



Conocimiento especializado evidenciado en el uso de ejemplos: la variación en la enseñanza de la función cuadrática

Specialized Knowledge Evidenced Through the Use of Examples: Variation in the Teaching of the Quadratic Function

Nicolás Sánchez Acevedo

Facultad de Educación, Universidad Central de Chile, Santiago, Chile

nicolas.sanchez@ucentral.cl

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-8790-2919>

Carlos Segura Cordero

Departamento de Didáctica de la Matemática,

Universitat de València, Valencia, España

carlos.segura@uv.es

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1457-5740>

Luis Carlos Contreras

Departamento de Didácticas integradas, Facultad de Educación, Psicología y Ciencias del Deporte, Universidad de Huelva, Huelva, España.

lcarlos@uhu.es

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0044-2365>

Leticia Sosa Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas,

Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México

lsosa@uaz.edu.mx

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4905-6684>

RESUMEN • Este estudio analiza el conocimiento especializado que moviliza una maestra de matemáticas de 3.º medio (16 a 17 años) al usar ejemplos para enseñar la función cuadrática. Mediante un estudio de caso, examinamos cuatro secuencias de ejemplos seleccionadas por la maestra, identificando el conocimiento emergente al tratar conceptos de la función desde la perspectiva de la variación. Los resultados muestran que dichas secuencias permiten distinguir aspectos críticos y no críticos de la concavidad, dilatación y traslación, y evidencian una articulación entre el conocimiento matemático y didáctico, a nivel tanto interdominio como intradominio. Se concluye que el conocimiento didáctico del contenido se apoya en el matemático y que la selección intencionada de ejemplos, guiada por la teoría de la variación, favorece el aprendizaje de los estudiantes sobre la función cuadrática.

PALABRAS CLAVE: Conocimiento especializado; Profesora de Matemáticas; Teoría de la variación; Ejemplos; Función cuadrática.

ABSTRACT • This study analyzes the specialized knowledge mobilized by a secondary school mathematics teacher (with 11th-grade students aged 16–17) when using examples to teach the quadratic function. Using a case study approach, four sequences of examples selected by the teacher are examined in order to identify the knowledge that emerges when concepts of the function are addressed from a variation perspective. The results show that these sequences make it possible to distinguish critical and non-critical aspects of concavity, dilation, and translation, and they reveal an articulation between mathematical and pedagogical knowledge at both inter-domain and intra-domain levels. It is concluded that pedagogical content knowledge is grounded in mathematical knowledge and that the intentional selection of examples, guided by variation theory, supports students' learning of the quadratic function.

KEYWORDS: Specialized knowledge, Mathematics teacher, Variation theory, Examples, Quadratic function.

Recepción: mayo 2025 • Aceptación: noviembre 2025 • Publicación: marzo 2026

Sánchez Acevedo, N., Segura Cordero, C., Contreras, L. C. y Sosa Guerrero, L. (2026). Conocimiento especializado evidenciado en el uso de ejemplos: la variación en la enseñanza de la función cuadrática. *Enseñanza de las Ciencias*, 44(1), 45-65.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6482>

INTRODUCCIÓN

El conocimiento del profesorado de matemáticas es un factor relevante en el aprendizaje de los estudiantes (Ball et al., 2005). Shulman (1986), en sus trabajos seminales, señaló que al transformar el conocimiento disciplinar, el conocimiento didáctico del profesor se plasma en representaciones, analogías, metáforas, demostraciones, reformulaciones y ejemplos necesarios para la comprensión de los estudiantes. Así, destacó la importancia de los ejemplos para la enseñanza y el aprendizaje del contenido como una forma de comunicación que hace el conocimiento matemático comprensible a otros.

En las últimas décadas se ha generado investigación en relación con el aprendizaje a partir de ejemplos (Sánchez-Acevedo et al., 2024), emergiendo como un factor central en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Zaslavsky, 2019). En particular, se ha evidenciado que la selección y uso deliberado de secuencias de ejemplos orienta el aprendizaje de conceptos y procedimientos de manera consciente (Figueiredo et al., 2012).

Diversas investigaciones han mostrado que la función cuadrática constituye un contenido central en la educación secundaria por su potencial para articular ideas de variación, cambio y modelización de fenómenos reales (Karakoç y Alacacı, 2015; Pinkernell, 2015). En el currículum chileno (MINEDUC, 2015), su enseñanza se orienta al desarrollo de habilidades de análisis, representación y conexión entre formas algebraicas y gráficas, articulando la aritmética, el álgebra y la geometría. Sin embargo, estudios han evidenciado dificultades persistentes tanto en estudiantes como en profesores para interpretar los parámetros de la función, reconocer sus invariantes y transitar entre registros de representación (López et al., 2016; Díaz y Flores, 2022), lo que refuerza la necesidad de indagar en cómo el conocimiento del profesor influye en la comprensión de este objeto matemático.

Desde esta perspectiva, el conocimiento del profesor se torna un factor clave para orientar la enseñanza de la función cuadrática mediante ejemplos, destacando sus propiedades estructurales. Investigaciones han mostrado que la selección y uso de ejemplos constituye un componente del conocimiento especializado movilizado en la enseñanza (Zodik y Zaslavsky, 2008; Chick y Harris, 2007), pues permite resaltar los aspectos críticos de un concepto. No obstante, son escasos los estudios que exploran cómo los profesores de secundaria articulan su conocimiento matemático y didáctico al enseñar la función cuadrática mediante secuencias de ejemplos que promuevan la variación y la generalización (Cayo et al., 2023). Profundizar en este proceso permite comprender cómo el conocimiento especializado del profesor se manifiesta en la práctica en torno a un contenido curricular de alta relevancia.

Se ha mostrado que las secuencias de ejemplos, en comparación con ejemplos individuales, producen un mayor efecto en el aprendizaje del aspecto que se busca resaltar de un objeto matemático. La combinación de ejemplos y no ejemplos permite centrar la atención en aspectos críticos relevantes del objeto de aprendizaje (Kullberg y Runesson, 2015; Kullberg y Skodras, 2018). Si bien los profesores suelen seleccionar ejemplos sin una secuenciación consciente, esta elección puede describirse mediante patrones de variación e invariancia (Watson y Mason, 2006), que actúan de forma conjunta para mostrar los elementos críticos que deben ser experimentados por los estudiantes (Marton y Pang, 2006).

Diversos estudios han abordado la variación a partir del uso de ejemplos en la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria (por ejemplo, Kullberg et al., 2017). Adler y Pournara (2020) encontraron que coordinar la selección y uso de ejemplos con la variación genera oportunidades para que los maestros construyan, critiquen y revisen ejemplos, promoviendo coherencia entre el objeto de aprendizaje y las oportunidades de generalización de los estudiantes. Björklund et al. (2021) mostraron cómo la capacidad de discernimiento mediante ejemplos centrados en distintas percepciones de número permite explicar estrategias de resolución de problemas previamente no comprendidas. Mårtensson y Ekdahl (2021) desarrollaron un trabajo con 30 futuros maestros suecos mediante investigación-acción orientada al desarrollo del pensamiento y razonamiento matemático. A partir de la teoría de la variación, los profesores planificaron, implementaron y revisaron ciclos de enseñanza en

temas como medición, magnitudes, geometría y números, evidenciando que la integración entre teoría y práctica promovió un conocimiento matemático contextualizado sobre la enseñanza y aprendizaje de estos temas.

Sin embargo, poco se ha explorado la relación entre el conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria y la selección de ejemplos con variación (Adler y Pournara, 2020; Cayo, 2023). Por ejemplo, Cayo et al. (2023) exploraron el conocimiento especializado movilizado por un profesor en la selección y uso de ejemplos para enseñar sucesiones, evidenciando distintos subdominios implicados en la ejemplificación y sus interconexiones. Sus resultados muestran que la selección y uso de ejemplos activan conocimientos matemáticos y didácticos diversos, los cuales se articulan favoreciendo la comprensión de los estudiantes. A pesar de los avances, los estudios siguen siendo escasos respecto de la función cuadrática (Sánchez-Acevedo, 2025).

En este sentido, resulta necesario explorar la relación entre el conocimiento del profesor de matemáticas y la selección y uso de ejemplos con variación focalizados en la función cuadrática, dada su relevancia curricular y las múltiples conexiones con contextos reales (Karakoç y Alacacı, 2015).

Sobre esta base, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento especializado manifiesta una profesora de matemáticas cuando usa ejemplos en la enseñanza de la función cuadrática, considerando aspectos de la variación?

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En este trabajo, consideramos la integración de perspectivas teóricas que, de acuerdo con Wedege (2010), sirve como un filtro para observar el contexto apoyados en principios teóricos y con consecuencias en la construcción de una línea de estudio y de problemas emergentes de investigación. En primer lugar, nos apoyamos en el conocimiento especializado manifestado por la profesora (Carrillo et al., 2018) y, en segundo lugar, en los aspectos de la variación con ejemplos (Kullberg et al., 2017; Marton y Booth, 1997). A continuación, desarrollaremos estos aspectos teóricos.

El modelo MTSK

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, de sus siglas en inglés, Carrillo et al., 2018) es un modelo analítico que dota de especificidad al conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática (figura 1). Carrillo et al. (2018) consideran la especialización del conocimiento como eje central y articulador entre la matemática y la didáctica, con foco en la enseñanza.

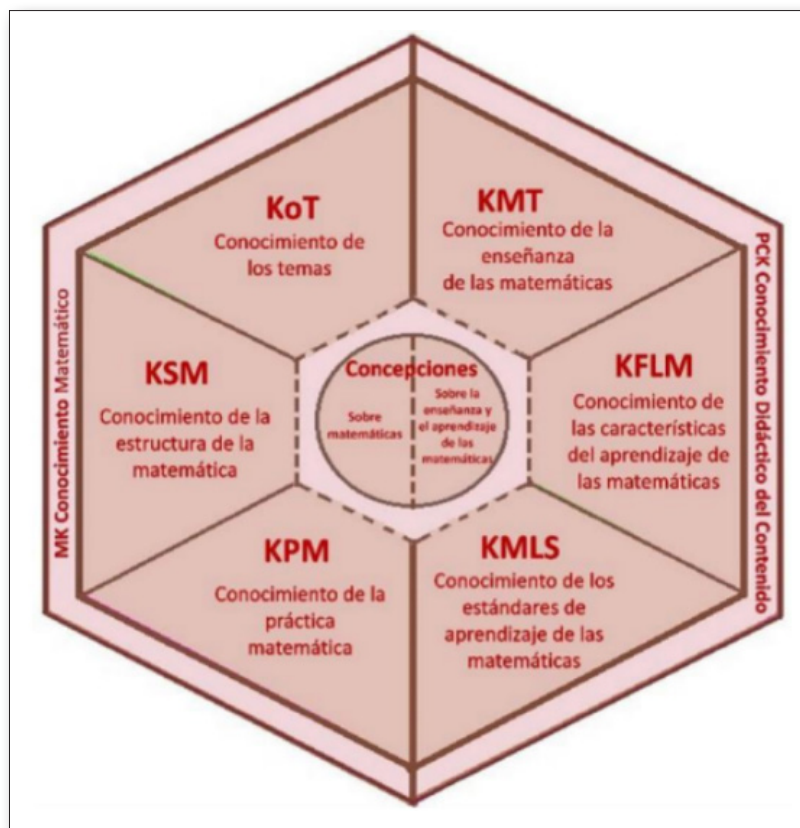


Fig. 1. Modelo MTSK (Carrillo et al., 2018).

Este modelo considera tres dominios: el conocimiento matemático (MK), el conocimiento didáctico del contenido (PCK) y las creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, que influyen en cómo se construye y aplica el conocimiento docente.

Dentro del dominio MK se distinguen tres subdominios:

- **KoT (conocimiento de los temas)**: comprende los contenidos matemáticos que deben aprender los estudiantes, sus definiciones, propiedades, aplicaciones y formas de representación.
- **KSM (conocimiento de la estructura de las matemáticas)**: hace referencia a las conexiones entre conceptos matemáticos, considerando su complejidad y la relación entre ideas previas y nuevas.
- **KPM (conocimiento de las prácticas en matemáticas)**: incluye cómo se genera, valida y comunica el conocimiento matemático, como la demostración, argumentación, y el uso del lenguaje formal. Autores como Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro (2024) y Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2020) han profundizado específicamente en este subdominio, con la intención de dotarlo de categorías específicas.

En el dominio PCK se identifican:

- **KFLM (conocimiento del aprendizaje de las matemáticas)**: considera cómo aprenden los estudiantes, sus dificultades, fortalezas y motivaciones.
- **KMLS (conocimiento de los estándares de aprendizaje)**: se refiere a las expectativas y progresiones del aprendizaje matemático en distintos niveles.

- **KMT (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas)**: abarca teorías, recursos y el diseño de tareas y ejemplos. Dentro de este subdominio, los ejemplos son fundamentales para enseñar conceptos, procedimientos y generalizaciones, como ocurre con la función cuadrática.

Estos subdominios permiten describir el conocimiento del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018), destacando que este conocimiento es integrado, y que la división en dominios es analítica (Sánchez-Acevedo, 2025). Todos ellos se evidencian en la enseñanza, especialmente en el uso de ejemplos (Sánchez-Acevedo et al., 2024; Cayo et al 2023).

Teoría de la variación y secuencias de ejemplos

La selección y organización de ejemplos en clases de matemáticas permite orientar intencionadamente la enseñanza e incidir en el aprendizaje (Al-Murani et al., 2019; Sánchez-Acevedo et al., 2025). Esta planificación consciente ayuda a identificar aspectos críticos del concepto que se busca enseñar. Según Bills et al. (2006), es recomendable utilizar secuencias combinadas de ejemplos para enfocar la atención en lo esencial, aunque su diseño debe responder a propósitos específicos. Algunas secuencias promueven procedimientos y rutinas, mientras otras buscan generalizaciones, lo que implica diferencias estructurales.

Las secuencias de ejemplos permiten a los estudiantes avanzar desde conocimientos previos hacia nuevas ideas (Figueiredo et al., 2012), mediante trayectorias en las que varían problemas y métodos en torno a un concepto central (Kullberg y Skodras, 2018). La teoría de la variación (Marton, 2015) plantea que el aprendizaje ocurre cuando los estudiantes logran discernir lo que cambia respecto de lo que permanece invariante. Este discernimiento permite distinguir dimensiones del objeto de aprendizaje (Marton y Pang, 2006), entendidas como habilidades o comprensiones a lograr (Kullberg y Skodras, 2018).

La transparencia y la variación son dos elementos clave en la selección y uso de ejemplos. La transparencia implica que el ejemplo represente de forma clara la idea o estructura que se busca mostrar. Según Zaslavsky (2008), un ejemplo transparente resalta las características necesarias que lo constituyen como tal, fomentando la generalización. La variación, por su parte, destaca que si un aspecto de un fenómeno varía mientras otro se mantiene invariante, el cambio se hace perceptible; la parte que varía constituye una dimensión de variación (Marton y Booth, 1997).

Los ejemplos se analizan en términos de aspectos críticos y no críticos para el aprendizaje (Guo y Pang, 2011), ya sean superficiales o estructurales. Por ejemplo, si un estudiante considera que la parábola de una función cuadrática solo puede ser cóncava, entonces la orientación y el signo del coeficiente «a» se vuelven aspectos críticos para comprender la concavidad o convexidad.

Para aprender es necesario hacer variar ciertos elementos, mientras que otros se mantienen fijos (Marton y Pang, 2006). Si todos cambian a la vez, no se pueden percibir diferencias. Así, el docente debe discernir qué varía y qué permanece. Si en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ el foco está en la concavidad, el coeficiente «a» será la dimensión variante, mientras que «b = 0» y «c = 0» actuarán como invariantes (Kullberg y Runesson, 2015; Guo y Pang, 2011).

Desde esta perspectiva, los ejemplos pueden diseñarse en términos de patrones de variación e invariancia (Watson y Mason, 2006), prestando atención a lo que cambia y lo que permanece. Marton et al. (2004) plantean cuatro patrones –contraste, generalización, separación y fusión¹– que permiten

1. El contraste permite reconocer una idea al compararla con lo que no es, es decir, se define dentro de una dimensión de variación que da significado (por ejemplo, cantidad, tamaño, color), la generalización implica reconocer un concepto a través de múltiples ejemplos que comparten su esencia, es decir, abstraer la idea

a los estudiantes percibir, diferenciar, abstraer e integrar aspectos críticos del objeto de aprendizaje. Construir estas tareas no es trivial: «construir tareas o ejemplos que utilicen la variación y el cambio [...] es una actividad de diseño donde la reflexión sobre la respuesta del alumno conduce a un mayor refinamiento» (Watson y Mason, 2006, p. 100). Ejemplos aislados pueden no favorecer el aprendizaje; en cambio, las secuencias permiten observar relaciones y generalizaciones. El docente debe ayudar al estudiante a aprender no solo desde un ejemplo, sino desde el contraste entre varios que muestren variación sistemática (Guo y Pang, 2011).

Mason y Watson (2005), basados en Marton (2009) y Marton y Booth (1997), introdujeron dos conceptos clave: la dimensión de variación posible (DVP) y el rango de cambio permitido (RCP). La DVP se refiere a los aspectos que pueden variar sin perder el sentido del objeto de aprendizaje, mientras que el RCP define cuánto puede variar ese aspecto para seguir siendo ejemplificador. Por ejemplo, en una secuencia sobre funciones cuadráticas, los coeficientes «a», «b» y «c» pueden ser dimensiones de variación. Si se busca centrar la atención en uno de ellos, los otros se fijan. El rango permitido de variación para «b» y «c» serían los reales, y para «a», todos los reales distintos de cero ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), como se muestra la tabla 1.

Tabla 1.
Secuencia de ejemplos

$f(x) = 3x^2 - 5x - 3$	$h(x) = 3x^2 - 5x + 1$	$q(x) = 3x^2 - 5x + 7$
------------------------	------------------------	------------------------

METODOLOGÍA

Con la intención de responder a la pregunta de investigación, adoptamos un enfoque cualitativo, desde un paradigma interpretativo, buscando comprender y describir fenómenos específicos sin la finalidad de establecer generalizaciones. Para el estudio, consideramos un caso instrumental (Stake, 2007), el cual no tiene por objetivo comprender y profundizar en el caso mismo, sino que el caso se considera para obtener información sobre un fenómeno de estudio. En esta investigación, el caso instrumental permite profundizar en la comprensión del conocimiento matemático (MK) y didáctico del contenido (PCK) manifestado por una profesora de matemáticas cuando usa ejemplos en la enseñanza de la función cuadrática, considerando la variación.

Contexto y sujeto de la investigación

La investigación se centró en un curso de 3.º de secundaria (16 a 17 años) en una escuela particular subvencionada de Chile, con orientación científico-humanista. En este contexto, se enseñaban ecuaciones y funciones cuadráticas en el curso de matemáticas generales, espacio donde se analizó la actuación de la profesora.

La docente, bajo el seudónimo Jenny, posee cinco años de experiencia en enseñanza secundaria, en matemáticas y física, y anteriormente fue ayudante en cursos universitarios. Es licenciada en Ciencias de la Ingeniería y, motivada por su vocación docente, ingresó en el programa Enseña Chile (<https://>

crítica de los rasgos contextuales o comunes, la separación permite aislar un aspecto relevante manteniendo constantes los demás y es clave para distinguir dimensiones críticas, y la fusión integra simultáneamente aspectos previamente separados, generando comprensión profunda.

ensenachile.cl/), que prepara profesionales no pedagogos para trabajar en escuelas. Luego cursó un programa de formación pedagógica y obtuvo el título de profesora de Matemáticas de enseñanza media.

Para su elección se tuvo en cuenta la accesibilidad (Loughran et al., 2008) y la conveniencia (Creswell, 2014), destacando su formación inicial en física y su experiencia docente enseñando matemáticas y física a niveles escolar y universitario (ayudantías). Dichos criterios hicieron que fuera un caso idóneo para indagar en su conocimiento didáctico sobre la función cuadrática. Las secuencias de ejemplos que ella usó fueron elaboradas y escogidas por Jenny, tomando en cuenta los objetivos de aprendizaje del curso, los programas de estudio y el libro de texto escolar, en línea con el currículo nacional. Jenny no conocía nada sobre la teoría de la variación, por lo que el diseño, la elección y el uso de ejemplos fue una apropiación de la profesora, desde su propia formación y comprensión disciplinar.

Recolección y análisis de los datos

Los datos se recolectaron mediante observación no participante (Cohen et al., 2005), utilizando videograbaciones de clases donde se abordaron tópicos de la función cuadrática. Se analizaron aquellas sesiones en que Jenny utilizó secuencias de ejemplos, lo que permitió identificar aspectos críticos del objeto de aprendizaje y relacionarlos con su conocimiento especializado. Las grabaciones fueron complementadas con entrevistas semiestructuradas (Kavale, 2011) para confirmar indicios de conocimiento.

Tanto videograbaciones como entrevistas fueron transcritas y organizadas en episodios de análisis (Schoenfeld, 2000), definidos por cada secuencia de ejemplos empleada para enseñar un concepto. Por ejemplo, el lapso entre el primer y último ejemplo sobre concavidad/convexidad constituye un episodio. A partir de estas secuencias, se identificaron acciones que evidencian subdominios del conocimiento matemático (MK) o del conocimiento didáctico del contenido (PCK), tomándolos como unidades específicas de análisis, tanto en clase como en las entrevistas.

El análisis de contenido (López, 2002) permitió interpretar los datos diferenciando entre indicios y evidencias. Según Escudero-Ávila et al. (2015), una evidencia confirma que el profesor posee un conocimiento; el indicio, en cambio, es una posible señal aún no comprobada. Las evidencias fueron determinadas por triangulación de datos. Se consideró como relación de conocimiento cuando un subdominio sustentaba o activaba a otro dentro del modelo MTSK (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020).

Se siguieron las fases de descripción, análisis e interpretación propuestas por Johnson et al. (2014) para caracterizar el conocimiento especializado de Jenny en torno a la variación y el uso de ejemplos. La validación se realizó mediante triangulación por consenso entre expertos (Stake, 2007). Así, una vez detectada una unidad de información específica por los miembros del equipo, se extraía de la transcripción y se describía con detalle procurando mantener su contextualización. Cada miembro analizaba los conocimientos puestos en juego a través de la aplicación del modelo MTSK y aportaba su interpretación de los significados de las relaciones entre esos conocimientos; el consenso entre los miembros del equipo llevaba a una interpretación compartida.

RESULTADOS

Se presentan cuatro secuencias de ejemplos donde Jenny focaliza la atención de los estudiantes sobre aspectos críticos de la función cuadrática. Las dos primeras ponen el foco en la concavidad/convexidad de la gráfica de las funciones cuadráticas; la tercera se centra en la dilatación/contracción de la representación gráfica de la función cuadrática; y la cuarta, en la traslación vertical de la gráfica de la función cuadrática.

Sobre la primera secuencia

Los siguientes dos ejemplos promueven el concepto de concavidad/convexidad de funciones cuadráticas completas.

En la primera secuencia, Jenny muestra dos ejemplos de funciones cuadráticas completas, expresadas en forma estándar, para ejemplificar el concepto de concavidad/convexidad. Para ilustrar este aspecto de la función cuadrática, se apoya en el recurso tecnológico Wolfram Alpha, que le permite mejorar la visualización (figura 2). Los dos ejemplos que usa Jenny son:

- a) $f(x) = x^2 - 11x + 28$
 b) $f(x) = -x^2 - 11x + 28$

De la secuencia de ejemplos se desprende que el aspecto crítico es la concavidad/convexidad de la función cuadrática, mientras que los coeficientes $b = -11$ y $c = 28$ son fijos, que son los aspectos invariantes. Al presentar las funciones cuadráticas, Jenny establece el siguiente diálogo con los estudiantes:

Profesora: *A priori*, ¿qué parábola va a ser?

Estudiante: Feliz, porque es positivo.

Profesora: Feliz cierto, *a priori*. Además, esta parábola no está con el centro en el origen, por qué no es con esto cero [se refiere al coeficiente b y c]. Entonces veamos cómo es; a es uno, el b es menos once, y el c es veintiocho. El grafico más o menos sería eso [refiriéndose al gráfico convexo]. Hagamos otra.

Estudiante: ¿Ahora sería para el otro lado?

Profesora: Ahora coloquémosle menos [anota en la pizarra $f(x) = -x^2 - 11x + 28$ [anota los valores en el programa]. Inmediatamente me queda hacia el otro lado ¿sí?

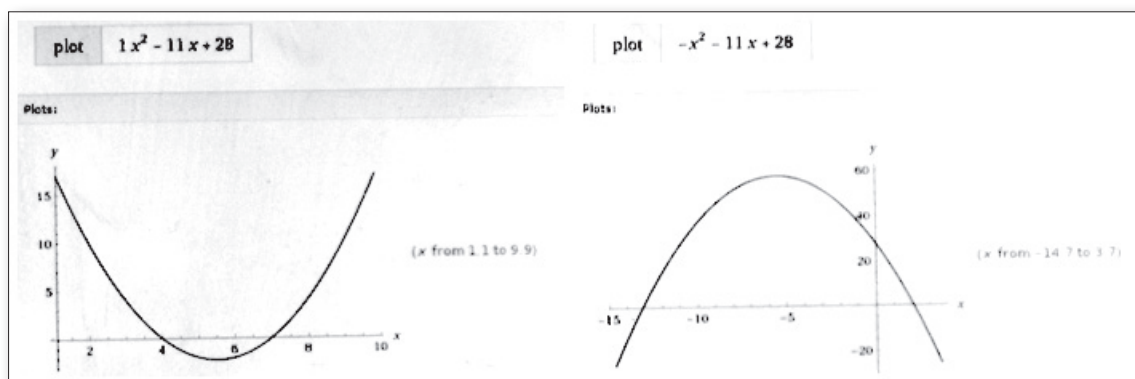


Fig. 2. Representaciones gráficas del concepto de concavidad/convexidad de la función cuadrática

Del fragmento se evidencia que Jenny conoce procedimientos (KoT – **procedimientos**) simples de evaluación de funciones cuadráticas, en particular para los valores de -1 y 1 del coeficiente. Este procedimiento se sustenta en el conocimiento de Jenny sobre las **propiedades** (KoT) de convexidad/concavidad de la función cuadrática asociada al signo del coeficiente a .

A partir de la selección de estos ejemplos preguntamos:

Investigador: ¿Por qué te apoyas en Wolfram Alpha con los estudiantes?

Jenny: Los estudiantes pueden visualizar no solo desde una pizarra y la profesora explicando, sino que también comprobado con estas plataformas que grafican y representan las funciones, y puedes observar incluso algunas simulaciones como modelos y algunos de los coeficientes que

para los estudiantes hace sentido visualizarlo también en una plataforma de internet. Les da seguridad de que se está haciendo como lo correcto, dado que algunos muestran inseguridad en sus procedimientos.

Investigador: El uso de los ejemplos secuenciados que muestras ¿con qué intención lo haces?

Jenny: Estos dos ejemplos no los elegí al azar, son dos ejemplos de funciones estándares, donde solo apunté al signo del coeficiente a . Lo único que cambia el signo del coeficiente « a » dejando fijo tanto el coeficiente « b » como el « c ». Entonces, así, los estudiantes ven o pretendo que por lo menos visualicen que la concavidad/convexidad de la función, y que depende del signo del coeficiente « a ».

A partir de las respuestas entregadas por Jenny, se evidencia que conoce el registro gráfico (**KoT – registros de representación**) para mostrar las características de las funciones cuadráticas. Este subdominio de conocimiento sustenta su conocimiento sobre **recursos virtuales (KMT)** para la enseñanza de funciones cuadráticas, pues su uso está justificado en dos motivos. El primero es que Wolfram Alpha facilita la visualización directa de la concavidad/convexidad de la gráfica de la función, evitando errores durante el procedimiento de representarla. El segundo es que el *software* dinámico permite modelar la gráfica de la función, haciendo variar los valores de los coeficientes de acuerdo con lo que quiere mostrar a los estudiantes. Además, en este caso, el subdominio **KMT** se relaciona con el conocimiento que tiene la profesora sobre el interés que puede emerger en los estudiantes cuando, además de realizar desarrollos procedimentales para representar una función (**intereses y expectativas –KFLM**), estos se complementan con el uso de recurso virtuales.

A partir del aspecto crítico que Jenny explicita en el uso de los ejemplos (**KMT – ejemplos**), identificamos que la dimensión de variación es el signo del coeficiente « a », mostrándose como invariantes los valores de los coeficientes « b » y « c ». Así, el rango de variación permitido para la dimensión de variación son los signos $+$ y $-$ (considerando que $a \neq 0$).

La forma de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con coeficiente $a = 1$ muestra el trasfondo de la variación de los ejemplos mostrados. La invariancia está en los coeficientes « b » y « c » de los dos ejemplos, introduciéndose la variación en cómo Jenny combina los signos positivo y negativo en el coeficiente « a » (**KoT-procedimientos**). Cualquier cambio en las dimensiones de variación sobre los coeficientes « b » y « c » conduciría al aprendizaje de los estudiantes sobre las condiciones de separación (que sería el efecto del coeficiente a manteniéndose constantes b y c , centrándose solamente en la concavidad/convexidad de la función) y generalización (cuando se generaliza para cualquier función cuadrática con diferentes valores reales del coeficiente a) y sobre el intercepto de la parábola y la traslación.

La secuencia de ejemplos de funciones cuadráticas completas estándares que propone Jenny (**KMT-ejemplos**) permite que aflore el aspecto crítico de la función de la convexidad/concavidad, explicitando la dimensión de variación en el coeficiente « a », con rango de variación permitido que son los signos $+$ y $-$ que dan cuenta de la orientación convexa y cóncava de la parábola, como una representación de las funciones cuadráticas. A partir de estos ejemplos, emergen algunas relaciones de conocimiento (figura 3). Así, el conocimiento sobre las **propiedades (KoT)** de esta característica (convexidad/concavidad) se relaciona con los procedimientos (KoT) que utiliza para evaluar las funciones cuadráticas. Estos conocimientos sobre el KoT, junto con el conocimiento del **registro gráfico (KoT)**, sustentan la utilización de los **recursos virtuales (KMT)** de manera específica, facilitando la visualización gráfica de la función cuadrática para los estudiantes, lo que se relaciona con el conocimiento sobre los **aspectos emocionales de los estudiantes (KFLM)**.

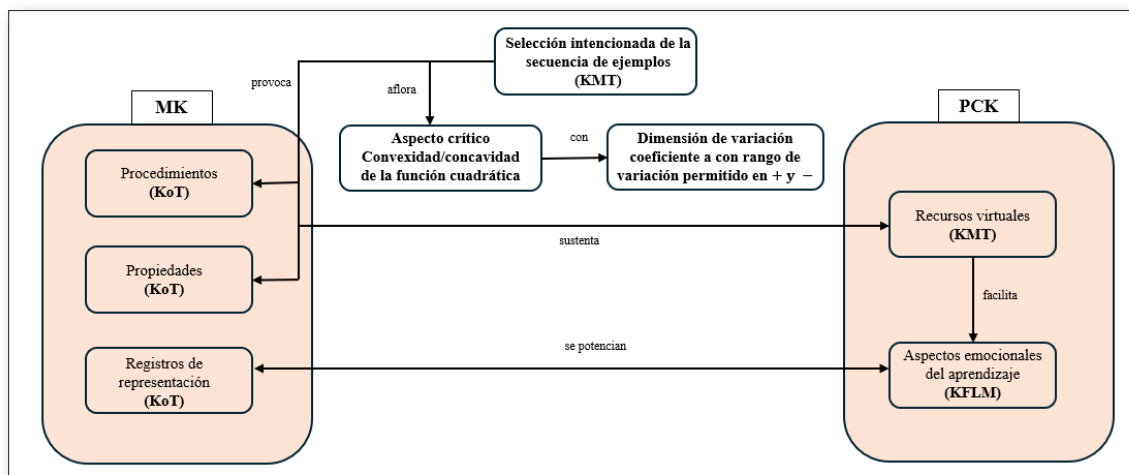


Fig. 3. Relaciones de conocimiento entre subdominios a partir de la primera secuencia de ejemplos.

Sobre la segunda secuencia

Los siguientes dos ejemplos se promueven el concepto de concavidad/convexidad de funciones cuadráticas incompletas

La secuencia de estos dos ejemplos es una extensión de los anteriores. Aquí, la intención de Jenny es que los estudiantes centren la atención en la concavidad/convexidad de la función cuadrática, pero de funciones cuadráticas incompletas.

- a) $f(x) = -x^2 + 2$
- b) $f(x) = x^2 + 2$

En este sentido, identificamos que, de acuerdo con la secuencia, el aspecto crítico es la orientación de la parábola (concavidad/convexidad), aflorando como la dimensión de variación el signo del coeficiente «a» y siendo los invariantes los coeficientes $c = 2$ y $b = 0$

Al mostrar estos dos ejemplos, Jenny explica:

Profesora: De las funciones $f(x) = -x^2 + 2$ y $f(x) = x^2 + 2$ vemos que el coeficiente $c = 2$, que está fijo, pero vemos que hay un cambio en el coeficiente a , específicamente en el signo. Noten que, si el signo del coeficiente a es positivo, la función está hacia arriba, y cuando es negativo, va hacia abajo. A esto se le llama convexidad y concavidad de la función cuadrática. Veamos cómo se representa ... [muestra una representación en pizarra]

Del fragmento, evidenciamos que Jenny conoce las características de la función cuadrática (KoT-procedimientos) relacionadas con la concavidad/convexidad de su gráfica. Este conocimiento influye en la elección de mostrar gráficamente la característica del aspecto crítico donde centra la atención, mostrando evidencias de registros de representación (KoT). Sobre estos ejemplos, en la entrevista, preguntamos:

Investigador: ¿Cuál era el objetivo de estos dos ejemplos?, ¿qué es lo que pretende mostrar?

Profesora: Bueno, en los dos ejemplos anteriores, me centré en la dilatación/contracción de la función. Ahora quería que vieran que las ramas de la función dependen del signo, así no varíó todos los coeficientes, pues les puede costar. De hecho, por eso deje el c fijo, para después variarlo cuando muestre la traslación con el eje y .

La respuesta de Jenny nos da evidencia sobre **estrategias de enseñanza (KMT)**, dado que la selección de los dos **ejemplos (KMT-ejemplos)** está secuenciada para que los estudiantes centren la atención en el aspecto crítico de la convexidad/concavidad de la función, mostrando que esta depende de los signos que toma el coeficiente a de la función (**KoT-procedimientos**). La estrategia que considera Jenny se sustenta en que conoce las **dificultades (KFLM)** que pueden tener los estudiantes si se focaliza la atención en los movimientos de la función cuadrática, haciendo variar todos los coeficientes.

En la selección de esta secuencia de ejemplos, como en el caso anterior, aflora un aspecto crítico de la función (concavidad/convexidad), siendo la dimensión de variación el signo del coeficiente « a » de la función cuadrática con rango de variación permitido los signos $+$ y $-$ de variación. La dimensión invariante es el coeficiente « $c = 2$ », dado que la función es incompleta con $b = 0$. A partir de esta intencionalidad, vemos una relación de conocimiento entre los **procedimientos (KoT)** y la **representación de la función cuadrática (KoT)**. Estos conocimientos sustentan sus **estrategias de enseñanza (KMT)**, como relaciones, a partir de la secuencia de ejemplos, considerando las **dificultades de los estudiantes (KFLM)** (figura 4).

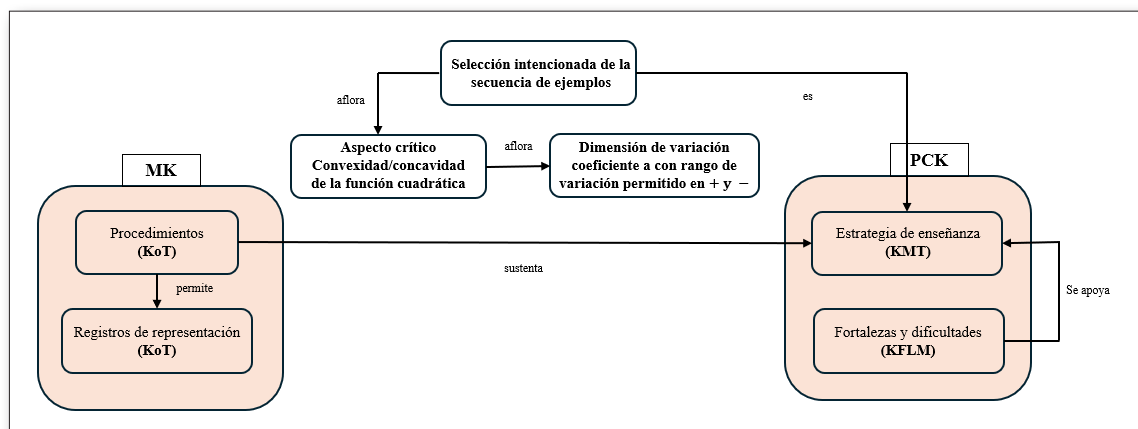


Fig. 4. Relaciones de conocimiento entre subdominios a partir de la segunda secuencia de ejemplos

Sobre la tercera secuencia

Los siguientes tres ejemplos promueven el concepto de dilatación/contracción de la función cuadrática, los que conforman una secuencia de funciones cuadráticas incompletas, centradas en el origen $b = c = 0$.

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = 2x^2$
- $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

De la secuencia de ejemplos, Jenny hace variar la magnitud del coeficiente a , y el aspecto crítico es la dilatación/contracción de la gráfica (parábola) de la función cuadrática, donde el valor y la magnitud del coeficiente « a » afloran como la dimensión de variación, y la invariancia se centra en los coeficientes $b = c = 0$. El rango de variación permitido son los valores reales (distintos de cero) que toma la dimensión de variación. Con ello, identificamos que un indicio de conocimiento podría ser la estrategia de enseñanza en la selección deliberada de estos ejemplos para que los estudiantes centren la atención en el aspecto crítico relacionado con la dimensión de variación del coeficiente « a ».

Sobre esta secuencia de ejemplos, en la entrevista le preguntamos:

Investigador: ¿Por qué plantea estos ejemplos a los estudiantes y en ese orden? ¿qué es lo que pretende mostrar?

Profesora: Porque la abertura/contracción es un tema que se debe ver de la función cuadrática en este nivel, y con estos ejemplos sólo me centro en este elemento con el coeficiente «a» y los estudiantes sólo vean como se abre y cierra la función con la parábola. El orden es para que partan de la función base, luego vean como con 2 se cierra y con $\frac{1}{2}$ se abre.

La respuesta de Jenny nos da evidencia de que conoce las **expectativas de aprendizaje (KMLS)**, pues menciona que este tema debe ser visto en este nivel escolar. Esto se sustenta en su conocimiento sobre la contracción/dilatación de la gráfica según los diferentes valores que toma el coeficiente «a» de la función cuadrática (**KoT - procedimientos**). A partir del contenido de enseñanza, Jenny sabe que una **estrategia de enseñanza (KMT)** es seleccionar los ejemplos deliberadamente, partiendo de la función $f(x) = x^2$, centrada en el origen, y luego seguir con las otras para compararlas con la inicial. La selección de estos ejemplos es utilizada por Jenny para eliminar la atención de los estudiantes de los coeficientes «b» y «c» y poner el foco en el valor del coeficiente «a». Así, el hecho de centrar la atención de los estudiantes solo en la visualización del aspecto crítico, variando el coeficiente «a» ($a = 1$, $a = 2$ y $a = \frac{1}{2}$), evidencia el conocimiento de que esto puede favorecer la comprensión de los estudiantes (**KFLM-intereses y expectativas**). Por lo tanto, la selección intencionada de esta secuencia de ejemplos, a partir de las dimensiones de variancia e invariancia, hace aflorar de manera clara el aspecto crítico de la dilatación/contracción de la gráfica de la función cuadrática. En este proceso observamos que el KMLS se fundamenta en el KoT. Este conocimiento del contenido también permite que Jenny adopte **estrategias de enseñanza (KMT)** en la selección de ejemplos intencionadamente, que a su vez se relacionan con conocimiento de la **comprensión de expectativas de aprendizaje de los estudiantes (KFLM)** (figura 5).

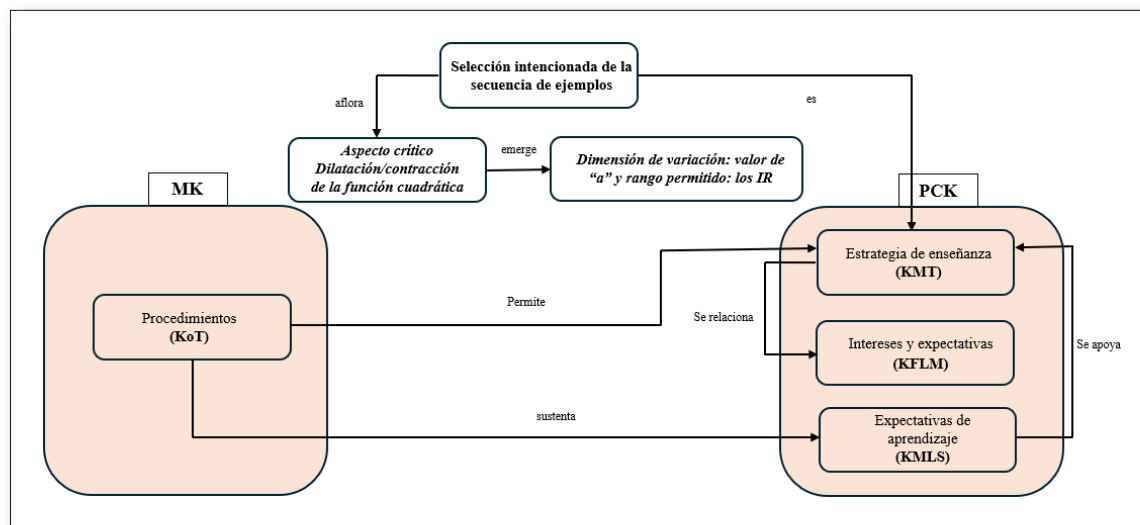


Fig. 5. Relaciones de conocimiento entre subdominios a partir de la tercera secuencia de ejemplos

Sobre la cuarta secuencia

Los siguientes dos ejemplos promueven el concepto de traslación vertical de la gráfica de la función cuadrática.

La secuencia de estos dos ejemplos ilustra la traslación de la función cuadrática con respecto al eje de las ordenadas. Aquí, el objetivo de Jenny es que los estudiantes centren la atención en el desplazamiento de la representación gráfica de la función, solo considerando el eje vertical.

- a) $f(x) = x^2$
- b) $f(x) = x^2 + 2$

El primer ejemplo de la secuencia es la función $f(x) = x^2$, que está centrada en el origen $O(0,0)$ del plano cartesiano y tiene coeficiente $a = 1$ y $c = 0$. Jenny se centra intencionadamente en este aspecto para que los estudiantes, posteriormente, visualicen solo el desplazamiento en el eje de las ordenadas.

Al respecto, se le preguntó a Jenny lo siguiente:

Investigador: ¿Qué intención tiene que inicies con esa secuencia? ¿Por qué la estructuras así?

Profesora: Seleccioné varios ejemplos, no me servía sólo uno, pues al tomar más con diferentes patrones [refiriéndose al desplazamiento vertical de la función cuadrática que inicia centrada en $(0,0)$] podía ver varios tipos de desplazamiento, pero sobre el vertical, quería que los chiquillos vieran primero la parábola de la función en el origen, pues así sería fácil mover el «c» y que los estudiantes vieran su desplazamiento sólo en ese eje, que es lo que les mostré con la gráfica. Si movía otros coeficientes con valores sería más complicado para los estudiantes, y les cuesta a veces ver estas cosas, por eso prefiero mostrar las características puntuales y después englobo todo.

La respuesta de Jenny evidencia su conocimiento sobre las características (**KoT**—**procedimientos**) de la función cuadrática, en relación con los movimientos en el plano cartesiano de la función, que en este caso es la traslación en el eje de las ordenadas. Este conocimiento está apoyado en el conocimiento de los **ejemplos** (**KMT**) para seleccionar una secuencia como **estrategia de enseñanza** (**KMT**) de la traslación, ya que han sido seleccionados para que los estudiantes centren la atención en esta única característica. La profesora manifiesta conocimiento de la **representación gráfica** (**KoT**), que utiliza como un apoyo para la visualización de las funciones, lo que le sirve como medio para abordar la comprensión de la traslación. La estrategia en la selección deliberada de los ejemplos, haciendo variar solo el coeficiente de $c = 0$ a $c = 2$, se fundamenta en su conocimiento sobre las **dificultades** (**KFLM**) de los estudiantes en la comprensión de los desplazamientos de la función cuadrática.

Después de que Jenny presente a los estudiantes el ejemplo de la función $f(x) = x^2$ y su representación asociada (figura 6), muestra el segundo ejemplo de la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2$, desplazada dos unidades verticalmente hacia arriba, con coeficiente $c = 2$, con la intención de que los estudiantes visualicen que el desplazamiento en el eje de las ordenadas de la parábola depende del valor que tome el término independiente «c» (figura 6).

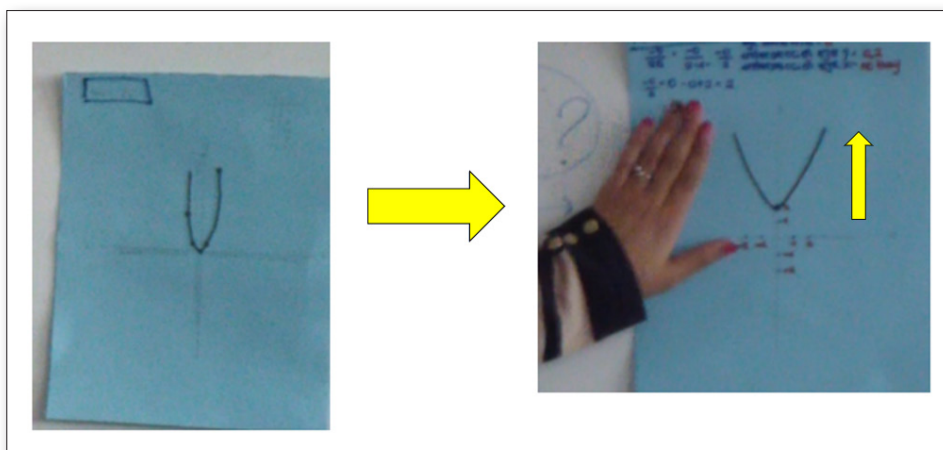


Fig. 6. Representación gráfica de las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^2 + 2$ y la traslación

A partir de las representaciones que muestra Jenny de ambas funciones para explicar a los estudiantes la traslación en el eje de las ordenadas, les pregunta: «¿Qué ocurre acá? ¿Qué tiene esta función de distinto con la primera que vimos?», buscando que ellos identifiquen la diferencia que hay entre la primera función de la secuencia $f(x) = x^2$. A partir de estos dos ejemplos, la intención radicaba en la función $f(x) = x^2 + 2$ y en que los estudiantes interpretaran los movimientos de la representación gráfica de la función cuadrática, considerando los cambios que experimenta la función $f(x) = x^2 + 2$ en comparación con la función original $f(x) = x^2$. Esto se aprecia en el siguiente fragmento:

Profesora: ¿Qué más ocurrió con esta parábola? [refiriéndose a la figura 6]. No interseca con el eje «x», y ¿qué pasa con la parábola? ¿Qué pasó, se movió a la derecha, a la izquierda, abajo?

Estudiante: Subió, arriba.

Profesora: Subió, por lo tanto, ¿qué ocurre?, ¿qué podemos decir entonces? ¿Qué hay de diferencia entre la primera y la segunda?

Estudiante: Que esa no corta al eje «x».

Profesora: ¡Ya! Primera diferencia, al eje «x» no corta. ¿Qué más? Se movió hacia arriba. y ¿por qué se movió hacia arriba? ¿Qué es lo que varió?

Estudiante: Las coordenadas. El «c».

Profesora: El «c». ¿Cuánto vale el «c» en la primera?

Estudiante: Cero.

Profesora: Y ¿en la segunda?

Estudiante: Dos.

Profesora: Entonces, ¿qué logra hacer el «c»? ¿Qué cree usted que logra hacer el «c»?

Estudiante: Movimiento de la parábola en y.

Profesora: La parábola en el eje «y» [refiriéndose a la traslación de la función representada en la gráfica].

A partir de la secuencia de ejemplos y el diálogo de la profesora con los estudiantes, es posible visualizar que Jenny conoce que la **estrategia de enseñanza (KMT)** de preguntas y contrapreguntas (se refiere a preguntas tomadas de respuestas de los estudiantes para profundizar en la idea, en este caso, de traslación con el eje y) permite que los estudiantes identifiquen y comprendan que la traslación vertical de la función cuadrática se relaciona con el cambio de valores del coeficiente c. Asimismo, se observa

que, a partir de la primera función $f(x) = x^2$, Jenny conoce el comportamiento sobre la intersección con el eje de las abscisas de la función $f(x) = x^2 + 2$, que no interseca al eje x (con $c > 0$) (KoT – procedimientos), lo que es complementado a partir de su conocimiento sobre representaciones gráficas (KoT – registros de representación) para mostrar a los estudiantes el comportamiento de la función de manera visual.

A partir de la selección y el uso de determinados ejemplos para la enseñanza de las características de una función cuadrática (concavidad/convexidad, traslaciones, vértice, eje de simetría e intersecciones con los ejes), y con la intención de obtener evidencias complementarias de subdominios de conocimiento especializado, profundizamos en la entrevista sobre el papel de los ejemplos, su enseñanza y uso.

Investigador: ¿Qué papel cumplen las representaciones que utilizas en la enseñanza de las características de la función cuadrática y con los ejemplos que seleccionas?

Profesora: Las traslaciones en los movimientos de funciones con parábolas, necesitan varios ejemplos, si no se quedan solo con un tipo de traslación. Por lo tanto, el uso de representaciones aporta junto con los ejemplos usados en que los estudiantes comprendan, es decir, mostrar los movimientos de diferentes maneras, sirve para relacionar la forma algebraica con la representación gráfica, la que use considerando la función original.

La respuesta entregada por Jenny permite visualizar que conoce que, para enseñar las traslaciones de una función cuadrática, es necesario usar diferentes tipos de ejemplos y secuencias intencionadas (KMT–ejemplos) para que los estudiantes visualicen y comprendan aspectos específicos de las funciones cuadráticas. El uso de estos ejemplos se apoya en el conocimiento de registros de representación (KoT), específicamente del algebraico y el gráfico, para ilustrar los movimientos de la función en el plano cartesiano.

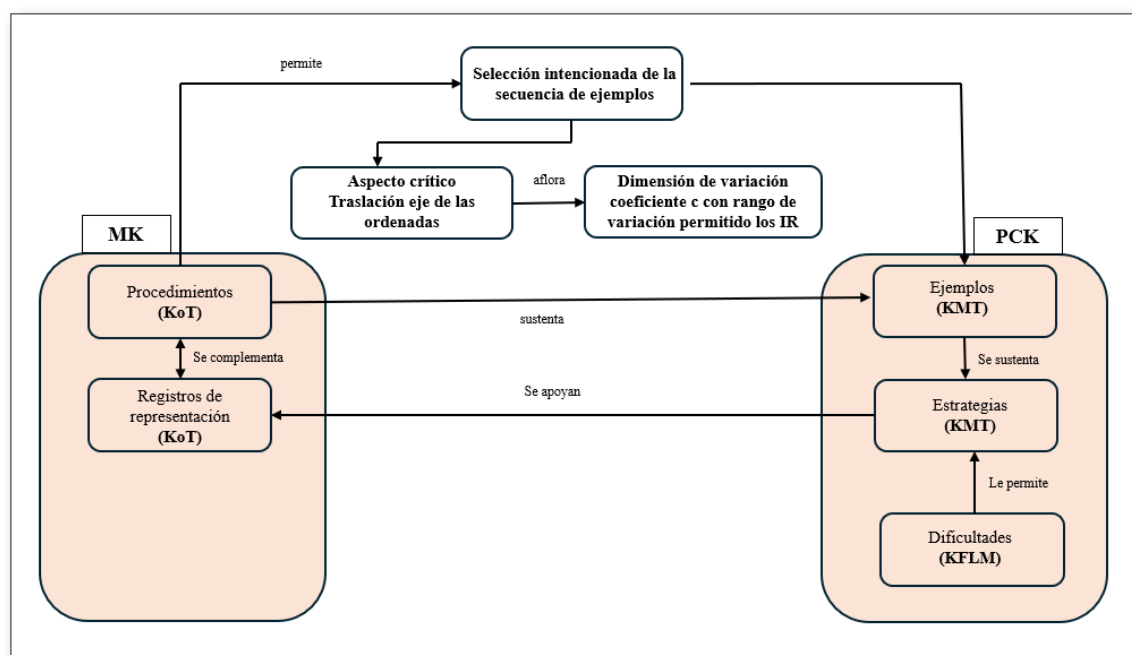


Fig. 8. Relaciones de conocimiento entre subdominios a partir de la cuarta secuencia de ejemplos

A partir de la figura 8, en la enseñanza de la traslación de la función cuadrática respecto del eje de ordenadas, se evidencia que la selección intencionada de los ejemplos en la secuencia, como **estrategia de enseñanza (KMT)**, hace emerger el aspecto crítico: la traslación en el eje y , manifestándose como dimensión de variación el coeficiente « c », y como dimensiones invariantes los coeficientes « $a = 1$ » y « $b = 0$ ». La secuencia de **ejemplos (KMT)** considerada por Jenny se apoya en su conocimiento sobre los procedimientos (KoT), específicamente en relación con la traslación de la función. Asimismo, se observa que tanto los **procedimientos (KoT)** como los **registros de representación (KoT)** se complementan, facilitando que los estudiantes comprendan el aspecto crítico asociado a la traslación. Con ello, Jenny establece la relación entre los valores del coeficiente « c » y el desplazamiento vertical de la función a través de su representación gráfica. Además, el conocimiento de la profesora sobre las **dificultades (KFLM)** que tienen los estudiantes al comprender la traslación de la función le permite seleccionar adecuadamente la secuencia de **ejemplos (KMT)** utilizada en la enseñanza.

DISCUSIÓN

Los resultados muestran que el conocimiento especializado de la profesora se manifiesta a través de la selección y uso de ejemplos, donde la variación cumple un papel articulador entre los subdominios del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico del contenido. Este hallazgo coincide con lo planteado por Marton (2015) y Kullberg y Runesson (2015), quienes destacan que la atención del profesor hacia los aspectos críticos de un objeto matemático determina las oportunidades de aprendizaje que ofrece a los estudiantes. En este caso, la función cuadrática se convierte en un contexto particularmente fértil para observar este proceso, dada la necesidad de coordinar diferentes representaciones y reconocer las invariantes del modelo, tal como señalan Karakoç y Alacacı (2015) y Pinkernell (2015).

Asimismo, se observa que el conocimiento de la profesora sobre los vínculos entre la forma algebraica y la representación gráfica le permitió generar oportunidades de variación que facilitaron la identificación de propiedades estructurales del objeto. El diseño de las lecciones con el énfasis en el razonamiento de los estudiantes está en línea con lo que plantea Sherin (2002) sobre las estructuras del conocimiento del profesor, caracterizadas por fuertes conexiones entre el MK y el PCK. Esto refuerza, además, cómo la profesora moviliza su conocimiento disciplinar al interpretar patrones y relaciones, dialogando con los desafíos descritos por López et al. (2016) y Díaz y Flores (2022), quienes evidencian que las dificultades en la enseñanza de la función cuadrática se asocian precisamente a la coordinación entre registros y al reconocimiento de los parámetros como invariantes.

Los resultados también sugieren que la gestión de la variación en las secuencias de ejemplos se apoya en un conocimiento que combina componentes del KMT y del KFLM, evidenciando la forma en que la profesora vincula su comprensión disciplinar con sus expectativas sobre el aprendizaje. Este resultado amplía lo reportado en estudios previos (Adler y Pournara, 2020; Cayo, 2023), al mostrar que la articulación entre el conocimiento matemático y el didáctico no solo se refleja en la elección de ejemplos, sino también en la intención de destacar la estructura del objeto de estudio. En este sentido, los hallazgos confirman que la variación puede entenderse como una herramienta conceptual que contribuye a hacer visible el conocimiento especializado del profesor en acción.

Finalmente, el estudio aporta evidencias sobre cómo un conocimiento disciplinar de base —en este caso, derivado de la formación en física— puede sostener decisiones didácticas relacionadas con la modelización y el uso de ejemplos, coherentes con lo planteado por Karakoç y Alacacı (2015) respecto del valor de los contextos de modelización para el aprendizaje de la función cuadrática. Así, se profundiza en la comprensión del papel que cumplen la variación y la invariancia en la enseñanza de este contenido, aportando al análisis del conocimiento especializado del profesor de matemáticas desde una perspectiva integrada entre la teoría de la variación y el modelo MTSK.

CONCLUSIONES

Este estudio aporta evidencia situada en educación secundaria sobre cómo la ejemplificación con variación hace emerger relaciones interdominio e intradominio del conocimiento especializado en la enseñanza de la función cuadrática, un ámbito poco explorado en la literatura (Adler y Pournara, 2020; Cayo, 2023). Además, avanza en la especificidad de la ejemplificación al mostrar que no basta con ejemplos aislados: la secuenciación deliberada orienta el discernimiento de dimensiones de variación pertinentes al objeto de aprendizaje (Sánchez-Acevedo et al., 2023).

Estos hallazgos refuerzan la utilidad pedagógica de combinar variación e invariancia para promover el razonamiento conceptual, aunque se reconoce como limitación el carácter de estudio de caso único y la ausencia de medición directa del aprendizaje, lo que impide generalizar los resultados. Futuras investigaciones deberían ampliar el análisis a múltiples casos, incorporar indicadores de aprendizaje y explorar la fase de planificación, incluyendo patrones de variación como contraste, separación, generalización y fusión. En el plano práctico, se recomienda formar a los docentes en el diseño de secuencias de ejemplos que integren variación e invariancia, promover el uso de representaciones y recursos tecnológicos para visualizar parámetros, anticipar dificultades mediante la integración del KFLM y utilizar herramientas como DVP y RCP para delimitar qué puede variar y cuánto sin perder el foco del objeto de aprendizaje. En conjunto, estos resultados confirman que la ejemplificación con variación es una estrategia que exige y evidencia conocimiento especializado, aportando criterios operativos para el diseño didáctico en la enseñanza de funciones cuadráticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adler, J., & Pournara, C. (2020). Exemplifying with variation and its development in mathematics teacher education. En D. Potari y O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Volume 1. Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching and teaching development* (pp. 329-353). Sense.
- Al-Murani, T., Kilhamn, C., Morgan, D., & Watson, A. (2019). Opportunities for learning: The use of variation to analyse examples of a paradigm shift in teaching primary mathematics in England. *Research in Mathematics Education*, 21(1), 6-24.
<https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1511460>
- Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(3), 14-46.
- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Björklund, C., Marton, F., & Kullberg, A. (2021). What is to be learnt? Critical aspects of elementary arithmetic skills. *Educational Studies in Mathematics*, 107(2), 261-284.
<https://doi.org/10.1007/s10649-021-10045-0>
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, C. M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Cayo, H. C. (2023). *El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas, cuando enseña sucesiones numéricas: relaciones entre subdominios en la selección y uso de ejemplos*. [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=325884>

- Chick, H. L., & Harris, K. (2007). Pedagogical content knowledge and the use of examples for teaching ratio. En *Proceedings of the 2007 annual conference of the Australian Association for Research in Education* (Fremantle, WA, 25-28 November, 2007). <http://www.aare.edu.au/07pap/chi07286.pdf>
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2005). *Research methods in education*. Routledge Falmer.
- Delgado-Rebolledo, R., & Espinoza-Vásquez, G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas? En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congresso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 288-295).
- Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 567-587. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0>
- Delgado-Rebolledo, R., & Zakaryan, D. (2022). The complex and integrated nature of a mathematics lecturer's specialized knowledge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(8), 1896-1913. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2102546>
- Díaz, A., & Flores, P. (2022). Understanding secondary students' difficulties with quadratic functions: A study on algebraic and graphical representations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(7), 1450-1471. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1883489>
- Espinoza-Vásquez, G., Henríquez-Rivas, C., Climent, N., & others. (2025). *Teaching Thales's theorem: Relations between suitable mathematical working spaces and specialised knowledge*. *Educational Studies in Mathematics*, 118, 271-293. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10367-9>
- Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M.C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., & Aguilar, A. (2015). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60-68). SGSE.
- Guo, J. P., & Pang, M. F. (2011). Learning a mathematical concept from comparing examples: The importance of variation and prior knowledge. *European Journal of Psychology of Education*, 26, 495-525. <https://doi.org/10.1007/s10212-011-0060-y>
- Johnson, H. L., Blume, G. W., Shimizu, J. K., Graysay, D., & Konnova, S. (2014). A teacher's conception of definition and use of examples when doing and teaching mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(4), 285-311. <https://doi.org/10.1080/10986065.2014.953018>
- Karakoç, G., & Alacacı, C. (2015). Real world connections in high school mathematics curriculum and teaching. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 6(1), 31-46. <https://doi.org/10.16949/turcomat.76099>
- Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned: Professional insights gained and shared by teachers of mathematics*. Göteborg, Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Kullberg, A., & Runesson Kempe, U. (2015). Examples with variation: Teachers' choice and use of mathematical examples. Presentado en la conferencia bienal de la European Association of Learning and Instruction, Limassol, Chipre, 25-29 de agosto.
- Kullberg, A., Runesson Kempe, U., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM Mathematics Education*, 49, 559-569. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0858-4>
- Kullberg, A., & Skodras, C. (2018). Systematic variation in examples in mathematics teaching. En C. Osbeck, Å. Ingerman, & S. Claesson (Eds.), *Didactic classroom studies – A potential research direction* (pp. 47-66). Nordic Academic Press. <https://doi.org/10.21525/kriterium.14.c>
- Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

- López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación*, 4, 167-179.
- López, J., Robles, I., & Martínez-Planell, R. (2016). Students' understanding of quadratic functions: Difficulties and instructional implications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(8), 1.163-1.180. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1175433>
- Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). Learning and awareness. Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *Journal of the Learning Sciences*, 15(2), 193-220. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1502_2
- Mårtensson, P., & Ekdahl, A. L. (2021). Variation theory and teaching experiences as tools to generate knowledge about teaching and learning mathematics: The case of pre-service teachers. *Nordisk Matematikdidaktikk, Nordic Studies in Mathematics Education*, 26(3-4), 91-112. <https://doi.org/10.7146/nomad.v26i3-4.149173>
- Pacheco-Muñoz, E., Juárez-Ruiz, E., & Flores-Medrano, E. (2023). Relaciones direccionales intra-dominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre localización en el plano. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, (24), 57-74. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4360>
- Pinkernell, G. (2015). Reasoning with dynamically linked multiple representations of functions. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 2.531-2.537). Charles University.
- Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.
- Quilici, J. L., & Mayer, R. E. (1996). Role of examples in how students learn to categorize statistics word problems. *Journal of Educational Psychology*, 88, 144-161. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.88.1.144>
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. Sage.
- Schoenfeld, A. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)00031-0](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00031-0)
- Sánchez-Acevedo, N. (2025). *Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas a partir de la selección y uso de ejemplos en la enseñanza de la ecuación y función cuadrática: Un estudio de caso*. [Tesis doctoral, Universitat de València]. Universitat de València, Facultat de Formació del Professorat. <https://hdl.handle.net/10550/114694>
- Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L., & Contreras, L. C. (2023). Posibles relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la ejemplificación. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 256-263). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Sánchez-Acevedo, N., Contreras-González, L. C., Segura, C., & Sosa-Guerrero, L. (2025). Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas al seleccionar y usar ejemplos en la factorización de expresiones algebraicas. *Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática*, 34(1), 128-148. <https://doi.org/10.48489/quadrante.38106>
- Snider, R. B. (2016). *How mathematical knowledge for teaching intersects with teaching practices: The knowledge and reasoning entailed in selecting examples and giving explanations in secondary mathematics*. [Tesis doctoral, Universidad de Michigan]. University of Michigan.
- Sherin, M. (2002). When teaching becomes learning. *Cognition and Instruction*, 20(2), 119-150. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI2002_1

- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-11. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Morata.
- Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(2), 91-111. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0802_1
- Wedge, T. (2010). Commentary on modalities of a local integration of theories in mathematics education. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education* (pp. 555-559). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_52
- Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., & Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: Caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 105-123. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260>
- Zaslavsky, O. (2019). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. *Journal of Mathematical Behavior*, 53, 245-255. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.001>
- Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 165-182. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9140-6>

Specialized Knowledge Evidenced Through the Use of Examples: Variation in the Teaching of the Quadratic Function

Nicolás Sánchez Acevedo

Facultad de Educación, Universidad Central de Chile,
Santiago, Chile

nicolas.sanchez@ucentral.cl

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-8790-2919>

Luis Carlos Contreras

Departamento de Didácticas integradas,
Facultad de Educación, Psicología y Ciencias del Deporte,
Universidad de Huelva, Huelva, España.

lcarlos@uhu.es

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0044-2365>

Carlos Segura Cordero

Departamento de Didáctica de la Matemática,
Universitat de València, Valencia, España

carlos.segura@uv.es

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1457-5740>

Leticia Sosa Guerrero

Unidad Académica de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Zacatecas,
Zacatecas, México

lsosa@uaz.edu.mx

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4905-6684>

This study examines the specialized knowledge enacted by a secondary mathematics teacher when selecting and using examples to teach the quadratic function, with particular attention to how the variation of critical aspects structures students' opportunities to learn. Drawing on the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model (MTSK; Carrillo et al., 2018) and Variation Theory (Marton & Booth, 1997), an interpretive case study was conducted with an 11th-grade teacher (whose students are aged 16–17) who designed and implemented four example sequences focused on concavity/convexity, vertical stretch/compression, and vertical translation of the quadratic function. Classroom video recordings and semi-structured interviews were analyzed through content analysis to identify evidence and relationships among subdomains of Mathematical Knowledge (MK) and Pedagogical Content Knowledge (PCK).

The results show that the teacher constructed deliberate example sequences in which one parameter varied while the others remained invariant, thereby making the critical aspects of the concept perceptible to students. Her understanding of algebraic properties, graphical representations, and parameter behavior (KoT) supported the design of example sequences (KMT) aimed at highlighting structural features of the quadratic function. Concurrently, her knowledge of students' difficulties and expectations (KFLM) informed decisions to restrict variation to a single coefficient, thereby focusing students' attention on specific features of the function.

Across the four example sequences, both inter-domain and intra-domain relationships emerged: the teacher coordinated procedures, representations, and properties (MK) with teaching strategies that incorporated technological tools and sequenced questioning around examples (PCK). The findings indicate that variation operated as an articulating principle by allowing algebraic and graphical invariants to be connected in ways that guided students' discernment of mathematical structure. This approach to selecting and using examples not only made the teacher's specialized knowledge visible but also provided insight into how such knowledge unfolds when instruction is intentionally oriented toward conceptual discernment through patterns of variation and invariance.

The study contributes empirical evidence on how specialized knowledge is manifested through example-based instruction—an area scarcely explored in relation to the quadratic function. Although prior research has documented persistent difficulties in students' understanding of this mathematical object and has emphasized the value of variation for learning, a gap remains in understanding how teachers decide, organize, and justify example sequences that make critical aspects visible. In particular, little is known about how MTSK subdomains interact during the work of exemplification or how decisions about what varies and what remains invariant are grounded in teachers' pedagogical and disciplinary knowledge. Future research should investigate multiple cases, incorporate indicators of students' understanding, and further examine teachers' planning processes, particularly those integrating patterns of variation such as contrast, separation, generalization, and fusion. In practical terms, the study underscores the need to support teachers in designing example sequences that combine variation and invariance, make effective use of representations and technological tools to visualize parameter behavior, anticipate difficulties through KFLM, and delineate appropriate dimensions and ranges of variation. Overall, the findings suggest that example-based instruction with variation is not only a theoretically grounded pedagogical practice but also a powerful means for making mathematics teachers' specialized knowledge visible in action.

