck} = \frac{f'_c}{\gamma_c}$$

coeficiente que variará, ahora, en función de las características del material, es decir, de su *fiabilidad* como material estructural. La verificación experimental de estos planteamientos constituye esta línea abierta de investigación.

3. *Mutatis mutandis* si, como acabamos de ver, el término  $e^{-\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m}$  representa la evolución de un daño permanente e irrecuperable en el material y el *módulo de elasticidad práctico* se define como la pendiente de la recta que pasa por el origen y por el punto de la curva que representa una deformación plástica permanente —no recuperable— del 0.2%, otra línea abierta estará constituida por la investigación de dicho módulo de elasticidad convencional o práctico en términos propios de las características del material concreto y de su función de daño, en vez de fijarlo en el 0.2% para todos los materiales, como se hace habitualmente.
4. En el artículo de 2002 de Liang y Wu [127] se ofrece una elucidación teórica sobre el origen de la fórmula empírica que relaciona la tensión máxima obtenida en un ensayo de compresión de una probeta de hormigón y la velocidad de propagación de los impulsos mecánicos ultrasónicos a través de dicha probeta. Esta ecuación, que toma la forma:

$$f'_c = Ke^{\beta v} \quad (158)$$

donde  $v$  es la velocidad de transmisión de los citados impulsos y  $K$  y  $\beta$  son parámetros del tipo de material, ha sido comprobada por el autor en sendas campañas experimentales realizadas entre 2008 y 2009 en las que se ensayaron a compresión y se midió la velocidad de transmisión de los impulsos mecánicos ultrasónicos un total de 79 probetas de hormigón realizadas con distintos tipos de cemento y distintas dosificaciones.

Dado que la ec. 122 presenta un máximo cuando  $\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m}}$ , la tensión máxima que arroja dicha ecuación responde a la siguiente expresión matemática:

$$f'_c = \frac{C\varepsilon_0^n \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m}}}{e\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m}}}$$

que, igualada con la fórmula empírica de la ec. 158, resulta:

$$v = \frac{n}{\beta m} \left[ \ln \left( \frac{C}{K} \frac{n}{m} \varepsilon_0^n - 1 \right) \right]$$

Queda pues abierta la línea de investigación de verificación experimental de esta expresión, así como la del estudio de la fórmula empírica de la ec. 158 a la luz del nuevo enfoque propuesto.

5. Por último, y sin que esta relación tenga, en absoluto, carácter excluyente, señalaremos la línea que se abre —ciertamente más a largo plazo— al considerar los resultados parciales obtenidos en 3.5.3, que ponen de manifiesto las relaciones encontradas entre los postulados III y V de la mecánica cuántica y la extensión a los números reales del exponente  $m$  en la ecuación:

$$F(t) = \exp \left[ - \left( \frac{t - t_a}{t_0} \right)^m \right]$$

que pudiera conducir, por un lado, como señala Peter Mittelstaedt [128] a una *relajación* de dichos postulados mediante la introducción del propio hecho de medir y de los aparatos necesarios para efectuar dichas mediciones en la propia teoría, enfoque que resume con la siguiente frase:

*Quantum mechanics describes the external, material reality as it appears if we investigate it by means of measuring apparatuses that are, on their part, physical objects and subject to the laws of quantum mechanics*<sup>1</sup>.

y, por otro, como propone Elliott Tammara [129], hacia una mecánica *ni clásica ni cuántica* —NCQ<sup>2</sup>— que diferiría tanto de una como de la otra pero, al mismo tiempo, exhibiría características de ambas y que posibilitaría reproducir resultados cuánticos en experimentos que tienen límites clásicos bien definidos.

---

<sup>1</sup>*La mecánica cuántica describe la realidad material externa tal y como se muestra si la investigamos por medio de aparatos de medida que son, a su vez, objetos físicos sujetos a las leyes de la mecánica cuántica.*

<sup>2</sup>*Non-classical, non-quantum.*

## REFERENCIAS

1. Kurrer, K.-E. The History of the Theory of Structures. From Arch Analysis to Computational Mechanics (Ernst & Sohn, Berlin, 2008).
2. Bach, J. C. v. Elasticität und Festigkeit (Julius Springer, Berlin, 1899).
3. Bach, J. C. v. “Versuche über die Elastizität von Beton”, *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieures*, v. 39, pp. 489 y ss. (1895).
4. Bach, J. C. v. “Versuche über die Elastizität und Druckfestigkeit von Körpern aus Zement, Zementmörtel und Beton”, *Z. des VDI*, v. 40, pp. 1381 y ss. (1896).
5. Bach, J. C. v. “Untersuchungen von Granit in Bezug auf Zug-, Druck-, Biegungs- und Schubfestigkeit, sowie in Hinsicht auf Zug-, Druck- und Biegeelastizität. Allgemeines Gesetz der elastischen Dehnungen”, *Z. des VDI*, v. 41, pp. 248 y ss. (1897).
6. Bach, J. C. v. “Versuche über das Arbeitsvermögen und die Elastizität von Gußeisen mit hoher Zugfestigkeit”, *Z. des VDI*, v. 44, pp. 409 y ss. (1900).
7. Bach, J. C. v. “Zur Frage der Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen bei Sandstein”, *Z. des VDI*, v. 44, pp. 1169 y ss. (1900).
8. Simonnet, C. Hormigón. Historia de un Material (Nerea, San Sebastián, 2009).
9. Mörsch, E. Der Eisenbetonbau, seine Anwendung und Theorie (Wayss & Freytag, Stuttgart, 1902) (edición estadounidense: Concrete-Steel Construction, The Engineering News Publishing Company, New York, 1910) (edición española: La Construcción en Hormigón Armado: su Teoría y Práctica, INTEMAC, Madrid, 1996).
10. Sangha, C. M. y Dhir, R. K. “Strength and complete stress-strain relationships for concrete tested in uniaxial compression under different test conditions”, *Matériaux et Constructions*, v. 5, no. 30, pp. 361-369 (1972).
11. Comité Técnico AEN/CTN 83 *Hormigón*. UNE-EN 12390-1 Ensayos de hormigón endurecido. Parte 1: Forma, medida y otras características de las probetas y moldes. AENOR (2001).

12. Comité Técnico AEN/CTN 83 *Hormigón*. UNE-EN 12390-2 Ensayos de hormigón endurecido. Parte 2: Fabricación y curado de probetas para ensayos de resistencia. AENOR (2009).
13. Comité Técnico AEN/CTN 83 *Hormigón*. UNE-EN 12390-3 Ensayos de hormigón endurecido. Parte 3: Determinación de la resistencia a compresión de probetas. AENOR (2009).
14. Comité Técnico AEN/CTN 83 *Hormigón*. UNE-EN 12390-4 Ensayos de hormigón endurecido. Parte 4: Resistencia a compresión. Características de las máquinas de ensayo. AENOR (2001).
15. Rowe, G. W. *An Introduction to the Principles of Metalworking* (Edward Arnold Ltd., Londres, 1965) (edición española: Conformado de los Metales, Urmo, Bilbao, 1972).
16. Comité Técnico AEN/CTN 7 *Ensayos de materiales*. UNE-EN ISO 6892-1 Materiales metálicos. Ensayos de tracción. Parte 1: Método de ensayo a temperatura ambiente. AENOR (2010).
17. Comité Técnico AEN/CTN 36 *Siderurgia*. UNE-EN ISO 377 Acero y productos de acero. Localización y preparación de muestras y probetas para ensayos mecánicos. AENOR (1998).
18. Comité Técnico AEN/CTN 36 *Siderurgia*. UNE-EN ISO 2566-1 Acero. Conversión de valores de alargamiento. Parte 1: Aceros al carbono o débilmente aleados. AENOR (2000).
19. Comité Técnico AEN/CTN 36 *Siderurgia*. UNE-EN ISO 2566-2 Acero. Conversión de valores de alargamiento. Parte 2: Aceros austeníticos. AENOR (2000).
20. Comité Técnico AEN/CTN 7 *Ensayos de materiales*. UNE-EN ISO 7500-1 Materiales metálicos. Verificación de máquinas de ensayo uniaxiales estáticos. Parte 1: Máquinas de ensayo de tracción/compresión. Verificación y calibración del sistema de medida de la fuerza. AENOR (2006).
21. Portevin, A. y Le-Chatelier, F. “Comptes sur un phénomène observé lors de l’essai de traction d’alliages en cours de transformation”. *Comptes rendues de l’Academie des Sciences*, 176, pp. 507-510 (1923).
22. Estrin, Y. y Kubin, L. P. “Plastic instabilities: clasification and physical mechanisms”. *Res Mechanica*, 23, pp. 197-221 (1998).
23. Comisión Permanente del Hormigón. EHE-08: Instrucción de hormigón estructural (Centro de Publicaciones de la Secretaría General Técnica del Ministerio de Fomento, 4ª Ed., Madrid, 2010).
24. Comisión Permanente del Cemento. RC-08: Instrucción para la recepción de cementos (Centro de Publicaciones de la Secretaría General Técnica del Ministerio de Fomento, 2ª Ed., Madrid, 2009).

25. Comité Técnico AEN/CTN 146 *Áridos*. UNE 146901 Áridos. Designación. AENOR (2008).
26. Hooke, R. Lectures De potentia restitutiva or Of spring; explaining the power of springing bodies (John Martin, London, 1678).
27. Kuczynski, G. C. Young's modulus as a function of wire diameter. *Nature* 165, pp. 562-563 (1950).
28. Treacy, M. M. J., Ebbesen, T. W. y Gibson, J. M. Exceptionally high Young's modulus observed for individual carbon nanotubes. *Nature* 381, pp. 678-680 (1996).
29. Buehler, M. J., Abraham, F. F. y Gao, H. Hyperelasticity governs dynamic fracture at a critical length scale. *Nature* 426, pp. 141-146 (2003).
30. Young, T. A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts. (Taylor and Walton, London, 1845).
31. Walker, S. Modulus of elasticity of concrete. *Proceedings of the American Society for Testing Materials* XIX, Part II (1923).
32. Popovics, S. y Erdey, M. A. R. Estimation of the modulus of elasticity of concrete-like composite materials. *Matériaux et Constructions*, v. 3, no. 16, pp. 253-260 (1970).
33. Sena, G. S. y Pazini, E. Static modulus of elasticity of concrete by the ultrasonic method. *Mater. Construcc.* v. 53, no. 271-272, pp. 47-58 (2003).
34. Rosshändler, J. Die Basler Baukatastrophe u. Hennebique. *Basler Nachrichten* de 1 de septiembre de 1901, en Schindler, Y. V. Und Beton revolutionierte den Brückenbau gewaltig. *Kunst and Architektur*, v. 46, pp. 181-189 (1995).
35. Ritter, K. W. Die Bauweise Hennebique. *Schweizerische Bauzeitung*. v. XXXIII, no. 7, pp. 59-61 (1899).
36. Popovics, S. A review of stress-strain relationships for concrete. *ACI Journal Proceedings*, v. 67, no. 3, pp. 243-248 (1970).
37. Smith, G. M. y Young, L. E. Ultimate theory by exponential function. *ACI Journal Proceedings*, v. 52, no. 11, pp. 349-359 (1955).
38. Smith, G. M. y Young, L. E. Ultimate flexural analysis on stress-strain curves for cylinders. *ACI Journal Proceedings*, v. 53, no. 12, pp. 597-609 (1956).
39. Yip, W. K. Generic form of stress-strain equations for concrete. *Cement and Concrete Research*, v. 28, no. 4, pp. 499-508 (1997).
40. Sturman, G. M., Shah, S. P. y Winter, G. Effects of flexural strain gradients on microcracking and stress-strain behavior of concrete. *ACI Journal Proceedings*, v. 62, no. 7, pp. 805-822 (1965)

41. Desayi, P. y Krishnan, S. Equation for the stress-strain curve of concrete. *ACI Journal Proceedings*, v. 61, no. 3, pp. 345-350 (1964).
42. Saenz, L. P. Discussion of "Equation for the stress-strain curve of concrete" by P. Desayi and S. Krishnan. *ACI Journal Proceedings*, v. 61, no. 9, pp. 1229-1235 (1964).
43. Tulin, L. G. y Gerstle, K. H. Discussion of "Equation for the stress-strain curve of concrete" by P. Desayi and S. Krishnan. *ACI Journal Proceedings*, v. 61, no. 9, pp. 1236-1238 (1964).
44. Popovics, S. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research*, v. 3, no. 5, pp. 583-599 (1973).
45. Carreira, D. J. y Chu, K.-H. Stress-strain Relationship for plain concrete in compression. *ACI Journal Proceedings*, v. 82, no. 6, pp. 797-804 (1985).
46. Alexander, S. A single equation for the stress-strain curve of concrete. *Indian Concrete Journal*, v. 39, no. 7, pp. 247-277 (1965).
47. Tsai, W. T. Uniaxial compressional stress-strain relation of concrete. *Journal of Structural Engineering*, v. 14, no. 9, pp. 2133-2136 (1988).
48. Sargin, M. Stress-strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections (Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, 1971).
49. Wang, P. T., Shah, S. P. y Naaman, A. E. Stress-strain curves of normal and lightweight concrete in compression. *ACI Journal Proceedings*, v. 75, no. 11, pp. 603-611 (1978).
50. Kachanov, L. M. On the time to rupture under creep conditions. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Otd. Tekhn. Nauk.* v. 8, pp. 26-31 (1958).
51. Rabotnov, Y. N. A mechanism of a long time failure, in Creep Problems in Structural Members (USSR Academy of Sci. Publ., Moscow, 1959).
52. Janson, J. y Hult, J. Fracture mechanics and damage mechanics: a combined approach. *J. de Mecanique Appliquee* v. 1, no. 1, pp. 69-84 (1977).
53. Krajcinovic, D. y Fonseca, G. U. The continuous damage theory of brittle materials. Part. I: general theory. *J. Appl. Mech.* v. 48, pp. 809-815 (1981).
54. Lemaitre, J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J. Eng. Mater. Technol.*, v. 107, no. 1, pp. 83-89 (1985).
55. Mazars, J. y Pijaudier-Cabot, G. Continuum damage theory-Application to concrete. *J. Eng. Mech.*, v. 115, pp. 345-365 (1989).
56. Shah, S. P. y Winter, G. Inelastic behavior and fracture of concrete. *ACI Journal Proceedings*, v. 63, no. 9, pp. 925-930 (1966).

57. Weibull, W. A statistical theory of the strength of materials. *Ingeniors Vetenskaps Akademiem*, v. 151, pp. 1-45 (1939).
58. Weibull, W. A statistical distribution function of wide applicability. *J. Appl. Mech.- Trans. ASME*, v. 18, no. 3, pp. 293-297 (1951).
59. Blechman, I. Stage model of stress-strain relationship for concrete under short-term load. Part 1: Ascending branch. *Cement and Concrete Research*, v. 18, pp. 863-873 (1988).
60. Blechman, I. Stage model of stress-strain relationship for concrete under short-term load. Part 2: Nature of concrete atrophy. *Cement and Concrete Research*, v. 19, pp. 7-15 (1989).
61. Blechman, I. Stage model of stress-strain relationship for concrete under short-term load. Part 3: Descending branch. *Cement and Concrete Research*, v. 19, pp. 203-215 (1988).
62. Collins, M. P., Mitchell, D. y MacGregor, J. G. Structural design considerations for high-strength concrete. *Concrete International: Design and Construction*, v. 15, no. 5, pp. 27-34 (1993).
63. Tasnimi, A. A. Mathematical model for complete stress-strain curve prediction of normal, light-weight and high-strength concretes. *Magazine of concrete Research*, v. 56, no. 1, pp. 23-34 (2004).
64. Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code for Concrete Structures (CEB, Lausana, 1978).
65. Shehata, I. A. E. M., Shehata, L. C. D. y Mattos, T. S. Stress-strain curve for the design of high-strength concrete elements. *Materials and Structures*, v. 33, pp. 411-418 (2000).
66. Comité Técnico AEN/CTN 140 *Eurocódigos Estructurales*. UNE-EN 1992-1-1:2010 Eurocódigo 2: Proyecto de estructuras de hormigón. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación. AENOR (2010).
67. Comité Técnico AEN/CTN 140 *Eurocódigos Estructurales*. UNE-EN 1992-1-1:2010 ERRATUM:2011 Eurocódigo 2: Proyecto de estructuras de hormigón. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación. AENOR (2011).
68. Comité Euro-International du Béton. CEB-FIP Model Code 90 (Thomas Telford, Londres, 1991).
69. Sargin, M. y Handa, V. A general formulation for the stress-strain properties of concrete. University of Waterloo, Solid Mechanics Division, Report no. 3, pp. 1-27 (1969)
70. CEB Working Group on HSC/HPC. High performance concrete, Recommended Extensions to the MC 90 Research Needs. *Bulletin d'Information CEB*, no. 228 (1995).

71. Van Gysel, A. y Taerwe, L. Analytical formulation of the complete stress-strain curve for high strength concrete. *Materials and Structures*, v. 29, pp. 529-533 (1996).
72. CEB-FIP. Model Code 2010 - First complete draft. Volume 1. *fib Bulletin*, no. 55 (2010).
73. CEB-FIP. Model Code 2010 - First complete draft. Volume 2. *fib Bulletin*, no. 56 (2010).
74. Attard, M. M. y Setunge, S. Stress-strain relationship of confined and unconfined concrete. *ACI Materials Journal*, v. 93, no. 5, pp. 432-442 (1996).
75. Griffith, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society, A*, v. 221, pp. 163-198 (1921).
76. Smekal, A. Bruchtheorie spröder körper. *Zeitschrift Für Physik a Hadrons and Nuclei*, v. 103, nos. 7-8, pp. 495-525 (1936).
77. Taylor, G. I. The mechanism of plastic deformation of crystals. Part I. Theoretical. *Proceedings of the Royal Society of London, A*, v. CXLV, pp. 362-387 (1934).
78. Taylor, G. I. The mechanism of plastic deformation of crystals. Part II. Comparison with observation. *Proceedings of the Royal Society of London, A*, v. CXLV, pp. 388-404 (1934).
79. Taylor, G. I. A theory of the plasticity of crystals. *Zeitschrift für Kristallographie, A*, v. LXXXIX, pp. 375-385 (1934).
80. Fréchet, M. Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann. Soc. Polonaise de Math.*, no. 6, pp. 93-116 (1927).
81. Fisher, R. A. y Tippett, L. H. C. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest members of a sample. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, no. 24, pp. 180-190 (1928).
82. Gnedenko, B. V. Sur la distribution limité du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.*, no. 44, pp. 423-453 (1943).
83. Gumbel, E. J. Applied Mathematics Series 33. Statistical Theory of Extreme Values and some Practical Application (U. S. Department of Commerce. National Bureau of Standards, Washington DC, 1954).
84. Lacroix, S. F. Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral (2<sup>a</sup> Ed., Courcier, Paris, 1819).
85. Liouville, J. Mémoire sur quelques question de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour resoudre ces questions. *Journal de l'École Polytechnique*. v. 13, no. 21, pp. 1-69 (1832).

86. Caputo, M. Linear models of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, v. 13, no. 5, pp. 529-539 (1967).
87. Grünwald, A. K. Über "begrenzte" derivationen und deren anwendung. *Z. Angew. Math. Phys.*, v.12, pp. 441-480 (1867).
88. Letnikov, A. V. Theory of differentiation with an arbitrary index. *Mathematics Sbornik*, v. 3, pp. 1-66 (1868).
89. Malinin, N. N. Applied Theory of Plasticity and Creep (Mashinostroenie, Moscú, 1975).
90. Sobotka, Z. Rheology of Materials and Construction (Academia, Praga, 1981).
91. Blair, G. W. S. Limitations of the Newtonian time scale in relation to non-equilibrium rheological states and a theory of quasi-properties. *Proceedings of the Royal Society of London, A*, v. 189, no. 1016, pp.69-87, 1947.
92. Blair, G. W. S. The role of psychophysics in rheology, *J. of Colloid Sciences*, v. 2, pp. 21-32, 1947.
93. Gerasimov, A. N. A generalization of linear laws of deformation and its application to inner friction problems. *Prikl. Mat. Mekh.*, v. 12, pp. 251-259, 1948.
94. Slonimsky, G. L. On the law of deformation of highly elastic polymeric bodies, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, v. 140, no. 2, pp. 343-346, 1961.
95. Nutting, P. G. A new general law of deformation. *Journal of the Franklin Institute*, v. 191, pp. 679-685, 1921.
96. Nonnennacher, T. F. Fractional relaxation equations for viscoelasticity and related phenomena. *Lect. Notes in Physics*, v. 381, pp. 309-320, 1991.
97. Yip, W. K., Kong, F. K., Chan, K. S. y Lim, M. K. A statistical model of micro-cracking of concrete under uniaxial compression. *Theoretical and applied fracture mechanics*, v. 22, pp. 17-17, 1995.
98. Yip, W. K. New damage variable in failure analysis of concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 8, no. 4, pp. 184-188, 1996.
99. Sih, G. C. Mechanics of Fracture Initiation and Propagation: Surface and volume energy density applied as failure criterion (Springer-Verlag, Nueva York, 1991).
100. Basu, B., Tiwari, D., Kundu, D. y Prasad, R. Is the Weibull distribution the most appropriate statistical strength distribution for brittle materials? *Ceramics International*, v. 35, no. 1, pp. 237-246 (2009).
101. Gupta, R. D. y Kundu, D. Generalized exponential distributions. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, v. 41, no. 2, pp. 173-188 (1999).

102. Kato, B. Aoki, H. y Yamanouchi, H. Standardized mathematical expression for stress-strain relations of structural steel under monotonic and uniaxial tension loading. *Materials and Structures*, v. 23, pp. 47-58 (1990).
103. Gordon, J. E. Estructuras o por qué las cosas no se caen (Calamar Ediciones, Madrid, 2004.)
104. Strutt, J. W. (Barón Rayleigh). The Theory of Sound. Volume 1 (Macmillan, Londres, 1877).
105. Schürmann, T. y Hoffmann, I. A closer look at the uncertainty relation of position and momentum. *Foundations of Physics*, v. 38, no. 8, pp. 958-963 (2009).
106. Russell, B. The Problems of Philosophy (Oxford University Press, Londres, 1912).
107. Nabarro, F. R. N., Basinski, Z. S. y Holt, D. B. The plasticity of pure single crystals. *Adv. Phys.* v. 13, no. 50, pp. 193-323 (1964).
108. Kocks, U. F. y Mecking, H. Physics and phenomenology of strain hardening: the FCC case. *Prog. Mater. Sci.* v. 48, no. 3, pp. 171-273 (2003).
109. Ludwik, P. Elemente der Technologischen Mechanik (Julius Springer, Berlin, 1909).
110. Hollomon, J. H. *Trans. AIME*, v. 162, p. 268 (1945).
111. Ramberg, W. y Osgood, W. R. Description of stress-strain curves by three parameters. *Technical Note No. 902*, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington D. C. (1943).
112. Voce, E. *J. Inst. Met.* v. 74, pp. 537-562 (1948).
113. Richard, R. M. y Abbott, B. J. Versatile elastic-plastic stress-strain formula. *J. Eng. Mech.* ASCE, v. 101, pp. 511-515 (1975).
114. Poh, K. W. General stress-strain equation. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v. 9, no. 4, pp. 214-217 (1997).
115. Chinh, N. Q., Horváth, G., Horita, Z. y Langdon, T. G. A new constitutive relationship for the homogeneous deformation of metals over a wide range of strain. *Acta Materialia*, v. 52, no. 12, pp. 3555-3563 (2004).
116. <http://www.hoffdad.net/physics/materialscience/index.html>.
117. <http://mtil.illinois.edu/DATA/Courses/Fall%202011>.
118. Zhang, S., McCormick, P. G. y Estrin, Y. The morphology of Portevin-Le Chatelier bands. *Acta Materialia*, v. 49, pp. 1087-1094 (2001).
119. Bertram, A., Böhlke, T., Brüggemann, C., Estrin, Y. y Lebyodkin, M. Modeling and simulation of the Portevin-Le Chatelier effect. *Proc. Appl. Math. Mech.*, v. 6, pp. 353-354 (2006).

120. Deryugin, Y. Y., Lasko, G. V. y Schumander, S. Modelling of mesomechanics of Portevin-Le Chatelier effect by Relaxation Element Method. *Proc. of ICCES'07*, pp. 1707-1713 (2007).
121. Zhang, W., Chen, X., Yang, T. y Wang, B. Modeling on strain softening and Portevin-Le Chatelier effect in crystalline materials based on mesoplasticity. *Journal of Pressure Equipmet and Systems*, v. 6, pp. 83-87 (2008).
122. <http://www.plasticstoday.com/imm/articles/design-fea-failure>.
123. <http://www.campusplastics.com/campus/es/datasheet/Elastollan®+C+95+A/BASF+Polyurethanes+GmbH/59/5750d793>.
124. Wang, J. H.-C. Mechanobiology of tendon. *Journal of Biomechanics*, v. 39, pp. 1563-1582 (2006).
125. Amaral, L. Q. Mechanical analysis of infant carrying in hominoids. *Naturwissenschaften*, v. 95, pp. 281-292 (2008).
126. Neumann, J. v. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, Berlin, 1932).
127. Liang, M. T. y Wu, J. Theoretical elucidation on the empirical formulae for the ultrasonic testing method for concrete structures. *Cement and Concrete Research*, v. 32, no. 11, pp. 1763-1769 (2002).
128. Mittelstaedt, P. The problem of interpretation of modern physics. *Foundations of Physics*, v. 41, no. 11, pp. 1667-1676 (2011).
129. Tammaro, E. Mechanics: non-classical, non-quantum. *Foundations of Physics*, DOI: 10.1007/s10701-011-9602-z (2011).